Jyväskylän yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro Gradu -tutkielma

Separaatioaksioomat ja jatkuvien kuvausten laajentaminen

Kirjoittaja:
Joel Timonen

Ohjaaja:
Pekka Koskela

12. kesäkuuta 2023

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

Tiivistelmä

Tässä matematiikan Pro Gradu -tutkielmassa todistetaan McShanen ja Tietzen jatkolauseet sekä Urysonin lemma. Ensimmäinen tulos liittyy metrisiin avaruuksiin ja kaksi jälkimmäistä topologiaan.

McShanen jatkolause kertoo, että metrisen avaruuden osajoukossa määritelty tasaisesti jatkuva kuvaus voidaan laajentaa jatkuvaksi koko avaruuteen. Tämän lauseen yhteydessä oleellinen käsite on kuvauksen jatkuvuusmoduli, joka antaa kvantitatiivisen tavan käsitellä tasaista jatkuvuutta. Tietyin lisäedellytyksin McShanen jatkolause kertoo, että kuvaus voidaan laajentaa koko avaruuteen siten, että laajennuksella on sama jatkuvuusmoduli kuin alkuperäisellä kuvauksella. McShanen jatkolauseen todistuksessa tarvitaan joitain konveksianalyysin tuloksia. Niinpä tähänkin matematiikan osa-alueeseen tutustutaan, tosin hyvin pintapuolisesti.

Tietzen jatkolause puolestaan kertoo, että normaalin topologisen avaruuden suljetussa osajoukossa määritelty jatkuva kuvaus voidaan laajentaa jatkuvaksi koko avaruuteen. Tämän tuloksen todistamisessa avaruuden normaalius on oleellista, joten tässä tutkielmassa tutustutaan myös separaatioaksioomiin (joihin normaalius liittyy läheisesti). Urysonin lemma kertoo, että normaalissa avaruudessa kahden erillisen suljetun joukon välillä on olemassa jatkuva kuvaus, joka saa yhdessä joukossa arvon 0 ja toisessa arvon 1; toisin sanoen normaalin avaruuden erilliset suljetut osajoukot voidaan erotella toisistaan jatkuvan kuvauksen avulla. Urysonin lemmaa käytetään apuna Tietzen jatkolauseen todistamisessa.

Sisältö

1. Johdanto

Jos mielivaltaisella reaaliakselin välillä määritelty kuvaus f on jatkuva, niin voidaanko se "laajentaa" koko reaaliakselille niin, että laajennettu funktio on jatkuva? Laajentaminen tarkoittaa tässä yhteydessä kuvauksen lähtöjoukon laajentamista. Toisaalta laajennuksen voi myös mieltää koko reaaliakselilla määritellyksi kuvaukseksi g, jolle pätee $g(x) = f(x)$ kaikilla x, joilla f on määritelty.

Kun edellä esitettyä kysymystä miettii hetken, niin huomaa, että vastaus on selvästi *ei*. Vastaesimerkin keksiminen ei ole kovin vaikeaa: esimerkiksi kuvaus $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on määrittelyjoukossaan jatkuva, mutta sitä ei voi laajentaa jatkuvaksi koko reaaliakselilla. Ongelman syynä on piste $x = 0$, jossa kuvausta ei ole määritelty, mutta jota lähestyttäessä kuvauksen arvot kasvavat rajatta. Vastaavan "huonon" esimerkkifunktion voi muodostaa mille tahansa avoimelle tai puoliavoimelle välille.

Entä jos kyseessä oleva väli onkin suljettu? Tämäkään ei ole kovin vaikea kysymys (vastaus on myönteinen). Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus, niin laajennuksen g saa yksinkertaisesti: määritellään $g(x) = f(a)$ kaikilla $x < a$ ja $g(x) = f(b)$ kaikilla $x > b$. Sama periaate toimii, vaikka väli ei olisi rajoitettu toisesta päästään; tällöin kuvaus tarvitsee laajentaa vain rajoitetusta päästä.

Erityisesti suljetun ja rajoitetun välin tapauksessa kysymys herättää mielenkiintoisia jatkokysymyksiä. Koska reaaliakselin suljetulla ja rajoitetulla välillä määritelty jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva, niin voidaanko tasainen jatkuvuus säilyttää laajennuksessa? Toisaalta voidaan palata myös ensimmäisenä esitettyyn kysymykseen: avoimella välillä vastaesimerkki oli kuvaus, joka ei ole tasaisesti jatkuva. Entäpä jos alkuperäinen kuvaus onkin tasaisesti jatkuva; voidaanko se tällöin laajentaa koko avaruuteen tasaisesti jatkuvaksi, vaikka lähtöjoukko olisikin avoin väli?

McShanen jatkolause antaa vastauksen näihin kysymyksiin. Osoittautuu, että tasaisesti jakuvan kuvauksen voi laajentaa jatkuvaksi koko avaruuteen. Lisäksi myös tasaisen jatkuvuuden voi säilyttää – tietyin lisäedellytyksin. Lisäksi sillä ei ole merkitystä, onko alkuperäisen kuvauksen lähtöjoukko avoin tai suljettu.

McShanen jatkolauseen käyttäminen edellisiin kysymyksiin vastaamiseen on kuin ampuisi kärpästä oikein isolla tykillä. Tämä jatkolause ei nimittäin päde vain reaaliakselilla, eikä se päde edes vain n-ulotteisessa Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. McShanen jatkolause pätee peräti mielivaltaisessa metrisessä avaruudessa (X, d).

Kun McShanen jatkolause kerran mahdollistaa metrisissä avaruuksissa jopa tasaisen jatkuvuuden säilyttämisen, niin olisiko "tavallinen" jatkuvuus mahdollista säilyttää myös metristen avaruuksien yleistyksessä eli topologisissa avaruuksissa? Epävarmuutta luo se, että topologisissa avaruuksissa ei voida määritellä tasaista jatkuvuutta. Tällöin ensimmäiseen kysymykseen esitetty vastaesimerkki kertoo, että laajennettavan kuvauksen lähtöjoukko ei voi olla täysin mielivaltainen.

Laajentaminen osoittautuu mahdolliseksi myös topologisissa avaruuksissa. Tulos tunnetaan Tietzen jatkolauseena ja siihen kuuluu kaksi lisäehtoa, joiden on oltava voimassa. Kuvauksen f lähtöjoukon on oltava topologisen avaruuden (X, τ) suljettu osajoukko. Lisäksi avaruudessa (X, τ) on pystyttävä erottelemaan erillisiä suljettuja joukkoja toisistaan riittävän hyvin.

Tämä jälkimmäinen ehto seuraa niin kutsutuista separaatioaksioomista, joita esitellään myöhemmin. Tunnetuin separaatioaksiooma on peräisin Felix Hausdorffilta, yhdeltä topologian perustajista. Tämän aksiooman täyttäviä topologisia avaruuksia kutsutaan hänen mukaansa Hausdorffin avaruuksiksi.

Seuraavassa luvussa kerrotaan lyhyesti joidenkin tämän tutkielman aiheiden historiasta. Tästä historiakatsauksesta voi nähdä, että Tietzen jatkolause todistettiin ennen McShanen jatkolausetta, eli edellä tehty aiheisiin johdattelu tehtiin päinvastaisessa järjestyksessä kuin missä lauseet todistettiin kronologisesti.

Luvussa 3 käydään läpi metristen avaruuksien peruskäsitteet. Lisäksi määritellään kuvauksen jatkuvuus sekä joitakin vahvempia jatkuvuuden muotoja, kuten tasainen jatkuvuus.

Luvussa 4 todistetaan McShanen jatkolause, joka on jaettu kahteen osaan. Todistuksessa tarvitaan joitakin konveksianalyysin peruskäsitteitä ja näihin liittyviä tuloksia, jotka esitellään varsin perusteellisesti.

Luvussa 5 esitellään topologisten avaruuksien peruskäsitteet sekä separaatioaksioomat. Monet tämän luvun käsitteistä ovat analogisia metristen avaruuksien vastaavien käsitteiden kanssa.

Luvussa 6 todistetaan Urysonin lemma ja tätä apuna käyttäen todistetaan myös Tietzen jatkolause. Myös näitä varten tarvitaan muutama apukäsite ja -tulos.

Lopuksi luvussa 7 esitellään joitain separaatioaksioomiin liittyviä esimerkkejä. Tämän lyhyen luvun sisältö voisi olla jo luvun 5 lopussa. Nämä esimerkit eivät kuitenkaan liity Urysonin lemmaan tai Tietzen jatkolauseeseen, jotka ovat tämän tutkielman topologiaan liittyvät päätulokset. Tästä syystä nämä esimerkit erotettiin omaksi luvukseen.

2. Historiaa

Tässä luvussa kerrotaan lyhyesti joidenkin tutkielman aiheiden historiasta. Erityisesti mainitaan topologiset avaruudet sekä Tietzen ja McShanen jatkolauseet; separaatioaksioomien historia on sen verran hämärän peitossa, että siitä ei tässä yhteydessä sanota mitään (pientä mainintaa lukuunottamatta).

Felix Hausdorff (1868–1942, Saksa), yksi topologian perustajista, määritteli topologisen avaruuden kirjassaan *Grundzüge der Mengenlehre* (suom. Joukko-opin perusteet), joka julkaistiin 1914. Myöhemmin yksi tämän määritelmän ehdoista erotettiin omaksi käsitteekseen, separaatioaksioomaksi T_2. Tämän ehdon toteuttavia topologisia avaruuksia kutsutaan hänen mukaansa Hausdorffin avaruuksiksi.

Henri Lebesgue (1875–1941, Ranska) osoitti vuonna 1907 [**1**], että euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetussa osajoukossa määritelty jatkuva kuvaus voidaan laajentaa koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$ niin, että laajennus on jatkuva. Heinrich Tietze (1880–1964, Itävalta) osoitti vastaavan tuloksen mielivaltaiselle metriselle avaruudelle (X, d) vuonna 1915 [**7**]. Pavel Uryson (1898–1924, Ukraina/Neuvostoliitto) yleisti tämän tuloksen tietyn ehdon täyttäville (niin kutsutuille normaaleille) topologisille avaruuksille artikkelissaan, joka julkaistiin vasta hänen ennenaikaisen kuolemansa jälkeen, vuonna 1925 [**8**]. Tämä tulos tunnetaan yleisimmin nimellä Tietzen jatkolause; muitakin nimiä, kuten Urysonin-Brouwerin lemma tai Tietzen-Urysonin jatkolause, esiintyy (katso esimerkiksi [**12**]).

Tietzen jatkolauseen historia kuvastaa erästä tapaa, jolla matematiikka voi kehittyä: aiempia tuloksia yleistämällä. Myös toisenlainen tapa on mahdollinen: aiemmista tuloksista todistetaan vahvempia versioita (yleensä nämä vahvemmat tulokset vaativat myös vahvempia oletuksia). McShanen jatkolause on esimerkki tästä jälkimmäisestä tavasta.

Edward James McShane (1904–1989, Yhdysvallat) osoitti vuonna 1934 kirjoittamassaan artikkelissa [**2**], että metrisissä avaruuksissa myös joitain vahvempia jatkuvuuden muotoja voidaan säilyttää kuvausta laajennettaessa. Tämä pätee muun muassa Lipschitz-jatkuvuudelle sekä tasaiselle jatkuvuudelle – mutta jälkimmäiselle vain, jos alkuperäinen kuvaus täyttää myös joitain lisäehtoja.

3. Metriset avaruudet

Tässä luvussa määritellään metristen avaruuksien peruskäsitteet sekä joitakin jatkuvuuden muotoja. Jatkuvuus määritellään teknisistä syistä hieman tavallisesta poikkeavalla – mutta tavanomaisen määritelmän kanssa yhtäpitävällä – tavalla.

3.1. Peruskäsitteitä

Tässä alaluvussa käydään läpi joitakin metristen avaruuksien peruskäsitteitä. Näiden oletetaan olevan lukijalle tuttuja, joten tämä luku toimii lähinnä kertauksena ja myöhemmin käytettävien merkintöjen esittelynä.

Määritelmä 1 (Metriikka ja metrinen avaruus)**.** Olkoon X epätyhjä joukko. Kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty[$ on *metriikka* joukossa X, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$, (definiittisyys)
2. $d(x,y) = d(y,x)$, (symmetrisyys)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (kolmioepäyhtälö)

Paria (X,d) kutsutaan *metriseksi avaruudeksi.*

Merkinnällä d_E tarkoitetaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ Euklidista ("tavallista") metriikkaa: kun $x, y \in \mathbb{R}^n$, missä $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, niin

$$d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Määritelmä 2 (Avoin ja suljettu pallo)**.** Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r > 0$.

Joukko $B_d(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$ on x-keskinen, r-säteinen *avoin pallo.*

Joukko $\overline{B}_d(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ on x-keskinen, r-säteinen *suljettu pallo.*

Erityisesti avoimet pallot ovat hyvin tärkeitä metrisissä avaruuksissa. Niiden avulla voidaan määritellä sisäpisteet, joiden avulla voidaan määritellä avoimet joukot, joiden avulla määritellään suljetut joukot, ja niin edelleen.

Aloitetaan määrittelemällä sisäpisteen käsite. Samalla määritellään myös ulko- ja reunapisteet, perusteellisuuden vuoksi.

Määritelmä 3 (Sisä-, ulko- ja reunapiste)**.** Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ joukko.

Piste $x \in X$ on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B_d(x,r) \subset A$. Tällöin erityisesti $x \in A$.

Piste $x \in X$ on joukon A *ulkopiste*, jos x on joukon $A^{\mathrm{C}} = X \setminus A$ sisäpiste.

Piste $x \in X$ on joukon A *reunapiste*, jos x ei ole joukon A sisäpiste eikä ulkopiste.

Merkitään

$\text{int}(A) = \{x \in X : x \text{ on joukon A sisäpiste}\}$,
$\text{ext}(A) = \{x \in X : x \text{ on joukon A ulkopiste}\}$ ja
$\partial A = \{x \in X : x \text{ on joukon A reunapiste}\}$.

Joukon A sisäpisteiden kokoelmaa $\text{int}(A)$ kutsutaan joukon A *sisukseksi* ja joukon A reunapisteiden kokoelmaa ∂A kutsutaan joukon A *reunaksi.*

Määritelmistä nähdään helposti, että mikä tahansa joukko $A \subset X$ jakaa avaruuden X kolmeen keskenään pistevieraaseen osaan: joukon A sisukseen, joukon A reunaan ja joukon A ulkopisteisiin.

Nyt voidaan määritellä avoin ja suljettu joukko.

Määritelmä 4 (Avoin ja suljettu joukko)**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus.
Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokainen joukon U piste on sen sisäpiste.
Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos $F^{\mathrm{C}} = X \setminus F$ on avoin.

Määritellään vielä sulkeuman käsite.

Määritelmä 5 (Sulkeuma)**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$ joukko.
Joukon $A \subset X$ *sulkeuma* $\bar{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A.

Sulkeuman määritelmästä seuraa suoraan, että $A \subset X$ on suljettu jos ja vain jos $A = \bar{A}$.

3.2. Jatkuvuus metrisissä avaruuksissa

Tässä alaluvussa määritellään kuvauksen jatkuvuus ja joitakin vahvempia jatkuvuuden muotoja. Alaluvun tärkein käsite on jatkuvuusmoduli, joka antaa kvantitatiivisen tavan käsitellä jatkuvuutta.

Jatkuvuusmodulien yhteydessä tullaan käyttämään runsaasti supremumia (sekä tässä luvussa että myöhemmin McShanen jatkolauseiden yhteydessä). Kerrataan tämän määritelmä ja tärkeimmät ominaisuudet.

Määritelmä 6 (Supremum)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä joukko. Joukon A *supremum* on joukon A pienin yläraja ja sitä merkitään $\sup A$. Supremumilla on seuraavat ominaisuudet:

1. $\sup A \geq a$ kaikilla $a \in A$. (supremum on yläraja)
2. Jos b on joukon A yläraja, niin $\sup A \leq b$. (supremum on pienin yläraja)

Siirrytään sitten jatkuvuuden pariin. Tämä osuus aloitetaan luonnollisesti määrittelemällä kuvauksen jatkuvuus metrisissä avaruuksissa.

Määritelmä 7 (Jatkuvuus)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in X$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad d_X(x, x_0) \leq \delta.$$

Jos kuvaus f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$, niin sanotaan, että f on *jatkuva.*

Edellä annetussa jatkuvuuden määritelmässä käytetään epäyhtälömerkkiä $\leq$ sekä epsilonin että deltan kohdalla, kun yleensä jatkuvuuden määritelmässä on aidot epäyhtälöt. Näin tehdään, koska tämä helpottaa myöhemmin eteen tulevia todistuksia. Osoitetaan, että tämä määritelmä on yhtäpitävä tutumman määritelmän kanssa, jossa on aidot epäyhtälöt.

Propositio 8. *Jatkuvuuden määritelmässä aidot epäyhtälöt voidaan korvata yhtäsuuruuden sallivilla epäyhtälöillä, kuten edellisessä määritelmässä on tehty. Tällöin saadaan samat jatkuvat kuvaukset kuin silloin, kun yhtäsuuruuksia ei sallita.*

Todistus. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kuvaus, joka on jatkuva edellisen määritelmän mielessä.

Kiinnitetään $x_0 \in X$ ja $\varepsilon > 0$.

Koska kaikille epsiloneille löytyy delta, niin erityisesti sellainen löytyy epsilonille $\varepsilon_{1/2} := \frac{1}{2}\varepsilon$. Olkoon tätä vastaava delta $\delta_{1/2}$.

Nyt, kun $d_X(x, x_0) \leq \delta_{1/2}$, niin $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon_{1/2} < \varepsilon$. Tämä pätee edelleen, jos rajoitutaan vielä lähemmäs pistettä x_0.

Siis jos $d_X(x, x_0) < \delta_{1/2}$, niin $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Toisin sanoen kuvaus f on jatkuva tavallisessa mielessä.

Olkoon sitten f jatkuva tavallisessa mielessä, ja kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja $x_0 \in X$.

On siis olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $d_X(x, x_0) < \delta$, niin $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Jos kuvauksen f arvot ovat tarkastelualueella alle epsilonin päässä toisistaan, niin ne ovat tietysti myös *korkeintaan* epsilonin päässä toisistaan. Toisin sanoen, kun $d_X(x, x_0) < \delta$, niin $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$.

Tämä pätee edelleen, jos rajoitutaan vielä lähemmäs pistettä x_0. Siis, kun $d_X(x, x_0) \leq \frac{1}{2}\delta < \delta$, niin $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$.

Niinpä kuvaus f on jatkuva edellisen määritelmän mielessä ($\delta_{1/2} := \frac{1}{2}\delta$ on etsitty delta). $\square$

Huomautus 9. Jatkuvuus voitaisiin määritellä yhtäpitävästi myös pallojen avulla:

Kuvaus $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon).$$

Tämä jatkuvuuden muotoilu on hyvin lähellä sitä tapaa, jolla jatkuvuus määritellään topologissa avaruuksissa luvussa 5.

Metrisissä avaruuksissa voidaan määritellä myös vahvempia jatkuvuuden muotoja. Tutuin näistä lienee tasainen jatkuvuus.

Määritelmä 10 (Tasainen jatkuvuus)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on *tasaisesti jatkuva*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad x_1, x_2 \in X \text{ ja } d_X(x_1, x_2) \leq \delta.$$

Myös tässä määritelmässä sallitaan yhtäsuuruudet epsilonin ja deltan kanssa samasta syystä kuin jatkuvuuden määritelmässä edellä. Tämän määritelmän voi osoittaa olevan yhtäpitävä tutun määritelmän (jossa on aidot epäyhtälöt) kanssa. Tämän todistus on täysin vastaava kuin jatkuvuuden kohdalla, joten se sivuutetaan.

Tasainen jatkuvuus on merkittävällä tavalla vahvempi ominaisuus kuin "tavallinen" jatkuvuus. Kun jatkuvuudessa deltan valinta saa riippua siitä pisteestä, jossa jatkuvuutta tarkastellaan, tasaisessa jatkuvuudessa vain kahden tarkastelupisteen etäisyydellä on väliä. Siis itse pisteillä ei ole merkitystä, ainoastaan niiden etäisyydellä.

Kun epsilon kiinnitetään tasaisesti jatkuvalle kuvaukselle, niin löytyy delta, jota pienemmillä kahden pisteen etäisyyksillä kuvauksen arvot vaihtelevat alle epsilonin verran. Kääntäen, kun valitaan delta, niin tätä vastaava epsilon on yläraja kuvauksen arvojen vaihteluille.

Tämä herättää kysymyksen: miten tasaisesti jatkuvan kuvauksen epsilon ja delta riippuvat toisistaan? Voisiko tämän riippuvuuden esittää *kuvauksena*?

Vastaus jälkimmäiseen kysymykseen on *kyllä*. Tämä epsilonin ja deltan riippuvuuden kertova kuvaus on nimeltään jatkuvuusmoduli.

Määritelmä 11 (Jatkuvuusmoduli)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kuvaus. Kasvava kuvaus $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ on kuvauksen f *jatkuvuusmoduli*, jos

1. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega(d_X(x_1, x_2))$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$ ja
2. $\lim_{t \to 0} \omega(t) = \omega(0) = 0.$

Seuraava propositio liittää jatkuvuusmodulin käsitteen tasaiseen jatkuvuuteen. Tähän yhteyteen vihjattiinkin jo aiemmin.

Propositio 12. *Kuvauksella f on jatkuvuusmoduli jos ja vain jos f on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kuvaus.

Oletetaan, että kuvauksella f on jatkuvuusmoduli ω ja olkoon $\varepsilon > 0$.

Valitaan $\delta > 0$ siten, että $\omega(\delta) \leq \varepsilon$. Delta on mahdollista valita näin mille tahansa epsilonille, koska ω on jatkuva nollassa ja $\omega(0) = 0$.

Kun $d_X(x_1, x_2) \leq \delta$, niin jatkuvuusmodulin määritelmän ensimmäisen ehdon sekä deltan valinnan nojalla

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega(d_X(x_1, x_2)) \leq \omega(\delta) \leq \varepsilon,$$

missä toiseksi viimeinen epäyhtälö seuraa jatkuvuusmodulin kasvavuudesta. Täten kuvaus f on tasaisesti jatkuva.

Olkoon sitten f tasaisesti jatkuva.
Määritellään kuvaus $\omega_0 : [0, \infty[\to [0, \infty[$,

$$\omega_0(t) = \sup\{d_Y(f(a), f(b)) : a, b \in X \text{ ja } d_X(a, b) \leq t\}.$$

Osoitetaan, että ω_0 on kuvauksen f jatkuvuusmoduli. Kuvaus ω_0 on selvästi kasvava. Lisäksi supremumin määritelmän nojalla

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega_0(d_X(x_1, x_2)) \quad \text{kaikilla} \quad x_1, x_2 \in X.$$

Vielä tarvitsee osoittaa jatkuvuusmodulin määritelmän toinen ehto.
Jos $t = 0$, niin $d_X(a, b) \leq t = 0 \Rightarrow a = b$, koska d_X on metriikka. Tällöin myös $f(a) = f(b)$, joten $d_Y(f(a), f(b)) = 0$, koska d_Y on metriikka. Koska tämä pätee kaikilla $a, b \in X$, joilla $a = b$, niin myös

$$\sup\{d_Y(f(a), f(b)) : a, b \in X \text{ ja } d_X(a, b) = 0\} = 0.$$

Siis $\omega_0(0) = 0$.
Osoitetaan vielä, että kuvaus ω_0 on jatkuva nollassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Käytetään kuvausta f apuna; koska f on tasaisesti jatkuva, edellä kiinnitetylle epsilonille löytyy delta.
Kun $t \leq \delta$, niin kuvauksen f tasaisen jatkuvuuden nojalla

$$\omega_0(t) \leq \omega_0(\delta) = \sup\{d_Y(f(a), f(b)) : a, b \in X \text{ ja } d_X(a, b) \leq \delta\} \leq \varepsilon.$$

Siis, kun $|t - 0| = |t| = t \leq \delta$, niin

$$|\omega_0(t) - \omega_0(0)| = |\omega_0(t)| = \omega_0(t) \leq \varepsilon.$$

Toisin sanoen, kuvaus ω_0 on jatkuva nollassa. Niinpä ω_0 on kuvauksen f jatkuvuusmoduli. $\square$

Esitellään seuraavaksi kaksi vahvaa jatkuvuuden muotoa: Lipschitz-jatkuvuus ja Hölder-jatkuvuus.

Määritelmä 13 (Lipschitz-jatkuvuus)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on *L-Lipschitz-jatkuva* (tai lyhyemmin vain Lipschitz-jatkuva), jos on olemassa $L \geq 0$ siten, että

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2).$$

Määritelmä 14 (Hölder-jatkuvuus)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ on *Hölder-jatkuva*, jos on olemassa $C \geq 0$ ja $1 \geq \alpha > 0$ siten, että

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C(d_X(x_1, x_2))^\alpha.$$

Propositio 15. *Lipschitz-jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ L-Lipschitz-jatkuva kuvaus.

Osoitetaan, että kuvaus $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[,\ \omega(t) = Lt$ on kuvauksen f jatkuvuusmoduli.

Kuvaus ω on selvästi kasvava. Se on myös selvästi jatkuva nollassa ja $\omega(0) = 0$.

Kuvauksen f Lipschitz-jatkuvuudesta seuraa suoraan, että kaikilla $x_1, x_2 \in X$ pätee

$$d_Y(f(x_1), (x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) = \omega(d_X(x_1, x_2)).$$

Siispä ω on kuvauksen f jatkuvuusmoduli.

Siten proposition 12 nojalla Lipschitz-jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva. □

Propositio 16. *Hölder-jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Ainoa ero edelliseen todistukseen Lipschitz-jatkuville kuvauksille on se, että Hölder-jatkuvan kuvauksen jatkuvuusmoduliksi osoitetaan kuvaus $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[,\ \omega(t) = Ct^\alpha$.

Niinpä proposition 12 nojalla Hölder-jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva. □

4. Jatkuvien kuvausten laajentaminen metrisissä avaruuksissa

Tässä luvussa tarkastellaan, millaisia oletuksia tarvitaan kuvauksen lähtöjoukon laajentamiseen. Itse jatkolauseet löytyvät McShanen artikkelista [**2**]. Konveksianalyysiin liittyvät apukäsitteet ja -tulokset ovat kirjoista [**4**], [**5**] ja [**11**].

4.1. Apukäsitteitä

Määritellään muutama McShanen jatkolauseiden todistuksissa tarvittava apukäsite sekä pari näihin käsitteisiin liittyvää aputulosta. Jotta olisi järkevää puhua metrisen avaruuden osajoukossa määritellystä kuvauksesta, tarvitsee tähän osajoukkoon saada metriikka. Yksinkertaisin valinta osajoukon metriikaksi on koko avaruuden metriikan indusoima metriikka.

Määritelmä 17 (Indusoitu metriikka)**.** Olkoon (X, d_X) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Kun $x_1, x_2 \in A$, niin määritellään

$$d_{X|A}(x_1, x_2) = d_X(x_1, x_2).$$

Tällöin $d_{X|A}$ on (X, d_X)*:n indusoima metriikka* ja $(A, d_{X|A})$ on metrinen avaruus.

Myöhempää käyttöä varten tarvitaan joitakin konveksianalyysin käsitteitä ja tuloksia. Ensimmäisenä määritellään konveksi joukko.

Määritelmä 18 (Konveksi joukko)**.** Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi*, jos mitkä tahansa kaksi pistettä $x_1, x_2 \in V$ yhdistävä jana sisältyy joukkoon V.

Toisin sanoen V on konveksi, jos

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in V \quad \text{kaikilla} \quad x_1, x_2 \in V \text{ ja } t \in]0,1[.$$

Seuraavat propositiot seuraavat suoraviivaisesti konveksin joukon määritelmästä.

Propositio 19. *Konveksien joukkojen leikkaus on konveksi joukko.*

Todistus. Olkoon B indeksijoukko ja olkoot V_β konvekseja joukkoja kaikilla $\beta \in B$. Jos $x_1, x_2 \in \bigcap_\beta V_\beta =: V$, niin $x_1, x_2 \in V_\beta$ kaikilla $\beta \in B$. Erityisesti pisteet x_1 ja x_2 yhdistävä jana kuuluu jokaiseen joukkoon V_β näiden joukkojen konveksisuuden nojalla. Siispä tämä jana kuuluu myös leikkaukseen $\bigcap_\beta V_\beta = V$, joten V on konveksi joukko. □

Propositio 20. *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^2$ *konveksi joukko. Tällöin myös joukko* $B := \{(x, -y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A\}$ *on konveksi.*

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ konveksi joukko. Osoitetaan, että B on konveksi. Olkoot $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$, jolloin siis $(x_1, -y_1), (x_2, -y_2) \in A$. Pitää siis osoittaa, että

$$(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \in B \quad \text{kaikilla} \quad t \in]0, 1[.$$

Toisin sanoen pitää osoittaa, että

$$(1-t)(x_1, -y_1) + t(x_2, -y_2) \in A \quad \text{kaikilla} \quad t \in]0, 1[.$$

Tämä väite seuraa suoraan joukon A konveksisuudesta ja siitä, että $(x_1, -y_1), (x_2, -y_2) \in A$. Niinpä joukko B on konveksi. □

Edellinen propositio kertoo, että tason konveksin osajoukon peilaus koordinaattiakselin suhteen säilyttää konveksisuuden. Tulos osoitettiin vain peilauksille ensimmäisen akselin suhteen, mutta saman tuloksen peilauksille toisen akselin suhteen voisi todistaa täysin vastaavalla tavalla.

Määritellään nyt konkaavi ja konveksi kuvaus. Kirjallisuudessa nämä määritellään tavallisesti avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolta laajennetulle reaalilukujen joukolle $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Tässä tutkielmassa näin laajalle yleisyydelle ei ole kuitenkaan tarvetta. Siksi seuraavissa määritelmissä rajoitutaan yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisiin kuvauksiin.

Määritelmä 21 (Konkaavi kuvaus)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ väli.

Kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$ on *konkaavi*, jos kaikille $x_1, x_2 \in A$ ja $t \in [0, 1]$ pätee

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{1}$$

Geometrisesti tulkittuna kuvaus f on konkaavi, jos jokaisella välillä $[a, b]$ kuvauksen f kuvaaja joko on sen janan yläpuolella, joka yhdistää pisteet $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$, tai sivuaa kyseistä janaa.

Määritelmä 22 (Konveksi kuvaus)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$.

Kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos $-f$ on konkaavi kuvaus.

Sivuhuomautus: Konveksin kuvauksen voisi määritellä epäyhtälön (1) avulla yksinkertaisesti kääntämällä epäyhtälömerkin. Konveksin kuvauksen geometrinen tulkinta lienee helppo päätellä.

Konveksianalyysissä konkaavit kuvaukset määritellään konveksien kuvausten avulla, eli juuri päinvastoin kuin edellä on tehty. Tässä tutkielmassa tullaan kuitenkin tarvitsemaan nimenomaan konkaavin kuvauksen käsitettä ja tähän liittyviä ominaisuuksia. Nämä konkaavien kuvausten halutut ominaisuudet seuraavat ominaisuuksista, jotka on kirjallisuudessa todistettu konvekseille kuvauksille.

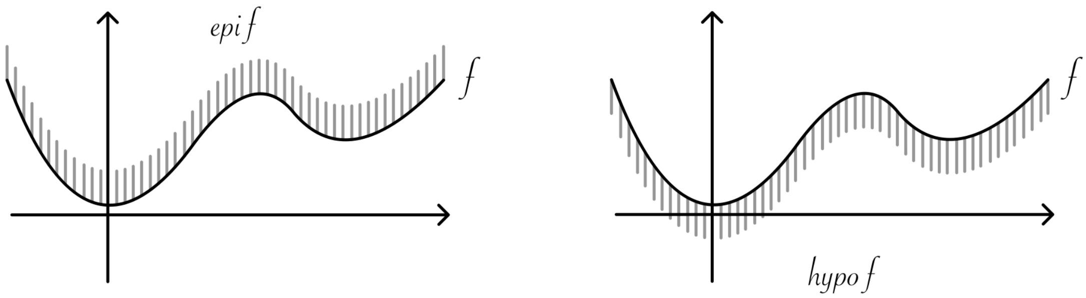
Määritelmä 23 (Epigraafi ja hypograafi)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Kuvauksen f *epigraafi* on joukko

$$\operatorname{epi} f := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$

Vastaavasti kuvauksen f *hypograafi* on joukko

$$\operatorname{hypo} f := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}.$$

Geometrisesti tulkittuna kuvauksen f epigraafi on niiden pisteiden joukko, jotka ovat kuvauksen f kuvaajalla tai sen yläpuolella. Vastaavasti kuvauksen f hypograafi on niiden pisteiden joukko, jotka ovat kuvauksen f kuvaajalla tai sen alapuolella (katso kuva 1).



Kuva 1. Kuvauksen f epi- ja hypograafit.

Konveksit joukot ja kuvaukset liittyvät toisiinsa kuvauksen epigraafin kautta:

Propositio 24. *Kuvaus f on konveksi jos ja vain jos sen epigraafi on konveksi joukko.*

Todistus. Tämä on geometrisesti ilmiselvää ja seuraa varsin suoraviivaisesti määritelmistä; katso [**11**, s. 40, lause 2.1.1]. □

Edellisestä propositiosta saadaan helposti vastaava tulos konkaaveille kuvauksille:

Propositio 25. *Kuvaus f on konkaavi jos ja vain jos sen hypograafi on konveksi joukko.*

Todistus. Oletetaan, että f on konkaavi kuvaus, jolloin $-f$ on konveksi kuvaus. Proposition 24 nojalla $\operatorname{epi}(-f)$ on siis konveksi joukko. Koska

$$\begin{aligned}\operatorname{hypo} f &= \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\} \\ &= \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : -y \geq -f(x)\} \\ &= \{(x, -y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq -f(x)\}. \\ &= \{(x, -y) \in A \times \mathbb{R} : (x, y) \in \operatorname{epi}(-f)\},\end{aligned}$$

niin propositiosta 20 seuraa, että $\operatorname{hypo} f$ on konveksi joukko.

Oletetaan sitten, että $\operatorname{hypo} f$ on konveksi joukko. Tällöin

$$\begin{aligned}\operatorname{epi}(-f) &= \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq -f(x)\} \\ &= \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : -y \leq f(x)\} \\ &= \{(x,-y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\} \\ &= \{(x,-y) \in A \times \mathbb{R} : (x,y) \in \operatorname{hypo} f\}.\end{aligned}$$

Niinpä $\operatorname{epi}(-f)$ on proposition 20 nojalla konveksi joukko. Tällöin $-f$ on proposition 24 nojalla konveksi kuvaus, eli f on konkaavi kuvaus (tämä seuraa konveksin kuvauksen määritelmästä). □

Nyt voidaan osoittaa kaksi tulosta, joita tullaan myöhemmin käyttämään McShanen jatkolauseiden todistuksessa. Erotetaan ne edellisistä propositioista nimeämällä ne lemmoiksi.

Lemma 26. *Olkoon I indeksijoukko, $A \subset \mathbb{R}$ ja $f_i : A \to \mathbb{R}$ kuvauksia kaikilla $i \in I$.*
Jos jokainen kuvaus f_i on konkaavi, niin myös kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \inf_{i \in I} f_i(x)$$

on konkaavi.

TODISTUS. Koska jokainen kuvaus f_i on konkaavi, niin niiden hypograafit ovat konvekseja joukkoja. Proposition 19 nojalla niiden leikkaus

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{hypo} f_i =: H$$

on konveksi joukko. Osoitetaan, että $H = \operatorname{hypo} f$, jolloin propositiosta 25 seuraa, että f on konkaavi kuvaus.

Olkoon $p_0 = (x_0, y_0) \in H$. Tällöin siis $p_0 \in \operatorname{hypo} f_i$ kaikilla $i \in I$ eli $y_0 \leq f_i(x_0)$ kaikilla $i \in I$. Niinpä $f(x_0) = \inf_{i \in I} f_i(x_0) \geq y_0$, joten $p_0 \in \operatorname{hypo} f$. Siis $H \subset \operatorname{hypo} f$.

Olkoon sitten $p_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{hypo} f$. Tällöin siis $y_0 \leq f(x_0) = \inf_{i \in I} f_i(x_0)$, eli $y_0 \leq f_i(x_0)$ kaikilla $i \in I$. Tästä seuraa, että $p_0 \in \operatorname{hypo} f_i$ kaikilla $i \in I$, joten $p_0 \in H$. Siis $\operatorname{hypo} f \subset H$.

Niinpä $H = \operatorname{hypo} f$ eli f on konkaavi kuvaus. □

Lemma 27. *Olkoon $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ konkaavi kuvaus, jolle pätee $f(0) = 0$ ja olkoot $x_1, x_2 \in [0, \infty[$.*
Tällöin $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

Todistus. Jos $x_1 = x_2 = 0$, niin väite pätee. Oletetaan siis, että vähintään toinen pisteistä on erisuuri kuin nolla. Voidaan olettaa, että $x_1 \leq x_2$, jolloin $x_2 \neq 0$.

Sovelletaan konkaavin kuvauksen määritelmän epäyhtälöä (1) pisteisiin $x = 0$ ja $x = x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} & f((1-t)\cdot 0 + t(x_1+x_2)) \geq (1-t)f(0) + tf(x_1+x_2) \\ \text{(2)} \qquad & \Leftrightarrow \quad f(t(x_1+x_2)) \geq tf(x_1+x_2). \end{aligned}$$

Edellinen epäyhtälö pätee kaikilla $t \in [0,1]$. Erityisesti se pätee, kun $t = \frac{x_1}{x_1+x_2}$. Tällöin $t(x_1+x_2) = x_1$, ja niinpä epäyhtälöstä (2) saadaan

$$\begin{aligned} & f(t(x_1+x_2)) \geq tf(x_1+x_2) \\ \text{(3)} \qquad & \Leftrightarrow \quad f(x_1) \geq \frac{x_1}{x_1+x_2} f(x_1+x_2). \end{aligned}$$

Vastaavasti valitsemalla $t = \frac{x_2}{x_1+x_2}$ epäyhtälöstä (2) saadaan

$$\text{(4)} \qquad f(x_2) \geq \frac{x_2}{x_1+x_2} f(x_1+x_2).$$

Epäyhtälöistä (3) ja (4) seuraa, että

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2) &= \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} f(x_1+x_2) \\ &= \frac{x_1}{x_1+x_2} f(x_1+x_2) + \frac{x_2}{x_1+x_2} f(x_1+x_2) \\ &\leq f(x_1) + f(x_2). \end{aligned}$$

□

Määritellään vielä pienimmän jatkuvuusmodulin käsite. Tätä jatkuvuusmodulia käytettiin jo proposition 12 todistuksessa, ja erityisesti silloin osoitettiin, että kyseessä todella on kuvauksen f jatkuvuusmoduli.

Määritelmä 28 (Pienin jatkuvuusmoduli)**.** Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kuvaus. Tällöin kuvaus $\omega_0 : [0, \infty[\to [0, \infty[$,

$$\omega_0(t) = \sup\{d_Y(f(a), f(b)) : a, b \in X \text{ ja } d_X(a,b) \leq t\},$$

on kuvauksen f *pienin jatkuvuusmoduli.*

Voidaan helposti osoittaa, että jos ω_f on myös kuvauksen f jatkuvuusmoduli, niin $\omega_0(t) \leq \omega_f(t)$ kaikilla t.

Mikäli tämä epäyhtälö ei pätisi, niin supremumin määritelmän nojalla jollakin t olisi

$$\omega_f(t) < d_Y(f(a), f(b)), \tag{5}$$

kun $a, b \in X$ ja $d_X(a, b) \leq t$.

Oletettiin, että ω_f on kuvauksen f jatkuvuusmoduli, eli erityisesti ω_f on kasvava. Siis (5) nojalla joillakin $a, b \in X$ pätisi $\omega_f(d_X(a, b)) < d_Y(f(a), f(b))$, eli ω_f ei olisi kuvauksen f jatkuvuusmoduli. Tämä on ristiriita, joten on oltava $\omega_0(t) \leq \omega_f(t)$ kaikilla t.

4.2. McShanen jatkolauseet

Osoitetaan ensin, että Lipschitz-jatkuvuus on mahdollista säilyttää kuvausta laajennettaessa.

Lause 29. *Olkoon (X, d_X) metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f : (A, d_{X|A}) \to (\mathbb{R}, d_E)$ L-Lipschitz-jatkuva kuvaus.*

Tällöin on olemassa L-Lipschitz-jatkuva kuvaus $\hat{f} : (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_E)$, jolle pätee $\hat{f}(a) = f(a)$ kaikille $a \in A$.

Todistus. Määritellään $g : (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_E)$,

$$g(x) = \sup\{f(a) - Ld_X(a, x) : a \in A\}.$$

Osoitetaan ensin, että $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

Olkoot $a, x \in A$. Kuvaus f on L-Lipschitz-jatkuva, eli $|f(a) - f(x)| \leq Ld_X(a, x)$. Voidaan olettaa, että $f(a) \geq f(x)$. Tällöin $|f(a) - f(x)| = f(a) - f(x) \leq Ld_X(a, x)$, mistä seuraa, että $f(x) \geq f(a) - Ld_X(a, x)$. Siis $f(x) \geq g(x)$, kun $x \in A$.

Toisaalta kaikille $x \in A$ voidaan aina valita $a = x$, jolloin $g(x) = g(a) \geq f(a) - Ld_X(a, a) = f(a) = f(x)$.

Siispä $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

Koska g määriteltiin supremumin avulla, niin periaatteessa on olemassa mahdollisuus, että olisi $g(x) = \infty$ jollakin $x \in X$ (ylhäältä rajoittamattoman joukon supremum on ∞). Osoitetaan seuraavaksi, että g on äärellinen kaikilla $x \in A$. Tämä varmistaa, että myöhemmin ei ajauduta tilanteeseen $\infty - \infty$. Kiinnitetään $a_0 \in A$ ja olkoon $a \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(a) - Ld_X(a, x) &\leq f(a_0) + Ld_X(a_0, a) - Ld_X(a, x) \\ &\leq f(a_0) + Ld_X(a_0, x) + Ld_X(x, a) - Ld_X(a, x) \\ &= f(a_0) + Ld_X(a_0, x), \end{aligned}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seurasi kuvauksen f L-Lipschitz-jatkuvuudesta ja toinen seurasi kolmioepäyhtälöstä. Koska $g(x) = \sup\{f(a) - Ld_X(a, x) : a \in A\}$, niin $g(x) \leq f(a_0) + Ld_X(a_0, x)$ kaikilla $x \in A$.

Osoitetaan vielä, että g on L-Lipschitz-jatkuva. Olkoot $x, y \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Kolmioepäyhtälöstä saadaan, että $Ld_X(a, x) \geq Ld_X(a, y) - Ld_X(x, y)$. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että

$$
\begin{aligned}
g(x) &\leq f(a) - Ld_X(a,x) + \varepsilon \\
&\leq f(a) - [Ld_X(a,y) - Ld_X(x,y)] + \varepsilon \\
&= f(a) - Ld_X(a,y) + Ld_X(x,y) + \varepsilon \\
&\leq g(y) + Ld_X(x,y) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) - g(y) \leq Ld_X(x,y) + \varepsilon.$$

Tästä seuraa, että $|g(x) - g(y)| \leq Ld_X(x,y)$. Toisin sanoen kuvaus g on L-Lipschitz-jatkuva ja siten se on etsitty kuvauksen f laajennus. $\square$

Yleistä tapausta varten tarvitaan seuraava lemma. Tämän lemman todistuksessa tarvitaan joitain aiemmin esiteltyjä konveksianalyysin tuloksia.

Lemma 30. *Olkoon f tasaisesti jatkuva kuvaus, jonka pienin jatkuvuusmoduli on ω_0. Jos on olemassa vakiot h ja k siten, että $\omega_0(t) \leq ht + k$ kaikilla $t \geq 0$, niin kuvauksella f on olemassa konkaavi jatkuvuusmoduli $\omega(t) \geq \omega_0(t)$.*

Todistus. Tarkastellaan (t,y)-tason niitä puolisuoria $y = at + b, t \geq 0$, joille pätee $at + b \geq \omega_0(t)$ kaikilla $t \geq 0$. Oletuksen nojalla ainakin yksi tällainen puolisuora on olemassa: $y = ht + k$. Tästä seuraa, että näitä puolisuoria on ääretön määrä, koska edellinen ehto toteutuu aina, jos $a \geq h$ ja $b \geq k$. Merkitään ehdon $at + b \geq \omega_0(t)$ kaikilla $t \geq 0$ toteuttavia puolisuoria $y = a_i t + b_i$, missä $i \in I$ (I on indeksijoukko).

Jokaisen tällaisen puolisuoran alapuolella oleva joukko $S_i := \{(t,y) : t \geq 0, y \leq a_i t + b_i\}$ on selvästi konveksi. Proposition 19 nojalla myös näiden joukkojen leikkaus

$$S := \bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} \{(t,y) : t \geq 0, y \leq a_i t + b_i\}$$

on konveksi.

Jokainen edellä saatu puolisuora on jonkin kuvauksen $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ kuvaaja. Merkitään puolisuoraa $y = a_i t + b_i$ vastaavaa kuvausta g_i, jolloin siis $g_i(t) = a_i t + b_i$. Jokaisen kuvauksen g_i hypograafi $\operatorname{hypo} g_i = S_i$ on konveksi, kuten aiemmin todettiin. Niinpä proposition 25 nojalla jokainen g_i on konkaavi kuvaus.

Määritellään nyt $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$,

$$\omega(t) = \inf_{i \in I} g_i(t).$$

Lemman 26 nojalla ω on konkaavi kuvaus. Lisäksi koska $a_i t + b_i \geq \omega_0(t)$ kaikilla $i \in I$ ja $t \geq 0$, niin $\omega(t) \geq \omega_0(t)$ kaikilla $t \geq 0$. Tämä tarkoittaa, että ω täyttää jatkuvuusmodulin määritelmän ensimmäisen ehdon kuvaukselle f. Vielä tarvitsee tarkistaa määritelmän toinen ehto, eli että ω on jatkuva nollassa ja $\omega(0) = 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikille $t \leq \delta$ pätee $\omega_0(t) \leq \varepsilon$ jatkuvuusmodulin määritelmän nojalla. Tästä seuraa, että on myös olemassa kuvaus g_i, $i \in I$, jolla $b_i = \varepsilon$ eli $g_i(t) = a_i t + \varepsilon$. Tämä nähdään esimerkiksi valitsemalla $a_i = h + \frac{k - \varepsilon}{\delta}$ (kunhan $\varepsilon < k$; muussa tapauksessa voidaan valita $a_i = h$). Tällöin kun $t \leq \delta$, niin $g_i(t) \geq \varepsilon \geq \omega_0(t)$ ja kun $t \geq \delta$, niin $g_i(t) \geq ht + k \geq \omega_0(t)$. Niinpä $g_i(t) \geq \omega_0(t)$ kaikilla $t \geq 0$ ja siten $\omega(t) \leq g_i(t)$.

Vastaavalla menettelyllä löydetään kuvaus g_i epsilonille $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Merkitään tätä kuvausta $\tilde{g}_i$. Edellisen perusteella $\omega(t) \leq \tilde{g}_i(t) = \tilde{a}_i t + \varepsilon_2$ kaikilla $t \geq 0$. Valitaan $\delta_0 = \varepsilon_2/\tilde{a}_i$. Kun $t \leq \delta_0$, niin

$$\omega(t) \leq \tilde{g}_i(t) \leq \tilde{g}(\delta_0) = \tilde{a}_i\delta_0 + \varepsilon_2 = \tilde{a}_i \cdot \frac{\varepsilon_2}{\tilde{a}_i} + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_2 = \varepsilon,$$

ja täten ω on jatkuva, kun $t = 0$. Lisäksi koska ε oli mielivaltainen, niin on oltava $\omega(0) = 0$. Niinpä ω on etsitty konkaavi jatkuvuusmoduli. □

Voidaan osoittaa, että edellä saatu konkaavi jatkuvuusmoduli ω on jatkuva kaikkialla. Jatkuvuus seuraa siitä, että jokaisella välillä $0 \leq t \leq t_0$ kuvaus ω on rajoitettu. Katso [**4**, s. 83, seuraus 10.1.1].

Edellisen lemman oletukset pätevät muun muassa:

1. Hölder-jatkuville kuvauksille, koska näille $\omega_0(t) \leq \omega(t) = Ct^\alpha \leq C(t+1)$, missä $C \geq 0$ ja $1 \geq \alpha > 0$;
2. Rajoitetuille tasaisesti jatkuville kuvauksille, koska jos $|f(x)| \leq M$ kaikilla x, niin $\omega_0(t) \leq 2M$ kaikilla t.

Nyt voidaan todistaa tämän luvun päätulos:

LAUSE 31. *Olkoon (X, d_X) metrinen avaruus, $A \subset X$ ja $f : (A, d_{X|A}) \to (\mathbb{R}, d_E)$ tasaisesti jatkuva kuvaus, jolla on konkaavi jatkuvuusmoduli $\omega(t)$.*

Tällöin kuvauksella f on olemassa laajennus $\hat{f} : (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_E)$, jolla on sama jatkuvuusmoduli $\omega(t)$.

TODISTUS. Todistus tehdään täysin samoin kuin Lipschitz-jatkuvien kuvausten tapauksessa. Koska kuvauksen f jatkuvuusmoduli ω on konkaavi, niin lemmasta 27 seuraa, että kolmioepäyhtälön avulla saadaan halutut arviot. Koska kyseessä on luvun päätulos, niin tehdään todistus täsmällisesti.

Määritellään $g : (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_E)$,

$$g(x) = \sup\{f(a) - \omega(d_X(a, x)) : a \in A\}.$$

Osoitetaan ensin, että $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

Olkoot $a, x \in A$. Kuvauksella f on jatkuvuusmoduli ω, eli $|f(a) - f(x)| \leq \omega(d_X(a, x))$. Voidaan olettaa, että $f(a) \geq f(x)$. Tällöin $|f(a) - f(x)| = f(a) - f(x) \leq \omega(d_X(a, x))$, mistä seuraa, että $f(x) \geq f(a) - \omega(d_X(a, x))$. Siis $f(x) \geq g(x)$, kun $x \in A$.

Toisaalta kaikille $x \in A$ voidaan aina valita $a = x$, jolloin $g(x) = g(a) \geq f(a) - Ld_X(a, a) = f(a) = f(x)$.

Siispä $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

Aivan kuten Lipschitz-jatkuvien kuvausten tapauksessa, nytkin halutaan välttyä tilanteelta $\infty - \infty$. Osoitetaan siis, että g on äärellinen kaikilla $x \in A$. Kiinnitetään $a_0 \in A$ ja olkoon $a \in A$. Koska ω on konkaavi ja kasvava, niin lemman 27 ja metriikan d_X kolmioepäyhtälön nojalla

$$\omega(d_X(a_0,a)) \leq \omega(d_X(a_0,x)+d_X(x,a)) \\ \leq \omega(d_X(a_0,x))+\omega(d_X(x,a)). \tag{6}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f(a)-\omega(d_X(a,x)) &\leq f(a_0)+\omega(d_X(a_0,a))-\omega(d_X(a,x)) \\ &\leq f(a_0)+\omega(d_X(a_0,x))+\omega(d_X(x,a))-\omega(d_X(a,x)) \\ &= f(a_0)+\omega(d_X(a_0,x)), \end{aligned}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seurasi siitä, että ω on kuvauksen f jatkuvuusmoduli ja toinen seurasi epäyhtälöstä (6). Koska $g(x) = \sup\{f(a)-\omega(d_X(a,x)) : a \in A\}$, niin $g(x) \leq f(a_0)+\omega(d_X(a_0,x))$ kaikilla $x \in A$.

Vielä pitää osoittaa, että ω on myös kuvauksen g jatkuvuusmoduli. Olkoot $x, y \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Koska ω on konkaavi ja kasvava, niin lemmasta 27 ja metriikan d_X kolmioepäyhtälöstä saadaan, että $\omega(d_X(a,x)) \geq \omega(d_X(a,y))-\omega(d_X(x,y))$. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että

$$\begin{aligned} g(x) &\leq f(a)-\omega(d_X(a,x))+\varepsilon \\ &\leq f(a)-[\omega(d_X(a,y))-\omega(d_X(x,y))]+\varepsilon \\ &\leq f(a)-\omega(d_X(a,y))+\omega(d_X(x,y))+\varepsilon \\ &\leq g(y)+\omega(d_X(x,y))+\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x)-g(y) \leq \omega(d_X(x,y))+\varepsilon.$$

Tästä seuraa, että $|g(x)-g(y)| \leq L d_X(x,y)$. Toisin sanoen ω on kuvauksen g jatkuvuusmoduli ja siten g on etsitty kuvauksen f laajennus. □

McShane osoittaa artikkelissaan myös seuraavat tulokset, jotka seuraavat edellisestä lauseesta:

Seuraus 32. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $A \subset X$.*

Jos $f : (A, d_A) \to (Y, d_Y)$ on rajoitettu ja tasaisesti jatkuva, niin se voidaan laajentaa koko avaruuteen (X, d_X) siten, että tasainen jatkuvuus ja rajat säilyvät.

Tämän seurauksen erikoistapauksena Euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, d_E)$ suljetussa ja rajoitetussa osajoukossa $A \subset \mathbb{R}^n$ määritelty jatkuva kuvaus voidaan laajentaa koko avaruuteen $(\mathbb{R}^n, d_E)$ siten, että laajennus on tasaisesti jatkuva ja rajoitettu. Tämän voi perustella esimerkiksi seuraavien tulosten avulla:

1. Heinen-Borelin lause: Euklidisen avaruuden suljettu ja rajoitettu osajoukko A on kompakti.
2. Kompaktissa joukossa määritelty jatkuva kuvaus on tasaisesti jatkuva.

3. Weierstrassin lause: kompaktissa joukossa määritelty jatkuva kuvaus saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että f on tasaisesti jatkuva. Kohdista 1 ja 3 seuraa, että f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa; siis f on rajoitettu. Laajennus voidaan määritellä niin, että se ei koskaan ylitä kuvauksen f ylärajaa tai alita sen alarajaa ja näin sama ala- ja yläraja pätee myös laajennukselle.

Seuraus 33. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja $A \subset X$.*

Jos $f : (A, d_A) \to (Y, d_Y)$ on tasaisesti jatkuva, niin sillä on jatkuva laajennus avaruuteen (X, d_X).

Edellinen seuraus antaa heikomman tuloksen kuin lause 31: kuvauksen f laajennus ei välttämättä ole tasaisesti jatkuva (lauseen 31 tapauksessa tasainen jatkuvuus seurasi propositiosta 12). Toisaalta tämän seurauksen oletukset ovat myös vähäisemmät kuin kyseisellä lauseella.

5. Topologiset avaruudet

Tässä luvussa määritellään topologisten avaruuksien peruskäsitteet ja tutustutaan separaatioaksioomiin.

5.1. Peruskäsitteitä

Topologisten avaruuksien peruskäsitteet alkavat topologian käsitteestä. Monet tämän luvun käsitteistä ovat analogisia metristen avaruuksien vastaavien käsitteiden kanssa, kuten muutamassa kohdassa mainitaankin.

Määritelmä 34 (Topologia ja topologinen avaruus)**.** Olkoon X epätyhjä joukko. Tällöin $\tau \subset \mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ on joukon X *topologia*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{N} U_j \in \tau,$ kun $U_1, U_2, ..., U_N \in \tau$,
3. $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau,$ kun $U_\alpha \in \tau$ kaikilla $\alpha \in A \neq \emptyset$.

Paria (X, τ) kutsutaan *topologiseksi avaruudeksi.*

Määritelmä 35 (Avoin ja suljettu joukko)**.** Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos $U \in \tau$. Joukko E on *suljettu*, jos $E^{\mathrm{C}} = X \setminus E$ on avoin.

Tässä tutkielmassa reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ käytetään topologiana yksinomaan avoimien välien $(a, b) \subset \mathbb{R}$ määräämää topologiaa, jota merkitään $\tau_{\mathbb{R}}$. Tämän topologian alkiot ovat siis avoimia välejä sekä joukkoja, jotka saadaan avoimista väleistä äärellisillä leikkauksilla ja/tai mielivaltaisilla yhdisteillä. Tämä topologia vastaa tietyllä tavalla reaalilukujen joukon Euklidista metriikkaa.

Sulkeuma määritellään topologisissa avaruuksissa aivan kuten metrisissäkin avaruuksissa:

Määritelmä 36 (Sulkeuma)**.** Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $A \subset X$ joukko.

Joukon $A \subset X$ *sulkeuma* $\bar{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A.

Seuraavaksi määritellään ympäristön käsite. Pisteen ympäristö on topologisten avaruuksien vastine avoimille palloille.

Määritelmä 37 (Ympäristö)**.** Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Jos $x \in X$ ja $x \in U \in \tau$, niin U on pisteen x (avoin) *ympäristö.*

Vastaavasti jos $A \subset X$ ja $A \subset U \in \tau$, niin U on joukon A (avoin) *ympäristö.*

Metrisissä avaruuksissa avoimuus määriteltiin niin, että avoimen joukon jokainen piste on joukon sisäpiste. Toisin sanoen jokainen avoimen joukon A piste a sisältyy johonkin sellaiseen a-keskiseen avoimeen palloon, joka sisältyy joukkoon A. Topologisissa avaruuksissa avoimuus voidaan muotoilla samaan tapaan yksinkertaisesti korvaamalla avoimet pallot avoimilla ympäristöillä:

Propositio 38. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $A \subset X$ joukko. Tällöin A on avoin jos ja vain jos jokaiselle pisteelle $a \in A$ on olemassa ympäristö $U_a \in \tau$ siten, että $U_a \subset A$.*

Pisteitä, joilla on olemassa tällainen ympäristö, nimitetään joukon A sisäpisteiksi. Siis kuten metrisissä avaruuksissa, joukko on avoin jos ja vain jos sen jokainen piste on joukon sisäpiste.

Todistus. Oletetaan, että A on avoin. Tällöin A on jokaisen pisteensä ympäristö ja $A \subset A$.

Oletetaan sitten, että jokaiselle joukon A pisteelle on olemassa ympäristö $U_a \in \tau$ siten, että $U_a \subset A$. Tällöin

$$\bigcup_{a \in A} U_a = A \in \tau$$

suoraan topologian määritelmän nojalla (kohta 3). Siispä A on avoin. $\square$

Jatkuvuus voidaan määritellä topologisissa avaruuksissa samaan tyyliin kuin metrisissä avaruuksissa. Määritelmän perusmuoto säilyy samana; kun metrisissä avaruuksissa sanotaan “jokaiselle epsilonille on olemassa delta”, niin topologisissa avaruuksissa sanotaan “jokaiselle maalijoukon ympäristölle on olemassa lähtöjoukon ympäristö”.

Määritelmä 39 (Jatkuvuus)**.** Olkoot $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in X$, jos jokaiselle pisteen $f(x_0) \in Y$ ympäristölle $V \in \tau_Y$ on olemassa pisteen $x_0 \in X$ ympäristö $U \in \tau_X$ siten, että $f(U) \subset V$.

Jos kuvaus f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$, niin sanotaan, että f on *jatkuva.*

Huomaa edellisen määritelmän yhtäläisyydet huomautuksessa 9 esitetyn jatkuvuuden määritelmän kanssa.

Osoitetaan vielä kaksi jatkuvuuden kanssa yhtäpitävää tulosta.

Propositio 40. *Olkoot $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topologisia avaruuksia. Tällöin seuraavat yhtäpitävyydet pätevät:*

1. Kuvaus $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ on jatkuva jos ja vain jos joukon U alkukuva $f^{-1}(U)$ on avoin aina, kun U on avoin.

2. Kuvaus $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ on jatkuva jos ja vain jos joukon F alkukuva $f^{-1}(F)$ on suljettu aina, kun F on suljettu.

Todistus. Osoitetaan ensin ensimmäinen väite ja käytetään tätä toisen väitteen todistamiseen.

1. Olkoon f jatkuva kuvaus ja $U \in Y$ avoin joukko. Osoitetaan, että $f^{-1}(U)$ on avoin.

Olkoon $x_0 \in f^{-1}(U)$, jolloin $f(x_0) \in U$. Koska U on avoin, niin proposition 38 nojalla pisteellä $f(x_0)$ on olemassa ympäristö $V_{f(x_0)} \in \tau_Y$ siten, että $V_{f(x_0)} \subset U$.

Koska f on jatkuva, niin pisteellä x_0 on olemassa ympäristö $V_{x_0} \in \tau_X$ siten, että $f(V_{x_0}) \subset V_{f(x_0)} \subset U$. Täten $V_{x_0} \subset f^{-1}(U)$, eli $f^{-1}(U)$ on avoin proposition 38 nojalla.

Olkoon sitten $f^{-1}(U)$ avoin aina, kun U on avoin. Osoitetaan, että f on jatkuva.

Olkoon $x_0 \in X$ jolloin $f(x_0) \in Y$. Olkoon lisäksi $U \subset Y$ pisteen $f(x_0)$ ympäristö. Koska $f(x_0) \in U$, niin $x_0 \in f^{-1}(U)$.

Oletuksen nojalla $f^{-1}(U)$ on avoin ja niinpä tämä joukko on pisteen x_0 ympäristö. Täten f on jatkuva.

2. Olkoon f jatkuva kuvaus ja $F \in Y$ suljettu joukko. Osoitetaan, että $f^{-1}(F)$ on suljettu.

Joukko $Y \setminus F$ on avoin suoraan suljetun joukon määritelmän nojalla. Koska f on jatkuva, niin kohdasta 1 seuraa, että $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ on avoin. Täten $f^{-1}(F)$ on suljettu.

Olkoon sitten $f^{-1}(F)$ suljettu aina, kun F on suljettu. Osoitetaan, että f on jatkuva.

Olkoon $U \subset Y$ avoin, jolloin $Y \setminus U$ on suljettu. Oletuksen nojalla $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ on suljettu, joten $f^{-1}(U)$ on avoin. Kohdan 1 nojalla f on siis jatkuva. $\square$

5.2. Separaatioaksioomat

Separaatioaksioomat ovat ehtoja, jotka kertovat, kuinka hyvin topologisen avaruuden pisteitä tai suljettuja joukkoja voidaan erotella toisistaan. Näissä ehdoissa puhutaan erillisistä joukoista; avaruuden X kaksi joukkoa $A, B \subset X$ ovat *erilliset*, jos $A \cap B = \emptyset$.

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus.

T_0: Jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin vähintään toisella pisteellä x tai y on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

T_1: Jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin molemmilla pisteillä x ja y on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

T_2: Jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin molemmilla pisteillä on erilliset ympäristöt.

T_3: Jos $x \in X$, $F \subset X$ on suljettu ja $x \notin F$, niin pisteellä x ja joukolla F on erilliset ympäristöt.

T_4: Jos $E, F \subset X$ ovat suljettuja ja $E \cap F = \emptyset$, niin joukoilla E ja F on erilliset ympäristöt.

Jos topologinen avaruus (X, τ) toteuttaa separaatioaksiooman T_i, niin sanotaan, että (X, τ) on *T_i-avaruus* tai lyhyemmin vain T_i.

Propositio 41. *Topologinen avaruus on T_1 jos ja vain jos yhden pisteen joukot ovat suljettuja.*

Todistus. Olkoon (X, τ) T_1-avaruus ja $x \in X$. Tällöin jokaisella $a \in \{x\}^{\mathrm{C}}$ on ehdon T_1 nojalla ympäristö, johon x ei kuulu: $a \in U_a \subset \{x\}^{\mathrm{C}}$. Siispä proposition 38 nojalla $\{x\}^{\mathrm{C}}$ on avoin eli $\{x\}$ on suljettu.

Olkoon sitten (X, τ) topologinen avaruus, jonka yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Olkoon lisäksi $x, y \in X$, $x \neq y$. Tällöin $\{x\}^{\mathrm{C}}$ on pisteen y ympäristö, johon x ei kuulu. Vastaavasti $\{y\}^{\mathrm{C}}$ on pisteen x ympäristö, johon y ei kuulu. Täten (X, τ) on T_1-avaruus. $\square$

Nimeämisestä:
Tietyt separaatioaksioomat toteuttaville topologisille avaruuksille käytetään myös seuraavia erityisiä nimityksiä:
Jos (X, τ) on T_2-avaruus, niin sanotaan, että (X, τ) on *Hausdorffin avaruus*, tai lyhyemmin vain "(X, τ) on Hausdorff".
Jos (X, τ) on T_3- ja T_0-avaruus, niin sanotaan, että (X, τ) on *säännöllinen.*
Jos (X, τ) on T_4- ja T_1-avaruus, niin sanotaan, että (X, τ) on *normaali.*

Säännöllisen ja normaalin avaruuden käsitteet ovat tarpeellisia siksi, että separaatioaksioomista T_3 ja T_4 ei suoraan seuraa yksikään aiemmista. Toisaalta säännöllinen avaruus (eli avaruus, joka on sekä T_3 että T_0) on aina Hausdorff ja normaali avaruus (eli avaruus, joka on sekä T_4 että T_1) on aina säännöllinen – ja täten myös Hausdorff (nämä väitteet osoitetaan luvussa 7). Nämä ominaisuudet voidaan siis esittää implikaatioiden avulla seuraavasti:

$$\text{normaali} \quad \Rightarrow \quad \text{säännöllinen} \quad \Rightarrow \quad \text{Hausdorff eli } T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 \quad \Rightarrow \quad T_0.$$

Yksikään näistä implikaatioista ei päde käänteiseen suuntaan: katso [**6**].

Huomautus 42. Kirjallisuudessa T_0-, T_1- ja T_2-avaruudet määritellään aina edellä kuvatulla tavalla. Hausdorffin avaruus on hyvin yleisesti käytetty nimitys ja se tarkoittaa aina T_2-avaruutta (myös muita erityisiä nimityksiä näkee, esimerkiksi T_0 avaruutta kutsutaan joskus Kolmogorovin avaruudeksi).

Toisaalta avaruuksien T_3 ja T_4 sekä säännöllisen ja normaalin avaruuden määrittelyssä esiintyy kahta erilaista tapaa:

1. Avaruudet T_3 ja T_4 määritellään avaruuksiksi, jotka toteuttavat separaatioaksioomat T_3 ja T_4. Jos avaruus on T_3 ja T_0, se on säännöllinen, ja jos avaruus on T_4 ja T_1, se on normaali.

2. Avaruus on säännöllinen, jos se toteuttaa separaatioaksiooman T_3 ja avaruus on normaali, jos se toteuttaa aksiooman T_4. Avaruus on T_3, jos se on säännöllinen ja T_0. Avaruus on T_4, jos se on normaali ja T_1.

Tässä tutkielmassa on käytetty tapaa 1 kuten kirjoissa [**3**], [**6**] ja [**9**]. Tapaa 2 ovat puolestaan käyttäneet muun muassa John Kelley (*General Topology*, 1955), Stephen

Willard (*General Topology*, 1970) ja Eric Schechter (*Handbook of Analysis and Its Foundations*, 1996).

Molemmissa tavoissa on puolensa. Ensimmäisessä tavassa T_i-aksiooman ja T_i-avaruuden välillä on suora vastaavuus. Toisessa tavassa puolestaan T_i-avaruus on aina myös T_j-avaruus, kun $i > j$ ja $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

6. Jatkuvien kuvausten laajentaminen topologisissa avaruuksissa

Tässä luvussa esitetään tapoja löytää jatkuvia kuvauksia topologisissa avaruuksissa. Luvun päätulokset ovat Urysonin lemma ja Tietzen jatkolause. Ensimmäinen kertoo, että normaalissa avaruudessa kahden erillisen suljetun joukon välillä on olemassa jatkuva kuvaus, joka saa yhdessä joukossa arvon 0 ja toisessa arvon 1. Jälkimmäinen puolestaan kertoo, että normaalin avaruuden suljetussa osajoukossa määritelty jatkuva kuvaus voidaan laajentaa koko avaruuteen niin, että laajennus on jatkuva.

Urysonin lemman ja Tietzen jatkolauseen todistukset seuraavat Munkresin kirjan mallia [**3**]. Vaikutteita on otettu myös Jussi Väisälän kirjasta Topologia 2 [**9**].

6.1. Apukäsitteitä

Urysonin lemman ja Tietzen jatkolauseen todistuksia varten tarvitaan vielä joitakin käsitteitä ja näihin liittyviä tuloksia.

Vastaavasti kuin aiemmin metristen avaruuksien osuudessa, myös topologisten avaruuksien tapauksessa tullaan tarvitsemaan topologia avaruuden osajoukolle.

Määritelmä 43 (Indusoitu topologia)**.** Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ on *(X, τ):n indusoima topologia* (eli niin kutsuttu relatiivitopologia) ja (A, τ_A) on topologinen avaruus.

Jatkossa oletetaan, että avoimien ja suljettujen välien topologioiksi on valittu $\tau_{\mathbb{R}}$:n kyseisille väleille indusoimat topologiat.

Propositio 44. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja $A \subset X$ suljettu joukko. Jos $B \subset A$ on suljettu joukko topologian τ_A suhteen, niin se on suljettu myös topologian τ suhteen.*

Todistus. Pitää siis osoittaa, että $X \setminus B \in \tau$, kun tiedetään, että $A \setminus B \in \tau_A$. Toisin sanoen pitää osoittaa, että jokainen joukon $X \setminus B$ piste on tämän joukon sisäpiste. Olkoon siis $x \in X \setminus B$. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

1: $x \in X \setminus A$. Koska $B \subset A$, niin $(X \setminus A) \subset (X \setminus B)$. Niinpä $X \setminus A$ on haluttu pisteen x ympäristö, koska A on suljettu.

2: $x \in A$. Tällöin $x \in A \setminus B$. Tehdään vastaoletus: x ei ole joukon $X \setminus B$ sisäpiste. Toisin sanoen jokaiselle pisteen x ympäristölle U pätee, että $U \not\subset X \setminus B$ eli että $U \cap B \neq \emptyset$. Toisin sanoen jokaisella pisteen x ympäristöllä U on olemassa piste x_U, jolle pätee $x_U \in U \cap B$.

Erityisesti $x_U \in B \subset A$. Koska kaikki ympäristöt U olivat avoimia (eli $U \in \tau$), niin $U \cap A \in \tau_A$ kaikilla U. Koska $x_U \in A$, niin $x_U \in U \cap A$ kaikilla U. Niinpä $A \setminus B$ ei ole pisteen $x \in A \setminus B$ ympäristö, koska tälle joukolle ei löydy pistettä x_U joukosta B. Tästä seuraa, että $A \setminus B \notin \tau_A$ eli että B ei ole suljettu joukko avaruudessa (A, τ_A). Tämä on kuitenkin ristiriita. Niinpä x on joukon $X \setminus B$ sisäpiste ja täten B on suljettu myös topologian τ suhteen. $\square$

Seuraavaksi määritellään homeomorfismin käsite. Muistetaan, että kuvaus $f : X \to Y$ on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio:

1. Injektio: jos $x_1, x_2 \in X$ ja $x_1 \neq x_2$, niin $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. Surjektio: $f(X) = Y$.

Bijektiolla on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \to X$, jolle pätee

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Määritelmä 45 (Homeomorfismi)**.** Olkoot $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topologisia avaruuksia. Bijektio $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ on *homeomorfismi*, jos f ja f^{-1} ovat jatkuvia.

Homeomorfismi f siis muuttaa avaruuden (X, τ_X) alkiot avaruuden (Y, τ_Y) alkioiksi niin, että muutos on käännettävissä yksiselitteisesti (käänteiskuvauksen f^{-1} avulla). Tämän voi tietyllä tavalla mieltää avaruuksien (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) ominaisuudeksi:

Määritelmä 46 (Homeomorfisuus)**.** Topologiset avaruudet (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) ovat *homeomorfiset*, jos on olemassa homeomorfismi $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$.

Käytännössä homeomorfisuutta tullaan käyttämään siihen, että Urysonin lemman ja Tietzen jatkolauseen todistuksissa voidaan valita avoimet tai suljetut välit, joille haluttu tulos osoitetaan. Esimerkiksi jos osoitetaan, että kuvaus $f : (X, \tau_X) \to ([a, b], \tau_1)$ on jatkuva, niin käyttämällä apuna homeomorfismia $g : ([a, b], \tau_1) \to ([c, d], \tau_2)$ saadaan jatkuva kuvaus $h = g \circ f : (X, \tau_X) \to ([c, d], \tau_2)$.

Myöhemmin tullaan käyttämään myös tietoa, että $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ on homeomorfinen minkä tahansa avoimen välin kanssa.

Tämän voi osoittaa esimerkiksi käyttämällä kuvausta $f : (]-1, 1[, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, joka on jatkuva bijektio. Lisäksi $f^{-1} : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \to (]-1, 1[, \tau)$, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$ on jatkuva, joten f on homeomorfismi. Koska $(]-1, 1[, \tau)$ on homeomorfinen minkä tahansa avoimen välin kanssa, niin sama pätee myös avaruudelle $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

Luettavuuden parantamiseksi osoitetaan jo nyt, että Urysonin lemman todistuksessa käytettävä konstruktio toimii. Muotoillaan tämä propositioksi:

Propositio 47. *Olkoon (X, τ_X) normaali topologinen avaruus ja olkoot $A, B \subset X$ erillisiä suljettuja joukkoja. Tällöin joukolla A on olemassa ympäristö U, jolle pätee $\bar{U} \subset X \setminus B$.*

Toisin sanoen, joukolla A on ympäristö U, jonka sulkeuma on erillinen joukosta B.

Todistus. Koska (X, τ_X) on normaali, niin suljetuilla joukoilla A ja B on olemassa erilliset ympäristöt U_A ja U_B. Koska U_A ja U_B ovat erillisiä, niin $U_A \subset X \setminus U_B$. Koska U_B on avoin, niin $X \setminus U_B$ on suljettu. Siispä sulkeuman määritelmän nojalla $\bar{U}_A \subset X \setminus U_B$. Lisäksi koska $B \subset U_B$, niin $(X \setminus U_B) \subset (X \setminus B)$ ja täten $\bar{U}_A \subset X \setminus B$.

Niinpä U_A on etsitty ympäristö U. □

Tietzen jatkolauseen todistuksessa puolestaan tarvitaan funktiojonoja ja funktiosarjoja. Määritellään ensin, mitä tarkoittaa funktiojonon tasainen suppeneminen.

Määritelmä 48 (Funktiojonon tasainen suppeneminen)**.** Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Olkoot $f_n : (X, \tau) \to (Y, d)$ kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Funktiojono $(f_n)_n$ *suppenee tasaisesti* kohti kuvausta $f : (X, \tau) \to (Y, d)$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kun $n > N$, niin

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{kaikilla} \quad x \in X.$$

Edellisessä määritelmässä ja jatkossakin puhutaan "funktiojonosta" eikä "kuvausjonosta" tai "jonosta kuvauksia". Syy tähän on yksinkertaisesti se, että funktiojono kuulostaa luontevammalta ilmaukselta kuin kumpikaan jälkimmäisistä.

Kuvaus ja funktio tarkoittavat käytännössä samaa asiaa. Usein funktiolla tarkoitetaan nimenomaan reaaliarvoista kuvausta. Kyse on kuitenkin vain yleisestä käytännöstä, ei ehdottomasta säännöstä. Tässä tutkielmassa sanaa "funktio" käytetään harvoin (ja etupäässä yhdyssanan osana), mutta sen merkitys on aina sama kuin sanan "kuvaus".

Huomautus 49. Edellisessä määritelmässä tarvittiin maalijoukoksi metrinen avaruus; tasainen suppeneminen tarkoittaa, että kun n on suuri, niin kuvausten f_n arvot ovat "lähellä" kuvauksen f arvoa missä tahansa pisteessä x. Kuitenkin jotta voidaan puhua "lähellä olemisesta", käytössä pitää olla jonkinlainen etäisyyden mitta – eli metriikka.

Tasaisesti suppenevalla funktiojonolla on seuraava hyödyllinen ominaisuus:

Propositio 50. *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Olkoot $f_n : (X, \tau) \to (Y, d)$ kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Jos kaikki kuvaukset f_n ovat jatkuvia ja funktiojono $(f_n)_n$ suppenee tasaisesti kohti kuvausta f, niin myös f on jatkuva.

Todistus. Katso [**3**, s. 132, lause 21.6]. □

Määritellään nyt funktiosarjan tasainen suppeneminen.

Määritelmä 51 (Funktiosarjan tasainen suppeneminen)**.** Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Olkoot $f_n : (X, \tau) \to (Y, d)$ kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos summafunktioiden $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ jono $(s_k)_k$ suppenee tasaisesti kohti kuvausta $f : (X, \tau) \to (Y, d)$, niin sanotaan, että *funktiosarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k \to \infty} s_k(x)$$

suppenee tasaisesti kohti kuvausta f.

Funktiosarjan tasainen suppeneminen määriteltiin siis funktiojonon tasaisen suppenemisen avulla (aivan vastaavalla tavalla kuin lukujen tapauksessa: sarjan suppeneminen määritellään osasummien jonon suppenemisena). Funktiosarjan voi osoittaa suppenevan tasaisesti erilaisten suppenemistestien avulla. Tässä tutkielmassa käytetään Weierstrassin M-testiä (katso esimerkiksi [**10**]):

Lemma 52 (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon* (X, τ) *topologinen avaruus. Olkoot* $f_n : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, d_E)$ *kuvauksia kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

Jos jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ *on olemassa* $M_n \in \mathbb{R}$ *siten, että*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \textit{kaikilla } x \in A$$

ja jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *suppenee, niin funktiosarja* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *suppenee tasaisesti ja itseisesti (eli funktioiden* $|f_n(x)|$ *muodostama sarja suppenee).*

Tässä tutkielmassa ei tarvita funktiosarjan itseistä suppenemista.

6.2. Urysonin lemma

Todistetaan nyt Urysonin lemma.

Lause 53 (Urysonin lemma). *Olkoon* (X, τ_X) *normaali topologinen avaruus.*

Olkoot $A, B \subset X$ *erillisiä suljettuja joukkoja ja olkoon* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *suljettu väli.*

Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $f : (X, \tau_X) \to [a, b]$*, jolle pätee* $f(x) = a$ *kaikille* $x \in A$ *ja* $f(x) = b$ *kaikille* $x \in B$.

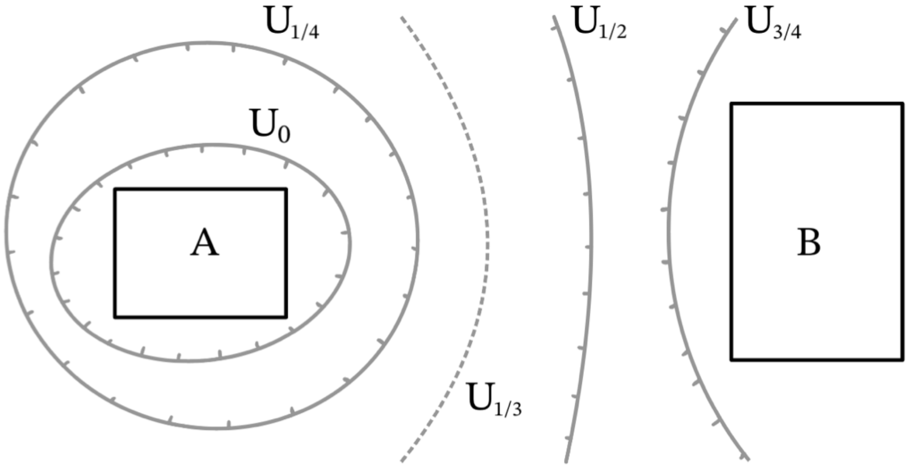
Todistus. Riittää osoittaa, että väite pätee kun $[a, b] = [0, 1]$. Yleinen tapaus seuraa tästä sekä välien $[a, b]$ ja $[0, 1]$ homeomorfisuudesta.

Olkoon P välille $[0, 1]$ kuuluvien rationaalilukujen joukko eli $P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Määritellään joukon P ja avaruuden (X, τ) normaaliuden avulla avoimet joukot U_p. Ideana on rakentaa joukon A ympäristöjä, jotka kasvavat indeksin p kasvaessa. Näin saadaan sisäkkäiset avoimet joukot U_p, joille pätee muun muassa $A \subset U_0 \subset U_{1/4} \subset U_{1/2} \subset U_{3/4} \subset U_1$; katso kuva 2 (alempana). Kuvaus f määritellään niin, että se saa arvonsa näiden joukkojen indekseistä ja lopuksi osoitetaan, että se on lisäksi jatkuva.

Ensimmäinen vaihe: Määritellään joukot U_p kaikille $p \in P$.

Koska P on numeroituva, niin sen alkiot voidaan järjestää jonoksi $(p_i)_i$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että jonon kaksi ensimmäistä alkiota ovat 1 ja 0.

Määritellään $U_1 = X \setminus B$. Joukko U_0 voidaan valita proposition 47 nojalla siten, että $A \subset U_0$ ja $\bar{U}_0 \subset U_1$. Seuraava joukko U_r, $0 < r < 1$ määritellään soveltamalla propositiota 47 joukkoihin $\bar{U}_0$ ja B. Tätä seuraava joukko U_s saadaan soveltamalla samaa propositiota joukkoihin $\bar{U}_0$ ja $X \setminus U_r$, jos $0 < s < r$, tai joukkoihin $\bar{U}_r$ ja $X \setminus U_1 = B$, jos $r < s < 1$. Tätä prosessia voidaan jatkaa kaikille $p \in P$, koska P on numeroituva. Kuvassa 2 on esitetty konkreettinen esimerkki tästä konstruktiosta.



KUVA 2. Avointen joukkojen U_p konstruktio. Joukko $U_{1/3}$ (merkitty katkoviivalla) voidaan valita niin, että se on joukkojen $U_{1/4}$ ja $U_{1/2}$ "välissä".

Tehdään tämä konstruktio täsmällisesti. Halutaan osoittaa, että joukot U_p voidaan valita rekursiivisesti siten, että

$$\bar{U}_r \subset U_s \quad \text{aina, kun} \quad r < s. \tag{7}$$

Tämä todistetaan induktiolla seuraavasti: Joukot U_0 ja U_1 on jo valittu edellä. Osoitetaan, että jos ehto (7) pätee, kun ensimmäiset n joukkoa on valittu, niin tämä ehto pätee myös kun $(n+1)$:s joukko on valittu.

Merkitään jonon $(p_i)_i$ n ensimmäistä alkiota sisältävää joukkoa P_n. Oletetaan, että joukot U_p on valittu jokaiselle $p \in P_n$ ja olkoon q jonon seuraava alkio. Koska joukko $P_n \cup \{q\}$ on äärellinen, niin voidaan helposti löytää luvut, jotka ovat suuruusjärjestyksessä juuri ennen lukua q ja juuri sen jälkeen. Merkitään lukua q edeltävää lukua a ja seuraavaa lukua b.

Sovelletaan propositiota 47 joukkoihin $\bar{U}_a$ ja $X \setminus U_b$. Tällöin U_q voidaan valita siten, että $\bar{U}_a \subset U_q \subset \bar{U}_q \subset U_b$. Osoitetaan, että ehto (7) pätee edelleen. Riittää tarkistaa, että kyseinen ehto pätee, kun jompikumpi indekseistä on q.

1. Jos $r < q$, niin ehdosta (7) seuraa, että $\bar{U}_r \subset U_a \subset \bar{U}_a \subset U_q$.
2. Jos $s > q$, niin ehdosta (7) seuraa, että $\bar{U}_q \subset U_b \subset \bar{U}_b \subset U_s$.

Niinpä joukot U_p voidaan määritellä kaikille $p \in P$ niin, että ehto (7) pätee.

Toinen vaihe: Määritellään kuvaus f.

Olkoon $x \in X$ ja merkitään $\mathbb{Q}(x) = \{p \in P : x \in U_p\} \subset P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Joukkoon $\mathbb{Q}(x)$ kuuluvat siis ne välin $[0,1]$ rationaaliluvut p, joille x kuuluu vastaavaan avoimeen joukkoon U_p.

Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{p \in P : x \in U_p\}, & \text{kun } x \in X \setminus B \\ 1, \quad \text{kun } x \in B. \end{cases}$$

Jos $x \in A$, niin $x \in U_p$ kaikille $p \in P$ ja täten $\mathbb{Q}(x) = P$. Tällöin $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf P = 0$.

Niinpä $f(x) = 0$ kaikille $x \in A$ ja $f(x) = 1$ kaikille $x \in B$.

Kolmas vaihe: Osoitetaan, että f on jatkuva.

Osoitetaan ensin kaksi aputulosta:

(8) Jos $x \in \bar{U}_r$, niin $f(x) \leq r$.

(9) Jos $x \notin U_r$, niin $f(x) \geq r$.

Osoitetaan ensin (8). Erotellaan kaksi tapausta: jos $r < 1$, niin $x \in U_s$ kaikille $s > r$. Toisin sanoen kaikki lukua r suuremmat välin $[0,1]$ rationaaliluvut kuuluvat joukkoon $\mathbb{Q}(x)$ ja täten $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$. Jos taas $r = 1$, niin väite seuraa suoraan, koska $f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in X$.

Osoitetaan sitten (9). Jos $x \notin U_r$, niin $x \notin U_s$ kaikille $s < r$. Toisin sanoen mikään lukua r pienempi välin $[0,1]$ rationaaliluku ei kuulu joukkoon $\mathbb{Q}(x)$ ja täten $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$.

Aputuloksia (8) ja (9) käyttämällä osoitetaan, että f on jatkuva.

Olkoon $x_0 \in X$ ja olkoon $]c,d[\subset \mathbb{R}$ avoin väli joka sisältää pisteen $f(x_0)$. Toisin sanoen $]c,d[$ on pisteen $f(x_0)$ ympäristö. Jatkuvuuden osoittamiseksi tarvitsee siis löytää pisteen x_0 ympäristö U, jolle pätee $f(U) \subset]c,d[$.

Koska $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ on välin $[0,1] \subset \mathbb{R}$ tiheä osajoukko, niin on olemassa rationaaliluvut p ja q siten, että

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Osoitetaan, että avoin joukko $U = U_q \setminus \bar{U}_p$ on etsitty pisteen x_0 ympäristö. Näytetään ensin, että $x_0 \in U$. Koska $f(x) < q$, niin ehdosta (9) seuraa, että $f(x_0) \in U_q$. Lisäksi koska $f(x) > p$, niin ehdosta (8) seuraa, että $f(x_0) \notin \bar{U}_p$.

Vielä pitää osoittaa, että $f(U) \subset]c,d[$. Olkoon $x \in U$. Tällöin $x \in U_q \subset \bar{U}_q$, joten ehdon (8) nojalla $f(x) \leq q$. Toisaalta $x \notin \bar{U}_p$ eli $x \notin U_p$, joten ehdon (9) nojalla $f(x) \geq p$. Niinpä $f(x_0) \in [p,q] \subset]c,d[$, kuten haluttiin. □

6.3. Tietzen jatkolause

Muotoillaan Tietzen jatkolause kahdessa osassa. Ensimmäisessä osassa kuvauksen f maalijoukko on suljettu väli $[a,b]$ ja toisessa koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

LAUSE 54 (Tietzen jatkolause). *Olkoon (X,τ) normaali topologinen avaruus ja $A \subset X$ suljettu joukko.*

1. *Olkoon lisäksi $[a,b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja $f : (A,\tau_A) \to [a,b]$ jatkuva kuvaus.*

Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $\hat{f} : (X, \tau) \to [a, b]$*, jolle pätee* $\hat{f}(x) = f(x)$ *kaikille* $x \in A$.

2. Olkoon lisäksi $f : (A, \tau_A) \to \mathbb{R}$ *jatkuva kuvaus.*
Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $\hat{f} : (X, \tau) \to \mathbb{R}$*, jolle pätee* $\hat{f}(x) = f(x)$ *kaikille* $x \in A$.

TODISTUS. Todistetaan ensin Tietzen jatkolauseen ensimmäinen osa. Käytetään sitten tätä apuna toisen osan todistamisessa.

Todistuksen idea on muodostaa jono jatkuvia kuvauksia s_n niin, että kyseinen jono suppenee tasaisesti. Lisäksi kuvaukset s_n määritellään sellaisella tavalla, että ne approksimoivat kuvausta f joukossa A sitä tarkemmin, mitä suuremmaksi n kasvaa. Tällöin "rajakuvaukselle" g pätee $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$. Lisäksi tasaisesta suppenemisesta seuraa, että g on jatkuva.

Olkoon $f : (A, \tau_A) \to [-r, r]$ jatkuva kuvaus. Aloitetaan osoittamalla, että on olemassa jatkuva kuvaus $h : (X, \tau) \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$|h(x)| \leq \frac{1}{3}r \quad \text{kaikilla } x \in X, \quad \text{ja} \tag{10}$$

$$|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}r \quad \text{kaikilla } a \in A. \tag{11}$$

Jaetaan väli $[-r, r]$ kolmeen yhtä suureen osaan:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \quad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

Määritellään $B := f^{-1}(I_1)$ ja $C := f^{-1}(I_3)$, jolloin $B, C \subset A$. Koska f on jatkuva ja joukot I_1 ja I_3 ovat suljettuja joukkoja, niin proposition 40 nojalla B ja C ovat suljettuja joukon A osajoukkoja. Täten proposition 44 nojalla B ja C ovat suljettuja joukossa X. Lisäksi koska I_1 ja I_3 ovat erillisiä, niin myös B ja C ovat erillisiä; jos näin ei olisi, niin olisi olemassa $x_0 \in B \cap C$. Tällöin olisi $f(x_0) \in I_1$, koska $x_0 \in B$ ja $f(x_0) \in I_3$, koska $x_0 \in C$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista joukkojen I_1 ja I_3 erillisyyden vuoksi.

Nyt Urysonin lemman nojalla on olemassa jatkuva kuvaus

$$h : (X, \tau) \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right],$$

jolle pätee $h(x) = -\frac{1}{3}r$ kaikilla $x \in B$ ja $h(x) = \frac{1}{3}r$ kaikilla $x \in C$. Kuvauksen h maalijoukkoa tarkastelemalla nähdään, että $|h(x)| \leq \frac{1}{3}r$ kaikilla $x \in X$ eli ehto (10) pätee. Osoitetaan, että myös ehto (11) pätee. Olkoon $a \in A$. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan:

1. Jos $a \in B$, niin $f(a) \in [-r, -\frac{1}{3}r]$ ja $h(a) = -\frac{1}{3}r$. Tällöin

$$|f(a) - h(a)| = \left|f(a) - \left(-\frac{1}{3}r\right)\right| \leq \left|-r - \left(-\frac{1}{3}r\right)\right| = \left|-\frac{2}{3}r\right| = \frac{2}{3}r.$$

2. Jos $a \in C$, niin $f(a) \in [\frac{1}{3}r, r]$ ja $h(a) = \frac{1}{3}r$. Tällöin

$$|f(a) - h(a)| = \left|f(a) - \frac{1}{3}r\right| \leq \left|r - \frac{1}{3}r\right| = \frac{2}{3}r.$$

3. Jos $a \in A \setminus (B \cup C)$, niin $f(a) \in [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ ja $h(a) \in [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$. Tällöin

$$|f(a) - h(a)| \leq |f(a)| + |h(a)| \leq \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r.$$

Niinpä $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}r$ kaikilla $a \in A$ eli toisin sanoen ehto (11) pätee.

Osoitetaan nyt, että ensimmäinen väite pätee kuvaukselle $f : (A, \tau_A) \to [-1, 1]$. Yleinen tapaus seuraa tästä sekä siitä, että mitkä tahansa kaksi suljettua väliä ovat homeomorfiset keskenään.

Edellä osoitetun perusteella on olemassa kuvaus $g_1 : (X, \tau) \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq \frac{1}{3} \quad \text{kaikilla } x \in X, \quad \text{ja} \\ |f(a) - g_1(a)| &\leq \frac{2}{3} \quad \text{kaikilla } a \in A. \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt kuvausta $f - g_1$. Tämä kuvaus on jatkuva ja se kuvaa joukon A välille $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Ehtoja (10) ja (11) voidaan soveltaa tähän kuvaukseen, kun asetetaan $r = \frac{2}{3}$. Jälleen edellä osoitetun perusteella on olemassa kuvaus $g_2 : (X, \tau) \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{kaikilla } x \in X, \quad \text{ja} \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{kaikilla } a \in A. \end{aligned}$$

Jatkamalla tätä prosessia voidaan induktiivisesti määritellä kuvaukset g_n kaikille $n \in \mathbb{N}$: oletetaan, että kuvaukset on määritelty indeksiin $m \in N$ asti. Tällöin soveltamalla ehtoja (10) ja (11) kuvaukseen $f - g_1 - g_2 - ... - g_m$ saadaan kuvaus g_{m+1}, jolle pätee

$$\begin{aligned} |g_{m+1}(x)| &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^m \quad \text{kaikilla } x \in X, \quad \text{ja} \\ |f(a) - g_1(a) - g_2(a) - ... - g_{m+1}(a)| &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \quad \text{kaikilla } a \in A. \end{aligned}$$

Määritellään nyt

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} g_n(x).$$

Koska $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja koska geometrinen sarja $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ suppenee (suhdeluku $\frac{2}{3} < 1$), niin Weierstrassin M-testin nojalla (lemma 52) funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ suppenee tasaisesti. Merkitään

$$g(x) := \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Tällä merkinnällä siis funktiojono $s_k(x)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota g. Koska kuvaukset $g_n(x)$ ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin myös kuvaukset $s_k(x)$ ovat jatkuvia kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (jatkuvien kuvausten summa on jatkuva). Niinpä proposition 50 nojalla g on jatkuva.

Vielä tarvitsee osoittaa, että $g(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$ ja että $g(X) = [-1, 1]$. Aloitetaan ensimmäisestä.

Koska

$$\left| f(a) - \sum_{n=1}^{k} g_n(a) \right| = |f(a) - s_k(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

kaikilla $a \in A$, niin $s_k(a) \to f(a)$, kun $k \to \infty$ ja täten $g(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$.

Lopuksi osoitetaan, että $g(X) = [-1, 1]$. Tämä seuraa itse asiassa jo siitä, että sarjan $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ summa on 1. Mutta vaikka näin onnellisesti ei olisikaan käynyt, niin tämä ehto voitaisiin täyttää seuraavasti: määritellään kuvaus $r : (X, \tau) \to [-1, 1]$,

$$r(y) = \begin{cases} y, & \text{kun } |y| \leq 1 \\ y/|y|, & \text{kun } |y| \geq 1. \end{cases}$$

Tällöin kuvaus $r \circ g : X \to [-1, 1]$ olisi etsitty kuvauksen f laajennus.

Todistetaan seuraavaksi Tietzen jatkolauseen toinen osa. Riittää todistaa väite kuvaukselle $f : (A, \tau_A) \to]-1, 1[$, koska $\mathbb{R}$ on homeomorfinen välin $]-1, 1[$ kanssa.

Ensimmäisen osan perusteella kuvauksella f on olemassa joukossa X määritelty laajennus g suljetulle välille $[-1, 1]$. Käytetään tätä kuvausta apuna laajennuksen $h : (X, \tau_X) \to]-1, 1[$ muodostamisessa.

Määritellään

$$D := g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}) \subset X.$$

Koska g on jatkuva ja avaruus (X, τ) on normaali, niin propositioista 40 ja 41 seuraa, että D on suljettu joukko. Koska $g(A) = f(A) \subset]-1, 1[$, niin joukot A ja D ovat erillisiä. Urysonin lemman nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $\phi : (X, \tau) \to [0, 1]$, jolle pätee $\phi(D) = 0$ ja $\phi(A) = 1$.

Määritellään $h : (X, \tau) \to]-1, 1[$,

$$h(x) = \phi(x)g(x).$$

Kuvaus h on kahden jatkuvan kuvauksen tulona jatkuva. Lisäksi kun $a \in A$, niin

$$h(a) = \phi(a)g(a) = 1 \cdot g(a) = g(a) = f(a).$$

Lisäksi kuvaus h todella kuvaa joukon X avoimelle välille $]-1, 1[$: jos $x \in D$, niin $h(x) = 0 \cdot g(x) = 0$ ja jos $x \notin D$, niin $|g(x)| < 1$ ja täten $|h(x)| = |1 \cdot g(x)| < 1$. $\square$

7. Separaatioaksioomat: esimerkkejä

Tämä luku on kokoelma muutamista separaatioaksioomiin liittyvistä esimerkeistä. Aiheeseen liittyvää lisälukemista löytyy kirjasta *Counterexamples in topology* [**6**].

Aiemmin mainittiin, että säännölliset ja normaalit avaruudet ovat Hausdorffin avaruuksia (itse asiassa normaalien avaruuksien väitettiin olevan säännöllisiä). Todistetaan nyt nämä tulokset. Todistuksissa oletetaan, että avaruuksissa on vähintään kaksi pistettä, koska muuten Hausdorffin ehdosta puhuminen ei ole mielekästä.

Propositio 55. *Olkoon* (X, τ) *topologinen avaruus. Jos* (X, τ) *on säännöllinen, niin se on myös Hausdorff.*

Todistus. Muistetaan, että avaruus on säännöllinen, jos se on T_3 ja T_0.

Olkoot $x, y \in X$, joille $x \neq y$. Pitää siis löytää erilliset ympäristöt U_x ja U_y siten, että $x \in U_x$ ja $y \in U_y$.

Koska (X, τ) on T_0, niin vähintään toisella näistä pisteistä on ympäristö, johon toinen ei kuulu. Voidaan olettaa, että x on tämä piste; on siis olemassa $U \in \tau$ siten, että $x \in U$ ja $y \notin U$. Tällöin $x \notin U^{\mathrm{C}}$ ja $y \in U^{\mathrm{C}}$. Koska U on avoin, niin $U^{\mathrm{C}} = X \setminus U$ on suljettu. Koska (X, τ) on T_3 ja koska $x \notin U^{\mathrm{C}}$, niin pisteellä x ja joukolla U^{C} on olemassa erilliset ympäristöt; merkitään pisteen x ympäristöä V ja joukon U^{C} ympäristöä W.

Koska $y \in U^{\mathrm{C}}$, niin W on myös pisteen y ymäristö. Edellisen nojalla V ja W ovat erilliset ja niinpä ne ovat etsityt pisteiden x ja y ympäristöt. □

Propositio 56. *Olkoon* (X, τ) *topologinen avaruus. Jos* (X, τ) *on normaali, niin se on myös säännöllinen (ja erityisesti Hausdorff).*

Todistus. Väite on ilmiselvä (muistetaan, että avaruus on normaali, jos se on T_4 ja T_1):

Koska (X, τ) on T_1, niin proposition 41 nojalla yhden pisteen joukot ovat suljettuja. Niinpä jos $x \in X$ ja $F \subset X$ on suljettu siten, että, $x \notin F$, niin ehdon T_4 nojalla näillä on erilliset ympäristöt. Siispä normaali avaruus on säännöllinen ja täten myös Hausdorff. □

Huomautus 57. Muistutetaan vielä, että pelkästään ehdosta T_4 ei välttämättä seuraa, että avaruus on Hausdorff. Tämän voi *melkein* todistaa ottamalla kahden eri pisteen x ja y sulkeumat ja yrittämällä soveltaa ehtoa T_4 näihin sulkeumiin (jotka ovat suljettuja joukkoja). Ongelmana on, että sulkeumat $\overline{\{x\}}$ ja $\overline{\{y\}}$ eivät välttämättä ole erillisiä. Niinpä ehto T_4 ei takaa, että näillä olisi erilliset ympäristöt.

Lähteet

[1] Lebesgue, H.: *Sur le problème de Dirichlet.* RCMP 24 (1907), pp. 1-32.
[2] McShane, Edward James: *Extension of range of functions.* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 40, No. 12 (Dec. 1934), pp. 837-842.
[3] Munkres, James R.: *Topology (second edition).* Prentice Hall Inc., 2000.
[4] Rockafellar, R. Tyrrell: *Convex analysis.* Princeton University Press, 1970.
[5] Rockafellar, R. Tyrrell; Wets, Roger J. B.: *Variational analysis.* Springer-Verlag, 1998.
[6] Steen, Lynn Arthur; Seebach, J. Arthur Jr.: *Counterexamples in topology.* Springer-Verlag, 1978.
[7] Tietze, H.: *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.* J. Reine Angew. Math. 145 (1915): pp. 9–14.
[8] Uryson, P.: *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen.* Mathematische Annalen 94 (1925): pp. 262–295.
[9] Väisälä, Jussi: *Topologia 2.* Limes, 1999.
[10] Whittaker, E. T.; Watson, G. N.: *A course of modern analysis (fourth edition, reprinted).* London, 1958.
[11] Zalinescu, C.: *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific Publishing Company, 2002.
[12] *Urysohn-Brouwer lemma.* Encyclopedia of Mathematics.
URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Urysohn-Brouwer_lemma&oldid=49099
Viitattu 11.6.2023.