Hyötyfunktiot ja riskin kaihdanta

Anneliina Savonen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2022

Tiivistelmä: Anneliina Savonen, *Hyötyfunktiot ja riskin kaihdanta* (engl. *Utility functions and risk aversion*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 60s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Syksy 2022.

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija sijoittajan valintaongelmien taustalla vaikuttavaan matematiikkaan sekä auttaa hahmottamaan, kuinka sijoittajan suhtautuminen riskiin näkyy salkun valinnassa. Tutkielman ymmärtäminen edellyttää lukijalta todennäköisyyslaskennan ja stokastisten prosessien sekä tilastotieteen perusteiden tuntemista. Oletamme sijoittajan pyrkivän sijoituspäätöksillään maksimoimaan odotetun hyötynsä. Sijoittajan kokema hyöty puolestaan liittyy oleellisesti hänen riskinsietokykyynsä, jonka perusteella hänet voidaan luokitella riskihakuiseksi, riskineutraaliksi tai riskiä kahitavaksi. Riskihakuinen sijoittaja edellyttää matalariskisiltä sijoitusvaihtoehdoilta suurempaa odotettua tuottoa kuin korkeariskisiltä. Riskineutraali sijoittaja voi valita minkä tahansa sijoitusvaihtoehdon, mikäli niiden odotetut tuotut ovat yhtäsuuria. Riski ei vaikuta tuolloin päätöksentekoon. Riskiä kaihtava sijoittaja valitsisi samassa tilanteessa riskittömimmän vaihtoehdon. Sijoittajien preferenssit voidaan ilmaista hyötyfunktion avulla. Suhtautuminen riskiin vaikuttaa sijoittajan hyötyfunktion muotoon. Riskihakuisen sijoittajan hyötyfunktio on konveksi, riskineutraalin lineaarinen ja riskinkaihtajan konkaavi.

Jotta riskiä kaihtava sijoittaja päätyisi riskittömimmän sijoitusvaihtoehdon sijasta korkeamman riskin omaavaan vaihtoehtoon, tulisi tästä vaihtoehdosta tarjota kompensaationa parempi tuotto. Tähän riskinkaihtajan edellyttämän kompensaation suuruuteen vaikuttaa sijoittajan riskinkaihtamisen aste, jota mitataan riskinkaihtamisen kertoimella. Tässä tutkielmassa tarkastellaan Arrowin ja Prattin absoluuttisen riskin kaihtamisen kerrointa ja suhteellisen riskin kaihtamisen kerrointa, jotka generoivat neljä hyötyfunktioiden pääluokkaa.

Riskinsietokyvyn lisäksi sijoittajan tekemiin sijoituspäätöksiin ja sitä kautta salkun valintaan vaikuttaa sijoittajan budjettirajoite. Kun sijoittajan tulot vastaavat salkun hintaa, hän pyrkii valitsemaan salkkunsa siten, että hänen odotettu hyötynsä maksimoituu.

Sisällys

Johdanto

1700-luvulla vaikuttanut sveitsiläinen matemaatikko ja fyysikko Daniel Bernoulli kehitti uuden tavan mitata riskiä analysoidessaan aikansa suosittua ajanvietettä, arpajaisia. Hän esitti teoriansa vuonna 1738 julkaisussaan *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis* [**1**]. Bernoulli pohti seuraavaa ongelmaa: jos vähävarainen mies sattuu löytämään arpajaislipukkeen, jolla voi yhtä todennäköisesti voittaa 20000 dukaattia kuin 0 dukaattia, kannattaako hänen myydä lipuke 9000 dukaatilla? Entä kannattaako varakkaan miehen ostaa tuo kuponki 9000 dukaatin hintaan? Bernoullin mielestä vastaus molempiin kysymyksiin on ”kyllä”. Bernoulli esitti, ettei hyödykkeen arvon tulisi perustua sen hintaan vaan sen tuomaan hyötyyn. Hyöty puolestaan on subjektiivinen käsite ja se määräytyy kullekin ihmiselle tämän omista lähtökohdista. Bernoullin keskeinen havainto oli, että vähävarainen kokee suuremman hyödyn yhdestä dukaatista kuin varakas ja että ihmisen päätöksenteko arpajaisongelmassa ei perustu odotusarvoon vaan odotettuun hyötyyn. Lisäksi jokainen saatu dukaatti tuottaa saajalleen pienemmän hyödyn kuin sitä edeltänyt dukaatti, mikä tunnetaan nykyisin *vähenevän rajahyödyn lakina*. Bernoullista tuli analyysinsä myötä nykyaikaisen taloustieteen pioneeri ja hänen työnsä kehittäminen johti muun muassa 1944 Von Neumanin ja Morgensternin julkaisuun *Theory of Games and Economic Behavior* [**2**], joka loi perustan peliteorialle. [**3**].

Tässä tutkielmassa keskitytään Bernoullin havaintojen taustalla vaikuttavaan matematiikkaan ja sitä kautta sijoittajan kohtaamien valintaongelmien ratkaisemiseen. Ensimmäisessä luvussa kertaamme stokastiikan peruskäsitteitä ja esittelemme hyötyfunktion ja rajahyödyn. Käymme läpi lemmoja, jotka auttavat meitä hyötyfunktion maksimoinnissa ja kertaamme hyötyfunktioon oleellisesti liittyvät konkaavin ja konveksin funktion käsitteet. Sijoittaja pyrkii odotetun hyödyn maksimointiin ja sijoittajan odotettuun hyötyyn vaikuttaa hänen suhtautumisensa riskinottoon. Esimerkit auttavat hahmottamaan eroja riskinkaihtajan, riskinottajan ja riskineutraalin sijoittajan välillä. Tarkastelemme niiden kautta hyötyfunktion konkaaviuden ja konveksisuuden vaikutusta sijoittajan riskin kaihtamiseen ja sitä kautta odotettuun hyötyyn. Riskiä kaihtava sijoittaja edellyttää saavansa riskin ottamisesta kompensaatiota. Tätä kompensaatiota kutsumme tutkielmassa *preemioksi*. Vaadittava preemio riippuu oleellisesti siitä, kuinka paljon sijoittaja kaihtaa riskiä. Luvussa 1.4 esittelemme riskin kaihtamisen mittareina tunnetut *Arrowin ja Prattin absoluuttisen riskin kaihtamisen kertoimen* ja *suhteellisen riskin kaihtamisen kertoimen* sekä määrittelemme preemion additiivisen ja multiplikatiivisen riskin tapauksessa. Lisäksi esittelemme neljä hyötyfunktioiden pääluokkaa, jotka edellä mainitut riskin kaihtamisen kertoimet generoivat. Luvun lopuksi tarkastelemme riskiä kaihtavan sijoittajan päätöksentekoa vakuuttamiseen liittyen. Selvitämme yksinkertaisen esimerkin kautta, mikä on odotetun hyödyn kannalta vakuutuksen optimaalisin korvaussumma sijoittajalle.

Toisessa luvussa keskitymme arvopapereiden hinnoitteluun ja arbitraasimahdollisuuteen, joka tarkoittaa sijoitusmahdollisuutta, jossa sijoittaja voi saada tuottoa ilman varsinaista nettoinvestointia. Luvun keskeisenä sisältönä esitämme arbitraasivapaiden markkinoiden määritelmän. Kolmannessa luvussa käsittelemme optimaalista sijoitussalkun valintaa. Huomioimme tässä *budjettirajoitteen*, jonka mukaan sijoittajan tulojen on oltava vähintään yhtä suuren kuin sijoitussalkun hinnan. Sijoittaja pyrkii siis valitsemaan budjettirajoitteensa puitteissa salkun siten, että hänen odotettu hyötynsä maksimoituu. Esittelemme salkun valinnan lauseen ja hinnoitteluyhtälön. Sovellamme luvun lopuksi teoriaa käytännön esimerkkeihin, joissa ratkaisemme sijoittajan salkun optimaalisen hajautuksen eri sijoituskohteiden välillä hyödyntäen Lagrangen funktiota. Neljännessä luvussa esittelemme edellisen luvun hinnoittelukaavan sovelluksen logaritmiselle hyötyfunktiolle.

Viidennessä luvussa keskitymme riskiä kaihtavan sijoittajan päätöksentekoon tilanteessa, jossa sijoittajan sijoitushorisontti on kahden periodin mittainen. Ensimmäisellä periodilla sijoittaja kuluttaa osan tuloistaan ja sijoittaa loput riskittömään sijoituskohteeseen. Toisella periodilla sijoittaja kuluttaa sekä toisen periodin tulot että ensimmäisen periodin sijoituksensa tuottoineen. Selvitämme, kuinka suuri on sijoittajan ensimmäisen ja toisen periodin optimaalinen kulutus, jolla sijoittaja maksimoi odotetun hyötynsä. Käsittelemme erikseen tilanteen, jossa sijoittaja tietää etukäteen toisen periodin tulonsa ja tilanteen, jossa toisen periodin tuloon liittyy epävarmuutta. Esittelemme optimointiongelman kannalta tärkeinä käsitteinä *samahyötykäyrän* ja *budjettisuoran* sekä havainnollistamme optimaalisen kulutusparin valintaa kuvaajien ja esimerkin avulla. Käsittelemme sijoittajan sijoitusstrategian valintaa myös tilanteessa, jossa hänellä on käytössään vain siihen hetkeen mennessä kertyneet tiedot. Esittelemme tähän liittyen filtraation käsitteen, jonka avulla määrittelemme tämän uuden hinnoittelukaavan. Lopuksi johdamme kaksi keskeistä hinnoittelukaavan implikaatiota. Tutkielma perustuu Luis Alvarezin ja Lasse Koskisen *Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille*- kirjan ensimmäiseen lukuun [**4**].

LUKU 1

Staattiset valintaongelmat

1.1. Todennäköisyysteoriaa

Käsittelemme tässä tutkielmassa satunnaismuuttujia ja odotusarvoja, joten kertaamme aluksi sigma-algebran, todennäköisyysmitan, todennäköisyysavaruuden ja odotusarvon käsitteen.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon Ω epätyhjä joukko. Joukon Ω osajoukkojen kokoelma $\mathcal{F}$ on sigma-algebra joukolle Ω, mikäli seuraavat ehdot täyttyvät:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ ja $\Omega \in \mathcal{F}$,
(ii) jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$ ja
(iii) jos $A_j \in \mathcal{F}$ kaikilla $j \in J$, missä J on numeroituva joukko, niin $\displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{F}$.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon $\mathcal{F}$ sigma-algebra joukossa Ω. Kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ on mitta-avaruuden $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysmitta, mikäli seuraavat ehdot täyttyvät:

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ja $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ja
(ii) kaikilla erillisillä joukoilla $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in J$, missä J on numeroituva joukko, pätee, että $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoon Ω epätyhjä joukko ja $\mathcal{F}$ sigma-algebra joukossa Ω. Olkoon lisäksi kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ todennäköisyysmitta. Tällöin kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi.

Lisätietoa ja esimerkkejä aiheeseen liittyen löytyy esimerkiksi Werner Linden kirjasta Probability Theory: A First Course in Probability Theory and Statistics [**5**]. Tutkielmassa esiintyvien satunnaismuuttujien oletetaan olevan määritelty todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Reaalilukuarvoisen satunnaismuuttujan x odotusarvoa merkitään $\mathbf{E}[x]$.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja ja olkoon sen arvojoukko $\{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}$. Mikäli

$$\mathbf{E}[|X|] := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \, \mathbb{P}\{X = x_j\} < \infty \,,$$

niin satunnaismuuttujan X odotusarvo on olemassa ja se on muotoa

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbb{P}\{X = x_j\} \,.$$

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja ja olkoon sen tiheysfunktio p. Mikäli

$$\mathbf{E}[|X|] := \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)dx < \infty\,,$$

niin satunnaismuuttujan X odotusarvo on olemassa ja se on muotoa

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx\,.$$

1.2. Hyötyfunktio

Jos eri sijoitusvaihtoehtojen tarjoamat tuotot olisivat etukäteen varmuudella tiedossa, sijoittaja valitsisi aina sen sijoitusvaihtoehdon, joka toisi hänelle korkeimman varallisuuden tason. Tosiasiassa sijoitusten tuottoon liittyy kuitenkin usein epävarmuutta ja sijoittajat eroavat toisistaan riskipreferenssien suhteen. Siinä missä yksi suosii riskinottoa, toinen voi karttaa riskiä. Tämä vaikuttaa siihen, kuinka suuren hyödyn kukin sijoittaja odottaa eri sijoitusvaihtoehdoista saavansa. Tarvitsemmekin apuvälineeksi hyötyfunktion, joka arvottaa ja arvostaa eri satunnaisia varallisuuden tasoja odotetun hyödyn periaatteella. Hyötyfunktio on mikä tahansa tarkasteltavan taloudellisen suureen määrittelyjoukossa $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ määritelty, jatkuva ja kaikissa koordinaateissa monotonisesti kasvava funktio $U : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Kun $n = 1$ ja hyötyfunktio on differentioituva, kuvausta U' kutsutaan *rajahyödyksi*. Sijoittajan toimintaa tarkasteltaessa rajahyöty kertoo, kuinka paljon yhden yksikön lisäys kasvattaa sijoittajan sijoituspäätöksestä saamaa hyötyä. Kun kuvaus U' on vähenevä, voimassa on *vähenevän rajahyödyn laki*. Tämä tarkoittaa, että jokainen lisäyksikkö kasvattaa hyötyä vähemmän kuin edellinen. Perehtyäksemme tarkemmin hyötyfunktion ominaisuuksiin, esittelemme seuraavaksi konveksin joukon ja konkaavin funktion määritelmän. Koska sijoittaja pyrkii maksimoimaan oman hyötynsä, tarkastelemme lisäksi konkaavin funktion ensimmäistä derivaattaa ja etsimme hyötyfunktion suurinta arvoa lemmojen 1.8 ja 1.9 avulla. Lemman 1.10 avulla käsittelemme toisistaan taloudellisesti riippuvia suureita aidosti konkaavin hyötyfunktion näkökulmasta. Lopuksi käymme läpi erilaisia sijoittajan valintaongelmia, joiden ratkaisemisessa hyödynnetään odotetun hyödyn maksimointia.

1.2.1. Konveksi joukko ja konkaavi funktio.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on konveksi joukko, mikäli $(1-\lambda)a + \lambda b \in A$ kaikilla $a, b \in A$ ja $\lambda \in (0, 1)$.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksi. Tällöin funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on konkaavi, mikäli kaikilla $a, b \in A$ ja kaikilla $\lambda \in (0, 1)$ pätee, että

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\,.$$

Funktio f on aidosti konkaavi, mikäli edellä pätee aito epäyhtälö.

Lisätietoa konvekseista joukoista sekä konkaaveista funktioista löytyy esimerkiksi R. Tyrrell Rockafellarin kirjasta Convex Analysis [**6**]. Seuraava lemman nojalla hyötyfunktio U on konkaavi jos ja vain jos vähenevän rajahyödyn laki toteutuu.

LEMMA 1.8. *Olkoon f jatkuvasti differentioituva funktio konveksissa määrittelyjoukossa $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin funktio f on konkaavi joukossa $\mathcal{I}$ jos ja vain jos sen ensimmäinen derivaatta f' on vähenevä. Funktio f on aidosti konkaavi joukossa $\mathcal{I}$ jos ja vain jos sen ensimmäinen derivaatta f' on aidosti vähenevä.*

TODISTUS. Osoitamme lemman ensimmäisen osion. Jälkimmäinen osion todistaminen tapahtuu vastaavalla tavalla. Inspiraatiota todistukseen on saatu Yungin julkaisusta [**7**].
(i) Osoitamme ensin, että jos jatkuvasti differentioituvan funktion f ensimmäinen derivaatta on vähenevä, niin funktio on konkaavi. Olkoon $a, b, c \in \mathcal{I}$ siten että $a < b < c$. Funktio f on jatkuvasti differentioituva funktio määrittelyjoukossaan $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $x \in (a, b)$ ja $y \in (b, c)$ siten, että

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ja

$$f'(y) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Koska f' on vähenevä ja $x < y$, niin $f'(x) \geq f'(y)$. Toisin sanoen,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}, \tag{1.1}$$

jolloin

$$\begin{aligned} f(b)\frac{c - a}{(b - a)(c - b)} &= f(b)\frac{c - b + b - a}{(b - a)(c - b)} \\ &= f(b)\left(\frac{1}{b - a} + \frac{1}{c - b}\right) \\ &\geq \frac{f(c)}{c - b} + \frac{f(a)}{b - a}, \qquad (1.2) \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa epäyhtälöstä (1.1). Epäyhtälön (1.2) avulla puolestaan saamme

$$\begin{aligned} f(b) &\geq \frac{(b - a)(c - b)}{(c - a)(c - b)}f(c) + \frac{(b - a)(c - b)}{(c - a)(b - a)}f(a) \\ &= \frac{b - a}{c - a}f(c) + \frac{c - b}{c - a}f(a) \\ &= \frac{c - a - (c - b)}{c - a}f(c) + \frac{c - b}{c - a}f(a) \\ &= \left(1 - \frac{c - b}{c - a}\right)f(c) + \frac{c - b}{c - a}f(a). \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Olkoon $\lambda \in (0, 1)$ ja $b = c - \lambda(c - a) = \lambda a + (1 - \lambda)c \in (a, c)$. Tällöin $\lambda = (c - b)/(c - a)$ ja saamme yhtälön (1.3) muotoon

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)c) \geq (1 - \lambda)f(c) + \lambda f(a),$$

mikä määritelmän 1.7 nojalla merkitsee, että f on konkaavi.

(ii) Seuraavaksi osoitamme, että mikäli jatkuvasti differentioituva funktio f on konkaavi, niin sen ensimmäinen derivaatta f' on vähenevä. Olkoon $r, s, t, u \in (a, b) \subseteq \mathcal{I}$ siten, että $r < s < t < u$. Funktio f on jatkuvasti differentioituva funktio määrittelyjoukossaan $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, joten

$$f'(r) = \lim_{s \to r^+} \frac{f(s) - f(r)}{s - r} \tag{1.4}$$

ja

$$f'(u) = \lim_{t \to u^-} \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \, . \tag{1.5}$$

Olkoon $\lambda = (t - s)/(t - r)$. Tällöin $\lambda \in (0, 1)$ ja $s = \lambda r + (1 - \lambda)t = t - \lambda(t - r)$. Funktion f konkaavisuuden nojalla

$$f(\lambda r + (1 - \lambda)t) \geq \lambda f(r) + (1 - \lambda) f(t) \, ,$$

mikä tarkoittaa sitä, että

$$\begin{aligned} f(s) &\geq \frac{t - s}{t - r} f(r) + \frac{t - r - t + s}{t - r} f(t) \\ &= \frac{t - s}{t - r} f(r) + \frac{s - r}{t - r} f(t) \, . \end{aligned}$$

Kertomalla epäyhtälön puolittain tekijällä $t - r$ saamme

$$(t - r) f(s) \geq (t - s) f(r) + (s - r) f(t) \, . \tag{1.6}$$

Yhtälöstä (1.6) saamme

$$\begin{aligned} (t - r) f(s) &\geq (t - s + r - r) f(r) + (s - r) f(t) \\ &= (t - r) f(r) - (s - r) f(r) + (s - r) f(t) \, , \end{aligned}$$

jolloin

$$(t - r)(f(s) - f(r)) \geq (s - r)(f(t) - f(r)) \, .$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain tekijällä $1/(t - r)(s - r)$ saamme

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq \frac{f(t) - f(r)}{t - r} \, . \tag{1.7}$$

Yhtälöstä (1.6) saamme myös

$$\begin{aligned} (t - r) f(s) &\geq (t - s) f(r) + (s - r + t - t) f(t) \\ &= (t - s) f(r) + (t - r) f(t) - (t - s) f(t) \, , \end{aligned}$$

jolloin

$$(t - s)(f(t) - f(r)) \geq (t - r)(f(t) - f(s)) \, .$$

Kertomalla epäyhtälö puolittain tekijällä $1/(t - s)(t - r)$ saamme

$$\frac{f(t) - f(r)}{t - r} \geq \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \, . \tag{1.8}$$

Olkoon nyt $\lambda = (u-t)/(u-s)$. Tällöin $\lambda \in (0,1)$ ja $t = \lambda s + (1-\lambda)u = u - \lambda(u-s)$. Funktion f konkaavisuuden nojalla saamme kuten edellä

$$f(t) \geq \frac{u-t}{u-s} f(s) + \frac{t-s}{u-s} f(u) \,.$$

Sieventämällä tätä yhtälöä kuten edellä, saamme

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \geq \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \tag{1.9}$$

ja

$$\frac{f(u)-f(s)}{u-s} \geq \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \,. \tag{1.10}$$

Epäyhtälöiden (1.7), (1.8), (1.9) ja (1.10) nojalla konkaaville funktiolle f pätee

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \geq \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \geq \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \,.$$

Näin ollen, kun $s \to r^+$ ja $t \to u^-$, niin yhtälöiden (1.4) ja (1.5) nojalla $f'(r) \geq f'(u)$ kaikilla $r < u$, $r, u \in (a,b) \subseteq \mathcal{I}$. Koska funktion f derivaatta on oletuksen nojalla jatkuva, väite pätee myös välin $[a,b]$ päätepisteille. $\square$

Lemma 1.9. *Olkoon $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ konveksi väli ja olkoon $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva konkaavi funktio. Oletetaan, että $f'(c) = 0$ jollakin $c \in \mathcal{I}$. Tällöin funktio f saa suurimman arvonsa pisteessä c.*

Todistus. Lemman 1.8 nojalla funktion ensimmäinen derivaatta on vähenevä. Tällöin $f'(x) \geq 0 \ \forall x \leq c$ ja $f'(x) \leq 0 \ \forall x \geq c$. Toisin sanoen $f(x) \leq f(c) \forall x \in \mathcal{I}$, joten funktio f saa suurimman arvonsa pisteessä c. $\square$

Lemma 1.10. *Olkoon hyötyfunktio $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aidosti konkaavi funktio ja olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $f(x) := U(x, a+bx)$ on aidosti konkaavi.*

Todistus. Funktion f määritelmän nojalla kaikilla $\lambda \in (0,1)$ pätee

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= U(\lambda x + (1-\lambda)y, a + b(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &= U(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda a + (1-\lambda)a + \lambda bx + (1-\lambda)by)) \\ &= U(\lambda(x, a+bx) + (1-\lambda)(y, a+by)) \,, \end{aligned}$$

missä hyödynsimme toisella rivillä lauseketta $a = \lambda a + (1-\lambda)a$. Oletuksen nojalla hyötyfunktio U on aidosti konkaavi, jolloin määritelmän 1.7 mukaisesti

$$U(\lambda(x, a+bx) + (1-\lambda)(y, a+by)) > \lambda U(x, a+bx) + (1-\lambda)U(y, a+by) \,.$$

Tällöin funktiolle f pätee

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= U(\lambda(x, a+bx) + (1-\lambda)(y, a+by)) \\ &> \lambda U(x, a+bx) + (1-\lambda)U(y, a+by) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

ja määritelmän 1.7 nojalla funktio f on aidosti konkaavi. $\square$

1.2.2. Hyötyfunktiot sijoittajan valintaongelmissa. Seuraavaksi tarkastelemme sijoittajan valintaongelmia hyötyfunktion avulla. Sijoittaja valitsee eri sijoitusvaihtoehdoista sen, joka tarjoaa hänelle suurimman odotetun hyödyn. Koska haluamme saada tietoon, kumpi kahdesta satunnaisesta sijoitusvaihtoehdosta x ja y on sijoittajalle mieluisempi, meidän tulee selvittää

$$\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\},$$

missä x ja y kuvastavat sijoitusvaihtoehtojen tuomaa varallisuutta. Tuleva varallisuus ei ole ennalta tiedossa, joten x ja y ovat satunnaismuuttujia. Odotettavissa olevat hyödyt saadaan siis ottamalla odotusarvot $\mathbf{E}[U(x)]$ ja $\mathbf{E}[U(y)]$.

Esimerkki 1.11. Sijoittajalla on kaksi satunnaista sijoitusvaihtoehtoa x ja y, joiden tuomat varallisuudet ovat Log-normaalijakautuneita joukolle $(0, \infty)$. Toisin sanoen $\ln x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ja $\ln y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Voidaksemme vertailla sijoitusvaihtoehtoja niiden tarjoaman odotetun hyödyn suhteen, selvitämme odotetut hyödyt $\mathbf{E}[U(x)]$ ja $\mathbf{E}[U(y)]$. Kun $z \sim N(\mu, \sigma^2)$, missä $\sigma > 0$, niin normaalijakauman tiheysfunktio on muotoa

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

jolloin satunnaismuuttujalle z pätee

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{bz}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{by} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{2\sigma^2 by-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{2\sigma^2 by-y^2+2y\mu-\mu^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2-2yb\sigma^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2-2y(b\sigma^2+\mu)+(b\sigma^2+\mu)^2-(b\sigma^2+\mu)^2+\mu^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-(b\sigma^2+\mu))^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{(b\sigma^2+\mu)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= e^{\frac{(b\sigma^2+\mu)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(b\sigma^2+\mu)}{\sigma}\right)^2} dy \\
&= e^{\frac{b^2\sigma^4+2b\sigma^2\mu+\mu^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}b^2\sigma^2+b\mu}, \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

missä $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(b\sigma^2+\mu)}{\sigma}\right)^2} dy = 1$, sillä $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(b\sigma^2+\mu)}{\sigma}\right)^2}$ on normaalijakauman $N(b\sigma^2+\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{2z}] &= e^{\frac{1}{2}2^2\sigma^2+2\mu} \\
&= e^{2\sigma^2+2\mu}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[e^z] &= \mathbf{E}[e^z - \mathbf{E}[e^z]]^2 \\
&= \mathbf{E}[e^{2z}] - (\mathbf{E}[e^z])^2 \\
&= e^{2\sigma^2+2\mu} - \left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu}\right)^2 \\
&= e^{2\sigma^2+2\mu} - e^{\sigma^2+2\mu} \\
&= e^{\sigma^2+2\mu}\left(e^{\sigma^2} - 1\right). \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Olkoon hyötyfunktio nyt muotoa $U(x) = x^b$, missä $b > 0$ on tunnettu vakio. Tällöin $\ln U(x) = \ln x^b = b \ln x$. Esimerkin alussa määrittelimme, että $\ln x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[b \ln x] &= b\mathbf{E}[\ln x] \\
&= b\mu_x
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[b \ln x] &= \mathbf{E}[(b \ln x)^2] - (\mathbf{E}[b \ln x])^2 \\
&= \mathbf{E}[b^2(\ln x)^2] - (b\mathbf{E}[\ln x])^2 \\
&= b^2(\mathbf{E}[(\ln x)^2] - (\mathbf{E}[\ln x])^2) \\
&= b^2\mathrm{Var}[\ln x] \\
&= b^2\sigma_x^2,
\end{aligned}$$

joten $\ln x^b = b \ln x \sim N(b\mu_x, b^2\sigma_x^2)$. Vastaavasti $\ln y^b = b \ln y \sim N(b\mu_y, b^2\sigma_y^2)$. Saamme nyt yhtälön (1.11) avulla, että kaikille $\ln v \sim N(\mu_v, \sigma_v^2)$ pätee

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U(v)] &= \mathbf{E}[v^b] \\
&= \mathbf{E}[\left(e^{\ln v}\right)^b] \\
&= \mathbf{E}[e^{b \ln v}] \\
&= e^{\frac{1}{2}b^2\sigma_v^2 + b\mu_v}. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Sijoittajan valintaongelma sijoitusvaihtoehtojen x ja y välillä tulee siis muotoon

$$\begin{aligned}
\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} &= \max\left\{e^{b\mu_x + \frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}, e^{b\mu_y + \frac{1}{2}b^2\sigma_y^2}\right\} \\
&= e^{b\mu_x + \frac{1}{2}b^2\sigma_x^2} \max\left\{1, e^{b(\mu_y - \mu_x) + \frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)}\right\}. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Mikäli olisi $\mu_x = \mu_y$, niin saisimme yhtälön (1.14) muotoon

$$\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} = e^{b\mu_x + \frac{1}{2}b^2\sigma_x^2} \max\left\{1, e^{\frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)}\right\}.$$

Koska $e > 0$, niin sijoittaja valitsee sijoitusvaihtoehdon y, kun $e^{\frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)} > 1 = e^0$ eli kun $\frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) > 0$. Toisin sanoen, jos odotusarvot μ_x ja μ_y ovat yhtä suuret, sijoittaja valitsee sijoitusvaihtoehdon y, kun $\sigma_y > \sigma_x$ ja sijoitusvaihtoehdon x, kun $\sigma_x > \sigma_y$. Hän siis päätyy siihen sijoitusvaihtoehtoon, jonka logaritmisen arvon keskihajonta σ on suurin. Se ei kuitenkaan välttämättä tarkoita, että hän valitsisi riskillisimmän vaihtoehdon. Tämä siksi, että yhtälöiden (1.11) ja (1.12) nojalla muutos parametrissa σ muuttaa sekä odotusarvoa että varianssia. Yleensä riskiä kuitenkin mitataan pelkästään keskihajonnan avulla. Määrittelemmekin seuraavaksi jakaumalle parametrin α, jonka muutos vaikuttaa vain varianssiin, ei odotusarvoon. Olkoon $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$. Tällöin yhtälöiden (1.11), (1.12) ja (1.13) avulla saadaan

$$\mathbf{E}[z] = \mathbf{E}[e^{\ln z}] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\alpha},$$

$$\mathrm{Var}[z] = \mathrm{Var}[e^{\ln z}] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) = e^{2\alpha}\left(e^{\sigma^2}-1\right),$$

$$\mathbf{E}[z^b] = e^{b\mu+\frac{1}{2}b^2\sigma^2} = e^{b\mu+\frac{1}{2}b^2\sigma^2+\frac{1}{2}\sigma^2 b-\frac{1}{2}\sigma^2 b} = e^{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)b+\frac{1}{2}\sigma^2 b(b-1)} = e^{\alpha b+\frac{1}{2}\sigma^2 b(b-1)}.$$

Näiden tietojen sekä yhtälön (1.14) avulla saamme sijoittajan valintaongelman muotoon

$$\begin{aligned}
\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} &= e^{b\mu_x+\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}\max\left\{1, e^{b(\mu_y-\mu_x)+\frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2-\sigma_x^2)}\right\} \\
&= e^{b\mu_x+\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}\max\left\{1, e^{b\mu_y+\frac{1}{2}b^2\sigma_y^2-b\mu_x-\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}\right\} \\
&= e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)}\max\left\{1, e^{\alpha_y b+\frac{1}{2}\sigma_y^2 b(b-1)-\alpha_x b-\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)}\right\} \\
&= e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)}\max\left\{1, e^{(\alpha_y-\alpha_x)b+\frac{1}{2}(\sigma_y^2-\sigma_x^2)b(b-1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Mikäli $\alpha_x = \alpha_y$, niin

$$\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} = e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)}\max\left\{1, e^{\frac{1}{2}(\sigma_y^2-\sigma_x^2)b(b-1)}\right\}. \tag{1.15}$$

Tarkastellessamme yhtälöä (1.15) vakion $b > 0$ eri arvoilla huomaamme, kuinka hyötykuvauksen muoto vaikuttaa sijoittajan sijoituskohteen valintaan. Kun $b = 1$, niin hyötyfunktio $U(x) = x^b = x$, jolloin rajahyöty $U'(x) = 1$ on vakio. Lisäksi $b(b-1) = 0$, joten yhtälöstä (1.15) saadaan

$$\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} = e^{\alpha_x} = e^{\alpha_y}.$$

Tämä tarkoittaa, että rajahyödyn ollessa vakio sijoittaja voi valita kumman tahansa sijoitusvaihtoehdon, sillä ne tarjoavat yhtä suuren odotetun hyödyn. Tällöin sijoittajan sanotaan olevan riskineutraali. Kun $b > 1$, niin rajahyöty $U'(x) = bx^{b-1}$ on kasvava. Yhtälön (1.15) nojalla sijoittaja valitsee vaihtoehdon y, jos $e^{\frac{1}{2}(\sigma_y^2-\sigma_x^2)b(b-1)} > 1$, eli $\sigma_y > \sigma_x$. Vastaavasti sijoittaja valitsee vaihtoehdon x, mikäli $\sigma_x > \sigma_y$. Tämä tarkoittaa, että kasvavan rajahyödyn tapauksessa sijoittaja valitsee volatiliteetiltaan korkeimman vaihtoehdon, eli vaihtoehdon, jonka keskihajonta on $\max\{\sigma_x, \sigma_y\}$. Sijoittaja on siis riskinottaja. Kun $0 < b < 1$, niin rajahyöty $U'(x)$ on vähenevä. Yhtälön (1.15) nojalla sijoittajan valitsevan vaihtoehdon y, jos $\frac{1}{2}(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)b(b-1) > 0$, eli $\sigma_y < \sigma_x$. Vastaavasti sijoittaja valitsee vaihtoehdon x, mikäli $\sigma_x < \sigma_y$. Tämä tarkoittaa, että vähenevän rajahyödyn tapauksessa sijoittaja valitsee volatiliteetiltaan matalimman vaihtoehdon, eli vaihtoehdon, jonka keskihajonta on $\min\{\sigma_x, \sigma_y\}$. Sijoittaja on siis riskinkaihtaja.

Esimerkissä 1.11 vähenevän rajahyödyn lain toteuttava hyötykuvaus johtaa riskin kaihdantaan. Näin ei kuitenkaan välttämättä ole sellaisissa malleissa, joissa päätösten intertemporaalisuus huomioidaan. Intertemporaalisuudella tarkoitamme sitä, että päätösten kustannukset ja hyödyt jakautuvat yli ajan. Pyrimme havainnollistamaan tätä seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 1.12. Olkoon sijoittajan hyötyfunktio muotoa $U(x) = \sqrt{x}$. Sijoittajan on tehtävä valinta kahden sijoitusvaihtoehdon välillä. Ensimmäinen vaihtoehto x on sijoittaa valtion obligaatioihin. Tämä tuottaa varmuudella 6 miljoonan varallisuuden. Toinen sijoitusvaihtoehto y tarjoaa 10 miljoonan, 5 miljoonan tai 4 miljoonan varallisuuden todennäköisyyksillä $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$, riippuen maailmantilasta.

Vaihtoehtojen tarjoamat varallisuuden odotusarvot ovat $\mathbf{E}[x] = 6 \cdot 10^6$ ja $\mathbf{E}[y] = \frac{10 \cdot 10^6}{4} + \frac{5 \cdot 10^6}{2} + \frac{4 \cdot 10^6}{4} = 6 \cdot 10^6 = \mathbf{E}[x]$. Sijoitusvaihtoehtojen odotetut tuotot ovat siis yhtä suuret. Tarkastelemme seuraavaksi sijoitusvaihtoehtoja odotetun hyödyn näkökulmasta. Sijoittajan valintaongelma on muotoa

$$\begin{aligned}
\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} &= \max\{\mathbf{E}[\sqrt{x}], \mathbf{E}[\sqrt{y}]\} \\
&= \max\left\{\sqrt{6 \cdot 10^6}, \frac{\sqrt{10 \cdot 10^6}}{4} + \frac{\sqrt{5 \cdot 10^6}}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot 10^6}}{4}\right\} \\
&= \max\{2449.489..., 2408.603...\} \\
&= 2449.489... \\
&= \mathbf{E}[U(x)]\,.
\end{aligned}$$

Sijoittaja siis valitsee vaihtoehdon x, eli sijoittaa valtion obligaatioihin. Tarkastelemme seuraavaksi, kuinka suuri *preemio* $\pi > 0$, eli kompensaatio riskin otosta tulisi sijoitusvaihtoehdon y hyvässä maailmantilassa tarjota, jotta sijoittaja olisi riskineutraali sijoitusvaihtoehtojen x ja y välillä. Nyt vaihtoehdolle y pätee

$$y = \begin{cases} 10 \cdot 10^6 + \pi, & \text{todennäköisyydellä } \frac{1}{4} \\ 5 \cdot 10^6, & \text{todennäköisyydellä } \frac{1}{2} \\ 4 \cdot 10^6, & \text{todennäköisyydellä } \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Tarkastelemalla odotusarvoja $\mathbf{E}[x]$ ja $\mathbf{E}[y]$ huomaamme, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[x] &= 6 \cdot 10^6 \\
&< 6 \cdot 10^6 + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{10 \cdot 10^6 + \pi}{4} + \frac{5 \cdot 10^6}{2} + \frac{4 \cdot 10^6}{4} \\
&= \mathbf{E}[y]\,.
\end{aligned}$$

Sijoitusvaihtoehdon y odotettu tuotto on siis tässä tapauksessa suurempi kuin vaihtoehdon x. Jotta sijoittaja olisi sijoitusvaihtoehtojen suhteen riskineutraali, täytyy päteä $\mathbf{E}[U(x)] = \mathbf{E}[U(y)]$, eli on oltava

$$\sqrt{6 \cdot 10^6} = \frac{\sqrt{10 \cdot 10^6 + \pi}}{4} + \frac{\sqrt{5 \cdot 10^6}}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot 10^6}}{4}\,.$$

Yllä olevasta yhtälöstä saamme ratkaistua kompensaation π

$$\begin{aligned}\pi &= \left(4\sqrt{6\cdot 10^6} - 2\sqrt{5\cdot 10^6} - \sqrt{4\cdot 10^6}\right)^2 - 10\cdot 10^6 \\ &= 1.06109...\cdot 10^6 \\ &\approx 1.0611\cdot 10^6.\end{aligned}$$

Toisaalta tiedämme, että $\mathbf{E}[x] < \mathbf{E}[y]$ kaikilla $\pi > 0$, joten riskineutraali sijoittaja valitsee sijoitusvaihtoehdon y.

Esimerkki 1.13. Oletetaan, että varallisuustasoille X ja Y pätevät seuraavat ehdot

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{todennäköisyydellä } p \\ x_2, & \text{todennäköisyydellä } 1-p \end{cases}$$

ja $Y = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) = \mathbf{E}[X]$ todennäköisyydellä 1, missä $p \in (0,1)$ ja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ siten, että $x_1 > x_2$. Lisäksi oletetaan, että sijoittajan hyötykuvaus $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ on aidosti konkaavi. Hyötyfunktion konkaavisuudesta seuraa

$$\begin{aligned}U(\mathbf{E}[X]) &= U(Y) \\ &= U(px_1 + (1-p)x_2) \\ &> pU(x_1) + (1-p)U(x_2) \\ &= \mathbf{E}[U(X)]\,,\end{aligned}$$

joten sijoittaja valitsee aina riskittömimmän vaihtoehdon. Seuraavaksi tarkastelemme varallisuuden tasoa $Z = X + \pi$, missä $\pi > 0$ on tunnettu *preemio*, eli kompensaatio riskin ottamiselle. Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ muotoa

$$\begin{aligned}f(\pi) &= \mathbf{E}[U(Z)] - U(Y) \\ &= \mathbf{E}[U(X+\pi)] - U(Y) \\ &= pU(x_1+\pi) + (1-p)U(x_2+\pi) - U(px_1 + (1-p)x_2)\,.\end{aligned}$$

Tällöin f on hyötyfunktion U tavoin jatkuva, aidosti konkaavi ja monotonisesti kasvava. Lisäksi

$$f(0) = \mathbf{E}[U(X)] - U(Y) < 0,$$

sillä hyötyfunktion konkaavisuudesta johtuen $U(Y) > \mathbf{E}[U(X)]$, kuten edellä todettiin. Olkoon nyt $p(x_1 - x_2) = \pi > 0$, jolloin

$$\begin{aligned}f(p(x_1-x_2)) &= pU(x_1 + p(x_1-x_2)) + (1-p)U(x_2 + p(x_1-x_2)) \\ &\quad - U(px_1 + (1-p)x_2) \\ &= pU(x_1 + p(x_1-x_2)) + U(px_1 + x_2 - px_2) - pU(px_1 + x_2 - px_2) \\ &\quad - U(px_1 + x_2 - px_2) \\ &= p[U(x_1 + p(x_1-x_2)) - U(px_1 + x_2 - px_2)] \\ &= p[U(x_1 + px_1 - px_2) - U(x_2 + px_1 - px_2)] \\ &> 0\,,\end{aligned}$$

missä $U(x_1+px_1-px_2) > U(x_2+px_1-px_2)$, sillä hyötyfunktio $U(x)$ on monotonisesti kasvava ja tiedon $x_1 > x_2$ nojalla $x_1 + px_1 - px_2 > x_2 + px_1 - px_2$. Olemme siis osoittaneet, että funktiolle f pätee $f(0) < 0$ ja $f(p(x_1 - x_2)) > 0$. Funktio f on jatkuva ja monotoninen, joten Bolzanon lauseen nojalla on olemassa yksikäsitteinen $\pi^* \in (0, p(x_1 - x_2))$ siten, että $f(\pi^*) = 0$. Saamme siis

$$f(\pi^*) = \mathbf{E}[U(X + \pi^*)] - U(Y) = 0\,,$$

jolloin

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(X + \pi^*)] &= pU(x_1 + \pi^*) + (1-p)U(x_2 + \pi^*)\\ &= U(px_1 + (1-p)x_2)\\ &= U(Y).\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että sijoittaja on indifferentti riskillisen ja riskittömän kohteen välillä aina kun riskin oton kompensaatio on preemio π^*.

Vakion lisääminen hyötyfunktioon tai hyötyfunktion kertominen positiivisella vakiolla eivät muuta sijoitusvaihtoehtojen paremmuusjärjestystä, sillä hyötyfunktiot $U(x)$ ja $V(x) = aU(x)+b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tuottavat saman paremmuusjärjestyksen. Tämä seuraa odotusarvon lineaarisuudesta; $\mathbf{E}[V(x)] = a\mathbf{E}[U(x)] + b$. Hyötyfunktioita, jotka tuottavat identtiset paremmuusjärjestykset eri vaihtoehdoille, kutsutaan *ekvivalenteiksi hyötyfunktioiksi*. Esimerkiksi $V(x) = \ln cx^a$, $a, c > 0$ ja $U(x) = \ln x$ ovat ekvivalentteja hyötyfunktioita, sillä

$$V(x) = \ln cx^a = \ln x^a + \ln c = a \ln x + \ln c = aU(x) + \ln c.$$

1.3. Riskin kaihtaminen

Tarkastelemme tilannetta, jossa sijoittaja voi vapaasti valita kahden sijoitusvaihtoehdon, x ja y, väliltä. Vaihtoehto x tuottaa varmuudella tuoton $px_1 + (1-p)x_2$. Vaihtoehto y puolestaan tuottaa tuoton x_1 todennäköisyydellä p ja tuoton x_2 todennäköisyydellä $1-p$, $p \in [0, 1]$.

Sijoitusvaihtoehtojen odotetuille tuotoille pätee $\mathbf{E}[x] = 1 \cdot px_1 + (1-p)x_2 = px_1 + (1-p)x_2 = \mathbf{E}[y]$. Sijoittajan valintaongelma on siis muotoa

$$\begin{aligned}\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} &= \max\{1 \cdot U(px_1 + (1-p)x_2), pU(x_1) + (1-p)U(x_2)\}\\ &= \max\{U(x_2 + p(x_1 - x_2)), U(x_2) + p(U(x_1) - U(x_2))\},\end{aligned}$$

jolloin

$$\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\} = \begin{cases}\mathbf{E}[U(x)], & \text{jos } U \text{ aidosti konkaavi}\\ \mathbf{E}[U(y)], & \text{jos } U \text{ aidosti konveksi}\end{cases},$$

sillä konkaaville hyötyfunktiolle $U(px_1 + (1-p)x_2) \geq pU(x_1) + (1-p)U(x_2)$. Tämä tarkoittaa, että konkaavin hyötyfunktion tapauksessa sijoittaja valitsee varman sijoituskohteen x, vaikka epävarma sijoituskohde y tarjoaa saman odotetun tuoton. Tällöin sijoittaja on riskiä kaihtava. Mikäli $\mathbf{E}[U(x)] = \mathbf{E}[U(y)]$, on sijoittaja riskineutraali kyseisten sijoituskohteiden välillä.

Esimerkki 1.14. Sijoittajan täytyy valita satunnaisten varallisuuden tasojen x ja y väliltä, kun näille pätee

$$x = \begin{cases} x_1, & \text{todennäköisyydellä } p \\ x_2, & \text{todennäköisyydellä } 1-p \end{cases}$$

ja $y = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) = \mathbf{E}[x]$ todennäköisyydellä 1, missä $p \in [0,1]$ ja $x_1, x_2 \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Mikäli sijoittajan hyötyfunktio on muotoa $U(z) = z^2$ ja $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U(y)] - \mathbf{E}[U(x)] &= 1 \cdot U(px_1 + (1-p)x_2) - pU(x_1) - (1-p)U(x_2) \\
&= (px_1 + (1-p)x_2)^2 - px_1^2 - (1-p)x_2^2 \\
&= p^2x_1^2 + 2px_1(1-p)x_2 + (1-p)^2x_2^2 - px_1^2 - x_2^2 + px_2^2 \\
&= p^2x_1^2 + 2px_1x_2 - 2p^2x_1x_2 + x_2^2 - 2px_2^2 + p^2x_2^2 - px_1^2 - x_2^2 + px_2^2 \\
&= p(px_1^2 + 2x_1x_2 - 2px_1x_2 - x_2^2 + px_2^2 - x_1^2) \\
&= p[p(x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2] \\
&= p(p-1)(x_1 - x_2)^2 \\
&< 0,
\end{aligned}$$

$\forall p \in (0,1)$, jolloin $\mathbf{E}[U(y)] < \mathbf{E}[U(x)]$. Kun $p = 0$ tai $p = 1$, niin $\mathbf{E}[U(y)] = \mathbf{E}[U(x)]$ ja sijoittaja on sijoitusvaihtoehtojen suhteen riskineutraali. Toisin sanoen konveksin hyötyfunktion $U(z) = z^2$ tapauksessa sijoittaja valitsee aina riskillisemmän vaihtoehdon, eli varallisuustason x.

1.4. Riskin kaihtamisen mittareita

Kuten olemme jo huomanneet, hyötyfunktion kaarevuus vaikuttaa riskin kaihtamiseen. Mitä voimakkaammin hyötyfunktio on konkaavi, sitä suurempi ero on varman ja odotetun hyödyn odotetulla varallisuustasolla eli sitä suurempi on erotus $u(\overline{x}) - \mathbf{E}[u(x)]$, missä $\overline{x} = \mathbf{E}[x]$. Riskiä kaihtavalle on tarjottava hyvitystä riskin ottamisesta. Tämä kompensaatiota kutsutaan *preemioksi* π. Tämä voidaan tehdä lisäämällä preemio epävarmuutta sisältävän vaihtoehdon arvoon. Toinen tapa on alentaa varman vaihtoehdon arvoa preemion verran. Keskitymme seuraavaksi tähän jälkimäiseen tapaan ja pyrimme määrittämään sen preemion π, jolle yhtälö

$$\mathbf{E}[u(x)] = u(\overline{x} - \pi) \tag{1.16}$$

toteutuu ainakin osalle riskeistä odotetun varallisuustason $\overline{x} < \infty$ ollessa tunnettu. Kutsumme yhtälöä (1.16) jatkossa *tasapainoehdoksi*. Oletamme jatkossa, että riskiä kaihtavan päättäjän hyötykuvaus on monotonisesti kasvava, aidosti konkaavi sekä kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva.

1.4.1. Additiivisen riskin tapaus.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Satunnaismuuttuja $z = \overline{x} + \varepsilon$ on muuttujan $\overline{x}$ *additiivinen satunnaisperturbaatio*, missä ε on satunnaisesta varallisuuden tasosta x riippumaton satunnaismuuttuja, *pieni additiivinen kohina*, joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^k] \approx 0$ kaikilla $k \geq 3$.

ESIMERKKI 1.16. Olkoon satunnaismuuttuja ε tasaisesti jakautunut välille $\left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$. Osoitamme seuraavaksi, että sen keskusmomentit toteuttavat pienen satunnaisperturbaation ehdot kaikilla $k \geq 3$. Koska ε on tasaisesti jakautunut välille $\left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$, sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{kun}\, \varepsilon < -\frac{1}{2n} \text{ tai}\, \varepsilon > \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{\frac{1}{2n} - \left(-\frac{1}{2n}\right)} = n, & \text{kun } -\frac{1}{2n} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

jolloin kaikille $k \in \mathbf{N}$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varepsilon^k] &= \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} y^k \frac{1}{\frac{1}{2n} - (-\frac{1}{2n})} \, dy \\ &= n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} y^k \, dy \\ &= \frac{n}{k+1} \left[\left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} - \left(-\frac{1}{2n}\right)^{k+1} \right] \\ &= \frac{n}{k+1} \left[1^{k+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} - (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} \right] \\ &= \frac{n}{k+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} \left[1 - (-1)^{k+1}\right]. \end{aligned}$$

Huomaamme, että kun k on pariton, niin $\left[1 - (-1)^{k+1}\right] = 0$ ja vastaavasti kun k on parillinen, niin $\left[1 - (-1)^{k+1}\right] = 2$, joten

$$\mathbf{E}[\varepsilon^k] = \frac{n}{k+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} \left[1 - (-1)^{k+1}\right] = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^k, & \text{kun}\, k \in \mathbf{N} \text{ on parillinen} \\ 0, & \text{kun}\, k \in \mathbf{N} \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Nämä ovat satunnaismuuttujan ε keskusmomentteja. Huomaamme, että kun n on suuri, niin kyseiset keskusmomentit kaikille $k \geq 3$ ovat pieniä, joten keskusmomentit toteuttavat pienen satunnaisperturbaation ehdot.

MÄÄRITELMÄ 1.17 (Momentit generoiva funktio). Olkoon X satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja olkoon odotusarvo $\mathbf{E}[e^{sX}]$ olemassa jossakin nollan ympäristössä ja olkoon $s \in (-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$. Tällöin funktio

$$M(s) = \mathbf{E}[e^{sX}]$$

on satunnaismuuttujan X *momentit generoiva funktio* [**8**].

LEMMA 1.18. *Olkoon satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio $M(s)$ olemassa, kun $s \in (-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$. Tällöin kaikki momentit generoivan funktion k. kertaluvun derivaatat ovat olemassa ja*

$$M^{(k)}(0) = \mathbf{E}[e^k]\,,$$

missä k on positiivinen kokonaisluku, [**8**].

ESIMERKKI 1.19. Olkoon satunnaismuuttuja ε normaalisti jakautunut siten, että $\mu_\varepsilon = 0$ ja $\sigma_\varepsilon = \frac{1}{n}$. Tällöin määritelmän 1.17 nojalla satunnaismuuttujan ε momentit generoiva funktio on $M(s) = \mathbf{E}[e^{s\varepsilon}] = e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Lemman 1.18 nojalla $\mathbf{E}[\varepsilon^k] = M^{(k)}(0)$, joten derivoimalla momentit generoivaa funktiota saamme satunnaismuuttujan ε keskusmomenteille arvoja seuraavan taulukon mukaisesti.

k	$M^{(k)}(s)$	$M^{(k)}(0)$
1	$\frac{s}{n^2}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0
2	$\frac{n^2+s^2}{n^4}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	$\frac{1}{n^2}$
3	$\frac{s(3n^2+s^2)}{n^6}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0
4	$\frac{3n^4+6n^2s^2+s^4}{n^8}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	$\frac{3}{n^4}$
5	$\frac{s(15n^4+10n^2s^2+s^4)}{n^10}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0

TAULUKKO 1. Satunnaismuuttujan ε keskusmomentteja sekä sen momentit generoivan funktion k. kertaluvun derivaattoja, kun $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Keskusmomenteille siis pätee

$$\{\mathbf{E}[\varepsilon^k]\}_{k=1,\ldots,5} = \left(0, \frac{1}{n^2}, 0, \frac{3}{n^4}, 0\right)\,,$$

Toisin sanoen parittomat keskusmomentit häviävät ja parilliset suppenevat kohti nollaa nopeammin kuin kuvaus $\frac{1}{n^{2k-1}}$, siis $\mathbf{E}[\varepsilon^{2k+1}] = 0$ kaikille $k \in \mathbf{N}$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^{2k}] = o\left(\frac{1}{n^{2k-1}}\right)$ kaikille $k \geq 2$.

Riskipreemiolla on suora riippuvuus keskituotosta $\overline{x}$ ja epäsuora riippuvuus kohinatermistä ε. Merkitsemmekin riskipreemiota jatkossa merkinnällä $\pi_\varepsilon(\overline{x})$. Määrittääksemme riskipreemion lausekkeen, sovellamme seuraavaksi Taylorin kehitelmää kuvauksiin $u(z)$ ja $u(\overline{x} - \pi_\varepsilon(\overline{x}))$, jolloin

$$\begin{aligned} u(z) &\approx \frac{u(\overline{x})}{0!}(z-\overline{x})^0 + \frac{u'(\overline{x})}{1!}(z-\overline{x})^1 + \frac{u''(\overline{x})}{2!}(z-\overline{x})^2 \\ &= u(\overline{x}) + u'(\overline{x})\varepsilon + \frac{1}{2}u''(\overline{x})\varepsilon^2 \qquad (1.17) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} u(\overline{x} - \pi_\varepsilon(\overline{x})) &\approx \frac{u(\overline{x})}{0!}[(\overline{x} - \pi_\varepsilon(\overline{x})) - \overline{x}]^0 + \frac{u'(\overline{x})}{1!}[(\overline{x} - \pi_\varepsilon(\overline{x})) - \overline{x}] \\ &= u(\overline{x}) - u'(\overline{x})\pi_\varepsilon(\overline{x}), \qquad (1.18) \end{aligned}$$

sillä oletimme kohinan ε ja siten preemion $\pi_\varepsilon(\overline{x})$ pieniksi. Ottamalla odotusarvon puolittain yhtälöstä (1.17) saamme

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[u(z)] &\approx \mathbf{E}\left[u(\overline{x}) + u'(\overline{x})\varepsilon + \tfrac{1}{2}u''(\overline{x})\varepsilon^2\right] \\ &= u(\overline{x}) + u'(\overline{x})\mathbf{E}[\varepsilon] + \tfrac{1}{2}u''(\overline{x})\mathbf{E}[\varepsilon^2] \\ &= u(\overline{x}) + \tfrac{1}{2}u''(\overline{x}){\sigma_\varepsilon}^2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

missä satunnaismuuttujan ε määritelmän mukaisesti $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^2] = \mathrm{Var}[\varepsilon] - (\mathbf{E}[\varepsilon])^2 = \mathrm{Var}[\varepsilon] = {\sigma_\varepsilon}^2$. Jotta tasapainoehto $\mathbf{E}[u(z)] = u(\overline{x} - \pi)$ olisi voimassa, tulee lausekkeiden (1.18) ja (1.19) nojalla päteä

$$u(\overline{x}) + \frac{1}{2}u''(\overline{x}){\sigma_\varepsilon}^2 = u(\overline{x}) - u'(\overline{x})\pi_\varepsilon(\overline{x}).$$

Toisin sanoen, preemiolle tulee päteä

$$\pi_\varepsilon(\overline{x}) = -\frac{1}{2}{\sigma_\varepsilon}^2\frac{u''(\overline{x})}{u'(\overline{x})},$$

kun $u'(\overline{x}) \neq 0$. Preemiossa esiintyvää tekijää

$$A(\overline{x}) = -\frac{u''(\overline{x})}{u'(\overline{x})} = -\frac{d}{d\overline{x}}\ln u'(\overline{x})$$

kutsutaan *Arrowin ja Prattin absoluuttiseksi riskin kaihtamisen kertoimeksi*. Se on samalla rajahyödyn logaritmisen derivaatan käänteisluku, eli prosentuaalisen rajahyödyn muutoksen käänteisluku. Lisäksi $A(\overline{x})$ on riippumaton hyötykuvauksen kasvavista lineaarimuunnoksista. Toisin sanoen, $A(\overline{x})$ säilyy muuttumattomana ekvivalenteille hyötykuvauksille. Tämä tekee siitä riskin kaihtamisen mittana luotettavamman, kuin esimerkiksi hyötyfunktion toinen derivaatta $u''(x)$ tai hyötyfunktion kuperuusmitta $\frac{u''(x)}{[1+(u'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$.

1.4.2. Multiplikatiivisen riskin tapaus.

MÄÄRITELMÄ 1.20. Satunnaismuuttuja $z = \overline{x}(1 + \varepsilon)$ on muuttujan $\overline{x}$ *multiplikatiivinen satunnaisperturbaatio*, missä ε on satunnaisesta varallisuuden tasosta x riippumaton satunnaismuuttuja, *pieni multiplikatiivinen kohina*, joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^k] \approx 0$ kaikilla $k \geq 3$.

Merkitään tämän tapauksen riskipreemiota merkinnällä $\hat{\pi}_\varepsilon$. Määrittääksemme riskipreemion lausekkeen, sovellamme seuraavaksi Taylorin kehitelmää kuvauksiin $u(z)$ ja $u(\overline{x} - \hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})$, jolloin

$$\begin{aligned}u(z) &\approx \frac{u(\overline{x})}{0!}(z-\overline{x})^0 + \frac{u'(\overline{x})}{1!}(z-\overline{x})^1 + \frac{u''(\overline{x})}{2!}(z-\overline{x})^2 \\ &= u(\overline{x}) + u'(\overline{x})\overline{x}\varepsilon + \frac{1}{2}u''(\overline{x})\overline{x}^2\varepsilon^2\end{aligned} \tag{1.20}$$

ja

$$\begin{aligned} u(\overline{x}-\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})) &\approx \frac{u(\overline{x})}{0!}[(\overline{x}-\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x}))-\overline{x}]^0+\frac{u'(\overline{x})}{1!}[(\overline{x}-\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x}))-\overline{x}] \\ &= u(\overline{x})-u'(\overline{x})\overline{x}\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

sillä oletimme kohinan ε ja siten preemion $\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})$ pieniksi. Ottamalla odotusarvon puolittain yhtälöstä (1.20) saamme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u(z)] &\approx \mathbf{E}\left[u(\overline{x})+u'(\overline{x})\overline{x}\varepsilon+\tfrac{1}{2}u''(\overline{x})\overline{x}^2\varepsilon^2\right] \\ &= u(\overline{x})+u'(\overline{x})\overline{x}\mathbf{E}[\varepsilon]+\tfrac{1}{2}u''(\overline{x})\overline{x}^2\mathbf{E}[\varepsilon^2] \\ &= u(\overline{x})+\tfrac{1}{2}u''(\overline{x})\overline{x}^2{\sigma_\varepsilon}^2\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Jotta tasapainoehto $\mathbf{E}[u(z)]=u(\overline{x}-\pi)$ olisi voimassa, tulee lausekkeiden (1.21) ja (1.22) nojalla päteä

$$u(\overline{x})+\frac{1}{2}u''(\overline{x}){\sigma_\varepsilon}^2\overline{x}^2=u(\overline{x})-u'(\overline{x})\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})\overline{x}.$$

Toisin sanoen, preemiolle $\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})$ tulee päteä

$$\hat{\pi}_\varepsilon(\overline{x})=-\frac{1}{2}{\sigma_\varepsilon}^2\frac{\overline{x}u''(\overline{x})}{u'(\overline{x})}\,.$$

Preemiossa esiintyvää tekijää

$$R(\overline{x})=-\frac{\overline{x}u''(\overline{x})}{u'(\overline{x})}=\overline{x}A(\overline{x})$$

kutsutaan *suhteelliseksi riskin kaihtamisen kertoimeksi*. Kuten kerroin $A(\overline{x})$, myös $R(\overline{x})$ säilyy muuttumattomana ekvivalenteille hyötykuvauksille. Nämä molemmat lokaalit riskinkaihtamisen kertoimet nousevat lähes poikkeuksetta esille tutkittaessa optimaalista päätöksentekoa riskinkaihdannan vallitessa. Ne nimittäin generoivat neljä hyötyfunktioiden pääluokkaa, CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*), HARA (*Hyberbolic Absolute Risk Aversion*), CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) ja HRRA (*Hyberbolic Relative Risk Aversion*). Tutustumme näihin esimerkissä 1.22.

Huomautus 1.21. Edellä mainitut additiivinen ja multiplikatiivinen satunnaisperturbaatio $\overline{x}+\varepsilon$ ja $\overline{x}(1+\varepsilon)$ ovat keskeisiä analysoitaessa eri riskillisten tuottovirtojen arvostusta riskin kaihtamisen vallitessa. Olkoon sijoituksen tuotto x satunnainen, $x_a=x+\varepsilon$ ja $x_m=x(1+\varepsilon)$. Olkoon lisäksi ε tuotosta x riippumaton satunnaismuuttuja, joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon]=0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon]=\sigma_\varepsilon^2$. Tällöin

$$\overline{x_a}=\mathbf{E}[x_a]=\mathbf{E}[x]+\mathbf{E}[\varepsilon]=\overline{x}$$

ja riippumattomuuden nojalla $\mathbf{E}[x\varepsilon]=\mathbf{E}[x]\mathbf{E}[\varepsilon]$, joten

$$\overline{x_m}=\mathbf{E}[x_m]=\mathbf{E}[x]+\mathbf{E}[x\varepsilon]=\mathbf{E}[x]+\mathbf{E}[x]\mathbf{E}[\varepsilon]=\overline{x}=\overline{x_a}\,,$$

siis odotetut tuotot ovat yhtä suuret. Toisaalta

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[x_a] &= \mathbf{E}[{x_a}^2] - (\mathbf{E}[x_a])^2 \\ &= \mathbf{E}[(x+\varepsilon)^2] - \overline{x}^2 \\ &= \mathbf{E}[x^2] + 2\mathbf{E}[x]\mathbf{E}[\varepsilon] + \mathbf{E}[\varepsilon^2] - \overline{x}^2 \\ &= \mathbf{E}[x^2] + \mathbf{E}[\varepsilon^2] - \overline{x}^2 \\ &= \mathrm{Var}[x] + \mathrm{Var}[\varepsilon] \\ &= {\sigma_x}^2 + {\sigma_\varepsilon}^2 \\ &> {\sigma_x}^2\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[x_m] &= \mathbf{E}[{x_m}^2] - (\mathbf{E}[x_m])^2 \\ &= \mathbf{E}[(x(1+\varepsilon))^2] - \overline{x}^2 \\ &= \mathbf{E}[x^2] + 2\mathbf{E}[x^2]\mathbf{E}[\varepsilon] + \mathbf{E}[x^2]\mathbf{E}[\varepsilon^2] - (\mathbf{E}[x])^2 \\ &= \mathbf{E}[x^2] - (\mathbf{E}[x])^2 + \mathbf{E}[x^2]\mathbf{E}[\varepsilon^2] + (\mathbf{E}[x])^2\mathbf{E}[\varepsilon^2] - (\mathbf{E}[x])^2\mathbf{E}[\varepsilon^2] \\ &= \mathrm{Var}[x] + \mathbf{E}[\varepsilon^2][\mathbf{E}[x^2] - (\mathbf{E}[x])^2 + (\mathbf{E}[x])^2] \\ &= \mathrm{Var}[x] + \mathrm{Var}[\varepsilon][\mathrm{Var}[x] + (\mathbf{E}[x])^2] \\ &= {\sigma_x}^2 + {\sigma_\varepsilon}^2\left({\sigma_x}^2 + \overline{x}^2\right) \\ &> {\sigma_x}^2\,,\end{aligned}$$

joten huomaamme, että x_a ja x_m antavat saman keskituoton $\overline{x}$, mutta keskihajonnalla mitattuna korkeammalla riskillä. Tämän tyyppisiä satunnaisperturbaatioita kutsutaan satunnaismuuttujan x *keskiarvon säilyttäviksi levityksiksi*. Tämän luokan perturbaatiot eivät välttämättä aina ole additiivisia tai multiplikatiivisia, vaan mikä tahansa muunnos, joka säilyttää keskituoton muuttumattomana kasvattaen samalla riskiä kelpaa. Tarkastellaan esimerkiksi lineaarista kuvausta $f(x) = ax + b$, missä x on satunnainen ja $a, b \in \mathbf{R}$ tunnettuja parametreja. Tällöin $\mathbf{E}[f(x)] = a\overline{x} + b$ ja

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[f(x)] &= \mathbf{E}[f(x)^2] - (\mathbf{E}[f(x)])^2 \\ &= a^2\mathbf{E}[x^2] + 2ab\mathbf{E}[x] + b^2 - a^2(\mathbf{E}[x])^2 - 2ab\mathbf{E}[x] - b^2 \\ &= a^2\mathbf{E}[x^2] - a^2(\mathbf{E}[x])^2 \\ &= a^2{\sigma_x}^2\,.\end{aligned}$$

Esimerkki 1.22. Seuraavaksi määrittelemme absoluuttisen ja suhteellisen riskin kaihtamisen kertoimia sekä niiden derivaattoja eri tyyppisille hyötyfunktioille.

(A) Olkoon $a > 0$ ja x deterministinen muuttuja. Eksponentiaalinen CARA-hyötyfunktio on muotoa $U(x) = -e^{-ax}$ [**9**]. Sen absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimeksi saamme

$$A(x) = -\frac{d^2(-e^{-ax})/dx^2}{d(-e^{-ax})/dx} = -\frac{-a^2e^{-ax}}{ae^{-ax}} = a\,,$$

jolloin $A'(x) = 0$. Hyötyfunktion suhteellinen riskinkaihtamisen kerroin taas on $R(x) = xA(x) = ax$, jolloin $R'(x) = a$.

(B) Logaritminen CRRA-hyötyfunktio on muotoa $U(x) = \ln x$ [**9**]. Sen absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimeksi saamme

$$A(x) = -\frac{d^2(\ln x)/dx^2}{d(\ln x)/dx} = -\frac{-1/x^2}{1/x} = \frac{1}{x},$$

jolloin $A'(x) = -1/x^2$. Hyötyfunktion suhteellinen riskinkaihtamisen kerroin taas on $R(x) = xA(x) = 1$, jolloin $R'(x) = 0$.

(C) Kvadraattinen HRRA-hyötyfunktio on muotoa $U(x) = x - bx^2$, missä $b > 0$, $1 - 2bx \neq 0$ [**9**]. Sen absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimeksi saamme

$$A(x) = -\frac{d^2(x - bx^2)/dx^2}{d(x - bx^2)/dx} = -\frac{-2b}{1 - 2bx} = \frac{2b}{1 - 2bx},$$

jolloin

$$A'(x) = -\frac{2b}{(1 - 2bx)^2}\frac{d(1 - 2bx))}{dx} = \frac{4b^2}{(1 - 2bx)^2}.$$

Hyötyfunktion suhteellinen riskinkaihtamisen kerroin taas on $R(x) = xA(x) = 2bx/(1-2bx)$, jolloin

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{d(2bx)/dx}{1 - 2bx} + 2bx\frac{d(1/(1 - 2bx))}{dx} \\ &= \frac{2b}{1 - 2bx} + \frac{2bx(-2b)}{-(1 - 2bx)^2} \\ &= \frac{2b(1 - 2bx) + 2bx2b}{(1 - 2bx)^2} \\ &= \frac{2b(1 - 2bx + 2bx)}{(1 - 2bx)^2} \\ &= \frac{2b}{(1 - 2bx)^2}. \end{aligned}$$

(D) HARA-hyötyfunktio on muotoa $U(x) = (1 - \gamma)/\gamma \cdot [(ax/(1 - \gamma) + b]^\gamma$, missä $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 1$ [**10**]. Sen absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimen määritystä varten määritämme ensin seuraavat derivaatat

$$\begin{aligned} U'(x) &= \frac{1 - \gamma}{\gamma}\frac{d[(ax)/(1 - \gamma) + b]^\gamma}{dx} \\ &= \frac{(1 - \gamma)\gamma}{\gamma}\left(\frac{ax}{1 - \gamma} + b\right)^{\gamma - 1}\frac{a}{1 - \gamma} \\ &= a\left(\frac{ax}{1 - \gamma} + b\right)^{\gamma - 1} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}U''(x) &= a\frac{d[(ax)/(1-\gamma)+b]^{\gamma-1}}{dx}\\ &= a(\gamma-1)\left(\frac{ax}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-2}\frac{a}{1-\gamma}\\ &= -a^2\left(\frac{ax}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma-2}.\end{aligned}$$

Tälloin saamme absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimeksi

$$\begin{aligned}A(x) &= -\frac{-a^2(ax/(1-\gamma)+b)^{\gamma-2}}{a(ax/(1-\gamma)+b)^{\gamma-1}}\\ &= \frac{a}{(ax+b(1-\gamma))/(1-\gamma)}\\ &= \frac{a(1-\gamma)}{ax+b(1-\gamma)},\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}A'(x) &= a(\gamma-1)\frac{d[1/(ax+b(1-\gamma))]}{dx}\\ &= -\frac{a^2(1-\gamma)}{(ax+b(1-\gamma))^2}.\end{aligned}$$

Hyötyfunktion suhteellinen riskinkaihtamisen kerroin taas on $R(x) = xA(x) = ax(1-\gamma)/[ax+b(1-\gamma)]$, jolloin

$$\begin{aligned}R'(x) &= \frac{1-\gamma}{ax+b(1-\gamma)}\frac{d(ax)}{dx} + ax(1-\gamma)\frac{d[1/(ax+b(1-\gamma))]}{dx}\\ &= \frac{a(1-\gamma)}{ax+b(1-\gamma)} - \frac{a^2x(1-\gamma)}{(ax+b(1-\gamma))^2}\\ &= \frac{a^2x(1-\gamma)+ab(1-\gamma)^2-a^2x(1-\gamma)}{(ax+b(1-\gamma))^2}\\ &= \frac{ab(1-\gamma)^2}{(ax+b(1-\gamma))^2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 1.23. Olkoon päättäjän eksponentiaalinen hyötyfunktio $u(x) = -e^{-ax}$, $a > 0$ ja sijoituksen tuotto normaalisti jakautunut jakaumaan $N(\mu, \sigma^2)$, toisin sanoen, $x \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pyrimme määrittämään sen preemion $\pi > 0$, jolla tasapainoehto $\mathbf{E}[u(x)] = u(\mu - \pi)$ toteutuu.

Yhtälön (1.11) nojalla $\mathbf{E}[u(x)] = \mathbf{E}[-e^{-ax}] = -e^{-a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}$. Lisäksi tiedämme, että $u(\mu-\pi) = -e^{-a(\mu-\pi)}$. Tällöin tasapainoehto toteutuu, mikäli

$$-a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 = -a(\mu-\pi),$$

joten saamme

$$\pi = \frac{1}{2}a^2\sigma^2.$$

1.5. Riskin kaihdanta ja vakuutus

Seuraavaksi tarkastelemme taloudellista riskiteoriaa yksinkertaisen esimerkin avulla. Oletamme, että päättäjä kohtaa vakuutettavissa olevan riskin. Mikäli tämä riski toteutuisi, eli realisoituisi, alenisi päättäjän hyvinvointi L yksikköä. Olkoon riskin realisoitumistodennäköisyys κ ja päättäjän varallisuus W muotoa

$$W(z) = \begin{cases} w - qz, & \text{todennäköisyydellä}\, 1-\kappa \\ w - L + z - qz, & \text{todennäköisyydellä}\, \kappa, \end{cases} \tag{1.23}$$

missä w on päättäjän perusvarallisuus, $w \geq L$, $q \in (0,1)$ on vakuutuksen hinnan suhde korvauksen määrään ja z on summa, jonka vakuutus korvaa. Tällöin $W = w - qz$ kuvaa päättäjän varallisuutta tilanteessa, jossa riski ei ole realisoitunut ja $W = w - L + z - qz$ tilanteessa, jossa riski realisoituu. Oletamme vielä, että päättäjän hyötyfunktio u on kaksi kertaa jatkuvasti differentoituva, monotonisesti kasvava ja aidosti konkaavi. Toisin sanoen päättäjä on riskinkarttaja. Pyrimme nyt selvittämään, mikä on optimaalisin arvo vakuutuksen korvaussummalle z, jolla päättäjä saa varallisuudestaan $W(z)$ suurimman odotetun hyödyn. Odotetun hyödyn maksimointiongelma on tällöin muotoa

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}[\mathbf{E}[u(W(z))] = \sup_{z\in\mathbb{R}}[(1-\kappa)u(w-qz) + \kappa u(w-L+z-qz)]\,.$$

Osoitamme ensin, että $\mathbf{E}[u(W(z))]$ on aidosti konkaavi. Määrittelemme funkiton $f(z) = \mathbf{E}[u(W(z))]$. Oletuksen nojalla hyötyfunktio u on aidosti konkaavi, jolloin lemman 1.8 nojalla sen ensimmäinen derivaatta u' on aidosti vähenevä, mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että $u'' < 0$. Funtiota $f(z)$ derivoimalla saamme

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}[(1-\kappa)u(w-qz) + \kappa u(w-L+z-qz)] \\ &= -(1-\kappa)qu'(w-qz) + \kappa(1-q)u'(w-L+z-qz) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{d}{dz}[-(1-\kappa)qu'(w-qz) + \kappa(1-q)u'(w-L+z-qz)] \\ &= (1-\kappa)q^2u''(w-qz) + \kappa(1-q)^2u''(w-L+z-qz) \\ &< 0\,. \end{aligned}$$

Tällöin $f'(z)$ on aidosti vähenevä ja lemman 1.8 nojalla funktio $f(z) = \mathbf{E}[u(W(z))]$ on aidosti konkaavi. Lemman 1.9 nojalla aidosti konkaavi funktio $f(z)$ saa ääriarvonsa derivaatan nollakohdassa, mikäli derivaatalla on nollakohta. Ratkaisemme seuraavaksi arvon z^* funktion $f(z)$ derivaatan mahdollisessa nollakohdassa. Saamme

$$\begin{aligned} f'(z) &= -(1-\kappa)qu'(w-qz^*) + \kappa(1-q)u'(w-L+z^*-qz^*) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

jos

$$(1-\kappa)qu'(w-qz^*) = \kappa(1-q)u'(w-L+z^*-qz^*)\,.$$

Tätä kutsutaan *ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdoksi*. Jotta vakuutus olisi oikeudenmukainen, tulee vakuutuksen yksikköhinnan yhtyä riskin toteutumistodennäköisyyteen. Täytyy siis olla $q = \kappa$. Ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehto tulee muotoon

$$(1-\kappa)\kappa u'(w-\kappa z^*) = \kappa(1-\kappa)u'(w-L+z^*-\kappa z^*)\,,$$

mistä saadaan jakamalla puolittain tekijällä $(1-\kappa)\kappa$

$$u'(w-\kappa z^*) = u'(w-L+z^*-\kappa z^*)\,. \tag{1.24}$$

Koska u' on aidosti vähenevä, yhtälö (1.24) pätee vain, mikäli

$$w-\kappa z^* = w-L+z^*-\kappa z^*\,,$$

jolloin

$$z^* = L$$

ja sanomme, että päättäjän kannalta täysi vakuutus on optimaalinen.

Esimerkki 1.24. Olkoon päättäjän hyötyfunktio logaritmista muotoa $u(x) = \ln x$ ja olkoon $w > qL$. Päättäjän varallisuuden $W(z)$ määrittelemme kuten yhtälössä (1.23). Tällöin funktio

$$f(z) = (1-\kappa)\ln(w-qz) + \kappa\ln(w-L+z-qz)$$

kuvaa päättäjän varallisuudestaan saamaa odotettua hyötyä $\mathbf{E}[u(W(z))]$ ja kuten edellä osoitimme, kuvaus on aidosti konkaavi. Haluamme ratkaista optimaalisen arvon vakuutuksen korvaussummalle z^*. Funktion $f(z)$ esimmäisen kertaluvun derivaataksi saamme

$$f'(z) = -\frac{(1-\kappa)q}{w-qz} + \frac{\kappa(1-q)}{w-L+z-qz}\,.$$

Koska funktio $f(z)$ saa lemman 1.9 nojalla ääriarvonsa ensimmäisen kertaluvun derivaatan nollakohdassa, saamme arvon z^* ratkaistua yhtälöstä

$$\frac{(1-\kappa)q}{w-qz^*} = \frac{\kappa(1-q)}{w-L+z^*-qz^*}\,,$$

jolloin kertomalla yhtälö puolittain tekijoillä $w-qz^*$ ja $w-L+(1-q)z^*$ saamme

$$(1-\kappa)qw - (1-\kappa)qL + (1-\kappa)q(1-q)z^* = \kappa(1-q)w - \kappa(1-q)qz^*\,,$$

mistä voimme ratkaista, että optimaalinen määrä vakuutusta on

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{\kappa(1-q)w-(1-\kappa)qw+(1-\kappa)qL}{(1-\kappa)q(1-q)+\kappa(1-q)q} \\ &= \frac{w(\kappa-q\kappa-q+\kappa q)}{(1-q)q(1-\kappa+\kappa)} + \frac{(1-\kappa)qL}{(1-q)q(1-\kappa+\kappa)} \\ &= \frac{\kappa-q}{q(1-q)}w + \frac{1-\kappa}{1-q}L\,. \end{aligned}$$

Pyrimme seuraavaksi yleistämään ongelman. Tätä varten meidän on oletettava, että päättäjä voi omilla toimillaan tai käytöksellään vaikuttaa riskin realisoitumiseen valitsemalla rahayksiköissä ilmaistun henkilökohtaisen suojauksen x. Riskin realisoitumistodennäköisyys on siis jatkossa muotoa $\kappa(x)$. Oletamme, että $\kappa(x)$ on vähenevä, eli suurempi suojaus johtaa pienempään riskin realisoitumistodennäköisyyteen. Lisäksi oletamme, että $\kappa(x)$ derivoituva, että vakuutusyhtiö kykenee havaitsemaan riskin realisoitumistodennäköisyyden ja että vakuutus on oikeudenmukainen eli $q = \kappa(x)$. Tällöin päättäjän varallisuus tulee muotoon

$$W(z,x) = \begin{cases} w - x - \kappa(x)z, & \text{todennäköisyydellä}\, 1-\kappa(x) \\ w - L - x + z - \kappa(x)z, & \text{todennäköisyydellä}\, \kappa(x)\,. \end{cases} \tag{1.25}$$

Haluamme ratkaista optimaalisen arvo vakuutuksen korvaussummalle z^*. Odotetun hyödyn maksimointiongelma on nyt muotoa

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}} [\mathbf{E}[u(W(z,x)] \\ &= \sup_{z\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}} [[1-\kappa(x)]u(w-x-\kappa(x)z) + \kappa(x)u(w-L-x+z-\kappa(x)z)]\,. \end{aligned}$$

Ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdot saamme, kun otamme odotusarvosta $\mathbf{E}[u(W(z,x))]$ osittaisderivaatat sekä muuttujan z että muuttujan x suhteen ja merkitsemme ne yhtäsuuriksi kuin nolla, sillä odotusarvo saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa. Tässä yhteydessä esittelemme laskujen selkeyttämiseksi merkinnät $w_1 = w_1(z,x) = w-L-x+z-\kappa(x)z$ ja $w_2 = w_2(z,x) = w-x-\kappa(x)z$. Ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^*}(\mathbf{E}[u(W(z^*,x^*)]) &= [1-\kappa(x^*)][-\kappa(x^*)]u'(w-x^*-\kappa(x^*)z^*) \\ &\quad + \kappa(x^*)[1-\kappa(x^*)]u'(w-L-x^*+z^*-\kappa(x^*)z^*) \\ &= [1-\kappa(x^*)]\kappa(x^*)[u'(w_1^*)-u'(w_2^*)] \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.26}$$

ja muuttujan x suhteen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^*}(\mathbf{E}[u(W(z^*,x^*)]) &= -\kappa'(x^*)u(w-x-\kappa(x^*)z^*) \\ &\quad + (1-\kappa(x^*))(-1-\kappa'(x)z^*)u'(w-x^*-\kappa(x^*)z^*) \\ &\quad + \kappa'(x^*)u(w-L-x^*+z^*-\kappa(x^*)z^*) \\ &\quad + \kappa(x^*)(-1-\kappa'(x)z^*)u'(w-L-x^*+z^*-\kappa(x^*)z^*) \\ &= -\kappa'(x^*)u'(w_2^*) - (1-\kappa(x^*))(1+\kappa'(x)z^*)u'(w_2^*) \\ &\quad + \kappa'(x^*)u(w_1^*) - \kappa(x^*)(1+\kappa'(x)z^*)u'(w_1^*) \\ &= \kappa'(x^*)[u'(w_1^*)-u'(w_2^*)] \\ &\quad - (1+\kappa'(x^*)z^*)[(1-\kappa(x^*))u'(w_2^*)+\kappa(x^*)u'(w_1^*)] \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Mikäli $\kappa(x) \in (0,1)$, optimaalisuusehdosta (1.26) saadaan $u'(w_1) = u'(w_2)$. Koska hyötyfunktio u on aidosti konkaavi, niin lemman 1.8 nojalla u' on aidosti vähenevä, jolloin on oltava $w_1 = w_2$. Toisin sanoen,

$$w-L-x^*+z^*-\kappa(x^*)z^* = w-x^*-\kappa(x^*)z^*\,,$$

jolloin $z^* = L$. Tämä tarkoittaa, että vakuuttaminen on optimaalista, kun $\kappa(x) \in (0,1)$. Koska $u'(w_1) = u'(w_2)$, saadaan optimaalisuusehto (1.27) muotoon

$$\begin{aligned}
&-(1+\kappa'(x^*)z^*)[(1-\kappa(x^*))u'(w_1^*) + \kappa(x^*)u'(w_1^*)] \\
&= -(1+\kappa'(x^*)z^*)u'(w_1^*) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

jolloin $1 + \kappa'(x^*)z^* = 0$. Mikäli $\kappa(x)$ on aidosti vähenevä, niin $\kappa'(x) < 0$. Jos lisäksi on olemassa x^* siten, että $\kappa'(x) = -1/L$, niin $1 - z^*/L = 0$ ja optimi löytyy pisteestä $(z^*, x^*) = (L, x^*)$. On tärkeää huomata, että tulos muuttuu paljon, mikäli todennäköisyyden $\kappa(x)$ havainnointi epäonnistuu, eli mikäli $q \neq \kappa(x)$.

LUKU 2

Lineaarinen hinnoittelu ja arbitraasi

Pyrimme seuraavaksi kehittämään yleisen hinnoitteluteorian arbitraasivapauden vallitessa (Määritelmä 2.3). Tätä varten tarkastelemme tilannetta, jossa taloudessa on n arvopaperia ja epävarmuus esitetään s vaihtoehtoisen tilan avulla. Arvopapereiden vaihtoehtoisia tuottoja kuvataan *tuottomatriisilla* $D \in \mathbb{R}^{n\times s}$, joka on muotoa

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{ns} \end{pmatrix},$$

missä d_{jk} kuvaa j:nnen arvopaperin arvoa tilassa k. Tuottomatriisin D rivi $D_j = (d_{j1}\, d_{j2} \ldots d_{js})$ on j:nnen arvopaperin vaihtoehtoisten tuottojen generoima vektori. Arvopaperisalkku, eli sijoitusportfolio on vektori $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, missä θ_j kuvaa arvopaperin j määrää salkussa θ. Mikäli arvopapereiden hinnat ovat $\mathbf{P} = (P_1, P_2, ..., P_n) \in \mathbb{R}^n$, missä P_j on arvopaperin j hinta, niin salkun θ hinta on

$$\mathbf{P} \cdot \theta = \sum_{j=1}^{n} P_j \theta_j \tag{2.1}$$

ja vaihtoehtoisiin tiloihin ehdollistettu satunnainen tuotto on

$$D^T\theta = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1s} & d_{2s} & \dots & d_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} d_{j1}\theta_j \\ \sum_{j=1}^{n} d_{j2}\theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} d_{js}\theta_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s \,. \tag{2.2}$$

Seuraavaksi tarvitsemme lineaarialgebrasta tuttua määritelmää.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ koostuu vektoreista $\mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, ..., \delta_{nk})$, missä

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{kaikilla}\, j = k \\ 0, & \text{kaikilla}\, j \neq k \,. \end{cases}$$

Esimerkiksi reaaliavaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ koostuu vektoreista $\mathbf{e}_1 = (\delta_{11}, \delta_{21}, \delta_{31}) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Täytyy kuitenkin muistaa, ettei vektoriavaruuden kanta ole yksikäsitteisesti määritelty, vaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ virittämiseen riittää mikä tahansa kokoelma $L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita $\mathbf{X}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, ..., n$.

Rahoituksen teoriassa *tuottoavaruuden* $\mathbb{R}^s$ kannan vektoreita $\mathbf{e}_k$, $k = 1, ..., s \leq n$ kutsutaan *alkeistila − arvopapereiksi*, sillä ne generoivat tuoton, joka realisoituu vain yhdessä tilassa. Määritelmän (2.1) nojalla sijoitusportfolio $\theta = \mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, ..., \delta_{nk})$ tarkoittaa portfoliota, joka sisältää yhden kappaleen arvopaperia k, eikä lainkaan muita arvopapereita. Toisin sanoen $\delta_{kk} = 1$ ja $\delta_{jk} = 0$ kaikilla $j \neq k$, $j = 1, ..., n$. Portfolion $\theta = \mathbf{e}_k$ tuotoksi saadaan yhtälön (2.2) avulla

$$D^T\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n d_{j1}\delta_{jk} \\ \sum_{j=1}^n d_{j2}\delta_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n d_{js}\delta_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{k1}\delta_{kk} \\ d_{k2}\delta_{kk} \\ \vdots \\ d_{ks}\delta_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{k1} \\ d_{k2} \\ \vdots \\ d_{ks} \end{pmatrix} = D_k^T$$

ja hinnaksi yhtälön (2.1)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^n P_j\delta_{jk} = P_k\delta_{kk} = P_k \,.$$

Tämä tulos voidaan tulkita siten, että tuoton D_j hinta on kuvaus $p : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, jolle pätee $p(D_j) = P_j$. Huomaamme lisäksi, että arvopaperin j vaihtoehtoisten tuottojen generoima vektori D_j voidaan esittää tuottoavaruuden $\mathbb{R}^s$ luonnollisen kannan $L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_s)$ avulla muodossa

$$D_j = (d_{j1}, d_{j2}, ..., d_{js}) = d_{j1}\mathbf{e}_1 + d_{j2}\mathbf{e}_2 + ... + d_{js}\mathbf{e}_s = \sum_{k=1}^s d_{jk}\mathbf{e}_k \,.$$

Tällöin portfolion $\theta = \mathbf{e}_j$ hinnalle ja tuoton D_j hinnalle $p(D_j)$ pätee

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j = P_j = p(D_j) = p\left(\sum_{k=1}^s d_{jk}\mathbf{e}_k\right) .$$

Mikäli ns. *yhden hinnan laki* pätee, eli mikäli hinnoittelu on *lineaarinen operaatio* (eli tuottojen summan arvo on tuottojen arvojen summa) niin edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j = P_j = p(D_j) = p\left(\sum_{k=1}^s d_{jk}\mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^s d_{jk}p(\mathbf{e}_k) \qquad j = 1, ..., n.$$

Tämä voidaan esittää yhtäpitävästi vektorimuodossa

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s d_{1k}p(\mathbf{e}_k) \\ \sum_{k=1}^s d_{2k}p(\mathbf{e}_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s d_{nk}p(\mathbf{e}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\mathbf{e}_1) \\ p(\mathbf{e}_2) \\ \vdots \\ p(\mathbf{e}_s) \end{pmatrix} = D\mathbf{p} \,,$$

missä $\mathbf{p}^T = (p(\mathbf{e}_1), ..., p(\mathbf{e}_s))$ on alkeistila-arvopapereiden hintojen muodostama vektori. Näiden tietojen avulla voimme esittää seuraavan määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 2.2. *Arbitraasimahdollisuus* on sijoitusportfolio $\theta \in \mathbb{R}^n$, jolle pätevät joko ehdot

$$-\mathbf{P} \cdot \theta \geq 0 \quad \text{ja} \quad (D^T\theta)_k = \sum_{j=1}^n d_{jk}\theta_j > 0 \,, \quad \text{jollakin} \quad k = 1, ..., s$$

tai ehdot

$$-\mathbf{P}\cdot\theta > 0 \quad \text{ja} \quad (D^T\theta)_k = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}\theta_j \geq 0\,, \quad \text{jollakin} \quad k = 1,...,s\,.$$

Markkinat ovat *arbitraasivapaat*, mikäli arbitraasimahdollisuuksia ei ole. Arbitraasi voidaan siis tulkita sijoitusmahdollisuudeksi, jossa sijoittaja voi saada tuottoa ilman todellista nettoinvestointia. Seuraavaksi esittelemme *tilahintavektorin* $\psi \in \mathbb{R}^s_+$, jolle pätee ehto $\mathbf{P} = D\psi$. Tällöin saamme ensimmäisen päätuloksemme

LAUSE 2.3. *Markkinat ovat arbitraasivapaat, jos ja vain jos on olemassa tilahintavektori* [**11**].

Tämä on sopimusten hinnoittelun kannalta hyvin tärkeä tulos, sillä sen mukaan markkinoiden arbitraasivapauden varmistamiseksi riittää positiivisen tilahintavektorin identifiointi. Valitsemalla tilahintavektoriksi alkeistilahintojen vektorin, saamme seuraavan tuloksen.

SEURAUS 2.4. *Jos yhden hinnan laki on voimassa ja alkeishinnat ovat positiivisia, niin markkinat ovat arbitraasivapaat.*

Lauseen 2.3 avulla voimme myös johtaa seuraavan riskineutraalia arvottamista koskevan tuloksen.

SEURAUS 2.5. *Jos $\psi \in \mathbb{R}^s_+$ on tilahintavektori ja $\psi_0 = \sum_{k=1}^{s} \psi_k$, niin yhtäsuuruudesta $\mathbf{P} = D\psi$ seuraa, että*

$$\frac{P_j}{\psi_0} = \sum_{k=1}^{s} D_{jk}\frac{\psi_k}{\psi_0} \equiv \mathbf{E}^0[D_j]\,,$$

mistä seuraa, että $P_j = \psi_0\mathbf{E}^0[D_j]$. Tässä $\mathbf{E}^0$ viittaa odotusarvoon, joka on määritelty "synteettisten" markkinatodennäköisyyksien ψ_k/ψ_0 suhteen. Näillä todennäköisyyksillä ei ole mitään tekemistä objektiivisten kanssa.

Lisäksi huomataan, että mikäli markkinat ovat arbitraasivapaat ja on olemassa sijoitusportfolio $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee ehto $D^T\theta_0 = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^s_+$, niin silloin tilahinnan määritelmän nojalla

$$\mathbf{P}\cdot\theta_0 = (D\psi)\cdot\theta_0 = (D\psi)^T\theta_0 = \psi^T D^T\theta_0 = \psi^T\mathbf{1} = \psi\cdot\mathbf{1} = \sum_{k=1}^{s}\psi_k = \psi_0$$

Tämän valossa ψ_0 voidaan siis tulkita riskittömäksi diskonttaustekijäksi. Seuraavaksi määrittelemme, millaiset vaihtoehtoisiin tiloihin ehdollistetut tuotot ovat saavutettavissa jollakin mahdollisella sijoitusportfoliolla. Tätä varten tarvitsemme seuraavan määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Ehdollistettu tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ on *toistettavissa* eli *suojattavissa* tai *saavutettavissa*, jos on olemassa sijoitusportfolio $\theta \in \mathbb{R}^n$ siten, että $D^T\theta = \mathbf{y}$. Markkinat ovat *täydelliset*, jos mielivaltainen ehdollistettu tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ on toistettavissa.

Markkinoiden täydellisyys ja arbitraasivapaus eivät ole keskenään ekvivalentteja määritelmiä. Arbitraasivapailla markkinoilla ei ole mahdollista muodostaa tuottoisaa sijoitusstrategiaa ilman todellista nettoinvestointia. Arbitraasivapaus liittyy oleellisesti siihen, millaisia hintoja markkinoilla voi vallita. Sen sijaan markkinoiden täydellisyys edellyttää, että mielivaltainen ehdollistettu tuotto täytyy olla saavutettavissa. Markkinoiden täydellisyys siis liittyy oleellisesti vektoriavaruuksien kannan käsitteeseen sekä sijoitusstrategioiden hintojen ja tuottojen esityksiin näiden kanta-alkioiden avulla. Selvennykseksi, oletamme, että vaihtoehtoisia tuottoja kuvaavien vektoreiden D_j^T joukosta löytyy s kappaletta toisistaan lineaarisesti riippumatonta tuottovektoria ja $n \geq s$. Merkitsemme näiden toisistaan lineaarisesti riippumattomien vektoreiden muodostamaa $s \times s$- matriisia merkinnällä $\tilde{D}$. Tällöin mielivaltainen vaihtoehtoinen tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ voidaan saavuttaa portfoliolla $\tilde{\theta} = (\tilde{D}^{-1})^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ joka lineaarisen riippumattomuuden nojalla on yhtälöryhmän $\tilde{D}^T \tilde{\theta} = \mathbf{y}$ yksikäsitteinen ratkaisu.

Huomautus 2.7. Oletamme, että $L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_s)$ on mielivaltainen tuottoavaruuden $\mathbb{R}^s$ ortonormaali kanta. Toisin sanoen $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_l = 0$ kaikilla $k \neq l$ ja $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k = ||\mathbf{X}_k||^2 = 1$, $k, l = 1, ..., s$. Tällöin mielivaltainen tuottovektori $D_l^T \in \mathbf{R}^s$ voidaan esittää kantavektoreiden avulla muodossa $D_l^T = \sum_{k=1}^s (D_l^T \cdot \mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k$. Erityisesti siis $P_l = p(D_l^T) = \sum_{k=1}^s (D_l^T \cdot \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k)$.

LUKU 3

Optimaalinen salkun valinta

Seuraavaksi tarkastelemme tapausta, jossa sijoittaja hyödyntää optimaalisen sijoitussalkun valitaongelmassa odotetun hyödyn periaatetta. Optimointiongelma on nyt muotoa

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{E}[U(x)] : x = \mathbf{d} \cdot \theta \geq 0 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P} \cdot \theta \leq W\},$$

missä $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$ kuvaa arvopapereiden satunnaisia tuottoja, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ kuvaa arvopaperisalkkua, $\mathbf{d} \cdot \theta = x$ on *sijoituksen kokonaistuotto* ja $\mathbf{P} \cdot \theta \leq W$ on *budjettirajoite*, jonka mukaan sijoittajan tulot $W > 0$ ovat vähintään yhtä suuret kuin salkun hinta. Rajoite $x \geq 0$ tarkoittaa, että sijoittaja tekee sijoituskohteiden valinnan vain niiden kohteiden joukosta, jotka takaavat vähintään nollatuoton. Sijoittajan tavoitteena on valita budjettirajoitteensa puitteissa salkku $\theta \in \mathbb{R}^n$ siten, että hänen odotettu hyötynsä maksimoituu.

LAUSE 3.1 (Salkun valinnan lause). *Olkoon $U(x)$ jatkuva, kasvava ja derivoituva hyötyfunktio, joka toteuttaa ehdot $\lim_{x\to\infty} U(x) = \infty$ ja $U' > 0$. Olkoon lisäksi olemassa salkku $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\sum_{j=1}^n \theta_j^0 d_j > 0$. Tällöin optimisalkun ongelmalle löytyy ratkaisu jos ja vain jos markkinat ovat arbitraasivapaat.*

Seuraavaksi tarkastelemme *optimisalkkua* $\theta^* \in \mathbb{R}^n$, kun budjettirajoite on pureva, eli kun $\theta^* \cdot P = W$, ja optimaalisen sijoituksen kokonaistuotto on positiivinen, eli se toteuttaa epäyhtälön $x^* = \sum_{j=1}^n \theta_j^* d_j > 0$. Tällöin pätee seuraava lause.

LAUSE 3.2 (Hinnoitteluyhtälö). *Jos $\theta^* \cdot \mathbf{P} = W$ ja $x^* = \sum_{j=1}^n \theta_j^* d_j > 0$ on salkun θ optimointiongelman ratkaisu, niin*

$$P_k = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} W \tag{3.1}$$

kaikille $k = 1, ..., n$.
Jos on olemassa riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f, niin

$$P_k = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)]r_f} \tag{3.2}$$

kaikille $k = 1, ..., n$. Erityisesti siis huomataan, että jos on olemassa riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f, niin

$$\frac{1}{r_f} = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)]W}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} . \tag{3.3}$$

Todistaaksemme lauseen 3.2 tarvitsemme seuraavaa lemmaa [**12**].

LEMMA 3.3. *Olkoon* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *funktio, jolle* $f(\cdot, t) \in L^1(\mu)$ *kaikilla* $t \in [a,b]$. *Olkoon lisäksi* $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$. *Mikäli osittaisderivaatta* $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$ *ja funktio* $g \in L^1(\mu)$ *ovat olemassa siten, että* $|\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$ *kaikilla x,t, niin F on differentioituva ja* $F'(t) = \int \partial_t f(x,t)d\mu(x)$.

TODISTUS. Koska $f(\cdot, t) \in L^1(\mu)$ kaikilla $t \in [a,b]$, niin f integroituvana funktiona on mitallinen. Olkoon $t_n \to t_0$. Tällöin myös funktio

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

on mitallinen, mistä seuraa, että raja-arvo

$$\lim h_n(x) = \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial_t} = \partial_t f(x,t_0)$$

on mitallinen. Tällöin väliarvolauseen nojalla

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t \in [a,b]} \left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial_t} \right| \leq g(x).$$

Tästä seuraa dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{t_n \to t_0} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) = \int \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
F'(t_0) &= \lim_{t_n \to t_0} \frac{F(x,t_n) - F(x,t_0)}{t_n - t_0} \\
&= \lim_{t_n \to t_0} \frac{\int f(x,t_n)d\mu(x) - \int f(x,t_0)d\mu(x)}{t_n - t_0} \\
&= \lim_{t_n \to t_0} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) \\
&= \int \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) \\
&= \int \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial_t} d\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

□

LAUSEEN 3.2 TODISTUS. Sijoittajan optimointiongelma on nyt muotoa

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{E}[U(\theta \cdot \mathbf{d})], \mathbf{P} \cdot \theta = W\} = \max_{\theta \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{E}\left[U\left(\sum_{j=1}^n \theta_j d_j \right) \right], \mathbf{P} \cdot \theta = W \right\}$$

missä $\theta \cdot \mathbf{d} = x$. Optimointiongelman rajoite-ehto $\mathbf{P} \cdot \theta = W$ on yhtälömuotoinen, joten ratkaisemme optimointiongelman Lagrangen funktion avulla. Lagrangen funktio on tässä tapauksessa muotoa

$$\mathcal{L}(\theta_1, ..., \theta_n, \lambda) = \mathbf{E}\left[U\left(\sum_{j=1}^n \theta_j d_j \right) \right] + \lambda \left(W - \sum_{j=1}^n \theta_j P_j \right) .$$

Ratkaistaksemme optimointiongelman määritämme seuraavaksi Lagrangen funktion osittaisderivaattojen nollakohdat muuttujien $\theta_1, ..., \theta_n, \lambda$ suhteen. Lemman 3.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\theta_1, ..., \theta_n, \lambda)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \left(\mathbf{E}\left[U\left(\sum_{j=1}^n \theta_j d_j \right) \right] + \lambda \left(W - \sum_{j=1}^n \theta_j P_j \right) \right)}{\partial \theta_i} \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{\partial U\left(\sum_{j=1}^n \theta_j d_j \right)}{\partial \theta_i} \right] + \frac{\partial \lambda \left(W - \sum_{j=1}^n \theta_j P_j \right)}{\partial \theta_i} \\
&= \mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{j=1}^n \theta_j d_j \right) d_i \right] - \lambda P_i \,,
\end{aligned}$$

missä $i = 1, ..., n$. Saamme siis

$$\nabla \mathcal{L}(\theta_1^*, ..., \theta_n^*, \lambda^*) = \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1^*} = \mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{j=1}^n \theta_j^* d_j \right) d_1 \right] - \lambda^* P_1 = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_n^*} = \mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{j=1}^n \theta_j^* d_j \right) d_n \right] - \lambda^* P_n = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} = W - \sum_{j=1}^n \theta_j^* P_j = 0 \,, \end{cases}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[U'(x^*) d_1 \right] = \lambda^* P_1 \,, \\
&\vdots \\
&\mathbf{E}\left[U'(x^*) d_n \right] = \lambda^* P_n \,, \\
&W = \sum_{j=1}^n \theta_j^* P_j \,.
\end{aligned}$$

Näin ollen saamme optimaalisuusehdoiksi

$$\mathbf{E}\left[U'(x^*) \mathbf{d} \right] = \lambda^* \mathbf{P} \,, \tag{3.4}$$

$$W = \theta^* \cdot \mathbf{P} \,. \tag{3.5}$$

Toisin sanoen, jokaiselle arvopaperille $k = 1, ..., n$ pätee

$$\mathbf{E}\left[U'(x^*) d_k \right] = \lambda^* P_k \,. \tag{3.6}$$

Kertomalla optimaalisuusehdon (3.4) puolittain vektorilla θ^* saamme

$$\mathbf{E}\left[U'(x^*) \mathbf{d} \cdot \theta^* \right] = \lambda^* \mathbf{P} \cdot \theta^* \,,$$

jolloin purevan budjettirajoitteen $\mathbf{P} \cdot \theta = W$ ja ehdon $x^* = \mathbf{d} \cdot \theta^*$ nojalla saamme

$$\mathbf{E}\left[U'(x^*) x^* \right] = \lambda^* W \,. \tag{3.7}$$

Tällöin yhtälöiden (3.6) ja (3.7) nojalla

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\mathbf{E}\,[U'(x^*)d_k]}{\lambda^*} \\ &= \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\lambda^*} \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} \\ &= \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} W\,, \end{aligned}$$

joten olemme todistaneet lauseen 3.2 yhtälön (3.1). Oletamme nyt lisäksi, että markkinoilta löytyy riskitön sijoituskohde, jonka tuotto $r_f > 0$ ja hinta on 1. Tällöin optimaalisuusehdon (3.4) nojalla

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \mathbf{E}[U'(x^*)r_f] \\ &= \mathbf{E}[U'(x^*)]r_f \\ &> 0\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Saamme yhtälöiden (3.6) ja (3.8) avulla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U'(x^*)d_k] &= \lambda^* P_k \\ &= \mathbf{E}[U'(x^*)]r_f P_k\,, \end{aligned}$$

jolloin

$$P_k = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)]r_f}\,,$$

joten olemme todistaneet lauseen 3.2 yhtälön (3.2). Lopuksi saamme vielä yhtälöiden (3.2), (3.6) ja (3.7) nojalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_f} &= P_k \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)]}{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]} \\ &= \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\lambda^*} \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)]}{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]} \\ &= \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)]W}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]}\,, \end{aligned}$$

joten olemme todistaneet lauseen 3.2 yhtälön (3.3). □

Seuraavaksi sovellamme edellä esiteltyä teoriaa käytännön esimerkkiin.

Esimerkki 3.4. Tarkastelemme taulukon mukaista tilannetta.
Oletamme, että sijoittaja on riskiä kaihtava ja että hänellä on käytettävissään pää-

Talousnäkymä	Tuotto	Todennäköisyys
Erinomainen	d_1	p_1
Keskinkertainen	d_2	p_2
Surkea	d_3	p_3
Riskitön sijoitus	r_f	1

Taulukko 1. Sijoituksen tuotot sekä tuottojen todennäköisyydet eri talousnäkymien suhteen. Tässä $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

oma W. Taulukon 1 mukaisesti sijoittajan salkku eli sijoitusportfolio on muotoa $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, missä θ_1 kuvaa riskitöntä sijoituskohdetta ja θ_2 riskipitoista sijoituskohdetta. Riskipitoisen sijoituksen tuottoa kuvaa satunnaismuuttuja Y, joka voi saada arvoja d_1, d_2, d_3. Riskipitoisen salkun tuoton odotusarvo on siis $E[Y] = d_1p_1+d_2p_2+d_3p_3$. Sijoittajan salkun kokonaistuotto on $x = \theta_1 r_f + \theta_2 Y$. Olkoon riskittömän sijoituskohteen hinta 1. Riskipitoisen sijoituskohteen hinta olkoon Z. Oletamme budjettirajoitteen purevaksi, jolloin $W = \mathbf{P} \cdot \theta = 1 \cdot \theta_1 + Z\theta_2 = \theta_1 + Z\theta_2$. Sijoittajan optimointiongelma on nyt siis muotoa

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^2} \{[\mathbf{E}[U(x)]\} = \max_{\theta \in \mathbb{R}^2} \{[\mathbf{E}[U(\theta_1 r_f + \theta_2 Y)]\}$$

ja rajoite $W = \theta_1 + Z\theta_2$ on yhtälömuotoinen, joten ratkaisemme optimointiongelman Lagrangen funktion avulla. Lagrangen funktio on tässä tapauksessa muotoa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \lambda) &= \mathbf{E}[U(\theta_1 r_f + \theta_2 Y)] + \lambda(W - \theta_1 - Z\theta_2) \\ &= p_1 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_1) + p_2 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_2) + p_3 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_3) \\ &\quad + \lambda(W - \theta_1 - Z\theta_2)\,.\end{aligned}$$

Määritämme seuraavaksi Lagrangen funktion osittaisderivaattojen nollakohdat muuttujien θ_1, θ_2 ja λ suhteen. Näin saamme optimaalisuusehdoiksi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1^*} &= p_1 r_f U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_1) + p_2 r_f U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2) + p_3 r_f U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3) - \lambda^* = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2^*} &= p_1 d_1 U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_1) + p_2 d_2 U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2) + p_3 d_3 U'(\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3) - \lambda^* Z = 0\,, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} &= W - \theta_1^* - Z\theta_2^* = 0\,.\end{aligned}$$

Oletamme, että sijoittajan hyötyfunktio on logaritminen. Toisin sanoen, $U(x) = \ln x$, jolloin $U'(x) = 1/x$ ja saamme optimaalisuusehdot muotoon

$$\frac{p_1 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_1} + \frac{p_2 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2} + \frac{p_3 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3} = \lambda^* \,, \tag{3.9}$$

$$\frac{p_1 d_1}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_1} + \frac{p_2 d_2}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2} + \frac{p_3 d_3}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3} = \lambda^* Z \,, \tag{3.10}$$

$$W = \theta_1^* + Z\theta_2^* \,. \tag{3.11}$$

Yhtälön (3.11) nojalla

$$\theta_2^* = \frac{W}{Z} - \frac{\theta_1^*}{Z}$$

ja yhtälöiden (3.9) ja (3.10) nojalla

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \frac{p_1 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_i} + \frac{p_2 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2} + \frac{p_3 r_f}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3} \\
&= \frac{p_1 (d_1/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_i} + \frac{p_2 (d_2/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2} + \frac{p_3 (d_3/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3} \,.
\end{aligned}$$

Lisäksi merkitsemme $\Delta_k = r_f - d_k/Z$ ja $\alpha_k = d_k/Z$, $k = 1, 2, 3$, jolloin saamme

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{p_1(r_f - d_1/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_1} + \frac{p_2(r_f - d_2/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_2} + \frac{p_3(r_f - d_3/Z)}{\theta_1^* r_f + \theta_2^* d_3} \\
&= \frac{p_1 \Delta_1}{\theta_1^* r_f + \left(\frac{W}{Z} - \frac{\theta_1^*}{Z}\right) d_1} + \frac{p_2 \Delta_2}{\theta_1^* r_f + \left(\frac{W}{Z} - \frac{\theta_1^*}{Z}\right) d_2} + \frac{p_3 \Delta_3}{\theta_1^* r_f + \left(\frac{W}{Z} - \frac{\theta_1^*}{Z}\right) d_3} \\
&= \frac{p_1 \Delta_1}{\theta_1^* \left(r_f - \frac{d_1}{Z}\right) + \frac{d_1 W}{Z}} + \frac{p_2 \Delta_2}{\theta_1^* \left(r_f - \frac{d_2}{Z}\right) + \frac{d_2 W}{Z}} + \frac{p_3 \Delta_3}{\theta_1^* \left(r_f - \frac{d_3}{Z}\right) + \frac{d_3 W}{Z}} \\
&= \frac{p_1 \Delta_1}{\theta_1^* \Delta_1 + \alpha_1 W} + \frac{p_2 \Delta_2}{\theta_1^* \Delta_2 + \alpha_2 W} + \frac{p_3 \Delta_3}{\theta_1^* \Delta_3 + \alpha_3 W} \,.
\end{aligned}$$

Kertomalla yhtälön puolittain tekijällä $(\theta_1^*\Delta_1 + \alpha_1 W)(\theta_1^*\Delta_2 + \alpha_2 W)(\theta_1^*\Delta_3 + \alpha_3 W)$ saamme

$$\begin{aligned}
0 &= p_1\Delta_1(\theta_1^*\Delta_2 + \alpha_2 W)(\theta_1^*\Delta_3 + \alpha_3 W) + p_2\Delta_2(\theta_1^*\Delta_1 + \alpha_1 W)(\theta_1^*\Delta_3 + \alpha_3 W) \\
&\quad + p_3\Delta_3(\theta_1^*\Delta_1 + \alpha_1 W)(\theta_1^*\Delta_2 + \alpha_2 W) \\
&= p_1\Delta_1(\theta_1^*)^2\Delta_2\Delta_3 + p_1\Delta_1\theta_1^*\Delta_2\alpha_3 W + p_1\Delta_1\theta_1^*\Delta_3\alpha_2 W + p_1\Delta_1\alpha_2\alpha_3 W^2 \\
&\quad + p_2\Delta_2(\theta_1^*)^2\Delta_1\Delta_3 + p_2\Delta_2\theta_1^*\Delta_1\alpha_3 W + p_2\Delta_2\theta_1^*\Delta_3\alpha_1 W + p_2\Delta_2\alpha_1\alpha_3 W^2 \\
&\quad + p_3\Delta_3(\theta_1^*)^2\Delta_1\Delta_2 + p_3\Delta_3\theta_1^*\Delta_1\alpha_2 W + p_3\Delta_3\theta_1^*\Delta_2\alpha_1 W + p_3\Delta_3\alpha_1\alpha_2 W^2 \\
&= (\theta_1^*)^2\Delta_1\Delta_2\Delta_3(p_1 + p_2 + p_3) + \theta_1^* W(p_1\Delta_1\Delta_2\alpha_3 + p_1\Delta_1\Delta_3\alpha_2 + p_2\Delta_2\Delta_1\alpha_3 \\
&\quad + p_2\Delta_2\Delta_3\alpha_1 + p_3\Delta_3\Delta_1\alpha_2 + p_3\Delta_3\Delta_2\alpha_1) + W^2(p_1\Delta_1\alpha_2\alpha_3 + p_2\Delta_2\alpha_1\alpha_3 + p_3\Delta_3\alpha_1\alpha_2) \\
&= (\theta_1^*)^2\Delta_1\Delta_2\Delta_3 + \theta_1^* W((p_1 + p_2)\Delta_1\Delta_2\alpha_3 + (p_1 + p_3)\Delta_1\Delta_3\alpha_2 + (p_2 + p_3)\Delta_2\Delta_3\alpha_1) \\
&\quad + W^2(p_1\Delta_1\alpha_2\alpha_3 + p_2\Delta_2\alpha_1\alpha_3 + p_3\Delta_3\alpha_1\alpha_2) \,,
\end{aligned}$$

missä hyödynsimme tietoa $p_1+p_2+p_3=1$. Jakamalla puolittain kertoimella $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, saamme

$$0 = (\theta_1^*)^2 + \theta_1^* W \left(\frac{(p_1+p_2)\Delta_1\Delta_2\alpha_3 + (p_1+p_3)\Delta_1\Delta_3\alpha_2 + (p_2+p_3)\Delta_2\Delta_2\alpha_1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right)$$
$$+ W^2 \left(\frac{p_1\Delta_1\alpha_2\alpha_3 + p_2\Delta_2\alpha_1\alpha_3 + p_3\Delta_3\alpha_1\alpha_2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right),$$

jolloin optimaalinen sijoitustrategia θ_1^* saadaan yhtälöstä

$$0 = (\theta_1^*)^2 + \left(\frac{(p_1+p_2)\alpha_3}{\Delta_3} + \frac{(p_1+p_3)\alpha_2}{\Delta_2} + \frac{(p_2+p_3)\alpha_1}{\Delta_1} \right) \theta_1^* W$$
$$+ \left(\frac{p_1\alpha_2\alpha_3}{\Delta_2\Delta_3} + \frac{p_2\alpha_1\alpha_3}{\Delta_1\Delta_3} + \frac{p_3\alpha_1\alpha_2}{\Delta_1\Delta_2} \right) W^2 . \tag{3.12}$$

Tämä yhtälö voidaan toisen asteen polynomina ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmiä käyttäen, mikäli ratkaisu on olemassa.

Esimerkki 3.5. Pankkiiriliike *Marcellus W. & Zed* harkitsee sijoittamista *Quentin Teen*, *Samuel Jiin* ja *Harvey Koon* uuden elokuvan tuotanto-oikeuksiin. Pankkiiriliikkeen pääanalyytikko *Vincent V.* on havainnut, että sijoitus on hyvin riskipitoinen ja että vaihtoehtoja elokuvan menestykselle on kolme. Vaihtoehtojen tuotot ja todennäköisyydet on esitetty seuraavassa taulukossa. Elokuvaan sijoittamisesta saatavaa

Elokuvan menestys	Kokonaistuotto	Todennäköisyys
Erinomainen	300%	50%
Keskinkertainen	100%	10%
Surkea	0%	40%
Riskitön sijoitus	125%	100%

Taulukko 2. Elokuvan tuotanto-oikeuksien tarjoamat vaihtoehtoiset tuotot ja niiden todennäköisyydet, sekä riskittömän sijoituskohteen tuotto.

kokonaistuottoa kuvaa satunnaismuuttuja Y, joka voi saada arvoja $d_1 = 3$, $d_2 = 1$ ja $d_3 = 0$ riippuen elokuvan menestyksestä. Riskittömän sijoituskohteen tuottoa merkitsemme r_f. Elokuvan tuotanto-oikeuksiin sijoittamisen odotettu kokonaistuotto on

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= d_1p_1 + d_2p_2 + d_3p_3 \\
&= 3 \cdot 0.50 + 1 \cdot 0.10 + 0 \cdot 0.40 \\
&= 1.60 \\
&= 160\% \\
&> 125\% \\
&= r_f ,
\end{aligned}$$

joten odotetun kokonaistuoton valossa elokuvan tuotanto-oikeuksiin sijoittaminen olisi riskitöntä sijoituskodetta parempi vaihtoehto. Pankkiiriliikkeen tulee kuitenkin myös arvioida tilannetta sijoitusvaihtoehdoista saamansa odotetun hyödyn perusteella. Oletamme pankkiiriliikkeen hyötyfunktion logaritmiseksi, toisin sanoen $U(x) = \ln x$. Lisäksi oletamme, että hinnalle pätee $\mathbf{P} = \mathbf{1}$, mikä tarkoittaa, että sekä riskittömän että riskipitoisen sijoituskohteen hinta on 1. Haluamme selvittää, kuinka suuri osa varallisuudestaan W pankkiiriliikkeen kannattaisi sijoittaa riskittömään sijoituskohteeseen ja kuinka suuri osa elokuvan tuotanto-oikeuksiin. Hyödynnämme tässä esimerkin 3.4 yhtälöitä. Merkitsemme pankkiiriliikkeen sijoitusportfoliota merkinnällä $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$, missä θ_1 kuvaa riskitöntä sijoituskohdetta ja θ_2 elokuvan tuotanto-oikeuksia. Oletamme budjettirajoitteen purevaksi, jolloin

$$W = \mathbf{P} \cdot \theta = \theta_1 + \theta_2 ,$$

mistä saamme

$$\theta_2 = W - \theta_1 . \tag{3.13}$$

Esimerkissä 3.4 määrittelemämme Δ_k ja α_k, $k = 1, 2, 3$ saamme nyt muotoon

$$\Delta_k = r_f - d_k/1 = r_f - d_k$$

ja

$$\alpha_k = d_k/1 = d_k .$$

Näiden tietojen sekä yhtälön (3.12) avulla saamme riskittömän sijoituskohteen optimaaliselle arvolle θ_1^* yhtälön

$$\begin{aligned}
0 &= (\theta_1^*)^2 + \left(\frac{(p_1+p_2)\alpha_3}{\Delta_3} + \frac{(p_1+p_3)\alpha_2}{\Delta_2} + \frac{(p_2+p_3)\alpha_1}{\Delta_1} \right) \theta_1^* W \\
&\quad + \left(\frac{p_1\alpha_2\alpha_3}{\Delta_2\Delta_3} + \frac{p_2\alpha_1\alpha_3}{\Delta_1\Delta_3} + \frac{p_3\alpha_1\alpha_2}{\Delta_1\Delta_2} \right) W^2 \\
&= (\theta_1^*)^2 + \left(\frac{(p_1+p_2)d_3}{r_f - d_3} + \frac{(p_1+p_3)d_2}{r_f - d_2} + \frac{(p_2+p_3)d_1}{r_f - d_1} \right) \theta_1^* W \\
&\quad + \left(\frac{p_1 d_2 d_3}{(r_f - d_2)(r_f - d_3)} + \frac{p_2 d_1 d_3}{(r_f - d_1)(r_f - d_3)} + \frac{p_3 d_1 d_2}{(r_f - d_1)(r_f - d_2)} \right) W^2 \quad \text{missä}\, d_3 = 0 \\
&= (\theta_1^*)^2 + \left(\frac{0.50 + 0.40}{1.25 - 1} + \frac{(0.10 + 0.40)3}{1.25 - 3} \right) \theta_1^* W + \frac{0.40 \cdot 3 \cdot 1}{(1.25 - 3)(1.25 - 1)} W^2 \\
&= (\theta_1^*)^2 + \frac{1.20}{0.4375} \theta_1^* W - \frac{1.20}{0.4375} W^2 ,
\end{aligned}$$

mistä saamme ratkaistua optimaalisen riskittömän sijoituskohteen osuuden θ_1^* toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Merkitsemällä $a = (1.20/0.4375)$ saamme ratkaisukaavan muotoon

$$\begin{aligned}
\theta_1^* &= \frac{-aW \pm \sqrt{(aW)^2 - 4(-a)W^2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2} W .
\end{aligned}$$

Koska $\theta_1^* \geq 0$, niin on oltava

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= \frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2}W \\ &= \frac{-(1.20/0.4375)+\sqrt{(1.20/0.4375)^2+4(1.20/0.4375)}}{2}W \\ &= 0.7788443111...W \\ &\approx 0.7788W\,,\end{aligned}$$

jolloin yhtälön (3.13) nojalla

$$\begin{aligned}\theta_2^* &= W-\theta_1^* \\ &= W-0.7788443111...W \\ &= 0.2211556889...W \\ &\approx 0.2212W\,.\end{aligned}$$

Pankkiiriliikkeen sijoitusportfolio on siis muotoa $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (0.7788W, 0.2212W)$ ja se maksimoi hyötynsä sijoittamalla varallisuudestaan W noin 22.12% uuden elokuvan tuotanto-oikeuksiin ja 77.88% riskittömään sijoituskohteeseen.

Esimerkki 3.6. Tämä esimerkki on jatkoa esimerkille 3.5. Oletamme, että pankkiiriliike voi sijoittaa riskittömän kohteen ja uuden elokuvan tuotanto-oikeuksien lisäksi uuden elokuvan levitysoikeuksiin. Uuden elokuvan levitysoikeuksien antama kokonaistuotto elokuvan menestyksestä riippuen on annettu alla olevassa taulukossa. Eloku-

Elokuvan menestys	Kokonaistuotto	Todennäköisyys
Erinomainen	600%	50%
Keskinkertainen	0%	10%
Surkea	0%	40%

Taulukko 3. Elokuvan levitysoikeuksien tarjoamat vaihtoehtoiset tuotot ja niiden todennäköisyydet.

van tuotanto-oikeuksien sekä riskittömän sijoituskohteen tarjoamat tuotot ja niiden todennäköisyydet löytyvät puolestaan esimerkin 3.5 taulukosta 2. Pankkiiriliikkeen sijoitusportfolio on nyt muotoa $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$, missä θ_1 kuvaa riskitöntä sijoituskohdetta, θ_2 elokuvaa ja θ_3 elokuvan levitysoikeuksia. Oletamme, että pankkiiriliikkeen hyötyfunktio on muotoa $U(x) = \ln x$. Lisäksi oletamme, että hinnalle pätee $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ ja että budjettirajoite on pureva. Tällöin on oltava $W = \mathbf{P} \cdot \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, missä W on pankkiiriliikkeen varallisuus. Haluamme selvittää, kuinka suuri osa varallisuudestaan W pankkiiriliikkeen kannattaisi sijoittaa riskittömään sijoituskohteeseen, kuinka suuri osa elokuvan tuotanto-oikeuksiin ja kuinka suuri osa elokuvan levitysoikeuksiin. Taulukoiden 2 ja 3 avulla saamme tuottomatriisiksi

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 1.25 & 1.25 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

missä rivit $D_1 = (1.25, 1.25, 1.25)$, $D_2 = (3, 1, 0)$ ja $D_3 = (6, 0, 0)$ ovat riskittömän sijoitusvaihtoehdon, elokuvan tuotanto-oikeuksien ja elokuvan levitysoikeuksien vaihtoehtoisten tuottojen generoimia vektoreita. Todennäköisyydet generoiva vektori on puolestaan muotoa $(p_1, p_2, p_3) = (0.50, 0.10, 0.40)$. Pankkiiriliikkeen optimointiongelma on siis muotoa

$$\begin{aligned}\max_{\theta\in\mathbb{R}^3}[\mathbf{E}[U(x)] = \max_{\theta\in\mathbb{R}^3}[&p_1 \ln(\theta_1 d_{11} + \theta_2 d_{21} + \theta_3 d_{31}) + p_2 \ln(\theta_1 d_{12} + \theta_2 d_{22} + \theta_3 d_{32}) \\ &+ p_3 \ln(\theta_1 d_{13} + \theta_2 d_{23} + \theta_3 d_{33})]\,,\end{aligned}$$

missä tuottomatriisin nojalla $d_{23} = d_{32} = d_{33} = 0$. Saamme optimointiongelman muotoon

$$\begin{aligned}\max_{\theta\in\mathbb{R}^3}[\mathbf{E}[U(x)] = \max_{\theta\in\mathbb{R}^3}[&p_1 \ln(\theta_1 d_{11} + \theta_2 d_{21} + \theta_3 d_{31}) + p_2 \ln(\theta_1 d_{12} + \theta_2 d_{22}) \\ &+ p_3 \ln(\theta_1 d_{13})]\,.\end{aligned}$$

Budjettirajoite $W = \theta_1+\theta_2+\theta_3$ on yhtälömuotoinen, joten ratkaisemme optimointiongelman Lagrangen funktion avulla. Lagrangen funktio on tässä tapauksessa muotoa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda) &= \mathbf{E}[U(x)] + \lambda(W - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \\ &= \mathbf{E}[\ln(\theta_1 d_{1i} + \theta_2 d_{2i} + \theta_3 d_{3i}) + \lambda(W - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \\ &= p_1 \ln(\theta_1 d_{11} + \theta_2 d_{21} + \theta_3 d_{31}) + p_2 \ln(\theta_1 d_{12} + \theta_2 d_{22}) + p_3 \ln(\theta_1 d_{13})] \\ &\quad + \lambda(W - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \\ &= 0.50 \ln(1.25\theta_1 + 3\theta_2 + 6\theta_3) + 0.10 \ln(1.25\theta_1 + \theta_2) + 0.40 \ln(1.25\theta_1)] \\ &\quad + \lambda(W - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\,.\end{aligned}$$

Määrittämällä Lagrangen funktion osittaisderivaattojen nollakohtien yhtälöt muuttujien $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ja λ suhteen saamme optimaalisuusedoiksi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1^*} = \frac{0.50\cdot 1.25}{1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*} + \frac{0.10\cdot 1.25}{1.25\theta_1^* + \theta_2^*} + \frac{0.40\cdot 1.25}{1.25\theta_1^*} - \lambda^* = 0\,, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2^*} = \frac{0.50\cdot 3}{1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*} + \frac{0.10}{1.25\theta_1^* + \theta_2^*} - \lambda^* = 0\,, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_3^*} = \frac{0.50\cdot 6}{1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*} - \lambda^* = 0\,, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda^*} = W - \theta_1^* - \theta_2^* - \theta_3 = 0\,. \tag{3.17}$$

Optimaalisuusehdon (3.16) nojalla

$$\begin{aligned}\lambda^*(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*) &= 0.50\cdot 6 \\ &= 3\end{aligned} \tag{3.18}$$

ja optimaalisuusehdon (3.15) nojalla

$$\frac{1.50(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) + 0.10(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*) - \lambda^*(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*)(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)}{(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*)(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)} = 0\,.$$

Kertomalla puolittain nimittäjällä sekä hyödyntämällä välitulosta (3.18) saamme

$$1.50(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) + 0.10(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*) - 3(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) = 0\,,$$

jolloin

$$1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^* = 15(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)\,. \tag{3.19}$$

Optimaalisuusehdon (3.14) avulla saamme

$$\begin{aligned}0 &= 0.625(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)1.25\theta_1^* + 0.125(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*)1.25\theta_1^* \\ &\quad + 0.50(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*)(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) - \lambda^*(1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^*)(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)1.25\theta_1^*\end{aligned}$$

ja sijoittamalla tähän välitulokset (3.18) ja (3.19) saamme

$$\begin{aligned}0 &= 0.625(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)1.25\theta_1^* + 0.125 \cdot 15(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)1.25\theta_1^* \\ &\quad + 0.50 \cdot 15(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) - 3(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)1.25\theta_1^* \\ &= 7.50(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)^2 + (0.625 + 1.875 - 3)1.25\theta_1^*(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) \\ &= 7.50(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)^2 - 0.625\theta_1^*(1.25\theta_1^* + \theta_2^*)\,,\end{aligned}$$

jolloin

$$7.50(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) - 0.625\theta_1^* = 0\,,$$

mistä saamme

$$1.25\theta_1^* + \theta_2^* = \frac{0.625}{7.50}\theta_1^* \tag{3.20}$$

ja

$$\begin{aligned}\theta_2^* &= \frac{0.625 - 7.50 \cdot 1.25}{7.50}\theta_1^* \\ &= -\frac{8.75}{7.50}\theta_1^*\,. \end{aligned}\tag{3.21}$$

Sijoittamalla välituloksen (3.20) välitulokseen (3.19) saamme

$$\begin{aligned}1.25\theta_1^* + 3\theta_2^* + 6\theta_3^* &= 15(1.25\theta_1^* + \theta_2^*) \\ &= 15\frac{0.625}{7.50}\theta_1^* \\ &= 1.25\theta_1^*\,,\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}\theta_3 &= -\frac{1}{2}\theta_2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{8.75}{7.50}\theta_1^*\right) \\ &= \frac{8.75}{15}\theta_1\,. \end{aligned}\tag{3.22}$$

Nyt voimme sijoittaa välitulokset (3.21) ja (3.22) optimaalisuusehtoon (3.17), jolloin saamme

$$\begin{aligned}W - \theta_1^* - \theta_2^* - \theta_3 &= W - \theta_1^* + \frac{8.75}{7.50}\theta_1^* - \frac{8.75}{15}\theta_1 \\ &= W - \frac{6.25}{15}\theta_1^* \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

jolloin

$$\theta_1^* = \frac{15}{6.25} W = 2.4W$$

ja välitulosten (3.21) ja (3.22) nojalla

$$\begin{aligned}
\theta_2^* &= -\frac{8.75}{7.5} \cdot \frac{15}{6.25} W = -2.8W\,, \\
\theta_3^* &= \frac{8.75}{15} \cdot \frac{15}{6.25} W = 1.4W\,.
\end{aligned}$$

Pankkiiriliikkeen optimaalinen sijoitusportfolio on siis muotoa $\theta = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*) = (2.4W, -2.8W, 1.4W)$. Tämä tarkoittaa, että pankkiiriliikkeen tulisi sijoittaa riskittömään sijoituskohteeseen 2.4-kertaisesti ja elokuvan tuotanto-oikeuksiin 1.4-kertaisesti oman varallisuutensa verran sekä myydä elokuvan tuotanto-oikeuksia lyhyeksi 2.8-kertaisesti oman varallisuutensa verran. Lyhyeksi myynnillä tarkoitamme, että sijoittaja myy arvopaperin, jota ei vielä omista. Hän olettaa arvopaperin arvon putoavan, jolloin hän voi ostaa arvopaperin myyntihintaa edullisemmin. Sijoittajan voitto muodostuu myynti- ja ostohinnan erosta.

LUKU 4

Log-optimaalinen hinnoittelu

Hyödynnämme lauseen 3.2 yhtälöitä (3.1) ja (3.2) seuraavan hinnoittelukaavan sovelluksen määrittämiseen.

LAUSE 4.1. *Olkoon hyötyfunktio logaritminen,* $U(x) = \ln x$*, ja varallisuus* $W = 1$*. Tällöin minkä tahansa tuoton* d_k *antavan sijoituskohteen hinta on*

$$P_k = \mathbf{E}\left[\frac{d_k}{x^*}\right], \tag{4.1}$$

kaikilla $k = 1, ..., n$ *missä* $x^* = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^* d_j > 0$ *on log-optimaalisen salkun tuotto. Erityisesti, mikäli tuotto* d *on deterministinen, sen hinta on*

$$P_k = \mathbf{E}\left[\frac{d_k}{x^*}\right] = \frac{d_k}{r_f}, \tag{4.2}$$

kaikilla $k = 1, ..., n$.

TODISTUS. Oletusten $U(x) = \ln x$ ja $W = 1$ nojalla lauseen 3.2 yhtälölle (3.1) pätee

$$\begin{aligned} P_k &= \mathbf{E}\left[\frac{U'(x^*)d_k}{U'(x^*)x^*}\right] W \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{(d(\ln x^*)/dx^*)d_k}{(d(\ln x^*)/dx^*)x^*}\right] \cdot 1 \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{(1/x^*)d_k}{(1/x^*)x^*}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{d_k}{x^*}\right] \end{aligned}$$

kaikilla $k = 1, ..., n$. Kun on olemassa riskitön sijoituskohde, jonka tuotto $\mathbf{d} = r_f$ on deterministinen, niin saamme lauseen 3.2 yhtälölle (3.2)

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)]r_f} \\ &= \frac{\mathbf{E}[(1/x^*)]d_k}{\mathbf{E}[(1/x^*)]r_f} \\ &= \frac{d_k}{r_f}. \end{aligned}$$

□

LUKU 5

Dynaamisesta hyötyteoriasta

5.1. Investointipäätäntä ja riskin kaihtaminen

Tarkastelemme seuraavaksi *Fisherin säästämisongelmaa*, jossa sijoittajan sijoitushorisontti on kahden periodin mittainen. Periodit voivat olla esimerkiksi nykyisyys ja tulevaisuus. Ensimmäisellä periodilla sijoittaja hankkii tulon $y_1 > 0$ ja sijoittaa tästä summan $s_1 > 0$ riskittömään sijoituskohteeseen, joka tarjoaa hänelle varman tuoton $r_f > 0$. Loput tulonsa sijoittaja kuluttaa. Toisella periodilla sijoittaja hankkii tulon $y_2 > 0$ ja kuluttaa sekä tämän että ensimmäisen periodin sijoituksensa tuottoineen. Sijoittajan ensimmäisen ja toisen periodin kulutukselle c_i, $i = 1, 2$ pätee siis

$$\begin{cases} c_1 = y_1 - s_1 \\ c_2 = y_2 + (1 + r_f)s_1 = y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Jälkimmäisessä yhtälössä hyödynnämme ensimmäisestä yhtälöstä saatua tulosta $s_1 = y_1 - c_1$. Sijoittajan on valittava, kuinka suuren summan hän ensimmäisellä periodilla kuluttaa. Oletamme sijoittajan pyrkivän valitsemaan kulutuksensa siten, että hän saa kulutusparista (c_1, c_2) suurimman mahdollisen hyödyn. Tavoitteenamme on määrittää tuo optimaalinen kulutuspari (c_1^*, c_2^*). Olkoon sijoittajan hyötyfunktio $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva ja aidosti konkaavi. Sijoittajan ensimmäisen periodin tulo y_1 tunnetaan. Mikäli myös toisen periodin tulo y_2 tunnetaan, voimme ratkaista optimaalisen kulutusparin hyötyfunktion suurimman arvon avulla. Mikäli taas sijoittajan toisen periodin tulo on satunnainen, ratkaisemme optimaalisen kulutusparin hyötyfunktion odotusarvon maksimin perusteella. Seuraavaksi käsittelemme molemmat tapaukset erikseen.

5.1.1. Sijoittajan toisen periodin tulot tunnetaan.

Sijoittajan toisen periodin tulon y_2 ollessa tunnettu saamme yhtälön (5.1) avulla optimointiongelman muotoon

$$\begin{aligned} \max_{(c_1,c_2)\in A}[\mathbf{E}[U(c_1, c_2)] &= \max_{(c_1,c_2)\in A}[U(c_1, c_2)] \\ &= \max_{c_1<y_1}[U(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))]\,, \end{aligned}$$

missä joukko A koostuu kaikista yhtälön (5.1) toteuttavista ensimmäisen ja toisen periodin kulutusvaihtoehdoista c_1 ja c_2. Toisen periodin kulutuspäätös c_2 määritellään yhtälön (5.1) nojalla ensimmäisen periodin kulutuspäätöksen c_1 avulla. Lisäksi tiedämme, että hyötyfunktio on aidosti konkaavi ja kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Määrittelemme funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(c_1) = U(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))$, missä $y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1) = c_2$. Lemman 1.10 nojalla f on aidosti konkaavi. Tällöin

f saa lemman 1.9 nojalla suurimman arvonsa sen ensimmäisen derivaatan nollakohdassa. Derivoimalla saamme

$$
\begin{aligned}
f'(c_1^*) &= \frac{\partial(U(c_1^*, c_2^*))}{\partial c_1^*} + \frac{\partial(U(c_1^*, c_2^*))}{\partial c_2^*} \frac{\partial}{\partial c_1^*}(y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*)) \\
&= U_{c_1^*}(c_1^*, c_2^*) - (1 + r_f)U_{c_2^*}(c_1^*, c_2^*) \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

missä käytimme osittaisderivaatoille merkintää $\partial(U(c_1^*, c_2^*))/\partial c_i^* = U_{c_i^*}(c_1^*, c_2^*)$, $i = 1, 2$. *Ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehto* kulutusparille (c_1^*, c_2^*) on siis

$$
U_{c_1^*}(c_1^*, c_2^*) = (1 + r_f)U_{c_2^*}(c_1^*, c_2^*)\,.
$$

Yhtälön (5.1) avulla ehto saa muodon

$$
U_{c_1^*}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*)) = (1 + r_f)U_{c_2^*}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*))\,.
$$

Lemman 1.8 nojalla funktion f ensimmäinen derivaatta on aidosti vähenevä. Tällöin sen toiselle derivaatalle täytyy päteä

$$
\begin{aligned}
f''(c_1) &= \frac{\partial}{\partial c_1}\left(U_{c_1}(c_1, c_2) - (1 + r_f)U_{c_2}(c_1, c_2)\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial c_2}\left(U_{c_1}(c_1, c_2) - (1 + r_f)U_{c_2}(c_1, c_2)\right) \frac{\partial}{\partial c_1}(y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)) \\
&= \frac{\partial^2(U(c_1, c_2))}{\partial c_1 \partial c_1} - (1 + r_f)\frac{\partial^2(U(c_1, c_2))}{\partial c_2 \partial c_1} - (1 + r_f)\frac{\partial^2(U(c_1, c_2))}{\partial c_1 \partial c_2} \\
&\quad + (1 + r_f)^2 \frac{\partial^2(U(c_1, c_2))}{\partial c_2 \partial c_2} \\
&= U_{c_1 c_1}(c_1, c_2)) - (1 + r_f)U_{c_2 c_1}(c_1, c_2)) - (1 + r_f)U_{c_1^* c_2^*}(c_1^*, c_2)) \\
&\quad + (1 + r_f)^2 U_{c_2 c_2}(c_1, c_2)) \\
&< 0\,.
\end{aligned}
$$

Edellä käytimme merkintää $\partial^2(U(c_1, c_2))/(\partial c_i \partial c_j) = U_{c_i c_j}$, $i, j = 1, 2$. Mikäli ristiderivaatat $U_{c_2^* c_1^*}(c_1^*, c_2^*))$ ja $U_{c_1^* c_2^*}(c_1^*, c_2^*))$ ovat yhtä suuret, saamme hyötyfunktion *toisen kertaluvun optimaalisuusehdoksi*

$$
U_{c_1^* c_1^*}(c_1^*, c_2^*)) - 2(1 + r_f))U_{c_2^* c_1^*}(c_1^*, c_2^*)) + (1 + r_f)^2 U_{c_2^* c_2^*}(c_1^*, c_2^*)) < 0\,.
$$

Sijoittajan optimaalisen kulutusparin on siis toteutettava ensimmäisen ja toisen kertaluvun ehdot. Seuraavaksi perehdymme hyötyfunktion sekä optimaalisen kulutusparin geometriseen havannoillistamiseen. Tätä varten esittelemme tasa-arvokäyrän määritelmän.

Määritelmä 5.1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$. Tällöin joukko $K = \{x \in A : f(x) = k\}$, $K \neq \emptyset$, on funktion f *tasa − arvokäyrä*, eli kaikkien niiden pisteiden $x \in A$ joukko, joilla f saa arvon k.

Joukko $\{(c_1, c_2) : U(c_1, c_2) = m\}$ sisältää kaikki ne sijoittajan kulutuspäätökset (c_1, c_2), jotka tuottavat sijoittajalle hyödyn m, missä $m \in \mathbb{R}$. Oletamme tämän epätyhjäksi joukoksi. Määritelmän 5.1 nojalla kyseessä on tällöin tasa-arvokäyrä. Hyötyfunktion tapauksessa tasa-arvokäyriä $U(c_1, c_2) = m$ kutsutaan *samahyötykäyriksi*.

LAUSE 5.2. *Konkaavin hyötyfunktion samahyötykäyrät ovat konvekseja.*

TODISTUS. Olkoon funktio $U : A \to \mathbb{R}$ konkaavi, $A \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Tällöin kaikille $(a, b) \in \{x \in A : U(x) \geq m\}$ pätee

$$\begin{aligned} U(\lambda a + (1-\lambda)b) &\geq \lambda U(a) + (1-\lambda)U(b) \\ &\geq \lambda m + (1-\lambda)m \\ &= m\,, \end{aligned}$$

jolloin $\lambda a + (1-\lambda)b \in \{x \in A : U(x) \geq m\}$. Määritelmän 1.6 nojalla joukko $\{x \in A : U(x) \geq m\}$ on konveksi, jolloin myös samahyötykäyrä $\{x \in A : U(x) = m\}$ on konveksi. □

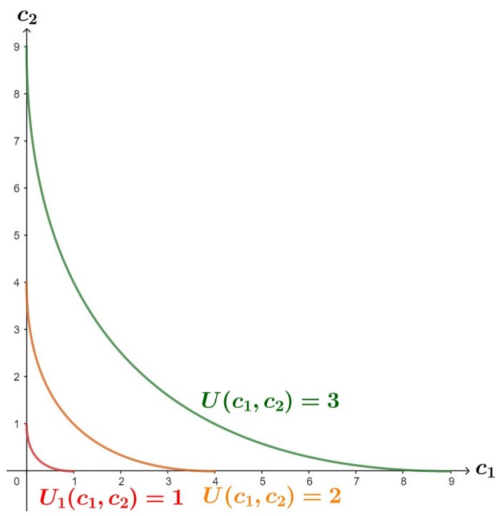
Hyötyfunktio $U(c_1, c_2)$ on aidosti konkaavi ja jatkuvasti derivoituva sekä kulutuksen c_1 että kulutuksen c_2 suhteen. Lisäksi oletamme, että $U(c_1, c_2)$ on aidosti kasvava molemmissa koordinaateissa. Tällöin muuttujan c_1 ollessa kiinnitetty johonkin tiettyyn arvoon, yhtälö $U(c_1, c_2) = m$ voi toteutua vain yksiselitteisellä muuttujan c_2 arvolla. Näiden tietojen nojalla voimme suorittaa implisiittidifferentioinnin yhtälölle $U(c_1, c_2) - m = 0$ muuttujan c_1 suhteen [**13**]. Saamme

$$U_{c_1}(c_1, c_2) + U_{c_2}(c_1, c_2)\frac{dc_2}{dc_1} = 0\,.$$

Koska $U(c_1, c_2)$ on aidosti kasvava molemmissa koordinaateissa, samahyötykäyrän kulmakertoimelle pätee

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{U_{c_1}(c_1, c_2)}{U_{c_2}(c_1, c_2)} < 0\,.$$

Toisin sanoen samahyötykäyrät ovat väheneviä (c_1, c_2)-tasossa. Kuten kuvassa 5.1, samahyötykäyrät sijaitsevat (c_1, c_2)-koordinaatistossa sitä ylempänä, mitä suurempi on arvo m. Tämä on seurausta siitä, että hyötyfunktio on aidosti kasvava. Määritelmän 5.1 nojalla samahyötykäyrät eivät koskaan leikkaa toisiaan.

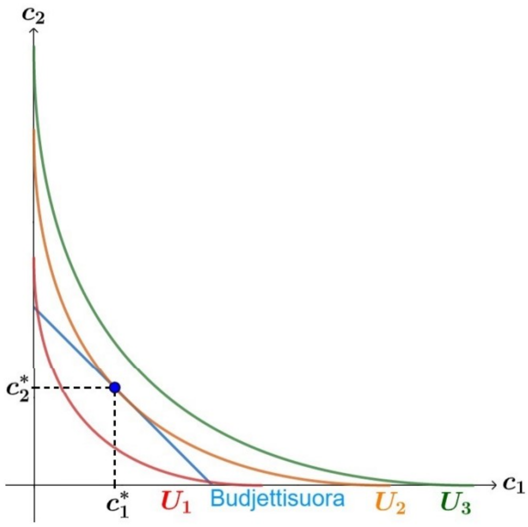


KUVA 5.1. Hyötyfunktion $U(c_1, c_2) = c_1^{\frac{1}{2}} + c_2^{\frac{1}{2}}$ samahyötykäyrät $U(c_1, c_2) = m$, kun $m = 1, 2, 3$.

Kutsumme jatkossa toisen periodin kulutusta $c_2 = y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)$ *budjettisuoraksi*. Se määrittelee kaikki sijoittajan valittavissa olevat kulutusparit (c_1, c_2). Budjettisuoran kulmakerroin on

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{d(y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))}{dc_1} = -(1 + r_f)\,. \tag{5.2}$$

Sijoittaja haluaa maksimoida kulutuspäätöksestä saamansa hyödyn, joten hän pyrkii valitsemaan kulutusparin (c_1, c_2) mahdollisimman korkealta samahyötykäyrältä. Budjettisuora kuitenkin rajoittaa hänen valintaansa. Sijoittajan optimaalisin kulutuspari onkin se (c_1, c_2)-tason piste (c_1^*, c_2^*), jossa budjettisuora sivuaa korkeinta sijottajalle mahdollista samahyötykäyrää, kuten kuvassa 5.2.



KUVA 5.2. Sijoittajan optimaalisin kulutuspari (c_1^*, c_2^*).

5.1.2. Sijoittajan toisen periodin tulo on satunnainen. Sijoittajan toisen periodin tulon y_2 ollessa satunnainen saamme optimointiongelman yhtälön (5.1) avulla muotoon

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2}\{[\mathbf{E}[U(c_1, c_2)]\} = \max_{c_1\in\mathbb{R}}\{\mathbf{E}[U(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))]\}\,.$$

Koska hyötyfunktio on konkaavi, niin Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))] &\le U(\mathbf{E}[c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)])\\ &= U(c_1, \mathbf{E}[y_2] + (1 + r_f)(y_1 - c_1))\\ &= U(c_1, \overline{y}_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))\,,\end{aligned}$$

missä $\overline{y}_2$ kuvaa sijoittajan toisen periodin tulojen keskimääräistä tilaa. Huomaamme siis, että sijoittajan odotettu hyöty on alhaisempi kuin hyöty, jonka sijoittaja saisi varmuuden vallitessa, eli silloin, kun toisen periodin tulot olisivat tiedossa. Yhtälön (5.1) nojalla toisen periodin kulutuspäätös c_2 määritellään ensimmäisen periodin kulutuspäätöksen c_1 avulla. Lisäksi tiedämme, että hyötyfunktio on aidosti konkaavi ja kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Määrittelemme funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(c_1) = \mathbf{E}[U(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))]$, missä $y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1) = c_2$. Lemman 1.10

nojalla g on aidosti konkaavi. Tällöin lemman 1.9 nojalla g saa suurimman arvonsa sen ensimmäisen derivaatan nollakohdassa tai määrittelyvälin päätepisteessä, mikäli se ylipäätään saa suurimman arvon. Derivoimalla saamme lemman 3.3 nojalla

$$\begin{aligned} g'(c_1^*) &= \frac{\partial}{\partial c_1^*}(\mathbf{E}[U(c_1^*, y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))]) \\ &= \frac{\partial(\mathbf{E}[U(c_1^*, c_2^*)])}{\partial c_1^*} + \mathbf{E}\left[\frac{\partial U(c_1^*, c_2^*)}{\partial c_2^*}\frac{\partial}{\partial c_1^*}(y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1))\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{\partial U(c_1^*, c_2^*)}{\partial c_1^*}\right] + \mathbf{E}\left[\frac{\partial U(c_1^*, c_2^*)}{\partial c_2^*}\frac{\partial}{\partial c_1^*}(y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1))\right] \\ &= \mathbf{E}[U_{c_1^*}(c_1^*, c_2^*)] - (1+r_f)\mathbf{E}[U_{c_2^*}(c_1^*, c_2^*)] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Saamme nyt ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdon muotoon

$$\mathbf{E}[U_{c_1^*}(c_1^*, c_2^*)] = (1+r_f)\mathbf{E}[U_{c_2^*}(c_1^*, c_2^*)]\,,$$

toisin sanoen

$$\mathbf{E}[U_{c_1^*}(c_1^*, y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))] = (1+r_f)\mathbf{E}[U_{c_2^*}(c_1^*, y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))]\,.$$

Haluamme selvittää, kuinka suureksi optimaalinen kulutus muodostuu epävarmuuden vallitessa suhteessa varmaan tilaan. Ennen tätä havainnollistamme tilannetta graafisesti. Joukko $\{(c_1, c_2) : \mathbf{E}[U(c_1, c_2)] = m\}$ sisältää kaikki ne sijoittajan kulutuspäätökset (c_1, c_2), jotka tuottavat sijoittajalle hyödyn m, missä $m \in \mathbb{R}$. Joukon ollessa epätyhjä, on kyseessä määritelmän 5.1 nojalla tasa-arvokäyrä. Kutsumme tätä samahyötykäyräksi. Suorittamalla implisiittidifferentioinnin yhtälölle $\mathbf{E}[U(c_1, c_2)] - m = 0$ saamme

$$\mathbf{E}[U_{c_1}(c_1, c_2)] + \mathbf{E}[U_{c_2}(c_1, c_2)]\frac{dc_2}{dc_1} = 0\,.$$

Koska $U(c_1, c_2)$ on aidosti kasvava molemmissa koordinaateissa, samahyötykäyrän kulmakertoimelle pätee

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\mathbf{E}[U_{c_1}(c_1, c_2)]}{\mathbf{E}[U_{c_2}(c_1, c_2)]} < 0\,,$$

Toisin sanoen samahyötykäyrät ovat väheneviä (c_1, c_2)-tasossa. Lauseen 5.2 nojalla samahyötykäyrät ovat konvekseja. Kuten edellisessä luvussa totesimme, sijoittajan optimaalisin kulutus on se (c_1, c_2)-tason piste (c_1^*, c_2^*), jossa budjettisuora sivuaa korkeinta sijottajalle mahdollista samahyötykäyrää.

Tarkastelemme seuraavaksi sijoittajan tuloihin liittyvän riskin ja kulutuksen välistä suhdetta. Hyödynnämme edellisessä luvussa määrittelemäämme aidosti konkaavia funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(c_1) = U(c_1, y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1))$, missä $y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1) = c_2$. Koska $\{(c_1, c_2) : \mathbf{E}[U(c_1, c_2)] \geq m\} \subseteq \{(c_1, c_2) : U(c_1, \mathbf{E}[c_2])] \geq m\}$, niin samahyötykäyrät ovat epävarmuuden vallitessa korkeammalla kuin varmuuden vallitessa. Olkoon $\hat{c}_1$ kulutus, joka maksimoi sijoittajan hyödyn varmuuden vallitessa ja c_1^* kulutus, joka maksimoi sijoittajan hyödyn epävarmuuden vallitessa. Tällöin on oltava

$c_1^* > \hat{c}_1$. Lemman 1.8 nojalla f' on aidosti vähenevä, joten on oltava $f'(c_1^*) < f'(\hat{c}_1)$. Tällöin

$$\mathbf{E}[(f'(\hat{c}_1) - f'(c_1^*))(\hat{c}_1 - c_1^*)] < 0\,,$$

mistä saamme sieventämällä

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[f'(\hat{c}_1)(\hat{c}_1 - c_1^*)] &< \mathbf{E}[f'(c_1^*)(\hat{c}_1 - c_1^*)] \\ &= (\hat{c}_1 - c_1^*)\mathbf{E}[f'(c_1^*)] \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

missä lemman 3.3 ja ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdon nojalla $\mathbf{E}[f'(c_1^*)] = d(\mathbf{E}[f(c_1^*)]) = d(\mathbf{E}[U(c_1^*, y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))]) = 0$. Olemme siis osoittaneet, että $\mathbf{E}[f'(\hat{c}_1)(\hat{c}_1 - c_1^*)] < 0$. Tämä ei kuitenkaan vielä riitä osoittamaan, että sijoittajan tuloihin liittyvän riskin ja kulutuksen välinen suhde olisi negatiivinen. Tarvitsemme sitä varten seuraavan lauseen. Se kertoo meille, että kasvava tuloriski kasvattaa riskiä kaihtavan sijoittajan turvaavan säästämisen intensiteettiä.

LAUSE 5.3. *Olkoon hyötyfunktio $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva ja aidosti konkaavi. Jos kuvaus*

$$A(c_1, c_2) = \frac{U_{c_1c_2}(c_1, c_2) - (1+r_f)U_{c_2c_2}(c_1, c_2)}{U_{c_2}(c_1, c_2)}$$

on vähenevä, niin kasvanut epävarmuus pienentää sijoittajan ensimmäisen periodin kulutusta ja siten kasvattaa sijoittajan ensimmäisen periodin säästämistä.

Lause 5.3 siis osoittaa, että kuvauksen $A(c_1, c_2)$ ollessa vähenevä on sijoittajan optimaalinen ensimmäisen periodin kulutus tuloriskin vähenevä funktio ja siten ensimmäisen periodin säästämispäätös on tuloriskin kasvava funktio. Sivuutamme tämän lauseen todistuksen. Sen sijaan seuraavan lauseen tulemme todistamaan. Kyseessä on lauseen 5.3 erikoistapaus separoituvalle hyötyfunktiolle.

LAUSE 5.4. *Olkoon hyötyfunktio $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva, aidosti konkaavi ja separoituva, eli muotoa $U(c_1, c_2) = U_1(c_1) + U_2(c_2)$, missä $U_1, U_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat monotonisesti kasvavia ja aidosti konkaaveja. Olkoon toisen periodin hyötyfunktion $U_2(c_2)$ absoluuttisen riskinkaihtamisen kerroin $A_2(c_2) = -U_2''(c_2)/U_2'(c_2)$ vähenevä. Tällöin kuvaus*

$$A(c_1, c_2) = \frac{U_{c_1c_2}(c_1, c_2) - (1+r_f)U_{c_2c_2}(c_1, c_2)}{U_{c_2}(c_1, c_2)}$$

riippuu vain jälkimmäisestä koordinaatista ja on siinä vähenevä ja kasvanut epävarmuus pienentää sijoittajan ensimmäisen periodin kulutusta ja siten kasvattaa sijoittajan ensimmäisen periodin säästämistä.

LAUSEEN 5.4 TODISTUS. Todistus etenee neljässä vaiheessa. Ensimmäisenä näytämme, että $A(c_1, c_2)$ on vähenevä. Tämän jälkeen esitämme toisen periodin tulon muodossa $y_2 = \alpha\tilde{y}_2 + \beta$, missä $d\beta/d\alpha = -\mathbf{E}[\tilde{y}_2]$ ja näytämme, että parametrin α kasvu kasvattaa vain varianssia säilyttäen odotusarvon muuttumattomana. Koska varianssi kuvaa tässä tapauksessa riskiä ja parametrin α kasvu kasvattaa varianssia, muttei muuta odotusarvoa, tiedämme, että kasvanut riski pienentää sijoittajan ensimmäisen periodin kulutusta, mikäli $\partial c_1^*/\partial\alpha \leq 0$. Seuraavassa vaiheessa muodostamme lausekkeen osittaisderivaatalle $\partial c_1^*/\partial\alpha$. Viimeisenä osoitamme, että kuvauksen $A(c_1, c_2)$ vähenevyydestä seuraa, että $\partial c_1^*/\partial\alpha \leq 0$.

1) Osoitamme, että $A(c_1, c_2)$ on vähenevä. Tiedämme, että $\partial U_2(b_2)/\partial b_1 = 0$, $\partial U_1(b_1)/\partial b_2 = 0$ ja $\partial U_1^*(b_1)/\partial b_2 = 0$ ja

$$\begin{aligned}
A(b_1, b_2) &= \frac{U_{b_1 b_2}(b_1, b_2) - (1 + r_f)U_{b_2 b_2}(b_1, b_2)}{U_{b_2}(b_1, b_2)} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial(U_1(b_1)+U_2(b_2))}{\partial b_1}\right) - (1 + r_f)\frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial(U_1(b_1)+U_2(b_2))}{\partial b_2}\right)}{\frac{\partial(U_1(b_1)+U_2(b_2))}{\partial b_2}} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial b_2}U_1'(b_1) - (1 + r_f)\frac{\partial}{\partial b_2}U_2'(b_2)}{U_2'(b_2)} \\
&= -(1 + r_f)\frac{U_2''(b_2)}{U_2'(b_2)}\,,
\end{aligned}$$

joten

$$A(c_1, c_2) = -(1 + r_f)\frac{U_2''(c_2)}{U_2'(c_2)} = (1 + r_f)A_2(c_2)\,. \tag{5.3}$$

Oletuksen mukaan toisen periodin hyötyfunktion $U_2(c_2)$ absoluuttisen riskinkaihtamisen kerroin $A_2(c_2)$ on vähenevä, joten yhtälön (5.3) nojalla myös $A(c_1, c_2)$ on vähenevä.

2) Koska haluamme tarkastella kasvavan epävarmuuden vaikutusta ensimmäisen periodin optimaaliseen kulutukseen, esitämme jatkossa toisen periodin tulot muodossa $y_2 = \alpha\tilde{y_2} + \beta$, jossa parametreille α ja β pätee $d\beta/d\alpha = -\mathbf{E}[\tilde{y_2}]$. Tällöin

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbf{E}[y_2] = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha\mathbf{E}[\tilde{y_2}] + \beta) = \mathbf{E}[\tilde{y_2}] - \mathbf{E}[\tilde{y_2}] = 0$$

ja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{Var}[y_2] &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{Var}[\alpha\tilde{y_2} + \beta] \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{E}[(\alpha\tilde{y_2} + \beta)^2] - (\mathbf{E}[\alpha\tilde{y_2} + \beta])^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{E}[\alpha^2\tilde{y_2}^2 + 2\alpha\beta\tilde{y_2} + \beta^2] - (\alpha\mathbf{E}[\tilde{y_2}] + \beta)^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha^2\mathbf{E}[\tilde{y_2}^2] + 2\alpha\beta\mathbf{E}[\tilde{y_2}] + \beta^2 - (\alpha^2(\mathbf{E}[\tilde{y_2}])^2 + 2\alpha\beta\mathbf{E}[\tilde{y_2}] + \beta^2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^2(\mathbf{E}[\tilde{y_2}^2] - (\mathbf{E}[\tilde{y_2}])^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha^2\mathrm{Var}[\tilde{y_2}]] = 2\alpha\mathrm{Var}[\tilde{y_2}]\,,
\end{aligned}$$

mikä tarkoittaa, että parametrin α kasvu kasvattaa vain varianssia säilyttäen odotusarvon muuttumattomana.

3) Haluamme osoittaa, että kasvanut riski pienentää ensimmäisen periodin optimaalista kulutusta c_1^*. Koska varianssi kuvaa riskiä ja parametrin α kasvu kasvattaa vain varianssia säilyttäen odotusarvon muuttumattomana, riittää meidän osoittaa, että $\partial c_1^*/\partial\alpha \leq 0$. Muodostamme ensin lausekkeen osittaisderivaatalle $\partial c_1^*/\partial\alpha$. Saamme esityksen $y_2 = \alpha\tilde{y}_2 + \beta$ avulla ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdon muotoon

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial c_1*}(\mathbf{E}[U(c_1^*, y_2 + (1+r_f)(1-c_1^*))]) \\
&= \frac{\partial}{\partial c_1*}(\mathbf{E}[U_1(c_1^*) + U_2(y_2 + (1+r_f)(1-c_1^*))]) \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{\partial U_1(c_1^*)}{\partial c_1*} + \frac{\partial U_2(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))}{\partial c_1*}\right] \\
&= \mathbf{E}[U_1'(c_1^*) - (1+r_f)U_2'(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))] \\
&= U_1'(c_1^*) - (1+r_f)\mathbf{E}[U_2'(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))] \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

toisin sanoen

$$U_1'(c_1^*) = (1+r_f)\mathbf{E}[U_2'(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))]\,. \tag{5.4}$$

Derivoimalla ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdon (5.4) puolittain muuttujan α suhteen huomaamme, että

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}U_1'(c_1^*) &= \frac{\partial}{\partial\alpha}((1+r_f)\mathbf{E}[U_2'(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))]) \\
&= (1+r_f)\mathbf{E}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(U_2'(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*)))\right]\,,
\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa lemmasta 3.3. Sieventämällä yhtälön molempia puolia edelleen, saamme

$$\begin{aligned}
U_1''(c_1^*)\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha} &= (1+r_f)\mathbf{E}\left[U_2''(c_2^*)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha\tilde{y}_2 + \beta + (1+r_f)(y_1 - c_1^*))\right] \\
&= (1+r_f)\mathbf{E}\left[U_2''(c_2^*)\left(\frac{\partial(\alpha\tilde{y}_2)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} + (1+r_f)\left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha}\right)\right)\right] \\
&= (1+r_f)\mathbf{E}\left[U_2''(c_2^*)\left(\tilde{y}_2 - \mathbf{E}[\tilde{y}_2] - (1+r_f)\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha}\right)\right] \\
&= (1+r_f)\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2 - \mathbf{E}[\tilde{y}_2])] - (1+r_f)^2\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha}\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)]\,,
\end{aligned}$$

jolloin

$$U_1''(c_1^*)\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha} + (1+r_f)^2\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha}\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)] = (1+r_f)\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2 - \mathbf{E}[\tilde{y}_2])]\,,$$

mistä saamme osittaisderivaatalle $\partial c_1^*/\partial\alpha$ lausekkeen

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1^*}{\partial\alpha} &= (1+r_f)\frac{\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])]}{U_1''(c_1^*)+(1+r_f)^2\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)]} \\ &= (1+r_f)\frac{\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])]}{\mathbf{E}[U_1''(c_1^*)+(1+r_f)^2U_2''(c_2^*)]}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

4) Tiedämme, että ensimmäisen ja toisen periodin hyötyfunktiot U_1 ja U_2 ovat aidosti konkaaveja. Tällöin U_1' ja U_2' ovat aidosti väheneviä, joten $U_1'', U_2'' < 0$. Tästä seuraa yhtälön (5.5) nimittäjälle, että $\mathbf{E}[U_1''(c_1^*)+(1+r_f)^2U_2''(c_2^*)] < 0$. Lisäksi tiedämme, että kerroin $1+r_f$ on aidosti positiivinen. Osoittaaksemme, että $\partial c_1^*/\partial\alpha \le 0$ meidän riittää siis näyttää, että lausekkeen (5.5) osoittajalle pätee $\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])] > 0$. Tiedämme, että toisen periodin realisaatiolle pätee joko $\tilde{y}_2 \ge \mathbf{E}[\tilde{y}_2]$ tai $\tilde{y}_2 \le \mathbf{E}[\tilde{y}_2]$. Osoitamme ensin, että $\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])\mathbf{1}_{\{\tilde{y}_2\ge\mathbf{E}[\tilde{y}_2]\}}] > 0$. Kun $\tilde{y}_2 \ge \mathbf{E}[\tilde{y}_2]$, pätee

$$\begin{aligned} c_2 &= \tilde{y}_2 + (1+r_f)(y_1-c_1) \\ &\ge \mathbf{E}[\tilde{y}_2] + (1+r_f)(y_1-c_1) \\ &= \mathbf{E}[c_2]\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Koska sijoittajan on riskinkaihtaja, täytyy toisen periodin hyötyfunktion absoluuttinelle riskinkaihtamisen kertoimelle päteä $A(c_2) \ge 0$. Lisäksi oletuksen nojalla kyseinen kerroin on vähenevä, joten saamme yhtälön (5.6) avulla

$$0 \le A(c_2) \le A(\mathbf{E}[c_2])\,,$$

mikä tarkoittaa absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimen määritelmän nojalla, että

$$0 \le -\frac{U_2''(c_2)}{U_2'(c_2)} \le -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])}\,. \tag{5.7}$$

Hyötyfunktion $U_2(c_2)$ aidosta konkaavisuudesta seuraa, että $U_2''(c_2) < 0$, jolloin yhtälön (5.7) nojalla on oltava $U_2'(c_2) \ge 0$. Oletuksen $\tilde{y}_2 \ge \mathbf{E}[\tilde{y}_2]$ nojalla saamme tällöin, että

$$U_2'(c_2)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2]) \ge 0\,. \tag{5.8}$$

Toisaalta hyötyfunktion $U_2(c_2)$ aidosta konkaavisuudesta seuraa myös, että U_2' on aidosti vähenevä. Tällöin yhtälön (5.6) nojalla $U_2'(c_2) \le U_2'(\mathbf{E}[c_2])$. Tästä sekä oletuksesta $\tilde{y}_2 \ge \mathbf{E}[\tilde{y}_2]$ seuraa

$$U_2'(c_2)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2]) \le U_2'(\mathbf{E}[c_2])(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])\,.$$

Ottamalla yhtälöstä odotusarvon molemmin puolin, saamme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U_2'(c_2)(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])\mathbf{1}_{\{\tilde{y}_2\ge\mathbf{E}[\tilde{y}_2]\}}] &\le \mathbf{E}[U_2'(\mathbf{E}[c_2])(\tilde{y}_2-\mathbf{E}[\tilde{y}_2])\mathbf{1}_{\{\tilde{y}_2\ge\mathbf{E}[\tilde{y}_2]\}}] \\ &= U_2'(\mathbf{E}[c_2])(\mathbf{E}[\tilde{y}_2]-\mathbf{E}[\tilde{y}_2]\mathbf{1}_{\{\tilde{y}_2\ge\mathbf{E}[\tilde{y}_2]\}}) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Yhtälön (5.8) nojalla $U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}]) \geq 0$, joten kertomalla yhtälön (5.7) puolittain tekijällä $U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])$ saamme

$$-U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}]) \leq -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])}U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\,.$$

Otamme yhtälöstä odotusarvon molemmin puolin, jolloin

$$-\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] \leq -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])}\mathbf{E}[U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}]\,,$$

missä yhtälön (5.7) nojalla $-U_2''(\mathbf{E}[c_2])/U_2'(\mathbf{E}[c_2]) \geq 0$ ja yhtälön (5.9) nojalla $\mathbf{E}[U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] \leq 0$. Näiden tietojen nojalla saamme

$$-\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] \leq 0\,,$$

jolloin olemme osoittaneet, että

$$\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] > 0\,.$$

Osoitamme seuraavaksi, että $\mathbf{E}[U_2''(c_2^*)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] > 0$. Kun $\tilde{y_2} \leq \mathbf{E}[\tilde{y_2}]$, niin

$$\begin{aligned} c_2 &= \tilde{y_2} + (1+r_f)(y_1-c_1) \\ &\leq \mathbf{E}[\tilde{y_2}] + (1+r_f)(y_1-c_1) \\ &= \mathbf{E}[c_2]\,, \end{aligned}$$

jolloin vähenevän toisen periodin hyötyfunktion absoluuttisen riskinkaihtamisen kertoimen määritelmän nojalla

$$0 \leq -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])} \leq -\frac{U_2''(c_2)}{U_2'(c_2)}\,, \tag{5.10}$$

mistä tiedon $U_2''(c_2) < 0$ nojalla saamme, että $U_2'(c_2) \geq 0$. Tästä sekä oletuksesta $\tilde{y_2} \leq \mathbf{E}[\tilde{y_2}]$ seuraa

$$U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}]) \leq 0\,. \tag{5.11}$$

Koska U_2' on aidosti vähenevä ja $c_2 \leq \mathbf{E}[c_2]$, niin $U_2'(c_2) \geq U_2'(\mathbf{E}[c_2])$ ja kun $\tilde{y_2} \leq \mathbf{E}[\tilde{y_2}]$, pätee

$$U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}]) \leq U_2'(\mathbf{E}[c_2])(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\,.$$

Ottamalla epäyhtälöstä odotusarvon molemmin puolin, saamme

$$\mathbf{E}[U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] \leq 0\,,$$

kuten epäyhtälössä (5.9). Seuraavaksi kerromme yhtälön (5.10) puolittain tekijällä $U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])$. Saamme yhtälön (5.11) nojalla tällöin

$$-U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}]) \leq -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])}U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\,.$$

Ottamalla yhtälöstä odotusarvon molemmin puolin, saamme

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] &\leq -\frac{U_2''(\mathbf{E}[c_2])}{U_2'(\mathbf{E}[c_2])}\mathbf{E}[U_2'(c_2)(\tilde{y_2}-\mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2}\geq\mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] \\ &\leq 0\,, \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa yhtälöistä (5.10) ja (5.9). Tällöin $\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2} - \mathbf{E}[\tilde{y_2}])\mathbf{1}_{\{\tilde{y_2} \geq \mathbf{E}[\tilde{y_2}]\}}] > 0$. Olemme siis osoittaneet, että $\mathbf{E}[U_2''(c_2)(\tilde{y_2} - \mathbf{E}[\tilde{y_2}])] > 0$, jolloin kuvauksen $A(c_1, c_2)$ vähenevyydestä seuraa lausekkeen (5.5) ja hyötyfunktioiden U_1, U_2 aidon konkaavisuuden nojalla, että $\partial c_1^*/\partial \alpha \leq 0$. □

Esimerkki 5.5. Olkoon hyötyfunktio muotoa $U(c_1, c_2) = -e^{-c_1 c_2}$, missä $c_2 = y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)$ ja $y_2 \sim N(\overline{y}_2, \sigma^2)$, $\sigma \geq 0$ on tunnettu. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U(c_1, c_2)] &= \mathbf{E}[-e^{-c_1 c_2}] \\
&= -\mathbf{E}[e^{-c_1(y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1))}] \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1(y + (1+r_f)(y_1 - c_1))} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \overline{y}_2}{\sigma}\right)^2} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1\left(y + (1+r_f)(y_1 - c_1) + \frac{(y - \overline{y}_2)^2}{2c_1\sigma^2}\right)} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1\left(\frac{2c_1\sigma^2 y + 2c_1\sigma^2(1+r_f)(y_1 - c_1) + y^2 - 2y\overline{y}_2 + \overline{y}_2^2}{2c_1\sigma^2}\right)} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1\left(\frac{y^2 - 2y(\overline{y}_2 - c_1\sigma^2) + \overline{y}_2^2 + 2c_1\sigma^2(1+r_f)(y_1 - c_1)}{2c_1\sigma^2}\right)} dy \,,
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
&y^2 - 2y(\overline{y}_2 - c_1\sigma^2) + \overline{y}_2^2 + 2c_1\sigma^2(1 + r_f)(y_1 - c_1) \\
&= y^2 - 2y(\overline{y}_2 - c_1\sigma^2) + \overline{y}_2^2 - 2c_1\sigma^2\overline{y}_2 + (c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2\overline{y}_2 - (c_1\sigma^2)^2 \\
&\quad + 2c_1\sigma^2(1 + r_f)(y_1 - c_1) \\
&= y^2 - 2y(\overline{y}_2 - c_1\sigma^2) + (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2\overline{y}_2 - (c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2(1 + r_f)(y_1 - c_1) \\
&= (y - (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2))^2 + 2c_1\sigma^2\overline{y}_2 - (c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2(1 + r_f)(y_1 - c_1) \,,
\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U(c_1, c_2)] &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1\left(\frac{(y - (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2))^2 + 2c_1\sigma^2\overline{y}_2 - (c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2(1+r_f)(y_1 - c_1)}{2c_1\sigma^2}\right)} dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1\frac{(y - (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2))^2}{2c_1\sigma^2}} e^{-c_1\frac{2c_1\sigma^2\overline{y}_2 - (c_1\sigma^2)^2 + 2c_1\sigma^2(1+r_f)(y_1 - c_1)}{2c_1\sigma^2}} dy \\
&= -e^{-c_1\left(\overline{y}_2 - \frac{1}{2}c_1\sigma^2 + (1+r_f)(y_1 - c_1)\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} dy \,,
\end{aligned}$$

missä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (\overline{y}_2 - c_1\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} dy = 1 \,,$$

sillä kyseessä on parametrein $((\overline{y}_2 - c_1\sigma^2), \sigma^2)$ normaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktion integraali välillä $]-\infty, \infty[$. Toisin sanoen,

$$\mathbf{E}[U(c_1, c_2)] = -e^{-c_1\left(\overline{y}_2 - \frac{1}{2}c_1\sigma^2 + (1+r_f)(y_1 - c_1)\right)} \,.$$

Optimaalinen kulutus $c_1^*(\sigma)$ saadaan derivaatan nollakohdassa. Toisin sanoen

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{E}[U(c_1^*, c_2^*)]) &= d(-e^{-c_1^*\left(\overline{y}_2 - \frac{1}{2}c_1^*\sigma^2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*)\right)}) \\
&= d(-e^{-c_1^*\overline{y}_2 + \frac{1}{2}(c_1^*)^2\sigma^2 - c_1^* y_1(1+r_f) + (c_1^*)^2(1+r_f)}) \\
&= -e^{-c_1^*\left(\overline{y}_2 - \frac{1}{2}c_1^*\sigma^2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*)\right)}(-\overline{y}_2 + c_1^*\sigma^2 - y_1(1+r_f) + 2c_1^*(1+r_f)) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

jolloin pätee

$$-\overline{y}_2 + c_1^*\sigma^2 - y_1(1+r_f) + 2c_1^*(1+r_f) = 0\,,$$

mistä saadaan

$$c_1^*(\sigma) = \frac{\overline{y}_2 + y_1(1+r_f)}{2(1+r_f) + \sigma^2}\,. \tag{5.12}$$

Saamme yhtälön (5.12) avulla toisen periodin optimaalisen kulutuksen muotoon

$$\begin{aligned}
c_2^* &= y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1^*) \\
&= \overline{y}_2 + (1+r_f)\left(y_1 - \frac{\overline{y}_2 + y_1(1+r_f)}{2(1+r_f)+\sigma^2}\right) \\
&= \overline{y}_2 + (1+r_f)\left(\frac{y_1(2(1+r_f)+\sigma^2) - \overline{y}_2 - y_1(1+r_f)}{2(1+r_f)+\sigma^2}\right) \\
&= \overline{y}_2 + \frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left(y_1(1+r_f+\sigma^2) - \overline{y}_2\right) \\
&= \frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left(\frac{2(1+r_f)+\sigma^2}{1+r_f}\overline{y}_2 + y_1(1+r_f+\sigma^2) - \overline{y}_2\right) \\
&= \frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left((1+r_f+\sigma^2)y_1 + \frac{1+r_f+\sigma^2}{1+r_f}\overline{y}_2\right) \\
&= \frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left((1+r_f+\sigma^2)y_1 + \left(1 + \frac{\sigma^2}{1+r_f}\right)\overline{y}_2\right)\,.
\end{aligned}$$

Koska $y_2 \sim N\left(\overline{y}_2, \sigma^2\right)$, niin

$$c_2^*(\sigma, \overline{y}_2) \sim N\left(\frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left((1+r_f+\sigma^2)y_1 + \left(1+\frac{\sigma^2}{1+r_f}\right)\overline{y}_2\right), \sigma^2\right)\,.$$

Toisen kertaluvun optimaalisuusehdoksi saadaan

$$d^2(\mathbf{E}[U(c_1^*, c_2^*)]) < 0\,,$$

jolloin on oltava

$$\begin{aligned}(c_1^*)'(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\overline{y}_2 + y_1(1+r_f)}{2(1+r_f)+\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2(1+r_f)+\sigma^2}\frac{d}{d\sigma}(\overline{y}_2 + y_1(1+r_f)) + (\overline{y}_2 + y_1(1+r_f))\frac{d}{d\sigma}((2(1+r_f)+\sigma^2)^{-1}) \\ &= (\overline{y}_2 + y_1(1+r_f))\frac{d}{d\sigma}((2(1+r_f)+\sigma^2)^{-1}) \\ &= -\frac{2\sigma(\overline{y}_2 + y_1(1+r_f))}{(2(1+r_f)+\sigma^2)^2} \\ &< 0\,.\end{aligned}$$

Lisäksi on tärkeää huomata, että optimaalinen ensimmäisen periodin kulutus on alhaisempaa epävarmuuden kuin varmuuden vallitessa. Vastaavasti ensimmäisen periodin säästäminen on alhaisempaa varmuuden kuin epävarmuuden vallitessa.

5.2. Riskin kaihdanta ja deflaattorit

Oletamme jatkossa, että sijoittaja hyödyntää valitessaan sijoitustrategiaa hetkellä t vain niitä tietoja, joita hänelle on kertynyt hetkeen t mennessä. Tähän oletukseen liittyen määrittelemme seuraavaksi filtraation käsitteen.

Määritelmä 5.6. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}_+$. Tällöin sigma-algebrojen kokoelmaa $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{I}}$ kutsutaan filtraatioksi, jos $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ kaikilla $0 \le s \le t$, $s, t \in \mathcal{I}$ [**14**].

Voimme nyt ajatella, että $\mathcal{F}_t$ pitää sisällään kaiken hetkeen t mennessä kertyneen sijoitustrategian valintaan liittyvän tiedon. Sijoittaja haluaa valita hetkellä t sen sijoitusstrategian θ^*, joka maksimoi hänen odotetun hyötynsä. Sijoittajan hyötyfunktio $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on monotonisesti kasvava, aidosti konkaavi, kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva, separoituva, sekä muotoa $U(c_t, c_{t+1}) = U_t(c_t) + \beta_s U_{t+1}(c_{t+1})$. Tässä β_s on subjektiivinen diskonttaustekijä, eli tunnettu intertemporaalista riskinkaihtamista mittaava vakio. Oletamme, että sijoittajan kulutusyksiköissä mitatut periodikohtaiset alkuvarallisuudet ovat e_t ja e_{t+1}. Lisäksi oletamme, että periodilla t sijoittaja kuluttaa osan periodikohtaisesta alkuvarallisuudestaan ja sijoittaa loput ja periodilla $t+1$ sijoittaja ainoastaan kuluttaa. Sijoittajan hankkimien arvopapereiden määrää eli sijoitusstrategiaa kuvaa θ. Mikäli sijoittajalla on mahdollisuus hankkia periodilla t yksikköhinnalla p_t arvopaperia, joka takaa tulevana periodilla hänelle epävarman tuoton X_{t+1}, niin sijoittajan kulutus periodeilla t ja $t+1$ on muotoa

$$c_t = e_t - \theta p_t \tag{5.13}$$

ja

$$c_{t+1} = e_{t+1} + \theta X_{t+1}\,. \tag{5.14}$$

Haluamme nyt löytää sijoitusstrategian θ^*, joka maksimoi sijoittajan odotetun hyödyn. Saamme optimointiongelman yhtälöiden (5.13) ja (5.14) avulla muotoon

$$\begin{aligned}\sup_{(c_t,c_{t+1})\in\mathbb{R}^2} \mathbf{E}[U(c_t,c_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] &= \sup_{c_t,c_{t+1}\in\mathbb{R}} \mathbf{E}[U_t(c_t)+\beta_s U_{t+1}(c_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}} U_t(e_t-\theta p_t)+\beta_s\mathbf{E}[U_{t+1}(e_{t+1}+\theta X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t]\,,\end{aligned}$$

missä ehdollisuus nojaa hetkellä t käytettävissä olevaan tietoon. Optimin ensimmäisen kertaluvun ehtoa muodostaessamme käytämme toisessa yhtäsuuruudessa lemmaa 3.3 ja saamme ehdon muotoon

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta^*}(U_t(e_t-\theta p_t)+\beta_s\mathbf{E}[U_{t+1}(e_{t+1}+\theta X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t]) \\ &= \frac{d}{d\theta^*}U_t(e_t-\theta p_t)+\beta_s\frac{d}{d\theta^*}\mathbf{E}[U_{t+1}(e_{t+1}+\theta X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{d}{d\theta^*}U_t(e_t-\theta p_t)+\beta_s\mathbf{E}\left[\frac{d}{d\theta^*}U_{t+1}(e_{t+1}+\theta X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= -p_tU_t'(e_t-\theta p_t)+\beta_s\mathbf{E}[X_{t+1}U_{t+1}'(e_{t+1}+\theta X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= -p_tU_t'(c_t)+\beta_s\mathbf{E}[X_{t+1}U_{t+1}'(c_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

toisin sanoen

$$p_tU_t'(c_t) = \beta_s\mathbf{E}[X_{t+1}U_{t+1}'(c_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t]\,. \tag{5.15}$$

Ensimäisen kertaluvun optimaalisuusehdosta (5.15) saamme muodostettua hinnoittelukaavan

$$\begin{aligned}p_t &= \frac{\beta_s\mathbf{E}[X_{t+1}U_{t+1}'(c_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t]}{U_t'(c_t)} \\ &= \mathbf{E}\left[X_{t+1}\frac{\beta_sU_{t+1}'(c_{t+1})}{U_t'(c_t)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}[X_{t+1}m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,, \qquad (5.16)\end{aligned}$$

missä $m_{t+1} = \beta_sU_{t+1}'(c_{t+1})/U_t'(c_t)$ on niin sanottu *deflaattori*, eli *stokastinen diskonttaustekijä*. Seuraavassa esimerkissä esittelemme hinnoittelukaavan (5.16) kaksi keskeistä implikaatiota.

Esimerkki 5.7. Osoitamme seuraavaksi, että hinnoittelukaavan (5.16) kaksi keskeistä implikaatiota ovat

$$1 = \mathbf{E}[(1+r_{t+1})m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,, \tag{5.17}$$

missä r_{t+1} on arvopaperin tuottovauhti ja

$$\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{1+r_f}\,, \tag{5.18}$$

missä $1/(1+r_f)$ on tavanomainen diskonttaustekijä.

1) Oletamme, että sijoittaja ostaa hetkellä t yksikköhinnalla p_t arvopaperin, joka maksaa hetkellä $t+1$ osingon d_{t+1}. Lisäksi oletamme, että sijoittaja myy arvopaperin hetkellä $t+1$. Sijoittajan sijoituksesta saama tuotto on

$$X_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}\,,$$

mikä voidaan myös ilmoittaa arvopaperin ostohinnan p_t avulla muodossa

$$X_{t+1} = p_t(1 + r_{t+1})\,, \tag{5.19}$$

missä arvopaperin tuottovauhti on

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} - 1 = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - p_t}{p_t}\,.$$

Tarkastelemme nyt arvopaperia, joka generoi tuoton $X_{t+1} = 1 + r_{t+1}$. Tällaisen arvopaperin yksikköhinta p_t on yhtälön (5.19) nojalla

$$p_t = \frac{X_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = 1\,,$$

jolloin hinnoittelukaava (5.16) tulee muotoon

$$1 = \mathbf{E}[(1 + r_{t+1})m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,,$$

mikä vastaa implikaatiota (5.17).

2) Oletamme, että markkinoilla on myös riskitön sijoituskohde, arvopaperi, joka takaa tuoton $X_{t+1} = 1 + r_f$. Tämän arvopaperin yksikköhinta p_t on tällöin 1, kuten edellä. Hinnoittelukaavan nojalla saamme

$$1 = \mathbf{E}[(1 + r_f)m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = (1 + r_f)\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,,$$

jolloin

$$\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{1 + r_f}\,,$$

mikä vastaa implikaatiota (5.18).

Osoitamme lopuksi, että lausekkeiden (5.17) ja (5.18) kaksi keskeistä implikaatiota ovat

$$p_t = \frac{\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]}{1 + r_f} + \mathrm{Cov}[m_{t+1}, X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \tag{5.20}$$

ja

$$\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = r_f - (1 + r_f)\mathrm{Cov}[m_{t+1}, r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,. \tag{5.21}$$

1) Hinnoittelukaavan (5.16) sekä lausekkeen (5.18) avulla saamme

$$\begin{aligned}
p_t &= \mathbf{E}[m_{t+1}X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[m_{t+1}X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\frac{1}{1+r_f} + \mathbf{E}[m_{t+1}X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]}{1+r_f} + \mathbf{E}[m_{t+1}X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad - \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]}{1+r_f} + \mathbf{E}\Big[m_{t+1}X_{t+1} - m_{t+1}\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - X_{t+1}\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad + \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \frac{\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]}{1+r_f} + \mathbf{E}\Big[(m_{t+1} - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t])(X_{t+1} - \mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]) \mid \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \frac{\mathbf{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]}{1+r_f} + \mathrm{Cov}[m_{t+1}, X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,,
\end{aligned}$$

mikä vastaa implikaatiota (5.20).

2) Lausekkeen (5.18) avulla saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &= r_f - 1 - r_f + 1 + \mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f) + (1+r_f)\frac{1}{1+r_f} + \mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f) + (1+r_f)\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f)(1 - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]) + \mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,.
\end{aligned}$$

Sieventämällä lauseketta (5.17) saamme

$$1 = \mathbf{E}[(1+r_{t+1})m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,,$$

jolloin $1 - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]$. Tämän sekä lausekkeen (5.18) avulla saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &= r_f - (1+r_f)\mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + (1+r_f)\frac{1}{1+r_f}\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f)\mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] + (1+r_f)\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f)(\mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]) \\
&= r_f - (1+r_f)\mathbf{E}[m_{t+1}r_{t+1} - m_{t+1}\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] - r_{t+1}\mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad + \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f)\mathbf{E}[(m_{t+1} - \mathbf{E}[m_{t+1} \mid \mathcal{F}_t])(r_{t+1} - \mathbf{E}[r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= r_f - (1+r_f)\mathrm{Cov}[m_{t+1}, r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\,,
\end{aligned}$$

mikä vastaa implikaatiota (5.21).

Kirjallisuutta

[1] Daniel Bernoulli: *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, https://archive.org/details/SpecimenTheoriaeNovaeDeMensuraSortis/mode/2up, 2.12.2022.

[2] Harold W. Kuhn, John von Neumann, Oskar Morgenstern, Ariel Rubinstein: *Theory of Games and Economic Behavior (60th Anniversary Commemorative Edition)*, Princeton University Press, 2007.

[3] René Schils: *How James Watt Invented the Copier Forgotten Inventions of Our Great Scientists.* Springer New York, 2012.

[4] Luis Alvarez, Lasse Koskinen: *Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille.* Helsinki : Vakuutusvalvontavirasto, 2004.

[5] Werner Linde: *Probability Theory: A First Course in Probability Theory and Statistics.* De Gruyter, 2017.

[6] R. Tyrrel Rockafellar: *Convex analysis.* Princeton University Press, 1997.

[7] Po-Lam Yung: *Some consequences of the mean-value theorem*, https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1516/math1010c/Mean_value.pdf, 11.9.2022.

[8] Vijay K. Rohatgi, A. K. Ehsanes Saleh: *An Introduction to Probability and Statistics.* kolmas laitos, John Wiley & Sons, 2015.

[9] Edwin J. Merton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* Kuudes laitos, John Wiley & Sons, 2003.

[10] Robert C. Merton: *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model.* Journal of Economic Theory 3, 373-413, 1971.

[11] Hal R. Varian: *The Arbitrage Principle in Financial Economics.* Economic Perspectives, Volume 1, Number 2 Fall 1987, s. 55 – 72.

[12] Folland, G. B.: *Real analysis: modern techniques and their applications.* toinen laitos, Wiley cop., 1999.

[13] William Cox: *Vector Calculus.* Burlington, MA : Elsevier 1998.

[14] Heinz Bauer: *Probability theory.* Walter de Gruyter, 1996.