Polynomikasvuiset kokonaiset funktiot

Ville-Matias Saariaho

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2022

Tiivistelmä: Ville-Matias Saariaho, *Polynomikasvuiset kokonaiset funktiot* (engl. *Polynomial Growth Entire Functions*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 25 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, joulukuu 2022.

Tässä matematiikan pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan kompleksianalyysin keinoin polynomikasvuisia kokonaisia funktioita. Polynomikasvuisuus voidaan muotoilla tarkastelemalla funktion f modulia eli itseisarvoa. Jos funktion f modulia voidaan arvioida ylhäältä $|f(z)| \leq C|z|^n$, missä $C < \infty$ kaikilla $|z| \geq 1$, niin tällöin polynomi $C|z|^n$ rajoittaa funktion f modulia, joten funktio f on välttämättä enintään n-asteinen polynomi.

Funktion f sanotaan olevan kokonainen, jos se on analyyttinen koko kompleksitasossa. Funktion f analyyttisyys voidaan käsittää suppenavana potenssisarjana, jossa ei ole negatiivisia potensseja, avoimessa kiekossa $B(z_0; r)$ pisteen z_0 suhteen. Kokonaisen analyyttisen funktion f potenssisarjan suppenemissäde on ääretön.

Tutkielman viisikohtainen päälause pohjautuu algebran peruslauseeseen, josta jokainen päälauseen todistettava kohta on johdettavissa. Päälauseen todistuksissa näytetään ensin, että kokonainen analyyttinen funktio f on polynomi, minkä jälkeen muut todistettavat ominaisuudet johdetaan. Algebran peruslause antaa keinon määrittää n-asteisen polynomin nollakohtien lukumäärän, joka saadaan suoraan polynomin asteluvusta. Tämä yksinkertaiselta kuulostava polynomien ominaisuus tuotti entisaikojen matemaatikoille harmaita hiuksia, kunnes Carl Friedrich Gauss todisti algebran peruslauseen väitöskirjassaan vuonna 1799. Nykyään todistuksia algebran peruslauseelle on useita. Eräs erittäin lyhyt todistus pohjautuu Liouvillen lauseeseen, joka on tämän tutkielman päälauseen erään kohdan erikoistapaus.

Päälauseen todistuksissa usein tarkastellaan muunnosta $g(z) = f(1/z)$, joka antaa keinon tarkastella muunnoksen g napoja. Napa voidaan määritellä analyyttisen funktion potenssisarjan avulla. Navan määritelmän mukaan potenssisarjassa on äärellinen määrä negatiivisia potensseja. Jos pystytään näyttämään, että muunnoksella g on napa, niin tällöin funktio f on polynomi. Tutkielman päälause siis antaa erilaisia karakterisaatioita polynomeille.

Sisällys

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on laajentaa kirjoittajan ymmärrystä polynomikasvuisista kokonaisista funktioista ja todistaa viisikohtainen lause, jonka yhtenä erityistapauksena on Liouvillen lause. Polynomikasvuisuus voidaan määritellä siten, että tarkastellaan kompleksilukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Jono kasvaa polynomisesti jos ja vain jos on olemassa vakiot $C > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|a_n| \leq Cn^N,$$

kaikille n.

Liouvillen lause sanoo, että jos kokonainen funktio $f(z)$ on rajoitettu, toisin sanoen on olemassa jokin äärellinen vakio M, siten että $|f(z)| \leq M$ kaikilla arvoilla $z \neq \infty$, niin funktio f supistuu vakioksi. Tämän lauseen avulla voidaan muun muassa todistaa tärkeä algebran peruslause, joka voidaan muotoilla siten, että n-asteisella polynomilla on n-kappaletta nollakohtia.

Tutkielmassa todistettavan lauseen lähtökohtana on algebran peruslause, josta tutkielman todistettavat lauseet ovat muun muassa johdettavissa. Lauseiden todistuksissa korostuu kompleksiarvoisen kokonaisen funktion f muunnoksen $g(z) = f(1/z)$ navan tarkastelu origossa, jolloin päästään näyttämään, että alkuperäisellä funktiolla f on potenssisarja, jossa ei ole negatiivisia potensseja lainkaan ja että positiivisia potensseja on äärellinen määrä. Toinen korostuva teema on Cauchyn integraalikaavan ja Cauchyn estimaatin soveltaminen, kun funktion f modulia arvioidaan ylöspäin. Tutkielman päälause antaa erilaisia karakterisaatioita kompleksisille polynomeille.

Kompleksiarvoista funktiota f kutsutaan kokonaiseksi, jos se on analyyttinen koko kompleksitasossa. Analyyttinen funktio on kompleksisesti differentioituva jokaisessa kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteen z_0 ympäristössä. Lisäksi kokonainen funktio f voidaan kirjoittaa suppenevana potenssisarjana pisteen z_0 suhteen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tyypillisiä kokonaisia funktiota ovat eksponenttifunktio $f(z) = e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{k!}$, trigonometriset funktiot sini $f(z) = \sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ ja kosini $f(z) = \cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, hyperboliset funktiot $f(z) = \sinh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ja $f(z) = \cosh(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, kokonaisten funktioiden derivaatat ja integraalit ja Gaussin virhefunktio

$\mathrm{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ sekä polynomit $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, joita tässä tutkielmassa erityisesti tarkastellaan. Lisäksi muita kokonaisia funktioita ovat esimerkiksi kokonaisten funktioden summat, tulot ja yhdisteet. Tutkielmassa sivutaan muunnoksen $g(z) = f(1/z)$ myötä myös meromorfisia funktiota, jotka ovat holomorfisia koko kompleksitasossa paitsi funktion erikoispisteissä eli navoissa.

Tutkielman alussa taustoitetaan aihetta tarkastelemalla kompleksianalyysin historiaa, jonka jälkeen asetetaan tarvittavat määritelmät ja apulauseet ennen varsinaisen päälauseen todistamista. Historiaosio perustuu Ian Stewartin ja David Tallin teokseen *Complex Analysis* (2018). Päälähteinä tutkielmassa käytettiin teoksia Rolf Busam ja Eberhard Freitag *Complex Analysis* (2009), Rolf Nevanlinna ja Veikko Paatero *Funktioteoria* (1971) ja Lars V. Ahlfors *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (1979). Muut lähteet tukevat määritelmien ja apulauseiden asettamista sekä päälauseen todistamista.

Kompleksianalyysin historiaa

Kompleksiluvut ovat yksi ihmiskuntaa kiinnostavista matemaattisista aihealueista. Vuosien ajan kompleksiluvut ovat ihmetyttäneet matemaatikkoja ja filosofeja. Kompleksiluvut esiintyivät ensimmäistä kertaa Girolamo Cardanon *Ars Magna* -teoksessa. Vasta 300 vuotta myöhemmin kompleksiluvut olivat saaneet formaalin muotoilun, joka täyttää nykyaikaiset täsmälliset matemaattiset vaatimukset. Cardanoa ihmetytti yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 40 \end{aligned}$$

eräs ratkaisu

$$\begin{aligned} x &= 5 + \sqrt{-15} \\ y &= 5 - \sqrt{-15}, \end{aligned}$$

sillä hän ei osannut tulkita negatiivisen luvun neliöjuurta. Hän havaitsi, että tämän tyyppiset ratkaisut noudattavat tavallisia algebrallisia laskusääntöjä, koska ratkaisu on helposti tarkastettavissa näitä laskusääntöjä käyttäen. Cardano kuitenkin suhtautui havaintoonsa vähättelevästi.

Vaikka kompleksilukujen täsmälliseen muotoiluun meni kolme vuosisataa, kompleksianalyysin raamit saatiin aikaiseksi muutamissa vuosikymmenissä.

Jos kompleksiluvut nousivat historiallisissa teoksissa esiin siellä täällä, kuten *Ars Magna* -teoksessa tai René Descartesin teoksessa *La Géometrie*, kompleksianalyysin kehitys on ollut suoraviivaisempaa. Kun kompleksiluvut saatiin muotoiltua täsmällisesti, tuon aikakauden matemaatikot etsivät kompleksianalyysiin tarkoituksella analogioita reaalianalyysista. Matemaatikot siis olettivat, että kaikki reaalianalyysin tulokset pätevät myös kompleksianalyysissa, joten tärkeäksi kysymykseksi muodostuikin se, miten kompleksiset versiot käyttäytyvät ja toimivat. Esimerkiksi integraalin

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

osamurtokehitelmän tarkastelu johti logaritmin $\log(-x)$ tarkasteluun, mikä aiheutti kiistaa John Bernoullin ja Gottfried Leibnizin välillä vuonna 1712. Leibniz väitti, että negatiivisen luvun logaritmi on kompleksinen, kun taas Bernoulli oli varma siitä, että logaritmi on reaalinen. Leonhard Euler ratkaisi kiistan Leibnizin hyväksi vasta vuonna 1749 osoittamalla, että negatiivisten lukujen logaritmi on kompleksinen. Bernoullin ja Leibnizin kiistaan liittyen vuonna 1748 Euler johti kuuluisan kaavan

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

ja asettamalla $\theta = \pi$ saadaan

$$e^{i\pi} = -1,$$

jota pidetään tyylikkäänä yhtälönä, jossa tärkeät matemaattiset symbolit e, i ja π sekoittuvat yllättävällä tavalla. Vaikka tämä kaava kantaakin Eulerin nimeä, Roger Cotes johti vastaavan kaavan jo vuonna 1714.

Pikkuhiljaa 1700-luvun loppupuolelta alkaen matemaatikot alkoivat ymmärtää kompleksilukuja ja palaset alkoivat loksahdella kohdilleen. Kompleksilukujen teoria lumosikin monia matemaatikkoja, mutta ainut mikä puuttui, oli tulkinta, joka täsmälleen selittäisi näitä kompleksisia kokonaisuuksia. 1797 Caspar Wessel julkaisi tanskaksi kirjoitelman, jossa hän esitti kompleksiluvut tason pisteinä. Tämä tutkielma pysyi lähes sata vuotta matemaattisen yleisön tavoittamattomissa kielellisten ongelmien takia, kunnes tutkielma käännettiin ranskaksi. Jean-Robert Argand kirjoitti kompleksiluvuista tason pisteinä itsenäisesti vuonna 1806, joten hän onkin saanut kunnian tästä esitystavasta. Argandin kirjoitelman ajoista alkaen tätä geometrista esitystapaa onkin kutsuttu Argandin diagrammiksi.

Eräs tärkeä kompleksianalyysin pioneeri oli Carl Friedrich Gauss, joka kuuluisassa väitöskirjassaan vuonna 1799 ratkaisi ongelman, joka oli tuottanut matemaatikoille 1700-luvun alkupuolelta asti harmaita hiuksia. Alun alkaen uskottiin laajalti, että reaalikertoimisen toisen asteen yhtälön ratkaisut johtaisivat uusiin ”kompleksilukuihin”, jolloin kompleksisen toisen asteen yhtälön ratkaisut johdattaisivat vielä tuntemattomien lukujen äärelle. Jean d'Alembert väitti, että kompleksilukukertoimisen yhtälön ratkaisut ovat kompleksisia ja Gauss vahvisti tämän väitteen todistamalla algebran peruslauseen. Ensin Gauss todisti sen reaalisessa muodossa, mutta myöhemmin hän todisti myös yleisen tapauksen kompleksisille luvuille. Vuonna 1811 Gauss esitti Friedrich Besselille kompleksiluvut tason pisteinä ja vuonna 1831 julkaisi kompleksiluvuista yksityiskohtaisen teoksen, joka saavutti suuren suosion.

Lähes kolme vuosisataa myöhemmin Cardanon kompleksilukujen ensihavainnoista vuonna 1837 William Rowan Hamilton julkaisi määritelmän kompleksiluvuista järjestettynä pisteparina, jolle pätee tietyt laskusäännöt. Viimeistään tämän jälkeen kompleksiluvut vakiinnuttivat paikkansa matematiikan tutkimuksessa.

Vaikka kompleksilukujen konsepti vakiintui hitaasti, kompleksianalyysin kehitys näyttää olevan suoraviivainen tulos matemaatikkojen halusta yleistää teorioita. Analogioita haettiin kiivaasti reaalianalyysin puolelta ja uskottiin, että kaikki reaalianalyysin tulokset toimisivat automaattisesti kompleksisina versioina. Kiistojakin syntyi, kuten Bernoullin ja Leibnizin tapaus $\log(-x)$ osoittaa. Jälkikäteen katsottuna Bernoulli, Leibniz, Euler ja muut tuon aikakauden matemaatikot jättivät jälkiä kompleksianalyysiin.

Vuonna 1811 Besselille lähettämässä kirjeessään Gauss osoitti, että hän tiesi teorian kompleksisesta integroinnista, jonka pohjalta kompleksianalyysi on pitkälti rakennettu. Reaalisessa tapauksessa, kun integroidaan funktiota f yli välin $[a, b]$ saadaan yksikäsitteinen integraali. Kompleksisessa tapauksessa luvut a ja b ovat kompleksitason pisteitä, joten on välttämätöntä määrittää täsmällinen polku pisteestä a pisteeseen b ja integroida pitkin tätä polkua. Tästä matemaatikkojen keskuudessa nousikin esiin kysymys: riippuuko integraalin arvo valitusta polusta? Gaussin kerrotaan sanoneen:

”Vakuutan, että integraalilla $\int f(x)dx$ on vain yksi arvo riippumatta polusta, sillä edellytyksellä, että funktio ei tule äärettömäksi suljetulla polulla. Tämä on erittäin kaunis lause, jonka todistuksen annan sopivalla hetkellä.”

Tätä hetkeä ei koskaan tullut. Kuitenkin vuonna 1825 muuan Augustin-Louis Cauchy julkaisi todistuksen tälle Gaussin asettamalle väitteelle, jolle hän sai nimeään kantavan lauseen, jota kutsutaan Cauchyn integraalikaavaksi. Tämän jälkeen Cauchy saikin paljon huomiota ja kompleksianalyysin voidaan katsoa alkaneen. Cauchyn ansiosta kompleksianalyysin perusideoita putkahteli esiin jatkuvasti. Esimerkiksi jotta kompleksinen funktio f olisi differentioituva, funktion $f(x+iy)$ reaaliosan $u(x,y)$ ja imaginaariosan $iv(x,y)$ täytyy toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cauchy näytti myös muita differentioituvan funktion käyräintegraalien ominaisuuksia. Jos funktiolle lasketaan käyräintegraali sellaisen pisteen ympäri, jossa funktiota ei ole määritelty, niin Cauchy näytti, miten tällaisen funktion integraali lasketaan. Tätä tapaa kutsutaan Residy-lauseeksi. Integraalin laskeminen Residy-lauseella vaatii ainoastaan funktion residyn jokaisessa erikoispisteessä ja tiedon siitä, kuinka monta kertaa polku pyörähtää tämän erikoispisteen ympäri.

Potenssisarjoista tuli tärkeä osa kompleksianalyysin teoriaa. Pierre-Alphonse Laurent esitti vuonna 1843 Laurentin-sarjan, jossa on mukana negatiivisia potensseja. Funktion f Laurentin-sarja voidaan ilmaista erikoispisteen z_0 suhteen kehitettynä kahden potenssisarjan summana

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + ... + a_n(z - z_0)^n + ... + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^{-n} + ...$$

Funktion f residy pisteessä $z = z_0$ on yllä olevan esityksen vakio b_1. Residy-lauseen kehittäminen on mahdollistanut monien hankalienkin integraalien laskemisen.

Cauchyn määritelmät esimerkiksi jatkuvuudelle, raja-arvolle ja derivaatalle perustuivat infinitesimaaleihin, mikä tarkoittaa niin pientä yksikköä, että sitä ei käytännössä voi mitata. Vaikka Cauchyn infinitesimaaleihin pohjautuvat teoriat joutuivat huonoon maineeseen epämääräisyyksiensä takia 1800-luvun loppupuolella, niin nykyään uusia teorioita nousee infinitesimaalien pohjalta. Puolestaan täsmälliset määritelmät muun muassa jatkuvuudelle, raja-arvolle ja derivaatalle antoi Karl Weierstrass. Hän perusti näkökulmansa potenssisarjoille. Weierstrass käytti määritelmissään epsilon-delta-menetelmää, mutta hänellä oli julkaisuissaan geometrisia puutteita. Tämän puutteen korvasi Bernhard Riemann vuonna 1851 Riemannin pinnoilla, jotka esittävät moniarvoisen funktion jakamalla kompleksitason moniin kerroksiin, joissa funktion on yksiarvoinen.

Kompleksianalyysia on kehitetty Riemannin ajoista lähtien ja monia kauaskantaisia ideoita ja teorioita luodaan edelleen. Cauchyn fundamentaalit ajatukset kompleksianalyysista ovat säilyneet ja jalostuneet, mitä hienoimmiksi teorioiksi ja käytännön sovellutuksiksi. Cardanon ajoista, jolloin kompleksilukujen kuvailu oli vaikeaa, ollaan päästy erilaisiin sovellutuksiin aerodynamiikan, virtausmekaniikan, elekroniikan ja monilla muilla aloilla. Kompleksianalyysin saralla on monia mielenkiintoisia tutkimuskohteita, kuten moduuliset funktiot, kompleksiset monistot, edelleen ratkaisematon Riemannin hypoteesi ja esimerkiksi kompleksiset dynaamiset systeemit, mistä päästään merkittävien fraktaalien, kuten Julian ja Mandelbrotin joukkojen tarkasteluun.

LUKU 1

Määritelmiä

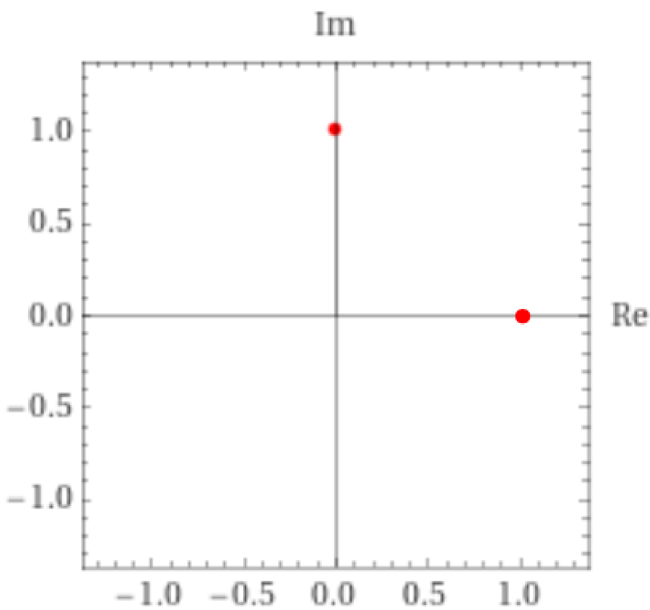
1.1. Kompleksitaso

Kompleksitaso $\mathbb{C}$ voidaan ajatella karteesisena koordinaatistona, mikä koostuu kompleksiluvuista z. Ne voidaan määritellä järjestettyinä pistepareina $z = (x, y)$. Reaaliluvut $\mathbb{R}$ sijaitsevat x-akselilla ja y-akseli eli imaginaariakseli koostuu imaginaariluvuista. Toisin sanoen jokainen kompleksiluku z voidaan esittää muodossa

$$z = x + iy,$$

missä i on imaginaariyksikkö.

Kompleksiluvun reaaliosaa merkitään $\mathrm{Re}(z) = x$ ja imaginaariosaa $\mathrm{Im}(z) = y$. Esimerkiksi luvut $z = 1 = (1, 0)$ ja $z = i = (0, 1)$ voidaan esittää kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteinä



Kompleksiluvulla $z = x + iy$ on olemassa **kompleksikonjugaatti**, joka on luku $\overline{z} = x - iy$. Kompleksikonjugaatti voidaan ajatella pisteen z peilikuvana x-akselin suhteen.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ **moduli** eli itseisarvo on luku $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Moduli vastaa siis vektorin (x, y) euklidista normia. Moduli $|z|$ kertoo pisteen z etäisyyden origosta. Esimerkiksi kompleksitason $\mathbb{C}$ yksikköympyrää merkitään $|z| = 1$.

Kompleksiluvuille z ja w pätee reaalianalyysista tuttu **kolmioepäyhtälö**

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Lisäksi kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ muodostaa **kunnan** eli kompleksilukujen laskutoimitukset ovat kommutatiivisia, assosiatiivisia ja distributiivisia sekä kompleksiluvuilla on olemassa yhteen- ja vähennyslaskun neutraalialkiot sekä vasta- ja käänteisluvut.

1.2. Kompleksinen derivaatta

Olkoot funktio $f\colon G \to \mathbb{C}$ annettu funktio, missä G on avoin ja $z_0 \in \mathbb{C}$. Funktion f sanotaan olevan kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa.

Holomorfiset funktiot määritellään kompleksisen derivaatan avulla.

1.3. Holomorfinen funktio

Funktiota f kutsutaan holomorfiseksi, jos funktiolla f on kompleksinen derivaatta avoimen joukon G jokaisessa pisteessä.

Kirjallisuudessa holomorfisuus ja seuraavaksi määriteltävä analyyttisyys asetetaan usein tarkoittamaan samaa asiaa.

1.4. Analyyttinen funktio

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f\colon G \to \mathbb{C}$. Funktio f on analyyttinen, jos jokaiselle $z_0 \in G$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(z_0; r) \subset G$ ja funktiolla f on esitys kiekossa $B(z_0; r)$ suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \text{ missä } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Lokaalisti avoimessa joukossa B holomorfisuus ja analyyttisyys tarkoittavat samaa asiaa. Toisin sanoen ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt, mikä on ehto kompleksiselle differentioituvuudelle.

1.5. Cauchy-Riemannin yhtälöt

Olkoot funktio f differentioituva pisteessä $z = x + iy$ ja $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä x, y, $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat reaalisia. Tällöin osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial v}{\partial y},$$

ovat olemassa pisteessä z ja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

1.6. Kokonainen funktio

Funktion f sanotaan olevan kokonainen, jos se on analyyttinen koko kompleksitasossa.

Kokonaisen funktion f potenssisarjaesityksessä ei siis ole yhtään negatiivista potenssia. Kuitenkin todistuksia helpottamaan tarvitaan sarjoja, joissa näitä negatiivisia potensseja esiintyy.

1.7. Laurentin sarja

Laurentin sarja on pisteen z_0 suhteen on muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

oleva kaksoissarja.

Laurentin sarjassa voi negatiivisia potensseja esiintyä kolmella eri tavalla: niitä ei ole ollenkaan, niitä on äärellinen tai ääretön määrä. Negatiivisia potensseja tarkastelemalla voidaan tutkia analyyttisen funktion f erikoispisteitä.

1.8. Erikoispisteet

Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Olkoon z_0 piste, jolle on voimassa $z_0 \notin G$, mutta jollekin $r > 0$ punkteerattu kiekko $B^*(z_0; r) = B(z_0; r) \setminus \{z_0\} \subset G$. Tällaista pistettä z_0 kutsutaan funktion f eristetyksi erikoispisteeksi.

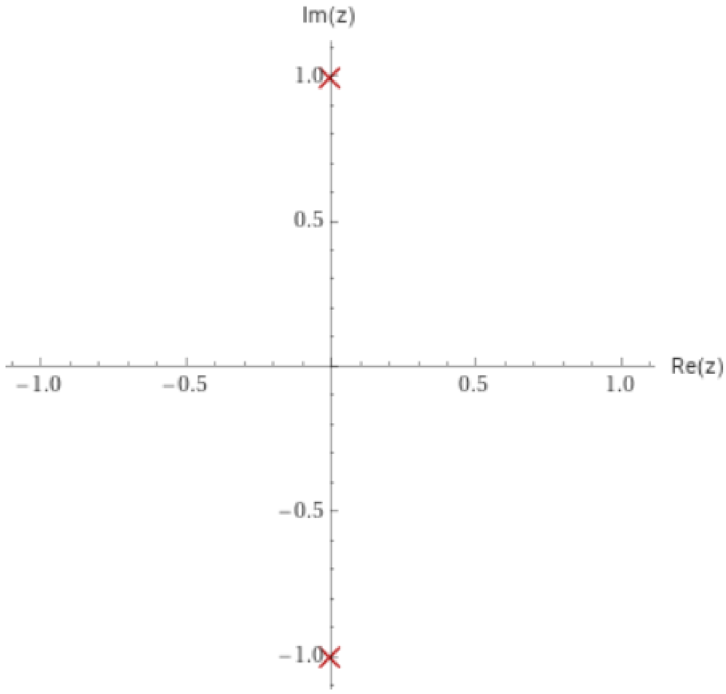
Lisäksi sanotaan, että funktio f on analyyttinen joukossa $G' := G \cup E$ lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä, jos eristettyjen erikoispisteiden joukolla E ei ole kasautumispistettä $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että jollekin $r > 0$ on $B^*(z_0; r) = B(z_0; r) \setminus \{z_0\} \subset G$.
Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Valitaan $r > 0$ siten, että funktio f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Funktiolla f on esitys punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$ suppenevana Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Erikoispisteet voidaan luokitella Laurentin sarjan avulla: Piste z_0 on funktion f

- poistuva erikoispiste, jos $a_n = 0$ kaikille $n < 0$
- napa, jos $a_n \neq 0$ vain äärellisen monelle $n < 0$ ja jokin $a_n \neq 0, n < 0$
- oleellinen erikoispiste, jos $a_n \neq 0$ äärettömän monelle $n < 0$.

Tämän tutkielman päälauseen todistuksissa usein tarkastellaan funktioiden napoja. Esimerkiksi funktiolla $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ on kaksi yksinkertaista napaa pisteissä $z = i$ ja $z = -i$. Navat on merkitty alla olevaan kuvaan punaisilla rasteilla.



Funktion f navalla voi olla monikerta. Esimerkiksi funktiolla $f(z) = \frac{1}{z^3}$ on kolminkertainen napa origossa.

1.9. Navan kertaluku

Olkoon z_0 funktion f napa ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

funktion f esitys Laurentin sarjana pisteen z_0 suhteen.

Tällöin luku

$$k := -\min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$$

on navan z_0 kertaluku.

Päälauseen todistuksissa tarkastellaan monesti muunnoksen $g(z) = f(1/z)$ napoja. Tästä saadaan mielenkiintoinen yhteys analyyttisen funktion f nollakohtien ja muunnoksen g napojen välille.

1.10. Analyyttisen funktion nollakohdan kertaluku

Olkoot funktio f analyyttinen avoimessa joukossa G ja $z_0 \in G$. Jos $f(z_0) = 0$ ja $f(z) = 0$, jossakin pisteen z_0 ympäristössä, luku

$$k := \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

on nollakohdan z_0 kertaluku.

1.11. Käyräintegraali

Olkoot $G \subset \mathbb{C}$ avoin, $f\colon G \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti differentioituva käyrä, jolle pätee $\alpha([a, b]) \subset G$. Tällöin integraalia

$$\oint_\alpha f(z)dz = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt$$

kutsutaan funktion f käyräintegraaliksi pitkin käyrää α.

Huom. Käyräintegraalin arvo ei riipu käyrän parametrisaatiosta. Analyyttisen funktion käyräintegraali pitkin suljettua käyrää on 0.

Seuraavasta määritelmästä saadaan holomorfisen funktion Laurentin sarjalle täsmällisempi määritelmä renkaassa $a < |z - z_0| < b$, missä $0 \le a < b \le \infty$.

1.12. Holomorfisen funktion esitys Laurentin sarjana

Oletetaan, että $0 \le a < b \le \infty$. Olkoon funktio f holomorfinen renkaassa

$$D := A(z_0; a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}.$$

Tällöin on olemassa holomorfiset funktiot

$$g\colon B(0; b) \to \mathbb{C} \text{ ja } h\colon B(0; \frac{1}{a}) \to \mathbb{C}$$

siten, että $h(0) = 0$ ja

$$f(z) = g(z - z_0) + h(\frac{1}{(z - z_0)}) \text{ kaikille } z \in \mathbb{C}.$$

Funktiolla f on Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

ja $\alpha(t) := z_0 + re^{it}$, kun $t \in [0, 2\pi]$ ja $a < r < b$.

LUKU 2

Apulauseet

2.1. Riemannin jatkolause

Bernhard Riemannin mukaan nimetty jatkolause yhdistää funktion f poistuvan erikoispisteen ja funktion rajoittuneisuuteen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$ erikoispisteen z_0 läheisyydessä. Tätä tietoa tarvitaan, kun tarkastellaan funktion f napaa pisteessä z_0.

Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:

- Piste z_0 on poistuva erikoispiste.
- On olemassa $r > 0$ s.e. f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$.
- On voimassa $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.

TODISTUS. Katso todistus (Rudin, 210). Todistus pohjautuu vastaoletukseen, että funktio f ei ole rajoitettu sekä apufunktion $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ tarkasteluun punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$.

Kuten edellinen lause, Riemannin jatkolause 2.1, seuraavaakin lausetta tarvitsemme funktion f navan etsimiseen.

2.2. Analyyttisyys punkteeratussa kiekossa

Olkoot $k \in \mathbb{Z}_+$ ja f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0; r)$. Tällöin z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa, jos ja vain jos on olemassa kiekossa $B(z_0; r)$ analyyttinen funktio g siten, että

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

kaikille $z \in B^*(z_0; r)$, ja $g(z_0) \neq 0$.

TODISTUS. Olkoon z_0 funktion f kertalukua k oleva napa. Tällöin funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 ympäristössä on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

missä $a_{-k} \neq 0$. Asetetaan

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k} (z - z_0)^j$$

Koska funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen suppenee kaikille $z \in B^*(z_0; r)$, suppenee funktion g määrittelemä sarja kaikille $z \in B(z_0; r)$. Funktiolle f saadaan nyt vaadittu esitys, sillä $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$ ja

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k} (z - z_0)^j = (z - z_0) g(z).$$

Oletetaan nyt, että funktiolla f on esitys $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, missä $g(z_0) \neq 0$. Koska funktio g on analyyttinen kiekossa $B(z_0; r)$, on

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Pisteessä z_0 funktio g saa arvon

$$g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z_0 - z_0)^n = b_0 \neq 0,$$

joten

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

Saatu sarja on Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen. Navan määritelmän 1.9 mukaan piste z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa.

Päälauseen ensimmäisessä kohdassa (i) tarkastellaan muunnoksen $g(z) = f(1/z)$ napaa origossa. Seuraava lause antaa keinon navan määrittämiseen pisteessä z_0.

2.3. Napa pisteessä z_0

Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Jos $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, on piste z_0 funktion f napa.

TODISTUS. Asetetaan $h(z) = \frac{1}{f(z)}$. Tällöin funktio h on rajoitettu jossain kiekossa $B(z_0; r)$, joten Riemannin jatkolauseen 2.1 nojalla piste z_0 on funktiolle h poistuva erikoispiste. Lisäksi $|h(z_0)| = \lim_{z \to z_0} |h(z)| = 0$. Funktio ei voi hävitä, joten jos sen Taylorin sarja pisteen z_0 suhteen on

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

on $b_0 = 0$, mutta jokin $b_n \neq 0$. Olkoot $k = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid b_n \neq 0\}$ ja

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k} (z - z_0)^j}.$$

Tällöin $g(z_0) = \frac{1}{b_k} \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+k} (z - z_0)^j} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

Tällöin lauseen 2.2 nojalla piste z_0 on funktion f kertalukua k oleva napa.

Kokonaisella funktiolla on mukavia ominaisuuksia, kuten seuraava lause osoittaa.

2.4. Oleellinen erikoispiste tai polynomi

Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kokonainen funktio. Tällöin funktiolla

$$g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$$

on origossa oleellinen erikoispiste tai f on polynomi.

TODISTUS. Oletetaan, että funktio f ei ole polynomi. Tällöin funktion f Taylorin sarja origon suhteen on muotoa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

missä $a_n \neq 0$ äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktiolla g on Laurentin sarja

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n},$$

missä $b_{-n} := a_n$. Koska $b_{-n} \neq 0$ äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$, on origo oleellinen erikoispiste.

2.5. Avoimen kuvauksen lause

Jos funktio f on ei-vakio analyyttinen funktio avoimessa joukossa D, niin $f(D)$ on avoin.

TODISTUS. Katso todistus (Busam & Freitag, 128), joka perustuu kiinnitetyn pisteen $a \in D$ ja muunnoksen $f(z) = z^n h(z)$ n. juuren tarkasteluun.

Maksimiperiaate ja sen seuraus mahdollistavat funktion f modulin tutkimisen halutussa joukossa.

2.6. Maksimiperiaate

Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja funktio f: $D \to \mathbb{C}$ holomorfinen. Jos on olemassa $z_0 \in D$ siten, että $|f(z)| \leq |f(z_0)| = M$ kaikille $z \in D$, niin f on vakio.

TODISTUS. Lauseesta 2.5 saadaan, että piste $f(a)$ on alueen $f(D)$ sisäpiste jos funktio f on ei-vakio. Tällöin jokaisessa pisteen $f(a)$ ympäristössä on pisteitä $f(z)$, kun $z \in D$, mille $|f(z)| > |f(a)|$.

2.7. Seuraus maksimiperiaatteesta

Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ rajoitettu joukko ja f: $\overline{D} \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on holomorfinen joukossa D. Tällöin on olemassa $z_0 \in \overline{D}$ siten, että $|f(z)| \leq |f(z_0)| = M$ kaikille $\overline{D}$.

TODISTUS. Joukon $\overline{D}$ ollessa kompakti ja epätyhjä jatkuva funktio $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa jossain joukon $\overline{D}$ pisteessä z_0. Jos piste z_0 ei ole joukon D reunalla, tällöin lauseen 2.6 mukaan funktio f on vakio, joten $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa jokaisessa joukon $\overline{D}$ pisteessä.

Fubinin lause antaa keinon palauttaa kaksiulotteinen integraali yksiulotteisen integraalin laskemiseksi. Lisäksi Fubinin lause mahdollistaa integrointijärjestyksen vaihtamisen.

2.8. Fubinin lause

Jos funktio $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ on jatkuva funktio, niin

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx.$$

TODISTUS. Katso todistuksen tarkemmat yksityiskohdat (Rudin, 164). Todistus perustuu mittateoriaan.

Picardin suuri lause on nimetty ranskalaisen Émile Picardin mukaan. Picardin suuren lauseen erikoistapaus on Picardin pieni lause, jonka mukaan jos funktio f on ei-vakio ja kokonainen, niin funktio f saavuttaa kaikki arvot mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuunottamatta.

2.9. Picardin suuri lause

Olkoon funktio $f\colon D(a,r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfinen ja piste a oleellinen erikoispiste. Tällöin funktio f saa kaikki äärelliset arvot yhtä poikkeusta lukuunottamatta.

TODISTUS. Katso todistuksen yksityiskohdat (Ahlfors, 307). Todistus perustuu modulaarisiin funktioihin.

Augustin-Louis Cauchyn nimeä kantava integraalikaava on yksi tärkeimmistä kompleksianalyysin kaavoista. Sen avulla voidaan laskea erilaisia kompleksifunktioden integraaleja.

2.10. Cauchyn integraalikaava

Olkoon funktio f

$$f\colon D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C} \text{ avoin},$$

analyyttinen funktio. Oletetaan, että suljettu kiekko $\overline{B}(z_0;r)$, missä $r > 0$, sisältyy kokonaisuudessaan alueeseen D. Tällöin jokaiselle pisteelle $z \in B(z_0;r)$ pätee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

missä α on suljettu käyrä

$$\alpha(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

TODISTUS. Katso todistuksen yksityiskohdat (Busam & Freitag, 94). Todistus perustuu joukon $\overline{B}$ kompaktiuteen ja Cauchyn integraalilauseeseen tähtimäisille alueille.

Lause kertoo erityisesti sen, että kiekon B sisällä olevat funktion f arvot määritellään kiekon B reunalla. Seuraava lause on yleistys Cauchyn integraalikaavalle.

2.11. Cauchyn integraalikaava derivaatoille

Olkoot oletukset kuten Cauchyn integraalikaavassa yllä 2.10, ja lisäksi $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \text{ kaikille } z \in B.$$

TODISTUS. Voidaan todistaa induktiolla (Busam & Freitag, 96).

Cauchyn estimaatin avulla voidaan helposti arvioida holomorfista funktiota.

2.12. Cauchyn estimaatti

Olkoon funktio f holomorfinen kiekossa $B := B(z_0; r)$. Jos $|f(z)| \leq M$ kaikille $z \in B$, on

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!M}{r^k} \text{ kaikille } k \in \mathbb{Z}_+.$$

TODISTUS. Cauchyn integraalikaavasta derivaatoille 2.11 saadaan

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| &\leq \left| \frac{k!}{2\pi i} \right| \oint_\alpha \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| |d\zeta| \\
&= \frac{k!}{2\pi} \oint_\alpha \frac{|f(\zeta)|}{|(\zeta - z)^{k+1}|} |d\zeta| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_\alpha \frac{M}{r^{k+1}} |d\zeta| \\
&= \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{k!M}{r^k}. \square
\end{aligned}$$

Algebran peruslause antaa keinon tarkastella yhtälön $P(z) = 0$ juurien lukumäärää. Sille on annettu monia erilaisia todistuksia, mutta yksinkertaisin lienee Liouvillen lauseeseen pohjautuva.

2.13. Algebran peruslause

Jokaisella n-asteisella polynomilla

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \ (a_n \neq 0)$$

on vähintään yksi nollakohta. Tällöin on olemassa vähintään yksi piste z_0 siten, että $P(z_0) = 0$.

TODISTUS. Katso tarkempi Liouvillen lauseeseen pohjautuva todistus (Brown & Churchill, 166). Idea on tarkastella muunnosta

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \leftrightarrow z^{-n} p(z) = a_n + ... + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n},$$

kun $|z| \to \infty$.

Algebran peruslauseen seurauksena saadaan tekijöihin jakoa käyttäen tulos, että nollakohtia on kertaluku huomioiden tasan n-kappaletta (Brown & Churchill, 167).

LUKU 3

Kompleksiset polynomit

Tämän tutkielman päälause antaa karakterisaatioita kompleksisille polynomeille. Kompleksiset polynomit ovat analyyttisia eli niillä on olemassa suppeneva potenssisarjaesitys koko kompleksitasossa. Päälauseen todistuksissa näytetään usein ensin, että kokonainen analyyttinen funktio f on polynomi, mistä päälauseen kohdat seuraavat. Tämä todistustapa onkin kiintoisa valinta, kun halutaan näyttää, että kompleksisella polynomifunktiolla f todellakin on kohtien (i)-(iv) ominaisuudet. Muotoillaan tutkielman päälause seuraavasti ja todistetaan kohdat (i)-(v):

Olkoon funktio f kokonainen analyyttinen funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$

(ii) Löytyy $C < \infty$ ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f(z)| \leq C|z|^k \text{ kaikille } z, \text{ joille } |z| \geq 1$$

(iii) Löytyy $m \in \mathbb{N}$ ja $M < \infty$ siten, että

$$\int_{B(0,r)} |f'(z)| dA \leq Mr^m \text{ kaikille } r \geq 1$$

(iv) Löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että jokaiselle $w \in \mathbb{C}$ yhtälöllä $f(z) = w$ on enintään N ratkaisua

(v) f on polynomi.

TODISTUS.

Kohta (v)→(i). Kokonaisen analyyttisen funktion ollessa N-asteinen polynomi, voidaan funktio f kirjoittaa origokeskisenä potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N, \tag{3.1}$$

missä kertoimet $a_0, \ a_1, \ldots \ , \ a_N$ ovat kompleksilukuja, $N \in \mathbb{N}$ ja lisäksi $a_0 \neq 0$.

Tutkitaan seuraavaksi funktion f käyttäytymistä, kun $|z| \to \infty$. Edellisen kohdan (3.1) lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = z^N (a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_N}{z^N}).$$

Kun otetaan itseisarvot molemmin puolin lauseketta, saadaan

$$|f(z)| = |z^N||(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_N}{z^N})|.$$

Nyt, kun $|z| \to \infty$ jälkimmäinen termi $|(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_N}{z^N})|$ lähestyy arvoa a_0 ja termi $|z^N|$ kasvaa rajatta, saadaan raja-arvoksi $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$.

Jatkohuomiona kohdasta (3.1) saadaan

$$\lim_{z\to\infty} \left|\frac{f(z)}{z^N}\right| = a_0 \neq 0,$$

mikä tarkoittaa sitä, että funktiolla f on äärettömyydessä N-kertainen äärettömyyskohta eli N:nnen kertaluvun napa lauseen 2.3 mukaan. Tämä tarkoittaa sitä, että funktio f saa arvon ∞ N kertaa.

Kohta (i)→(v)→(ii). Näytetään ensin **kohta (i)→(v)**, että kun

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$$

on funktio f polynomi. Tarkastellaan muunnosta $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Tällöin lauseen 2.3 mukaan funktiolla g on napa pisteessä $z = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että funktion g muodostamassa sarjassa kertoimia a_n on vain äärellinen määrä. Toisin sanoen sarjassa $g(z) = \sum_{k=-n}^{0} a_k z^k$ on äärellinen määrä termejä, joten myös funktiolla $f(z)$ on äärellinen määrä termejä. Tällöin funktio f on polynomi, joka voidaan kirjoittaa sarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n, \text{ missä } a_n \neq 0.$$

Tästä päästään todistamaan **kohta (v)→(ii)**. Tarkastellaan normia $|f(z)|$, kun $|z| \geq 1$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{k} a_n z^n\right| &\leq \sum_{n=0}^{k} |a_n z^n| \\
&= |a_0| + |a_1||z| + ... + |a_k||z|^k \\
&\leq |a_0||z|^k + |a_1||z|^k + ... + |a_k||z|^k \\
&= |z|^k(|a_0| + |a_1| + ... + |a_k|) \\
&= C|z|^k,
\end{aligned}$$

joten löydettiin luvut $C < \infty$ ja $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f(z)| \leq C|z|^k.$$

Kohta (ii)→(v)→(iii). Näytetään ensin **kohta (ii)→(v)** eli, että kokonainen funktio f on **kohdan (ii)** mukaan polynomi.

Funktio f on kokonainen, joten sillä on olemassa origokeskinen suppeneva potenssisarja

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{3.2}$$

Oletuksesta $|f(z)| \leq C|z|^n$, kun $|z| \geq 1$, saadaan Cauchyn estimaatille 2.12 arvioksi

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!C|z|^n}{r^k}.$$

Jos asetetaan $|z| = r$, $k > n$ ja $r \to \infty$, saadaan Cauchyn estimaatille 2.12 arvoksi $|f^{(k)}(z)| = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki derivaatat, joiden kertaluku on suurempaa kuin n, häviävät. Tällöin sarjassa 3.2 on enintään n termiä, joten funktio f on enintään n-asteinen polynomi.

Todistetaan sitten **kohta (v)→(iii)**. Tarkastellaan polynomin f derivaattaa, kun $|z| \geq 1$:

$$|f'(z)| = \left| \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |k a_k z^{k-1}| \leq C_{n-1}|z|^{n-1},$$

ja otetaan tästä integraali pinta-alan suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} |f'(z)|dA \leq \int_{B(0,r)} C_{n-1}|z|^{n-1}dA &= C_{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^r |se^{i\theta}|^{n-1} s ds d\theta \\
&= C_{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^r |s|^n ds d\theta \\
&= \frac{C_{n-1}}{n+1} \int_0^{2\pi} r^{n+1} d\theta \\
&= \frac{C_{n-1} \cdot 2\pi}{n+1} r^{n+1}
\end{aligned}$$

Kun asetetaan $\frac{C_{n-1} \cdot 2\pi}{n+1} = M$ ja $n + 1 = m$ saadaan

$$\int_{B(0,r)} |f'(z)|dA \leq Mr^m, \text{ kun } r \geq 1.$$

Kohta (iii)→(v)→(iv). Näytetään ensin, että kokonainen funktio f on polynomi, **kohta (iii)→(v)**, arvioimalla asetusta $|g(z)| = |f'(z)|$ Cauchyn integraalikaavalla 2.10. Olkoon lisäksi α umpinainen origokeskinen tie $\alpha(t) = Re^{it}$, missä $0 \leq t \leq 2\pi$ ja $R \geq 1$. Käyräintegraalin määritelmän 1.11 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}|g(z)| =& \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{g(z)}{z}dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g(\alpha(t))}{\alpha(t)}\alpha'(t)dt\right| \\ \le& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|g(\alpha(t))|}{|Re^{it}|}|iRe^{it}|dt \le \int_0^{2\pi} |g(\alpha(t))|dt.\end{aligned}$$

Integroidaan saatu arvio molemmilta puolilta säteen r suhteen yli välin $s < r < 2s$

$$\int_s^{2s} |g(z)|dr \le \int_s^{2s}\int_0^{2\pi} |g(\alpha(t))|dtdr \text{ ,jolloin}$$

$$s|g(z)| \le \int_s^{2s}\int_0^{2\pi} |g(\alpha(t))|dtdr.$$

Fubinin lauseen 2.8 nojalla oikealla puolella on integraali pinta-alan suhteen, joten funktiolla g eli funktion f derivaatalla on sama kasvunopeus kuin **kohdassa (iii)**

$$s|f'(z)| \le Ms^m.$$

Jos asetetaan $s = |z|$, saadaan yllä olevasta

$$|z||f'(z)| \le M|z|^m. \tag{3.3}$$

Integroimalla epäyhtälöä 3.3 molemmilta puolilta muuttujan z suhteen, saadaan funktion f kasvunopeudeksi

$$|f(z)| \le C|z|^n,$$

joten **kohdan (ii)** nojalla funktio f on polynomi.

Näytetään sitten **kohta (v)→(iv).** Tarkastellaan nyt yhtälöä $f(z) = w$. Merkitään $h(z) = f(z) - w$, missä funktio h on n-asteinen polynomi, kuten funktio f. Funktion h nollakohdissa siis pätee $f(z) = w$. Algebran peruslauseen 2.13 mukaan polynomilla h on n nollakohtaa, joten yhtälöllä $f(z) = w$ on n ratkaisua.

Kohta (iv)→(v). Oletetaan, että yhtälöllä $f(z) = w$ on N ratkaisua. Oletetaan lisäksi, että funktio f ei ole polynomi. Tarkastellaan muunnosta $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Muunnoksella g on lauseen 2.4 mukaan origossa oleellinen erikoispiste. Tällöin Picardin suuren lauseen 2.9 mukaan muunnos g saa origon ympäristössä kaikki äärelliset äärettömän monta kertaa yhtä pistettä lukuunottamatta. Toisin sanoen jokainen arvo $f(z) = w$ saavutetaan yhtä poikkeusta lukuunottamatta äärettömän monta kertaa. Oletuksessa oli kuitenkin maininta, että jokaisella $w \in \mathbb{C}$ on enintään $N \in \mathbb{N}$ ratkaisua, joten funktio f on oltava polynomi.

3.1. Seuraus

Todistetusta lauseesta saadaan seuraavanlainen seuraus:

Jos $f\colon \mathbb{C} \to \Omega$ on konformikuvaus, niin $\Omega = \mathbb{C}$ ja $f(z) = az + b$, joillekin $a, b \in \mathbb{C}$.

TODISTUS. Funktion f ollessa konformikuvaus ja kokonainen, päälauseen kohdasta (iv) ehdolla $N = 1$ saadaan, että funktio f on polynomi. Tällöin $\Omega = \mathbb{C}$. Yhtälöllä $f(z) = w$ on siis yksi ratkaisu. Tarkastellaan polynomin $h(z) = f(z) - w$ nollakohtia. Koska luku $N = 1$, polynomilla h on yksi nollakohta algebran peruslauseen mukaan, missä $f(z) = w$. Tällöin funktio f on ensimmäisen asteen polynomi, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $f(z) = az + b$, missä $a \neq 0$ ja $b \in \mathbb{C}$.

Kirjallisuutta

[1] Lars V. Ahlfors: *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* kolmas painos, McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] James Ward Brown ja Ruel V. Churchill: *Complex Variables and Applications.* seitsemäs painos, McGraw-Hill, Inc, 1996.

[3] Rolf Busam ja Eberhard Freitag: *Complex Analysis.* toinen painos, Springer, 2009.

[4] Rolf Nevanlinna ja Paatero Veikko: *Funktioteoria.* toinen painos, Kustannusosakeyhtiö Otavan laakapaino, 1971.

[5] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis.* kolmas painos, McGraw-Hill, Inc., 1987.

[6] Ian Stewart ja David Tall: *Complex Analysis.* toinen painos, Cambridge University Press, 2018.