Lineaariset toisen asteen hyperboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Matti Kauppinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2022

Tiivistelmä: *Matti Kauppinen, Lineaariset toisen asteen hyperboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt, matematiikan pro gradu tutkielma, 42 sivua, Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, marraskuu 2022.*

Tässä työssä perehdytään lineaarisiin toisen asteen hyperbolisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Tutkielman päätulokset ovat, että kyseisillä yhtälöillä on aina olemassa niin sanottu heikko ratkaisu, ja että tämä heikko ratkaisu on yksikäsitteinen. Heikko ratkaisu määritellään funktioksi, joka toteuttaa alkuperäisen osittaisdifferentiaaliyhtälön integraalimuodon. Heikkoa ratkaisua kutsutaan heikoksi, koska se ei välttämättä ole riittävän sileä toteuttamaan alkuperäistä osittaisdifferentiaaliyhtälöä. Lisäksi viimeisessä luvussa käsitellään ongelman ratkaisujen käyttäytymistä, mikä tehdään energiaestimaateilla.

Heikkojen ratkaisujen olemassaolon todistamiseen käytetään Galerkinin menetelmää, jossa ongelman alkuperäinen ratkaisu projisoidaan äärellisulotteiselle avaruudelle. Näiden äärellisulotteisten approksimaatioiden jonolle todistetaan, että sillä on olemassa niin sanottu heikko raja-arvo, ja että tämä kyseinen raja-arvo on todellakin heikko ratkaisu alkuperäiseen ongelmaan. Heikon ratkaisun yksikäsitteisyyden todistamiseen käytetään alkuperäisen ongelman lineaarisuutta hyväksi. Lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa, että jos ongelman alkudata on nollafunktio, niin ongelman ainoa ratkaisu on triviaali.

Viimeisessä kappaleessa todistetaan, että ongelman alkudata vaikuttaa ratkaisuun vain äärellisellä nopeudella. Toisin sanoen äärellisen ajan kuluttua annetussa pisteessä ratkaisun arvoon vaikuttaa vain rajatun joukon sisällä oleva alkudata. Tämän todistamiseen määritellään ongelman ratkaisun "energia" erään kartiomaisen kappaleen sisällä, ja osoitetaan että tämä energia häviää, jos ongelman alkudata häviää kappaleen pohjassa. Tästä seuraa, että ratkaisu itsessään häviää koko kappaleen sisässä, erityisesti kappaleen kärjessä. Täten ongelman alkudata kappaleen pohjan ulkopuolella ei vaikuta kappaleen kärjessä ratkaisun arvoon mitenkään.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä työssä tutkitaan toisen asteen lineaarisia hyperbolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Toisen asteen lineaariset hyperboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat luonnollinen yleistys aaltoyhtälölle

$$u_{tt} + \Delta u = f,$$

jossa Δ on Laplacen operaattori $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Aaltoyhtälö kuvaa nimensä mukaisesti aaltojen liikettä, ja siitä voidaan johtaa aaltojen ominaisuuksia. Hyperboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt kuvaavat aaltojen liikettä kun ne ovat mahdollisesti huokoisessa tai muuten epätäydellisessä välittäjäaineessa.

Työn päätulokset ovat, että hyperbolisille yhtälöille on olemassa heikko ratkaisu (Lause 4.3), ja että heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (Lause 4.4). Lisäksi käsitellään ratkaisuiden käyttäytymistä, etenkin sitä miten ongelman alkuarvot vaikuttavat ratkaisun arvoihin myöhemmällä ajanhetkellä t_0. Nähdään, että yhtälön ratkaisuiden alkudata etenee äärellisellä nopeudella, joka on hyvin erilainen käytös verrattuna hyvin samantapaisiin parabolisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Esimerkki parabolisista osittaisdifferentiaaliyhtälöistä on lämpöyhtälö. Parabolisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden alkudata vaikuttaa koko funktion määrittelyjoukkoon välittömästi. Lauseen 4.3 todistuksessa käytetään niin sanottua Galerkinin menetelmää. Lauseen 4.4 todistuksessa käytetään hyväksi tutkittavan yhtälön lineaarisuutta. Yhtälön lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa, että jos alkudata on 0, niin ainoa mahdollinen ratkaisu on identtisesti 0.

Funktion ratkaisuiden käyttäytymisessä pidättäydytään yksinkertaisessa esimerkkitapauksessa. Oletetaan, että u on sileä ratkaisu kyseiseen ongelmaan, ja osoitetaan, että jos u:n alkudata on identtisesti nollaa tietyssä alueessa, niin u on edelleen nollaa myöhemmällä ajanhetkellä t_0. Tämä kertoo meille, että kyseisen alueen ulkopuolella oleva alkudata ei vaikuta u:n arvoihin jollain myöhemmällä ajanhetkellä t, eli ongelman alkudata etenee äärellisellä nopeudella.

Hyperbolisten yhtälöiden tutkiminen on tärkeää, koska ne esiintyvät monissa matemaattisissa ja fysikaalisissa ongelmissa. Aaltoyhtälöllä voidaan mallintaa monenlaisia aaltoja, kuten sähkömagneettisia aaltoja tai ääniaaltoja. Yleisemmillä hyperbolisilla yhtälöillä voidaan tutkia aaltoja jotka kulkevat monimutkaisessa väliaineessa, esimerkiksi veden eteneminen huokoisen kiven läpi.

Hyperbolisten yhtälöiden tutkimuksella on pitkä historia. Aaltoyhtälön tutkimus alkoi Jean d'Alembertista joka johti yksiulotteisen aaltoyhtälön ja ratkaisi sen vuonna 1752. Tästä kaksi- ja kolmiulotteisten aaltoyhtälöiden tapauksissa jatkotutkimusta ja yleistystä tekivät Euler (1759) ja D. Bernoulli (1762). Myöhemmin Riemann tutki hyperbolisia yhtälöitä 1850- ja 1860 luvuilla, ja hänen jälkensä viimeistelivät Pierre Henri Hugoniot ja William Rankine heidän shokkiaaltojen teoriallaan. Ennen 1920-lukua osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisut olivat niin sanottuina klassisia ratkaisuja, eli astetta n olevan yhtälön ratkaisuiden haluttiin olevan ainakin $\mathcal{C}^n$-funktioita. 1920-luvun puolella ja sen jälkeen alettiin kehittää heikkojen ratkaisuiden teoriaa. Tämän lisäksi 1930-luvulla kehiteltyjen Sobolev-avaruuksien ansiosta heikkojen ratkaisuiden teoria kasvoi ja kehittyi, ja on nykytutkimuksessa tärkein osa-alue. Tarkempia historiakatsauksia hyperbolisiin ODYihin liittyen löytyy lähteistä [Gå98], [BB98]. Heikkojen ratkaisuiden teorian historiaa löytyy myös viitteestä [BB98].

2 Taustateoriaa

Määritelmä 2.1. Tässä työssä U on $\mathbb{R}^n$:n avoin osajoukko. Olkoon jatkossa ∂U:lla U:n reuna, ja $\bar{U} = U \cup \partial U$ on U:n sulkeuma. Lisäksi olkoon $U_T = U \times (0, T]$ niin sanottu parabolinen sylinteri.

Määritelmä 2.2. Olkoot funktion u osittaisderivaatat $u_{x_i} = \frac{du}{dx_i}$ ja $u_t = \frac{du}{dt}$. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$, tällöin $u \in \mathcal{C}^n(X)$, jos u:n kaikki n:n asteen derivaatat ovat olemassa ja jatkuvia X:ssä. Funktion sanotaan olevan *sileä*, jos sen kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Tällöin merkitään $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Määritelmä 2.3. Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sanotaan olevan mitallinen, jos $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jokaiselle Lebesgue mitalliselle $A \subset \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.4. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että kaikilla äärellisillä jonoilla pareittain pistevieraita osavälejä $(x_k, y_k) \subset [a, b]$ joille pätee

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta$$

on

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

Absoluuttisesti jatkuva funktio on derivoituva melkein kaikkialla määrittelyjoukossaan. Lisäksi absoluuttisesti jatkuvalle funktiolle pätee analyysin peruslause $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$. Absoluuttisesti jatkuvista funktioista voi lukea lisää lähteestä [Leo09].

Määritelmä 2.5. Funktion f kantaja on $sptf := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$.

Lemma 2.1 (Youngin epäyhtälö)**.** Olkoon $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b > 0)$$

Todistus. Kuvaus $x \mapsto e^x$ on konveksi, ja täten

$$ab = e^{\log(a)+\log(b)} = e^{\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\log(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Jatkossa jos jossain välivaiheessa käytetään Youngin epäyhtälöä niin epäyhtälömerkin yllä lukee Y.

Seuraus 2.1.1. Jos Youngin epäyhtälössä tapauksessa $p = q = 2$ syötetään $a' = \sqrt{\epsilon}a$ ja $b' = \frac{b}{\sqrt{\epsilon}}$ niin saadaan epäyhtälö

$$ab = a'b' \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{2}{\epsilon}b^2 = \epsilon' a^2 + C_{\epsilon'}b^2.$$

Kaikilla $\epsilon > 0$.

Lause 2.2 (Gronwallin epäyhtälön differentiaalimuoto)**.** Olkoot $\phi(t)$ ja $\psi(t)$ ei-negatiivisia L^1-funktioita[1] välillä $[0, T]$, ja $\eta(\cdot)$ ei-negatiivinen, absoluuttisesti jatkuva funktio välillä $[0, T]$ joka toteuttaa differentiaaliepäyhtälön

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t). \tag{1}$$

Tällöin

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right] \tag{2}$$

jokaiselle $0 \leq t \leq T$. Erityisesti jos

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \text{välillä } [0, T], \text{ ja } \eta(0) = 0,$$

niin

$$\eta \equiv 0 \text{ välillä } [0, T].$$

[1]katso määritelmä 2.16.

Todistus. Epäyhtälöstä (1) saadaan

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)\,dr}(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)\,dr}\psi(s)$$

melkein kaikilla $0 \leq s \leq T$. Tästä seuraa, että jokaiselle $0 \leq t \leq T$ pätee

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)\,dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)\,dr}\psi(s)ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds,$$

josta seuraa (2). □

Lause 2.3 (Gronwallin epäyhtälön integraalimuoto)**.** Olkoon $\xi(t)$ ei-negatiivinen L^1-funktio välillä $[0, T]$ joka toteuttaa melkein kaikkialla epäyhtälön

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds + C_2 \tag{3}$$

vakioille $C_1, C_2 \geq 0$. Tällöin

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$. Erityisesti jos

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$$

melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$, niin $\xi(t) = 0$ melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$.

Todistus. Olkoon $\eta(t) := \int_0^t \xi(s)\,ds$, tällöin $\eta' \leq C_1\eta + C_2$ melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$. Gronwallin epäyhtälön differentiaalimuodon nojalla saadaan

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t}(\eta(0) + C_2 t) = C_2 t e^{C_1 t}.$$

Tällöin epäyhtälöstä (3) saadaan

$$\xi(t) \leq C_1\eta(t) + C_2 \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}).$$

□

Tämän työn kannalta on tärkeää, että Gronwallin epäyhtälöistä saadaan ehto sille, milloin funktio on nollaa koko määrittelyjoukossaan.

Tässä työssä käytetään paljon tietoa siitä, milloin derivaatan ja integraalin järjestyksen saa vaihtaa. Tähän tarkoitukseen tarvitaan yleistetty Leibnizin integraalisääntö.

Lause 2.4 (Leibnizin integraalisäännön mittateoreettinen versio)**.** Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ avoin ja Ω mitta-avaruus. Oletetaan että $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $f(x, \omega)$ on Lebesgue integroituva ω:n suhteen jokaiselle $x \in U$.

(ii) Melkein kaikille $\omega \in \Omega$ on olemassa f_x kaikille $x \in U$.

(iii) On olemassa integroituva funktio $\theta : \Omega \to R$ siten, että $|f_x(x, \omega)| \leq \theta(\omega)$ melkein kaikille $\omega \in \Omega$ ja kaikille $x \in U$.

Tällöin kaikille $x \in U$

$$\frac{d}{dx} \int_\Omega f(x, \omega)\, d\omega = \int_\Omega f_x(x, \omega)\, d\omega.$$

Todistus. Tämä on osoitettu lähteessä [Che06]. □

Lause 2.5 (Osittaisintegrointikaava)**.** Olkoot $u, v \in \mathcal{C}^1(\bar{U})$, ja $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ yksikköulkonormaalivektori ja U sellainen alue, että ∂U on $\mathcal{C}^1$-säännöllinen pinta. Tällöin

$$\int_U u_{x_i} v\, dx = -\int_U u v_{x_i}\, dx + \int_{\partial U} u v \nu_i\, dS.$$

Todistus. Väite seuraa Gaussin ja Greenin lauseesta, joka voidaan johtaa Stokesin lauseesta, jonka todistus löytyy lähteestä [Rud76]. □

Seuraava koarea-kaava antaa meille yleistyksen napakoordinaateista, jossa funktioita voidaan integroida pallojen sijasta Lipschitz-käyrien tasa-arvojoukkojen yli.

Lause 2.6 (Koarea-kaava)**.** Olkoon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz-jatkuva ja oletetaan että tasa-arvojoukko $\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) = r\}$ on sileä $(n-1)$-ulotteinen pinta melkein kaikkialla $\mathbb{R}^n$:ssä. Oletetaan myös, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva L^1-funktio (katso määritelmä 2.16). Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f|Du|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{u=r\}} f\, dS \right) dr.$$

Todistus. Todistus ja lisätietoa löytyy lähteestä [EG15] □

Olkoon nyt $U(\tau) \subset \mathbb{R}^n$ perhe joukkoja jotka riippuvat sileästi parametristä $\tau \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathbf{v}$ vektorikenttä joka kuvastaa reunan $\partial U(\tau)$ liikkumisnopeutta ja suuntaa. Merkitään lisäksi ν:lla yksikköulkonormaalivektoria.

Lause 2.7. Jos $f = f(x, \tau)$ on sileä funktio, tällöin

$$\frac{d}{d\tau} \int_{U(\tau)} f\, dx = \int_{\partial U(\tau)} f(\mathbf{v} \cdot \nu)\, dS + \int_{U(\tau)} f_\tau\, dx.$$

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [Gra95] □

2.1 Funktionaalianalyysiä

Tässä luvussa kerrataan funktionaalianalyysiä, etenkin Hilbertin avaruuksien teoriaa ja tuloksia.

Määritelmä 2.6. (1) Olkoot X, Y, Z normiavaruuksia. Kuvaus $L : X \to Y$ on lineaarinen, jos kaikille $x_1, x_2 \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

(i) $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$

(ii) $L(\lambda x_1) = \lambda L(x_1)$.

(2) Kuvaus $B : X \times Y \to Z$ on bilineaarinen, jos kaikille $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

(i) $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$

(ii) $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$

(iii) $B(\lambda x, y) = B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$.

(3) Lineaarikuvaus L on rajoitettu, jos

$$\|L\|_{Op} := \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\| \leq 1}} \|L(x)\| < \infty.$$

Normia $\|L\|_{Op}$ kutsutaan operaattorinormiksi.

Määritelmä 2.7 (Duaali)**.** Olkoon X normiavaruus. Tällöin kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten $L : X \to \mathbb{R}$ joukkoa X' kutsutaan X:n duaaliksi.

Määritelmä 2.8. Olkoon X, Y normiavaruuksia. Bijektiivistä lineaarikuvausta $L : X \to Y$ kutsutaan isometriseksi isomorfiaksi, jos

$$\|x\|_X = \|L(x)\|_Y$$

kaikilla $x \in X$. Jos tällainen kuvaus on olemassa, niin avaruudet X ja Y ovat isometrisesti isomorfiset ja merkitään $X \cong Y$.

Jos avaruudet ovat isometrisesti isomorfiset, voidaan samaistaa x ja $L(x)$, jolloin voidaan ajatella näitä avaruuksia lähes samoina avaruuksina. Tämä on tärkeä konsepti Sobolev-avaruuden duaalin käsittelyssä ja sitä kautta myös ajasta riippuvien Sobolev-avaruuksien kasittelyssä.

Määritelmä 2.9. Olkoon X normiavaruus. Jono $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ on Cauchy-jono, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon$$

kun $n, m \geq N_\epsilon$.

Määritelmä 2.10 (Banachin avaruus)**.** Normiavaruus X on täydellinen, jos sen kaikki Cauchy-jonot suppenevat johonkin pisteeseen $x \in X$. Tällöin sanotaan että X on Banachin avaruus.

Määritelmä 2.11 (Sisätulo)**.** Olkoon X normiavaruus. Kuvaus $(\ ,\ ) : X \times X \to \mathbb{R}$ on sisätulo, jos

(i) $(x, y) = (y, x)$ kaikilla $x, y \in X$

(ii) $x \mapsto (x, y)$ on lineaarikuvaus

(iii) $(x, x) \geq 0$, ja $(x, x) = 0$ vain jos $x = 0$.

Määritelmä 2.12 (Hilbertin avaruus)**.** Normiavaruus H on Hilbertin avaruus jos se on täydellinen sisätuloavaruus, eli jos se on täydellinen normin

$$\|h\| = \sqrt{(h, h)}$$

suhteen, missä $(\ ,\ )$ on sisätulo.

Lemma 2.8 (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö)**.** Jos $(\ ,\ )$ on sisätulo, niin

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v).$$

Todistus. Jos $v = 0$ niin väite on selvä. Olkoon $v \neq 0$ ja $t \in \mathbb{R}$, ja nyt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + v\|^2 &= (u + tv, u + tv) = (u, u + tv) + (tv, u + tv) \\ &= (u, u) + t(u, v) + t(v, u) + |t|^2(v, v) \\ &= (u, u) + 2t(u, v) + |t|^2(v, v) \end{aligned}$$

Nyt sijoittamalla edelliseen vakio $t = -\frac{(u,v)}{(v,v)}$ saadaan, että

$$\begin{aligned} &0 \leq (u, u) - 2\frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} + \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)^2}(v, v) \\ \implies\ &0 \leq (u, u)(v, v) - |(u, v)|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Seuraus 2.8.1 (Cauchy-Schwartz matriiseille)**.** Jos A on symmetrinen ja positiivinen, niin (Ax, Ay) on versio tutusta $\mathbb{R}^n$:n sisätulosta. Tällöin Cauchyn ja Schwartzin epäyhtälöstä saadaan

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \right)^{1/2} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Määritelmä 2.13. Olkoon H Hilbertin avaruus, tällöin kaksi vektoria $u, v \in H$ ovat ortogonaaliset, jos $(u, v) = 0$. Lisäksi u, v ovat ortonormaalit, jos $\|u\| = \|v\| = 1$.

Määritelmä 2.14 (Ortogonaaliset ja ortonormaalit kannat)**.** Olkoon H Hilbertin avaruus. Ortonormaali joukko $E \subset H$ on ortonormaali kanta, jos jokainen $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisenä summana

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \alpha_n,$$

jossa $e_n \in E$ ovat erillisiä ja $\alpha_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Ortogonaalinen joukko $A = (a_1, a_2, ...) \subset H$ on ortogonaalinen kanta, jos $\hat{A} = (\frac{a_1}{\|a_1\|}, \frac{a_2}{\|a_2\|}, ...)$ on ortonormaali kanta.

Ortonormaalit kannat antavat meille tavan esittää Hilbertin avaruuden alkiot kannan alkioiden äärettömänä lineaarikombinaationa.

Lause 2.9. Olkoot H Hilbertin avaruus ja E sen ortonormaali kanta. Tällöin jokainen vektori $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisenä summana

$$h = \sum_{e \in E} (h, e)e.$$

Todistus. Todistus löytyy viitteestä [DM05] sivulta 113-114. □

Hilbertin avaruudessa jokaiselle alkiolle sisätulon antama kuvaus $f_v(u) = (u, v)$ on lineaarikuvaus. Herää luonnollinen kysymys, että onko jokainen lineaarikuvaus $L \in H'$ esitettävissä tällaisena sisätulon antamana kuvauksena? Tähän kysymykseen vastaa niin sanottu Rieszin esityslause.

Lause 2.10 (Rieszin esityslause)**.** Olkoon H Hilbertin avaruus. Jokaiselle rajoitetulle lineaarikuvaukselle $h' \in H'$ löytyy yksi $x_0 \in H$ siten, että $h'(x) = (x, x_0)$ kaikille $x \in H$. Lisäksi $\|h'\|_{Op} = \|x_0\|$.

Todistus. Todistus löytyy viitteestä [DM05] sivuilta 133-134. □

Seuraus 2.10.1. Rieszin esityslauseesta seuraa suoraan, että Hilbertin avaruudelle H pätee $H \cong H'$.

Määritelmä 2.15. Olkoon H Hilbertin avaruus. Jonon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sanotaan suppenevan heikosti rajapisteeseen x_0, jos

$$\lim_{k \to \infty} (x_k, x) = (x_0, x)$$

kaikilla $x \in H$.

Nimestä voi jo päätellä, että heikko suppeneminen on heikompi ominaisuus kuin vahva suppeneminen. On olemassa jonoja jotka suppenevat heikosti, mutta eivät suppene vahvasti. Seuraavassa luvussa todetaan, että $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} fg\,dx$ on sisätulo avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$. Otetaan nyt jono funktioita

$$f_n := \begin{cases} 0 & \text{jos } x \notin [n, n+1] \\ 1 & \text{jos } x \in [n, n+1]. \end{cases}$$

Tällöin $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, ja jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei suppene vahvasti mihinkään. Mutta koska jokaiselle $g \in L^2(\mathbb{R})$ pätee $\int_a^{a+1} |g|^2\,dx \le \epsilon$ kun a on tarpeeksi suuri, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} g\,dx \to 0$$

jokaiselle $g \in L^2(\mathbb{R})$, eli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ heikosti kun $n \to \infty$.

Lause 2.11. Jokaisella rajoitetulla jonolla Hilbertin avaruudessa on heikosti suppeneva osajono.

Todistus. Tämä on osoitettu lähteessä [RF10]. □

2.2 L^p-avaruudet

Tässä luvussa määritellään L^p avaruudet kaikille $1 \le p \le \infty$ ja osoitetaan tarpeellisia tuloksia niille.

Määritelmä 2.16. Olkoon $1 \le p < \infty$ ja $X \subset \mathbb{R}^n$, tällöin $f \in L^p(X)$ jos f on mitallinen, ja

$$\int_X |f|^p\,dx < \infty.$$

Tällöin

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Lisäksi

$$(f,g) = \int_X fg\,dx$$

on sisätulo avaruudessa L^2. Lisäksi funktion sanotaan olevan lokaalisti L^1 jos $f \in L^1(K)$ jokaisella kompaktilla $K \subset X$, ja tällöin merkitään $f \in L^1_{loc}(X)$.

Lause 2.12. L^2 on Hilbertin avaruus.

Todistus. Todistus tähän löytyy viitteestä [CvB00]. □

Määritelmä 2.17 (L^∞)**.** Olkoot m Lebesguen mitta ja $X \subset \mathbb{R}^n$, tällöin mitalliselle funktiolle f määritellään

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid m\{f > \mu\} = 0\}.$$

Sanotaan, että $f \in L^\infty(X)$ jos

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \operatorname{ess\,sup} f < \infty$$

Lause 2.13 (Hölderin epäyhtälö)**.** Olkoot $1 < p, q < \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $X \subset \mathbb{R}^n$ tällöin, jos $u \in L^p(X), v \in L^q(X)$, niin

$$\int_X |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(X)} \|v\|_{L^q(X)}.$$

Todistus. Youngin epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}\int_X \left| \frac{u}{\|u\|_{L^p(X)}} \frac{v}{\|v\|_{L^q(X)}} \right| dx &\leq \frac{1}{p} \int_X \left| \frac{u}{\|u\|_{L^p(X)}} \right|^p dx + \frac{1}{q} \int_X \left| \frac{v}{\|v\|_{L^q(X)}} \right|^q dx \\ &= 1 = \left\| \frac{u}{\|u\|_{L^p(X)}} \right\|_{L^p(X)} \left\| \frac{v}{\|v\|_{L^q(X)}} \right\|_{L^q(X)}.\end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälö seuraa kun otetaan u:n ja v:n normit ulos integraalista ja oikean puolen normeista ja jaetaan ne yhtälön molemmilta puolilta. □

Seuraus 2.13.1 (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö L^2-funktioille.)**.** Erityisesti Hölderin epäyhtälöä arvolla $p = q = 2$ soveltaen avaruudessa $L^2(X)$ saadaan

$$(u, v) = \int_X uv \, dx \leq \int_X |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^2(X)} \|v\|_{L^2(X)}.$$

Jatkossa Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön tätä versiota käytettäessä epäyhtälömerkin yllä lukee CS.

Lause 2.14 (Minkowskin epäyhtälö)**.** Olkoot $1 < p < \infty$ ja $u, v \in L^p(U)$. Tällöin

$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\|u + v\|_{L^p(U)}^p &= \int_U |u + v|^p \, dx \leq \int_U |u + v|^{p-1} (|u| + |v|) \, dx \\ &\leq \left(\int_U |u + v|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_U |u|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_U |v|^p \, dx \right)^{1/p} \right) \\ &= \|u + v\|_{L^p(U)}^{p-1} (\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.15. Samalla tavoin voidaan osoittaa Minkowskin epäyhtälön diskreetti versio, eli jos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ovat jonoja joille $\sum_k |a_k|^p < \infty$ ja $\sum_k |b_k|^p < \infty$, niin

$$\left(\sum_k |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Lause 2.16 (Lebesguen differentioituvuuslause)**.** Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L^1_{loc}-funktio. Tällöin melkein kaikkialla $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\fint_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\, dx \to 0 \quad \text{kun } r \to 0.$$

Tässä $\fint$ on keskiarvointegraali, eli $\fint_X f(x)\, dx = \frac{1}{m(X)} \int_X f(x)\, dx$ missä m on Lebesguen mitta.

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [Fol99]. □

Määritelmä 2.18 (Silottajat)**.** Jos $U \in \mathbb{R}^n$ on avoin, niin merkitään $U_\epsilon := \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$.

(i) Määritellään $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \text{ jos } |x| < 1 \\ 0 \text{ jos } |x| \geq 1, \end{cases}$$

jossa vakio C valitaan siten, että $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$.

(ii) Jokaiselle $\epsilon > 0$ asetetaan

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Funktiota η kutsutaan standardisilottajaksi. Funktiot η_ϵ ovat $\mathcal{C}^\infty$ ja toteuttavat ehdot

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon\, dx = 1,\ spt(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

Määritelmä 2.19. Jos $f : U \to \mathbb{R}$ on lokaalisti integroituva, niin määritellään sen silotus $f^\epsilon := \eta_\epsilon \star f$ joukossa U_ϵ. Eli toisin sanoen

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x-y)\, dy$$

kun $x \in U_\epsilon$.

Lause 2.17 (Silottajien ominaisuuksia)**.** Silottajilla on monia hyödyllisiä ominaisuuksia.

(i) $f^\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\epsilon)$.

(ii) $f^\epsilon \to f$ melkein kaikkialla kun $\epsilon \to 0$.

(iii) Jos f on jatkuva, niin $f^\epsilon \to f$ tasaisesti kompakteilla osajoukoilla U:ssa.

(iv) Jos $1 \le p < \infty$, ja $f \in L^p_{loc}(U)$, niin $f^\epsilon \to f$ avaruudessa $L^p_{loc}(U)$.

Todistus. 1. Kiinnitetään $x \in U_\epsilon, i \in \{1, \dots, n\}$, ja h niin pieneksi että $x + he_i \in U_\epsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{f^\epsilon(x+he_i) - f^\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] f(y)\,dy\end{aligned}$$

jollekin avoimelle $V \subset\subset U$ eli joukolle V jolle $\bar{V} \subset U$. Koska

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\epsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right] \to \frac{1}{\epsilon}\eta_{x_i}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

tasaisesti V:n sisällä, niin osittaisderivaatta $f^\epsilon_{x_i}(x)$ on olemassa ja

$$f^\epsilon_{x_i} = \int_U \eta_{\epsilon, x_i}(x-y) f(y)\,dy.$$

Samaan tapaan saadaan osoitettua että $D^\alpha f^\epsilon(x)$ on olemassa ja

$$D^\alpha f^\epsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\epsilon(x-y) f(y)\,dy \ (x \in U_\epsilon)$$

jokaiselle multi-indeksille α. Tämä osoittaa väitteen (i).

2. Nyt Lebesguen differentioituvuuslauseen nojalla saadaan

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0 \tag{4}$$

melkein kaikilla $x \in U$. Kiinnitetään tällainen piste x. Tällöin

$$\begin{aligned}|f^\epsilon(x) - f(x)| &= \left|\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)[f(y) - f(x)]\,dy\right| \\ &\le \frac{1}{\epsilon^n}\int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)|f(y) - f(x)|\,dy \\ &\le C ⨍_{B(x,\epsilon)} |f(y) - f(x)|\,dy \to 0 \quad \text{kun } \epsilon \to 0\end{aligned}$$

tiedon (4) nojalla. Tästä seuraa väite (ii).

3. Oletetaan nyt, että $f \in C(U)$. Olkoon $V \subset\subset U$, valitaan tällöin $V \subset\subset W \subset\subset U$ ja huomataan, että f on tasaisesti jatkuva W:ssä. Tällöin raja-arvo (4) pitää paikkansa tasaisesti kun $x \in V$. Tästä johtuen yllä olevasta laskusta seuraa että $f^\epsilon \to f$ tasaisesti V:ssä.

4. Seuraavaksi oletetaan, että $1 \le p < \infty$ ja $f \in L^p_{loc}(U)$. Valitaan avoin joukko $V \subset\subset U$, ja kuten yllä valitaan avoin W siten, että $V \subset\subset W \subset\subset U$. Väitetään, että riittävän pienellä $\epsilon > 0$

   $$\|f^\epsilon\|_{L^p(V)} \le \|f\|_{L^p(W)}. \tag{5}$$

   Tämän osoittamiseksi huomataan ensin, että jos $1 \le p < \infty$ ja $x \in V$, niin

   $$\begin{aligned}|f^\epsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy \right| \\ &\le \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon^{1-1/p}(x-y)\eta_\epsilon^{1/p}(x-y)|f(y)|\, dy \\ &\le \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\, dy \right)^{1-1/p} \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

   Koska $\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\, dy = 1$, tästä epäyhtälöstä saadaan

   $$\begin{aligned}\int_V |f^\epsilon(x)|^p\, dx &\le \int_V \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)|f(y)|^p\, dy \right) dx \\ &\le \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)\, dx \right) dy = \int_W |f(y)|^p\, dy,\end{aligned}$$

   kun $\epsilon > 0$ on riittävän pieni. Tästä saadaan (5).

5. Nyt kiinnitetään $V \subset\subset W \subset\subset U, \delta > 0$, ja valitaan $g \in C(W)$ siten, että $\|f-g\|_{L^p(W)} < \delta$. Tällöin

   $$\begin{aligned}\|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} &\le \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\|f-g\|_{L^p(W)} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)} \quad \text{kohdan (5) nojalla} \\ &\le 2\delta + \|g^\epsilon - g\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

   Nyt koska $g^\epsilon \to g$ tasaisesti V:ssä, saadaan että $\limsup_{\epsilon\to 0}\|f^\epsilon - f\|_{L^p(V)} \le 2\delta$.

$\square$

3 Sobolev-avaruudet

Tässä luvussa määritellään heikko derivaatta, ja sen seurauksena rakennetaan Sobolev-avaruudet. Heikkoon derivaattaan johtava idea saadaan yrittämällä laajentaa joukkoa, jossa osittaisintegrointikaava pätee. Olkoon $u \in \mathcal{C}^1(U)$. Tällöin jos $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$[2], niin osittaisintegrointikaavasta saadaan, että

$$\int_U u\phi_{x_i}\,dx = -\int_U u_{x_i}\phi\,dx \quad (i = 1, \dots, n). \tag{6}$$

Reunatermiä ei ole koska $\phi(x) = 0$ kun $x \in \partial U$. Yleisemmin jos k on positiivinen kokonaisluku, $u \in \mathcal{C}^k(U)$, ja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on multi-indeksi kokoa $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$, niin

$$\int_U uD^\alpha\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U D^\alpha u\phi\,dx \tag{7}$$

jossa

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\phi.$$

Yhtälö (7) seuraa kun käytetään osittaisintegrointikaavaa (6) $|\alpha|$ kertaa.

Seuraavaksi harkitaan kaavaa (7), ja kysytään josko joku versio siitä totta funktioille jotka eivät ole $u \in \mathcal{C}^k(U)$. Yhtälön (7) vasen puoli on mielekäs, jos u on L^1_{loc}. Ongelma tulee, jos u ei ole $\mathcal{C}^k$, jolloin "$D^\alpha u$"ei ole määritelty. Tämän ongelman sivuuttamiseksi määritellään u:lle niin sanottu heikko derivaatta, eli L^1_{loc}-funktio v joka toteuttaa osittaisintegrointikaavan kun se korvaa $D^\alpha u$:n.

Määritelmä 3.1. Olkoot $u, v \in L^1_{loc}(U)$ ja α multi-indeksi. Sanotaan, että v on u:n α:n kertaluvun heikko osittaisderivaatta, merkittynä

$$D^\alpha u = v,$$

jos

$$\int_U uD^\alpha\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\phi\,dx \tag{8}$$

kaikilla testifunktioilla $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$.

Lemma 3.1. Heikko derivaatta on yksikäsitteinen jos se on olemassa, lukuunottamatta nollamittaista joukkoa.

[2]Tarkoittaen, että ϕ on $\mathcal{C}^\infty$ ja sille pätee $spt\phi \subset K$ jollain kompaktilla K.

Todistus. Oletetaan, että $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ toteuttavat

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi \, dx$$

kaikille $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$. Tällöin

$$\int_U (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

kaikille $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, jolloin $v - \tilde{v} = 0$ melkein kaikkialla. □

Lisäksi on selvää, että jos funktiolla on vahva derivaatta, se täyttää heikon derivaatan määritelmän. Heikon derivaatan yksikäsitteisyys tarkoittaa, että jos funktio on vahvasti derivoituva, sen vahva derivaatta on sama kuin sen heikko derivaatta.

Määritelmä 3.2. Olkoon $1 \leq p \leq$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sobolev-avaruus $W^{k,p}(U)$ koostuu kaikista mitallisista funktioista $u : U \to \mathbb{R}$ siten, että jokaisella multi-indeksillä α jolle $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ on olemassa heikossa mielessä ja on $L^p(U)$-funktio. Lisäksi kun $p = 2$ merkitään $H^k(U) = W^{k,2}(U)$.

Tässä työssä käytetään vain Sobolev-avaruuksia jossa $p = 2$ eli jatkossa käytetään Sobolev-avaruuksista merkintää $H^k(U)$. Lisäksi samaistetaan kaikki Sobolev-avaruuden jäsenet jotka ovat yhtäsuuret melkein kaikkialla.

Määritelmä 3.3. Jos $u \in H^k(U)$, määritellään sen normiksi

$$\|u\|_{H^k(U)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{9}$$

Lemma 3.2. $\|u\|_{H^k(U)}$ on normi.

Todistus. Määritellään avaruuden $H^k(U)$ sisätuloksi

$$(u, v) = \sum_{k \leq |\alpha|} \int_U D^\alpha u \cdot D^\alpha v \, dx.$$

Sisätulon määritelmässä olevat vaatimukset (i) ja (ii) ovat selviä, sillä kertolasku on vaihdannainen ja integraali on lineaarikuvaus. Lisäksi $(u, u) \geq 0$ koska integraalien sisään tulee neliöitä jotka ovat aina positiivisia. Lisäksi $(u, u) = 0$ jos, ja vain jos $u \equiv 0$ melkein kaikkialla, eli samaistuksen johdosta $u = 0$. Toisin sanoen tästä saadaan todella sisätulo. Lisäksi on selvää, että $\|u\|_{H^k(U)} = \sqrt{(u, u)}$ eli väite seuraa. □

Määritelmä 3.4. Merkitään avaruudella $H_0^k(U)$ avaruuden $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ sulkeumaa $H^k(U)$:ssa. Eli $u \in H_0^k(U)$ jos, ja vain jos on jono funktioita $u_m \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ siten, että $\lim_{m\to\infty}\|u_m - u\|_{H^k(U)} = 0$.

Tämän avaruuden voi mieltää funktioina joille pätee

$$\text{"}D^\alpha u = 0 \text{ kun } x \in \partial U\text{" kaikille } |\alpha| \leq k-1.$$

Lause 3.3. Kaikilla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $H^k(U)$ on Hilbertin avaruus.

Todistus. Tulee osoittaa, että $H^k(U)$ on täydellinen. Huomataan, että jos $k = 0$ niin $H^0(U) = L^2(U)$, eli voidaan, olettaa että $k > 1$. Olkoon $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset H^k(U)$ Cauchy-jono. Tällöin jokaiselle $|\alpha| \leq k$, $(D^\alpha u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ on Cauchy jono $L^2(U)$:ssa. Koska $L^2(U)$ on täydellinen, on olemassa funktiot $u_\alpha \in L^2(U)$ siten, että

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \text{ avaruudessa } L^2(U)$$

jokaiselle $|\alpha| \leq k$. Erityisesti

$$u_m \to u_{(0,\ldots,0)} =: u \text{ avaruudessa } L^2(U).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$u \in H^k(U),\ D^\alpha u = u_\alpha\ (|\alpha| \leq k) \tag{10}$$

Olkoon $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_U u D^\alpha \phi \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi \, dx \\
&= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi \, dx.
\end{aligned}$$

Välivaiheissa raja-arvon ja integraalin järjestyksen vaihto on sallittu dominoidun konvergenssin nojalla. Tämä osoittaa että (10) on totta. Joten koska $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ avaruudessa $L^2(U)$ kaikille $|\alpha| \leq k$, saadaan että $u_m \to u$ avaruudessa $H^k(U)$ kuten haluttiinkin. □

Lause 3.4 (Poincarén epäyhtälö)**.** Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu joukko. Oletetaan, että $u \in H_0^1(U)$ jollain $1 \leq p < n$. Tällöin pätee

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|Du\|_{L^2(U)},$$

jossa C riippuu vain dimensiosta n ja joukosta U.

Todistus. Tämän lauseen todistus löytyy lähteestä [Eva10] sivulta 265. □

3.1 Avaruus H^{-1}

Tässä luvussa puhutaan Sobolev-avaruuden H_0^1 duaalista.

Määritelmä 3.5. Jatkossa merkitään $H^{-1}(U)$:lla avaruuden $H_0^1(U)$ duaalia.

Rieszin esityslauseen antaman isometrisen isomorfian avulla voitaisiin samaistaa $H_0^1(U)$ duaalinsa kanssa, mutta osoittautuu hyödyllisemmäksi samaistaa $L^2(U)$ duaalinsa kanssa. Kohta nähdään, että

$$H_0^1(U) \subset L^2(U) \cong L^{2\prime}(U) \subset H^{-1}(U)$$

Inkluusio $L^{2\prime}(U) \subset H^{-1}(U)$ seuraa siitä, että osa mutta ei kaikki lineaariset funktionaalit avaruudessa $L^{2\prime}(U)$ ovat rajoitettuja avaruudessa $H^{-1}(U)$. Huomataan, että jos $\|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ niin $\|u\|_{L^2(U)} \leq 1$ jolloin, jos L on lineaarinen funktionaali niin

$$\sup_{\substack{u\in L^2(U)\\ \|u\|_{H_0^1(U)}\leq 1}} \|Lu\| \leq \sup_{\substack{u\in L^2(U)\\ \|u\|_{L^2(U)}\leq 1}} \|Lu\|,$$

joka osoittaa että $L^{2\prime}(U) \subset H^{-1}(U)$. Jatkossa kirjoitetaan duaalin parituksesta $\langle u', u\rangle = u'(u)$.

Lause 3.5 (Avaruuden H^{-1} karakterisaatio)**.** Olkoon $f \in H^{-1}(U)$. Tällöin on olemassa funktiot $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U)$ siten, että

$$\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f v_{x_i}\, dx \ (v \in H_0^1(U)). \tag{11}$$

Erityisesti

$$(v, u)_{L^2(U)} = \langle v', u\rangle \tag{12}$$

kaikille $u \in H_0^1(U)$, ja kaikille $v \in L^2(U)$ jossa $v' \in L^{2\prime}(U)$ on Rieszin esityslauseesta saatava funktionaali.

Todistus. Olkoon $f \in H^{-1}(U)$. Rieszin esityslauseesta saadaan yksikäsitteinen $u \in H_0^1(U)$ siten, että $(u, v) = \langle f, v\rangle$ kaikille $v \in H_0^1(U)$, eli toisin sanoen

$$\int_U Du \cdot Dv + uv\, dx = \langle f, v\rangle$$

joka todistaa yhtälön (11) funktioille

$$\begin{cases} f^0 = u \\ f^i = u_{x_i} \ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

□

Jatkossa kun vaihdetaan sisätulosta duaaliavaruuden paritukseen ei vaihdeta merkintätapaa, vaan merkitään sekä avaruuden alkiota v, että sitä vastaavaa lineaarikuvausta v' samalla merkinnällä v.

3.2 Ajasta riippuvat Sobolev-avaruudet

Tässä työssä käsitellään osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, jossa funktiot riippuvat myös ajasta. Määritellään ajasta riippuvat Sobolev-avaruudet. Aika on erityinen muuttuja, ja tutkitaan kuvauksia ajan väliltä $[0,T]$ muihin funktioavaruuksiin. Olkoon tässä luvussa X reaalinen Banachin avaruus.

Määritelmä 3.6. (i) Funktio $\mathbf{s} : [0,T] \to X$ on yksinkertainen, jos se on muotoa

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i \ (0 \leq t \leq T),$$

missä E_i ovat Lebesgue-mitallisia osajoukkoja välillä $[0,T]$ ja $u_i \in X$ $(i = 1, \ldots, m)$

(ii) Funktio $\mathbf{f} : [0,T] \to X$ on vahvasti mitallinen, jos on jono yksinkertaisia funktioita $\mathbf{s}_k : [0,T] \to X$ siten, että

$$\mathbf{s}_k \to \mathbf{f} \text{ melkein kaikilla } 0 \leq t \leq T.$$

Määritelmä 3.7. Avaruus $L^p(0,T;X)$ koostuu kaikista vahvasti mitallisista funktioista $\mathbf{u} : [0,T] \to X$ jolle

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

kun $1 \leq p < \infty$.

Määritelmä 3.8. Avaruus $C([0,T];X)$ koostuu kaikista jatkuvista funktioista $\mathbf{u} : [0,T] \to X$ jolle

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}\|_X < \infty.$$

Määritelmä 3.9. Olkoon $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X)$. Sanotaan, että $\mathbf{v} \in L^1(0,T;X)$ on $\mathbf{u}$:n heikko derivaatta, ja merkitään $\mathbf{u}' = \mathbf{v}$, jos

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t) \, dt = -\int_0^T \phi(t)\mathbf{v}(t) \, dt$$

kaikille reaalisille testifunktioille $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,T)$.

Määritelmä 3.10. Sobolev-avaruus $W^{1,p}(0,T;X)$ koostuu kaikista funktioista $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$ joille $\mathbf{u}$ on olemassa heikossa mielessä ja kuuluu avaruuteen $L^p(0,T;X)$. Lisäksi

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p + \|\mathbf{u}'(t)\|_X^p\right)^{1/p}$$

on normi avaruudessa $W^{1,p}(0,T;X)$.

Lause 3.6. Olkoon $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0,T;X)$ jollain $1 \leq p < \infty$. Tällöin mahdollisesti nollamittaisessa joukossa uudelleenmäärittelyn jälkeen $\mathbf{u} \in C([0,T];X)$.

Osoitetaan ensin tarpeellinen aputulos. Laajennetaan $\mathbf{u}$ olemaan 0 välillä $(-\infty,0)$ ja (T,∞) ja olkoon $\mathbf{u}^\epsilon = \eta_\epsilon \star \mathbf{u}$, jossa η_ϵ on silottaja $\mathbb{R}^1$:ssä.

Lemma 3.7. $(\mathbf{u}^\epsilon)' = \eta_\epsilon \star \mathbf{u}'$ välillä $(\epsilon, T-\epsilon)$. Eli siis sileän funktion $\mathbf{u}^\epsilon$ aikaderivaatta on $\mathbf{u}$:n heikon aikaderivaatan silotus.

Todistus. Olkoon $t \in (\epsilon, T-\epsilon) =: T_\epsilon$, ja merkitään D_t:llä heikkoa aikaderivaattaa ja lasketaan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}(t))' &= D_t \int_{T_\epsilon} \eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}(s)\,ds \\ &= \int_{T_\epsilon} D_t\eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}(s)\,ds \\ &= -\int_{T_\epsilon} D_s\eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}(s)\,ds.\end{aligned}$$

Nyt kiinnitetylle $t \in T_\epsilon$ funktio $\phi(s) := \eta_\epsilon(t-s)$ on $\mathcal{C}_c^\infty([0,T])$. Tästä ja heikon derivaatan määritelmästä seuraa, että

$$\int_0^T D_s\eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}(s)\,ds = -\int_0^T \eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}'(s)\,ds.$$

Joten

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}^\epsilon)' &= -\left(-\int_0^T \eta_\epsilon(t-s)\mathbf{u}'(s)\,ds\right) \\ &= [\eta_\epsilon \star \mathbf{u}'](x),\end{aligned}$$

joten väite seuraa. □

Osoitetaan nyt lause 3.6.

Todistus. Silottajan ominaisuuksista seuraa, että

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}^{\epsilon} \to \mathbf{u} \text{ avaruudessa } L^p(0,T;X) \\
(\mathbf{u}^{\epsilon})' \to \mathbf{u}' \text{ avaruudessa } L^p_{loc}(0,T;X)
\end{cases} \tag{13}
$$

Kiinnitetään $0 < s < t < T$ jolloin saadaan

$$\mathbf{u}^{\epsilon}(t) = \mathbf{u}^{\epsilon}(s) + \int_s^t \mathbf{u}^{\epsilon\prime}(\tau)\, d\tau.$$

Joten (13) nojalla

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau)\, d\tau$$

melkein kaikille $0 < s < t < T$. Koska $t \mapsto \int_0^t \mathbf{u}'(\tau)\, d\tau$ on jatkuva, niin väite seuraa. □

4 Toisen asteen hyperboliset yhtälöt

Toisen asteen hyperboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat luonnollinen yleistys aaltoyhtälöstä

$$u_{tt} - \Delta u = f,$$

jossa Δ on Laplacen operaattori $\Delta u = \sum_{i=0}^{n} u_{x_i x_i}$. Seuraavissa luvuissa osoitetaan, että näihin yhtälöihin on olemassa heikot ratkaisut, ja osoitetaan että heikot ratkaisut ovat yksikäsitteisiä. Lisäksi puhutaan ratkaisuiden käytöksestä alkudatan suhteen.

4.1 Määritelmiä

Tässä kappaleessa määritellään tutkittava ongelma ja heikot ratkaisut.

4.1.1 Hyperboliset yhtälöt

Tästä eteenpäin tutkitaan reuna-arvo-ongelmaa

$$
\begin{cases}
u_{tt} + Lu = f & \text{kun } (x,t) \in U_T \\
u = 0 & \text{kun } (x,t) \in \partial U \times [0,T] \\
u = g, u_t = h & \text{kun } (x,t) \in U \times t = 0,
\end{cases} \tag{14}
$$

missä funktiot $f : U_T \to \mathbb{R}$, $g, h : U \to \mathbb{R}$ ovat annettuja, ja $u : U_T \to \mathbb{R}$ on tuntematon. Symboli L merkitsee jokaisella ajanhetkellä t osittaisdifferentiaalioperaattoria, joka on joko divergenssimuodossa

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \tag{15}$$

tai ei-divergenssimuodossa

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u. \tag{16}$$

Kertoimet a^{ij}, b^i, c $(i,j = 1,\dots,n)$ ovat annettuja funktioita.

Määritelmä 4.1. Osittaisdifferentiaalioperaattori $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ on tasaisesti hyperbolinen, jos on olemassa vakio $\theta > 0$ siten, että

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{17}$$

kaikilla $(x,t) \in U_T, \xi \in \mathbb{R}^n$.

4.1.2 Heikot ratkaisut

Olkoon L on divergenssimuodossa (15). Oletetaan, että

$$a^{ij}, b^i, c \in \mathcal{C}^1(\bar{U}_T) \quad (i,j = 1,\dots,n), \tag{18}$$

$$f \in L^2(U_T), \tag{19}$$

$$g \in H_0^1(U), h \in L^2(U), \tag{20}$$

ja oletetaan aina, että $a^{ij} = a^{ji}$. Tiedosta (18) seuraa, että funktioiden a^{ij}, b^i, ja c $L^\infty(U)$-normit on olemassa äärellisenä, joten integraaleissa näitä funktioita voidaan arvioida yltäpäin tällä normilla ja sitten tuoda nuo normit vakiona ulos integraaleista. Tätä tullaan tekemään tässä työssä useaan kertaan erikseen mainitsematta. Olkoot $u, v \in H_0^1(U)$ ja $0 \leq t \leq T$, otetaan käyttöön ajasta riippuva bilineaarimuoto

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot,t)u_{x_i}v + c(\cdot,t)uv\,dx. \tag{21}$$

Idea heikkojen ratkaisujen taustalla. Olkoon $u = u(x,t)$ sileä ratkaisu ongelmaan (14), ja määritellään kuvaus

$$\mathbf{u} : [0,T] \to H_0^1(U),$$

siten, että

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x,t) \quad (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Olkoon samoin funktio

$$\mathbf{f} : [0,T] \to L^2(U)$$

siten, että

$$[\mathbf{f}(t)](x) := f(x,t) \quad (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Nyt kerrotaan ODY $u_{tt} + Lu = f$ kiinnitetyllä funktiolla $v \in H_0^1(U)$, ja osittaisintegroidaan

$$\begin{aligned}
&\int_U u_{tt}v + vLu\,dx = \int_U u_{tt}v\,dx + \int_U vLu\,dx \\
&= (\mathbf{u}'', v) + \int_U -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} v\,dx + \int_U \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv\,dx \\
&= (\mathbf{u}'', v) + -\int_U -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}\,dx + \int_{\partial U} -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} v\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_U \sum_{i=1}^n b^i(x,t)u_{x_i}v + c(x,t)uv\,dx \\
&\overset{(*)}{=} (\mathbf{u}'', v) + B[\mathbf{u}, v; t],
\end{aligned}$$

kun $0 \leq t \leq T$. Yhtäsuuruus (*) seuraa siitä, että $v = 0$ ∂U:lla. Tästä saadaan tulos

$$(\mathbf{u}'', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \tag{22}$$

Yhtälöstä $u_{tt} + Lu = f$ näkee, että

$$u_{tt} = g^0 + \sum_{j=1}^n g^j_{x_j},$$

jossa $g^0 := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu$ ja $g^j := \sum_{i=1}^n a^{ij} u_{x_i}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Tästä, ja tuloksesta (11) voisi päätellä, että kannattaa etsiä heikkoa ratkaisua $\mathbf{u}$, jolle $\mathbf{u}'' \in H^{-1}(U)$ melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$, ja sitten tulkitsemalla yhtälön (22) ensimmäinen termi uudestaan termiksi $\langle \mathbf{u}'', v \rangle$.

Määritelmä 4.2. Funktio

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T; H_0^1(U)), \text{ jolle } \mathbf{u}' \in L^2(0,T; L^2(U)), \text{ ja } \mathbf{u}'' \in L^2(0,T; H^{-1}(U))$$

on ongelman (14) heikko ratkaisu, jos

(i) $$\langle \mathbf{u}'', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$$

jokaiselle $v \in H_0^1(U)$ ja melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$, ja

(ii) $$\mathbf{u}(0) = g,\ \mathbf{u}'(0) = h.$$

Huomautus, lauseesta 3.6 seuraa, että $\mathbf{u} : [0, T] \to H_0^1(U)$ ja $\mathbf{u}' : [0, T] \to L^2(U)$ ovat jatkuvia, joten yhtäsuuruudet ajanhetkellä 0 (ii) tekevät järkeä.

4.2 Galerkinin approksimaatio

Viitteen [Eva10] tapaan johdetaan heikkojen ratkaisujen olemassaolo ratkaisemalla äärellisulotteinen approksimaatio. Harkitaan ongelmaa (14), ja käytetään niin sanottua Galerkinin metodia. Valitaan sileät funktiot $w_k = w_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ siten, että

(23) $$\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ on ortogonaalinen kanta } H_0^1(U)\text{:lle}$$

ja

(24) $$\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ on ortonormaali kanta } L^2(U)\text{:lle.}$$

Tällaisen kannan olemassaolon todistaminen sivuutetaan, se osoitetaan lähteessä [Bre11]. Kiinnitetään positiivinen kokonaisluku m, ja kirjoitetaan

(25) $$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k,$$

missä ideana on valita kertoimet $d_m^k(t)$ siten, että

(26) $$d_m^k(0) = (g, w_k)\ (k = 1, \dots m),$$
(27) $$d_m^k{}'(0) = (h, w_k)\ (k = 1, \dots m),$$

ja

(28) $$(\mathbf{u}_m'', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k)\ (0 \leq t \leq T,\ k = 1, \dots, m).$$

Summaa (25) kutsutaan Galerkinin approksimaatioksi.

Lause 4.1. Jokaiselle kokonaisluvulle $m = 1, 2, \dots$ on olemassa muotoa (25) oleva yksikäsitteinen funktio, $\mathbf{u}_m$ joka toteuttaa kohdat (26)-(28).

Todistus. Olkoon $\mathbf{u}_m$ muotoa (25) ja huomataan, että

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_m'', w_k) &= \int_U \mathbf{u}_m'' w_k \, dx \\
&= \int_U \sum_{j=1}^m d_m^j{}''(t) w_j w_k \, dx \\
&= \int_U \sum_{j\neq k} d_m^j{}''(t) w_j w_k \, dx + \int_U d_m^k{}''(t)(w_k)^2 \, dx \\
&= d_m^k{}''(t),
\end{aligned}$$

koska $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ on ortonormaali kanta $L^2(U)$:ssa. Lisäksi lasketaan

$$\begin{aligned}
B[\mathbf{u}_m, w_k; t] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(w_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{u}_m)_{x_i} w_k + c\mathbf{u}_m w_k \, dx \\
&= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left(\sum_{l=1}^m d_m^l (w_l)_{x_i} \right) (w_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i \left(\sum_{l=1}^m d_m^l (w_l)_{x_i} \right) w_k \\
&\qquad\qquad + c \sum_{l=1}^m d_m^l w_l w_k \, dx \\
&= \int_U \sum_{l=1}^m d_m^l \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(w_l)_{x_i}(w_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i (w_l)_{x_i} w_k + c w_l w_k \right) dx \\
&= \sum_{l=1}^m d_m^l \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(w_l)_{x_i}(w_k)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i (w_l)_{x_i} w_k + c w_l w_k \right) dx \\
&= \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t),
\end{aligned}$$

missä $e^{kl} := B[w_l, w_k; t]$ $(k, l = 1, \ldots, m)$. Merkitään myös $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$. Täten (28) muuttuu lineaariseksi differentiaaliyhtälöryhmäksi

$$d_m^k{}'' + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (0 \le t \le T,\ k = 1, \ldots, m), \tag{29}$$

alkuarvoilla (26), ja (27). Millerin ja Michelin kirjassa [MM82] sivuilla 5-7 annetaan metodi sille, kuinka toisen asteen yhtälö voidaan muuttaa kahden ensimmäisen asteen yhtälön ryhmäksi. Tällä prosessilla toisen asteen yhtälöryhmästä saa tehtyä isomman ensimmäisen asteen yhtälöryhmän. Tämän lisäksi sivuilla 117-121 osoitetaan, että tällaiselle yhtälöryhmälle löytyy yksikäsitteinen $\mathcal{C}^2$ ratkaisu $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ joka toteuttaa alkuarvot (26), ja (27), ja ratkaisee yhtälöt (29). $\square$

4.2.1 Energiaestimaatit

Ideana on nyt ottaa raja-arvo $m \to \infty$, joten tarvitaan m:stä riippumattomia estimaatteja funktiolle $\mathbf{u}_m$.

Lause 4.2 (Energiaestimaatit)**.** On olemassa vakio C, joka riippuu vain U:sta ja T:stä ja L:n kertoimista siten, että

$$\begin{aligned}&\max_{0\le t\le T}\Big(\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)}+\|\mathbf{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}\Big) + \|\mathbf{u}_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\\ &\qquad\le C\Big(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\Big)\end{aligned} \tag{30}$$

kun $m = 1, 2, \dots$.

Todistus. Kerrotaan (28) termillä $d_m^k{}'(t)$, summataan $k = 1, \dots m$, ja muistetaan (25) jolla saadaan tulos

$$(\mathbf{u}_m'', \mathbf{u}_m') + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m') \tag{31}$$

melkein kaikilla $0 \le t \le T$. Lasketaan seuraavaksi

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_m'', \mathbf{u}_m') &= \int_U \mathbf{u}_m''\mathbf{u}_m'\,dx\\ &= \int_U \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_m')^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U (\mathbf{u}_m')^2\,dx\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2\right),\end{aligned}$$

jossa derivaatan ja integraalin saa vaihtaa Leibnizin säännön nojalla. Lisäksi merkitään

$$\begin{aligned}B[\mathbf{u}_m'', \mathbf{u}_m'; t] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m')_{x_j}\,dx\\ &\quad + \int_U \sum_{i=1}^n b^i(\mathbf{u}_m)_{x_i}\mathbf{u}_m' + c\mathbf{u}_m\mathbf{u}_m'\,dx\\ &=: B_1 + B_2.\end{aligned} \tag{32}$$

Olkoon

$$A[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}\, dx \quad (u,v \in H_0^1(U)).$$

Koska $a^{ij} = a^{ji}$ $(i,j = 1,\dots,n)$, lasketaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_U \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx \\
&\qquad + 2\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m')_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx\Bigg) \\
&= B_1 + \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx.
\end{aligned}$$

Derivaatan ja integraalin vaihto on taas sallittu Leibnizin säännön nojalla. Eli

$$B_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) - \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx. \tag{33}$$

Tästä saadaan laskettua

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) - \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx \\
&\geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) - C\int_U \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{u}_m)_{x_i}(\mathbf{u}_m)_{x_j}\, dx \\
&\geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) - C\sum_{i,j=1}^n \left(\int_U (\mathbf{u}_m)_{x_i}^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_U (\mathbf{u}_m)_{x_j}^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m;t]\right) - C\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Lasketaan myös

$$
\begin{aligned}
|B_2| &= \left| \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i (\mathbf{u}_m)_{x_i} \mathbf{u}'_m + c\mathbf{u}_m \mathbf{u}'_m \, dx \right| \\
&\leq \left| C \int_U \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{u}_m)_{x_i} \mathbf{u}'_m + \mathbf{u}_m \mathbf{u}'_m \, dx \right| \\
&\overset{Y}{\leq} \left| C \int_U \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m)^2_{x_i} + \frac{1}{2} (\mathbf{u}'_m)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2_m + \frac{1}{2} (\mathbf{u}'_m)^2 \, dx \right| \\
&\leq C \left(\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} \right). \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä estimaatit (31)-(35) saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] \right) &\leq C \left(\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} \right) \\
&\leq C \left(\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} \right), \qquad (36)
\end{aligned}
$$

missä käytettiin epäyhtälöä

$$
\theta \int_U |Du|^2 \leq A[u, u; t] \quad (u \in H^1_0(U)), \tag{37}
$$

joka seuraa epäyhtälöstä (17). Merkitään nyt

$$
\eta(t) := \|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + A[\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t], \tag{38}
$$

ja

$$
\xi(t) := \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2}. \tag{39}
$$

Tällöin epäyhtälö (36) sanoo, että sopiville vakioille C_1, C_2

$$
\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)
$$

kun $0 \leq t \leq T$. Tällöin Gronwallin epäyhtälö antaa estimaatin

$$
\eta(t) \leq e^{C_1 t} \left(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s) ds \right) \quad (0 \leq y \leq T). \tag{40}
$$

Kun muistetaan lause 2.9, (26), ja (27) saadaan arviot $\|\mathbf{u}'_m(0)\|^2_{L^2(U)} \leq \|h\|^2_{L^2(U)}$, ja $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)} \leq \|g\|_{H_0^1(U)}$. Lasketaan

$$
\begin{aligned}
A[\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0); 0] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (\mathbf{u}_m(0))_{x_i} (\mathbf{u}_m(0))_{x_j} \, dx \\
&\leq C \sum_{i,j=1}^n \int_U \left| (\mathbf{u}_m(0))_{x_i} (\mathbf{u}_m(0))_{x_j} \right| \, dx \\
&\overset{CS}{\leq} C \sum_{i,j=1}^n \left(\int_U (\mathbf{u}_m(0))_{x_i}^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_U \mathbf{u}_m(0))_{x_j}^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&\leq C \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&\leq C \|g\|_{H_0^1(U)}^2.
\end{aligned}
$$

Toisin sanoen tästä saadaan

$$
\begin{aligned}
\eta(0) &= \|\mathbf{u}'_m(0)\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0); 0] \\
&\leq C(\|h\|_{L^2(U)}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2),
\end{aligned}
$$

ja yhdistämällä kaavat (38)-(40) saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + A[\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t); t] \\
&\qquad \leq C \left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Koska $0 \leq t \leq T$ oli mielivaltainen, saadaan tuosta estimaatista ja epäyhtälöstä (37) arvio

$$
\begin{aligned}
&\max_{0 \leq t \leq T} \left(\|\mathbf{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \right) \\
&\qquad \leq C \left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Nyt kiinnitetään funktio $v \in H_0^1(U), \|v\|_{H_0^1} \leq 1$, ja merkitään $v = v^1 + v^2$, missä $v^1 \in \operatorname{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ ja $(v^2, w_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. Nyt pätee, että $\|v^1\|_{H_0^1} \leq 1$, ja tällöin (25) ja (28) johtavat tulokseen

$$
\langle \mathbf{u}''_m, v \rangle = (\mathbf{u}''_m, v) = (\mathbf{u}''_m, v^1) = (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t].
$$

Nyt lasketaan

$$
\begin{aligned}
|\langle \mathbf{u}_m'', v\rangle| &= \left|(\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t]\right| \\
&= \Bigg| \int_U \mathbf{f}\, v^1 dx - \Bigg(\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\mathbf{u}_m)_{x_i} v^1_{x_j}\, dx \\
&\qquad + \int_U \sum_{i=1}^n b^i (\mathbf{u}_m)_{x_i} v^1 + c\mathbf{u}_m v^1\, dx \Bigg) \Bigg| \\
&\overset{CS}{\le} \Bigg| \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} \|v^1\|_{L^2(U)} - \Bigg(C \sum_{i,j=1}^n \int_U (\mathbf{u}_m)_{x_i} v^1_{x_j}\, dx \\
&\qquad + C \sum_{i=1}^n \int_U (\mathbf{u}_m)_{x_i} v^1 + \mathbf{u}_m v^1\, dx \Bigg) \Bigg| \\
&\overset{CS}{\le} \Bigg| C\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} - \Bigg(C \sum_{i,j=1}^n \|(\mathbf{u}_m)_{x_i}\|_{L^2(U)} \|v^1_{x_j}\|_{L^2(U)} \\
&\qquad + C \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{u}_m)_{x_i}\|_{L^2(U)} \|v^1\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)} \|v^1\|_{L^2(U)} \Bigg) \Bigg| \\
&\le C \left| \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} - \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \right| \\
&\le C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \right),
\end{aligned}
$$

jossa käytettiin tietoa että $\|v^1\|_{H_0^1} \le 1$. Täten

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|\mathbf{u}_m''\|^2_{H^{-1}(U)}\, dt &\le C \int_0^T \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\, dt \\
&\le C \left(\|g\|^2_{H_0^1} + \|h\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \right).
\end{aligned}
$$

□

4.3 Heikon ratkaisun olemassaolo

Nyt otetaan raja-arvo $m \to \infty$ Galerkinin approksimaatiosta.

Lause 4.3. Ongelmaan (14) on olemassa heikko ratkaisu.

Todistus. Energiaestimaateista (30) nähdään, että jono $\{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu avaruudessa $L^2(0,T;H_0^1(U))$, $\{\mathbf{u}_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu avaruudessa $L^2(0,T;L^2(U))$, ja $\{\mathbf{u}_m''\}_{m\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu avaruudessa $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Tästä seuraa, että on olemassa osajono $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ja funktio $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, jolle pätee $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U))$, ja $\mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ siten, että

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \to \mathbf{u} & \text{heikosti avaruudessa } L^2(0,T;H_0^1(U)) \\ \mathbf{u}'_{m_l} \to \mathbf{u}' & \text{heikosti avaruudessa } L^2(0,T;L^2(U)) \\ \mathbf{u}''_{m_l} \to \mathbf{u}'' & \text{heikosti avaruudessa } L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases} \tag{41}$$

Vaikka merkintä antaakin olettaa, että tässä funktioiden $\mathbf{u}'_{m_l}$ heikko raja on funktioiden $\mathbf{u}_{m_l}$ heikon rajan heikko derivaatta, tämä fakta tulee vielä osoittaa. Tätä varten olkoon $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, ja nyt lasketaan

$$\int_U \mathbf{u}\phi'\,dx + \int_U \mathbf{u}'\phi\,dx = \lim_{l\to\infty}\left(\int_U \mathbf{u}_{m_l}\phi'\,dx + \int_U \mathbf{u}'_{m_l}\phi\,dx\right) = 0$$

osittaisintegrointikaavan nojalla. Tämä osoittaa, että ensimmäinen derivaatta täsmää. Sama lasku osoittaa, että myös toinen derivaatta täsmää, joten jonot tosiaan suppenevat funktioon $\mathbf{u}$ ja sen heikkoihin derivaattoihin.

Nyt kiinnitetään luku N ja valitaan funktio $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1([0,T];H_0^1(U))$, joka on muotoa

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t)w_k, \tag{42}$$

missä $\{d^k\}_{k=1}^N$ ovat sileitä funktioita. Valitaan $m \geq N$, kerrotaan (28) $d^k(t)$:llä, summataan yli $k = 1,\ldots,N$ ja integroidaan t:n suhteen saadaksemme

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}''_m, \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\,dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\,dt. \tag{43}$$

Otetaan huomioon (41), asetetaan $m = m_l$, ja otetaan raja-arvo $m \to \infty$ josta saadaan

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\,dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\,dt. \tag{44}$$

Tämä yhtälö pätee kaikille funktioille $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, koska muotoa (42) olevat yhtälöt ovat tiheässä tässä avaruudessa. Tätä väitettä ei todisteta tarkasti, mutta yleinen funktio $f \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ on muotoa $f = \sum_{k=1}^\infty a_k(t)w_k$. Funktioita $a_k(t)$ silottamalla saadaan sileä funktio $d_\epsilon^k(t)$, jolle $d_\epsilon^k(t) \to a_k(t)$ kun $\epsilon \to 0$ melkein kaikilla $t \in [0,T]$. Tällöin kun otetaan raja-arvot $\epsilon \to 0$ ja $N \to \infty$ niin $\sum_{k=1}^N d_\epsilon^k(t)w_k \to \sum_{k=1}^\infty a_k(t)w_k$ avaruudessa $L^2(0,T;H_0^1(U))$. Yhtälöstä (44) seuraa myös, että

$$\langle \mathbf{u}'', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$$

kaikille $v \in H_0^1(U)$ ja melkein kaikilla $0 \leq t \leq T$. Nyt tulee tarkistaa, että alkuarvot täsmäävät, eli että

$$\mathbf{u}(0) = g, \tag{45}$$

$$\mathbf{u}'(0) = h. \tag{46}$$

Valitaan funktio $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^2([0,T]; H_0^1(U))$ jolle pätee $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}'(T) = 0$. Sitten osittaisintegroidaan (44) kahdesti t:n suhteen, josta saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{v}'', \mathbf{u}) + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = &\int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt \\ &- (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}'(0)) + (\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}(0)). \end{aligned} \tag{47}$$

Samoin yhtälöstä (43) saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{v}'', \mathbf{u}_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\, dt = &\int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt \\ &- (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}'(0)) + (\mathbf{u}_m'(0), \mathbf{v}(0)). \end{aligned}$$

Asetetaan $m = m_l$ jolloin (26), (27) ja (41) antavat

$$\int_0^T (\mathbf{v}'', \mathbf{u}) + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt - (g, \mathbf{v}'(0)) + (h, \mathbf{v}(0)). \tag{48}$$

Nyt yhtälöitä (47) ja (48) vertaamalla saadaan (45) ja (46) koska $\mathbf{v}(0)$ ja $\mathbf{v}'(0)$ ovat mielivaltaisia. Täten $\mathbf{u}$ on ongelman (14) heikko ratkaisu. □

4.4 Heikon ratkaisun yksikäsitteisyys

Lause 4.4. Ongelman (14) heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.

Todistus. Jos olisi kaksi ratkaisua $\mathbf{u}$, ja $\mathbf{v}$ joille

$$\begin{aligned} \mathbf{f_u} &= \mathbf{f_v} \\ g_\mathbf{u} &= g_\mathbf{v} \\ h_\mathbf{u} &= h_\mathbf{v}, \end{aligned}$$

niin $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ olisi ratkaisu ongelmaan (14) jolle pätee $\mathbf{f_{u-v}} \equiv g_\mathbf{u-v} \equiv h_\mathbf{u-v} \equiv 0$. Eli riittää osoittaa, että ainoa heikko ratkaisu jolle $\mathbf{f_u} \equiv g_\mathbf{u} \equiv h_\mathbf{u} \equiv 0$ on

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}. \tag{49}$$

Lukitaan $0 \leq s \leq T$ ja asetetaan

$$\mathbf{v} := \begin{cases} \int_t^s \mathbf{u}(\tau)\, d\tau & \text{jos } 0 \leq t \leq s \\ \mathbf{0} & \text{jos } s \leq t \leq T. \end{cases}$$

Tällöin $\mathbf{v}(t) \in H_0^1(U)$ jokaisella $0 \leq t \leq T$, ja täten

$$\int_0^s \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = 0.$$

Koska $\mathbf{u}'(0) = \mathbf{v}(s) = \mathbf{0}$, saadaan osittaisintegroimalla edellisen yhtälön ensimmäistä termiä

(50) $$\int_0^s (\mathbf{u}', \mathbf{v}') + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = 0.$$

Nyt $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}$ $(0 \leq t \leq s)$, joten

(51) $$\int_0^s (\mathbf{u}', \mathbf{u}) - B[\mathbf{v}', \mathbf{v}; t]\, dt = 0.$$

Nyt, merkitään

$$D[u, v; t] := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_t^i u_{x_i} v + c_t uv\, dx,$$

ja

$$C[u, v; t] := \int_U \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} u + \frac{1}{2} b_{x_i}^i vu\, dx,$$

jossa $u, v \in H_0^1(U)$. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{2}B[\mathbf{v},\mathbf{v};t] &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v} + c\mathbf{v}\mathbf{v}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_U \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v} + c\mathbf{v}^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt}(a^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}) + \frac{d}{dt}(c\mathbf{v}^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_t^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v} + c_t\mathbf{v}^2\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v} + 2c\mathbf{v}\mathbf{v}'\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}'_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}'\,dx.
\end{aligned}$$

Derivoinnin ja integraalin saa vaihtaa Leibnizin integraalisäännön nojalla. Koska $a^{ij} = a^{ji}$ niin yllä olevasta laskusta saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{2}B[\mathbf{v},\mathbf{v};t] &= D[\mathbf{v},\mathbf{v};t] + \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n 2a^{ij}\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}' + 2c\mathbf{v}\mathbf{v}'\,dx \\
&= D[\mathbf{v},\mathbf{v};t] + \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n 2a^{ij}\mathbf{v}_{x_i'}\mathbf{v}_{x_j} + 2\sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}' + 2c\mathbf{v}\mathbf{v}'\,dx \\
&= D[\mathbf{v},\mathbf{v};t] + B[\mathbf{v}',\mathbf{v};t] + \frac{1}{2}\int_U -\sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v} + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}'\,dx. \qquad (52)
\end{aligned}$$

Nyt osittaisintegroimalla termiä $\sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\int_U \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'_{x_i}\mathbf{v}\,dx &= -\int_U \sum_{i=1}^n (b^i\mathbf{v})_{x_i}\mathbf{v}'\,dx + \int_{\partial U}\sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}'\mathbf{v}dS \\
&= -\int_U \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}' + \sum_{i=1}^n b^i_{x_i}\mathbf{v}\mathbf{v}'\,dx.
\end{aligned}$$

Syöttämällä tuo yhtälöön (52), ja merkitsemällä $\mathbf{v}' = -\mathbf{u}$ saadaan

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}B[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t] = D[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t] + B[\mathbf{v}', \mathbf{v}; t] + C[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t],$$

ja yhtälöstä (51) seuraa, että

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)} - \frac{1}{2}B[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t]\right) dt = -\int_0^s C[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] + D[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t]\, dt.$$

Nyt, koska $\mathbf{u}(0) = g = 0$, ja $\mathbf{v}(s) = 0$, niin yllä olevasta seuraa

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}B[\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0); t] = -\int_0^s C[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] + D[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t]\, dt. \tag{53}$$

Seuraavaksi lasketaan operaattorin L hyperbolisuutta, Poincarén epäyhtälöä, ja Seurausta 2.1.1. käyttäen

$$\begin{aligned}
B[\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0); t] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\mathbf{v}_{x_i}(0)\mathbf{v}_{x_j}(0) + \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}(0)\mathbf{v}(0) + c\mathbf{v}(0)\mathbf{v}(0)\, dx \\
&\geq \theta \int_U |D\mathbf{v}(0)|^2\, dx - C\int_U \sum_{i=1}^n [\mathbf{v}_{x_i}(0)\mathbf{v}(0)] + (\mathbf{v}(0))^2\, dx \\
&\geq \theta\|D\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)} - C\int_U \sum_{i=1}^n \left[\epsilon(\mathbf{v}_{x_i}(0))^2 + C_\epsilon(\mathbf{v}(0))^2\right] + (\mathbf{v}(0))^2\, dx \\
&\geq \theta\|D\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)} - C\epsilon\|D\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)} - C_\epsilon\|\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)} \\
&\geq \tilde{C}\|\mathbf{v}(0)\|^2_{H^1_0(U)} - C\|\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)},
\end{aligned}$$

jossa $\tilde{C} > 0$ kun ϵ valitaan riittävän pieneksi. Lisäksi

$$\begin{aligned}
C[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] &= \int_U \sum_{i=1}^n b^i\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{u} + \frac{1}{2}b^i_{x_i}\mathbf{v}\mathbf{u}\, dx \\
&\leq C\int_U \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{x_i}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\mathbf{u}\, dx \\
&\overset{Y}{\leq} C\int_U \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\mathbf{v}^2_{x_i} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{1}{4}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{4}\mathbf{u}^2\, dx \\
&\leq C\left(\|\mathbf{v}\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right),
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
D[\mathbf{v},\mathbf{v};t] &= \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a_t^{ij}\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_t^i \mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v} + c_t\mathbf{v}^2\,dx,\\
&\leq C\int_U \sum_{i,j=1}^n \mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_{x_i}\mathbf{v}) + \mathbf{v}^2\,dx,\\
&\overset{Y}{\leq} C\int_U \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2}\mathbf{v}_{x_i}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{x_j}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_{x_i}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + \mathbf{v}^2\,dx,\\
&\leq C\|\mathbf{v}\|^2_{H_0^1(U)}.
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä edelliset laskut ja yhtälö (53) saadaan

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} &+ \|\mathbf{v}(0)\|^2_{H_0^1(U)}\\
&\leq C\left(\int_0^s \|\mathbf{v}\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\,dt + \|\mathbf{v}(0)\|^2_{L^2(U)}\right).
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Nyt merkitään

$$
\mathbf{w}(t) := \int_0^t \mathbf{u}(\tau)\,d\tau \quad (0 \leq t \leq T),
$$

jolloin epäyhtälöstä (54) tulee

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)}\\
&\leq C\left(\int_0^s \|\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}\,dt + \|\mathbf{w}(s)\|^2_{L^2(U)}\right).
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Mutta $\|\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)} \leq 2\|\mathbf{w}(t)\|^2_{H_0^1(U)} + 2\|\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)}$, ja $\|\mathbf{w}(s)\|_{L^2(U)} \leq \int_0^s \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}\,dt$. Täten epäyhtälöstä (54) tulee

$$
\|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + (1-2sC_1)\|\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)} \leq C_1\int_0^s \|\mathbf{w}\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\,dt.
$$

Nyt valitaan T_1 niin pieneksi, että

$$
1 - 2T_1C_1 \geq \frac{1}{2},
$$

jolloin kun $0 \leq s \leq T_1$ saadaan

$$
\|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{w}(s)\|^2_{H_0^1(U)} \leq C\int_0^s \|\mathbf{w}\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\,dt.
$$

Tästä tiedosta ja Gronwallin epäyhtälön integraalimuodosta seuraa että $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ välillä $[0, T_1]$ sillä $\mathbf{u}$ on jatkuva t:n suhteen lauseen 3.6 nojalla. Nyt toistetaan sama argumentti väleillä $[T_1, 2T_1], [2T_1, 3T_1], \ldots$ josta saadaan lopulta (49). $\square$

4.5 Ratkaisuiden käyttäytyminen.

Tässä luvussa keskitytään siihen, miten annetun ongelman alkudata vaikuttaa ratkaisuun myöhemmällä ajanhetkellä t_0. Tässä luvussa seurataan lähdettä [Eva10]. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä luvussa oletetaan, että $U = \mathbb{R}^n$ ja että operaattori L on yksinkertaisessa ei-divergenssimuodossa

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j}, \tag{56}$$

jossa kertoimet ovat sileitä, ajasta riippumattomia, ja operaattorissa ei ole alemman kertaluvun termejä. Oletetaan jälleen tasainen hyperbolisuus (17). Lähteessä [Eva10] luvussa 7.2.3 osoitetaan, että hyperbolisten yhtälöiden ratkaisut ovat sileitä, jos niiden alkudata on sileä.

Olkoon nyt u sileä ratkaisu osittaisdifferentiaaliyhtälöön

$$u_{tt} + Lu = 0 \text{ avaruudessa } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \tag{57}$$

Kiinnitetään piste $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ja yritetään löytää kartiomainen alue C, jonka kärki on (x_0, t_0) siten, että $u \equiv 0$ C:n sisällä, jos $u \equiv u_t \equiv 0$ pinnalla $C_0 = C \cap \{t = 0\}$.

Oletetaan, että C:n reunan antaa tasa-arvojoukko $\{p = 0\}$, jossa p ratkaisee Hamilton-Jacobi osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$p_t - \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) p_{x_i} p_{x_j} \right)^{1/2} = 0 \text{ avaruudessa } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \tag{58}$$

Yksinkertaistetaan (58) erottelemalla muuttujat, eli kirjoitetaan

$$p(x, t) = q(x) + t - t_0 \ (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0), \tag{59}$$

jossa q ratkaisee ongelman

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} q_{x_i} q_{x_j} = 1, q > 0 \text{ kun } x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\} \\ q(x_0) = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Jatkossa oletetaan, että q on sileä ratkaisu ongelmaan (60) kun $x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}$. Määritellään kaareva aikakartio

$$K := \{(x, t) \mid p(x, t) > 0\} = \{(x, t) \mid q(x) < t_0 - t\}.$$

Jokaiselle $t > 0$ määritellään lisäksi

$$K_t := \{x \mid q(x) < t_0 - t\} = \text{K:n poikkileikkaus ajanhetkellä t.} \tag{61}$$

Koska tiedosta (60) voidaan päätellä, että $Dq \neq 0$ avaruudessa $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$, niin ∂K_t on sileä $(n-1)$-ulotteinen pinta kun $0 \leq t < t_0$.

Lause 4.5 (Äärellinen etenemisnopeus)**.** Oletetaan, että u on sileä ratkaisu ongelmaan (57). Jos $u \equiv u_t \equiv 0$ pinnalla K_0, niin $u \equiv 0$ kun $(x,t) \in K$.

Nähdään erityisesti, että jos u ratkaisee ongelman (57) alkuarvoilla

$$u = g,\ u_t = h \text{ kun } x \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \tag{62}$$

niin $u(x_0, t_0)$ riippuu vain g:n ja h:n arvoista pinnalla K_0.

Todistus. Määritellään energia

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dx \ (0 \le t \le t_0).$$

Huomataan ensin, että jos f on x:n jatkuva funktio, niin koarea-kaavasta ja analyysin peruslauseesta saadaan

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{K_t} f\, dx\right) = -\int_{\partial K_t} \frac{f}{|Dq|}\, dS.$$

Tämän tiedon ja lauseen 2.7 avulla saadaan

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{K_t} u_t u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u'_{x_j}\, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial K_t} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) \frac{1}{|Dq|}\, dx \\ &=: A - B. \end{aligned} \tag{63}$$

Osittaisintegroimalla lasketaan

$$\begin{aligned} A &= \int_{K_t} u_t \left(u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} \right) dx + \int_{\partial K_t} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} \nu_j u_t\, dS \\ &= - \int_{K_t} u_t \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j} u_{x_i}\, dx + \int_{\partial K_t} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} \nu_j u_t\, dS, \end{aligned} \tag{64}$$

jossa $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ on yksikköulkonormaalivektori. Mutta matriisien Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} \nu_j \right| \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \nu_i \nu_j \right)^{1/2}. \tag{65}$$

Lisäksi koska $q = t_0 - t$ kun $x \in \partial K_t$, niin $\nu = \frac{Dq}{|Dq|}$ joukolla ∂K_t. Täten

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\nu_i\nu_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a^{ij}q_{x_i}q_{x_j}}{|Dq|^2} = \frac{1}{|Dq|^2}$$

(60) nojalla. Tästä johtuen epäyhtälö (65) onkin

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}\nu_j\right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)^{1/2} \frac{1}{|Dq|}. \tag{66}$$

Tällöin yhtälöstä (64) saadaan (66) ja Youngin epäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
|A| &\leq Ce(t) + \int_{\partial K_t} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)^{1/2} |u_t| \frac{1}{|Dq|}\, dS \\
&\leq Ce(t) + \frac{1}{2}\int_{\partial K_t} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right) \frac{1}{|Dq|}\, dS \\
&= Ce(t) + B
\end{aligned}$$

Tällöin yhtälöstä (63) saadaan

$$e'(t) \leq Ce(t).$$

Koska $u \equiv u_t \equiv 0$ kun $t = 0$ niin $e(0) = 0$ ja tällöin Gronwallin epäyhtälöstä saadaan, että $e(t) = 0$ kaikilla $0 \leq t \leq t_0$. Eli $u_t \equiv Du \equiv 0$ koko kartiossa K joten $u \equiv 0$ kartiossa K. $\square$

Viitteet

[BB98] Haïm Brezis and Felix Browder. *Partial Differential Equations in the 20th Century.* Advances in Mathematics, 1998.

[Bre11] Haïm Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, pages 311–312. Springer, 2011.

[Che06] Steve Cheng. *Differentiation Under the Integral Sign With Weak Derivatives, tech.* Technical report, 2006.

[CvB00] Michael Carter and Bruce van Brunt. *The Lebesgue-Stieltjes Integral*, chapter 9. Springer, 2000.

[DM05] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications.* Elsevier Science and Technology, third edition, 2005.

[EG15] Lawrence Evans and Ronald Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, chapter 3.4. CRC Press, revised edition, 2015.

[Eva10] Lawrence Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, second edition, 2010.

[Fol99] Gerald Folland. *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, pages 97–99. John Wiley and Sons, Inc, second edition, 1999.

[Gra95] Andrés Granados. *Reynolds Transport Theorems and Conservation Principles as a Special Application of Leibniz Rule.* Simón Bolívar University, 1995.

[Gå98] Lars Gårding. *Hyperbolic Equations in the 20th Century.* Société Mathématique de France, 1998.

[Leo09] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces*, chapter 3. American Mathematical Society, 2009.

[MM82] Richard Miller and Antony Michel. *Ordinary Differential Equations*, pages 5–7, 117–121. Academic Press, 1982.

[RF10] Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, pages 313–314. Pearson Education, fourth edition, 2010.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, pages 272–275. McGraw-Hill, third edition, 1976.