

^{113}Cd :n ja ^{115}In :n perustilan beetahajoaminen
MQPM-mallin avulla laskettuna

Mika Mustonen

Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos

18. elokuuta 2005

Kiitokset

Tahdon kiittää tämän tutkielman ohjaajaa, professori Jouni Suhosta, pait-si hyvästä ohjauksesta myös mielenkiintoisesta tutkielman aiheesta. Haluan kiittää myös Jyväskylän yliopiston fysiikan laitosta virikkeikkäästä oppimis-ympäristöstä viiden viime vuoden aikana ja apurahan muodossa saadusta taloudellisesta tuesta opintojen loppuvaiheissa. Amanuenssi Soili Leskisen apu käytännön asioissa oli korvaamatonta. Eero Holmlundin neuvot muutamien käytettyjen ohjelmien osalta ansaitsevat myös kiitoksen; Lisäksi hänen väitöskirjansa toimi useaan otteeseen erinomaisena inspiraation lähteenä.

Lopuksi haluan vielä muistaa kiitoksilla kaikkia tuttaviani ja sukulaisia, jotka ovat kannustaneet minua opiskelujeni aikana. Heiltä on aina tarvittaessa löytynyt muutama rohkaiseva sana.

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kahta neljästi kiellettyä ei-uniikkia β^- -hajoamista: ^{113}Cd :n perustilan hajoamista ^{113}In :n perustilalle ja ^{115}In :n perustilan hajoamista ^{115}Sn :n perustilalle. Ytimien rakennetta kuvattiin MQPM-mallin [1] avulla, jossa tilojen rakennuspalikoina toimivat referenssiydinten yksikvasihiukkastilat ja QRPA-fononit. Referenssiytimenä ensiksi mainittuun siirtymään käytettiin ^{112}Cd :a ja jälkimmäiseen ^{116}Sn :a.

Aluksi valenssiavaruudelle laskettiin Woods-Saxon-potentiaalia käyttäen yksihiukkaskanta, jonka antamia yksihiukkasenergioita säädettiin siten, että BCS-laskujen tuottama kvasihiukkasspektri vastaisi mahdollisimman hyvin tarkasteltavien parittomien ytimien kokeellisia matalaenergiaskaaleja ja alimmat kvasihiukkasenergiat kokeellisista separaatioenergioista lasketuista pariaukoista. Näin saatuja tuloksia käytettiin referenssiydinten QRPA-spektrin laskemiseen, ja edelleen parittomien ydinten MQPM-spektrien laskemiseen. MQPM:n antamia perustilojen aaltofunktioita käytettiin yksihiukkassuorityyppien tuottamiseen β -hajoamislaskuja varten.

Tuloksina saatiin $\log ft$ -arvoiksi siirtymälle ^{113}Cd :n perustilalta ^{113}In :n perustilalle 23,94 ja siirtymälle ^{115}In :n perustilalta ^{115}Sn :n perustilalle 23,20. Vastaavat kokeelliset ([2], [3]) arvot ovat 23,20(10) ja 22,5. Molemmissa tapauksissa tulokset olivat tyydyttäviä, joskin hieman kokeellisia suurempia. ^{113}Cd :n perustilan puoliintumisaikasi saatiin laskemalla $4,95 \cdot 10^{16}$ a (kokeellinen arvo [2]:n mukaisesti $7,7(3) \cdot 10^{15}$ a ja [4]:n mukaisesti $8,2(2) \cdot 10^{15}$ a) ja ^{115}In :n perustilan puoliintumisaikasi $1,99 \cdot 10^{15}$ a (kokeellinen arvo $4,41(25) \cdot 10^{14}$ a).

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Teoriaa	2
2.1	Yksihiukkaskanta	2
2.2	Nukleonien pariutuminen ja BCS	3
2.3	Kahden ja kolmen kvasihiukkasen viritykset	5
2.4	Sallituista ja kielletyistä beetahajoamisista	7
3	Laskennalliset menetelmät	14
3.1	Kuorimallilaskut	14
3.2	Puoliintumisajan ja $\log ft$ -arvon määrittäminen	16
4	Tulokset	17
4.1	Yksihiukkaskanta, BCS ja QRPA	17
4.2	MQPM-spektrit ja yksihiukkassiiirtymätiheydet	23
4.3	Beetahajoamislaskut	29
5	Johtopäätökset	31
	Liite A Esimerkki $\log ft$-arvon laskemisesta	33
	Liite B Ohjelmalistaus: logft.f90	39
	Liite C Ajo- ja lokitiedostoja	43

1 Johdanto

Ydinmallit — kuten fysikaaliset mallit yleensäkin — perustuvat aina yksinkertaistuksiin ja approksimaatioihin. Yksinkertaistaminen on välttämätöntä edes jonkinlaisten laskennallisten ennusteiden saamiseksi. Kokeellisesti havainnoitujen beetahajoamisten, sähkömagneettisten siirtymien ja multipolimomenttien vertaaminen laskettuihin on tehokas tapa tutkia ydinmallien toimivuutta.

Ytimien mallintamista voidaan lähestyä kahdesta eri suunnasta: Makroskooppisten tai mikroskooppisten mallien avulla. Makroskooppiset mallit lähtevät kuvaamaan ydintä kokonaisuutena, ydinmateriana, kun mikroskooppiset mallit puolestaan pyrkivät käsittelemään ydintä monen nukleonin kvanttimekaanisena järjestelmänä.

Parittomien ydinten matalaenergiasektreissä muutamien alimpien tilojen kuvaaminen onnistuu yleensä BCS-kvasihiukkasvirityksillä. Luonnollinen askel parantaa mallia on tuoda mukaan kolmen kvasihiukkasen viritykset. MQPM-mallissa kolmen kvasihiukkasen viritykset rakennetaan BCS-kvasihiukkasista ja QRPA-fononeista käyttäen koko ajan samaa kvasihiukkasvuorovaikutusta.

Tässä tutkielmassa lasketaan MQPM-mallin avulla $\log ft$ -arvot ja puoliintumisaajat ^{113}Cd :n ja ^{115}In :n perustilojen β^- -hajoamisille. Tarkoituksena on nähdä, kuinka hyvin MQPM-mallin pohjalta tehty lasku kykenee toistamaan kokeelliset tulokset näissä tapauksissa. ^{113}Cd ja ^{115}In ovat varsin ihanteellisia ytimiä erittäin kiellettyjen β^- -hajoamisten tarkasteluun, sillä niiden perustilalla on vain yksi hajoamiskanava: neljästi kielletty ei-uniikki hajoaminen suoraan tytärytimen perustilalle.

2 Teoriaa

2.1 Yksihiukkaskanta

Ydin on A keskenään voimakkaasti vuorovaikuttavan nukleonin järjestelmä, ja siten toivoton ratkaista eksaktisti ainakin, jos A ei ole hyvin pieni. Keskeiskenttäapproksimaation [5] ideana on käsitellä tätä järjestelmää efektiivisessä keskeiskentässä heikosti keskenään vuorovaikuttavien hiukkasten – tai kvasihiukkasten – järjestelmänä. Esittämällä nukleonin potentiaalienergia tässä keskeiskentässä operaattorilla \hat{V}_{MF} voidaan määritellä keskeiskentän Hamiltonin operaattori \hat{H}_{MF} siten, että

$$\hat{H}_{\text{MF}} = \hat{T} + \hat{V}_{\text{MF}} \quad (1)$$

ja jäännösvuorovaikutus

$$\hat{V}_{\text{RES}} = \hat{V} - \hat{V}_{\text{MF}}. \quad (2)$$

Tällöin saadaan kineettistä energiaa kuvaavasta osasta \hat{T} ja potentiaalienergiaa kuvaavasta osasta \hat{V} koostuva Hamiltonin operaattori \hat{H} muotoon

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \hat{T} + \hat{V}_{\text{MF}} + \hat{V} - \hat{V}_{\text{MF}} = \hat{H}_{\text{MF}} + \hat{V}_{\text{RES}}. \quad (3)$$

Mikäli keskeiskenttä saadaan valittua siten, että jäännösvuorovaikutus \hat{V}_{RES} on pieni, voidaan ongelmaan pureutua häiriöteorian avulla.

Mahdollisimman hyvän keskeispotentiaalin määrittäminen johtaa variaatio-ongelmaan, jossa tehtävänä on löytää yksihiukkastilojen joukko $\{\phi_\alpha(\bar{x})\}$, jolla \hat{V}_{RES} on mahdollisimman pieni. Tällainen variaatio-ongelma voidaan ratkaista Hartree-Fock-menetelmällä [5], jonka pohjana on Hartree-Fock-yhtälö

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2M_N} \nabla^2 + \hat{V}_{\text{HF}}(\{\phi_i(\bar{x})\}) \right) \phi_\alpha(\bar{x}) = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha(\bar{x}), \quad (4)$$

jossa $i = 1, 2, \dots, A$, $\alpha = 1, 2, \dots$ ja M_N on nukleonin massa (joka tässä oletetaan protoneille ja neutroneille samaksi). Yhtälössä esiintyvän Hartree-Fock-potentiaalin $\hat{V}_{\text{HF}}(\{\phi_i(\bar{x})\})$ parametreina ovat kaikki yksihiukkasaaltofunktiot, mikä tekee yhtälöstä Schrödingerin yhtälöstä hyvin poikkeavan ratkaista. Hartree-Fock-yhtälö onkin ratkaistava iteratiivisesti: Aloitetaan arvauksesta yksihiukkastilojen joukoksi, tuotetaan niiden avulla Hartree-Fock-potentiaali, josta edelleen saadaan uusi yksihiukkastilojen joukko. Potentiaalin tuottamista ja yksihiukkastilojen ratkaisemista jatketaan, kunnes peräkkäisten iteraatioiden tuottamat aaltofunktiot ja/tai yksihiukkasenergiat eivät enää poikkea merkittävästi toisistaan.

Usein Hartree-Fock-keskeispotentiaalin sijaan käytetään kuitenkin jotain muuta keskeispotentiaalia, kuten Woods-Saxon-keskeispotentiaalia [6]

$$v_{\text{ws}}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}, \quad (5)$$

jossa parametreina voidaan käyttää esimerkiksi arvoja

$$V_0 = 51 \pm 33 \times \frac{N - Z}{A} \text{ MeV}, \quad (6)$$

jossa merkeistä valitaan + protonien ja – neutronien tapauksessa, ytimen säde $R \approx 1,27 \times A^{1/3}$ fm ja ytimen ”pinnan pehmeyttä” kuvaava parametri $a \approx 0,67$ fm. Lisäksi on otettava huomioon voimakas spin-rata-vuorovaikutus, joka johtaa (n,l) -tilojen voimakkaaseen silpoutumiseen ja kuorirakenteen huomattaviin eroihin verrattuna atomin elektroniverhon kuorirakenteeseen.

2.2 Nukleonien pariutuminen ja BCS

Nukleoneilla on voimakas taipumus muodostaa pareja, joissa kaksi nukleonia on asettunut samalle tilalle spinin vastakkaisiin suuntiin [7]. Tästä ilmiöstä kenties näkyvin seuraus on *kaikkien* parillis-parillisten ytimien perustilan spin-pariteetti 0^+ . Eräs tapa ottaa pariutuminen huomioon kuorimallissa on BCS-malli, jonka Bardeen, Cooper ja Schrieffer kehittivät alun perin selittämään metallien suprajohtavuutta [8], mutta jota hyvin pian alettiin soveltaa myös ytimien kuvaamiseen.

BCS-tila $|\text{BCS}\rangle$ [5] voidaan määrittellä

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{\alpha>0} (u_\alpha - v_\alpha c_\alpha^\dagger \tilde{c}_\alpha^\dagger) |\text{CORE}\rangle, \quad (7)$$

jossa on käytetty Barangerin merkintätapaa [9] $\alpha = (a, m_\alpha)$ ja $a = (n_a, l_a, j_a)$. $|\text{CORE}\rangle$ sisältää valitun valenssiavaruuden alapuolelle jäävät tilat. Operaattorit c_α^\dagger ja \tilde{c}_α^\dagger ovat hiukkasten luomisoperaattoreita: Näistä c_α^\dagger luo nukleonin tilalle α ja $\tilde{c}_\alpha^\dagger = (-1)^{j_a+m_\alpha} c_{-\alpha}^\dagger$ tilalle $-\alpha = (a, -m_\alpha)$.

BCS-tila voidaan lyhyellä laskulla manipuloida myös muotoon

$$|\text{BCS}\rangle = \left(\prod_{\alpha>0} u_\alpha \right) \sum_{N \text{ parillinen}} \frac{1}{(N/2)!} \left(- \sum_{\alpha>0} \frac{v_\alpha}{u_\alpha} c_\alpha^\dagger \tilde{c}_\alpha^\dagger \right)^{N/2} |\text{CORE}\rangle, \quad (8)$$

josta nähdään, että BCS-tila koostuu komponenteista, joilla on toisistaan poikkeava (mutta parillinen) hiukkasluku. Nukleonien lukumäärä ei ole siis hyvä kvanttiluku BCS-tilalle. BCS-laskuissa vaaditaan siksi, että *keskimääräinen* hiukkaslukumäärä (tai hiukkaslukumäärän odotusarvo) vastaa aktiivisten nukleonien¹ lukumäärää.

BCS-tila toimii tyhjiönä ns. BCS-kvasihiukkasille, joiden luomis- ja tuhoamisoperaattorit saadaan Bogolyubov-Valatin -muunnoksesta [9]

$$a_\alpha^\dagger = u_a c_\alpha^\dagger + v_a \tilde{c}_\alpha \quad \text{ja} \quad (9)$$

$$\tilde{a}_\alpha = u_a \tilde{c}_\alpha - v_a \tilde{c}_\alpha^\dagger. \quad (10)$$

Vaativalla amplitudeille normitusehto

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (11)$$

saadaan kvasihiukkasten luomis- ja tuhoamisoperaattorit toteuttamaan antikommutaatiorelaatiot

$$\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{ja} \quad \{a_\alpha, a_\beta\} = \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0. \quad (12)$$

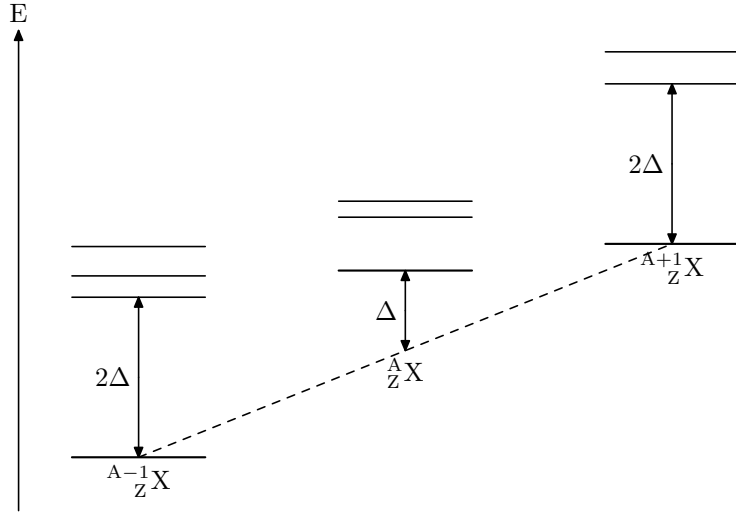
Koska BCS-kvasihiukkaset noudattavat fermionien kommutaatioääntöjä, voidaan niitä pitää (efektiivisinä) fermioneina.

Eräs seuraus nukleonien pariutumisesta on pariaukon (kuva 1) esiintyminen [5]: Parittoman ytimen sidosenergia on pienempi kuin kahden naapurina olevan parillis-parillisen ytimen sidosenergian keskiarvo. Tämä selittyy, kun nukleonin ajatellaan luovuttavan pariutuessaan energian Δ : Parillis-parillisten ydinten perustiloissa kaikki nukleonit ovat pariutuneet, mutta parittoman ytimen perustilassa yksi nukleoneista on jäänyt paritta, ja siten perustila on pariaukon Δ verran korkeammalla kuin parillis-parillisten naapureiden massojen keskiarvo. Toinen hyvin näkyvä seuraus on parillis-parillisten ydinten alimpien viritysten energia, joka yleensä on luokkaa 2Δ vastaten yhtä ”rikkoutunutta paria”².

BCS-laskuissa alimman kvasihiukkasenergian tulee siten vastata pariaukkoa, ja ko. kvasihiukkasen kokonaispyörimismäärän j ja pariteetin $\pi = (-1)^l$ tarkasteltavan parittoman ytimen perustilan pyörimismäärää ja pariteettia. Vas-

¹Aktiiviset nukleonit ovat valenssiavaruudessa olevat nukleonit tarkasteltavassa ytimessä.

²Joskus kollektiiviset rotaatiot tai vibraatiot voivat aiheuttaa parillis-parilliseen ytimeen energiatiloja, jotka ovat energialtaan alle 2Δ .



Kuva 1: Kaaviokuva pariaukosta. ${}^{A-1}_{Z}X$ ja ${}^{A+1}_{Z}X$ ovat parillis-parillisia ytimiä. Pariaukon Δ suuruutta on kuvassa liioiteltu huomattavasti; todellisuudessa massaluvultaan yhdellä poikkeavien nukleonien massaero on noin tuhatkertainen pariaukkoon nähden.

taavuutta voidaan hienosäätää parivuorovaikutuksen voimakkuutta muuttamalla: Käytännössä siis kertomalla BCS-laskuissa esiintyvät parivuorovaikutusmatriisielementit vakiolla $g_{\text{pair}}^{(p)}$ protoneille ja $g_{\text{pair}}^{(n)}$ neutroneille. Pariaukot, joihin nämä säädetään, voidaan laskea kokeellisesta datasta esimerkiksi interpolaatiokaavoilla

$$\Delta_p({}^A_Z X) = \frac{1}{4}(-1)^{Z+1} [S_p({}^{A+1}_{Z+1} X_x) - 2S_p({}^A_Z X) + S_p({}^{A-1}_{Z-1} X_y)] \quad (13)$$

ja

$$\Delta_n({}^A_Z X) = \frac{1}{4}(-1)^{A-Z+1} [S_n({}^{A+1}_Z X) - 2S_n({}^A_Z X) + S_n({}^{A-1}_Z X)], \quad (14)$$

joissa $S_p({}^A_Z X)$ ja $S_n({}^A_Z X)$ ovat ytimen ${}^A_Z X$ protonien ja neutronien separaatioenergiat.

2.3 Kahden ja kolmen kvasihiukkasen viritykset

QRPA (quasiparticle random phase approximation) tarjoaa tavan käsitellä kahden kvasihiukkasen virityksiä; Sen avulla voidaan siten kuvata parillis-

parillisia ytimiä. QRPA:n perusvirityksenä toimii QRPA-fononi, jonka luomisoperaattori on

$$Q_\omega^\dagger = \sum_{a \leq b} \left[X_{ab}^\omega A_{ab}^\dagger(JM) - Y_{ab}^\omega \tilde{A}_{ab}(JM) \right], \quad (15)$$

missä operaattori

$$A_{ab}^\dagger(JM) = \sigma_{ab}^{-1} \left[a_a^\dagger a_b^\dagger \right]_{JM} \quad (16)$$

ja

$$\tilde{A}_{ab}(JM) = -\sigma_{ab}^{-1} [\tilde{a}_a \tilde{a}_b]_{JM}, \quad (17)$$

joissa on käytetty merkintää $\sigma_{ab} = \sqrt{1 + \delta_{ab}}$. Indeksillä ω sisältää tässä pyörimismäärän J_ω ja pariteetin π_ω sekä kvanttiluvun k_ω , jolla erotetaan toisistaan QRPA-yhtälön eri ratkaisut, joilla on sama pyörimismäärä ja pariteetti.

QRPA-yhtälöt voidaan johtaa liikeyhtälömenetelmällä [10], jolloin päädytään matriisiyhtälöihin

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^* & -\mathbf{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\omega \\ \mathbf{Y}^\omega \end{pmatrix} = E_\omega \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\omega \\ \mathbf{Y}^\omega \end{pmatrix}, \quad (18)$$

jossa alimatriisien \mathbf{A} ja \mathbf{B} elementit ovat

$$A_{ab,cd} = \langle \text{BCS} | [A_{ab}, \hat{H}, A_{cd}^\dagger] | \text{BCS} \rangle \quad (19)$$

ja

$$B_{ab,cd} = -\langle \text{BCS} | [A_{ab}, \hat{H}, \tilde{A}_{cd}] | \text{BCS} \rangle. \quad (20)$$

Edellisissä yhtälöissä on käytetty kaksoiskommutaattorimerkintää

$$[A, B, C] = \frac{1}{2} ([A, [B, C]] + [[A, B], C]). \quad (21)$$

QRPA-yhtälöiden johtamisessa on käytetty nk. kvasibosoniapproksimaatiota: Tällöin QRPA-tyhjiö on korvattu BCS-tyhjiöllä ja QRPA-fononit toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$[Q_\omega, Q_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega\omega'} \text{ ja } [Q_\omega, Q_{\omega'}] = [Q_\omega^\dagger, Q_{\omega'}^\dagger] = 0, \quad (22)$$

eli QRPA-fononeita voidaan pitää bosoneina.

QRPA-matriisiyhtälön diagonalisointi tuottaa jokaista positiivista ominaisenergiaa E_ω kohden myös negatiivisen energian ratkaisun $-E_\omega$. Negatiivisen

energian ratkaisut ovat epäfysikaalisia, mikä nähdään esimerkiksi siitä, että ko. energioita vastaavien tilojen normit ovat imaginaarisia, joten ne jätetään huomiotta.

QRPA-spektriä voidaan säätää skaalaamalla QRPA-matriisielementeissä esiintyviä vuorovaikutusmatriisielementtejä vakioilla g_{pp} ja g_{ph} [11]: Näistä g_{pp} :tä käytetään hiukkas-hiukkas-vuorovaikutusmatriisielementtien ja vastaavasti g_{ph} :ta hiukkas-aukko-vuorovaikutusmatriisielementtien kertoimena.

MQPM (microscopic quasiparticle-phonon model) on malli, jossa käytetään BCS-kvasihiukkasia ja QRPA-fononeita matalaenergisten kolmen kvasihiukkasen viritysten kuvaamiseen [12]. MQPM-virityksen luomisoperaattori on muotoa

$$\Gamma_i^\dagger(jm) = \sum_n C_n^i a_{njm}^\dagger + \sum_{b,\omega} D_{b\omega}^i \left[a_b^\dagger Q_\omega^\dagger \right]_{jm}, \quad (23)$$

jossa BCS-kvasihiukkasen luomisoperaattori a_b^\dagger ja QRPA-fononin luomisoperaattori Q_ω^\dagger ovat kuten edellä. Liikkeyhtälömenetelmä [10] sopii myös MQPM-yhtälöiden johtamiseen: Yhtälöksi saadaan matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{D}^i \end{pmatrix} = \Omega_i \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{D}^i \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Oikealla puolella esiintyvä alimatriisi \mathbf{n} koostuu kolmikvasihiukkastilojen välisistä sisätuloista ja poikkeaa yleensä yksikkömatriisista; toisin sanoen kolmikvasihiukkastilat eivät ole keskenään ortogonaalisia. Lisäksi ne muodostavat ylitäydellisen kannan. Yhtälön (24) ratkaisemiseksi on muodostettava ortonormaali kanta, mitä on kuvattu tarkemmin lähteessä [1].

2.4 Sallituista ja kielletyistä beetahajoamisista

Beetahajoamiset luokitellaan sen mukaan, mikä on emittoituvan hiukkasparin ratapyörimismäärä ytimen suhteen: Jos ko. ratapyörimismäärä on $l > 0$, puhutaan l kertaa kielletystä siirtymästä, ja jos $l = 0$, puhutaan sallitusta siirtymästä [13]. Siirtymän tyyppi voidaan helposti tunnistaa vertaamalla ytimen pyörimismäärän ja pariteetin muutosta hajoamisessa valintasääntöihin K kertaa kielletylle siirtymälle:

$$|J_i - J_f| = \begin{cases} K, K + 1, & \text{kun } K \geq 2 \\ 0, 1, 2, & \text{kun } K = 1 \end{cases} \quad (25)$$

$ J_f - J_i $	$\pi_f = \pi_i$	$\pi_f = -\pi_i$
0	sallittu	1. kielletty
1		
2	2. kielletty	
3		3. kielletty
4	4. kielletty	
5		5. kielletty
6	6. kielletty	
...

Taulukko 1: Beetahajoamisten luokittelu pyörimismäärän ja pariteetin muutoksen mukaan: Pyörimismäärän J ja pariteetin π alaindeksi i viittaa emoytimeen ja f tytärttimeen.

ja

$$\pi_i \pi_f = (-1)^K, \quad (26)$$

missä $J_i^{\pi_i}$ on emoytimen ja $J_f^{\pi_f}$ tytärttimen spin-pariteetti. Luokittelua on havainnollistettu taulukossa 1.

Tarkasteltaessa β^- -hajoamista ytimen todennäköisyys emittoida energialtaan välillä $[E, E + dE]$ oleva elektroni on

$$P(E)dE = \frac{G_F^2/(\hbar c)^6}{2\pi^3\hbar} C(E) p_e c E (E_0 - E)^2 F_0(Z, E) dE, \quad (27)$$

jossa $G_F/(\hbar c)^3$ on Fermi kytkeväkio, p_e on elektronin liikemäärä, E_0 päätepiste-energia ja $F_0(Z, E)$ on Fermi-funktio, joka ottaa huomioon ytimen varauksen vaikutuksen emittoituvan elektronin aaltofunktioon. Tekijä $C(E)$ on nk. muototekijä, joka sisältää siirtymätiheyksistä saatavat matriisielementit. Tekijät $p_e c E (E_0 - E)^2$ tulevat emittoituvien leptonien kinematiikkaa kuvaavasta faasiavaruudesta. Integroimalla tämä yli mahdollisten emittoituvan elektronin energioiden, ts. yli välin $[m_e c^2, E_0]$, saadaan siirtymätiheys

$$\lambda = \frac{G_F^2/(\hbar c)^6}{2\pi^3\hbar} \int_{m_e c^2}^{E_0} C(E) p_e c E (E_0 - E)^2 F_0(Z, E) dE. \quad (28)$$

Puoliintumisaika on siten

$$t_{1/2} = \frac{2\pi^3\hbar \ln 2}{(m_e c^2)^5 G_F^2/(\hbar c)^6 \tilde{C}}, \quad (29)$$

jossa \tilde{C} on yksiköttömäksi skaalattu integroitu muototekijä

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{E_0} C(E) p_e c E (E_0 - E)^2 F_0(Z, E) dE \\ &= \int_1^{w_0} C(w_e) p w_e (w_0 - w_e)^2 F_0(Z, w_e) dw_e,\end{aligned}\quad (30)$$

jossa $w_0 = E_0/(m_e c^2)$ ja $p = \sqrt{w_e^2 - 1}$. Kertomalla yhtälö (29) yksiköttömällä integroidulla Fermi-funktiolla

$$f = \int_1^{w_0} p w_e (w_0 - w_e)^2 F_0(Z, w_e) dw_e \quad (31)$$

saadaan ft -arvo

$$ft = \frac{\kappa}{\tilde{C}/f}, \quad (32)$$

missä vakiokertoimet on koottu vakioksi [14]

$$\kappa = \frac{2\pi^3 \hbar \ln 2}{(m_e c^2)^5 (G_F^2 / (\hbar c)^3)^2} \approx 6147 \text{ s}. \quad (33)$$

Yleisesti käytetään ft -arvon kymmenkantaista logaritmia eli $\log ft$ -arvoa.

Muototekijän $C(w_e)$ johtaminen jää tämän työn ulkopuolelle; tarvittavat kaavat ovat peräisin työn ohjaajalta, ja ne ovat johdettavissa lähteen [15] avulla. Seuraavassa tyydytään vain esittelemään $C(w_e)$:n laskemiseen käytetyt kaavat.

Yleisesti K kertaa kielletylle siirtymälle $C(w_e)$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}C(w_e) &= (6,706 \times 10^{-6})^K \\ &\times \left\{ \sum_{k_e+k_\nu=K+1} \lambda_{k_e} (w_e^2 - 1)^{k_e-1} (w_0 - w_e)^{2(k_\nu-1)} g_V^2 D_{K k_e k_\nu}^2 \tilde{\mathcal{A}}_K \right. \\ &\left. + \sum_{k_e+k_\nu=K+2} \lambda_{k_e} (w_e^2 - 1)^{k_e-1} (w_0 - w_e)^{2(k_\nu-1)} g_V^2 \tilde{D}_{K k_e k_\nu}^2 \mathcal{B}_K \right\},\end{aligned}\quad (34)$$

jossa

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_K &= \frac{2K+1}{K} \tilde{M}_1^2 + \frac{1}{(2k_e+1)^2} \left[(\tilde{\alpha}Z)^2 \left(M_-^{(k_e)} \right)^2 + 2(\tilde{\alpha}Z)w_e M_- M_-^{(k_e)} \right. \\
&\quad \left. + (1+w_e^2)M_-^2 \right] - \frac{2\gamma_{k_e}}{k_e w_e (2k_e+1)^2} \left((\tilde{\alpha}Z)M_- M_-^{(k_e)} + w_e M_-^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{(2k_\nu+1)^2} (w_0 - w_e)^2 M_+^2 - \frac{2}{2k_e+1} \sqrt{\frac{2K+1}{K}} \left((\tilde{\alpha}Z)\tilde{M}_1 M_-^{(k_e)} \right. \\
&\quad \left. + w_e \tilde{M}_1 M_- \right) + \frac{2}{2k_e+1} \sqrt{\frac{2K+1}{K}} \frac{\gamma_{k_e}}{k_e w_e} \tilde{M}_1 M_- - \frac{2}{2k_\nu+1} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{2K+1}{K}} (w_0 - w_e) \tilde{M}_1 M_+ + \frac{2}{(2k_e+1)(2k_\nu+1)} (w_0 - w_e) \\
&\quad \times \left((\tilde{\alpha}Z)M_-^{(k_e)} + w_e M_- \right) M_+ - \frac{2}{(2k_e+1)(2k_\nu+1)} \frac{\gamma_{k_e}}{k_e w_e} \\
&\quad \times (w_0 - w_e) M_- M_+
\end{aligned} \tag{35}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_K &= \frac{K+1}{(2k_e-1)(2k_\nu-1)} \left(M_2^2 + 2\frac{g_A}{g_V} \frac{k_e - k_\nu}{\sqrt{K(K+1)}} M_2 M_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k_e - k_\nu)^2}{K(K+1)} \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 M_3^2 \right) + \left(\frac{g_A}{g_V} \right)^2 M_4^2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Kaavassa (35) esiintyvät tekijät

$$D_{Kk_e k_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2K)!!}{(2K+1)!!}} \frac{1}{\sqrt{(2k_e-1)!(2k_\nu-1)!}}, \tag{37}$$

$$\tilde{D}_{Kk_e k_\nu} = \sqrt{\frac{(2K)!!}{(2K+1)!!}} \frac{1}{\sqrt{(2k_e-1)!(2k_\nu-1)!}} \tag{38}$$

ja

$$\lambda_{k_e} = \frac{F_{k_e-1}(Z, w_e)}{F_0(Z, w_e)}, \tag{39}$$

jossa $F_{k_e-1}(Z, w_e)$ on yleistetty Fermi-funktio

$$\begin{aligned}
F_{k_e-1}(Z, w_e) &= 4^{k_e-1} (2k_e) (k_e + \gamma_{k_e}) ((2k_e-1)!!)^2 e^{\pi y} \left(\frac{2p_e R}{\hbar} \right)^{2(\gamma_{k_e} - k_e)} \\
&\quad \times \left(\frac{|\Gamma(\gamma_{k_e} + iy)|}{\Gamma(1 + 2\gamma_{k_e})} \right)^2,
\end{aligned} \tag{40}$$

jossa puolestaan $y = (\alpha Z w_e)/p_e$ ja R on ytimen säde.

Kerran kielletyn siirtymän tapauksessa, jossa $\Delta J = 0$, kaavaan (35) täytyy lisätä vielä termit

$$C^{(1)}(w_e) = g_A^2 \left(M_5 + \frac{W_0}{3} M_6 + \frac{\tilde{\alpha} Z}{3} M_6^{(1)} \right)^2 + g_A^2 \left(\frac{M_6}{3} \right)^2 - g_A^2 \frac{2\gamma_1}{w_e} \left(M_5 + \frac{W_0}{3} M_6 + \frac{\tilde{\alpha} Z}{3} M_6^{(1)} \right) \frac{M_6}{3}. \quad (41)$$

Kaavoissa (35) ja (41) esiintyvät dimensiottomat tekijät γ_{ke} ja $\tilde{\alpha}$ määritellään

$$\gamma_{ke} = \sqrt{k_e^2 - (\alpha Z)^2} \quad (42)$$

ja

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha \hbar}{R m_e c}, \quad (43)$$

jossa R on jälleen ytimen säde ja m_e on elektronin massa.

Kaavoissa (35), (36) ja (41) tarvittavat matriisielementit saadaan yksihiukkassiiirtymätiheyksistä kaavojen

$$M_1 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{K, K-1}^{(\text{VR})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_K \right\| \xi_i J_i \right), \quad (44)$$

$$M_2 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{0K}^{(\text{V})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_K \right\| \xi_i J_i \right), \quad (45)$$

$$M_3 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{KK}^{(\text{A})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_K \right\| \xi_i J_i \right), \quad (46)$$

$$M_4 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{K+1, K}^{(\text{A})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_{K+1} \right\| \xi_i J_i \right), \quad (47)$$

$$M_5 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{00}^{(\text{AR})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_0 \right\| \xi_i J_i \right) \quad (48)$$

ja

$$M_6 = \hat{J}_i^{-1} \sum_{pn} m_{01}^{(\text{A})}(pn) \left(\xi_f J_f \left\| [c_p^\dagger \tilde{c}_n]_0 \right\| \xi_i J_i \right) \quad (49)$$

avulla. Näistä nähdään suoraan kolmiosäännön avulla, että mikäli $J_f \neq J_i$, matriisielementit M_5 ja M_6 ovat nollia, ja toisaalta mikäli $|J_f - J_i| = K + 1$ eli kyseessä on uniikki siirtymä, vain matriisielementti M_4 voi poiketa nollost.

Kaavoissa (44)-(49) esiintyvät yksihiukkasmatriisielementit saadaan puolestaan kaavoista

$$\begin{aligned}
m_{KL}^{(\text{VR})}(pn) &= i^{l_p+l_n+L+1} \frac{1 + (-1)^{l_p+l_n+L+1} \hat{L} \hat{j}_p \hat{j}_n}{2 \hat{K}} (j_p \frac{1}{2} j_n - \frac{1}{2} | K 0) \\
&\times \left[(\mathcal{A}_{KL}(pn) + \mathcal{B}_{KL}(pn)) (-1)^{K+l_n+j_n+1/2} \langle r^L \rangle_{p\tilde{n}} \Delta(l_p \tilde{l}_n L) \right. \\
&\left. + (\mathcal{A}_{KL}(pn) - \mathcal{B}_{KL}(pn)) (-1)^{K+l_p+j_p+1/2} \langle r^L \rangle_{\tilde{p}n} \Delta(\tilde{l}_p l_n L) \right], \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{0L}^{(\text{V})}(pn) &= i^{l_p+l_n+L} \frac{1 + (-1)^{l_p+l_n+L}}{2} (-1)^{j_p+j_n+1} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_n}{\hat{L}} (j_p \frac{1}{2} j_n - \frac{1}{2} | L 0) \\
&\times \left[(-1)^{l_n+j_n-1/2} \langle r^L \rangle_{pn} \Delta(l_p l_n L) + (-1)^{l_p+j_p-1/2} \langle r^L \rangle_{\tilde{p}\tilde{n}} \Delta(\tilde{l}_p \tilde{l}_n L) \right], \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{KL}^{(\text{A})}(pn) &= i^{l_p+l_n+L} (-1)^{K+1} \frac{\hat{L} \hat{j}_p \hat{j}_n}{\hat{K}} \cdot \frac{1 + (-1)^{l_p+l_n+L}}{2} (j_p \frac{1}{2} j_n - \frac{1}{2} | K 0) \\
&\times \left[(\mathcal{A}_{KL}(pn) + \mathcal{B}_{KL}(pn)) \langle r^L \rangle_{pn} \Delta(l_p l_n L) \right. \\
&\left. + (-1)^{l_p+l_n+j_p+j_n} (\mathcal{A}_{KL}(pn) - \mathcal{B}_{KL}(pn)) \langle r^L \rangle_{\tilde{p}\tilde{n}} \Delta(\tilde{l}_p \tilde{l}_n L) \right] \quad (52)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
m_{0L}^{(\text{AR})}(pn) &= i^{l_p+l_n+L+1} (-1)^{j_p+j_n} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_n}{\hat{L}} \frac{1 + (-1)^{l_p+l_n+L+1}}{2} (j_p \frac{1}{2} j_n - \frac{1}{2} | L 0) \\
&\times \left[\langle r^L \rangle_{p\tilde{n}} \Delta(l_p \tilde{l}_n L) + (-1)^{j_p+j_n+L+1} \langle r^L \rangle_{\tilde{p}n} \Delta(\tilde{l}_p l_n L) \right], \quad (53)
\end{aligned}$$

joissa edelleen

$$\mathcal{A}_{KL}(pn) = \frac{\hat{j}_p^2 + (-1)^{j_p+j_n+K} \hat{j}_n^2}{\sqrt{2K(K+1)(2L+1)}} (-1)^{K+1} (K \ 1 \ 1 \ -1 | L 0) (1 - \delta_{K0}), \quad (54)$$

$$\mathcal{B}_{KL}(pn) = (-1)^{l_p+j_p-1/2+K} \hat{L}^{-1} (K \ 0 \ 1 \ 0 | L 0), \quad (55)$$

$$\tilde{l} = \begin{cases} l+1, & \text{kun } j = l + \frac{1}{2} \\ l-1, & \text{kun } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (56)$$

ja radiaalinen integraali

$$\langle r^L \rangle_{pn} = \int_0^\infty g_{n_p l_p}(r) r^L g_{n_n l_n} r^2 dr, \quad (57)$$

jossa $g_{nl}(r)$ on radiaalinen harmonisen oskillaattorin aaltofunktio. Kvanttiluvusta k_e riippuvat matriisielementit $M_2^{(k_e)}$ ja $M_3^{(k_e)}$ saadaan edellisistä kaavoista lisäämällä radiaalisen integraalin (57) integrandiin Coulombin funktio

$$I(k_e, 1, 1, 1; r) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{2k_e+1}{2(2k_e+3)} \left(\frac{r}{R}\right)^2, & \text{kun } 0 \leq r \leq R, \\ \frac{2k_e+1}{2k_e} \frac{R}{r} - \frac{3}{2k_e(2k_e+3)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k_e+1}, & \text{kun } r > R. \end{cases} \quad (58)$$

Lisäksi kaavassa (35) tarvitaan apusuureita

$$M_{\pm} = M_2 \pm \sqrt{\frac{K+1}{K} \frac{g_A}{g_V}} M_3, \quad (59)$$

$$M_-^{(k_e)} = M_2^{(k_e)} - \sqrt{\frac{K+1}{K} \frac{g_A}{g_V}} M_3^{(k_e)} \quad (60)$$

ja

$$\tilde{M}_1 = 386,2 \cdot M_1. \quad (61)$$

Yksihiukkassiiirtymätiheydet β^- -siiirtymille MQPM-teoriaa käytettäessä saadaan julkaisusta [12]. Esimerkiksi tarvittavat yksihiukkassiiirtymätiheydet yksikvasihiukkastilojen välillä ovat

$$(p || [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_{n'}]_L || n) = \hat{L} u_p u_n \delta_{pp'} \delta_{nn'} \quad (62)$$

ja

$$(n || [c_{p'}^\dagger, \tilde{c}_{n'}]_L || p) = \hat{L} v_n v_p \delta_{nn'} \delta_{pp'} (-1)^{j_{p'}+j_{n'}-L}. \quad (63)$$

3 Laskennalliset menetelmät

3.1 Kuorimallilaskut

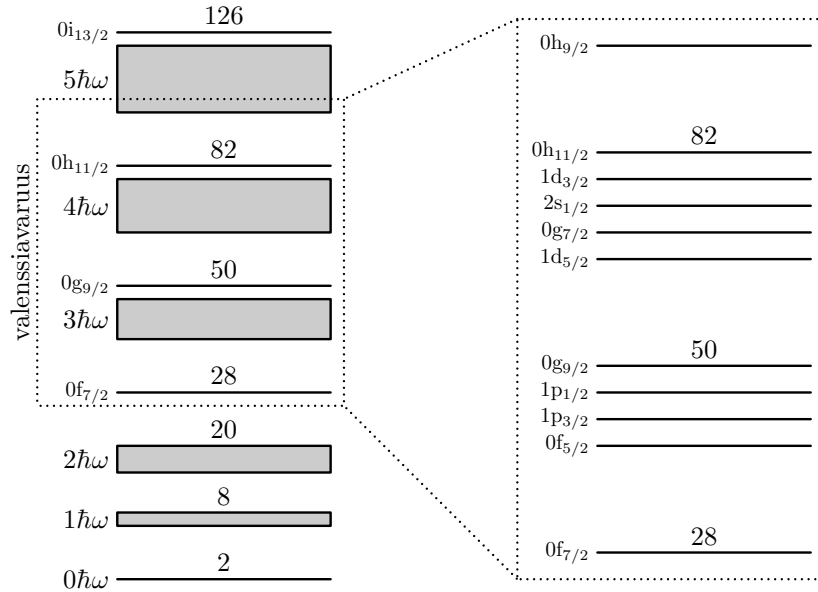
Tarkasteltaviin beetahajoamisiin luonnolliset valinnat referenssiytimiksi olivat $^{112}_{48}\text{Cd}$ ja $^{116}_{50}\text{Sn}$. Käytetty valenssiavaruus koostui sekä protoneille että neutroneille harmonisen oskillaattorin $3\hbar\omega$ - ja $4\hbar\omega$ -pääkuoresta sekä 0h-tiloista $5\hbar\omega$ -pääkuorelta (kuva 2). Yksihiukkaskanta muodostettiin lähtien Woods-Saxon-potentiaalista parametreina kirjan [15] arvot.

Referenssiydinten BCS-kvasihiukkasspektrit säädettiin vastaamaan tarkasteltaviin hajoamisiin osallistuvien ydinten matalaenergiaskpektien tiloja, joita todennäköisimmin saattoi pitää suurimmaksi osaksi yksihiukkastiloina. Säättäminen tapahtui manipuloidulla yritys-erehdys-menetelmällä Woods-Saxon-potentiaalista saatuja yksihiukkaskasenergioita. Tässä vaiheessa katsottiin kuitenkin, ettei spin-rata-parien³ yksihiukkaskasenergioiden järjestys pääsyt muuttumaan. Lisäksi kytkentävakiota $g_{\text{pair}}^{(n)}$ ja $g_{\text{pair}}^{(p)}$ säädettiin siten, että alimmat kvasihiukkaskasenergiat vastasivat kolmipistekaavoilla 13 ja 14 saatuja pariaukkoja.

^{116}Sn :n protonikvasihiukkasspekttri tuotti ongelmia johtuen siitä, että tinaydinten protonien lukumäärä 50 sattuu olemaan maaginen luku: Siksi kvasihiukkasspektissä nähtiin jyrkkä fermipinta, jonka yläpuolelle uusien kvasihiukkaskasten oli paljon helpompaa asettua kuin alapuolelle. Tilanne kuvasi hyvin ^{117}Sn :n matalaenergiaskpekttriä, mutta halutun ^{115}Sn :n spektrin toistamiseksi pelkkä yksihiukkaskasenergioiden säätö ei riittänyt. Näin ollen jouduttiin turvautumaan pieneen ”huijaukseen”: BCS-laskussa otettiin pois kaksi aktiivista protonia, jolloin matalaenergiaskpekttrin toistaminen alkoi onnistua.

Seuraavaksi säädettiin referenssiydinten QRPA-spektrit vastaamaan mahdollisimman hyvin referenssiydinten kokeellisia spektrejä. Kunkin spin-pariteetin J^π alin energiatila pyrittiin saamaan mahdollisimman lähelle kokeellisen spektrin alinta saman spin-pariteetin tilaa muuttamalla vastaavaa g_{ph} -parametria, kuitenkin siten, että parametrin arvo pyrittiin pitämään kohtalaisen järkevänä (ts. mielellään välillä 0,7-1,3, joskaan näitä ei pidetty ehdottomina rajoina). ^{116}Sn :n tapauksessa parametrin annettiin vaeltaa kauem-

³Spin-rata-pari on tilapari $(n, l, j = l \pm \frac{1}{2})$ (esimerkiksi $1d_{3/2}$ ja $1d_{5/2}$). Spin-ratavuorovaikutus silpoo nämä tilat aina siten, että suuremman kokonaispyörimismäärän j tila on energialtaan matalammalla, ts. energieettisesti edullisempi [5].



Kuva 2: Tässä työssä käytetty valenssiavaruus koostui sekä protoneilla että neutroneilla harmonisen oskillaattorin $3\hbar\omega$ – $4\hbar\omega$ -pääkuorista ja 0h-tiloista.

maksi ykkösestä, koska protonikvasihiukkasspektrin säätämisessä oli jo turvauttu hieman kyseenalaiseen manipulointiin. ^{112}Cd :n tapauksessa huomioitiin myös, ettei QRPA-malli kuvaa kaksifononivirityksiä, joten tunnetut $[2_1^+ \otimes 2_1^+]_{0+,2+,4+}$ -tilat [16] jätettiin kokeellisesta spektristä huomiotta.

Kun QRPA-spektrit oli saatu tyydyttäväksi, päästiin säätämään tarkasteltavien hajoamisten emo- ja tytärydinten MQPM-spektrejä. Tässä vaiheessa käytettiin QRPA-fononeina aluksi kahta fononia kustakin multipolista 2^+ , 3^- , 4^+ ja 6^+ ja fononien määrää lisättiin, kunnes lisäämisen ei enää havaittu vaikuttavan spektriin (ts. spektrin havaittiin konvergoituvan). Tässä vaiheessa ei käytössä ollut enää mitään hienosäätöparametreja, joilla laskennallisen spektrin olisi saanut lähemmäksi kokeellista, vaan mikäli tulos ei ollut tyydyttävä, täytyi palata säätämään yksihiukkasenergioita paremman BCS-kvasihiukkaspektrin aikaansaamiseksi ja edettävä MQPM-spektrin laskemiseen kaikkien em. välivaiheiden kautta.

Kaikki tähän asti käytetyt ohjelmat olivat työn ohjaajan valmiina tarjoamia.

3.2 Puoliintumisajan ja $\log ft$ -arvon määrittäminen

Yksihiukkassiiirtymätiheyksien laskemiseksi täytyi muokata Jussi Toivasen kirjoittamaa ohjelmaa sallittujen beetahajoamisten laskemiseen. Käytännössä tämä tarkoitti yksihiukkassiiirtymätiheyksiä laskevien ohjelman osien tunnistamista FORTRAN-lähdekoodista ja muiden osien korvaamista siirtymätiheydet tiedostoon sopivassa muodossa tulostavalla osalla. Tiedostoon tulostettiin vain siirtymätiheydet, joiden itseisarvo oli yli ajotiedostossa annetun minimin. Ko. minimiä kokeiltiin myöhemmin muuttaa, jotta saatiin varmuus siitä, ettei suurempi määrä siirtymätiheyksiä vaikuttanut enää tuloksiin.

Siirtymätiheyksistä matriisielementit laskeva ohjelma `matel.for` oli jälleen työn ohjaajan valmiiksi tarjoama. Sen sijaan matriisielementeistä $\log ft$ -arvojen ja puoliintumisaikojen laskemiseen ei valmista ohjelmaa ollut, vaan tutkielman tekijä pääsi kirjoittamaan tarkoitukseen sopivan ohjelman `logft.f90` aivan alusta. Tämän ohjelman listaus on esitetty liitteessä B. Ohjelma käyttää numeeriseen integrointiin Gaussin ja Legendren kvadratuuria [17], jossa tarvittavat abskissat ja painokertoimet saatiin näppärästi NAG-aliohjelmakirjaston ko. tarkoitukseen tehdyllä funktiolla käyttäen 2-6 pistettä. Ohjelman antamien tulosten varmistamiseksi laskettiin kynän, paperin ja laskimen avulla $\log ft$ -arvo ja puoliintumisaika ^{113}Cd :n tapauksessa käyttäen kahden pisteen Gaussin ja Legendren kvadratuuria. Lasku on käyty läpi liitteessä A, jossa on myös käsitelty tarkemmin Gaussin ja Legendren kvadratuurin soveltamisessa tarvittua muuttujanvaihtoa.

Käytettyjen pisteiden riittävyys Gaussin ja Legendren kvadratuurissa voitiin tarkistaa ohjelman tulosteesta vertaamalla saatuja likiarvoja eri pisteiden määrillä.

4 Tulokset

4.1 Yksihiukkaskanta, BCS ja QRPA

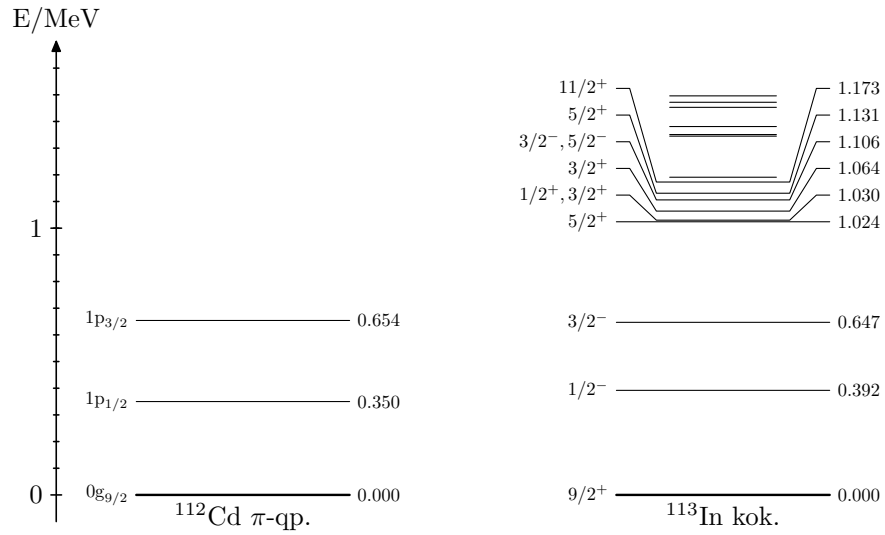
^{112}Cd :n protonikvasihiukkasspektriä ja ^{113}In :n kokeellista spektriä [2] on verrattu keskenään kuvassa 3. Säättämällä $\pi 0g_{9/2}$ -kuoren yksihiukkasenergiaksi $-9,4\text{ MeV}$ ja $\pi 1p_{3/2}$ -kuoren yksihiukkasenergiaksi $-10,0\text{ MeV}$ on saatu kvasihiukkasspektri ja kokeellinen spektri vastaamaan varsin hyvin toisiaan alle 1 MeV alueella. Vastaavasti kuvassa 4 vertailtavina ovat ^{112}Cd :n neutronikvasihiukkasspektri ja ^{113}Cd :n kokeellinen spektri [2]; Tässä säädetyt yksihiukkasenergiat ovat $E(\nu 0g_{7/2}) = -9,5\text{ MeV}$ ja $E(\nu 0h_{11/2}) = -7,1\text{ MeV}$. Kokeellisen ja kvasihiukkasspektrin matalaenergiaosan vastaavuus ei tässä ole kuitenkaan aivan yhtä hyvä kuin edellisessä tapauksessa: Vaikka energiat ovat lähellä toisiaan, tilojen järjestystä ei saatu kohtuullisin muutoksin samaksi.

Kuvassa 5 on edelleen esitetty ^{116}Sn :n neutronikvasihiukkasspektri, kun yksihiukkasenergioissa on tehty säädöt $E(\nu 0h_{11/2}) = -7,2\text{ MeV}$ ja $E(\nu 1d_{3/2}) = -7,4\text{ MeV}$, verrattuna ^{115}Sn :n kokeelliseen spektriin [3]. Vastaavuus spektrien välillä on varsin hyvä, joskin $\pi 0h_{11/2}$:n kvasihiukkasenergian paikka on toivottua alempana. ^{115}In :n tapauksessa $1p$ -tilojen yksihiukkasenergioita jouduttiin tuomaan varsin lähelle toisiaan kohtuullisen vastaavuuden saavuttamiseksi ^{116}Sn :n protonikvasihiukkasspektrin kanssa.

Separatioenergioista lasketut pariaukot ja parivuorovaikutuksen skaalauskerroimet (joilla siis säädettiin alin kvasihiukkasenergia pariaukon suuruisiksi) on koottu taulukkoon 2. Skaalauskerroimien arvot ovat hyvin lähellä ykköstä, mikä käytännössä tarkoittaa, että käytetty parivuorovaikutus kykeni toistamaan pariaukon hyvin. Taulukossa 3 on esitetty Woods-Saxon-potentiaalilin pohjalta lasketut yksihiukkasenergiat ja niihin tehdyt korjaukset.

^{112}Cd :n QRPA-spektri ja kokeellinen spektri on esitetty kuvassa 7. Huomattavaa on, että kokeellisen spektrin tunnetut kaksifononitilat [16] $[2_1^+ \otimes 2_1^+]_{0+,2+,4+}$ on jätetty QRPA-spektrin säätämisessä huomiotta. Matalaenergi-spektrien vastaavuus saatiin säädettyä varsin hyväksi niiden kokeellisen spektrin tilojen osalta, jotka QRPA näyttäisi kuvaavan. Käytetyt g_{pp} - ja g_{ph} -parametrit on esitetty taulukossa 4.

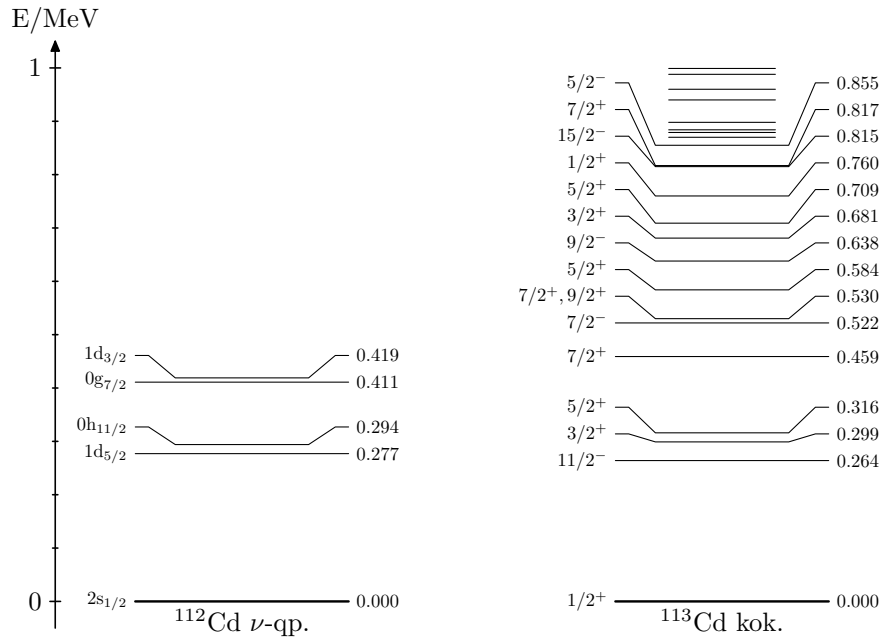
Kuvassa 8 on puolestaan vertailtavina ^{116}Sn :n QRPA-spektri kokeelliseen



Kuva 3: ^{112}Cd :n protonikvasihiukkasspektrin alimmat tilat verrattuna ^{113}In :n kokeelliseen matalaenergiaskaanoniin. Alimpien kvasihiukkasenergioiden säätäminen lähelle vastaavan spin-pariteetin kokeellisia tiloja onnistui erinomaisesti.

	^{112}Cd	^{116}Sn
$g_{\text{pair}}^{(p)}$	1,02	1,13
$g_{\text{pair}}^{(n)}$	0,93	0,94
Δ_p	1,519 MeV	1,836 MeV
Δ_n	1,320 MeV	1,159 MeV

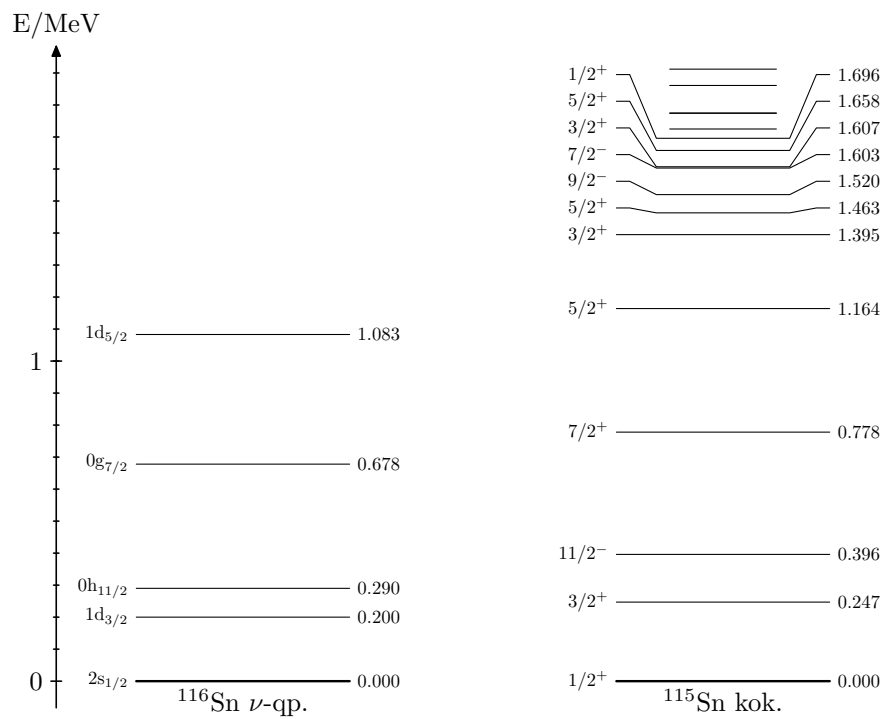
Taulukko 2: Kaavoilla (13) ja (14) lähteistä [18], [19], [2], [3], [20] ja [21] poimituilla separaatioenergioilla lasketut pariaukot ja käytetyt parivuorovaihtusvoimakkuudet BCS-laskuissa.



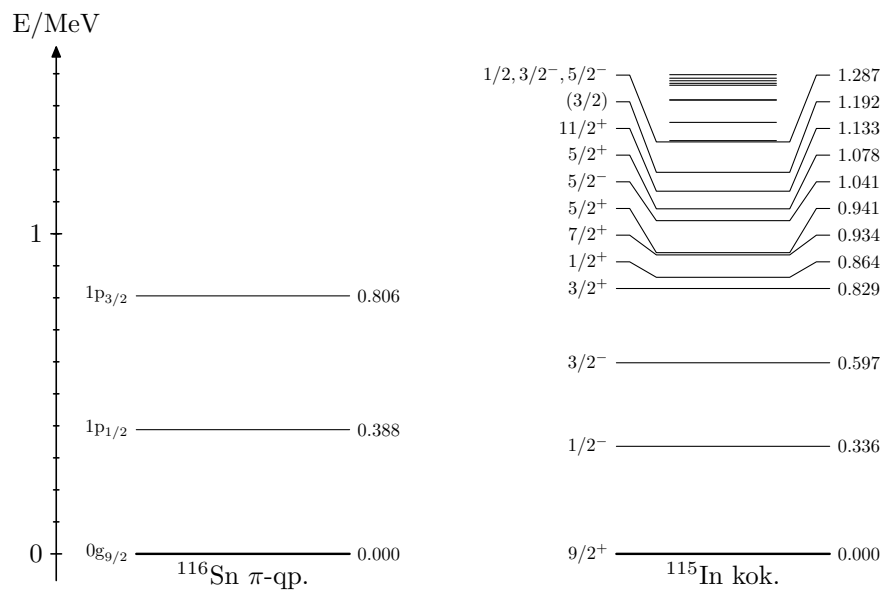
Kuva 4: ^{112}Cd :n neutronikvasihiukkasspektrin alimmat tilat verrattuna ^{113}Cd :n kokeelliseen matalaenergiaskaantriin. Tilojen järjestystä ei onnistuttu saamaan vastaamaan kokeellista.

tila	^{112}Cd		^{116}Sn	
	protonit	neutronit	protonit	neutronit
$1p_{1/2}$	-9,57	-16,06	-8,8 (-9,58)	-16,71
$1p_{3/2}$	-10,0 (-11,14)	-17,39	-9,4 (-11,10)	-18,01
$0f_{5/2}$	-11,85	-17,90	-11,92	-18,61
$0f_{7/2}$	-15,92	-21,30	-15,85	-21,90
$2s_{1/2}$	-0,81	-7,59	-0,86	-8,22
$1d_{3/2}$	-0,27	-7,04	-0,40	-7,4 (-7,74)
$1d_{5/2}$	-3,08	-9,44	-3,15	-10,11
$0g_{7/2}$	-2,37	-9,5 (-8,66)	-2,62	-9,50
$0g_{9/2}$	-9,4 (-8,57)	-13,87	-8,63	-14,56
$0h_{9/2}$	7,72	1,05	7,32	-0,00
$0h_{11/2}$	-0,77	-7,1 (-6,04)	-0,94	-7,2 (-6,83)

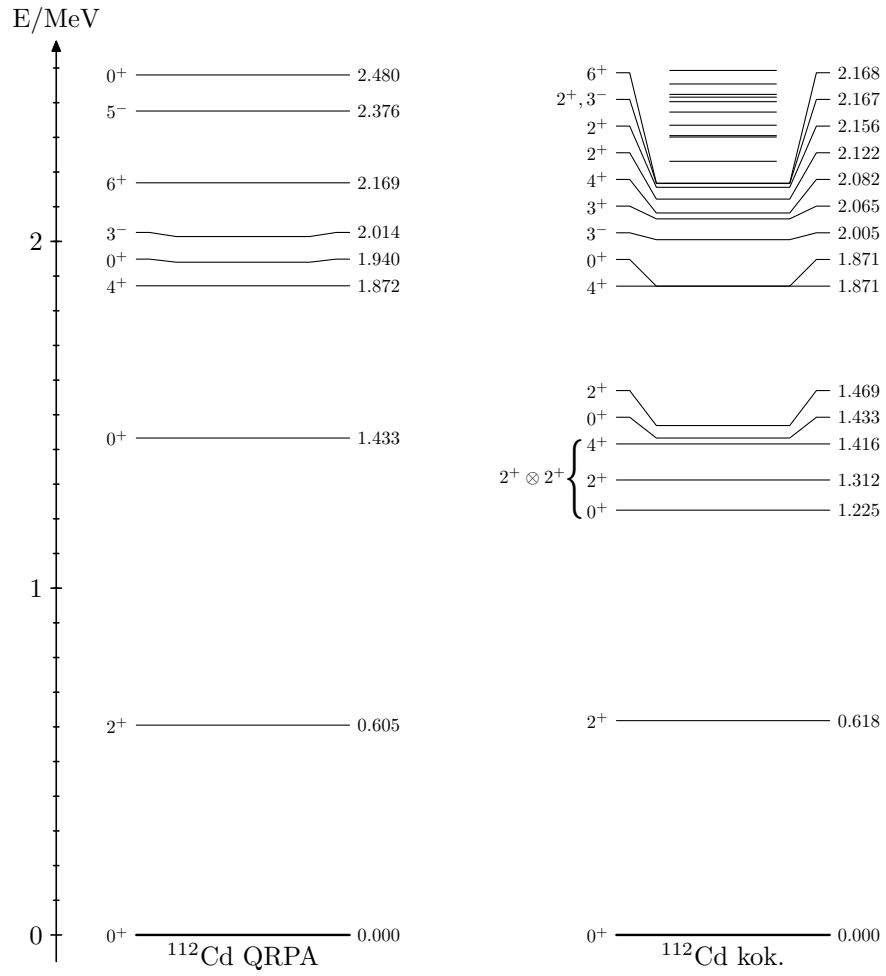
Taulukko 3: Käytetyt yksihiukkasenergiat BCS-laskuissa. Säädettyjen energioiden kohdalla alkuperäinen Woods-Saxon-potentiaalin pohjalta laskettu yksihiukkasenergia on esitetty sulussa. Kaikki energiat ovat MeV:inä



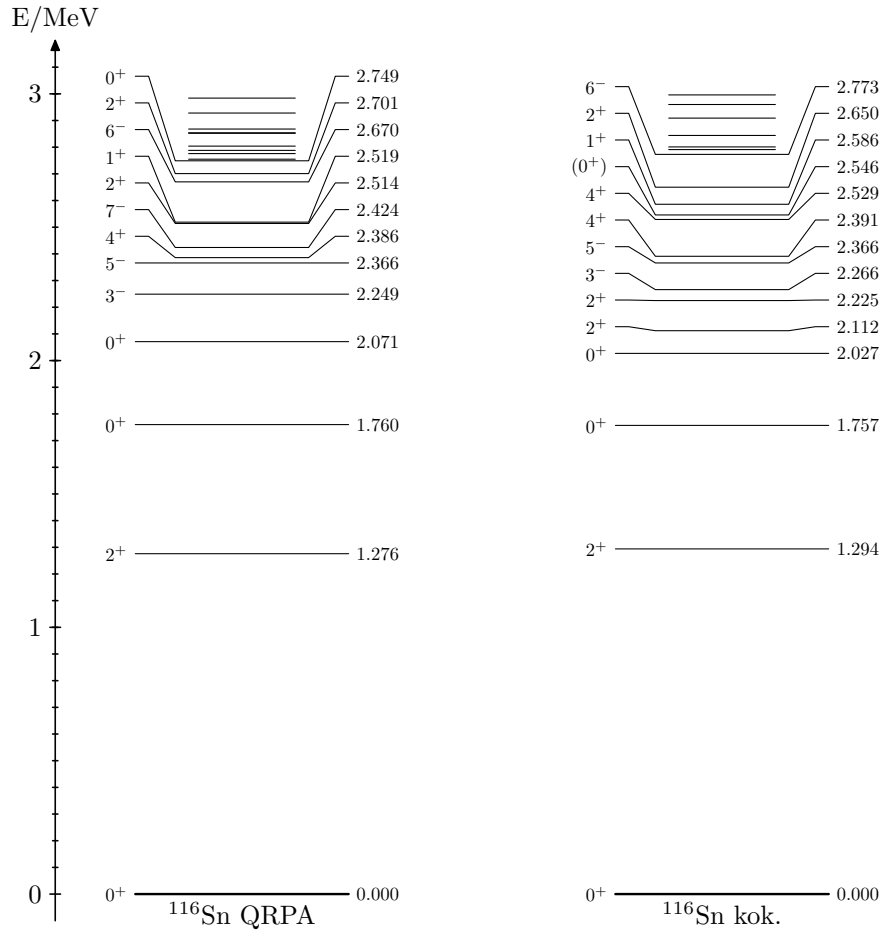
Kuva 5: ^{116}Sn :n neutronikvasihiukkasspektrin alimmat tilat verrattuna ^{115}Sn :n kokeelliseen matalaenergiaskpektriin. Vastaavuus saatiin säädettyä varsin hyväksi.



Kuva 6: ^{116}Sn :n protonikvasihiukkasspektrin alimmat tilat verrattuna ^{115}In :n kokeelliseen matalaenergiaskansiin. Vastaavuus saatiin säädettyä melko hyväksi, joskin 1p-tiloja jouduttiin yksihiukkaskannassa tuomaan huolestuttavan lähelle toisiaan.



Kuva 7: ^{112}Cd :n QRPA-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin [19]. Kuvaan merkityt kokeelliset kaksifononitilat $2^+ \otimes 2^+$ on jätetty QRPA:n säätämisessä huomiotta.



Kuva 8: ^{116}Sn :n QRPA-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin. Vastaavuus laskennallisen ja kokeellisen spektrin välillä on melko hyvä.

spektriin. Vastaavuus on saatu melko hyväksi, joskin tällä kertaa g_{ph} -parametreja on säädetty varsin rajusti (taulukko 4). Tätä voi puolustella jälleen protonikvasihiukkasspektrin laskemisessa tehdyn tempun, aktiivisten protonien määrän vähentämisen, vaikutusten kompensointina.

4.2 MQPM-spektrit ja yksihiukkassiiirtymätiheydet

Kuvissa 9 ja 10 on esitetty ^{113}Cd :n ja ^{113}In :n MQPM-spektrit vertailtuna kokeellisiin spektreihin. Kuviin on merkitty myös MQPM-tilojen merkittä-

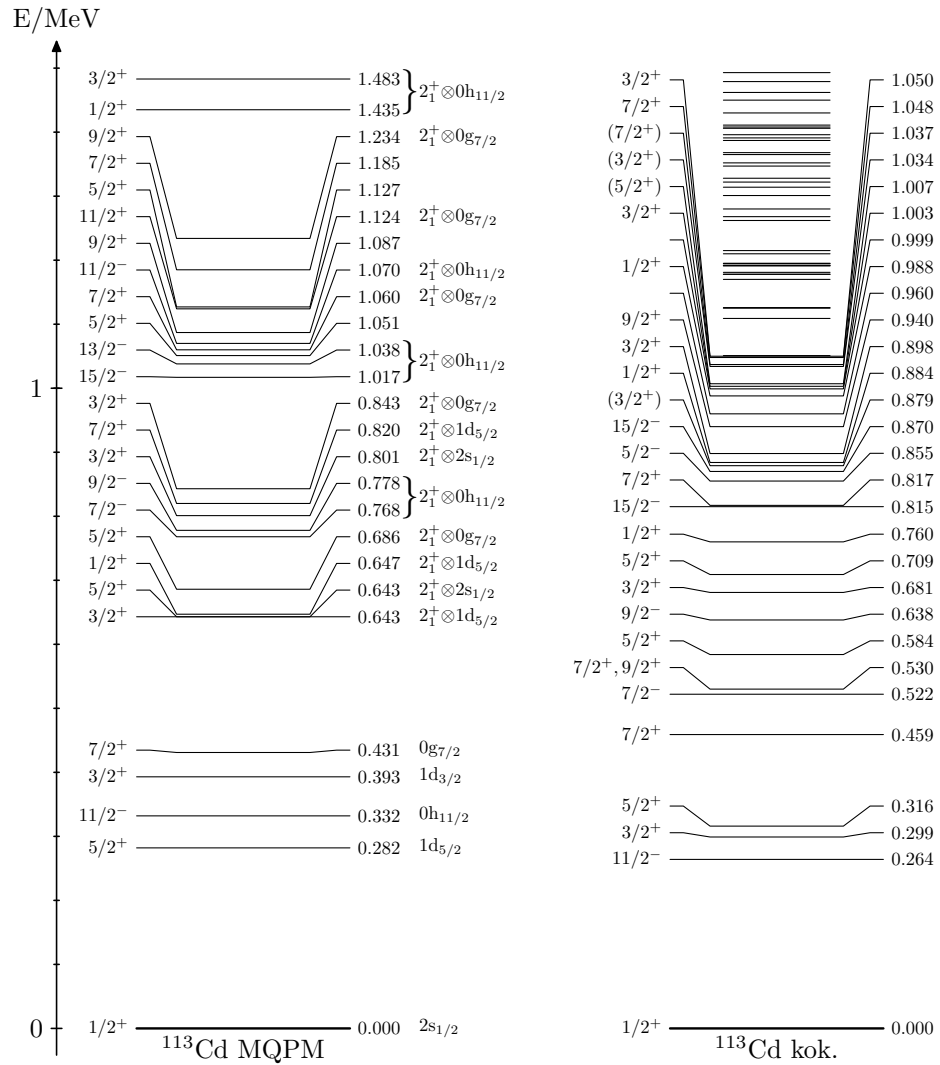
J^π	^{112}Cd		^{116}Sn	
	g_{ph}	g_{pp}	g_{ph}	g_{pp}
0^+	1,07	0,87	0,78	0,86
1^-	0,52		0,48	
2^+	0,71		0,62	
3^-	0,72		0,75	
4^+	0,89		0,66	
5^-	0,82		0,56	
6^+	1,39			
7^-	1,05			

Taulukko 4: QRPA-laskuissa kokeellisen spektrin toistamiseksi säädetyt g_{ph} - ja g_{pp} -parametrit. Taulukossa mainitsemattomat arvot jätettiin ykkösiksi, koska niiden kohtuullisella säätämisellä ei ollut merkittävää vaikutusta spektriin.

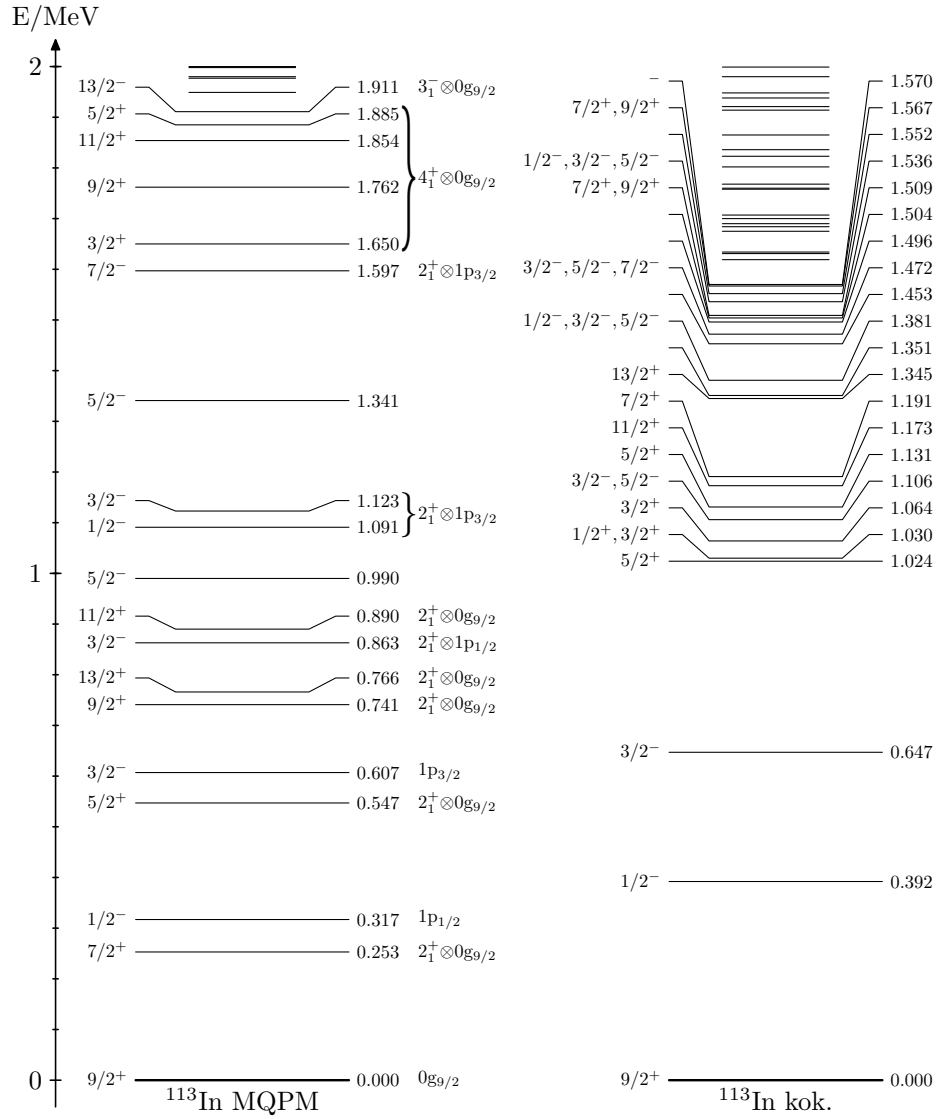
vin komponentti silloin, kun se on selvästi muita voimakkaampi. ^{113}Cd :n tapauksessa nähdään, että kokeelliset tilat ovat levittäytyneet tasaisemmin kuin MQPM ennustaa, mutta vastaavuutta MQPM:n ja kokeellisen spektrin välillä voidaan silti pitää hyvänä. Alle 0,5 MeV tilat ovat suurimmaksi osaksi yksikvasihiukkastiloja. ^{113}In :n tapaus ei ole yhtä kaunista katsottavaa: MQPM-spektrissä on monia hyvin alas työntyneitä $2_1^+ \otimes 0_{g_{9/2}}$ -tiloja, joita ei kokeellisessa spektrissä ole nähtävissä.

^{113}Cd :n ja ^{113}In :n tapauksessa käytettiin neljää 2^+ -fonia, kahta 4^+ -, 6^+ - ja 5^- -fonia sekä yhtä 1^- -, 3^- - ja 7^- -fonia. Tässä vaiheessa QRPA-fononien lisäämisellä ei enää tuntunut olevan merkittävää vaikutusta MQPM-spektriin. Vastaavasti ^{115}In :n ja ^{115}Sn :n MQPM-spektrissä päädyttiin käyttämään kuutta 2^+ , 3^- , 4^+ ja 5^- -fonia ja neljää 1^- -fonia.

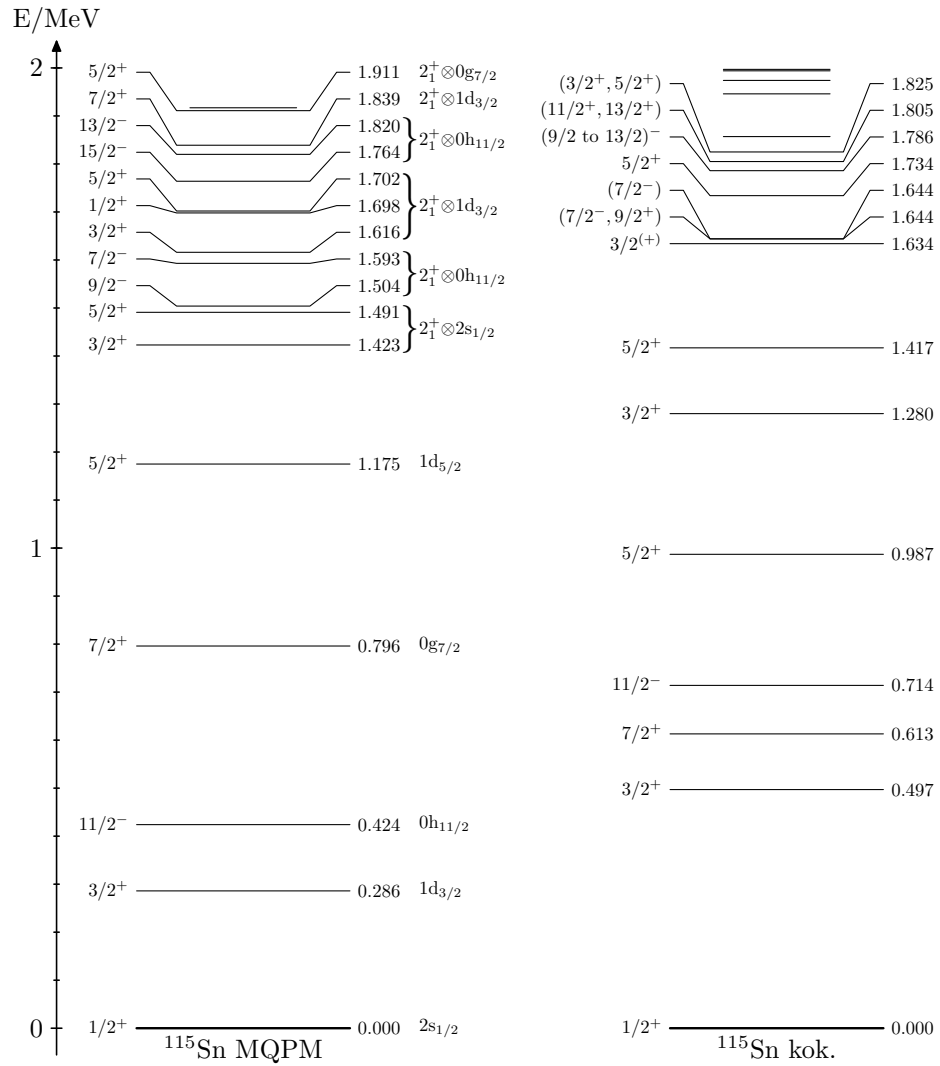
^{115}Sn :n MQPM-spektriä on verrattu kokeelliseen kuvassa 11. Kuten jo BCS-kvasihiukkasspektristä (kuva 5) oli odotettavissa, $11/2_1^-$ - ja $7/2_1^+$ -tilojen järjestys on väärä. Muuten matalaenergiaskaan vastaavuus on melko hyvä. ^{115}In :n MQPM-spektri (kuva 12) on vielä mukavampaa katsottavaa: Vastaavuus kokeellisten ja MQPM-tilojen välillä on alle 1 MeV alueella varsin hyvä, joskin asiaa auttaa se, että Woods-Saxon-laskuista saatuja yksihiukkasenergioita on säädetty muita tapauksia enemmän, ja säädöt on tehty MQPM-spektrin pohjalta — ei siis BCS-kvasihiukkasspektrin, kuten muissa tapauksissa.



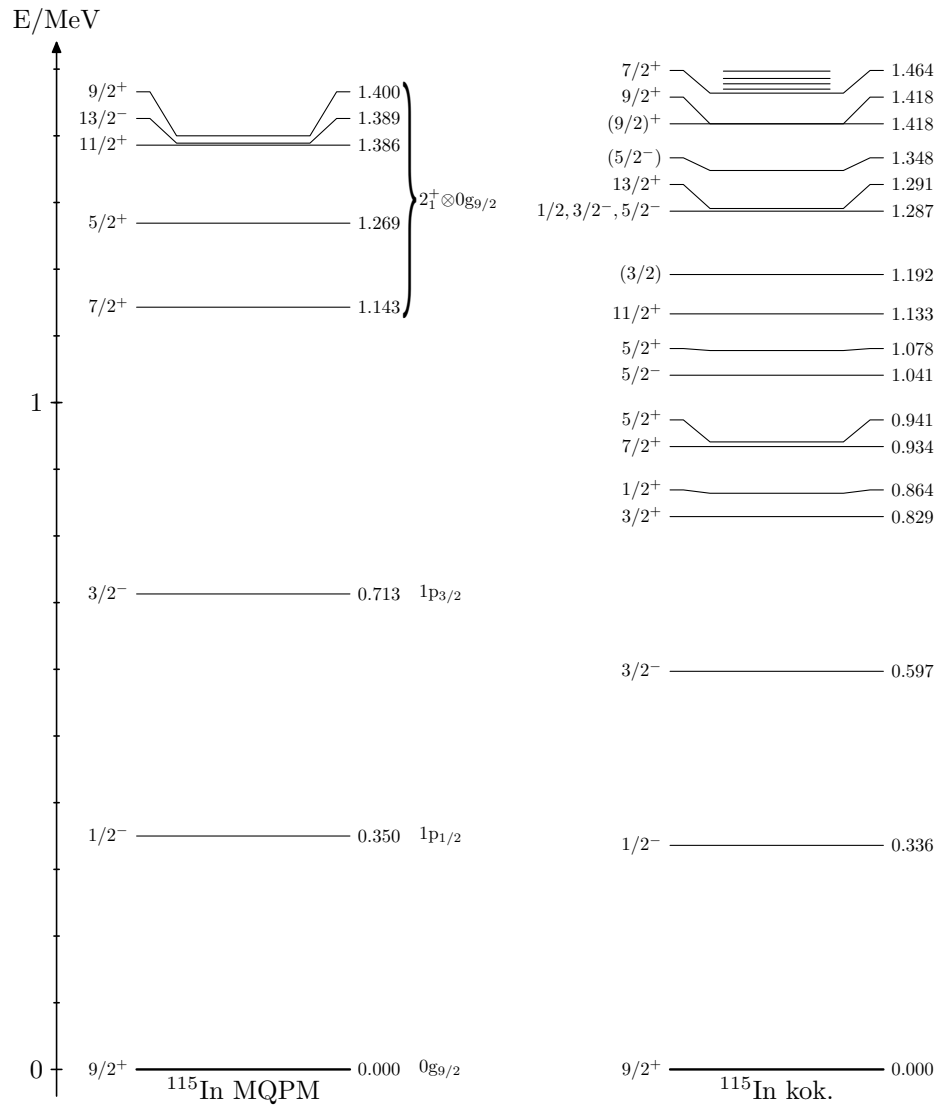
Kuva 9: ^{113}Cd :n MQPM-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin. Kuten BCS-kvasihiukkasspektristä oli jo odotettavissa, alimpien tilojen järjestys ei aivan vastaa kokeellista.



Kuva 10: ^{113}In :n MQPM-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin. Laskennallisessa spektrissä on monia $2_1^+ \otimes 0g_{9/2}$ -tiloja, joita ei onnistuttu säätämään korkeammalle.



Kuva 11: ^{115}Sn :n MQPM-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin. Yritykset saada tilat $11/2_1^-$ ja $7/2_1^+$ oikeaan järjestykseen johtivat vain huonompaan vastaavuuteen laskennallisen ja kokeellisen spektrin välillä.



Kuva 12: ^{115}In :n MQPM-spektri verrattuna kokeelliseen spektriin. Tässä spektrin säätäminen on onnistunut kohtalaisen hyvin.

Yksihiukkassiiirtymätiheyksistä ^{113}Cd :n perustilan hajoamisessa selkeästi dominoivat olivat

$$\left(^{113}\text{In}; \frac{9}{2}_{\text{g.s.}}^+ \parallel [c_{\pi 0\text{g}_{9/2}}^\dagger \tilde{c}_{\nu 2\text{s}_{1/2}}]_4 \parallel ^{113}\text{Cd}; \frac{1}{2}_{\text{g.s.}}^+ \right) \approx 0,985$$

ja

$$\left(^{113}\text{In}; \frac{9}{2}_{\text{g.s.}}^+ \parallel [c_{\pi 0\text{g}_{9/2}}^\dagger \tilde{c}_{\nu 2\text{s}_{1/2}}]_5 \parallel ^{113}\text{Cd}; \frac{1}{2}_{\text{g.s.}}^+ \right) \approx 1,088.$$

Tämä ei ole yllättävää ottaen huomioon, että perustilat ovat hyvin pitkälti yksikvasihiukkastiloja: On luonnollista, että siirtymä on tällöin kuvattavissa $2\text{s}_{1/2}$ -neutronikvasihiukkasen tuhoamisena ja $0\text{g}_{9/2}$ -neutronikvasihiukkasen luomisena. Aivan vastaavasti ^{115}In :n perustilan hajoamisessa dominoivat siirtymätiheydet olivat

$$\left(^{115}\text{Sn}; \frac{1}{2}_{\text{g.s.}}^+ \parallel [c_{\pi 2\text{s}_{1/2}}^\dagger \tilde{c}_{\nu 0\text{g}_{9/2}}]_4 \parallel ^{115}\text{In}; \frac{9}{2}_{\text{g.s.}}^+ \right) \approx -1,932$$

ja

$$\left(^{115}\text{Sn}; \frac{1}{2}_{\text{g.s.}}^+ \parallel [c_{\pi 2\text{s}_{1/2}}^\dagger \tilde{c}_{\nu 0\text{g}_{9/2}}]_5 \parallel ^{115}\text{In}; \frac{9}{2}_{\text{g.s.}}^+ \right) \approx 2,136.$$

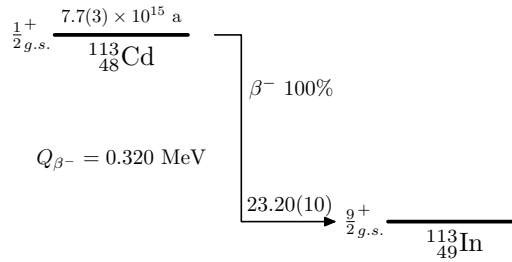
4.3 Beetahajoamislaskut

Siiirtymätiheyksistä lasketut matriisielementit on esitetty taulukossa 5. Koska siirtymä on neljästi kielletty, on k_e :stä riipuvat matriisielementit $M_2^{(k_e)}$ ja $M_3^{(k_e)}$ laskettu k_e :n arvoille $1, \dots, 4$. Matriisielementit M_5 ja M_6 ovat luonnollisesti nollia, joten niitä ei ole taulukoitu.

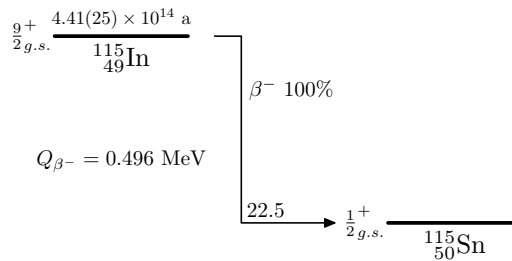
^{113}Cd :n perustilan hajoamisen (kuva 13) $\log ft$ -arvoksi saatiin 23,94 ja puoliintumisajaksi $4,95 \cdot 10^{16}$ a. Verrattuna kokeelliseen arvoon [2] 23,20(10) on $\log ft$ -arvo hieman liian suuri, mutta kuitenkin varsin lähellä. Kokeellinen puoliintumisaika on lähteen [2] mukaan $7,7(3) \cdot 10^{15}$ a ja lähteen [4] mukaan $8,2(2) \cdot 10^{15}$ a. ^{115}In perustilan hajoamisessa (kuva 14) $\log ft$ -arvoksi tuli laskemalla 23,20 ja puoliintumisajaksi $1,99 \cdot 10^{15}$ a; Vastaavat kokeelliset [3] arvot ovat 22,5 ja $4,41(25) \cdot 10^{14}$ a. Tässäkin tapauksessa laskettu $\log ft$ -arvo on melko lähellä kokeellista, joskin hieman liian suuri. Molemmissa tapauksissa lasketut puoliintumisajat ovat suurinpiirtein oikeaa kertaluokkaa.

	^{113}Cd	^{115}In
M_1	0,0068132	0,015083
M_2	596,61	-554,77
M_3	532,99	-477,23
M_4	876,49	832,43
$M_2^{(1)}$	655,96	-612,25
$M_2^{(2)}$	612,71	-572,37
$M_2^{(3)}$	589,52	-550,97
$M_2^{(4)}$	575,23	-537,77
$M_3^{(1)}$	586,88	-527,15
$M_3^{(2)}$	548,36	-492,92
$M_3^{(3)}$	527,70	-474,53
$M_3^{(4)}$	514,96	-463,19

Taulukko 5: Siirtymätiheyksistä lasketut matriisielementit: Sarakkeet on ot-sikoitu emoytimen mukaan.



Kuva 13: ^{113}Cd :n perustila hajoaa neljästi kielletyllä ei-uniikilla β^- -hajoamisella suoraan ^{113}In :n perustilalle.



Kuva 14: ^{115}In :n perustilan ainoa hajoamiskanava on neljästi kielletty ei-uniikki β^- -hajoaminen ^{115}Sn :n perustilalle.

5 Johtopäätökset

^{112}Cd :n BCS- ja QRPA-laskut onnistuivat hyvin. Tarvittavat parametrien säädöt kokeellisen spektrin kohtuulliseksi toistamiseksi olivat melko pieniä ja siten fysikaalisesti uskottavia. ^{116}Sn :lle QRPA:n g_{pp} - ja g_{ph} -parametrien mielekkyyden arviointi on vaikeampaa johtuen tarvitusta tempusta BCS-laskuissa edes jonkinlaisen mielekkään kvasihiukkasspektrin aikaansaamiseksi ^{115}In :n kuvaamiseksi, mutta tilanteen huomioon ottaen voinee niitäkin pitää tyydyttävänä. Kvasihiukkasspektriin säätämässä tehdyt muutokset kvasihiukkasenergioihin olivat enimmäkseen hienovaraisia.

MQPM-spektriin ja kokeellisten spektriin vastaavuuden säätäminen onnistui melko hyvin, poikkeuksena kenties ^{113}In , jossa MQPM-spektrissä näkyi useita rakenteeltaan enimmäkseen $2_1^+ \otimes 0g_{9/2}$ -tiloja, joita ei kokeellisessa spektrissä näy. On periaatteessa silti mahdollista, että kyseiset tilat ovat olemassa: Yksi- ja kolmikvasihiukkastilojen väliset siirtymät ovat tyypillisesti heikompia kuin yksikvasihiukkastilojen ja tunnetut betasiirtymät naapuriytimistä johtavat ^{113}In :ssa enimmäkseen perustilalle ja $1/2_1^-$ - sekä $3/2_1^-$ -viritystilalle. Siten voi olla, että siirtymät MQPM:n $2_1^+ \otimes 0g_{9/2}$ -tiloille eivät vain ole riittävän voimakkaita, että ne olisivat tulleet kokeissa esille. MQPM-laskujen tuloksista havaittiin, että tarkasteltavien emo- ja tytärtydinten perustilat vaikuttavat enimmäkseen yksikvasihiukkastiloilta.

Lasketut $\log ft$ -arvot ovat riittävän lähellä kokeellisia arvoja, jotta laskuja voi pitää onnistuneina. Lasketut arvot ovat molemmissa tapauksissa hieman suurempia kuin kokeelliset; Kenties perustilat ovat luonteeltaan voimakkaammin yksihiukkastiloja kuin tehtyjen MQPM-laskujen tuloksissa. Olisi mielenkiintoista kokeilla, auttaisiko valenssiavaruuden kasvattaminen tuomaan laskennallisia arvoja lähemmäs kokeellisia.

Viitteet

- [1] J. Suhonen et al.: Nucl. Phys. A **628**, 41 (1998)
- [2] J. Blachot: Nuclear Data Sheets **104**, 791 (2005)
- [3] J. Blachot: Nuclear Data Sheets **104**, 967 (2005)
- [4] C. Goeßling et al.: Preprint <http://arXiv.org/abs/nucl-ex/0508016>
- [5] K. L. G. Heyde: *The Nuclear Shell Model* (Springer-Verlag, Berlin, 1994), 2nd ed.
- [6] A. Bohr and B. R. Mottelson: *Nuclear Structure*, vol. I (W. A. Benjamin, New York, 1969)
- [7] M. G. Mayer: Phys. Rev. **78**, 16 (1950)
- [8] A. Bohr, B. R. Mottelson and D. Pines: Phys. Rev. **110**, 936 (1958)
- [9] M. Baranger: Phys. Rev. **120**, 957 (1960)
- [10] D. J. Rowe: Rev. Mod. Phys. **40**, 153 (1968)
- [11] J. Suhonen: Nucl. Phys. A **563**, 205 (1993)
- [12] J. Toivanen and J. Suhonen: Phys. Rev. C **57**, 1237 (1998)
- [13] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf: *Theoretical Nuclear Physics* (Springer-Verlag, New York, 1979)
- [14] J. Hardy et al.: Nucl. Phys. A **509**, 429 (1990)
- [15] H. Behrens and W. Bühring: *Electron Radial Wave Functions and Nuclear Beta Decay* (Clarendon, Oxford, 1982)
- [16] J. Kotila, J. Suhonen and D. S. Delion: Phys. Rev. C **68**, 014307 (2003)
- [17] J. Haataja et al.: *Numeeriset menetelmät käytännössä* (Picaset, Helsinki, 2002)
- [18] J. Blachot: Nuclear Data Sheets **100**, 179 (2003)
- [19] D. De Frenne and E. Jacobs: Nuclear Data Sheets **79**, 639 (1996)
- [20] J. Blachot: Nuclear Data Sheets **92**, 455 (2001)
- [21] J. Blachot: Nuclear Data Sheets **95**, 679 (2002)

Liite A Esimerkki log ft -arvon laskemisesta

Ohjelman `logft.f90` antamien tulosten tarkistamiseksi laskettiin käsin log ft -arvo kahden pisteen Gaussin ja Legendren kvadratuurilla ^{113}Cd :n perustilan hajoamiselle. Tässä tapauksessa siis tytärytimen järjestysluku $Z = 49$, massaluku $A = 113$ ja säde $R = 1,2 \times 113^{1/3} \text{ fm} \approx 5,8015 \text{ fm}$. Kyseessä on neljästi kielletty siirtymä (ts. $K = 4$), jonka Q-arvo $Q_{\beta^-} = 0,320(3) \text{ MeV}$ [2]. Päätepiste-energia elektronin massoina on siten

$$w_0 = \frac{m_e c^2 + Q_{\beta^-}}{m_e c^2} = \frac{0,511 \text{ MeV} + 0,320 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} \approx 1,6262. \quad (64)$$

Muototekijää laskettaessa usein esiintyvä suure $\tilde{\alpha}Z$ on tälle ytimelle kaavan (43) mukaisesti

$$\tilde{\alpha}Z = \frac{\alpha \cdot \hbar c \cdot Z}{R \cdot m_e c^2} = \frac{\frac{1}{137} \cdot 197,33 \text{ MeVfm} \cdot 49}{5,8015 \text{ fm} \cdot 0,511 \text{ MeV}} \approx 23,8072.$$

Gaussin ja Legendren kvadratuurissa funktion $f(x)$ integraalin välillä $[-1, 1]$ likiarvo on

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \tilde{w}_i, \quad (65)$$

missä n on käytettävien pisteiden määrä. Pisteet x_i , joissa funktion f arvo täytyy laskea, ja vaadittavat painokertoimet \tilde{w}_i löytyvät taulukoituina pienille n :n arvoille, esimerkiksi lähteestä [17] arvoille $n = 1, 2, \dots, 6$. Kahden pisteen tapauksessa ne ovat $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1$.

Jotta Gaussin ja Legendren kvadraturia voidaan soveltaa integraalin

$$\int_1^{w_0} C(w_e) p w_e (w_0 - w_e)^2 F_0(Z, w_e) dw_e \quad (66)$$

laskemiseen, täytyy integrointivälin muuttamiseksi suorittaa muuttujanvaihto

$$x = \frac{2(w_e - 1)}{w_0 - 1} - 1, \quad (67)$$

jolloin

$$\begin{aligned} \int_1^{w_0} g(w_e) dw_e &= \int_{-1}^1 g(w_e(x)) \frac{dw_e}{dx} dx = \frac{w_0 - 1}{2} \int_{-1}^1 g(w_e(x)) dx \\ &\approx \frac{w_0 - 1}{2} \sum_{i=1}^n g(w_e(x_i)) \tilde{w}_i, \end{aligned} \quad (68)$$

k_e	$w_e = 1,13234$		$w_e = 1,49389$	
	$F_{k_e-1}(Z, w_e)$	λ_{k_e}	$F_{k_e-1}(Z, w_e)$	λ_{k_e}
1	10,76842	1	6,647629	1
2	7,980137	0,74107	3,916229	0,58912
3	0,3768276	0,034994	0,1730631	0,026034
4	13,26139	1,23151	5,911090	0,88920
5	11,01902	1,02327	4,829822	0,72655

Taulukko 6: Tarvittavat Fermi-funktioiden ja λ -tekijöiden arvot esimerkkilaskussa.

missä siis

$$w_e(x) = \frac{w_0 - 1}{2}(x + 1) + 1. \quad (69)$$

Pisteet, joissa funktion $g(w_e) = C(w_e)pw_e(w_0 - w_e)^2F_0(Z, w_e)$ arvo on siis laskettava, ovat

$$w_e(x_1) = \frac{1,6262 - 1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) + 1 \approx 1,49389 \quad (70)$$

ja

$$w_e(x_2) = \frac{1,6262 - 1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) + 1 \approx 1,13234. \quad (71)$$

Tarvittavat Fermi-funktioiden $F_{k_e-1}(Z, w_e)$ arvot saadaan kätevästi laskettua Jouni Suhosen `fermifn.for`-ohjelmalla. Nämä ja näistä lasketut λ -tekijät

$$\lambda_{k_e} = \frac{F_{k_e-1}(Z, w_e)}{F_0(Z, w_e)} \quad (72)$$

on koottu taulukoksi 6.

Muototekijän laskemiseen tarvittavat matriisielementit M_1 , M_2 , M_3 ja M_4 sekä $M_2^{(k_e)}$ ja $M_3^{(k_e)}$ ($k_e = 1, 2, \dots, K$) saadaan luettua taulukosta 5. Näistä voidaan laskea joukko apusuureita:

$$\begin{aligned} M_+ &= M_2 + \sqrt{\frac{K+1}{K}} \frac{g_A}{g_V} M_3 = 596,61 + \sqrt{\frac{4+1}{4}} \cdot \frac{1,25}{1,0} \cdot 532,99 \\ &\approx 1341,49 \end{aligned} \quad (73)$$

k_e	$M_-^{(k_e)}$	γ_{k_e}
1	-164,232	0,93385
2	-153,652	1,96776
3	-147,963	2,97860
4	-144,448	3,98398

Taulukko 7: Kvanttiluvusta k_e riippuvia apusuureita.

ja

$$M_- = M_2 - \sqrt{\frac{K+1}{K}} \frac{g_A}{g_V} M_3 = 596,61 - \sqrt{\frac{4+1}{4}} \cdot \frac{1,25}{1,0} \cdot 532,99 \approx -148,266. \quad (74)$$

Lisäksi

$$\tilde{M}_1 = 386,2 \cdot M_1 = 386,2 \cdot (-6,81317 \times 10^{-3}) \approx -2,631246. \quad (75)$$

Kvanttiluvusta k_e riippuvat apusuureet

$$M_-^{(k_e)} = M_2^{(k_e)} - \sqrt{\frac{K+1}{K}} \frac{g_A}{g_V} M_3^{(k_e)} \quad (76)$$

ja

$$\gamma_{k_e} = \sqrt{k_e^2 - (\alpha Z)^2}, \quad (77)$$

missä α on hienorakennevakio, on laskettu taulukkoon 7.

Käsin laskemisen helpottamiseksi voidaan vielä määritellä näppärät apusuureet

$$\mathcal{P} = \tilde{M}_1 \sqrt{\frac{2K+1}{K}} - \frac{w_0 - w_e}{2k_\nu + 1} M_+, \quad (78)$$

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{\gamma_{k_e}}{k_e w_e} - w_e \right) M_- - \tilde{\alpha} Z M_-^{(k_e)} \quad (79)$$

ja

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q}^2 + \left(1 - \frac{\gamma_{k_e}^2}{k_e^2 w_e^2} \right) M_-^2, \quad (80)$$

jolloin

$$\tilde{\mathcal{A}}_K = \mathcal{P}^2 + \frac{2\mathcal{P}\mathcal{Q}}{2k_e + 1} + \frac{\mathcal{R}}{(2k_e + 1)^2}. \quad (81)$$

Kaavoja (78)-(81) on paljon miellyttävämpää ja vähemmän virheeltistä käsitellä kynän, paperin ja laskimen kanssa kuin kaavaa (35). Sijoittamalla lausekkeet (78)-(80) kaavaan (81) saadaan kuitenkin tulokseksi kaava (35).

Esimerkiksi, kun $w_e = 1,49389$ ja $k_e = 1$, on

$$\mathcal{P} = -2,631246 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4 + 1}{4}} - \frac{1,6262 - 1,49389}{2 \cdot 4 + 1} \cdot 1341,49 \approx -23,6683,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \left(\frac{0,93385}{1 \cdot 1,49389} - 1,49389 \right) \cdot (-148,266) - 23,8072 \cdot (-164,232) \\ &\approx 4038,71 \end{aligned}$$

ja

$$\mathcal{R} = 4038,71^2 + \left(1 - \frac{0,93385^2}{1^2 \cdot 1,49389^2} \right) \cdot (-148,266) \approx 16311237.$$

Nyt

$$\tilde{\mathcal{A}}_K = (-23,6683)^2 + \frac{2 \cdot (-23,6683) \cdot 4038,71}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{16311237}{(2 \cdot 1 + 1)^2} \approx 1749194$$

ja

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_K &= \frac{4 + 1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 5 - 1)} \left(596,61^2 + 2 \cdot \frac{1,25}{1,0} \frac{1 - 5}{\sqrt{4 \cdot (4 + 1)}} \cdot 596,61 \cdot 532,99 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - 5)^2}{4 \cdot (4 + 1)} \left(\frac{1,25}{1,0} \right)^2 \cdot 532,99^2 \right) + \left(\frac{1,25}{1,0} \right)^2 \cdot 876,49^2 \approx 1200367. \end{aligned}$$

Vastaavasti lasketut välitulokset muilla tarvittavilla w_e :n ja k_e :n arvoilla on koottu taulukkoon 8.

Taulukoitujen välitulosten avulla on helppoa laskea $C(w_e)$:n arvo tarvittavissa kahdessa pisteessä käyttäen kaavaa (34), johon sijoittamalla kaavat (37) ja (38) ja ottamalla summista eteen yhteisiä tekijöitä saadaan

$$\begin{aligned} C(w_e) &= (6,706 \times 10^{-6})^K \cdot g_V^2 \cdot \frac{(2K)!!}{(2K + 1)!!} \\ &\quad \times \left[\sum_{k_e + k_\nu = K+1} \lambda_{k_e} (w_e^2 - 1)^{k_e - 1} (w_0 - w_e)^{2(k_\nu - 1)} \frac{\tilde{\mathcal{A}}_K}{2(2k_e - 1)!(2k_\nu - 1)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_e + k_\nu = K+2} \lambda_{k_e} (w_e^2 - 1)^{k_e - 1} (w_0 - w_e)^{2(k_\nu - 1)} \frac{\mathcal{B}_K}{(2k_e - 1)!(2k_\nu - 1)!} \right] \end{aligned}$$

$w_e = 1,49389$					
k_e	\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	$\tilde{\mathcal{A}}_K$	\mathcal{B}_K
1	-23,6683	4038,71	16311237	1749194	1200367
2	-29,3032	3560,38	12688753	466677	1221604
3	-39,4456	3424,04	11736323	202483	1271555
4	-63,1113	3340,05	11168145	95018	1390300
5	-	-	-	-	1990412
$w_e = 1,13234$					
k_e	\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	$\tilde{\mathcal{A}}_K$	\mathcal{B}_K
1	-77,5592	3955,52	15646086	1539945	1200367
2	-98,5912	3697,08	13668363	410655	1221604
3	-136,4488	3560,47	12676912	138525	1271555
4	-224,7832	3476,38	12085185	26076	1390300
5	-	-	-	-	1990412

Taulukko 8: Välituloksia muototekijän $C(w_e)$ arvojen laskemisessa.

ja kun tähän edelleen sijoitetaan välitulokset taulukosta 8 päädytään lukuihin

$$\begin{aligned}
C(1,13234) &= (6,706 \times 10^{-6})^K \cdot (1,0)^2 \cdot \frac{8!!}{9!!} \\
&\cdot \left[\sum_{k_e+k_\nu=5} \frac{\lambda_{k_e}(1,13234^2 - 1)^{k_e-1}(1,6262 - 1,13234)^{2(k_\nu-1)} \tilde{\mathcal{A}}_K}{2(2k_e - 1)!(2k_\nu - 1)!} \right. \\
&+ \left. \sum_{k_e+k_\nu=6} \frac{\lambda_{k_e}(1,13234^2 - 1)^{k_e-1}(1,6262 - 1,13234)^{2(k_\nu-1)} \mathcal{B}_K}{(2k_e - 1)!(2k_\nu - 1)!} \right] \\
&= 8,21776 \cdot 10^{-22} \cdot \left[1 \cdot 0,28219^0 \cdot 0,49389^6 \cdot \frac{1539945}{2 \cdot 1! \cdot 7!} + 0,74107 \cdot \right. \\
&\cdot 0,28219^1 \cdot 0,49389^4 \cdot \frac{410655}{2 \cdot 3! \cdot 5!} + 0,034994 \cdot 0,28219^2 \cdot 0,49389^2 \\
&\cdot \frac{138525}{2 \cdot 5! \cdot 3!} + 1,23151 \cdot 0,28219^3 \cdot 0,49389^0 \cdot \frac{26076}{2 \cdot 7! \cdot 1!} + 1 \cdot 0,28219^0 \\
&\cdot 0,49389^8 \cdot \frac{1200367}{1! \cdot 9!} + 0,74107 \cdot 0,28219^1 \cdot 0,49389^6 \cdot \frac{1221604}{3! \cdot 7!} \\
&+ 0,034994 \cdot 0,28219^2 \cdot 0,49389^4 \cdot \frac{1271555}{5! \cdot 5!} + 1,23151 \cdot 0,28219^3 \\
&\cdot 0,49389^2 \cdot \frac{1390300}{7! \cdot 3!} + 1,02327 \cdot 0,28219^4 \cdot 0,49389^0 \cdot \frac{1990412}{9! \cdot 1!} \left. \right] \\
&\approx 5,25741 \cdot 10^{-21}
\end{aligned}$$

ja $C(1,49389) \approx 2,181749 \cdot 10^{-20}$.

Nyt Gaussin ja Legendren kvadratuurin avulla saadaan integraaleille likiarvot

$$f \approx \frac{1,6262 - 1}{2} \cdot \left(\sqrt{1,13234^2 - 1} \cdot 1,13234 \cdot (1,6262 - 1,13234)^2 \cdot 10,76842 \right. \\ \left. + \sqrt{1,49389^2 - 1} \cdot 1,49389 \cdot (1,6262 - 1,49389)^2 \cdot 6,647629 \right) \approx 0,55505$$

ja

$$\tilde{C} \approx \frac{1,6262 - 1}{2} \cdot \left(5,25741 \cdot 10^{-21} \cdot \sqrt{1,13234^2 - 1} \cdot 1,13234 \right. \\ \left. \cdot (1,6262 - 1,13234)^2 \cdot 10,76842 + 2,181749 \cdot 10^{-20} \cdot \sqrt{1,49389^2 - 1} \right. \\ \left. \cdot 1,49389 \cdot (1,6262 - 1,49389)^2 \cdot 6,647629 \right) \approx 3,91854 \cdot 10^{-21}.$$

Lopputulokseksi saadaan $\log ft$ -arvo

$$\log ft = \log \frac{\kappa}{\tilde{C}/f} = \log \frac{6147}{3,91854 \cdot 10^{-21}/0,55505} \approx 23,94.$$

Tulokset vastaavat — pyöristyksistä aiheutuvaa pientä eroa lukuunottamatta — ohjelman `logft.f90` laskemia arvoja kahdella pisteellä. Näillä laskuilla tarkistettiin ohjelman oikea toiminta.

Liite B Ohjelmalistaus: logft.f90

Ainoa kokonaisuudessaan alusta loppuun työn tekijän kirjoittama ohjelma oli Fortran 90 -kielinen `logft.f90`. Ohjelma laskee `matel.exe`:n tuottamista matriisielementeistä `log ft`-arvon ja puoliintumisajan. Malli vaaditusta ajo-tiedostosta, jossa tarvittavat tiedot syötetään, löytyy liitteestä C. Liitteessä C on esitetty myös ohjelman esimerkkitulostus.

Ohjelma tarvitsee NAG-aliohjelmakirjastoa Gaussin ja Legendren kvadratuurin laskemisessa käytettävien vakioiden hakemiseen. Lisäksi ohjelma hyödyntää työn ohjaajan tarjoamia FORTRAN 77 -kielisiä koodeja `fermi.for` ja `gamma.for` yleistetyn Fermi-funktion laskemiseen.

```

1  ! ===== logft.f90 =====
2  ! LOGFT.F90
3  !      Integroidun muototekijan ja integroidun Fermi-funktion laskeminen
4  !      matriisielementeistä M_1...M_6 ja edelleen log ft:n laskeminen.
5  !      Integrointiin käytetään Gaussin ja Legendren kvadratuuria (GLQ).
6  !      Fermifunktion laskemiseen käytetään J.Suhosen F77-koodia
7  !      FERMIFN.FOR. Gaussin ja Legendren kvadratuurin abskissat ja
8  !      painokertoimet saadaan katevasti NAG-aliohjelmakirjastosta.
9  !      M.M. Jun-2005
10 !
11 !      Kaantaminen ja linkitys komennoilla:
12 !      f77 -c fermifn.for gamma.for
13 !      f90 -o logft.exe logft.f90 fermifn.o gamma.o -lnag
14 ! =====
15
16 PROGRAM logft
17   IMPLICIT NONE
18   INTEGER, PARAMETER :: MAX_K = 4           ! maksimikielteisyyys
19   INTEGER, PARAMETER :: MAX_N = 6           ! maksimi-n GLQ:ssa
20   REAL, EXTERNAL :: FERMIFN                 ! Ulkoinen F77-funktio
21   EXTERNAL d01baz                            ! NAG-kirjaston GLQ-fktio
22
23   REAL, PARAMETER :: me = 0.5109989         ! m_e [MeV]
24   REAL, PARAMETER :: ga = 1.25              ! g_a
25   REAL, PARAMETER :: gv = 1.0              ! g_v
26   REAL, PARAMETER :: alfa = 0.007297352533 ! hienorakennevakio
27   REAL, PARAMETER :: mefm = 2.59E-3        ! (m_e c^2)/(hbar c)
28   REAL, PARAMETER :: kappa = 6147          ! log ft -arvoa varten
29   REAL, PARAMETER :: pii = 3.14159265359
30
31   INTEGER :: K,Z,A,ifail,i,n,nmax,ke,knu
32   REAL :: EO,M1,M2,M3,M4
33   REAL, DIMENSION(MAX_K) :: M2ke,M3ke,Mminuske,gammake
34   DOUBLE PRECISION, DIMENSION(MAX_N) :: xi,weight
35   REAL :: fermi_int,tulo,w0,we,deltaw,radius,shape_int,shfactor
36   REAL :: Mplus,Mminus,Mtilde1,apu,termi,lambdake,halflife
37   REAL :: P,Q,R,alfaZ,lgft
38
39   ! Luetaan tarvittava data ajotiedostosta
40   READ(5,*) K,Z,A,EO           ! kielteisyyys, Z_i, A ja paatepiste-energia
```

```

41 READ(5,*) M1,M2,M3,M4           ! k_e-riippumattomat m.e.:t
42 DO i=1,K
43   READ(5,*) M2ke(i)           ! M2(k_e):t (K kpl)
44 END DO
45 DO i=1,K
46   READ(5,*) M3ke(i)           ! M3(k_e):t (K kpl)
47 END DO
48 READ(5,*) nmax                 ! GLQ lasketaan kertaluvuille 2...nmax
49
50 radius = 1.2*REAL(A)**.3333333
51 Mtilde1 = M1*386.2
52 alfaZ = alfa/radius/mefm*Z
53 apu = SQRT((K+1.0)/REAL(K))*ga/gv
54 Mplus = M2 + apu*M3
55 Mminus = M2 - apu*M3
56 DO i=1,K
57   Mminuske(i) = M2ke(i) - apu*M3ke(i)
58   gammake(i) = SQRT(i*i-alfa*alfa*Z*Z)
59 END DO
60
61 ! Kirjoitetaan hieman tulostetta, jotta arvot ovat tarkistettavissa
62 WRITE(6,'(/,A,I3,A,I3)') ' Z = ',Z,' A = ',A
63 WRITE(6,'(A,I1)') ' FORBIDDENNESS: ',K
64 WRITE(6,'(A,F7.4,A)') ' E_0 = ',E0,' MeV'
65 WRITE(6,'(A,F7.5,A)') ' RADIUS = ',radius,' fm'
66 WRITE(6,'(/,A)') ' THE MATRIX ELEMENTS M_1 TO M_4:'
67 WRITE(6,'(4F8.3)') M1,M2,M3,M4
68 WRITE(6,'(/,A)') ' THE MATRIX ELEMENTS M_minus AND M_plus:'
69 WRITE(6,'(2F10.3)') Mminus,Mplus
70 WRITE(6,'(/,A)') ' THE k_e DEPENDENT MATRIX ELEMENTS:'
71 WRITE(6,'(A)') ' k_e M_2(k_e) M_3(k_e) M-(k_e)'
72 WRITE(6,'(A)') ' -----'
73 DO i=1,K
74   WRITE(6,'(I4,3F11.3)') i,M2ke(i),M3ke(i),Mminuske(i)
75 END DO
76 WRITE(6,*) ' '
77 WRITE(6,'(A)') ' n C-tilde f log ft'
78 WRITE(6,'(A)') ' -----'
79
80 ! Integroidaan C ja f
81 DO n=2,nmax
82   ! Haetaan NAG:sta tarvittavat abskissat ja painot
83   CALL d01bbf(d01baz,-1.0D0,1.0D0,0,n,weight,xi,ifail)
84   IF (ifail/=0) THEN
85     WRITE(6,*) 'NAG d01bbf error nr ', ifail
86     WRITE(6,*) 'Calculation aborted'
87     STOP
88   END IF
89
90   w0 = E0 / me
91   fermi_int = 0.0
92   shape_int = 0.0
93
94   DO i=1,n
95     we = 0.5*(w0-1.0)*(xi(i)+1.0)+1.0
96     deltaw = w0-we
97     tulo = FERMIFN(0,we,Z,radius)
98     tulo = we*deltaw*deltaw*SQRT(we*we-1.0)*tulo ! p=SQRT(we^2-1)
99     fermi_int = fermi_int + tulo*weight(i)
100
101     ! Lasketaan muototekija C(w_e)
102     shfactor = 0.0

```

```

103      ! Ensin A-tilde_K-termit
104      DO ke=1,K
105          knu = K+1-ke
106          P = SQRT((2.0*K+1.0)/K)*Mtilde1 - deltax/(2.0*knu+1.0)*Mplus
107          Q = (gammake(ke)/(ke*we)-we)*Mminus - alfaZ*Mminuske(ke)
108          R = (alfaZ*Mminuske(ke))**2 + (1+we*we-2*gammake(ke)/ke)*Mminus*Mminus
109          R = R + 2*alfaZ*Mminuske(ke)*Mminus*(we-gammake(ke)/(ke*we))
110
111          termi = P*P + 2*P*Q/(2.0*ke+1.0) + R/((2.0*ke+1.0)**2)
112          lambdake = FERMIFN(ke-1,we,Z,radius)/FERMIFN(0,we,Z,radius)
113          termi = termi*lambdake*((we*we-1.0)**(ke-1))*(deltaw**(2*(knu-1)))
114          termi = termi*0.5/REAL(kertoma(2*ke-1))/REAL(kertoma(2*knu-1))
115
116          shfactor = shfactor + termi
117
118      END DO
119      ! Sitten B_K-termit
120      DO ke=1,K+1
121          knu = K+2-ke
122          termi = M2*M2 + 2*ga/gv*(ke-knu)/SQRT(K*(K+1.0))*M2*M3
123          termi = termi + (ke-knu)*(ke-knu)/(K*(K+1.0))*ga*ga/gv/gv*M3*M3
124          termi = termi * (K+1.0)/(2.0*ke-1.0)/(2.0*knu-1.0)
125          termi = termi + ga*ga/gv/gv*M4*M4
126
127          lambdake = FERMIFN(ke-1,we,Z,radius)/FERMIFN(0,we,Z,radius)
128          termi = termi*lambdake*((we*we-1.0)**(ke-1))*(deltaw**(2*(knu-1)))
129          termi = termi/kertoma(2*ke-1)/kertoma(2*knu-1)
130
131          shfactor = shfactor + termi
132
133      END DO
134      ! ja lopuksi skaalaus
135      shfactor = (6.706E-6)**K*gv*gv*shfactor*kaksoiskertoma(2*K)
136      shfactor = shfactor/kaksoiskertoma(2*K+1)
137      shape_int = shape_int + tulo*weight(i)*shfactor
138      END DO
139      shape_int = (w0-1.0)/2.0*shape_int
140      fermi_int = (w0-1.0)/2.0*fermi_int
141      lgft = LOG10(kappa/(shape_int/fermi_int))
142      WRITE(6,'(I2,3G12.5)') n, shape_int, fermi_int, lgft
143      END DO
144      halflife = kappa/shape_int
145      WRITE(6,'(/,A,G12.5,A)') ' HALF-LIFE ',halflife,' s'
146      WRITE(6,'(A,G12.5,A,/)' ) ' = ',(halflife/60.0/60.0/24.0/365.0),' y'
147
148      CONTAINS
149
150      ! Kertoma- ja kaksoiskertomafunktio
151
152      RECURSIVE FUNCTION kertoma(a) RESULT(tulos)
153          IMPLICIT NONE
154          INTEGER, INTENT(IN) :: a
155          INTEGER :: tulos
156          IF (a < 2) THEN
157              tulos = 1
158          ELSE
159              tulos = a * kertoma(a-1)
160          END IF
161      END FUNCTION kertoma
162
163      RECURSIVE FUNCTION kaksoiskertoma(a) RESULT(tulos)
164          IMPLICIT NONE

```

```
165 INTEGER, INTENT(IN) :: a
166 INTEGER :: tulos
167 IF (a < 2) THEN
168     tulos = 1
169 ELSE
170     tulos = a * kaksoiskertoma(a-2)
171 END IF
172 END FUNCTION kaksoiskertoma
173
174 END PROGRAM logft
```

Liite C Ajo- ja lokitiedostoja

Tässä liitteessä esitellään esimerkkejä laskuissa käytettyjen ohjelmien ajo- ja lokitiedostoista. Samalla käydään läpi käytetyt ohjelmat ja niiden roolit laskennassa.

Yksihiukkasenergiat laskettiin ohjelmalla `wsbasis.exe`, jonka eräs ajotiedosto `ws112cd.com` on listattu alla. Nimensä mukaisesti ko. ajotiedostolla laskettiin yksihiukkaskanta Woods-Saxon-potentiaalin pohjalta ^{112}Cd :lle. Tulokset kirjoitettiin ohjelmallista jatkokäsittelyä varten tiedostoon `ws112cd.f03` ja silmämääräistä arvioimista varten yksihiukkasenergiat lueteltiin myös lokitiedostossa `ws.log` (listaus alla toisena).

```
ws112cd.com
1  #!/usr/local/bin/tcsh
2  #
3  ./wsbasis.exe << EXIT > ./ws.log
4  112Cd
5  112,48      ! A,Z
6  11,11,0     !>NNL,NZL,NDEL
7  1,1,0,1.0   ! IPARAM,VOSCALE,WSOSCALE (IPARAM=1 <-> B&M, 2<-> BERTCH, 0 <-> OWN SCALING)
8  1,1,1,.0    ! NEUTRON ORBITALS
9  1,1,3,.0
10 0,3,5,.0
11 0,3,7,.0
12 2,0,1,.0
13 1,2,3,.0
14 1,2,5,.0
15 0,4,7,.0
16 0,4,9,.0
17 0,5,9,.2
18 0,5,11,.0
19 1,1,1,.0    ! PROTON ORBITALS
20 1,1,3,.0
21 0,3,5,.0
22 0,3,7,.0
23 2,0,1,.0
24 1,2,3,.0
25 1,2,5,.0
26 0,4,7,.0
27 0,4,9,.0
28 0,5,9,.2
29 0,5,11,.0
30 EXIT
31 mv -f ./fort.3 ./ws112cd.f03
```

```
ws.log
1 *****
2      112Cd
3 *****
4      1.0 112.0 112.0 112.0 48.0 64.0 0.0
5      1.27000000 1.27000000 0.67000000
```

6	46.28571429	8.21196514	0.00000000						
7	0.01500000	6.12176125	9.47176125	631					
8	1								
9									
10	1	1.	1.	0.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-16.05751801	
11	2	1.	1.	1.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-17.39275360	
12	3	0.	3.	2.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-17.89927292	
13	4	0.	3.	3.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-21.29934311	
14	5	2.	0.	0.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-7.58504009	
15	6	1.	2.	1.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-7.04127359	
16	7	1.	2.	2.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-9.44169617	
17	8	0.	4.	3.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-8.66149807	
18	9	0.	4.	4.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-13.86760330	
19	10	0.	5.	4.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	1.05130458	
20	11	0.	5.	5.5	46.28571429	8.21196514	0.00000000	-6.04762840	
21	1.0	112.0	112.0	112.0	48.0	64.0	48.0		
22	1.27000000	1.27000000	0.67000000						
23	55.71428571	9.88477286	48.00000000						
24	0.01500000	6.12176125	9.47176125	631					
25	1								
26									
27	1	1.	1.	0.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-9.57427406	
28	2	1.	1.	1.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-11.14028549	
29	3	0.	3.	2.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-11.85278988	
30	4	0.	3.	3.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-15.91616058	
31	5	2.	0.	0.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-0.80944449	
32	6	1.	2.	1.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-0.26974654	
33	7	1.	2.	2.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-3.08453560	
34	8	0.	4.	3.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-2.37113976	
35	9	0.	4.	4.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-8.57384109	
36	10	0.	5.	4.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	7.72392559	
37	11	0.	5.	5.5	55.71428571	9.88477286	48.00000000	-0.76507938	
38									
39	112	48							
40									
41	11	11							
42	NUCLEON LEVELS								
43									
44	1	1	1	-16.05752					
45	1	1	3	-17.39275					
46	0	3	5	-17.89927					
47	0	3	7	-21.29934					
48	2	0	1	-7.58504					
49	1	2	3	-7.04127					
50	1	2	5	-9.44170					
51	0	4	7	-8.66150					
52	0	4	9	-13.86760					
53	0	5	9	1.05130					
54	0	5	11	-6.04763					
55									
56	1	1	1	-9.57427					
57	1	1	3	-11.14029					
58	0	3	5	-11.85279					
59	0	3	7	-15.91616					
60	2	0	1	-0.80944					
61	1	2	3	-0.26975					
62	1	2	5	-3.08454					
63	0	4	7	-2.37114					
64	0	4	9	-8.57384					
65	0	5	9	7.72393					
66	0	5	11	-0.76508					
67									


```

68          NO DELTA ORBITALS
69
70
71          0

```

Saatuihin yksihiukkasenergioihin tehtiin säätöjä ohjelman `wscure.for` avulla. Muista käytetyistä ohjelmista poiketen ko. ohjelma vaati jokaista käyttökertaa varten lähdekoodin editointia ja uudelleenkäntämisen. Ohjelma teki muutokset suoraan tiedostoon `ws112cd.f03` (tai ^{116}Sn :n tapauksessa `ws116sn.f03`). Seuraavaksi laskettiin parivuorovaikutusmatriisielementit käyttäen ohjelmaa `snglodd.exe` ajotiedostolla `tbd114.com`. ^{112}Cd :n tapauksessa ohjelma tuotti jatkokäyttöön tiedostot `int112.f04` ja `int112.f09`.

Tämän jälkeen päästiin tekemään BCS- ja QRPA-laskuja ohjelman `qrpat.exe` avulla. Esimerkki käytetystä ajotiedostosta, `qrpat112cd.com`, löytyy alta. Ohjelma laski samalla sekä BCS- että QRPA-laskut, mikä ei kuitenkaan ollut ongelma, koska ajoaika ohjelmalla oli käytetyllä laitteistolla pisimmilläänkin vain muutamia sekunteja. Tulokset oli nähtävissä lokitiedostossa `qrpat.log` (esimerkki alla toisena) ja jatkokäsittelyä varten kompaktimmassa muodossa tiedostossa `qrpat112cd.out` (tai ^{116}Sn :n tapauksessa `qrpat116sn.out`). Alla olevassa esimerkissä lokitiedostosta on listattu vain ensimmäiset 102 riviä; loppuosa tiedostosta sisältää qrpa-laskun tulokset multipoleille 0^+ , 1^- , 1^+ , 2^- , ..., 10^+ samassa muodossa kuin tiedoston listatussa osassa 0^- -multipolille. Loppulistaus olisi vienyt noin 20 sivua listauksissa käytetyllä fontilla.

```

----- qrpat112cd.com -----
1
2 #!/usr/local/bin/tcsh
3
4 cp ./ws112cd.f03 ./fort.3
5 cp ./int112.f04 ./fort.4 # pairing me:s
6 cp ./int112.f09 ./fort.9 # residual me:s
7
8 ./qrpat.exe << loppu > ./qrpat.log
9 0, 0 # IWRT, ITDARPA (0 - QRPA, 1 - TDA, 2 - BCS)
10 112,64,48,44,28 # MA, NN, NZ, NACTN, NACTZ
11 1.00, 1.00, 0.93, 1.02 # GPH, GPP, GPAIRN, GPAIRZ
12 500, 1.0e-3,-3.0,-3.0 # LMAX, EPSY, RLAMBN, RLAMBZ
13 22 # NMULTI
14 0, -1, 1.00, 1.00 # J, PI, GPH, GPP
15 0, 1, 1.07, 0.87 # GPH = 0.0 <=> GPH = GPH given above
16 1, -1, 0.52, 1.00 # GPP = 0.0 <=> GPP = GPP given above
17 1, 1, 1.00, 1.00
18 2, -1, 1.00, 1.00
19 2, 1, 0.71, 1.00
20 3, -1, 0.72, 1.00
21 3, 1, 1.00, 1.00

```

```

22 4, -1, 1.00, 1.00
23 4, 1, 0.89, 1.00
24 5, -1, 0.82, 1.00
25 5, 1, 1.00, 1.00
26 6, -1, 1.00, 1.00
27 6, 1, 1.39, 1.00
28 7, -1, 1.05, 1.00
29 7, 1, 1.00, 1.00
30 8, -1, 1.00, 1.00
31 8, 1, 1.00, 1.00
32 9, -1, 1.00, 1.00
33 9, 1, 1.00, 1.00
34 10, -1, 1.00, 1.00
35 10, 1, 1.00, 1.00
36 loppu
37 mv -f ./fort.21 ./qrpat112cd.out
38 rm ./fort.*
39
40
41 #      MA          = MASS
42 #      NN          = NEUTRON NUMBER
43 #      NZ          = PROTON NUMBER
44 #      NACTN       = NUMBER OF ACTIVE NEUTRONS(FOR THE BCS CALCULATION)
45 #      NACTZ       = NUMBER OF ACTIVE PROTONS(FOR THE BCS CALCULATION)
46 #      GPH,GPP,GPAIR = COUPLING CONSTANTS FOR THE PH,PP AND PAIRING
47 #                  TERMS OF THE TWO BODY INTERACTIONS
48 #      LMAX,EPSY   = MAXIMUM NUMBER OF INTERACTIONS FOR THE BCS
49 #                  PROCEDURE AND ALLOWED ERROR IN THE PARTICLE
50 #                  NUMBER CONVERGENCE PROCEDURE
51 #      RLAMBN(RLAMBZ) = INITIAL VALUES OF THE NEUTRON(PROTON)
52 #                  FERMI LEVELS

```

```

qrpat.log
1
2 GPAIRN= 0.93000001
3
4          BCS OUTPUT FOR NEUTRONS          NACT= 44
5
6          1      0.09048      0.99590      7.85667      1.41584      0.00000
7          2      0.07693      0.99704      9.17184      1.40700      0.00000
8          3      0.06941      0.99759      9.66291      1.33824      0.00000
9          4      0.05308      0.99859      13.04337     1.38281      0.00000
10         5      0.88399      0.46750      1.32255     1.09314      0.00000
11         6      0.93263      0.36083      1.74176     1.17228      0.00000
12         7      0.39024      0.92071      1.59933     1.14927      0.00000
13         8      0.40287      0.91526      1.73308     1.27807      0.00000
14         9      0.11223      0.99368      5.68125     1.26719      0.00000
15        10      0.99825      0.05915      9.44689     1.11560      0.00000
16        11      0.93824      0.34597      1.61645     1.04942      0.00000
17
18          RLAM= -8.32948  DIF= 0.000313  ILOOP= 20
19
20 GPAIRZ= 1.01999998
21
22          BCS OUTPUT FOR PROTONS          NACT= 28
23
24          1      0.38431      0.92320      1.86375     1.32251      0.00000
25          2      0.31447      0.94927      2.16767     1.29417      0.00000
26          3      0.17953      0.98375      3.83922     1.35612      0.00000
27          4      0.07560      0.99714      7.74361     1.16743      0.00000
28          5      0.99939      0.03506      7.46997     0.52347      0.00000

```

```

29         6      0.99872      0.05065      8.03253      0.81272      0.00000
30         7      0.99733      0.07298      5.23225      0.76166      0.00000
31         8      0.99477      0.10210      6.01533      1.22193      0.00000
32         9      0.35185      0.93606      1.51375      0.99712      0.00000
33        10      0.99954      0.03024     16.01426      0.96800      0.00000
34        11      0.99873      0.05042      7.53429      0.75884      0.00000
35
36                RLAM=  -8.26105  DIF=  0.000340  ILOOP=  35
37
38 pp-nn QRPA: J=  0  PARITY= -1
39
40        NNNME,NCONF=      5      10
41
42
43
44        DATA
45
46        MA NN NZ NACTN NACTZ  112      64      48      44      28
47
48        LMAX EPSY RLAMBZ  500      0.00100      -3.00000      -3.00000
49
50        GPH GPP GPAIRN GPAIRZ      1.00000      1.00000      0.93000      1.02000
51
52        NEUTRON SIGLE PARTICLE BASIS
53
54          1      1      1      1      -16.05752
55          2      1      1      3      -17.39275
56          3      0      3      5      -17.89927
57          4      0      3      7      -21.29934
58          5      2      0      1      -7.58504
59          6      1      2      3      -7.04127
60          7      1      2      5      -9.44170
61          8      0      4      7      -9.50000
62          9      0      4      9      -13.86760
63         10      0      5      9      1.05130
64         11      0      5      11     -7.10000
65
66        PROTON SINGLE PARTICLE BASIS
67
68          1      1      1      1      -9.57427
69          2      1      1      3     -10.00000
70          3      0      3      5     -11.85279
71          4      0      3      7     -15.91616
72          5      2      0      1     -0.80944
73          6      1      2      3     -0.26975
74          7      1      2      5     -3.08454
75          8      0      4      7     -2.37114
76          9      0      4      9     -9.40000
77         10      0      5      9      7.72393
78         11      0      5      11     -0.76508
79
80        NN-CONFIGURATIONS
81
82         1  1  5  1  1  1      7.85667      2  0  1      1.32255      9.17922
83         2  2  6  1  1  3      9.17184      1  2  3      1.74176     10.91359
84         3  3  7  0  3  5      9.66291      1  2  5      1.59933     11.26224
85         4  4  8  0  3  7     13.04337      0  4  7      1.73308     14.77645
86         5  9 10  0  4  9      5.68125      0  5  9      9.44689     15.12814
87
88        PP-CONFIGURATIONS
89
90         6  1  5  1  1  1      1.86375      2  0  1      7.46997      9.33373

```

```

91      7  2  6  1  1  3      2.16767      1  2  3      8.03253      10.20020
92      8  3  7  0  3  5      3.83922      1  2  5      5.23225      9.07147
93      9  4  8  0  3  7      7.74361      0  4  7      6.01533      13.75894
94     10  9 10  0  4  9      1.51375      0  5  9      16.01426      17.52802
95     LAMDANZ = 0.0000000E+00
96
97      GPH= 1.00000000  GPP= 1.00000000
98
99      RPA ENERGIES
100
101      8.518559  8.931186  9.501222  9.603054  10.740623  11.135614  12.602319  14.257449
102     15.659311  19.592648

```

Pitkällisten säätöjen jälkeen, kun QRPA-spektrit oli saatu tyydyttäväksi, päästiin MQPM-laskuihin ohjelman `pqstate.exe` avulla. Esimerkki ohjelman vaatimasta ajotiedostosta, `levels113cd.com`, on jälleen listattu alla. Ohjelma tulosti lokitiedoston `levels.log` (listaus alla toisena) ja kirjoitti jo tutuksi tulleeseen tapaan tulokset jatkokäsittelyä varten tiedostoon `levels113cd.out`.

```

----- levels113cd.com -----
1  #!/usr/local/bin/tcsh
2
3  cp ./ws112cd.f03 ./fort.2
4  cp ./qrpat112cd.out ./fort.3
5  cp ./int112.f09 ./fort.4
6
7  #####
8  #
9  #          Neutron states of 112Cd          #
10 #
11 #####
12
13
14 ./pqstate.exe << loppu > ./levels.log
15 1          # IT=1 <=> neutron IT=2 <=> proton
16 1,1,10    # J and parity of odd proton nucleus, number of states
17 .TRUE.    # .TRUE.=don't use lowest 0+ state
18 .TRUE.    # .TRUE.=don't use lowest 1- state
19 .TRUE.    # .TRUE.=print configurations
20 .TRUE., .TRUE. # .TRUE.=print wavefunction coeffs.
21 .FALSE., .FALSE. # TRUE.=use approximate matrix elements
22 .FALSE.    # .TRUE.=tabulate matrices
23 0.05      # criterion for zero eigenvalues
24 1.0, 1.0  # 3qp and 3qp-1qp int. scaling parameter
25 22        # number of multipoles (J,parity) used
26 0, -1, 0
27 0, 1, 0
28 1, -1, 1
29 1, 1, 0
30 2, -1, 0
31 2, 1, 4
32 3, -1, 1
33 3, 1, 0
34 4, -1, 0

```

```

35 4, 1, 2
36 5, -1, 2
37 5, 1, 0
38 6, -1, 0
39 6, 1, 2
40 7, -1, 1
41 7, 1, 0
42 8, -1, 0
43 8, 1, 0
44 9, -1, 0
45 9, 1, 0
46 10, -1, 0
47 10, 1, 0
48 loppu
49 mv -f ./fort.7 ./levels113cd.out
50 #rm ./fort.*

```

```

----- levels.log -----
1
2 Phonon plus quasiparticle calculation for odd nuclei
3
4 Single-particle and BCS data
5
6 Protons
7
8      I N(I) L(I) J(I)      SPE(I)      U(I)      V(I)      QPE(I)
9
10     1  1  1  1  -9.574274  0.384311  0.923204  1.863754
11     2  1  1  3 -10.000000  0.314469  0.949268  2.167673
12     3  0  3  5 -11.852790  0.179530  0.983752  3.839222
13     4  0  3  7 -15.916161  0.075597  0.997138  7.743615
14     5  2  0  1  -0.809444  0.999385  0.035060  7.469973
15     6  1  2  3  -0.269747  0.998716  0.050654  8.032527
16     7  1  2  5  -3.084536  0.997333  0.072980  5.232253
17     8  0  4  7  -2.371140  0.994774  0.102102  6.015330
18     9  0  4  9  -9.400000  0.351853  0.936055  1.513754
19    10  0  5  9   7.723926  0.999543  0.030237 16.014261
20    11  0  5 11  -0.765079  0.998728  0.050423  7.534286
21
22 Neutrons
23
24      I N(I) L(I) J(I)      SPE(I)      U(I)      V(I)      QPE(I)
25
26     1  1  1  1 -16.057518  0.090475  0.995899  7.856665
27     2  1  1  3 -17.392754  0.076930  0.997036  9.171837
28     3  0  3  5 -17.899273  0.069414  0.997588  9.662911
29     4  0  3  7 -21.299343  0.053083  0.998590 13.043372
30     5  2  0  1  -7.585040  0.883991  0.467504  1.322555
31     6  1  2  3  -7.041274  0.932631  0.360831  1.741757
32     7  1  2  5  -9.441696  0.390238  0.920714  1.599326
33     8  0  4  7  -9.500000  0.402866  0.915259  1.733082
34     9  0  4  9 -13.867603  0.112233  0.993682  5.681250
35    10  0  5  9   1.051305  0.998249  0.059150  9.446887
36    11  0  5 11  -7.100000  0.938245  0.345972  1.616446
37
38 NEUTRON-ODD NUCLEUS
39
40 Angular momentum J= 1/2 Parity= 1
41
42 Number of configurations= 21
43

```

```

44 Neutron configurations:
45
46     1  2  0  1          1.322555
47     2  1  1  1  1 -1  1  10.393509
48     3  1  1  3  1 -1  1  11.708681
49     4  1  2  3  2  1  1  2.346464
50     5  1  2  3  2  1  2  4.258930
51     6  1  2  3  2  1  3  4.577337
52     7  1  2  3  2  1  4  4.650671
53     8  1  2  5  2  1  1  2.204033
54     9  1  2  5  2  1  2  4.116500
55    10  1  2  5  2  1  3  4.434907
56    11  1  2  5  2  1  4  4.508241
57    12  0  3  5  3 -1  1  11.676414
58    13  0  3  7  3 -1  1  15.056874
59    14  0  4  7  4  1  1  3.605223
60    15  0  4  7  4  1  2  4.581941
61    16  0  4  9  4  1  1  7.553391
62    17  0  4  9  4  1  2  8.530109
63    18  0  5  9  5 -1  1  11.822924
64    19  0  5  9  5 -1  2  12.333082
65    20  0  5  11  5 -1  1  3.992483
66    21  0  5  11  5 -1  2  4.502641
67
68 Hamiltonian matrix dimension after orthogonalisation= 21
69
70 Energy eigenvalues of neutron-odd nucleus:
71
72     1.264669   1.911583   2.699606   3.671805   4.007005   4.189292   4.454059
73     4.554671   4.589053   4.643201
74
75 One quasiparticle probabilities of neutron-odd nucleus:
76
77     0.971467   0.013330   0.005490   0.000173   0.000108   0.000025   0.000190
78     0.000028   0.000003   0.000014
79
80 Wavefunction coefficients:
81
82 State number= 1 Energy= 1.264669
83     1  2  0  1          -0.985630
84     2  1  1  1  1 -1  1  0.007089  0.008634
85     3  1  1  3  1 -1  1 -0.007241 -0.008228
86     4  1  2  3  2  1  1 -0.057316 -0.004260
87     5  1  2  3  2  1  2  0.041122 -0.013223
88     6  1  2  3  2  1  3  0.059031  0.010714
89     7  1  2  3  2  1  4  0.000882 -0.015460
90     8  1  2  5  2  1  1  0.150151  0.141126
91     9  1  2  5  2  1  2 -0.047742 -0.009500
92    10  1  2  5  2  1  3 -0.035175 -0.004275
93    11  1  2  5  2  1  4  0.087064  0.045077
94    12  0  3  5  3 -1  1 -0.001591 -0.001171
95    13  0  3  7  3 -1  1 -0.005431  0.004385
96    14  0  4  7  4  1  1 -0.029610 -0.059277
97    15  0  4  7  4  1  2  0.005664  0.022321
98    16  0  4  9  4  1  1 -0.018542 -0.020674
99    17  0  4  9  4  1  2  0.003401  0.003384
100   18  0  5  9  5 -1  1 -0.008598 -0.006973
101   19  0  5  9  5 -1  2 -0.000751 -0.000333
102   20  0  5  11  5 -1  1  0.004202 -0.009903
103   21  0  5  11  5 -1  2 -0.006583 -0.015393
104

```

MQPM-laskujen tuloksista laskettiin β^- -siirtymätiheydet käyttäen ohjelmaa `trd.exe`, joka jatkokäsittelyä varten kirjoitti ko. siirtymätiheydet tiedostoon `trd.out`. Näistä laskettiin edelleen matriisielementit ohjelman `matel.exe` avulla. Alla on listattu esimerkki käytetystä ajotiedostosta `matel.com` ja lokitiedostosta `matel.log`. Lokitiedostossa on luettavissa myös ohjelmalle syötetyt siirtymätiheydet.

```

----- matel.com -----
1  #!/usr/local/bin/tcsh
2
3  cp ../116sn/ws116sn.f03 ./fort.3          # single-particle basis
4  cp ./trd.out ./fort.10                 # transition densities
5
6  ./matel.exe << loppu > matel.log
7
8  115,50      # A,Z of the initial nucleus (probably)
9  4.5,1,0.5,1 # spin and parity of the initial and final nucleus
10 4           # forbiddeness of the transition
11 1           # IO
12 50,10,0    # NINT,XMAX,IOINT
13
14 loppu

```

```

----- matel.log -----
1
2          NEUTRON SINGLE PARTICLE BASIS
3
4          1      1      1      1      -16.70953
5          2      1      1      3      -18.01063
6          3      0      3      5      -18.60633
7          4      0      3      7      -21.89684
8          5      2      0      1       -8.21894
9          6      1      2      3       -7.40000
10         7      1      2      5      -10.10818
11         8      0      4      7       -9.49872
12         9      0      4      9      -14.56003
13        10      0      5      9       -0.00011
14        11      0      5     11       -7.20000
15
16          PROTON SINGLE PARTICLE BASIS
17
18         1      1      1      1       -8.90000
19         2      1      1      3       -9.30000
20         3      0      3      5       -9.80000
21         4      0      3      7      -15.84635
22         5      2      0      1       -4.80000
23         6      1      2      3       -4.75000
24         7      1      2      5       -4.90000
25         8      0      4      7       -5.00000
26         9      0      4      9       -8.63054
27        10      0      5      9        7.32163
28        11      0      5     11       -0.94392
29
30
31 INITIAL STATE: JI,PI= 4.5  1      FINAL STATE: JF,PF= 0.5  1
32
33

```

```

34     FOR THE TRANSITIONS OF FORBIDDENNESS 4
35     THE NEEDED TRANSITION MULTIPOLES ARE:
36         L= 4
37         L= 5
38     NDENS, KDs          2          4          5
39
40     FOR MULTIPOLARITY 4 NPN= 17
41     PROTON INDICES:
42     9  7  8  9  7  8  9  5  6  7  8  9  7  8  2  3  4
43     NEUTRON INDICES:
44     5  6  6  6  7  7  7  8  8  8  8  9  9  11  11  11
45     TRANSITION DENSITIES:
46     1 -1.921  2 -0.001  3 -0.006  4 -0.043  5 -0.004  6  0.006  7  0.020  8  0.016
47     9 -0.013 10 -0.017 11  0.003 12 -0.005 13  0.001 14 -0.001 15  0.002 16  0.002
48     17 -0.003
49
50     FOR MULTIPOLARITY 5 NPN= 21
51     PROTON INDICES:
52     2  9  8  9  7  8  9  6  7  8  9  5  6  7  8  9  1  2  3  4
53     11
54     NEUTRON INDICES:
55     4  5  6  6  7  7  7  8  8  8  8  9  9  9  9  11  11  11  11
56     11
57     TRANSITION DENSITIES:
58     1 -0.002  2  2.124  3 -0.003  4 -0.035  5  0.014  6 -0.011  7 -0.027  8 -0.003
59     9 -0.006 10  0.001 11 -0.003 12  0.003 13 -0.002 14 -0.004 15  0.002 16  0.002
60     17  0.015 18 -0.012 19 -0.007 20  0.007 21 -0.001
61
62
63     R= 5.8355fm  Nint= 50  RANGE= 10.000
64
65     b= 2.2493fm
66
67
68     *****
69
70     THE MATRIX ELEMENTS M_1 - M_6 READ:
71
72     -2.63407E-02  -542.65  -474.00  831.24  0.00000E+00  0.00000E+00
73
74
75     THE k_e DEPENDENT MATRIX ELEMENTS READ:
76
77     k_e = 1  M2(k_e) = -598.6332  M3(k_e) = -523.8241
78     k_e = 2  M2(k_e) = -559.5917  M3(k_e) = -489.8577
79     k_e = 3  M2(k_e) = -538.6402  M3(k_e) = -471.6189
80     k_e = 4  M2(k_e) = -525.7168  M3(k_e) = -460.3631
81
82     *****
83

```

Viimeisenä vaiheena laskettiin itse $\log ft$ -arvot ja puoliintumisajat käyttäen ohjelmaa `logft.exe`, jonka lähdekoodi on listattu liitteessä B. Alla on jälleen listattu esimerkki ohjelman ajamiseen käytetystä ajotiedostosta `logft.com` ja lokitiedostosta `logft.log`.


```

logft.com
1 #!/usr/local/bin/tcsh
2
3 ./logft.exe << hapsiainen > logft.log
4
5 4, 49, 113, .831          # forbiddenness, Z, A, W_0 [MeV]
6 -.00681317, 596.61, 532.99, 876.49    # k_e independent matrix elements
7 655.9581                 # M_2(k_e)
8 612.7065
9 589.5206
10 575.2321
11 586.8804                # M_3(k_e)
12 548.3613
13 527.7000
14 514.9609
15 6                        # highest number of points for GLQ
16
17 hapsiainen
18
19 cat ./logft.log          # let's print the log file on the screen

```

```

logft.log
1
2 Z = 49  A = 113
3 FORBIDDENNESS: 4
4 E_0 = 0.8310 MeV
5 RADIUS = 5.80151 fm
6
7 THE MATRIX ELEMENTS M_1 TO M_4:
8 -0.007 596.610 532.990 876.490
9
10 THE MATRIX ELEMENTS M_minus AND M_plus:
11 -148.266 1341.486
12
13 THE k_e DEPENDENT MATRIX ELEMENTS:
14 k_e  M_2(k_e)  M_3(k_e)  M- (k_e)
15 -----
16 1    655.958   586.880  -164.232
17 2    612.706   548.361  -153.652
18 3    589.521   527.700  -147.963
19 4    575.232   514.961  -144.448
20
21 n  C-tilde      f          log ft
22 -----
23 2  0.40377E-20  0.55516    23.927
24 3  0.38514E-20  0.55886    23.950
25 4  0.39335E-20  0.55903    23.941
26 5  0.39412E-20  0.55905    23.940
27 6  0.39416E-20  0.55908    23.940
28
29 HALF-LIFE  0.15595E+25 s
30           = 0.49452E+17 y
31

```