

# **Konformikuvaukset**

Justus Törmälehto

Matematiikan Pro Gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2022

**Tiivistelmä:** Justus Törmälehto, *Konformikuvaukset*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 32s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesäkuu 2022.

Tässä tutkielmassa perehdytään kompleksitason konformikuvauksiin. Kompleksisen kuvauksen konformisuus pisteessä tarkoittaa kahden sileän käyrän leikkauspisteen kulman säilymistä kuvauksessa. Konformikuvaukset ovat derivoituvia ja bijektiivisiä avoimen joukon kuvauksia, jotka säilyttävät kaikki kulmat. Tutkielmassa perehdytään erityisesti laajennetun tason konformikuvauksiin, eli Möbius-kuvauksiin, jotka koostuvat yksinkertaisista alkeismöbius-kuvauksista. Laajennettua kompleksitasoa voidaan havainnollistaa Riemannin pallon avulla. Möbius-kuvaukset voidaan muuttaa  $2 \times 2$  matriiseiksi, jolloin niiden laskutoimitukset helpottuvat huomattavasti. Möbius-kuvausten ominaisuuksista käydään tässä tutkielmassa läpi kiintopiste sekä kaksoissuhde ja geometriselta kannalta tarkastellaan ympyröiden Möbius-kuvauksia. Möbius-kuvaus kuvaa kaikki kompleksitason ympyrät ympyröiksi tai ympyröiksi äärettömyyspisteen yli, eli suoriksi. Erilaisia kuvauksia on tässä työssä havainnollistettu kuvien avulla, joista osa on itse piirrettyjä.

## SISÄLLYSLUETTELO

1. Johdanto	1
2. Esitietoa ja laskusääntöjä	2
2.1. Kompleksinen derivoituvuus ja holomorfinisuus	3
2.2. Sileiden käyrien leikkauskulmat	4
3. Konformikuvaukset ja esimerkkejä	7
4. Laajennettu kompleksitaso	10
4.1. Riemannin pallo	10
4.2. Konformikuvaukset joukossa $\overline{\mathbb{C}}$	12
5. Möbius-kuvaukset	14
5.1. Alkeismöbius-kuvaukset	14
5.2. Möbius-kuvausten perusominaisuuksia	15
5.3. Möbius-kuvaukset ja matriisit	19
6. Möbius-kuvausten ominaisuuksia	24
6.1. Kiintopisteet	24
6.2. Kaksoissuhteet	25
6.3. Ympyrät laajennetussa kompleksitasossa	27
6.4. Peilaus ja symmetrisyys	29
Lähteet	32

## 1. Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan konformikuvausten muodostamista, tunnistamista ja ominaisuuksia kompleksitasossa. Konformikuvauksista perehdytään erityisesti laajennetun kompleksitason Möbius-kuvauksiin ja niiden ominaisuuksiin. Esitiedoiksi lukijalta oletetaan kompleksilaskennan perustiedot.

Konformikuvauksista vanhimpana tiedetään stereografinen projektio, jota käyttivät Hipparchus ja Ptolemy tähtikartan kuvaamiseen. Stereografinen projektio kuvaa pallon pinnan tasolle, jolloin kulmat säilyvät, mutta mittasuhteet eivät. Toisena historian tärkeänä konformisena kuvauksena tiedetään Mercatorin projektio (1569). Mercatorin karttaprojektiota on erityisesti käytetty merikartoissa, sillä siinä pohjoinen on aina ylhäällä ja etelä alhaalla sekä se säilyttää lokaalit kulmat ja muodot.

Konformikuvauksista tunnetuimpia, ja tässä tutkielmassa tärkeimpiä, ovat Möbius-kuvaukset, jotka on nimetty saksalaisen matemaatikon August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) mukaan. Möbius tunnetaan parhaiten topologiasta ja Möbiuksen nauhasta, jonka hän keksi vuonna 1858.

Tässä työssä konformikuvauksella tarkoitetaan kompleksitason holomorfinen bijektioita. Konformikuvauksista käytetään eri lähteissä eri nimityksiä, kuten biholomorfinen kuvaus, analyttinen bijektio ja kulmat säilyttävä kuvaus. Konformikuvaukset ovat erittäin tärkeitä kompleksianalyysissä sekä monessa fysiikan osa-alueessa.

Tutkielman alussa tarkastellaan kompleksitasossa olevien sileiden käyrien leikkauspisteiden kulmia ja sitä, miten konformikuvauksissa kaikkien leikkauspisteiden kulmien suuruudet säilyvät. Konformikuvauksissa avoimen joukon kulmat säilyvät aina samansuuruusina ja samansuuntaisina.

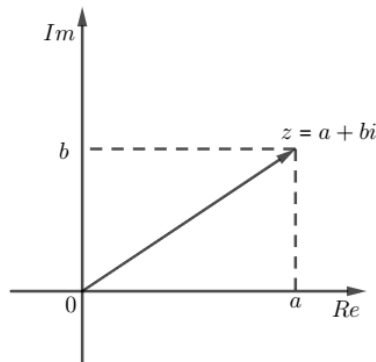
Möbius-kuvaukset voidaan muuttaa niitä vastaaviksi  $2 \times 2$  matriiseiksi, jolloin monimutkaiset Möbius-kuvausten laskutoimitukset helpottuvat huomattavasti. Geometrisesti Möbius-kuvauksia voidaan havainnollistaa tekemällä ensin stereografinen projektio kompleksitasolta Riemannin pallolle, jonka jälkeen pallo kuvataan itselleen, ja tehdään uusi stereografinen projektio takaisin kompleksitasolle. Nämä kuvaukset säilyttävät kulmat, sekä kuvaavat kaikki suorat ja ympyrät suoriksi tai ympyröiksi.

Peilauksia kutsutaan antimöbius-kuvauksiksi, jotka säilyttävät kulmat, mutta eivät suuntaa. Ympyrän peilauksella voidaan kuvata ympyrän sisäpisteet symmetrisesti kehän suhteen ympyrän ulkopuolelle. Tällöin origo kuvautuu äärettömään, ympyrän reunapisteet itselleen ja ympyrän sisäpisteet ympyrän ulkopisteiksi origon ja pisteen kautta kulkevalle suoralle ja toisinpäin. Parillinen määrä peilausten yhdistettä on Möbius-kuvaus.

Tässä tutkielmassa käytetään lähteinä pääasiassa Bruce P. Palkan [1], Ahlforsin [2] ja Robert Greenen [3] kirjoja sekä Jyväskylän yliopiston matematiikan kurssien luentomonisteita.

## 2. Esitietoa ja laskusääntöjä

Tässä luvussa käytetty lähteitä [1], [4], [5] ja [6]. Kompleksilukujen joukko  $\mathbb{C}$  koostuu kaikista reaalilukupareista  $(a, b)$ , missä  $a$  on kompleksiluvun reaaliosa ja  $b$  imaginääriosia. Kompleksilukuja voidaan havainnollistaa kompleksitasolla, missä vaak akseli kuvaa reaaliosia ja pysty akseli imaginääriosia. Kuvassa 1 on havainnollistettu kompleksilukua  $z = a + bi$  koordinaatistoon.



KUVA 1. Kompleksiluvun  $z$  havainnollistus.

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Jokainen kompleksiluku  $z$  voidaan myös esittää napakoordinaattien avulla muodossa

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

missä  $r \geq 0$  ja  $\theta \in \mathbb{R}$ , tai lyhyemmin merkittynä

$$z = re^{i\theta}.$$

Napakulmaa  $\theta = \arg(z)$  sanotaan kompleksiluvun  $z$  argumentiksi, joka ei ole yksikäsitteinen, sillä se voidaan myös esittää muodossa  $\theta + n2\pi$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ . Kompleksiluvun  $z$  argumentilla tarkoitetaan positiivisen reaaliakselin ja origosta luvun  $z$  kautta kulkevan suoran välistä kulmaa.

**MÄÄRITELMÄ 2.2.** Kompleksiluvun  $z_0 \neq 0$  argumentin pääarvo on yksikäsitteinen napakulma  $\theta$ , joka kuuluu välille  $]-\pi, \pi]$ . Argumentin pääarvoa merkitään  $\text{Arg}(z)$ .

**ESIMERKKI 2.3.** Kompleksiluvun argumenteille pätee  $\text{Arg}(1) = 0$ ,  $\text{Arg}(i) = \pi/2$ ,  $\text{Arg}(-1) = \pi$  ja  $\text{Arg}(-i) = -\pi/2$ .

**MÄÄRITELMÄ 2.4.** Nollasta poikkeavan kompleksiluvun  $z$  logaritmin pääarvo määritellään kaavalla

$$\text{Log}(z) = \log |z| + i\text{Arg}(z).$$

**MÄÄRITELMÄ 2.5.** Kompleksiluvun  $z = a + bi$  kompleksikonjugaattia merkitään

$$\bar{z} = a - bi.$$

Kompleksikonjugaateille pätee

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Reaalilukua  $\sqrt{z\bar{z}} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  kutsutaan kompleksiluvun  $z$  normiksi tai moduuliksi.

**MÄÄRITELMÄ 2.6.** Kompleksiluvun  $z$  korotus potenssiin  $n \in \mathbb{Z}$  on

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

missä  $n$  ei voi olla negatiivinen, jos  $z = 0$ .

**MÄÄRITELMÄ 2.7.** Kompleksinen eksponenttifunktio  $e^z$  määritellään kaavalla

$$e^z = e^a \cos(b) + ie^a \sin(b), \text{ missä } z = a + bi.$$

**MÄÄRITELMÄ 2.8.** Kompleksiset trigonometriset funktiot määritellään kaavoilla

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ ja } \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \text{ missä } z = a + bi.$$

**2.1. Kompleksinen derivoituvuus ja holomorfsuus.** Tässä aliluvussa kerrataan kompleksista derivoituvuutta ja holomorfsuutta. Lukijalta edellytetään perehtyneisyyttä kompleksisten funktioiden raja-arvoihin.

**MÄÄRITELMÄ 2.9.** Kompleksitason joukko  $A \subset \mathbb{C}$  on avoin, jos jokaisella  $z_0 \in A$  on olemassa  $\delta > 0$  siten, että kiekko  $\{z : |z - z_0| < \delta\}$  sisältyy joukkoon  $A$ .

**MÄÄRITELMÄ 2.10.** Olkoon  $f$  määritelty pisteen  $z_0$  sisältämässä avoimessa joukossa. Funktio  $f(z)$  on kompleksisesti derivoituvaa pisteessä  $z_0 \in \mathbb{C}$ , jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Tällöin funktion  $f$  derivaatta pisteessä  $z_0$  on

$$(1) \quad \frac{d}{dz} f(z_0) = f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Reaaliakselilla on vain kaksi suuntaa, joista voidaan lähestyä raja-arvoa, vasen ja oikea, joita tarvitaan reaalifunktioiden derivaattojen laskemiseen. Kompleksitasossa on olemassa ääretön määrä suuntia, joista voidaan lähestyä pistettä  $z_0$ , ja Määritelmä 2.10 vaatii, että kaikista suunnista lähestyessä erotusosamäärän raja-arvon tulee olla sama.

Kompleksifunktioiden derivaattojen perusominaisuudet ovat samanlaiset kuin reaalilaskennassa. Seuraavan lauseen säännöt tulevat pääosin raja-arvon ominaisuuksista.

**LAUSE 2.11.** *Olkoon  $f$  ja  $g$  kompleksisesti derivoituvia pisteessä  $z \in \mathbb{C}$ . Tällöin*

- (i)  $\frac{d}{dz}[f + cg](z) = f'(z) + cg'(z),$  kaikille  $c \in \mathbb{C},$
- (ii)  $\frac{d}{dz}[fg](z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$
- (iii)  $\frac{d}{dz} \left[ \frac{f}{g} \right] (z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2},$  kun  $g(z) \neq 0,$
- (iv)  $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z),$  kun  $f$  on kompleksisesti derivoituvaa pisteessä  $g(z).$

TODISTUS. Todistetaan kohta (ii). Muihin kohtiin voi tutustua lisää viitteistä [5, s. 24] ja [4, s. 142–145].

Koska pisteessä  $z$  derivoituva funktio on jatkuva pisteessä  $z$ , niin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}[fg](z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)(g(z+h) - g(z)) + (f(z+h) - f(z))g(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) \frac{g(z+h) - g(z)}{h} + \frac{f(z+h) - f(z)}{h} g(z) \\ &= f(z)g'(z) + f'(z)g(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \end{aligned}$$

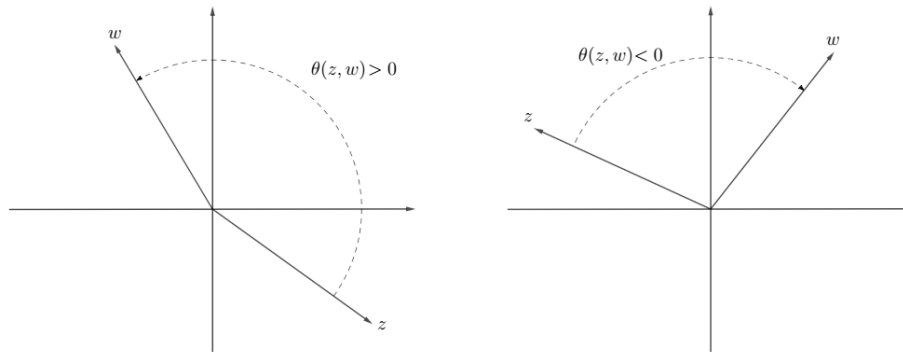
□

MÄÄRITELMÄ 2.12. Olkoon  $U, V \subset \mathbb{C}$  avoimia osajoukkoja. Jos funktio  $f : U \rightarrow V$  on kompleksisesti derivoituva jokaisessa pisteessä  $z_0 \in U$ , niin  $f$  on holomorfinen avoimessa joukossa  $U \subset \mathbb{C}$ .

LEMMA 2.13. Potenssifunktiot  $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ , sekä trigonometriset funktiot  $\sin(z)$  ja  $\cos(z)$  ovat holomorfisia missä tahansa avoimessa joukossa.

**2.2. Sileiden käyrien leikkauskulmat.** Sileällä käyrällä tarkoitetaan jatkuvaa kuvausta  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $a < b$  ja  $a, b \in \mathbb{R}$ , joka on jatkuvasti derivoituva. Sileän käyrän jokaiselle pisteelle voidaan muodostaa tangentti, jota tarvitaan kulmien pysyvyyteen ja edelleen konformikuvauksiin.

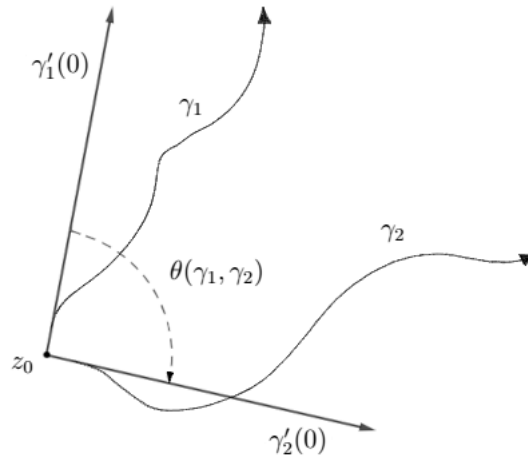
Kun  $z$  ja  $w$  ovat nolasta poikkeavia kompleksilukuja, niin  $\theta(z, w) = \text{Arg}(w/z)$  on suunnattujen vektoreiden  $z$  ja  $w$  välinen kulma. Geometrisesti  $\theta(z, w) \in ] -\pi, \pi]$  on pienempi vektoreiden välisestä kulmista. Kuvassa 2 on suunnattujen vektoreiden  $z$  ja  $w$  välinen kulma.



KUVA 2. Pisteiden  $w$  ja  $z$  välinen kulma.

MÄÄRITELMÄ 2.14. Sileiden käyrien välinen kulma annetussa leikkauspisteessä on niiden tangenttisuorien välinen kulma siinä pisteessä.

Olkoon  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  sileitä käyriä, joille pätee  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ . Tällöin  $\gamma_1'(0)$  on käyrän  $\gamma_1$  tangentti pisteessä  $z_0$  ja  $\gamma_2'(0)$  on käyrän  $\gamma_2$  tangentti pisteessä  $z_0$ . Tällöin käyrien  $\gamma_2$  ja  $\gamma_1$  välinen kulma pisteessä  $z_0$  on  $\theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \text{Arg} \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ . Kuvassa 3 on havainnollistus tangenttien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  välisestä kulmasta.

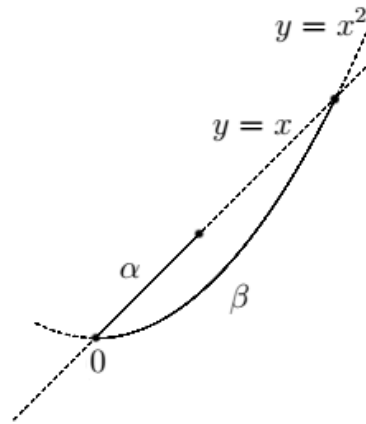


KUVA 3. Käyrien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  leikkauskulma.

ESIMERKKI 2.15. Olkoon käyrä  $\alpha : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $\alpha(t) = t + it$  suoralla  $y = x$  ja käyrä  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\beta(t) = t + it^2$  paraabelilla  $y = x^2$ . Tällöin käyrien  $\alpha$  ja  $\beta$  välinen kulma  $\theta$  pisteessä 0 voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\alpha'(0), \beta'(0)) = \theta(1 + i, 1) = \text{Arg} \left( \frac{1}{1 + i} \right) \\ &= \text{Arg} \left( \frac{1 - i}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Kuvassa 4 on piirretty Esimerkin 2.15 sileät käyrät.



KUVA 4. Käyrien  $\alpha$  ja  $\beta$  leikkauskulma pisteessä 0.

Funktio, jonka derivaatta on nolasta poikkeava, säilyttää kulmat. Kulmat säilyttävää bijektiivistä kuvausta kutsutaan konformikuvaukseksi, johon palataan tarkemmin seuraavassa luvussa.



LAUSE 2.16. Olkoon  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  derivoituva funktio, jolle  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $z_0 \in A$ , ja  $\gamma_1$  sekä  $\gamma_2$  sileitä käyriä avoimessa joukossa  $A$ , jotka leikkaavat toisiaan pisteessä  $z_0$  kulmassa  $\theta$ . Tällöin  $f$  kuvaa sileät käyrät  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  sileiksi käyriksi, jotka leikkaavat pisteessä  $f(z_0)$  samassa kulmassa  $\theta$ .

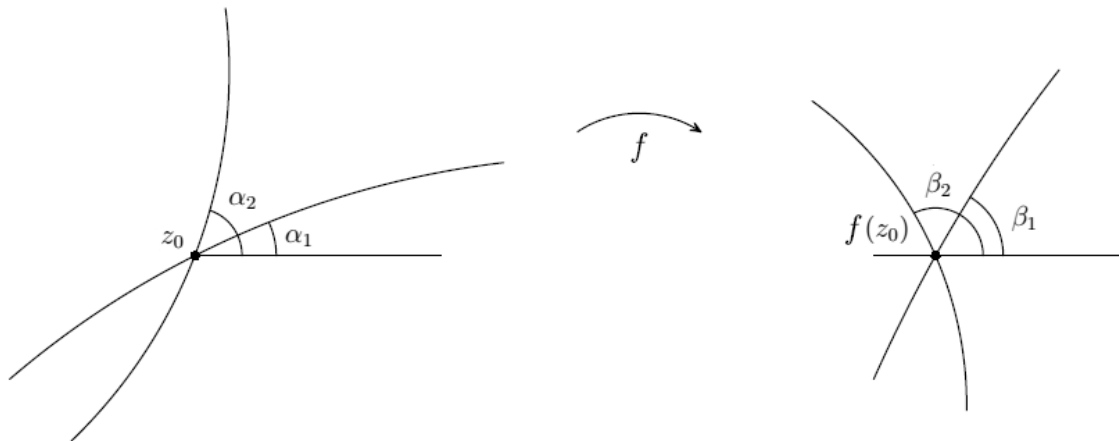
TODISTUS. Tarkastellaan käyrien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  kuvaa funktiolla  $f$ . Voidaan olettaa, että  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ . Käyrän  $f(\gamma_1)$  tangentti pisteessä  $f(z_0)$  on

$$(2) \quad \frac{d}{dt}f(\gamma_1(t))|_{t=0} = f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(z_0)\gamma_1'(0),$$

ja samoin käyrän  $f(\gamma_2)$  tangentti pisteessä  $f(z_0)$  on  $f'(z_0)\gamma_2'(0)$ . Käyrän  $f(\gamma_1)(t)$  pisteessä 0 tangentin eräs suuntakulma on siis

$$(3) \quad \beta_1 = \text{Arg}f'(\gamma_1(0)) + \varphi, \quad \text{kun } \varphi = \text{Arg}\gamma_1'(0)$$

Näin ollen kuvapolkujen tangentit saadaan kertomalla tangentit samalla nollassa poikkeavalla kompleksiluvulla  $f'(z_0)$ . Tällöin tangenttien välinen kulma ja suunta eivät muutu, mutta ne kiertävät saman kulman,  $f'(z_0)$ :n argumentin, verran. Merkitään käyrien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  välistä kulmaa  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  ja  $f(\gamma_1)$  ja  $f(\gamma_2)$  välistä kulmaa  $\beta = \beta_2 - \beta_1$ . Koska  $f'(z_0) \neq 0$ , niin laskun (3) nojalla sileiden käyrien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  välinen kulma pysyy kuvauksessa  $f$  samana:  $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 + n2\pi$ , jollain  $n \in \mathbb{Z}$ . Kuvassa 5 on havainnollistettu käyrien tangenttien väliset kulmat pisteissä  $z_0$  ja  $f(z_0)$ .  $\square$



KUVA 5. Käyrien  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  sekä  $f(\gamma_1)$  ja  $f(\gamma_2)$  leikkauskulmat.

HUOMAUTUS 2.17. Jos Lauseen 2.16 funktion  $f$  derivaatta olisi 0 jossain pisteessä  $z_1 \in A$ , niin tällöin  $f$  ei välttämättä kuvaisi kahta pisteessä  $z_1$  leikkaavaa eri sileää käyrää samassa kulmassa leikkaaviksi sileiksi käyriksi.

ESIMERKKI 2.18. Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $f(z) = z^2$ , jolloin  $f'(0) = 0$ , ja olkoot sileät käyrät  $\gamma_1(t) = it$  ja  $\gamma_2(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Tällöin käyrät  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  leikkaavat toisiaan kohtisuoraan origossa. Tällöin  $f(\gamma_1(t)) = (it)^2 = -t^2$  ja  $f(\gamma_2(t)) = t^2$ , jolloin molemmat sileät käyrät kuvautuvat samalle suoralle (reaaliakselille), eikä kuvakäyrien välinen kulma origossa ole enää suorakulma. Tämä johtuu siitä, että funktion  $f$  derivaatta origossa on nolla, jolloin se ei siinä pisteessä säilytä kulmia.

Esimerkissä 3.7 käydään tarkemmin läpi, milloin funktio  $z^2$  säilyttää kulmat.

### 3. Konformikuvaukset ja esimerkkejä

Tässä luvussa käydään läpi konformikuvausten määritelmä sekä ominaisuuksia. Lisäksi annetaan erilaisia esimerkkejä konformikuvauksista. Osa tuloksista jätetään viitteiden varaan. Tässä luvussa on käytetty lähteitä [1], [3] ja [12].

**MÄÄRITELMÄ 3.1.** Olkoon  $U, V \subset \mathbb{C}$  avoimia osajoukkoja. Funktio  $f : U \rightarrow V$  on konformikuvaus, jos  $f$  on holomorfinen bijektio.

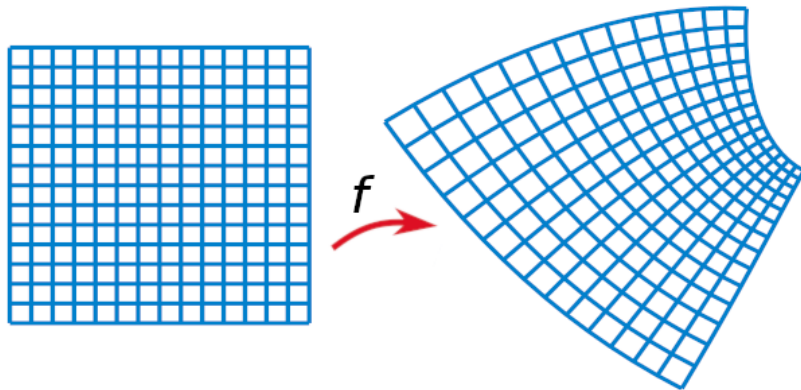
**LEMMA 3.2.** *Kaikki konformikuvaukset  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ovat muotoa  $f(z) = az + b$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat kompleksilukuja ja  $a \neq 0$ .*

**TODISTUS.** Tiedetään, että muotoa  $f(z) = az + b$  olevat kuvaukset ovat holomorfinen bijektioina konformikuvauksia. Viitteissä [1, s. 388] ja [3, s. 180] todistetaan, että ei ole muita konformikuvauksia  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\square$

**LEMMA 3.3.** Olkoon  $U, V \subset \mathbb{C}$  avoimia osajoukkoja ja  $f : U \rightarrow V$  konformikuvaus. Tällöin sen derivaatta on nollasta poikkeava kaikissa joukon  $U$  pisteissä.

**TODISTUS.** Koska funktio  $f$  on joukon konformikuvauksena bijektio joukossa  $U$ , on sen derivaatan oltava nollasta poikkeava kaikkialla joukossa  $U$ . Tarkempi todistus ohitetaan ja siihen voi tutustua viitteen [3, s. 179–180] avulla.  $\square$

Kuvassa 6 on yksinkertainen havainnollistus konformikuvauksesta.



KUVA 6. Konformikuvauksen havainnollistus.

**SEURAUUS 3.4.** *Lauseen 2.16 nojalla mikä tahansa kompleksikuvaus, jolla on nollasta poikkeava derivaatta ja joka on bijektio, säilyttää kulmat kompleksitasossa. Tällaista avoimen joukon  $D \subset \mathbb{C}$  kompleksikuvausta sanotaan konformiseksi niissä pisteissä, joissa se säilyttää kulmat.*

**LAUSE 3.5.** *Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  konformikuvaus. Tällöin funktion  $f$  käänteiskuvaus  $f^{-1}$  on konforminen.*

**TODISTUS.** Tiedetään, että bijektio käänteiskuvaus on bijektio ja viitteessä [3, s. 179] näytetään, että holomorfinen funktion käänteiskuvaus on holomorfinen. Näin ollen holomorfinen bijektio käänteiskuvaus on holomorfinen bijektio, eli konformikuvauksen käänteiskuvaus on konforminen.  $\square$

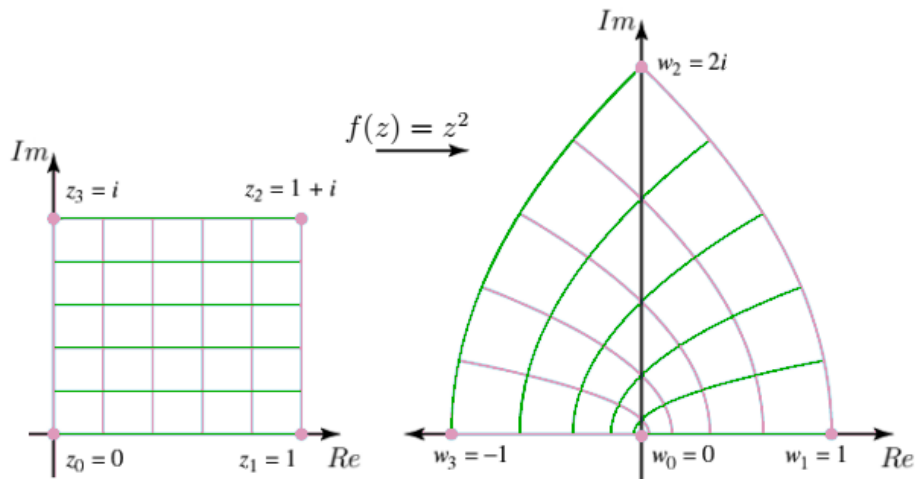
LAUSE 3.6. Olkoon  $U, V, W \subset \mathbb{C}$  avoimia osajoukkoja. Tällöin konformikuvausten  $f : U \rightarrow V$  ja  $g : V \rightarrow W$  yhdiste  $g \circ f$  on konforminen.

TODISTUS. Olkoon  $V, U, W \subset \mathbb{C}$  avoimia. Olkoon  $f : U \rightarrow V$  ja  $g : V \rightarrow W$  konformikuvauksia. Bijektioiden yhdiste on bijektio ja holomorfisten kuvausten yhdiste on holomorfinen. Siispä konformikuvausten yhdiste on konforminen.  $\square$

ESIMERKKI 3.7. Etsitään yksikköneliön

$$S = \{x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

kuvajoukko konformikuvauksella  $f(z) = z^2$ . Funktio  $f$  on holomorfinen bijektio joukossa kuvajoukolleen ja näin ollen se on joukon  $S$  konformikuvaus. Suorat kulmat pisteissä  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + i$  ja  $z_3 = i$  kuvautuvat suoriksi kulmiksi pisteisiin  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 2i$  ja  $w_3 = -1$ . Imaginääriakselin pisteet  $z = 0 + bi$ ,  $b \in ]0, 1[$  kuvautuvat pisteiksi  $-b^2$ ,  $b \in ]0, 1[$  reaaliakselille. Näin ollen neliön vasen sivu sekä alasivu kuvautuvat samalle suoralle  $Im(z) = 0$ . Kuvassa 7 on funktion  $f = z^2$  lähtö- ja maalijoukko piirrettynä koordinaatistoon ja selvennetty väreillä.



KUVA 7. Yksikköneliön konformikuvaus funktiolla  $f = z^2$ .

ESIMERKKI 3.8. Olkoon  $-\infty < a < b < \infty$  ja  $-\pi < \alpha, \beta \leq \pi$ . Olkoon  $f : D \rightarrow D'$ , missä  $f(z) = e^z$  ja  $D, D' \in \mathbb{C}$  avoimia joukkoja, joille

$$D = \{z = x + iy : a < x < b, \alpha < y < \beta\} \text{ ja}$$

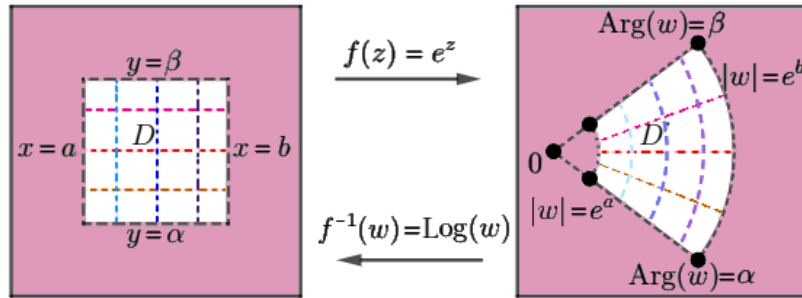
$$D' = \{w : e^a < |w| < e^b, \alpha < \text{Arg}(w) < \beta\}.$$

Tällöin  $f$  on holomorfinen kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ , sillä sen derivaatta on  $e^z$ , joka on kaikkialla nollasta poikkeava. Funktio  $e^z = e^x e^{iy}$  kuvaa pystysuorat  $Re(z) = x_0$  säteisen origokeskeisen ympyrän kaariksi, koska  $|\beta - \alpha| < 2\pi$ . Vaakasuorat  $Im(z) = y_0$  kuvautuvat origosta lähteviksi säteiksi, joiden argumentti on  $y_0$ ,  $e^a$  ja  $e^b$  säteisten ympyröiden väliin.

Funktion  $f$  käänteiskuvaus on kompleksisen logaritmin päähaaran rajoittuma joukkoon  $D'$ , eli

$$f^{-1}(w) = \text{Log}(w), \text{ kaikilla } w \in D'.$$

Tällöin eksponenttifunktio  $f(z) = e^z$  on konformikuvaus joukosta  $D$  joukkoon  $D'$  ja samoin kuvaus  $f^{-1}(w) = \text{Log}(w)$  on konformikuvaus joukosta  $D'$  joukkoon  $D$ . Kuvauksen  $f(z) = e^z$  maalijoukko on  $e^b$  säteinen ympyräsektori kulmalla  $|\beta - \alpha|$ , josta on poistettu  $e^a$  säteinen sektori. Kuvassa 8 on kuvauksen  $f(z) = e^z$  lähtö- ja maalijoukko sekä eri väristen katkoviivojen kuvautuminen funktiolla  $f$ .



KUVA 8. Konformikuvaus  $e^z$  joukosta  $D$  joukkoon  $D'$ .

#### 4. Laajennettu kompleksitaso

Tässä luvussa on käytetty lähteitä [1], [3], [5], [7], [10], [11] ja [13]. Seuraavaksi tutustutaan laajennettuun kompleksitasoon, sen laskusääntöihin ja Riemannin palloon, joita tarvitaan Möbius-kuvauksien tarkastelua varten.

Kompleksitasoon  $\mathbb{C}$  voidaan lisätä kompleksinen äärettömyyspiste  $\infty \notin \mathbb{C}$ . Tällä tavoin saatua uutta joukkoa  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  kutsutaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Toisin kuin laajennetulla reaalitasolla, laajennetulla kompleksitasolla on vain yksi äärettömyyspiste.

**MÄÄRITELMÄ 4.1.** Asetetaan seuraavat laskutoimitukset joukkoon  $\overline{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \infty \pm z &= z \pm \infty = \infty, & \text{kun } z \in \mathbb{C}, \\ \infty \cdot z &= z \cdot \infty = \infty, & \text{kun } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \\ \frac{z}{\infty} &= 0, & \text{kun } z \in \mathbb{C}, \\ \frac{z}{0} &= \infty, & \text{kun } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

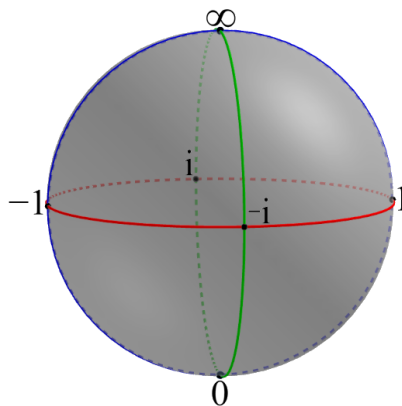
**HUOMAUTUS 4.2.** Operaatioita  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  ja  $0 \cdot \infty$  ei ole määritelty, eikä niitä saa käyttää.

Laajennettu kompleksitaso  $\overline{\mathbb{C}}$  on kompleksilukujen joukko, johon on lisätty äärettömyyspiste  $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ . Tämän pisteen ajatellaan olevan äärettömän kaukana missä suunnassa tahansa. Laajennetulle kompleksitasolle määritellään topologia, jonka kannan muodostavat kompleksitason avoimet kiekot sekä sellaiset joukot, joihin kuuluvat äärettömyyspiste sekä kaikki kompleksiluvut, joiden itseisarvo on jotakin vakiota suurempi, eli muotoa

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \text{ tai } \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

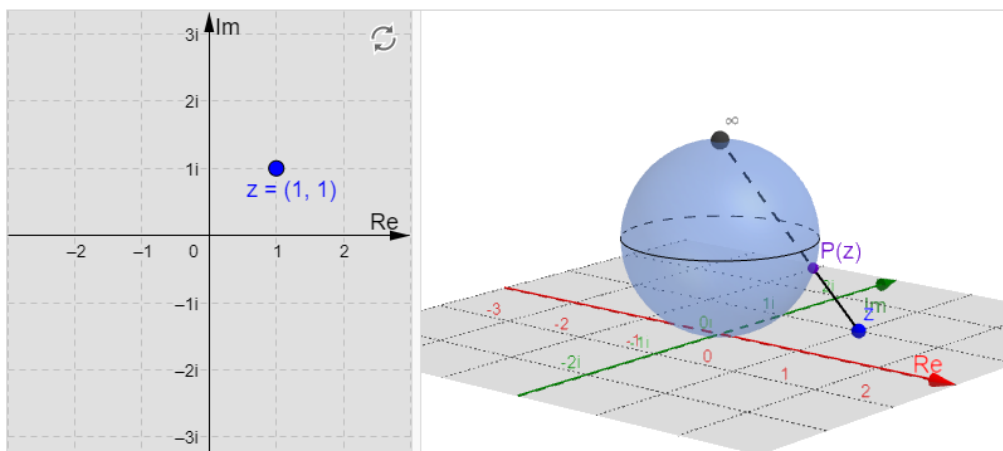
olevat joukot. Tällöin laajennettu taso on topologisena avaruutena kompakti. Laajennetun kompleksitason topologian tarkempi käsittely ohitetaan tässä työssä. Kompleksitason kompaktiuteen voi tutustua tarkemmin viitteistä [3, s. 335–338] ja [10, s. 10].

**4.1. Riemannin pallo.** Laajennettua kompleksitasoa  $\overline{\mathbb{C}}$  voidaan kuvata yksikköpallona avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Tätä palloa kutsutaan Riemannin palloksi, Kuva 9.

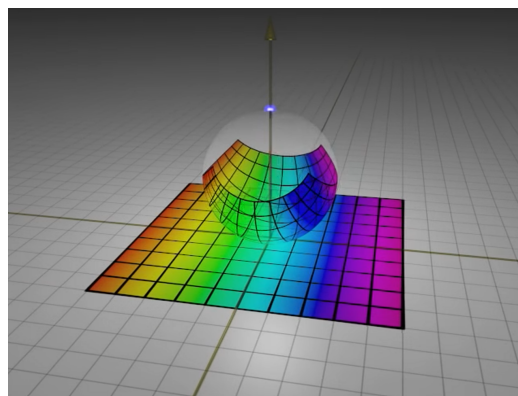


KUVA 9. Riemannin pallo.

Kompleksitaso voidaan kuvata Riemannin pallolle siten, että origo kuvautuu pallon etelänavalle ja äärettömyys piste pohjoisnavalle ja kaikki muut kompleksitason pisteet kuvautuvat bijektiivisesti pallon pinnalle seuraavalla tavalla: sijoitetaan Riemannin pallo kompleksitason päälle niin, että origo ja pallon etelänapa ovat samassa pisteessä. Tällöin kaikki pisteet kuvautuvat stereografisella projektiolla, kun äärettömyyspisteestä, eli pallon pohjoisnavasta piirretään suora  $L$  pisteeseen  $z$  kompleksitasossa. Tällöin kompleksitason piste  $z$  kuvautuu pallon pinnalle sen leikkauspisteeseen  $P(z)$  suoran  $L$  kanssa. Näin saadaan kaikki pisteet  $z = a + ib$  vastaamaan yksikäsitteisesti pistettä  $P(z)$  pallon pinnalla. Stereografista projektiota Riemannin pallon pinnalta laajennetulle kompleksitasolle on havainnollistettu kuvissa 10 ja 11.



KUVA 10. Stereografinen projektiio Riemannin pallolta kompleksitasolle. Kuva viitteestä [10].



KUVA 11. Neliöruudukon stereografinen projektiio kompleksitasolta Riemannin pallolle. Kuva viitteestä [11].

**4.2. Konformikuvaukset joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ .** Kompleksifunktion siirtäminen Riemannin palloon antaa mahdollisuuden tarkastella funktion käyttäytymistä äärettömässä aivan kuten missä tahansa muussa pisteessä. Erityisesti voidaan tarkastella, säilyttääkö funktio kahden sileän polun välisen kulman niiden leikkauspisteen ollessa äärettömyyspisteessä.

Kompleksikuvausta  $f$  voidaan tarkastella äärettömyyspisteessä inversion avulla, jolloin pisteen  $N = \infty$  ympäristö muuttuu pisteen  $S = 0$  ympäristöksi. Tällöin saadaan kuvauksen konformisuudelle annetussa laajennetun kompleksitason pisteessä seuraava määritelmä.

**MÄÄRITELMÄ 4.3.** Olkoon  $f : U \rightarrow V$ , missä  $U, V \subset \overline{\mathbb{C}}$  avoimia joukkoja. Tällöin funktio  $f$  on konforminen pisteessä

- (i)  $z \in \mathbb{C}$ , kun  $f(z) \in \mathbb{C}$ , jos  $f$  on kompleksisesti derivoituva pisteessä  $z$  ja  $f'(z) \neq 0$ .
- (ii)  $z \in \mathbb{C}$ , kun  $f(z) = \infty$ , jos  $1/f(z)$  on konforminen pisteessä  $z$ .
- (iii)  $z = \infty$ , kun  $f(z) \in \mathbb{C}$ , jos  $f(1/z)$  on konforminen pisteessä  $0$ .
- (iv)  $z = \infty$ , kun  $f(\infty) = \infty$ , jos  $1/f(1/z)$  on konforminen pisteessä  $0$ .

**MÄÄRITELMÄ 4.4.** Kuvaus  $f : U \rightarrow V$  on konforminen, missä  $U, V \subset \overline{\mathbb{C}}$  ovat avoimia joukkoja, jos  $f(z)$  on bijektio ja konforminen jokaisessa pisteessä  $z \in U$ .

**HUOMAUTUS 4.5.** Bijektiivisellä kuvauksella  $f : U \rightarrow V$ , missä  $U, V \subset \overline{\mathbb{C}}$  ovat avoimia, voi olla enintään yksi piste  $z_0 \in D$ , jolle  $f(z_0) = \infty$ , sillä injektio kuvaa eri pisteet eri pisteiksi.

**ESIMERKKI 4.6.** Yksinkertainen esimerkki konformikuvauksesta  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on funktio  $f(z) = z^{-1}$ , joka on peilaus yksikköympyrän ja reaaliakselin suhteen. Peilaukseen palataan tarkemmin luvussa 6.4. Määritelmän 4.3 nojalla

- (i):  $f'(z) = -z^{-2}$ , joka on jatkuva ja nollassa poikkeava kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ .
- (ii):  $f(0) = \infty$ , ja  $\frac{1}{f(z)} = z$ , joka on derivoituva ja sen derivaatta pisteessä  $0$  on nollassa poikkeava. Näin ollen  $z$  on konforminen nollassa ja  $f$  on konforminen nollassa.
- (iii):  $f(\infty) = 0$  ja  $f(\frac{1}{z}) = z$ , joka on konforminen nollassa, jolloin  $f$  on konforminen pisteessä  $\infty$ .

**LAUSE 4.7.** *Kaikki konformikuvaukset  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ovat muotoa  $(az + b)/(cz + d)$ , missä  $ad - bc \neq 0$ . Erityisesti kaikkien konformikuvausten  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  kuvajoukko on koko laajennettu kompleksitaso.*

**TODISTUS.** Olkoon  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  konformikuvaus. Olkoon  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  mikä tahansa laajennetun kompleksitason konformikuvaus. Määritellään funktio  $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  siten, että jos  $f(\infty) = \infty$ , niin  $h = f$ , ja jos  $f(\infty) = w_0 \neq \infty$ , niin  $h = g \circ f$ , missä  $g(z) = 1/(z - w_0)$ . Koska  $g$  on nyt muotoa  $(az + b)/(cz + d)$ , joka kuvaa pisteen  $w_0$  pisteeseen  $\infty$ , niin  $h$  on molemmissa tapauksissa joukon  $\overline{\mathbb{C}}$  konformikuvaus. Funktion  $h$  rajoittuma joukkoon  $\mathbb{C}$  on kompleksitason konformikuvaus itselleen, jolloin  $h$  on Lemman 3.2 nojalla muotoa  $h(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ . Koska  $f = h$  tai  $f = g^{-1} \circ h$ , niin  $f$  on muotoa  $(az + b)/(cz + d)$ .  $\square$

HUOMAUTUS 4.8. Laajennetun kompleksitason konformikuvaukset  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ovat muotoa

$$(4) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}, \text{ ja } ad - bc \neq 0.$$

Nämä funktiot ovat seuraavassa luvussa käsiteltäviä Möbius-kuvauksia. Ehto  $ad - bc \neq 0$  varmistaa, ettei kyseessä ole vakiokuvaus. Laskemalla samaan tapaan kuin Esimerkissä 4.6 nähdään, että  $f$  on konforminen nollassa ja äärettömyyspisteessä tapauksissa  $c = 0$ , jolloin  $f(\infty) = \infty$  ja  $c \neq 0$ , jolloin  $f(-d/c) = \infty$ .

Funktio  $f$  on bijektio, sillä sen käänteisfunktio

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

on myös muotoa (4). Tällöin kuvaukselle  $f$  pätee  $f(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$ . Siispä funktiot muotoa (4) ovat joukon  $\overline{\mathbb{C}}$  kuvauksia itselleen sekä yksikkökiekkon kuvauksia itselleen tai joukkoon  $\overline{\mathbb{C}}$ . Lisää viitteissä [1, s. 389–391] ja [5, s. 38]. Yksikkökiekkon kuvaukseen laajennetussa kompleksitasossa palaamme myöhemmin Esimerkissä 5.10.



## 5. Möbius-kuvaukset

Tässä luvussa on käytetty lähteitä [1], [3], [8] ja [11]. Aluksi määritellään Möbius-kuvaukset ja osoitetaan, että ne voidaan rakentaa yksinkertaisten alkeismöbius-kuvausten yhdisteistä. Möbius-kuvauksista käydään läpi yhdisteet, käänteiskuvaukset sekä niiden yhteys  $2 \times 2$  matriiseihin.

### 5.1. Alkeismöbius-kuvaukset.

**MÄÄRITELMÄ 5.1.** Funktio  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on Möbius-kuvaus, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$(5) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}},$$

joillakin kompleksiluvuilla  $a, b, c$  ja  $d$ , joille  $ad - bc \neq 0$ .

**HUOMAUTUS 5.2.** Jos olisi  $ad - bc = 0$ , niin funktion kahden pisteen erotus olisi aina nolla, sillä

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \frac{aw + b}{cw + d} - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(aw + b)(cz + d) - (az + b)(cw + d)}{(cw + d)(cz + d)} \\ &= \frac{w(ad - bc) + z(cb - ad) + awcz + bd - azcw - bd}{(cw + d)(cz + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(w - z)}{(cw + d)(cz + d)} = 0. \end{aligned}$$

Tässä tulee huomata, että tämä tarkastelu ei koske tilannetta  $f(w) = \infty$  ja  $f(z) = \infty$ , sillä laskutoimitusta  $\infty - \infty$  ei ole määritelty. Toisin sanoen tarkastelusta jätetään pois tilanteet  $cz + d = 0$  ja  $cw + d = 0$ .

**MÄÄRITELMÄ 5.3.** Alkeismöbius-kuvaukset  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ovat

- |                 |  |
|-----------------|--|
| i. siirto       | $f(z) = z + b$ , missä $b \in \mathbb{C}$ ,                  |
| ii. kierto      | $f(z) = e^{i\theta}z$ , missä $\theta \in \mathbb{R}$ ,      |
| iii. dilataatio | $f(z) = rz$ , missä $r \in \mathbb{R}_+$ ,                   |
| iv. inversio    | $f(z) = z^{-1}$ , jolle $f(0) = \infty$ ja $f(\infty) = 0$ . |

**LEMMA 5.4.** Alkeismöbius-kuvausten käänteiskuvaukset ovat alkeismöbius-kuvauksia.

**TODISTUS.** Käänteiskuvaukset ovat  $z - b$ , jolle pätee  $-b \in \mathbb{C}$ ,  $e^{-i\theta}z$ , jolle pätee  $-\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{r}z$ , jolle pätee  $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}_+$  sekä  $z^{-1}$ , joka on sama kuin inversion kuvaus itse. Näin ollen kaikkien alkeismöbius-kuvausten käänteiskuvaukset ovat edelleen alkeismöbius-kuvauksia.  $\square$

**LAUSE 5.5.** Kaikki Möbius-kuvaukset voidaan kirjoittaa korkeintaan viiden alkeismöbius-kuvauksen yhdisteenä.

**TODISTUS.** Olkoon  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , mielivaltainen Möbius-kuvaus. Tarkastellaan aluksi tapausta  $c = 0$ . Osoitetaan, että  $f$  on tyyppejä i, ii ja iii olevien alkeismöbius-kuvausten yhdiste. Tässä ei  $a$  eikä  $d$  voi olla nolla, sillä  $ad - bc \neq 0$ , jos ja vain jos  $ad \neq 0$ . Osoitetaan, että tällöin pätee

$$f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

missä funktiot  $f_1$ ,  $f_2$  ja  $f_3$  ovat alkeismöbius-kuvauksia. Kaikilla  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  voidaan funktio  $f$  kirjoittaa muotoon

$$f(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Koska  $\frac{a}{d} \neq 0$ , niin siirtymällä napakoordinaatteihin voidaan kirjoittaa  $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$ , missä  $r \in \mathbb{R}_+$  ja  $\theta \in \mathbb{R}$ . Tällöin alkeismöbius-kuvaukset ovat muotoa

$$f_1(z) = e^{i\theta}z, f_2(z) = rz \text{ ja } f_3(z) = z + \frac{b}{d}$$

ja niiden yhdiste on

$$\begin{aligned} (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) &= (f_3 \circ f_2)(e^{i\theta}z) = f_3(re^{i\theta}z) = re^{i\theta}z + \frac{b}{d}, \\ &= \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d} = f(z). \end{aligned}$$

Näin ollen tapauksessa  $c = 0$  väite pätee. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta  $c \neq 0$ . Tällöin kuvaus voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b) + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2z + cd} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}, \end{aligned}$$

missä  $\frac{bc-ad}{c^2}$  voidaan kirjoittaa napakoordinaattimuodossa

$$\frac{bc - ad}{c^2} = re^{i\theta}.$$

Tällöin  $f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$ , missä

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + b_1, & b_1 &= \frac{d}{c}, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z}, \\ f_3(z) &= e^{i\theta}z, \\ f_4(z) &= rz, & r &\in \mathbb{R}_+ \text{ ja} \\ f_5(z) &= z + b_2, & b_2 &= \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Molemmissa tapauksissa  $c = 0$  ja  $c \neq 0$  voidaan tarkasteltava Möbius-kuvaus esittää korkeintaan viiden alkeismöbius-kuvauksen yhdisteenä.  $\square$

## 5.2. Möbius-kuvausten perusominaisuuksia.

LAUSE 5.6. *Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.*

TODISTUS. Olkoon  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ja  $g(w) = \frac{sw+t}{uw+v}$  Möbius-kuvauksia ja olkoon  $h(w) = f \circ g(w)$ . Tällöin

$$\begin{aligned} h(w) &= f \circ g(w) = f(g(w)) = \frac{ag(w) + b}{cg(w) + d} = \frac{a \frac{sw+t}{uw+v} + b}{c \frac{sw+t}{uw+v} + d} \\ &= \frac{\frac{asw+at+buw+bv}{uw+v}}{\frac{csw+ct+duw+dv}{uw+v}} = \frac{asw + at + buw + bv}{csw + ct + duw + dv} = \frac{(as + bu)w + (at + bv)}{(cs + du)w + (ct + dv)}, \end{aligned}$$

mikä on nyt muotoa  $\frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$  ja näin ollen yhdistetty kuvaus  $f \circ g$  on Möbius-kuvaus, mikäli  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

Tarkistetaan vielä, että  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  pätee. Soveltamalla  $2 \times 2$  kompleksisten matriisien determinanttia, saadaan

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{bmatrix}.$$

Tällöin havaitaan, että

$$\det \begin{bmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{bmatrix} = \det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \right)$$

ja matriisien determinantin laskusäännöllä pätee

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että  $ad - bc \neq 0$  ja  $sv - tu \neq 0$ , jotka ovat kuvauksia  $f$  ja  $g$  vastaavien matriisien determinantit. Yhdistetyn kuvauksen matriisin determinantti on  $\alpha\delta - \beta\gamma$ , joka on kuvauksien  $f$  ja  $g$  matriisien determinanttien tulo, missä kumpikaan termi ei voi olla nolla, joten  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .  $\square$

Seuraavassa luvussa käsitellään matriisien yhteyttä Möbius-kuvauksiin tarkemmin. Kompleksimatriiseihin voi tutustua lisää viitteessä [8].

LAUSE 5.7. *Kaikki Möbius-kuvaukset  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ovat konformikuvauksia.*

TODISTUS. Osoitetaan, että jokainen alkeismöbius-kuvaus on konforminen joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Tähän vaaditaan konformisuus joukossa  $\mathbb{C}$  ja pisteessä  $\infty$ . Olkoon  $b, \theta \in \mathbb{R}$  ja  $r \in \mathbb{R}_+$ . Määritelmän 5.3 alkeismöbius-kuvaukset  $i - iii$  ovat bijektioita ja derivoituvia kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ , joten ne ovat konformisia joukossa  $\mathbb{C}$ . Kuvauksille  $i - iii$  pätee  $f(z) = \infty$ , kun  $z = \infty$ . Määritelmän 4.3 nojalla ne ovat konformisia äärettömässä, jos  $g = 1/f(1/z)$  on konforminen nollassa.

$$\begin{aligned} i) \quad g_i(z) &= \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{1}{z} + b}, \text{ jonka derivaatta on } \frac{1}{(bz + 1)^2} \\ ii) \quad g_{ii}(z) &= \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\frac{e^{i\theta}}{z}} = \frac{1}{e^{i\theta}}z, \text{ jonka derivaatta on } \frac{1}{e^{i\theta}} \text{ ja} \\ iii) \quad g_{iii}(z) &= \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{r\frac{1}{z}} = \frac{z}{r}, \text{ jonka derivaatta on } \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Tällöin funktioilla  $g_i, g_{ii}$  ja  $g_{iii}$  on nollassa poikkeava derivaatta pisteessä  $z = 0$ , jolloin ne ovat konformisia pisteessä  $\infty$ . Näin ollen funktiot  $z + b, e^{i\theta}z$  ja  $rz$  ovat konformisia joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$  ja funktion  $z^{-1}$  konformisuus joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$  on todistettu Esimerkissä 4.6.

Näin ollen kaikki alkeismöbius-kuvaukset ovat konformisia, ja Lauseen 3.6 nojalla myös alkeismöbius-kuvausten yhdisteet, Möbius-kuvaukset, ovat konformisia.  $\square$

LAUSE 5.8. *Möbius-kuvauksen käänteiskuvaus on Möbius-kuvaus.*

TODISTUS. Olkoon  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , missä kuvaukset  $f_j$  ovat alkeismöbius-kuvauksia kullakin  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ . Tällöin funktion  $f$  käänteiskuvaus on  $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1} \circ f_5^{-1}$ , joka on Lemman 5.4 ja Lauseen 5.6 nojalla alkeismöbius-kuvausten käänteiskuvausten yhdisteenä Möbius-kuvaus.  $\square$

LEMMA 5.9. *Funktiot, jotka kuvaavat yksikkökiekkon  $D = B(0, 1)$  konformisesti itselleen, ovat muotoa*

$$(6) \quad f(z) = e^{i\theta} \frac{z + c}{1 + \bar{c}z},$$

missä  $\theta \in \mathbb{R}$  ja  $c \in \mathbb{C}$ , jolle  $|c| < 1$ .

TODISTUS. Tarkistetaan, että muotoa (6) olevat funktiot antavat konformikuvauksen joukosta  $D$  itselleen. Nähdään, että  $f = g \circ h$ , missä  $g(z) = e^{i\theta}z$  ja  $h(z) = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$ . Funktio  $g$  on Möbius-kuvaus, joka kiertää joukkoa  $D$  origon ympäri. Näin ollen  $g$  kuvaa joukon  $D$  itselleen konformisesti. Funktio  $h$  on muotoa  $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ , missä  $\alpha = 1, \beta = c, \gamma = \bar{c}$  ja  $\delta = 1$ , jolle  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \cdot 1 - c \cdot \bar{c} = 1 - |c|^2 \neq 0$ , koska  $|c| < 1$ . Näin ollen  $h$  on Möbius-kuvauksena konformikuvaus.

Tarkastellaan seuraavaksi, miten pallon eri pisteet kuvautuvat.

$$h(0) = \frac{c}{1} = c \text{ kuvautuu kiekon sisälle, sillä } |c| < 1.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktion  $h$  osoittajan normi on väitteen arvoilla aina pienempää kuin nimittäjän normi. Osoitetaan, että  $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ , jos ja vain jos  $|z| \leq 1$ , missä yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos  $|z| = 1$ , kun  $|c| < 1$ .

$$\begin{aligned} & |z + c| \leq |1 + \bar{c}z| \\ \Leftrightarrow & |z + c|^2 \leq |1 + \bar{c}z|^2 \\ \Leftrightarrow & (z + c)(\overline{z + c}) \leq (1 + \bar{c}z)(\overline{1 + \bar{c}z}) \\ \Leftrightarrow & z\bar{z} + c\bar{z} + z\bar{c} + c\bar{c} \leq 1 + \bar{c}z + c\bar{z} + \bar{c}cz\bar{z} \\ \Leftrightarrow & |z|^2 + |c|^2 \leq 1 + |c|^2|z|^2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 - |c|^2|z|^2 \leq 1 - |c|^2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2(1 - |c|^2) \leq 1 - |c|^2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow & |z| \leq 1, \end{aligned}$$

josta nähdään, että vain tilanteessa  $|z| = 1$  saadaan yhtäsuuruus yhtälöön. Tiedetään, että  $1 - |c|^2 > 0$ , sillä  $|c| < 1$ . Näin ollen  $|h(z)| < 1$  kaikilla  $|z| < 1$  ja kaikki reunapisteet kuvautuvat reunapisteiksi. Viitteessä [1, s. 388–389] todistetaan, että  $f$  on surjektio, ja että oletuksen mukaiset konformikuvaukset ovat todella tätä muotoa.  $\square$

ESIMERKKI 5.10. Olkoon kuvaus  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , missä  $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ . Olkoon  $D = \{z : |z| < 1\} \subset \overline{\mathbb{C}}$  ja  $D' = \{w : \operatorname{Re}(w) > 0\} \subset \overline{\mathbb{C}}$  avoimia joukkoja. Kuvaus  $f$  on Möbiuskuvaus, sillä se on muotoa  $\frac{az+b}{cz+d}$ , missä  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  ja  $d = 1$ , ja jolle pätee  $ad - bc = -2 \neq 0$ . Olkoon  $g: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $g(w) = \frac{1-w}{1+w}$ . Yhdistetty funktio  $f \circ g$  on tällöin

$$\begin{aligned} f(g(w)) &= \frac{1 - \frac{1-w}{1+w}}{1 + \frac{1-w}{1+w}} = \frac{\frac{1+w-(1-w)}{1+w}}{\frac{1+w+1-w}{1+w}} = \frac{\frac{2w}{1+w}}{\frac{2}{1+w}} = \frac{2w}{2} \\ &= w. \end{aligned}$$

Samoin  $g \circ f = z$ . Funktion  $f$  käänteisfunktio on siis  $f^{-1} = g$ .

Lasketaan  $w = f(z)$ , jolloin

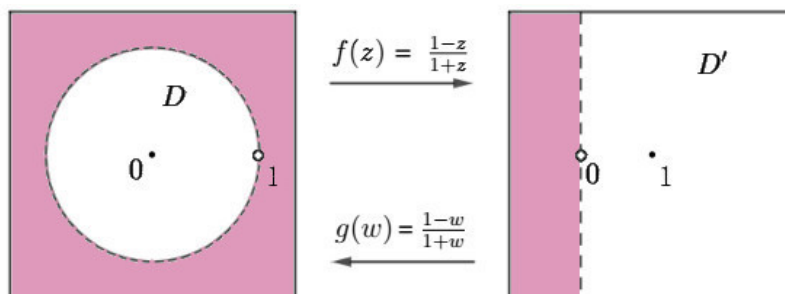
$$w = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{1+\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{1-z+\bar{z}-z\bar{z}}{|1+z|^2} = \frac{(1-|z|^2) - 2i \cdot \operatorname{Im}(z)}{|1+z|^2},$$

josta nähdään, että

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2},$$

jolloin, kun  $|z| = 1$ , niin  $\operatorname{Re}(w) = 0$  eli yksikkökieron reuna kuvautuu imaginääriakselille sekä  $0$  kuvautuu pisteeseen  $1$  ja piste  $-1$  kuvautuu äärettömään. Tällöin on selvää, että  $w \in D'$ , jos ja vain jos  $z \in D$ . Koska  $f = f^{-1}$ , niin  $f$  kuvaa myös joukon  $D'$  joukkoon  $D$ .

Näin ollen  $f$  kuvaa avoimen kiekon  $D$  konformisesti avoimelle puolitasolle  $D'$ . Samoin  $f^{-1}(w)$  kuvaa joukon  $D'$  konformisesti joukolle  $D$ .



KUVA 12. Konformikuvaus  $\frac{1-z}{1+z}$  joukosta  $D$  joukkoon  $D'$ .

SEURAUUS 5.11. Möbius-kuvauksen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  käänteiskuvaus on  $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ .

TODISTUS. Tarkastellaan tapausta  $c \neq 0$ . Tapaus  $c = 0$  todistetaan vastaavasti. Lauseen 5.5 todistuksen mukaisesti saadaan käänteisfunktiolle esitys

$$f^{-1}(z) = (f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1} \circ f_5^{-1})(z).$$

Tällöin käänteisfunktio voidaan laskea käyttämällä Lauseen 5.5 todistuksen alkeismöbiuskuvausten käänteiskuvaluksia, jotka ovat muotoa

$$f_5^{-1}(z) = z - b_2, \quad f_4^{-1}(z) = \frac{z}{r}, \quad f_3^{-1}(z) = e^{-i\theta} z, \quad f_2^{-1}(z) = \frac{1}{z} \quad \text{ja} \quad f_1^{-1}(z) = z - b_1,$$

missä

$$b_2 = \frac{a}{c}, \quad re^{i\theta} = \frac{bc - ad}{c^2} \quad \text{ja} \quad b_1 = \frac{d}{c}.$$

Tällöin näiden yhdistetty kuvaus on

$$\begin{aligned} f^{-1}(z) &= (f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1} \circ f_5^{-1})(z) \\ &= (f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1})(z - b_2) \\ &= (f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1})\left(\frac{z - b_2}{r}\right) \\ &= (f_1^{-1} \circ f_2^{-1})\left(\frac{z - b_2}{re^{i\theta}}\right) \\ &= f_1^{-1}\left(\frac{re^{i\theta}}{z - b_2}\right) = \left(\frac{re^{i\theta}}{z - b_2}\right) - b_1 \\ &= \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z - \frac{a}{c}} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad}{c^2(z - \frac{a}{c})} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad - c(z - \frac{a}{c})d}{c^2(z - \frac{a}{c})} \\ &= \frac{bc - ad - czd + ad}{c(cz - a)} = \frac{c(-dz + b)}{c(cz - a)} = \frac{dz - b}{-cz + a}, \end{aligned}$$

kun  $c \neq 0$ . Sama esitys pätee, kun  $c = 0$ . Tämä nähdään soveltamalla Lauseessa 5.5 esiintyvää esitystä funktiolle  $f$  tapauksessa  $c = 0$  ja sijoittamalla kuten edellä.  $\square$

**5.3. Möbius-kuvaukset ja matriisit.** Möbius-kuvausta  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  voidaan luonnehtia epäsingulaarilla  $2 \times 2$  kompleksimatriisilla

$$A_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

missä epäsingulaarisuudella tarkoitetaan, että  $ad - bc \neq 0$ . Kääntäen jokainen epäsingulaarinen matriisi muotoa  $A$  muodostaa kertoimet Möbius-kuvaukselle  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Jos matriisi  $A$  on epäsingulaarinen, niin sillä on käänteismatriisi

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Jos matriisilla ei ole käänteismatriisia, niin se on singulaarinen. Seuraavassa Huomautuksessa käydään läpi, miksi matriisin kerroin voidaan jättää Möbius-kuvauksissa pois.

**HUOMAUTUS 5.12.** Möbius-kuvaus  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ja sitä vastaava matriisi  $A_f$  eivät kuitenkaan vastaa toisiaan täysin yksi yhteen, sillä kun  $\lambda \neq 0$ , niin funktiot

$$(7) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ja

$$(8) \quad f_\lambda(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

ovat vaihtoehtoisia esityksiä samalle kuvaukselle, eli  $f = f_\lambda$  kaikilla nollasta poikkeavilla kompleksiluvuilla  $\lambda$ . Kun kuvaus on esityksen (7) mukainen, voidaan valita luku  $\lambda$  siten, että  $\lambda^2(ad - bc) = 1$  eli  $\lambda = \pm(ad - bc)^{-1/2}$ , ja esittää funktion  $f$  kaavan

(8) mukaisesti valitulla luvulla  $\lambda$ . On siis selvää, että Möbius-kuvauksen  $f$  voi aina kirjoittaa muodossa

$$(9) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{sitte, että } ad - bc = 1 \text{ pätee.}$$

**MÄÄRITELMÄ 5.13.** Kun Möbius-kuvaukselle  $f$  pätee  $ad - bc = 1$ , niin kuvaus on normalisoidussa muodossa ja matriisi  $A_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , jonka determinantti on 1, on normalisoitu Möbius-kuvausta  $f$  vastaava matriisi.

Tällaisten normalisoitujen matriisien ja Möbius-kuvausten välille saadaan bijektiivinen vastaavuus.

Seuraavan lauseen avulla Möbius-kuvauksia sisältävät laskutoimitukset voidaan muuttaa yksinkertaisiksi matriisilaskuiksi.

**LAUSE 5.14.** *Olko  $A_f$  ja  $B_g$  Möbius-kuvauksia  $f$  ja  $g$  vastaavat matriisit. Tällöin Möbius-kuvauksia  $f \circ g$  ja  $f^{-1}$  vastaavat matriisit ovat  $A_f B_g$  ja  $A_f^{-1}$  tässä järjestyksessä.*

**TODISTUS.** Olkoon

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ja} \quad g(z) = \frac{sz + t}{uz + v}$$

Möbius-kuvauksia. Tällöin funktioita  $f$  ja  $g$  vastaavat matriisit  $A_f$  ja  $B_g$  ovat

$$A_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_g = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Lasketaan  $A_f B_g$  ja  $f \circ g$

$$A_f B_g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{bmatrix},$$

ja Lauseen 5.6 todistuksen nojalla

$$(f \circ g)(w) = \frac{asw + at + buw + bv}{csw + ct + duw + dv} = \frac{(as + bu)w + (at + bv)}{(cs + du)w + (ct + dv)}.$$

Näin ollen kuvausta  $f \circ g$  vastaava matriisi on  $A_f B_g$ .

Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  Möbius-kuvauksia siten, että  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ja  $g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ . Tällöin funktio  $g$  on Seurauksen 5.11 nojalla kuvauksen  $f$  käänteiskuvas, eli  $g = f^{-1}$ . Tarkastellaan matriisin  $A_f$  käänteismatriisia:

$$A_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_f^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Olkoon  $B = A_f^{-1}$  ja  $\lambda = \det A$ , jolloin todistuksen alkuosan perusteella matriisi  $\lambda B$ , vastaa Möbius-kuvausta  $g$ . Koska  $\lambda$  ei ole nolla, niin Huomautuksen 5.12 nojalla myös matriisi  $B$  vastaa Möbius-kuvausta  $g = f^{-1}$ .  $\square$

**ESIMERKKI 5.15.** Olkoon  $g$ ,  $h$  ja  $k$  Möbius-kuvauksia siten, että

$$g(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad h(z) = \frac{z}{z+i} \quad \text{ja} \quad k(z) = \frac{z-i}{z}.$$

Lasketaan  $f = g \circ h \circ k$ . Muutetaan ensin Lauseen 5.14 avulla Möbius-kuvaus  $f$  sitä vastaavaksi matriisiksi  $A_f$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot i \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 - i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + i & -2i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tällöin nähdään, että kuvaus  $f$  on muotoa

$$f(z) = \frac{(2+i)z - 2i}{-iz + 0} = \frac{(-1+2i)z + 2}{z}.$$

ESIMERKKI 5.16. Normalisoidaan alkeismöbius-kuvauksia vastaavat matriisit.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \quad f(z) = z + b, \text{ joka on siirto,} \\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \quad f(z) = az, \text{ joka on dilataatio, kun } a > 0, \text{ ja kierto, kun } a = e^{i\theta}, \text{ sekä} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \quad f(z) = z^{-1}, \text{ joka on inversio.} \end{aligned}$$

ESIMERKKI 5.17. Olkoon  $f : D \rightarrow D'$ , missä  $D, D' \subset \mathbb{C}$  avoimia joukkoja siten, että

$$D = \{z : |Re(z)| < \frac{\pi}{2}\} \quad \text{ja} \quad D' = \mathbb{C} \setminus \{w : |Im(w)| \geq 1 \text{ ja } Re(w) = 0\}.$$

Olkoon  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ . Yhtälö  $\cos(z) = 0$  pätee, kun  $z = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , joten funktio  $\cos(z)$  ei saa arvoa nolla joukossa  $D$ . Funktion  $f$  derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\cos(z)\cos(z) - \sin(z)(-\sin(z))}{\cos^2(z)} \\ &= \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} \\ &= \frac{(\cos(z) + i\sin(z))(\cos(z) - i\sin(z))}{\cos^2(z)} = \frac{e^{iz}e^{-iz}}{\cos^2(z)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(z)}, \end{aligned}$$

joka on nolasta poikkeava kaikilla  $z \in D$ . Näin ollen  $f$  on holomorfinen. Funktiolle  $f$  pätee

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}},$$

jolloin nähdään, että  $f$  voidaan muodostaa yhdistettynä funktiona  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , missä

$$f_1(z) = 2iz, \quad f_2(z) = e^z, \quad f_3(z) = \frac{1-z}{1+z} \quad \text{ja} \quad f_4(z) = iz.$$



Funktiot  $f_1$  ja  $f_4$  ovat selvästi holomorfinen bijektioita ja Lauseen 5.7 todistuksen nojalla konformisia kaikilla  $z \in \mathbb{C}$  ja  $f_3$  on Möbius-kuvauksena bijektio. Funktion  $f_2$  määrittelyjoukko on avoin jaksovyö  $\{z = x + iy : x \in \mathbb{C}, |y| < \pi\}$  ja se on derivoituva sekä sillä on käänteiskuvaus  $\text{Log}(z)$ . Tällöin funktiot  $f_i$  ovat holomorfinen bijektioita. Tarkastellaan funktioiden  $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ , avulla joukon  $D$  kuvautumista.

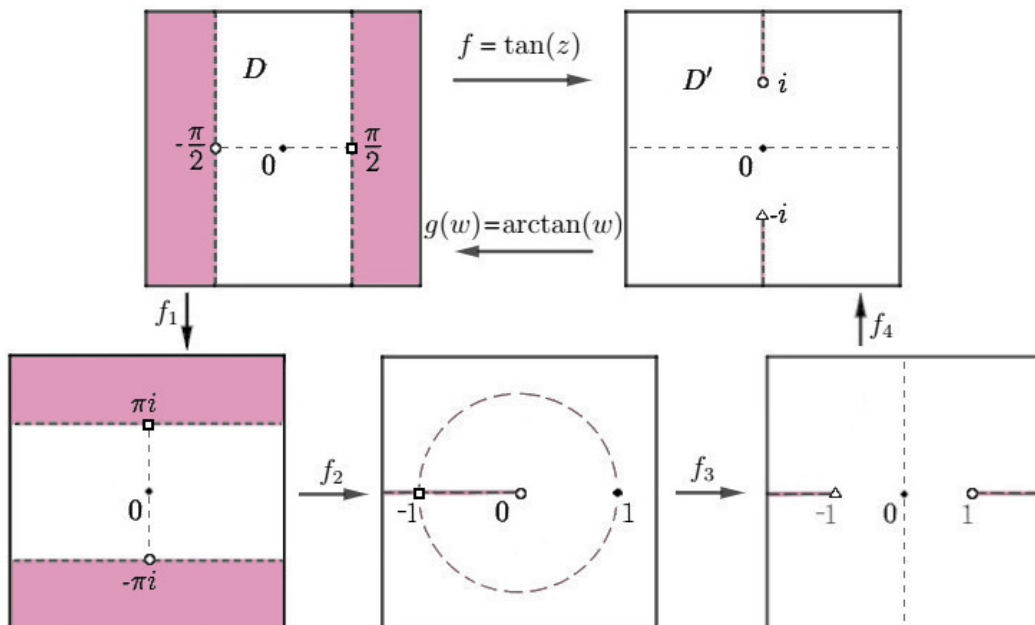
Kuvaus  $f_1$  kääntää vertikaalisen avoimen joukon kaksi kertaa leveämmäksi horisontaaliseksi joukoksi.

Merkitään  $z = x + iy$ , jolloin  $e^z = e^x e^{iy}$  saadaan muotoon  $|e^z| = e^x, x, y \in \mathbb{R}$ . Tällöin nähdään, että funktio  $e^z$  kuvaa janat  $z = iy, y \in [-\pi, \pi]$  origokeskeisiksi yksikköympyröiksi. Samoin  $e^z$  kuvaa kaikki janat  $z = x_0 + iy$  origokeskeisiksi yksikköympyrää pienemmiksi ympyröiksi, kun  $x_0 < 0$  ja suuremmiksi, kun  $x_0 > 0$ . Suorat  $z = x - \pi i$  ja  $z = x + \pi i, x \in \mathbb{R}$ , kuvautuvat avoimelle puolisuoralle  $] - \infty, 0[$ , jolloin funktion  $f_2$  kuvajoukko on  $\mathbb{C} \setminus ] - \infty, 0[$ .

Kuvaus  $f_3$  kuvaa origon pisteeseen 1, ja pisteiden  $-1$  ja  $0$  välisen avoimen janan puolisuoralle  $]1, \infty[$  sekä puolisuoran  $] - \infty, -1[$  itselleen. Tällöin funktion  $f_3$  kuvajoukko on  $\mathbb{C} \setminus (] - \infty, -1] \cup [1, \infty[)$ .

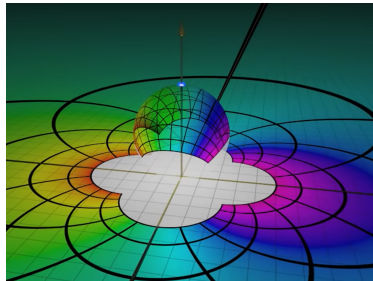
Lopuksi kuvaus  $f_4$  kertoo kaikki pisteet  $z \in \mathbb{C}$  imaginääriluvulla, jolloin reaaliakseli kuvautuu imaginääriakselille ja toisinpäin. Tällöin funktion  $f$  kuvajoukoksi saadaan  $D' = \mathbb{C} \setminus \{|Im(z)| \geq 1\}$ .

Jatkuvat funktiot  $f_i$  kuvaavat siis reunat reunoiksi ja sisäjoukot sisäjoukoiksi, joten  $f$  kuvaa joukon  $D$  joukoksi  $D'$ . Funktio  $f(z)$  on holomorfinen bijektio, eli se on konformikuvaus joukosta  $D$  joukkoon  $D'$ . Kuvassa 13 on kuvauksen  $f = \tan(z)$  lähtö- ja maalijoukko, sekä yhdistetyn kuvauksen funktioiden kuvat. Kuvissa merkitty katkoviivan kuvautumista sekä eri symboleilla eri pisteiden kuvautumista.

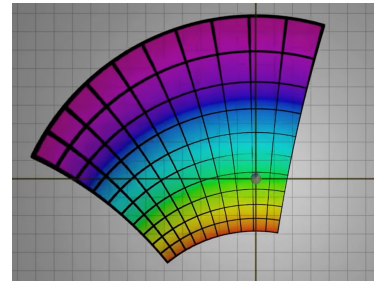


KUVA 13. Funktion  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  kuvautuminen joukosta  $D$  joukkoon  $D'$ .

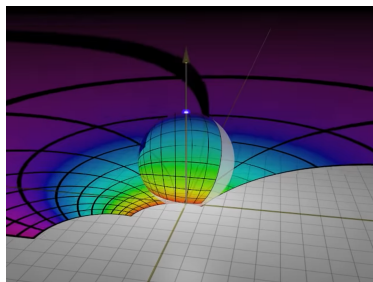
ESIMERKKI 5.18. Seuraavissa kuvissa on kuvattu neliöruudukko Riemannin palloa apuna käyttäen kompleksitasolle Möbius-kuvauksilla. Kuvassa 14 on neliöruudukko kuvattu inversiolla kompleksitasolta itselleen, jolloin origo kuvautuu pisteeseen  $\infty$ . Kuvissa 15 – 17 on alkeismöbius-kuvausten yhdisteillä kuvattu neliöruudukko laajennetulle kompleksitasolle. Kuvat lähteestä [11].



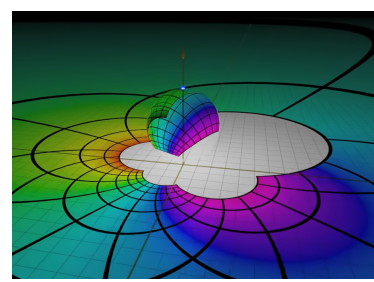
KUVA 14. Inversio.



KUVA 15. Yhdiste.



KUVA 16. Yhdiste.



KUVA 17. Yhdiste.

## 6. Möbius-kuvausten ominaisuuksia

Tässä luvussa on käytetty lähteitä [1], [2] ja [9].

**6.1. Kiintopisteet.** Möbius-kuvausten tarkempaan tarkasteluun tarvitsemme kiintopisteet. Kiintopisteitä ovat ne pisteet, joille pätee  $f(z) = z$ , ja  $z \in \mathbb{C}$ .

**LAUSE 6.1.** *Olkoon  $f$  epäidenttinen Möbius-kuvaus. Tällöin kuvauksella  $f$  on enintään kaksi kiintopistettä. Jos  $f$  on normalisoidussa muodossa  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ , jolle  $ad - bc = 1$ , niin sillä on tasan yksi kiintopiste, kun  $|a + d| = 2$  ja muulloin tasan kaksi kiintopistettä.*

**TODISTUS.** Olkoon  $f$  normalisoidussa muodossa oleva Möbius-kuvaus. Tarkastellaan ensin tilannetta  $c = 0$ , jolloin  $ad = 1$  ja  $f$  on similariteettikuvaus  $f(z) = \alpha z + \beta$ , missä  $\alpha = \frac{a}{d} \neq 0$  ja  $\beta = \frac{b}{d}$ . Tällöin  $\infty$  on selvästi yksi kiintopiste kaikilla  $\beta \in \mathbb{C}$ . Toinen kiintopiste saadaan laskemalla

$$\begin{aligned} & \alpha z + \beta = z \\ \Leftrightarrow & \alpha z - z = -\beta \\ \Leftrightarrow & z(\alpha - 1) = -\beta \\ \Leftrightarrow & z = \frac{-\beta}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Voidaan olettaa, että  $\alpha \neq 1$  tai  $\beta \neq 0$ , sillä muuten  $f$  olisi identtinen kuvaus. Nähdään, että  $\alpha = 1$  pätee, jos ja vain jos  $a = d = \pm 1$ , sillä  $ad = 1$ . Tällöin  $a + d = \pm 2$  ja  $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{-\beta}{0} = \infty$ , jolloin ääretön on ainoa kiintopiste. Siispä tilanteessa  $c = 0$  funktiolla  $f$  on yksi kiintopiste, kun  $|a + d| = 2$  ja kaksi kiintopistettä muulloin.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta  $c \neq 0$ . Tällöin  $f(-d/c) = \infty$  ja  $f(\infty) = a/c$ . Näin ollen kumpikaan pisteistä  $-d/c$  tai  $\infty$  ei ole kuvauksen  $f$  kiintopiste. Tällöin funktion  $f$  äärelliset kiintopisteet löydetään yhtälöstä

$$\begin{aligned} & \frac{az + b}{cz + d} = z \\ \Leftrightarrow & az + b = cz^2 + dz \\ \Leftrightarrow & cz^2 + dz - az - b = 0 \\ \Leftrightarrow & cz^2 + (d - a)z - b = 0. \end{aligned}$$

Nyt yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tällöin

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4c(-b)}}{2c} \\ \Leftrightarrow &= \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4ad + 4bc}}{2c} \\ \Leftrightarrow &= \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2c} \\ \Leftrightarrow &= \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}, \end{aligned}$$

josta nähdään, kun  $c \neq 0$ , että kuvauksella  $f$  on yksi kiintopiste, kun  $|a + d| = 2$ , ja kaksi kiintopistettä, kun  $|a + d| \neq 2$ .  $\square$

LAUSE 6.2. *Olkoon  $(z_1, z_2, z_3)$  kolme eri pistettä joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , jolle pätee  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  ja  $f(z_3) = \infty$ .*

TODISTUS. Oletetaan aluksi, että kaikki kolme pistettä ovat äärellisiä. Tällöin

$$(10) \quad f(z) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$$

on etsitty Möbius-kuvaus, joka voidaan kirjoittaa muotoon  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Jos jokin pisteistä  $z_1$ ,  $z_2$  tai  $z_3$  on  $\infty$ , niin voidaan antaa sopivan termin yhtälöstä (10) olla  $\infty$ , jolloin saadaan

$$(11) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{z_2 - z}{z_3 - z}, & \text{jos } z_1 = \infty, \\ \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}, & \text{jos } z_2 = \infty \text{ ja} \\ \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, & \text{jos } z_3 = \infty. \end{cases}$$

Todistetaan seuraavaksi yksikäsitteisyys. Oletetaan, että  $f$  ja  $g$  ovat molemmat Möbius-kuvauksia, jotka toteuttavat Lauseen 6.2 väitteen. Tällöin niiden yhdiste  $h = f^{-1} \circ g$  Möbius-kuvaus, jolle pätee

$$h(z_1) = f^{-1}(g(z_1)) = z_1,$$

joten

$$g(z_1) = 1.$$

Samoin voidaan laskea  $g(z_2) = 0$  ja  $g(z_3) = \infty$ . Tällöin funktiolla  $h$  on kiintopisteet  $z_1$ ,  $z_2$  ja  $z_3$ , joten se on Lauseen 6.1 nojalla identtinen kuvaus, jolloin  $g = (f^{-1})^{-1} = f$ . Näin ollen  $f$  on yksikäsitteinen.  $\square$

SEURAUUS 6.3. *Olkoon  $(z_1, z_2, z_3)$  ja  $(w_1, w_2, w_3)$  pisteitä laajennetussa kompleksitasossa, missä  $z_i \neq z_j$  ja  $w_i \neq w_j$ , kun  $i \neq j$  ja  $i, j = 1, 2, 3$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , jolle pätee  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$  ja  $f(z_3) = w_3$ .*

TODISTUS. Määrätään Lauseen 6.2 mukaiset kuvaukset  $g$  ja  $h$  siten, että  $g(z_1) = 1$ ,  $g(z_2) = 0$  ja  $g(z_3) = \infty$ , sekä  $h(w_1) = 1$ ,  $h(w_2) = 0$  ja  $h(w_3) = \infty$ . Olkoon  $f = h^{-1} \circ g$ . Tällöin  $f$  on Möbius-kuvaus.

$$f(z_1) = h^{-1}(g(z_1)) = h^{-1}(1) = w_1.$$

Samoin  $f(z_2) = w_2$  ja  $f(z_3) = w_3$ . Näin ollen tarkastelemalla kuvausta  $f = h^{-1} \circ g$ , nähdään samaan tapaan kuin Lauseen 6.1 todistuksessa, että  $f$  on yksikäsitteinen.  $\square$

**6.2. Kaksoissuhteet.** Tässä aluvuossa tutustutaan Möbius-kuvauksien kaksoissuhteisiin. Kaksoissuhteen arvo säilyy muuttumattomana konformikuvauksissa.

MÄÄRITELMÄ 6.4. Olkoon  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  eri pisteitä laajennetussa kompleksitasossa. Kaksoissuhde  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  on laajennetun kompleksitason piste  $f(z_4)$ , missä  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, jolle  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  ja  $f(z_3) = \infty$ .

LAUSE 6.5. Kaksoissuhteen arvo lasketaan kaavalla

$$(12) \quad [z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)},$$

kun kaikki pisteet ovat äärellisiä. Jos yksi pisteistä on äärettömyyspiste, saadaan

$$(13) \quad \begin{cases} [\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}, \\ [z_1, \infty, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}, \\ [z_1, z_2, \infty, z_4] = \frac{z_4 - z_2}{z_1 - z_2}, \\ [z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}. \end{cases}$$

TODISTUS. Kaksoissuhteen laskukaavat saadaan suoraan kaavoista (10) ja (11).  $\square$

LEMMA 6.6. Olkoon  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$  eri pisteitä. Tällöin kaksoissuhde  $f(z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$  on aina nollasta, yhdestä ja äärettömyyspisteestä poikkeava kompleksiluku.

TODISTUS. Olkoon  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  laajennetun kompleksitason eri pisteitä, joille  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  ja  $f(z_3) = \infty$ , ja olkoon funktio  $f$  Möbius-kuvaus. Tällöin  $f$  on konformikuvauksena bijektio, joten

$$f(z_4) \neq f(z_1) = 1, f(z_4) \neq f(z_2) = 0 \text{ ja } f(z_4) \neq f(z_3) = \infty.$$

Näin ollen väite pätee.  $\square$

ESIMERKKI 6.7. Lasketaan kaksoissuhteet  $[1, i, -1, -i]$  ja  $[0, -1, i, \infty]$ .

$$\begin{aligned} [1, i, -1, -i] &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \\ &= \frac{(1 + 1)(i + i)}{(1 - i)(-1 + i)} = \frac{4i}{2i} = 2 \end{aligned}$$

ja

$$[0, -1, i, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{(0 - i)}{(0 - (-1))} = \frac{-i}{1} = -i.$$

LAUSE 6.8. Jos  $f$  on Möbius-kuvaus, niin

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)],$$

jokaisella neljän eri pisteen joukolla  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , missä  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ .

TODISTUS. Olkoon  $g$  yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, jolle  $g(f(z_1)) = 1$ ,  $g(f(z_2)) = 0$  ja  $g(f(z_3)) = \infty$ . Tällöin  $g \circ f$  kuvaa pisteet  $z_1 \rightarrow 1$ ,  $z_2 \rightarrow 0$  ja  $z_3 \rightarrow \infty$ . Kaksoissuhteen määritelmän mukaan

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g \circ f(z_4) = g(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$$

pätee.  $\square$

SEURAUUS 6.9. *Kaksoissuhteet*  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  ja  $[w_1, w_2, w_3, w_4]$  ovat yhtäsuuria, jos ja vain jos on olemassa Möbius-kuvaus  $f$  jolle  $f(z_j) = w_j$ , kaikilla  $j = 1, 2, 3, 4$ .

TODISTUS. Olkoon  $f$  ja  $g$  Möbius-kuvauksia sekä kaksoissuhteet  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  ja  $[w_1, w_2, w_3, w_4]$  yhtäsuuria. Tällöin Määritelmän 6.4 nojalla  $[w_1, w_2, w_3, w_4] = g(w_4)$ , missä  $g$  on yksikäsitteinen Möbius-kuvaus, jolle  $g(w_1) = 1$ ,  $g(w_2) = 0$  ja  $g(w_3) = \infty$ . Olkoon  $f$  yksikäsitteinen Möbius-kuvaus kuten Seurauksessa 6.3, jolle  $f(z_j) = w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Lauseen 6.8 nojalla nähdään, että

$$g(f(z_4)) = [w_1, w_2, w_3, f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4] = g(w_4).$$

Koska  $g$  on bijektio, niin  $f(z_4) = w_4$ , joten  $f(z_j) = w_j$  kaikilla  $j = 1, 2, 3, 4$ . Kääntäen oletetaan, että on olemassa Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $f(z_j) = w_j$ , kun  $j = 1, 2, 3, 4$ . Lauseen 6.8 nojalla

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [w_1, w_2, w_3, w_4].$$

Tällöin kaksoissuhteet ovat yhtäsuuria. □

Möbius-kuvauksen  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  esityskaava löydetään kätevästi Lauseen 6.8 avulla, kun tiedetään että  $f$  kuvaa kolme eri pistettä  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  kuvapisteiksi  $w_1, w_2$  ja  $w_3$ . Kun  $z \neq z_1, z_2, z_3$ , funktion  $f(z)$  arvo määräytyy yhtälöstä

$$(14) \quad [z_1, z_2, z_3, z] = [w_1, w_2, w_3, f(z)].$$

ESIMERKKI 6.10. Selvitetään Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $f(i) = \infty$ ,  $f(0) = 1$  ja  $f(\infty) = -i$ . Kun  $z \neq i, 0, \infty$  käytetään kaavaa (14), jolloin saadaan yhtälö

$$[i, 0, \infty, z] = [\infty, 1, -i, f(z)],$$

joka sievenee, kun käytetään apuna yhtälöä (13), muotoon

$$-iz = \frac{1 - f(z)}{-i - f(z)}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä  $f(z)$ , jolloin saadaan

$$f(z) = \frac{z + 1}{iz + 1},$$

joka on haluttu Möbius-kuvaus.

**6.3. Ympyrät laajennetussa kompleksitasossa.** Ympyröiden Möbius-kuvaukset laajennetussa kompleksitasossa ovat geometrisesta näkökulmasta tärkeimpiä tarkastelun kohteita. Tässä tulee muistaa, että ympyrä joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$  on joko tavallinen ympyrä kompleksitasossa, tai ympyrä äärettömyyspisteen yli, mikä tarkoittaa joukkoa  $K = L \cup \{\infty\}$ , missä  $L \in \mathbb{C}$  on suora.

MÄÄRITELMÄ 6.11. Pisteiden  $z \in \mathbb{C}$  joukko, jolle pätee

$$(15) \quad A|z|^2 + Bz + \overline{B}z + C = 0, \text{ missä } A, C \in \mathbb{R} \text{ ja } |B|^2 - AC > 0,$$

on joko ympyrä  $K$ , kun  $A \neq 0$ , tai suora  $K = L \cup \{\infty\}$ , kun  $A = 0$ .

Toisin sanoen jokainen kompleksitason ympyrä tai suora voidaan kirjoittaa tässä muodossa. Näin ollen kaava (15) on yleinen yhtälö ympyrälle laajennetussa kompleksitasossa, missä piste  $z = \infty$  kuuluu joukkoon  $K$ , jos ja vain jos  $A = 0$ .

LAUSE 6.12. *Minkä tahansa kolmen pisteen joukon läpi kulkee yksikäsitteinen ympyrä joukossa  $\mathbb{C}$ .*

TODISTUS. Jos pisteet ovat samalla suoralla, voidaan niiden kautta piirtää suora  $L$ . Jos tämä suora projisoidaan Riemannin pallolle, kulkee se äärettömyyspisteen kautta, jolloin kyseessä on ympyrä  $K = L \cup \{\infty\}$ . Jos pisteet eivät ole samalla suoralla, voidaan ympyrä konstruoida kompleksitasossa samalla tavoin, kuin joukossa  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

LAUSE 6.13. *Möbius-kuvaukset kuvaavat ympyrät joukosta  $\overline{\mathbb{C}}$  ympyröiksi joukkoon  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

TODISTUS. Koska kaikkien Möbius-kuvausten yhdisteet ovat Möbius-kuvauksia, riittää tarkistaa, että ympyrän  $K$  kuvajoukko joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$  on ympyrä jokaisella alkeismöbiuskuvauksella. Tässä joukoilla  $K$  ja  $\tilde{K}$  tarkoitetaan ympyrän kehää. Jos  $f$  on siirto, kierto tai dilataatio, niin  $f$  kuvaa selvästi ympyrän ympyräksi. Näin ollen riittää tarkastella inversiokuvausta  $f(z) = z^{-1}$ .

Olkoon  $A|z|^2 + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$  ympyrän  $K$  yhtälö. Olkoon  $z = w^{-1}$  kompleksilukuja, joille  $z, w \neq 0$ . Tällöin  $z$  kuuluu joukkoon  $K$ , jos ja vain jos pisteelle  $w^{-1}$  pätee

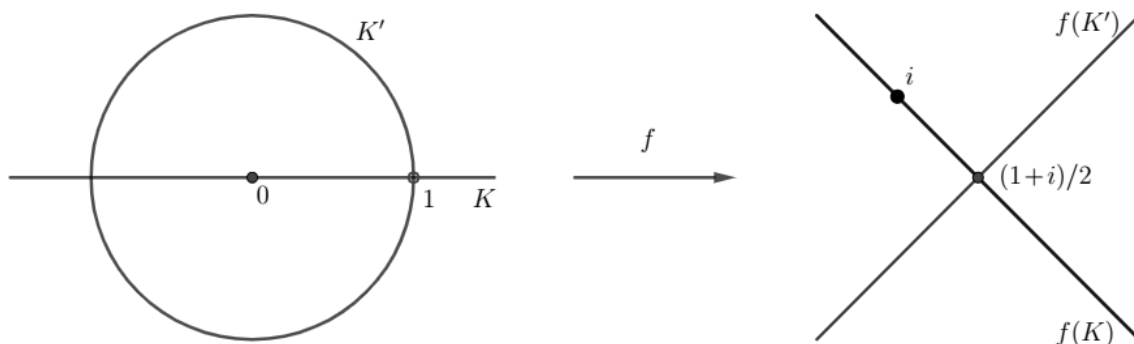
$$\frac{A}{|w|^2} + \frac{B}{w} + \frac{\overline{B}}{\overline{w}} + C = 0.$$

Kerrotaan edellinen yhtälö puolittain luvulla  $w\overline{w} = |w|^2$ , jolloin  $w$  kuuluu joukkoon, joka on määritelty yhtälöllä

$$C|w|^2 + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0,$$

missä  $C$  ja  $A$  ovat reaalilukuja ja  $|B|^2 - CA = |B|^2 - AC > 0$ , joka on yhtälö toiselle ympyrälle joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Olkoon tämä ympyrä  $\tilde{K} \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Piste  $z = 0$  kuuluu joukkoon  $K$  täsmälleen silloin, kun  $C = 0$ , mikä pätee täsmälleen silloin kun  $w = \infty = \frac{1}{0}$  kuuluu joukkoon  $\tilde{K}$ . Samoin piste  $z = \infty$  kuuluu joukkoon  $K$ , jos ja vain jos piste  $w = 0 = \frac{1}{\infty}$  kuuluu joukkoon  $\tilde{K}$ . Tällöin piste  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  on piste joukossa  $K$  täsmälleen silloin, kun piste  $w = z^{-1} = f(z)$  kuuluu joukkoon  $\tilde{K}$ . Näin ollen joukko  $f(K) = \tilde{K}$  on ympyrä laajennetussa kompleksitasossa.  $\square$

ESIMERKKI 6.14. Konstruoidaan ympyröiden  $K = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ja  $K' = K(0, 1)$  kuvat Möbius-kuvauksella  $f(z) = (z + i)/(z + 1)$ . Lauseen 6.13 avulla nähdään, että joukko  $f(K)$  on ympyrä joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ , joka kulkee pisteiden  $f(1) = \frac{1+i}{2}$ ,  $f(0) = i$  ja  $f(-1) = \infty$ , kautta. Ympyrää  $f(K)$  voidaan kuvata reaalifunktiolla  $y = -x + 1$  ja siihen kuuluu lisäksi äärettömyyspiste. Joukon  $K'$  kuva on myös ympyrä joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ , joka kulkee pisteiden  $f(1) = \frac{1+i}{2}$  ja  $f(-1) = \infty$  kautta. Koska  $f$  on konformikuvaus, niin suora  $f(K')$  leikkaa suoraa  $f(K)$  kohtisuoraan pisteessä  $\frac{1+i}{2}$ , sillä  $K$  ja  $K'$  ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden pisteessä 1. Näin ollen  $f(K')$  on ympyrä joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ , yhtälöllä  $y = x$ , johon kuuluu äärettömyyspiste. Kuvassa 18 on havainnollistus ympyröiden  $K$  ja  $K'$  kuvautumisesta funktiolla  $f$ .



KUVA 18. Ympyrät  $K$  ja  $K'$  kuvauksella  $f$ .

**6.4. Peilaus ja symmetrisyys.** Tässä luvussa käsitellään ympyrän symmetriaa laajennetussa kompleksitasossa Möbius-kuvauksilla. Peilauskuvaukset ympyröiden suhteen säilyttävät aina kulmien suuruuden, mutta kääntävät niiden suunnan. Näistä kuvauksista käytetään myös nimitystä antimöbius-kuvaus.

**MÄÄRITELMÄ 6.15.** Olkoon  $K \subset \overline{\mathbb{C}}$  ympyrä. Tällöin kuvaus  $\rho_K : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on peilaus ympyrän  $K$  suhteen.

Olkoon ympyrä  $K \in \mathbb{C}$  siten, että sen keskipiste on  $z_0$  ja säde  $r$ . Tällöin kuvaus  $\rho_K : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on peilaus ympyrän  $K$  suhteen, jos ja vain jos

$$(16) \quad \rho_K(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0 \bar{z} + r^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

jokaisella  $z \neq z_0, \infty$ , ja  $\rho_K(z_0) = \infty$  ja  $\rho_K(\infty) = z_0$ . Geometrisesti katsottuna  $\rho_K$  kuvaa jokaisen pisteen  $z \neq z_0, \infty$  yksikäsitteisesti pisteeksi  $z'$ , joka kuuluu pisteiden  $z$  ja  $z_0$  kautta kulkevalle suoralle, ja jolle pätee

$$|z - z_0||z' - z_0| = r^2.$$

**HUOMAUTUS 6.16.** Jos ympyrä  $K \cup \{\infty\}$  on suoran  $L$  ja äärettömyyspisteen yhdiste, missä suoran  $L$  yhtälö on  $Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $B \neq 0$ , niin peilaus ympyrän  $K \cup \{\infty\}$  suhteen on tällöin

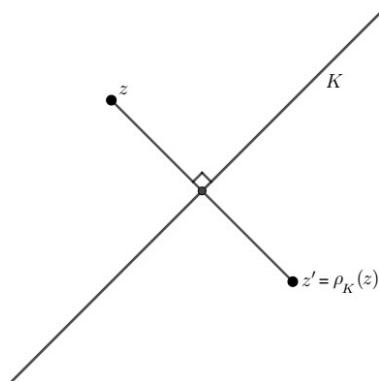
$$(17) \quad \rho_K(z) = -\frac{\overline{B}}{B}\bar{z} - \frac{C}{B},$$

missä  $\rho_K(\infty) = \infty$ . Tällöin  $\rho_K(z)$  peilaa pisteen  $z \neq \infty$  ympyrän  $K$  suhteen niin, että pisteiden  $z$  ja  $z'$  välinen jana leikkaa kohtisuorassa ympyrää  $K$ . Viitteessä [1, s. 399] käydään läpi peilaus suoran suhteen tarkemmin. Kuvassa 19 on havainnollistus pisteen  $z$  peilauksesta suoralla olevan ympyrän  $K$  suhteen.

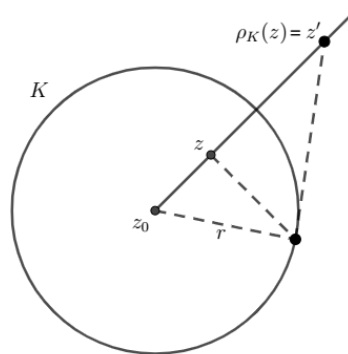
**ESIMERKKI 6.17.** Konstruoidaan  $\rho_K(z) = z'$  pisteen  $z$  avulla (Kuva 20), kun  $K \subset \mathbb{C}$  on ympyrä. Piste  $z'$  kuvautuu käänteisesti ympyrän reunan suhteen, jolloin piste  $z_0$  kuvautuu äärettömään, ääretön kuvautuu ympyrän keskipisteeksi, ja jokainen reunapiste kuvautuu itselleen, sekä ympyrän sisäpisteet kuvautuvat ympyrän ulkopuolelle ja toisinpäin.

**LEMMA 6.18.** Kuvauksessa  $\rho_K$  kaikki ympyrän  $K$  pisteet ovat peilauksen kiintopisteitä ja  $\rho_K \circ \rho_K$  on identtinen kuvaus joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ , jolloin  $\rho_K^{-1} = \rho_K$ .





KUVA 19. Peilaus suoran  $K$  suhteen.



KUVA 20. Peilaus ympyrän  $K$  suhteen.

TODISTUS. Kuvaus  $\rho_K$  kuvaa ympyrän  $K$  sisäpisteet ulkopisteiksi ja ulkopisteet sisäpisteiksi yksikäsitteisesti. Se kuvaa myös reunapisteen  $z$  origon ja pisteen  $z$  kautta kulkevalle suoralle  $l$ , jolloin se kuvautuu reunapisteeksi. Ainoa reunapiste, joka on suoralla  $l$ , on piste  $z$ . Näin ollen reunapisteet ovat kuvauksen  $\rho_K$  kiintopisteitä. Koska ympyrän peilaus  $\rho_K$  kuvaa kaikki ympyrän sisäpisteet yksikäsitteisesti ulkopisteiksi, niin tällöin sen käänteisfunktio  $\rho_K^{-1}$  kuvaa ulkopisteet takaisin samaksi sisäpisteeksi. Samoin toiseen suuntaan. Näin ollen  $\rho_K(\rho_K^{-1}(z)) = z$ , joten  $\rho_K^{-1} = \rho_K$ .  $\square$

SEURAUUS 6.19. Yhtälöiden (16) ja (17) nojalla nähdään, että jokainen peilaus  $\rho_K$  kuuluu muotoa

$$(18) \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

olevien kuvausten joukkoon, missä  $a, b, c$  ja  $d$  ovat kompleksilukuja, joille  $ad - bc \neq 0$ . Toisin sanoen jos  $f$  on muotoa  $f = g \circ \rho$ , missä  $g$  on Möbius-kuvaus ja  $\rho$  on peilaus reaaliakselilla,  $\rho(z) = \bar{z}$ . Näin jokainen peilaus voidaan esittää Möbius-kuvauksen ja kompleksikonjugaatin avulla.

LAUSE 6.20. Jos  $f$  on Möbius-kuvaus ja  $K \subset \bar{\mathbb{C}}$  on ympyrä, niin tällöin

$$(19) \quad f \circ \rho_K = \rho_{f(K)} \circ f.$$

Erityisesti, jos pisteet  $z$  ja  $z'$  ovat symmetrisiä ympyrän  $K$  suhteen, niin tällöin  $f(z)$  ja  $f(z')$  ovat symmetrisiä ympyrän  $f(K)$  suhteen.

TODISTUS. Yhtälö (19) voidaan myös muotoilla siten, että  $g = f^{-1} \circ \rho_{f(K)} \circ f \circ \rho_K$  on identtinen kuvaus joukossa  $\bar{\mathbb{C}}$ . Tässä  $\rho_{f(K)}$  on itsensä käänteiskuvaus.

Möbius-kuvausten yhdisteenä, jossa on parillinen määrä peilauksia,  $g$  on Möbius-kuvaus ja edelleen kaikki kuvauksen  $g$  pisteet joukossa  $K$  ovat kiintopisteitä. Lauseen 6.1 nojalla kuvauksen  $g$  on oltava identtinen kuvaus, jolloin (19) pätee. Jos pisteet  $z$  ja  $z'$  ovat symmetrisiä joukon  $K$  suhteen, niin yhtälön (19) nojalla pisteille  $w = f(z)$  ja  $w' = f(z')$  pätee

$$\rho_{f(K)}(w) = \rho_{f(K)}(f(z)) = f(\rho_K(z)) = f(z') = w'.$$

$\square$

Seuraavan Lauseen yhtälö on samankaltainen, kuin yhtälö (14) sillä erolla, että vasemmalla esiintyy kompleksikonjugaatti ja oikealla antimöbius-kuvaus.

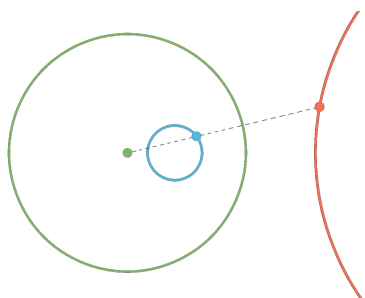
LAUSE 6.21. Olkoon  $K \subset \overline{\mathbb{C}}$  ympyrä, joka leikkaa kolmea eri pistettä  $z_1, z_2$  ja  $z_3$ . Tällöin peilaukselle  $\rho_K$  pätee

$$(20) \quad \overline{[z_1, z_2, z_3, z]} = [z_1, z_2, z_3, \rho_K(z)],$$

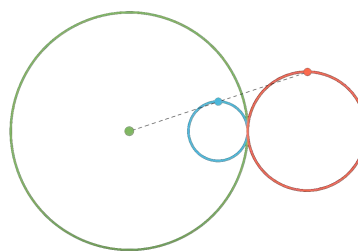
missä  $z \neq z_1, z_2, z_3$ .

TODISTUS. Olkoon  $f$  Möbius-kuvaus, jolle  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  ja  $f(z_3) = \infty$ . Tällöin  $f(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Jokaiselle  $z \neq z_1, z_2, z_3$  käytetään kaksoissuhteen määritelmää  $[z_1, z_2, z_3, z] = f(z)$ , jolloin  $[z_1, z_2, z_3, \rho_K(z)] = \overline{f(\rho_K(z))}$ . Jos  $z \in K$ , niin  $\rho_K(z) = z$  ja yhtälö (20) saadaan supistettua muotoon  $\overline{f(z)} = f(z)$ , joka pätee, sillä tässä tapauksessa  $f(z)$  on reaaliluku. Jos  $z \in \mathbb{C}$  ei kuulu ympyrälle  $K$ , niin Lauseen 6.20 nojalla pisteiden  $f(z)$  ja  $f(\rho_K(z))$  on oltava symmetrisiä joukon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  suhteen. Toisin sanoen  $\overline{f(z)} = f(\rho_K(z))$ . Näin ollen yhtälö (20) pätee.  $\square$

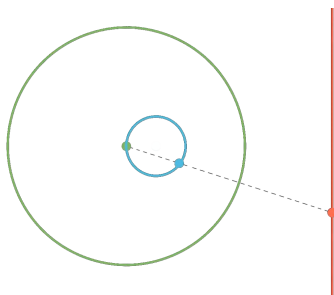
ESIMERKKI 6.22. Kuvissa 21 – 24 on kuvattu sinisen ympyrän peilaus vihreän ympyrän suhteen punaiseksi ympyräksi neljällä eri lähtöjoukon ympyrällä. Kuvassa 21 sininen sisäympyrä peilautuu ulkopuolelle ympyräksi. Kuvassa 22 reunapiste kuvautuu reunapisteeksi ja kuvassa 23 origon kautta kulkeva ympyrä kuvautuu suoraksi. Kuvassa 24 ympyrät leikkaavat peilaavaa ympyrää. Määritelmän 6.15 nojalla ympyrän kuvapisteesi sijaitsevat origon ja ympyrän lähtöpisteen kautta kulkevalla suoralla.



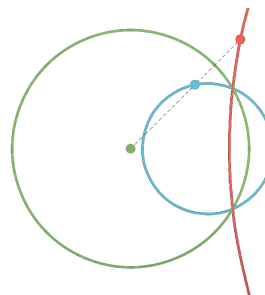
KUVA 21. Ympyrän peilaus ympyräksi.



KUVA 22. Ympyrän peilaus ympyräksi.



KUVA 23. Ympyrän peilaus suoraksi.



KUVA 24. Ympyrän peilaus ympyräksi.

## Lähteet

- [1] BRUCE P. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory* Springer-Verlag, 1990.
- [2] LARS V. AHLFORS: *Complex Analysis, Second Edition*, McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [3] ROBERT R. GREENE, STEVEN G. KRANTZ: *Function Theory of One Complex Variable, Third Edition*, American Mathematical Society, 2006.
- [4] DENNIS G.ZILL, PATRICK D.SHANAHAN: *A First Course in Complex Analysis with Applications*, Jones and Bartlett Publishers, 2003.
- [5] MATTHIAS BECK, GERALD MARCHESI, DENNIS PIXTON, LUCAS SABALKA: *A First Course in Complex Analysis, version 1.54*, Orthogonal Publishing 2018.
- [6] PETER J. OLVER: *Complex Analysis and Conformal Mapping*, University of Minnesota, 2022.
- [7] JÖRG FRAUENDIENER: *Conformal Infinity*, Livind Rev. Relativ. 7, 1(2004).
- [8] ROGER A. HORN, CHARLES R. JOHNSON: *Matrix Analysis, second edition*, Cambridge University Press, 2013.
- [9] TRISTAM NEEDHAM: *Visual Complex Analysis*, Department of Mathematics, University of San Fransisco, 1997.
- [10] JUAN CARLOS PONCE CAMPUZANO: *A Visual and Interactive Introduction to Complex Analysis*, 2022, online book, <https://complex-analysis.com/>.
- [11] DOUGLAS N. ARNOLD, JONATHAN ROGNESS: *Möbius Transformations Revealed, short video*, University of Minnesota, 2007. <https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/moebius/>.
- [12] RAVI P. AGARWAL, KANISHKA PERERA, SANDRA PINELAS, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, 2011.
- [13] TERO KILPELÄINEN: *Kompleksianalyysi*, luentomuistiinpanoja keväälle 2005, Jyväskylän Yliopisto, 2006.