Bochner-integraali ja Radon-Nikodym -ominaisuus

Jani Miettinen

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Jani Miettinen, *Bochner-integraali ja Radon-Nikodym -ominaisuus*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 73 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tutkielma tarkastelee Banach-avaruuksien vektoriarvoista Bochner-integraalia. Integraali määritellään yksinkertaisille kuvauksille Lebesgue-integraalia ja avaruuden täydellisyyttä käyttäen. Tämän jälkeen tutustutaan vektoriarvoisten joukkokuvausten eli vektorimittojen teoriaan. Lopuksi tutkitaan Banach-avaruuden Radon-Nikodym -ominaisuutta, joka yhdistää vektorimittojen ja Bochner-integraalin teorian sekä vastaa kysymykseen, voidaanko annettu vektorimitta esittää integroituvan kuvauksen Bochner-integraalina. Avaruudet, joilla on tämä ominaisuus omaavat mielenkiintoisia rakenteita sekä topologisesta että geometrisesta näkökulmasta.

Myöhempien lukujen osalta on olennaista tuntea Banach-avaruuksien ja Lebesgue-integraaliin liittyvä perusteoria. Ensimmäinen luku käy läpi normiavaruuksien teoriaa painottamalla lineaarikuvauksia ja listaamalla keskeisimmät tulokset, kuten Hahn-Banach -lauseen ja sen seuraukset. Funktionaalianalyyttinen osuus päätetään heikon topologian määritelmään. Viimeinen aliluku käsittelee mittojen, yksinkertaisen kuvausten, Lebesgue-integraalien ja L^p-avaruuksien aihealueet.

Toisessa luvussa käsitellään mitallisia kuvauksia ja Bochner-integraalia. Mitalliset kuvaukset ovat niitä kuvauksia, joille integraali on hyvin määritelty ja joille integraali voi ylipäätään olla olemassa. Mitallisuustyyppejä on useampia, joista olennaisimmat ovat μ-mitallisuus ja heikko mitallisuus. Käsitteet liittyvät läheisesti toisiinsa Pettisin mitallisuuslauseen kautta. Tämän jälkeen määritellään Bochner-integraali yksinkertaisten kuvausten integraalien Cauchy-jonon raja-arvona. Teoria alkaa perustuloksista ja myöhemmin nähdään, että integroituvuuteen riittää tarkastella vain reaaliarvoista normikuvausta viittaamatta yksinkertaisiin kuvauksiin. Integraalien keskeisenä tuloksena saadaan suljettuihin lineaarikuvauksiin liittyvä Hillen lause. Lopuksi käsitellään Bochner-L^p-avaruudet ja heikosti mitallisten kuvausten Pettis-integraali.

Mittojen käsitettä voidaan tarkastella myös vektoriarvoisille joukkokuvauksille, jolloin saadaan vektorimittojen käsite. Kolmannessa luvussa tutustutaan vektorimittoihin, näiden variaatioihin sekä vektorimittojen Banach-avaruuksiin. Lopuksi tutkitaan Pettis-integraalia vektorimittana.

Viimeisessä luvussa käsitellään Radon-Nikodym -ominaisuutta. Jokainen absoluuttisesti jatkuva reaaliarvoinen äärellinen mitta voidaan esittää toisen mitan suhteen integraalina: tämä tulos tunnetaan Radon-Nikodym -lauseena, jolle annetaan todistus. Yleisissä Banach-avaruuksissa voidaan määritellä vastaava asetelma, mutta osoittautuu, että jokaisella avaruudella ei ole tätä esitysominaisuutta. Luvun tavoitteena on näyttää erilaisia ehtoja Radon-Nikodym -ominaisuudelle. Ensimmäisenä aloitetaan L^1-avaruuden operaattoreiden Riesz-esitettävyydestä. Tämän jälkeen siirrytään lommoontuviin (eng. dentable) joukkoihin ja konveksisuuteen. Lopuksi esitetään joitakin Radon-Nikodym -ominaisuuden karakterisointeja, kuten Banach-arvoisten absoluuttisesti jatkuvien kuvausten differentioituvuus.

Sisältö

Johdanto **1**

1 Esitietoja **5**

1.1 Normiavaruudet 5
1.2 Heikko topologia 11
1.3 Lebesgue-integraali 12

2 Integrointi Banach-avaruuksissa **19**

2.1 Mitallisuus 19
2.2 Bochner-integraali 24
2.3 Pettis-integraali 35

3 Vektorimitat **39**

3.1 Vektorimitat, variaatiot ja avaruus $\mathcal{M}(\Gamma, B)$ 39
3.2 Integraali vektorimittana 44

4 Radon-Nikodym -ominaisuus **49**

4.1 Radon-Nikodym -lause Banach-avaruuksissa 49
4.2 L^1-operaattorin Riesz-esitettävyys 56
4.3 Lommoontuvat joukot 61
4.4 Muita karakterisointeja 66

Lähteet **72**

Johdanto

Motivaationa vektoriarvoisen integraaliteorian kehittymiselle on toiminut reaaliarvoisten tulosten yleistäminen vektoriavaruuksiin; näistä keskeisiä ovat differentioituvuuden ja lineaarikuvauksen käsitteet [10]. Jälkimmäinen on helpompi sisäistää ja hyvin konkreettinen: kuvaus $f \mapsto \int_X f\, d\mu$ määrittää lineaarikuvauksen kaikkien integroituvien funktioiden $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ avaruudesta reaaliluvuille. Tarkastellaan ensin reaaliarvoista tilannetta: olkoon mitta-avaruus $(\mathbb{R}, \Gamma, \mu)$ ja $f\colon \mathbb{R} \to B$. Jos $B = [0, \infty), \mu$ Lebesguen mitta ja f Lebesgue-integroituva, voidaan määritellä

$$\int_A f\, d\mu := \sup\Big\{ \int_A s\, d\mu : s \in S^+(X), s(x) \leq f(x) \text{ kaikilla } x \in A\Big\}, \tag{1}$$

missä $S^+(X)$ koostuu funktioista, jotka ovat muotoa $s(x) = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}(x)$, kun $a_i \geq 0, A \in \Gamma, A_i \cap A_j \neq \emptyset$ kaikille $i \neq j$ ja

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A_i \\ 0, & \text{kun } x \notin A_i \end{cases}$$

on *karakteristinen funktio*. Funktion s integraali määritellään $\int_A s\, d\mu := \sum_{i=1}^m b_i \mu(A_i)$. Tätä käyttäen voidaan määritellä yleinen integraali kuvauksen positiivi -ja negatiiviosilla koko avaruuteen $B = \mathbb{R}$. Olkoon nyt $f := (f_1, f_2, ..., f_n)\colon \mathbb{R} \to B := \mathbb{R}^n$, missä komponenttikuvaukset $f_i, 1 \leq i \leq n$ ovat integroituvia: jos asetetaan $s(x) = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}(x), b_i = (b_i^1, b_i^2, ..., b_i^n) \in \mathbb{R}^n$ ja joukot A_i ovat pareittain pistevieraat kuten aiemmin, saadaan

$$\int_A s = \sum_{i=1}^m (b_i^1, b_i^2, ..., b_i^n)\mu(A_i) = \Big(\int_A s_1\, d\mu, \int_A s_2\, d\mu, \cdots, \int_A s_n\, d\mu\Big)$$

missä $s_k = \sum_{i=1}^m b_i^k \chi_{A_i}(x), 1 \leq k \leq n$. Jos palataan taas määritelmään (1), voidaan jokaista f_k approksimoida alhaaltapäin kuvauksilla s_k niiden positiivi -ja negatiiviosille, jolloin voidaan asettaa

$$\int_A f := \Big(\int_A f_1\, d\mu, \int_A f_2\, d\mu, \cdots, \int_A f_n\, d\mu\Big). \tag{2}$$

Idea yksinkertaisilla kuvauksilla approksimointiin on vastaava mitä Salomon Bochner käytti alkuperäisteoksessaan [5] vuodelta 1933: jos B on normiavaruus, voidaan määritellä kuvaukset $s = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}(x)$, missä $b_i \in B$ ja A_i ovat pareittain pistevieraat. Jokaiseen äärelliseen mitta-avaruuteen (X, Γ, μ) (eli $\mu(X) < \infty$) voidaan määritellä integraali

$$\int_A s\, d\mu := \sum_{i=1}^m b_i \mu(A).$$

Huomaa, että $\mu(A) \in [0, \infty)$, joten laskutoimitus $b_i\mu(A)$ on hyvin määritelty vektoriavaruudessa B. Koska yleisessä normiavaruudessa ei ole reaalilukujen järjestystä, aiempi approksimointi ei nyt toimi. Jos kuitenkin $f = \lim_k s_k$, missä s_k ovat yksinkertaisia, Bochner käytti hyödyksi seuraavaa kriteeriota: jos Lebesgue-integraalille on raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_A \|f - s_k\|_B \, d\mu = 0$$

niin integraalien jono $\left(\int_A s_k \, d\mu \right)_k$ muodostaa Cauchy-jonon avaruudessa B. Jos siis B on Banach-avaruus, on raja-arvo $\int_A f \, d\mu := \lim_k \int_A s_k \, d\mu$ hyvin määritelty, yksikäsitteinen avaruuden B alkio. On edelleen suoraviivaista näyttää integraalin lineaarisuus ja osoittautuu, että tämä määritelmä on yhtäpitävä määritelmien (1) ja (2) kanssa, joten integraalista voidaan käyttää samaa merkintää. Tapauksessa $B = \mathbb{R}^n$ saadaan varsin rikas teoria, johon esimerkiksi lähde [17] keskittyy, mutta tutkielman osalta liikutaan yleisemmässä tilanteessa, missä B voi olla mikä tahansa Banach-avaruus.

Integraalin käsitettä voidaan myös tutkia mittojen näkökulmasta. Jos A on mitallinen joukko ja $f\colon X \to \mathbb{R}$ integroituva, saadaan mittakuvaus $A \mapsto \int_A f \, d\mu$ eli *merkkimitta*. Tämä analogia on läheisesti yhteydessä myös integraalin määräämään normiin. Olkoon $|\mu|$ on mitan μ *variaatio* eli

$$|\mu|(A) := \sup_{\Lambda_A} \sum_{C \in \Lambda_A} |\mu(C)|,$$

kun $\Lambda_A = \{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma$, I äärellinen, $A = \bigcup_I A_i$ ja $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ kun $i \neq j$; toisin sanoen otetaan supremum kaikkien joukon A äärellisten pareittain pistevieraiden mitallisten ositusten yli. Nimittäin, määrittelemällä $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$ voidaan näyttää, että $|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu$. Yleisemmin asettamalla ν kuten edellä kuvauksen $f\colon X \to B$ suhteen saadaan Banach-arvoinen additiivinen joukkokuvaus $\nu\colon \Gamma \to B, \nu(A) = \int_A f \, d\mu$ eli *vektorimitta*, jolle korvaamalla itseisarvot variaatiossa avaruuden B normilla voidaan näyttää, että $|\nu|(A) = \int_A \|f\|_B \, d\mu$. Koska integroituvuuden nojalla $|\nu|(X) < \infty$, jokainen integroituva kuvaus muodostaa vektorimitan, joka on *rajoitetusti varioituva*; tämä on oleellinen tapa määritellä vektorimitan rajoittuneisuus. On olemassa muitakin kuin integraalien määräämiä vektorimittoja, mutta tällaisilla on merkittävä rooli, joka voidaan karakterisoida *absoluuttisen jatkuvuuden* avulla. Sanotaan, että vektorimitta ν on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen, jos $\mu(A) = 0$ antaa $\nu(A) = 0_B$ jokaiselle $A \in \Gamma$; tässä 0_B on Banach-avaruuden nollavektori. Absoluuttista jatkuvuutta merkitään $\nu \ll \mu$: se takaa mitan μ nollamittaisten joukkojen kuvautuvan nollavektoriksi vektorimitalle ν. Vaikka absoluuttinen jatkuvuus näyttää käsitteenä kovin heikolta, se riittää reaalilukujen tapauksessa juurikin liittämään mitat ja integraalit toisiinsa, jos avaruus X on äärellinen. Tämä ominaisuus tunnetaan *Radon-Nikodym -lauseena.* Lauseen yksi esityksistä on seuraavanlainen:

Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, missä $\mu, \nu\colon \Gamma \to [0, \infty)$ ovat äärellisiä mittoja, joille $\nu \ll \mu$. Tällöin on olemassa integroituva kuvaus $g\colon X \to [0, \infty)$ siten, että

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad A \in \Gamma. \tag{3}$$

Nyt luonnollinen vektorimittoja ja mittoja yhdistävä kysymys on, voidaanko näitä esittää edellisen lauseen oletuksin muodossa (3) myös Bochner-integraalin suhteen käyttämällä absoluuttista jatkuvuutta. Ensimmäinen lisähuomio lauseen oletuksiin on, että vektorimitalle ν tulee vaatia yleisempi rajoittuneisuuden käsite eli rajoitettu varioituvuus $|\nu|(X) < \infty$: jokainen reaaliarvoinen äärellinen mitta toteuttaa tämän ehdon, mutta Banach-avaruuksissa on myös mahdollista olla $|\nu|(X) = \infty$, vaikka $\|\nu(X)\| < \infty$. Osoittautuu, ettei näillä vastaavilla oletuksilla saada yhtäsuuruutta (3) voimaan kaikkiin avaruuksiin: yhtenä vastaesimerkkinä toimii nollaan suppenevien reaaliarvoisten jonojen avaruus c_0. Ne avaruudet, joissa kaikki ehdot toteuttavat vektorimitat ja mitat voidaan yhdistää tällä tavalla toteuttavat *Radon-Nikodym -ominaisuuden* ja muodostavat tutkielman keskeisen tutkimuskohteen.

Tutkielman sisältö etenee seuraavasti: ensimmäisena lukijan on hyvä tuntea Banach-avaruuksien ja Lebesgue-integraalin tuloksia, jotka käydään läpi Luvussa 1. Näiden tietojen pohjalta voidaan laajentua mitallisuuteen ja Bochner-integraaleihin Luvussa 2. Tähän liittyen todistetaan mitallisuudesta Pettisin mitallisuuslause ja integraalien olennaisten tulosten lisäksi lineaarikuvauksiin liittyvä Hillen lause. Luvun lopuksi tutustutaan Bochner-integraalia heikompaan Pettis-integraaliin. Tämän jälkeen siirrytään Lukuun 3, joka käsittelee vektorimittojen teoriaa. Nämä ovat mitan käsitteen yleistys vektoriarvoisina joukkokuvauksina. Tärkeässä osassa käsitellään variaation määritelmä ja tutustutaan uudelleen Pettis-integraaliin vektorimittojen näkökulmasta. Lopuksi Luvussa 4 keskitytään Radon-Nikodym -ominaisuuteen, joka yleistää kaavaa (3) vastaavan Radon-Nikodym -lauseen Banach-avaruuksiin; kyse on nimenomaan ominaisuudesta, sillä tälle löytyy vastaesimerkkejä. Luvun teoria keskittyy ominaisuuden eri karakterisointeihin, joiden ohessa nähdään miten erilaisia avaruuksia tämä näennäisesti vektorimittoihin liittyvä ominaisuus yhdistää.

Lähteistä keskeisimpänä toimii J. Diestel, J.J Uhl Jr. *Vector measures* [10], joka on klassikkoteos vektoriavaruuksiin liittyvässä mitta -ja integraaliteoriassa. Tähän viitataan toistuvasti läpi tutkielman ja erityisesti suurin osa haastavemmista esimerkeistä ovat peräisin kyseisestä lähteestä. Muita tärkeitä teoksia ovat R. A. Ryan *Introduction to Tensor Products* [23] ja T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis *Analysis in Banach Spaces* [14]. Näistä ensimmäisestä hyödynnetään vektorimittojen teoriaa ja jälkimmäisestä mitallisuuteen sekä integroituvuuteen liittyviä tulkintoja. Molempia käytetään myös Luvun 4 L^1-esitettävissä olevien operaattoreiden tuloksiin. Aliluvun 4.3 geometrisissä tuloksissa pääartikkelina toimii W. J. Davis, R. R. Phelps, *The Radon-Nikodym Property and Dentable Sets in Banach Spaces* [9]. Kattava Banach-avaruuksien teos E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups* [13] sisältää Bochner-integraalien perustulokset jäsennellysti, ja näiden ohessa tärkeitä klassikkoteoksia funktionaalianalyysista ovat [15] ja [27]. Äärellisulotteisen mitta -ja integraaliteorian osalta tärkeimmät teokset ovat [1], [6], [7] ja [8]. Geometrisyyden ja derivoituvuuden tuloksissa Aliluvussa 4.4 apuna toimii Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometrical Nonlinear Functional Analysis: Volume 1* [4]. Mukana on lukuisia muita lähteitä, joista käytetään yhtä tai useampaa tulosta. Näistä valtaosa on artikkelilähteitä Radon-Nikodym -ominaisuuden karakterisoinneille, joista tarkempia viittauksia annettaan Luvussa 4.

1 Esitietoja

Bochner-integraali määritellään mitta-avaruuksilta täydellisiin normiavaruuksiin. Tämä luku täsmentää tarvittavia normiavaruuksien ja Lebesgue-integraalien käsitteitä, joita tarvitaan tulevissa luvuissa. Lisäksi tutustutaan lyhyesti heikon topologian määritelmään.

1.1 Normiavaruudet

Aloitetaan määritellemällä normilla varustetut vektoriavaruudet eli *normiavaruudet*:

Määritelmä 1.1. (Vektoriavaruus)
Olkoon $\mathbb{K}$ skalaarikunta - aina $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Joukon V *laskutoimitukset* ovat

- Yhteenlasku $V \times V \to V, (v, w) \to v + w$,
- Skalaarilla kertominen $\mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, v) \to \lambda v$.

Joukkoa V, joka on varustettu yllä olevilla laskutoimituksilla kerroinkunnan $\mathbb{K}$ suhteen kutsutaan *vektoriavaruudeksi* jos se toteuttaa seuraavat aksioomat:
1. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ kaikilla $v_1, v_2, v_3 \in V$,
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ kaikilla $x, y \in V$,
3. on olemassa *nollavektori* $\mathbf{0} \in V$ jolle $v + \mathbf{0} = v$ kaikilla $v \in V$,
4. jokaiselle $v \in V$ on olemassa *vastavektori* $-v \in V$ jolle $v + (-v) = \mathbf{0}$,
5. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$,
6. on olemassa *neutraalialkio* $\mathbf{1} \in \mathbb{K}$ jolle $\mathbf{1}v = v$ kaikilla $v \in V$,
7. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $v_1, v_2 \in V$,
8. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \alpha\beta v$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$.

Kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sanotaan että V on *reaalinen vektoriavaruus.* Vastaavasti, kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on kyseessä *kompleksinen vektoriavaruus.* Vektoriavaruuden alkiosta voidaan käyttää nimitystä *vektori.* Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, nollavektoria ja neutraalialkiota merkitään vastaavasti 0 ja 1.

Vektoriavaruudet ovat suljettuja yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen eli laskutoimitukset tuottavat jonkin avaruuden V vektorin. Tällaiseen rakenteeseen voidaan liittää eräänlainen vektoreita mittaava funktio, jota kutsutaan *normiksi*:

Määritelmä 1.2. (Normiavaruus) Olkoon V vektoriavaruus. Tällöin kuvaus $p\colon V \to [0, \infty)$ on *normi* jos se toteuttaa seuraavat ehdot:
1. $p(v) = 0$ jos ja vain jos $v = 0$,
2. $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$,
3. $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$ kaikilla $v_1, v_2 \in V$ eli normi toteuttaa *kolmioepäyhtälön.*

Jos p määrää normin avaruuteen V, paria (V, p) kutsutaan *normiavaruudeksi.*

On tyypillistä merkitä normia $\|\cdot\|_V$ tai $\|\cdot\|$, jos vektoriavaruus on selvä asiayhteydestä. Normiavaruutta voidaan merkitä vektoriavaruutensa mukaan eli $V = (V, \|\cdot\|)$. Tavallisia äärellisulotteisia normiavaruuksia ovat $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ja $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Äärettömulotteisista esimerkkinä voidaan antaa L^p-avaruudet, kun $1 \leq p \leq \infty$.

Jokainen normiavaruus on metrinen avaruus:

Lemma 1.3. *Normiavaruus $(V, \|\cdot\|)$ on metrinen avaruus.*

Todistus. Olkoon $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$. Näytetään, että d on metriikka: olkoot $x, y, z \in V$.

(i) Määritelmän nojalla $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $\|x - y\| = 0$. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $x - y = 0$ eli $x = y$.

(ii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

(iii) Normin kolmioepäyhtälö antaa $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|$ joten metriikalle on $d(x, y) \leq d(x, z)d(z, y)$.

□

Metriikan kautta voidaan määritellä vektorijonon suppeneminen. Tämä tapahtuu yleiselle normille vastaavasti kuin reaaliluvuilla itseisarvolle:

Määritelmä 1.4. Normiavaruuden $(V, \|\cdot\|)$ jono $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee raja-arvoon $v \in V$ jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on $N \geq 1$ siten, että $\|v_n - v\| < \varepsilon$ kun $n \geq N$.

Usein on tarpeellista tietää onko tutkittava rajaprosessi järkevä eli suppeneeko tämä johonkin avaruuden sisällä olevaan raja-arvoon. Tähän liittyen kiinnostavia normiavaruuksia ovat sellaiset, joiden jonojen suppenemiseen riittää tarkastella vain jonon alkioiden etäisyyttä keskenään. Tällaisia jonoja kutsutaan Cauchy-jonoiksi.

Määritelmä 1.5. (1) Normiavaruuden $(V, \|\cdot\|)$ jono $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ on *Cauchy-jono*, Jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $N \geq 1$ siten, että

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \text{ kun } n, m \geq N.$$

(2) Jos normiavaruuden V jokainen Cauchy-jono suppenee ja raja-arvo sisältyy avaruuteen, on avaruus V *täydellinen* normiavaruus eli *Banach-avaruus*.

Koska $\|v_n - v_m\| \leq \|v - v_n\| + \|v - v_m\|$, on jokainen suppeneva jono Cauchy-jono. Toiseen suuntaan tätä ei voi olettaa yleisessä normivaruudessa, vaikka reaaliluvuilla työskennellessä ominaisuus tuntuu itsestään selvältä. Useat normiavaruudet ovat juurikin tärkeitä täydellisyytensä takia.

Esimerkki 1.6. Banach-avaruuksia ovat esimerkiksi:

- funktioavaruus $C(X, \mathbb{R})$ normilla $\sup_{x \in X} |\cdot|$ ja L^p, kun $p \in [1, \infty]$,
- jonoavaruudet c_0 ja c normilla $\sup_i |x_i|$ sekä l^p, kun $p \in [1, \infty]$,
- äärellisulotteiset avaruudet, kuten $\mathbb{R}^n$ Euklidisella normilla $\|\cdot\|_2$ ja $\mathbb{C}$.

Ei-täydellisiä normiavaruuksia (välillä $[0, 1]$):

- Välin $[0, 1]$ jatkuvien kuvausten avaruus $C([0, 1])$ normilla $\|f\|_1 = \int_0^1 |f| dx$: Asetetaan $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ja $f_0 = 0$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}]) \\ n(x - \frac{1}{2}), & \text{kun } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{kun } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Tällöin valitsemalla $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0, & \text{kun } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

saadaan

$$\|f - f_n\| = \int_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})} |f - f_n| dx \leq \int_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})} dx = \frac{1}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siten suppenevana (f_n) on Cauchy, mutta $f \notin C([0,1])$.

Alempaan katso tarvittaessa käsite ”melkein kaikkialla” Määritelmästä 1.32:

Koska integraali ei erota funktioita nollamittaisissa joukoissa, tulee tarkistaa, että kuvauksella f ei ole jatkuvaa edustajaa eli jatkuvaa kuvausta g, jolle $g(x) = f(x)$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Jos tällainen olisi, niin löytyy piste $y \in (0,1)$ siten, että $g(y) = \frac{1}{2}$. Jatkuvuuden nojalla on $\delta \in (0,1)$, jolle

$$\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \text{ eli } 0 < g(x) < 1$$

kaikilla $x \in (y - \delta, y + \delta) \cap [0,1]$. Mutta nyt g saa muita arvoja kuin 0 tai 1 positiivimittaisessa joukossa, joten jatkuvaa edustajaa g ei ole olemassa.

- Välin $[0,1]$ jatkuvasti differentioituvien kuvausten avaruus $C^1([0,1])$ normilla $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$:

  Jokaista suljetulla välillä jatkuvaa kuvausta voidaan approksimoida tasaisesti (eli normissa $\|f\|_\infty$) polynomeilla; tämä tulos tunnetaan *Weierstrassin lauseena*. Kuvaukselle $f(x) = |x|$ löydetään polynomijono (p_n), jolle $\|f - p_n\|_\infty \to 0$. Siis (p_n) on Cauchy ja $(p_n) \subseteq C^1([0,1])$, mutta $f \notin C^1([0,1])$.

Näytetään vielä tärkeä perustulos Banach-avaruuksien sarjoista;

Lemma 1.7. *Olkoon B Banach-avaruus. Jos sarja $\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|$ suppenee, niin myös sarja $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ suppenee avaruudessa B.*

Todistus. Olkoon $(b_i) \subseteq B$ jono, jolle $\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|$ suppenee ja asetetaan $S_n := \sum_{i=1}^{n} b_i$. Olkoot $n \geq m \geq 1$, jolloin kolmioepäyhtälö ja itseinen suppeneminen antavat

$$\|S_n - S_m\| \leq \sum_{i=m}^{n} \|b_i\| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \|b_i\|,$$

joten $\|S_n - S_m\| \to 0$, kun $m \to \infty$. Siis (S_n) on Cauchy-jono avaruudessa B. $\square$

Erään tärkeän erikoistapauksen Banach-avaruuksista muodostavat täydelliset sisätuloavaruudet eli *Hilbert-avaruudet*.

Määritelmä 1.8. Vektoriavaruuden kuvaus $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ on *sisätulo* jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $\langle v, v\rangle \geq 0$ kaikilla $v \in V$ ja $\langle v, v\rangle = 0$ jos ja vain jos $v = 0$,
2. $\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$ kaikille $v_1, v_2 \in \mathbb{K}$,
3. $\langle v_1 + v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$ kaikilla $v_1, v_2, v_3 \in V$,
4. $\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $v_1, v_2 \in \mathbb{K}$.

Paria $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kutsutaan *sisätuloavaruudeksi.*

Jokainen sisätulo määrää normin $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$; Määritelmän 1.2 kohdat (1),(2) seuraavat helposti, kolmioepäyhtälöön (3) katso [1, s. 200-201]. Sisätuloavaruuden täydellisyys katsotaan siis tämän normin suhteen. Hilbert-avaruuden geometria on rikkaampi kuin yleisissä Banach-avaruuksissa: esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ sisätulo määrittelee vektoreiden kulman käsitteeseen. Muita esimerkkejä ovat $\mathbb{C}$, l^2 ja L^2.

Vektoriavaruuden laskutoimitukset säilyttävä kuvaus on lineaarinen:

Määritelmä 1.9. Olkoot V, W vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to W$ on *lineaarinen*, jos kaikille $x, y \in V$ ja kaikille $a \in \mathbb{K}$ on voimassa

(1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$,
(2) $L(ax) = aL(x)$.

Jos $W = \mathbb{K}$, kutsutaan edellistä kuvausta avaruuden V *reaali- tai kompleksikertoimiseksi lineaarikuvaukseksi* tai $\mathbb{K}$-lineaarikuvakseksi. Edelleen, jos L on jatkuva, se on $\mathbb{K}$-*funktionaali* avaruudessa V.

Määritelmä 1.10. Lineaarikuvaus $L\colon V \to W$ on rajoitettu, jos

$$\|L\|_{V,W} = \|L\| := \sup\{\|L(x)\|_W : x \in X, \|x\|_V \leq 1\} < \infty.$$

Kun $L \equiv 0$ niin selvästi $\|L\| = 0$. Jos taas $\|L\| = 0$, niin $L(x) = 0$ suljetussa yksikköpallossa. Koska L on lineaarinen, saadaan $L(x) = \|x\|L(\frac{x}{\|x\|}) = 0$ kaikille $x \in V$. Siten normin ehto (1) on selvä. Ehdot (2) ja (3) seuraavat suoraan normin vastaavasta määritelmästä, sillä supremumim ottaminen säilyttää järjestyksen kolmioepäyhtälössä ja sallii vakion siirtämisen eteen. Niinpä $\|L\|$ määrää normin kaikkien lineaarikuvausten $L\colon V \to W$ avaruuteen $L(V, W)$. Erityisesti Määritelmästä 1.10 seuraa, että $L(V, W)$ on Banach-avaruus, kun W on Banach-avaruus. Jos $W = \mathbb{K}$, saadaan tärkeät duaaliavaruudet:

Määritelmä 1.11. (Duaaliavaruus) Olkoon $L(V, W)$ kaikkien lineaarikuvausten avaruus $L\colon V \to W$. Jos $W = \mathbb{K}$, saadaan normiavaruuden V *algebrallinen duaali* $V' := L(V, \mathbb{K})$. Normiavaruuden V *(jatkuva) duaali* V^* on sen kaikkien $\mathbb{K}$-funktionaalien avaruus eli

$$V^* := \big(\{L\colon V \to \mathbb{K} : L \text{ on lineaarinen ja jatkuva}\}, \|\cdot\|_{V,\mathbb{K}}\big).$$

Käytetään yleensä merkintää v^*, kun puhutaan avaruuden V^* alkioista. Normille käytetään myös merkitään $\|\cdot\|_{V^*}$.

Huomautus 1.12. Duaaliavaruuksissa esiintyy merkintää $V^* = V$. Luonnollisesti näin ei päde alkioittain, mutta avaruuksien välillä on sopiva isometria. Tähän palataan Luvun 2.3 lopussa L^p-avaruuksien yhteydessä (Huomautus 1.39).

Seuraava lemma samaistaa lineaarikuvausten rajoittuneisuuden ja jatkuvuuden:

Lemma 1.13. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
(1) *L on rajoitettu.*
(2) *L on jatkuva.*
(3) *L on jatkuva pisteessä 0.*

Todistus. (1) $\Rightarrow$ (2) Jos L on rajoitettu, niin rajouttuneisuuden, lineaarisuuden ja normin määritelmän nojalla

$$\frac{1}{\|x-y\|_V}\|L(x)-L(y)\|_W = \Big\|L\Big(\frac{x-y}{\|x-y\|_V}\Big)\Big\|_W \leq \|L\|,$$

mistä saadaan siis $\|L(x)-L(y)\|_W \leq \|L\|\|x-y\|_V$ koska $\|\frac{x-y}{\|x-y\|_V}\|_V = 1$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Selvästi totta.
(3) $\Rightarrow$ (1) Olkoon L jatkuva nollassa. Oletetaan, että L ei ole rajoitettu: tällöin löytyy jono $x_n \in V$ siten, että $\|x_n\|_V \leq 1$, mutta $\|L(x_n)\|_W \to \infty$. Valitsemalla $y_n = \frac{x_n}{\|L(x_n)\|_W}$ saadaan $y_n \to 0$. Tällöin kuitenkin $\|L(y_n)\|_W = \|L(\frac{x_n}{\|L(x_n)\|_W})\|_W = 1 \not\to 0 = L(0)$, joten L ei voi olla jatkuva nollassa. □

Listataan seuraavaksi keskeisiä tuloksia.

Lause 1.14. (Hahn-Banach $\mathbb{K}$-lineaarikuvauksille) *Olkoon V vektoriavaruus, $W \subseteq V$ aliavaruus, $L\colon W \to \mathbb{K}$ lineaarinen funktionaali ja $p\colon V \to [0,\infty)$ seminormi. Jos kaikille $x \in W$ on voimassa $|L(x)| \leq p(x)$, on olemassa lineaarinen funktionaali $K\colon V \to \mathbb{K}$ siten, että*
(1) *$|K(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in V$ ja*
(2) *$K(x) = L(x)$ kaikilla $x \in W$.*

Todistus. [27, s. 102-103 & 105-106]. □

Seurauksena saadaan Hahn-Banach normiavaruuden V funktionaaleille $L\colon V \to \mathbb{K}$ sekä toinen hyödyllinen sovellus:

Seuraus 1.15. (Hahn-Banach $\mathbb{K}$-funktionaaleille) *Olkoon V normiavaruus, $W \subseteq V$ aliavaruus ja $L\colon W \to \mathbb{K}$ lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $K\colon V \to \mathbb{K}$*
(1) *$\|K\| = \|L\|$ ja*
(2) *$K(x) = L(x)$ kaikilla $x \in W$.*

Todistus. Asetetaan $p(x) = \|L\|\|x\|_V$. Tällöin p on (semi)normi. Lisäksi $|L(x)| \leq \|L\|\|x\|_V = p(x)$ kaikille $x \in W$, joten Lauseen 1.14 nojalla on jatkokuvaus K, jolle $K(x) = L(x)$ kaikilla $x \in W$ ja $|K(x)| \leq p(x)$ kaikille $x \in V$. Niinpä funktionaalin K jatkuvuus seuraa normin jatkuvuudesta. Lisäksi

$$\|K\| \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} p(x) = \|L\|$$

ja toisaalta, koska K on jatke kuvaukselle L, täytyy olla $\|K\| \geq \|L\|$ (koska normin maksimoivia vektoreita on enemmän). Näin ollen $\|K\| = \|L\|$. □

Seuraus 1.16. *Olkoon V normiavaruus. Jokaiselle $v \in V \backslash \{0\}$ on olemassa lineaarinen funktionaali $K_v \colon V \to \mathbb{K}$ siten, että $\|K_v\| = 1$ ja $K_v(v) = \|v\|$.*

Todistus. Olkoon $v \in V$ ja $\langle v \rangle = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Asetetaan $L_v \colon \langle v \rangle \to \mathbb{K}, L_v(\lambda v) := \lambda \|v\|_V$. Selvästi $\|L_v\| = 1$ ja L_v on lineaarinen. Seurauksen 1.15 nojalla löytyy jatkefunktionaali $K_v \colon V \to \mathbb{K}$ siten, että $\|K_v\| = \|L_v\| = 1$ ja $K_v(v) = L_v(1v) = \|v\|_V$. □

Lause 1.17. *Olkoot V normiavaruus ja W Banach-avaruus. Jos $L \colon V \to W$ on rajoitettu lineaarikuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen jatkokuvaus $L' \colon \overline{V} \to W$, jolle $\|L'\| = \|L\|$.*

Todistus. [15, s. 75]. □

Lause 1.18. (Suljetun graafin lause) *Olkoot V, W Banach-avaruuksia, $f \colon V \to W$ lineaarikuvaus ja kuvauksen f graafi $G_f := \{(v, f(v)) : x \in V\} \subseteq V \times W$ suljettu normin $\|(v, w)\|_{V \times W} := \|v\|_V + \|w\|_W$ suhteen. Tällöin f on jatkuva.*

Todistus. [15, s. 395]. □

Lause 1.19. (Rieszin esityslause Hilbert-avaruuksille) *Olkoon $L \colon H \to \mathbb{K}$ lineaarinen funktionaali, missä H on Hilbert-avaruus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $x_0 \in H$ siten, että $L(x) = \langle x, x_0 \rangle$ ja $\|L\| = \|x_0\|_H$.*

Todistus. Olemassaolo ja yksikäsitteisyys löytyvät [1, s. 204-205]. Normin yhtäsuuruuteen saadaan Cauchy-Schwarz-epäyhtälöstä

$$|L(x)| = |\langle x, x_0 \rangle| \leq \|x\| \|x_0\| \text{ eli } \|L\| \leq \|x_0\|,$$

ja toisaalta

$$0 \leq \|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = |L(x_0)| \leq \|L\| \|x_0\| \text{ eli } \|L\| \geq \|x_0\|.$$

□

Käydään lopuksi läpi separoituvuuteen ja kompaktisuuteen liittyviä käsitteitä sekä näihin liittyvät tärkeät lemmat.

Määritelmä 1.20. Olkoon $A \subseteq V$.
(1) Avaruus V on *separoituva*, jos se sisältää numeroituvan tiheän osajoukon.
(2) Joukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.
(3) A on *täysin rajoitettu*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on pisteet $x_1, ..., x_m \in A$ siten, että $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

Lemma 1.21. *Olkoon $(B, \|\cdot\|)$ separoituva Banach-avaruus ja (b_n) sen numeroituva tiheä osajoukko. Tällöin löytyy $(b_n^*) \subseteq B^*$, jolle $b_n^*(b_n) = \|b_n\|$, $\|b_n^*\|_{B^*} = 1$, kun $n \geq 1$ ja $\|b\| = \sup_n |b_n^*(b)|$ kaikille $b \in B$.*

Todistus. Olkoon (b_n) oletuksen antama tiheä joukko. Seurauksen 1.16 nojalla löydetään jono $(b_n^*) \subseteq B^*$ siten, että $b_n^*(b_n) = \|b_n\|$ ja $\|b_n^*\|_{B^*} = 1$. Nyt $|b_n^*(b)| \leq \|b_n^*\|_{B^*}\|b\| = \|b\|$, joten $\sup_n |b_n^*(b)| \leq \|b\|$.

Toiseen suuntaan olkoon $b \in B \setminus \{0\}$. Separoituvuuden nojalla löytyy jono (n_k) siten, että $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \frac{b}{\|b\|}$. Erityisesti $|b_{n_k}^*(b_{n_k})| = 1$, joten lineaarisuus antaa

$$
\begin{aligned}
\big|b_{n_k}^*(b) - \|b\|\big| &= \Big|b_{n_k}^*\Big(\frac{b}{\|b\|}\Big) - 1\Big| = \Big|b_{n_k}^*\Big(\frac{b}{\|b\|}\Big) - b_{n_k}^*(b_{n_k})\Big| \\
&= \Big|b_{n_k}^*\Big(\frac{b}{\|x\|} - b_{n_k}\Big)\Big| \leq \|b_n^*\|_{B^*}\Big\|\frac{b}{\|b\|} - b_{n_k}\Big\| \\
&= \Big\|\frac{b}{\|b\|} - b_{n_k}\Big\| \to 0
\end{aligned}
$$

kun $k \to \infty$. Tällöin $\lim\limits_{k\to\infty} |b_{n_k}^*(b)| = \|b\|$, joten $\sup_n |b_n^*(b)| \geq \|b\|$. □

Lemma 1.22. *Täysin rajoitettu avaruus V on separoituva.*

Todistus. Koska V on täysin rajoitettu, voidaan jokaiselle $n \geq 1$ valita pisteet $x_1^n, ..., x_{m(n)}^n \in V$ siten, että $V = \bigcup_{k=1}^{m(n)} B\big(x_k^n, \frac{1}{n}\big)$. Asettamalla $E_n := \{x_1^n, ..., x_{m(n)}^n\}$ saadaan $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, joka on numeroituva.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $x \in V$, valitaan n, jolle $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Tällöin löytyy piste $x_i^n \in E_n \subseteq E$ siten, että $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n}) \subseteq B(x_i^n, \varepsilon)$ eli $\|x - x_i^n\| < \varepsilon$. □

Lemma 1.23. *Olkoon B Banach-avaruus.*
(i) Jos A on kompakti, niin A on täysin rajoitettu.
(ii) Jos A on täysin rajoitettu, niin joukot A ja $\overline{A}$ ovat kompakteja.

Todistus. [15, s. 34-35]. □

1.2 Heikko topologia

Tutustutaan lyhyesti heikkoon topologiaan, jonka käsitteitä tarvitaan duaalien yhteydessä. Erityisesti heikkoja kompaktisuusominaisuuksia tarvitaan Luvuissa 3 ja 4.

Määritellään ensin heikko suppeneminen ja heikko topologia normiavaruudessa.

Määritelmä 1.24. Normiavaruuden V jono (v_n) suppenee heikosti vektoriin v, jos $v^*(v_n) \to v^*(v)$ kaikille $v^* \in V^*$.

Määritelmä 1.25. Olkoon V normiavaruus. Tällöin *heikko topologia* avaruudessa V määritellään algebrallisen duaalin V' karkeimpana topologiana, jossa jokainen $f \in V'$ on jatkuva.

Heikossa topologiassa voidaan määritellä ominaisuudet kuten jatkuvuus, separoituvuus, suljetut joukot ja niin edelleen. Lineaarikuvausten kompaktisuusteoriassa esiintyy usein suljettu yksikköpallo. Tämä ei kuitenkaan ole ääretönulotteisissa normiavaruuksissa kompakti; katso [15, s. 39]. Siksi tarvitaan vastaavaa heikkoa ominaisuutta eli heikkoa kompaktisuutta:

Määritelmä 1.26. (Heikko kompaktisuus)
(1) $E \subseteq V$ on *heikosti kompakti*, jos E on kompakti heikossa topologiassa.
(2) E on *suhteellisen (heikosti) kompakti*, jos sulkeuma $\overline{E}$ on (heikosti) kompakti.
(3) Olkoon V, W normiavaruuksia. Jatkuva lineaarikuvaus $T \colon V \to W$ on (*heikosti*) *kompakti*, jos kuvajoukko $T(E) \subseteq W$ on suhteellisen (heikosti) kompakti joukko jokaisella rajoitetulla $E \subseteq V$; toisin sanoen $\overline{T(E)}$ on (heikosti) kompakti kaikille rajoitetuille E.

Lineaarikuvauksen kompaktisuutta tarkastellessa voidaan rajoittua suljettuun yksikköpalloon:

Lemma 1.27. *$T \colon V \to W$ on heikosti kompakti jos ja vain jos $\overline{T(B_s(0,1))}$ on heikosti kompakti, missä $B_s(0,1) := \{v : \|v\| \leq 1\} \subseteq V$ on suljettu yksikköpallo.*

Todistus. Voidaan näyttää tulos heikon kompaktisuuden sijasta kompaktisuudelle. Jos T on kompakti, on $\overline{T(B_s(0,1))}$ selvästi kompakti oletuksen nojalla.

Oletetaan nyt, että $\overline{T(B_s(0,1))}$ on kompakti. Koska T on lineaarinen, saadaan $T(B_s(0,r)) = rT(B_s(0,1))$ kaikille $r > 0$ ja edelleen $\overline{T(B_s(0,r))} = r\overline{T(B_s(0,1))}$ on kompakti oletuksen nojalla. Jos A on rajoitettu, löytyy $r > 0$ siten, että $A \subseteq B_s(0,r)$. Nyt $T(A) \subseteq T(B_s(0,r))$ ja erityisesti $\overline{T(A)} \subseteq \overline{T(B_s(0,r))}$. Koska kompaktien joukkojen suljetut osajoukot ovat kompakteja, saadaan väite. $\square$

Myöhemmin tarvitaan myös duaaliavaruuden heikkoa topologiaa, johon voidaan määritellä duaalin V^* heikot ominaisuudet aivan kuten normiavaruudelle V.

Määritelmä 1.28. (Heikko* -topologia) Normiavaruuden duaalin V^* heikko topologia on karkein topologia, jossa kuvaukset $V_v \colon V' \to \mathbb{K}, V_v(f) := f(v)$, ovat jatkuvia kaikille $v \in V$. Topologiasta käytetään nimitystä *heikko* -topologia* (luetaan ”heikko tähti topologia”).

Esimerkki 1.29. Jono $(v_n)^* \subseteq V^*$ suppenee vektoriin v^* heikko* -topologiassa, jos $v_n^*(v) \to v^*(v)$ jokaiselle $v \in V$.

1.3 Lebesgue-integraali

Määritellään mitta-avaruudet, mitalliset kuvaukset, yksinkertaiset funktiot ja Lebesgue-integraalit:

Määritelmä 1.30. Olkoon X joukko ja $\Gamma \subseteq X$ kokoelma joukkoja. Kokoelma Γ on joukon X σ-algebra (*sigma*-algebra), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:
1. $\emptyset \in \Gamma$,
2. Jos $A \in \Gamma$, niin $A^c \in \Gamma$; tässä A^c on joukon A komplementtijoukko,
3. Jos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Gamma$ on numeroituva kokoelma joukkoja, niin $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$.

Kuvaus $\mu \colon \Gamma \to [0,\infty)$ on *mitta*, jos
1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. jokaiselle numeroituvalle kokoelmalle $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Gamma$, missä $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$, on voimassa $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Paria (X, Γ) sanotaan *mitalliseksi avaruudeksi* ja kolmikkoa (X, Γ, μ) *mitta-avaruudeksi*. Joukkoja $A \in \Gamma$ kutsutaan *mitallisiksi*.

Esimerkiksi joukon A osajoukkojen kokoelma eli potenssijoukko $\mathcal{P}(A) = 2^A$ on σ-algebra. Tärkeä σ-algebra avaruudessa $\mathbb{R}$ (tai missä tahansa topologisessa avaruudessa Y) on *Borel-joukkojen* kokoelma $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eli pienin σ-algebra, joka sisältää avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet joukot. Tätä käyttäen voidaan määritellä mitalliset reaaliarvoiset kuvaukset.

Määritelmä 1.31. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f \colon X \to \mathbb{R}$. Tällöin f on *mitallinen*, jos $f^{-1}(C) \in \Gamma$ kaikille $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Yhtäpitäviä ehtoja ovat:

- $f^{-1}(C) \in \Gamma$ kaikille avoimille $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $f^{-1}([-\infty, a)) \in \Gamma$ kaikille $a \in \mathbb{R}$.
- on olemassa jono yksinkertaisia funktioita $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ (katso Määritelmä 1.33) siten, että $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ kaikille $x \in X$.

Mitallisten kuvausten rajakuvaukset ovat edelleen mitallisia; toisin sanoen, jos (f_n) on jono mitallisia kuvauksia, joille $f_n(x) \to f(x)$ kaikille $x \in X$, on f mitallinen.

Määritellään seuraavaksi ominaisuuden melkein kaikkialla -voimassaolo:

Määritelmä 1.32. Olkoon $P(x)$ jokin ominaisuus, joka riippuu muuttujasta x. Sanotaan, että ominaisuus $P(x)$ on voimassa (μ-)*melkein kaikkialla* joukossa A, jos $P(x)$ on voimassa kaikilla $x \in A \setminus E$, missä $E \in \Gamma$ on jokin nollamittainen joukko eli $\mu(E) = 0$. Yleensä sanotaan lyhyemmin, että P on voimassa (μ-)m.k. joukossa A.

Mitoista voidaan siirtyä integraaleihin. Määritellään ensin tärkeä funktioluokka:

Määritelmä 1.33. Olkoon $A \in \mathcal{P}(X)$. Joukon A *karakteristinen funktio* tai indikaattorifunktio määritellään kuvauksena

$$\chi_A \colon A \to \{0, 1\}, \ \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases} \tag{4}$$

Yksinkertainen funktio on kuvaus $s \colon A \to \mathbb{R}, s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, missä $n \geq 1$ ja $a_i \in \mathbb{R}$ sekä $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ovat erillisiä eli

(i) A_i ovat *pareittain pistevieraita* eli $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$.

(ii) Vakiolle a_i on $a_i \neq a_j$ kaikille $i \neq j$.

Joukon A yksinkertaisten funktioiden kokoelmaa merkitään $S(A)$; jos rajoitutaan vain ei-negatiivisiin kuvaksiin eli $a_i \geq 0$, merkitään $S^+(A)$.

Huomautus 1.34. Yksinkertaisissa funktioissa joukkojen ja/tai vakioiden ei tarvitse olla erillisiä. Tässä tapauksessa integraaleille tulee näyttää, että ne eivät riipu esityksestä. Tämä taas seuraa siitä, että tällaiselle kuvaukselle löydetään aina edellistä määritelmää vastaava pistevieras esitys:

Olkoon $s(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, missä a_i ja A_i eivät tarvitse olla erillisiä. Funktio s saa äärellisen monta erillistä arvoa $a'_i \in \mathbb{R}$, missä $1 \leq i \leq N$ jollekin $N \geq 1$. Asettamalla $A'_i := s^{-1}\{(a'_i\})$ saadaan mitalliset joukot, jotka ovat pareittain pistevieraita alkukuvan määritelmän nojalla. Edelleen vastaaville joukoille A'_i on $\bigcup_{i=1}^{N} A'_i = A$. Tästä seuraa, että $s(x) = \sum_{i=1}^{N} a'_i \chi_{A'_i}(x)$, joka vastaa nyt Määritelmän 1.33 esitystä.

Määritelmä 1.35. (Lebesgue-integraali) Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A \in \Gamma$.

1. Olkoon $s \in S^+(A)$, missä osituksen joukot ovat mitallisia. Yksinkertaisen funktion s *integraali joukossa* A on luku

$$\int_A s \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap A) \in [0, \infty].$$

   Funktio s on *integroituva*, jos $\int_X s \, d\mu < \infty$ - tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mu(A_i) < \infty$ kaikille $a_i \neq 0$. Integraalin arvo ei riipu myöskään funktion s esityksestä, kuten Huomautuksessa 1.34 nähtiin.

2. Olkoon ei-negatiivinen funktio $f \colon X \to [0, \infty]$ mitallinen. Funktion f *Lebesgue-integraali joukossa* A on luku

$$\int_A f \, d\mu := \sup \Big\{ \int_A s \, d\mu : s \in S^+(X), s(x) \leq f(x) \text{ kaikilla } x \in A \Big\}.$$

   Funktio f on *integroituva*, jos $\int_X f \, d\mu < \infty$.

3. Olkoon funktio $f \colon X \to \mathbb{R}$ ja f^+, f^- sen positiivi- ja negatiiviosat

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

   Jos ainakin toisella osista on äärellinen integraali, määritellään *Lebesgue-integraali*

$$\int_A f \, d\mu := \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu \in [-\infty, \infty].$$

   Jos molemmat ovat äärellisiä joukossa X, on f integroituva eli $\int_X f \, d\mu < \infty$. Yhtäpitävästi riittää näyttää, että $\int_X |f| \, d\mu < \infty$, koska $|f| = f^+ + f^-$.

Jos f on integroituva joukossa $A \subseteq X$, merkitään $f \in \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{L}^1(A; \mu)$; riippuvuus mitasta μ on yleensä selvää, joten tavallisesti käytetään ensimmäistä merkintää.

Lukijalta oletetaan integraalien (ja mittojen) perusominaisuuksien hallinta. Mainitaan alla kuitenkin additiivisuusominaisuus, jota hyödynnetään myöhemmin Radon-Nikodym -lauseen todistuksessa Luvussa 4.

Lemma 1.36. *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f \in \mathcal{L}^1(A)$.*

(i) *Pareittain pistevieraille joukoille* $(A_i) \subseteq \Gamma$*, joille* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, on voimassa*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A} f \, d\mu.$$

(ii) *Jos* $f_n \colon A \to [0, \infty], n \geq 1$ *on jono mitallisia funktioita, niin*

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Todistus. Katso [7, s. 341] kohdat (ii) ja (iii). □

Lebesgue-integraalille on keskeiset suppenemislauseet:

Lause 1.37. (i) (Monotoninen konvergenssi) *Olkoot* $A \in \Gamma$ *ja* $f_n \colon A \to [0, \infty]$ *kasvava jono funktioita eli* $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ *kaikilla* $x \in X$ *ja* $n \geq 1$*. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

(ii) (Fatoun lemma) *Olkoot* $A \in \Gamma$ *ja* $f_n \colon A \to [0, \infty], n \geq 1$*, jono mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

(iii) (Dominoitu konvergenssi) *Olkoot* $A \in \Gamma$ *ja* $f_n \colon A \to \mathbb{R}$ *jono mitallisia funktioita, joille* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *m.k.* $x \in A$*. Jos on olemassa* $g \in \mathcal{L}^1(A)$ *siten, että* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *m.k.* $x \in A$ *niin*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Todistus. Katso [1, s. 57-58, 61-62]. □

Käydään lopuksi lyhyesti läpi L^p-avaruudet: olkoon $p \in [1, \infty)$ ja

$$\mathcal{L}^p(A) = \mathcal{L}^p(A; \mu) := \Big\{ f \colon A \to \mathbb{R} \text{ mitallinen } : \int_A |f|^p \, d\mu < \infty \Big\}$$

Määrittelemällä ekvivalenssirelaatio $f \sim g$ jos ja vain jos $f = g$ m.k. joukossa A, saadaan ekvilenssiluokat $[f]$. Tällöin jokainen kuvaus f voidaan samaistaa ekvivalenssiluokkansa kanssa mitan μ suhteen eli saadaan ekvivalenssiluokkien avaruus

$$\mathcal{L}^p(A)/\sim := \big\{ [f] : f \in \mathcal{L}^p(A) \big\}.$$

Näiden avulla voidaan määritellä

$$L^p(A) := \Big\{ [f] \in \mathcal{L}^p(A)/\sim : \|f\|_p = \Big(\int_A |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}.$$

Tässä $\|\cdot\|_p$ on normi: kolmioepäyhtälö seuraa Minkowskin epäyhtälöstä 1.38 (i), lineaarisuus antaa $\|af\|_p = |a|\|f\|_p$ ja ekvivalenssiluokkien määritelmästä seuraa $\|f\|_p = 0$ jos ja vain jos $f = 0$ m.k. $x \in A$.

Tapauksessa $p = \infty$, saadaan

$$L^\infty(A) := \big\{[f] : \|f\|_\infty = \inf\{a : |f(x)| \leq a \text{ m.k. } x \in A\} < \infty\big\}.$$

Avaruudet L^p ovat Banach-avaruuksia kaikille $1 \leq p \leq \infty$: tämä näytetään yleisemmin Banach-arvoisille kuvauksille seuraavassa Luvussa 2.

L^p-avaruuksissa on hyödylliset perusepäyhtälöt:

Lemma 1.38. *Olkoot $p, q \in [1, \infty]$.*

(1) Minkowskin epäyhtälö*: jos $f, g \in L^p(A)$, niin $f + g \in L^p(A)$ ja*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

(2) Hölderin epäyhtälö*: jos $f \in L^p(A), g \in L^q(A)$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin $\|fg\|_1 \in L^p(A)$ ja*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Todistus. [8, s. 93-95]. □

Jos $|B|$ on joukon B alkioiden määrä, niin valitsemalla $\Gamma = 2^{\mathbb{N}}$ ja

$$\mu(B) = \begin{cases} |B|, & \text{kun } |B| < \infty \\ \infty, & \text{kun } |B| = \infty, \end{cases}$$

saadaan $l^p(A) = l^p(A, \mathbb{K})$-avaruudet, missä $\|f\|_p = \Big(\sum_{x \in A} |f(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$. Normi on järkevä määritellä vain kuvauksille f, jotka eroavat nollasta numeroituvassa joukossa. Tällöin $S := \sum_{x \in A} f(x) \in \mathbb{K}$ on olemassa, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on äärellinen joukko $A' \subseteq A$ siten, että $\Big|S - \sum_{x \in A'} f(x)\Big| < \varepsilon$. Erikoistapauksena saadaan jonoavaruudet $l^p(\mathbb{N})$, missä normi on muotoa $\|f\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$. Avaruudet $l^p(A)$ voivat olla hyvinkin erilaisia joukolle A: esimerkiksi $l^2(\mathbb{R})$ ei ole separoituva, vaikka $l^2(\mathbb{N})$ on; tähän palataan Luvun 2 Esimerkissä 2.10.

Huomautus 1.39. (Normiavaruuksien V ja V^* isometrisyys)
Metrisissä avaruuksissa kahden avaruuden V ja W rakenteen säilyttävä kuvausta kutsutaan isometriaksi. Normiavaruuksien välinen kuvaus $T\colon V \to W$ on isometria, jos se on lineaarinen bijektio ja $\|x\|_V = \|T(x)\|_W$ kaikille $x \in V$. Tällöin merkitään $V \cong W$ ja avaruuksien sanotaan olevan isometriset.

Jos H on Hilbert-avaruus ja $x \in H$, voidaan asettaa lineaarinen funktionaali $h^* \in H^*$, $h^*_x(y) := \langle y, x\rangle$ kaikille $y \in H$. Toisaalta Rieszin esityslauseen 1.19 nojalla jokaiselle $L' \in H^*$ löytyy yksikäsitteinen $x_{L'} \in H$, jolle $L'(y) = \langle y, x_{L'}\rangle$ ja $\|L\| = \|x_{L'}\|_H$. Niinpä saadaan $T\colon H \to H^*$, $T(x) := \langle \cdot, x\rangle$ ja $T^{-1}\colon H^* \to H, T^{-1}(h^*) = x_{h^*}$ eli T on isometria. Jokainen $h \in H$ voidaan samaistaa isometrian T kautta toiseen alkioon

$h' \in H^*$ eli $H \cong H^*$. Yleisesti kirjallisuudessa avaruuksille V, W käytetään samaistusta $V^* = W$ jos ja vain jos $V^* \cong W$.

Isometrian konstruointi onnistuu usein luonnollisesti ja duaalin alkiot ovat (isometrisesti) samankaltaisia kuin alkuperäisessä avaruudessa. Joskus duaali on kuitenkin hyvin erilainen. Esimerkiksi $L^p(X, \mathbb{R})$-avaruuksille saadaan $(L^p)^* = L^q$, kun $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mutta tapauksessa $p, q \in \{1, \infty\}$ syntyy jo suurta eroa duaalin nähden: $(L^1)^* = L^\infty$ vain σ-äärellsille mitoille ja toiseen suuntaan saadaan vielä erikoisempi duaali $(L^\infty)^* = B(X, \Gamma)$, missä jälkimmäinen sisältää kaikki rajoitetut, äärellisesti additiiviset mitat $\nu \in (X, \Gamma)$, jotka ovat mitan μ suhteen absoluuttisesti jatkuvia. Avaruuden normina toimii variaatio $|\nu|(X)$, jota käydään tarkemmin läpi Luvussa 3. Duaalin $(L^1)^*$ todistus ei-σ-äärellisen vastaesimerkin kanssa löytyvät lähteestä [8, s. 138-140] ja [11, s. 296] sisältää tapauksen $(L^\infty)^*$.

2 Integrointi Banach-avaruuksissa

Määritellään mitallisuus ja Bochner-integroituvuus Banach-kuvauksille. Näihin liittyen osoitetaan Pettisin mitallisuuslause ja Hillen lause. Lisäksi yleistetään $L^p(X, B; \mu)$-avaruuksien teoria Banach-kuvauksille ja tutustutaan heikon integraaliin käsitteeseen.

Tästä eteenpäin - myös Luvuissa 4 ja 5 - käytetään seuraavia merkintöjä kunnes toisin mainitaan:

- B on Banach-avaruus. Normia merkitään $\|\cdot\|$, kun sekaannuksen vaaraa ei ole.
- (X, Γ, μ) on äärellinen mitta-avaruus eli $\mu(X) < \infty$.
- Avaruuden B kerroinkuntana on $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Useimmat määritelmät voidaan yleistää suoraviivaisesti tapaukseen $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ ja joissakin todistuksissa esiintyykin kerroinkunta $\mathbb{K}$, mutta teorian yhtenevän esityksen kannalta valitaan oletukseksi reaaliluvut. Vastaavasti monissa tuloksissa äärellismitallisuus on mahdollista korvata σ-äärellisyydellä.

2.1 Mitallisuus

Banach-avaruuten voidaan määritellä yksinkertaiset kuvaukset vastaavasti kuten Määritelmässä 1.33. Korvataan nyt vain luvut $a_i \in \mathbb{R}$ vektoreilla $b_i \in B$, jolloin saadaan funktio $s\colon X \to B$,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{X_i}(x).$$

Yksinkertaisten kuvausten joukkoa merkitään $S(X, B)$ tai $S(X)$, jos B ei muutu asiayhteydessä. Vastaavasti funktion s integraali on vektori

$$\int_X s\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(X_i \cap A) \in B.$$

Huomautuksen 1.34 nojalla integraali ei riipu funktion s esityksestä. Määritelmästä seuraa, että integraali yhtyy Lebesgue-integraalin kaikille $s \in S(X, B)$, kun $B = \mathbb{R}$.

Bochner-integraalin idea on samankaltainen kuin Lebesgue-integraalissa: jos kuvausta voidaan approksimoida yksinkertaisten kuvausten avulla, myös näiden vastaavat integraalit halutaan suppenevan järkevään raja-arvoon $\int f$. Kuten reaaliarvoisille kuvauksille, integraaliteoria alkaa mitallisuuden käsitteestä.

Määritelmä 2.1. Olkoon $f\colon X \to B$.

(i) Kuvaus f on *μ-mitallinen*, jos löytyy jono $(s_n) \subseteq S(X)$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - s_n(x)\| = 0 \text{ m.k. } x \in X.$$

(ii) Kuvaus f on *vahvasti mitallinen*, jos (i) on voimassa kaikille $x \in X$.

(iii) Kuvaus f on *Γ-mitallinen*, jos $f^{-1}(C) \in \Gamma$ jokaiselle $C \in \mathcal{B}(B)$, missä $\mathcal{B}(B)$ on Borelin σ-algebra avaruudessa B.

(iv) Jos $b^*f\colon X \to \mathbb{K}$ on μ-mitallinen jokaiselle $b^* \in B^*$, on f *heikosti mitallinen.*

Integraalia varten halutaan approksimaatio mahdollisimman monelle kuvaukselle yksinkertaisilla kuvauksilla, joten (i) antaa käytännöllisimmän mitallisuuskäsitteen; integraalissa ei välitetä nollamittaisista joukoista eli ehto (ii) on usein liian rajoittava. Toisaalta mitallisten kuvausten alkukuvien haluttaisiin olevan mitallisia, joten (iii) on hyödyllinen. Heikko mitallisuus taas liittyy vahvasti μ-mitallisuuteen (Lause 2.4).

• **Jatkossa mitallisuudesta puhuttaessa viitataan ensisijaisesti Määritelmän 2.1 (i) μ-mitallisuuteen**. Termiä μ-mitallisuus esiintyy silti ajoittain, mutta muista mitallisuustyypeistä käytetään aina niiden omia nimityksiä.

Osoitetaan ensin mitallisuuden säilyminen laskutoimituksissa:

Lemma 2.2. (i) *Jos $f, g\colon X \to B$ ovat mitallisia ja $a \in \mathbb{R}$, niin $af + g$ on mitallinen.*
(ii) *Jos $f\colon X \to B$ ja $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia niin $\phi f\colon X \to B$ on mitallinen.*
(iii) *Jos $f\colon X \to B$ mitallinen ja $g\colon B \to \mathbb{R}$ jatkuva, niin $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ on mitallinen. Erityisesti normi $\|f\|\colon X \to \mathbb{R}$ on mitallinen.*

Todistus. (i) Jos f_n, g_n ovat yksinkertaisia, myös $af_n + g_n$ on, joten

$$\|(af + g) - (af_n + g_n)\| \leq |a|\|f - f_n\| + \|g - g_n\| \to 0 \text{ m.k. } x \in X.$$

(ii) Jos $f_n\colon X \to B, \phi_n\colon X \to \mathbb{R}$ on yksinkertaisia, niin $\phi_n f_n\colon X \to B$ on yksinkertainen ja m.k. $x \in X$ on voimassa

$$\|\phi f - \phi_n f_n\| \leq \|\phi\|\|f - f_n\| + \|f_n\|\|\phi - \phi_n\|.$$

Koska $\|f_n\| \leq 1 + \|f\|$ riittävän suurelle n, saadaan edellä $\phi_n f_n \to \phi f$ m.k. $x \in X$.
(iii) Jos f_n on yksinkertainen niin $g(f_n)\colon X \to \mathbb{R}$ on mitallinen reaaliarvoinen kuvaus. Tällaisten kuvausten raja-arvo on mitallinen ja koska jatkuvuus antaa $g(f_n) \to g(f)$ m.k. $x \in X$, on $g(f)$ mitallinen. □

Huomautus 2.3. (Mitan täydellisyys ja mitallisuus) Reaaliluvuilla on voimassa yhtäsuuruus vahvan ja Γ-mitallisuuden välillä. Yleisessä tapauksessa näin ei aina ole, kuten myöhemmin huomataan, joten mitallisten kuvausten alkukuvat eivät välttämättä ole mitallisia. Lemman 2.2 tulokset yleistyvät suoraan vahvasti mitallisille kuvauksille, joten kohdan (iii) nojalla normin $\|f\|$ alkukuvat säilyvät Γ-mitallisina, jos $f\colon X \to B$ on vahvasti mitallinen. Jos mitta-avaruus X on *täydellinen* eli nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia, voidaan vahva mitallisuus korvata mitallisuudella kaikille $g\colon X \to \mathbb{R}$:

Jos $g\colon X \to \mathbb{R}$ on mitallinen, löytyy yksinkertaiset $g_n, n \geq 1$ siten, että $g_n \to g$ m.k. $x \in X \setminus C$, missä $C \in \Gamma, \mu(C) = 0$. Määrittelemällä $h_n = g_n, h = g$ joukossa $X \setminus C$ ja $h_n = g_n = 0$ joukossa C saadaan uudet kuvaukset, missä h_n ovat yksinkertaisia ja $h_n \to h$ koko joukossa X. Siis h on vahvasti mitallinen eli myös Γ-mitallinen. Nyt jokaiselle $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ saadaan

$$g^{-1}(U) = \Big(h^{-1}(U) \cup \big(g^{-1}(U) \setminus h^{-1}(U)\big)\Big) \setminus \Big(h^{-1}(U) \setminus g^{-1}(U)\Big)$$

Tässä $h^{-1}(U)$ on mitallinen vahvan mitallisuuden nojalla. Lisäksi $g^{-1}(U) \setminus h^{-1}(U)$ ja $h^{-1}(U) \setminus g^{-1}(U)$ sisältyvät nollamittaiseen joukkoon $\{h \neq g\}$, joten ne ovat mitan täydellisyyden nojalla mitallisia. Siis $g^{-1}(U)$ on mitallinen kaikille U ja avaruudessa $\mathbb{R}$ siis Γ-mitallisena vahvasti mitallinen.

Jokainen mitta-avaruus voidaan täydellistää. Siksi edellisen päättelyn nojalla kuvauksille $f\colon X \to \mathbb{R}$, erityisesti normille $\|\cdot\|$, voidaan olettaa alkukuvien mitallisuus. Alla on esitetty täydellistäminen, jonka todistus löytyy lähteestä [7, s. 138]:

Jokainen mitta-avaruus (X, Γ, μ) voidaan täydellistää: on olemassa mitta-avaruus $(\tilde{X}, \tilde{\Gamma}, \nu)$ siten, että $\nu(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$ ja ehdot $\nu(A) = 0, C \subseteq A$ takaavat, että $C \in \tilde{\Gamma}$.

Lemman 2.2 kohdan (iii) todistuksessa käytettyä mitallisten kuvausten rajakuvauksen mitallisuutta ei voida yleistää suoraan Banach-avaruuteen B. Tämä saadaan kuitenkin seuraavan mitallisuuslauseen seurauksena, joka karakterisoi mitallisuuden ja heikon mitallisuuden separoituvuuden avulla:

Lause 2.4. (Pettisin mitallisuuslause) *Kuvaus $f\colon X \to B$ on mitallinen jos ja vain jos se toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) *f on melkein separoituva-arvoinen eli on olemassa $C \in \Gamma$ ja numeroituva $E \subseteq B$ siten, että $\mu(C) = 0$ ja $f(X \setminus C) \subseteq \overline{E}$.*

(ii) *f on heikosti mitallinen.*

Huomautus 2.5. Separoituvan metrisen avaruuden aliavaruus on separoituva, katso [11, s. 21, Theorem 12]. Lauseen 2.4 nojalla tässä tapauksessa mitallisuus ja heikko mitallisuus ovat yhtäpitäviä ominaisuuksia; valitaan vain joukoksi $C = \emptyset$.

Ennen lauseen todistusta tarvitaan tärkeä aputulos, joka tunnettaan kirjallisuudessa Egorovin lauseena. Pohjana toimii reaaliarvoinen versio [6, s. 110], joka laajentuu suoraviivaisesti myös vektoriarvoisille kuvauksille, kun itseisarvo korvataan normilla. Tässä normiavaruuden B ei tarvitse olla täydellinen.

Lemma 2.6. (Egorov) *Olkoon $\mu(X) < \infty$ ja $f_n\colon X \to B$ mitallisia siten, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ on olemassa m.k. $x \in X$. Tällöin jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy joukko $X_\varepsilon \in \Gamma$, jolle $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ ja $f_n \to f$ tasaisesti joukossa X_ε eli*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|f(x) - f_n(x)\| = 0.$$

Todistus. Näytetään tulos yksinkertaisille f_n. Yleiseen tapaukseen tarvitaan mitallisten kuvausten raja-arvon f mitallisuus: tämä saadaan Pettisin mitallisuuslauseen Seurauksena 2.7, joka vaatii kuitenkin Egorovin lauseen tuloksen yksinkertaisille f_n.

Olkoon siis $(f_n) \subseteq S(X)$, joille $f_n \to f$ m.k. joukossa X. Siis f on mitallinen. Asetetetaan joukot

$$X_n^m := \bigcap_{i\geq n} \left\{ x \in X : \|f(x) - f_i(x)\| < \frac{1}{m} \right\}$$

kaikille $n, m \geq 1$. Joukot ovat mitallisia: $\|f - f_i\|$ on mitallinen reaaliarvoinen kuvaus eli voidaan olettaa, että se on Γ-mitallinen. Lisäksi kiinnitetylle m ja jokaiselle $x \in X$

saadaan $\|f - f_i\| < \frac{1}{m}$ jostakin indeksistä N lähtien eli $x \in X_n^m$ kaikille $n \geq N$. Tästä seuraa, että $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^m$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska μ on äärellinen, saadaan mitan ylhäältä jatkuvuudesta ja tiedosta $f_i \to f$ m.k. $x \in X$, että

$$\lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus X_n^m) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus X_n^m\Big) = 0.$$

Siten jokaiselle m löytyy $k_m \geq N \geq 1$ siten, että $\mu(X \setminus X_{k_m}^m) < \varepsilon 2^{-m}$. Asetetaan $X_\varepsilon := \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{k_m}^m$, jolloin $X_\varepsilon \in \Gamma$ ja subadditiivisuudesta seuraa

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) = \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}(X \setminus X_{k_m}^m)\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus X_{k_m}^m) \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = \varepsilon.$$

Jokaiselle m saadaan $\|f - f_i\| < \frac{1}{m}$ joukossa X_ε kaikille $i \geq k_m$, joten $f_n \to f$ tasaisesti tässä joukossa. $\square$

Palataan nyt Lauseeseen 2.4. Todistuksen rakenne mukailee lähdettä [10, s. 42].

Lauseen 2.4 todistus. Oletetaan, että f on mitallinen.
(i) Löytyy jono yksinkertaisia kuvauksia $f_i \colon X \to B$ siten, että $f_i \to f$ m.k. $x \in X$. Lemma 2.6 antaa jokaiselle $n \geq 1$ joukot $C_n \in \Gamma$, joille $\mu(X \setminus C_n) < \frac{1}{n}$ ja $f_i \to f$ tasaisesti joukossa C_n.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $y \in f(C_n)$. Olkoon $x \in C_n$ siten, että $f(x) = y$. Tasaisesta suppenemisesta saadaan, että $\|f(x) - f_i(x)\| < \varepsilon$ kaikille $x \in C_n$ kaikille $i \geq N \geq 1$. Koska $f_N(C_n)$ on yksinkertaisille kuvauksille äärellinen, voidaan kirjoittaa $f_N(C_n) = \{c_1^N, ..., c_m^N\}$, missä $m \geq 1$. Siten

$$\|f(x) - c_k^N\| = \|f(x) - f_N(x)\| < \varepsilon$$

jollakin $1 \leq k \leq m$. Mutta tällöin $y = f(x) \in B(c_k^N, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(c_k^N, \varepsilon)$. Niinpä $f(C_n)$ on täysin rajoitettu eli Lemman 1.22 nojalla separoituva. Tälläisten joukkojen yhdisteenä $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(C_n)$ on edelleen separoituva. Asettamalla $C = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus C_n)$ saadaan

$$f(X \setminus C) = f\Big(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus C_n)\Big) = f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C_n).$$

Siis $f(X \setminus C)$ on separoituva ja $\mu(C) \leq \mu(X \setminus C_n)$ kaikilla $n \geq 1$, joten $\mu(C) = 0$.

(ii) Olkoon $b^* \in B^*$. Jatkuvuuden nojalla $b^* f_n \to b^* f$ m.k. joukossa X. Jos $f_n \in S(X, B)$, lineaarisuudesta seuraa $b^*(f_n) \in S(X, \mathbb{R})$. Siis $b^* f$ on mitallinen kaikille $b^* \in B^*$, joten f on heikosti mitallinen.

Oletetaan sitten, että ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa. Olkoon $C \in \Gamma$ joukko, jolle $\mu(C) = 0$ ja (b_n) joukon $f(X \setminus C)$ numeroituva tiheä osajoukko. Lemman 1.21 nojalla voidaan valita jono $(b_n^*) \subseteq B^*$ siten, että $b_n^*(b_n) = \|b_n\|_B$, $\|b_n^*\|_{B^*} = 1$ ja $\|f(x)\|_B = \sup_n |b_n^*(f(x))|$ kaikille $x \in X \setminus C$. Heikon mitallisuuden nojalla $b_n^* f$

on mitallinen kaikille $n \geq 1$ ja koska C on nollamittainen, on $\|f\|_B$ on mitallinen. Kiinnitetylle N saadaan edelleen, että $(b_n) \setminus \{b_N\}$ on numeroituva ja tiheä joukossa $f(X \setminus C) \setminus \{b_N\}$. Siten edellinen voidaan toistaa kuvakselle $f - b_N$ eli kuvaukset $g_N(x) := \|f(x) - b_N\|_B$ ovat mitallisia.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Asetetaan $C_n := \{x \in X : g_n(x) < \varepsilon\}$. Voidaan olettaa, että g_n on normin alkukuvana Γ-mitallinen, jolloin $C_n \in \Gamma$. Olkoon $D_n := C_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} C_m$. Määritellään kuvaus $g \colon X \to B$,

$$g(x) = \begin{cases} b_n, & \text{kun } x \in D_n \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Koska joukot D_n ovat pistevieraita, on g hyvin määritelty. Jos $x \in D_n$ jollakin n, niin $\|f(x) - g(x)\|_B = \|f(x) - b_n\|_B < \varepsilon$. Jos taas $x \notin D_n$ kaikilla $n \geq 1$, ei pistettä $f(x)$ voida approksimoida tiheällä joukolla (b_n). Tällöin $x \in C$, mutta C on nollamittainen. Siten $\|g - f\|_B < \varepsilon$ m.k. $x \in X$. Erityisesti kuvausta f voidaan nyt approksimoida melkein kaikkialla tasaisesti sellaisilla kuvauksilla, joiden kuvajoukko on numeroituva ja jotka ovat mitallisia.

Tasaisen suppenemisen nojalla voidaan valita jono $g_n \colon X \to B$ edellisistä kuvauksista siten, että $\|f - g_n\|_B < \frac{1}{n}$ m.k. $x \in X$ jokaiselle $n \geq 1$. Jokainen g_n on muotoa $\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\chi_{C_{n,m}}$, missä joukot $C_{n,m}$ ovat pareittain pistevieraita ja mitallisia kaikille $n \geq 1$. Merkitään $s_k^n(x) := \sum_{m=1}^{k} b_{n,m}\chi_{C_{n,m}}(x)$. Koska μ on äärellinen, voidaan kiinnitetylle n valita luku $k_n \geq 1$ siten, että $\mu(\bigcup_{m=k_n+1}^{\infty} C_{n,m}) \leq 2^{-n}$. Tällöin merkitsemällä $s_n := s_{k_n}^n$ saadaan $\mu(\{s_n \neq g_n\}) = \mu(\bigcup_{m=k_n+1}^{\infty} C_{n,m}) \leq 2^{-n}$. Lisäksi jokaiselle $N \geq 1$ on voimassa

$$\begin{aligned}
\mu(\{s_n \not\to f\}) &\leq \mu\Big(\{s_n \not\to f\} \cap \bigcap_{i=N}^{\infty}\{s_i = g_i\}\Big) + \mu\Big(\bigcup_{i=N}^{\infty}\{s_i \neq g_i\}\Big) \\
&\leq \underbrace{\mu(\{g_n \not\to f\})}_{=0} + \mu\Big(\bigcup_{i=N}^{\infty}\{s_i \neq g_i\}\Big) \\
&= \sum_{i=N}^{\infty} \mu(\{s_i \neq g_i\}) = \sum_{i=N}^{\infty} 2^{-i},
\end{aligned}$$

joten on oltava $\mu(\{s_n \not\to f\}) = 0$. Niinpä $s_n \to f$ m.k. joukossa X eli f on mitallinen. $\square$

Lauseessa 2.4 saatiin mitalliset kuvaukset, jotka suppenevat mitalliseen f jopa tasaisesti. Lisäksi nämä voidaan valita numeroituva-arvoisiksi.

Seuraus 2.7. (i) *Kuvaus $f \colon X \to B$ on mitallinen jos ja vain on olemassa mitalliset $f_n \colon X \to B$ siten, että $f_n \to f$ tasaisesti m.k. joukossa X.*
(ii) *Kohdassa* (i) *voidaan valita kuvaukset $f_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\chi_{C_{n,m}}$, missä $b_n \in B$ ja joukot $C_{n,m} \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita. Kuvauksia f_n kutsutaan numeroituva-arvoisiksi.*

Pettisin mitallisuuslause sitoo mitallisuuden ja heikon mitallisuuden toisiinsa melkein separoituva-arvoisuudella. Lauseesta on olemassa myös versio, joka sitoo vahvan mitallisuuden vastaavasti Γ-mitallisuuteen:

Lause 2.8. *Olkoon $f: X \to B$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
(1) *f on vahvasti mitallinen,*
(2) *b^*f on Γ-mitallinen kaikille $b^* \in B^*$ ja f on separoituva-arvoinen eli on numeroituva $E \subseteq B$ siten, että $f(X) \subseteq \overline{E}$,*
(3) *f on Γ-mitallinen ja separoituva-arvoinen.*

Todistus. Katso Theorem 1.1.6 ja Corollary 1.1.10 lähteestä [14, s. 5-7]. □

Lauseen 2.8 nojalla separoituvassa avaruudessa B vahva mitallisuus ja Γ-mitallisuus ovat yhtäpitäviä ehtoja. Toisaalta Huomautuksessa 2.3 $B = \mathbb{R}$ voidaan korvata millä tahansa separoituvalla Banach-avaruudella, joten mitta-avaruuden täydellisyys antaa μ-mitallisuudesta Γ-mitallisuuden. Lisäksi Pettisin mitallisuuslause 2.4 samaistaa μ-mitallisuuden heikkoon mitallisuuteen.

Seuraus 2.9. *Olkoot X täydellinen mitta-avaruus ja B separoituva Banach-avaruus. Tällöin Määritelmän 2.1 ehdot* (i) - (iv) *ovat yhtäpitäviä.*

Annetaan lopuksi esimerkki heikosti mitallisesta kuvauksesta, joka ei ole mitallinen.

Esimerkki 2.10. ([10, s. 43]) Olkoon $t \in [0,1]$. Määritellään

$$e_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = t \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $\{e_t : t \in [0,1]\}$ on avaruuden $B := l^2([0,1])$ (katso s. 16) ortonormaali kanta:
1. $\|e_t\|_2^2 = 1$, joten kokoelma on normitettu ja $e_t \in l_2([0,1])$
2. $\langle e_t, e_s \rangle = \sum_{x \in [0,1]} e_t(x) e_s(x) = 0$ jos ja vain jos $t \neq s$, joten kokoelma on ortogonaalinen.

Hilbert avaruus l^2 on separoituva jos ja vain jos sen ortonormaali kanta on numeroituva ([7, s. 965]). Siis avaruus $l^2([0,1])$ ei ole separoituva.

Asetetaan $f: [0,1] \to l^2([0,1]), f(t) = e_t$ ja $X = ([0,1], \Gamma, \mu)$, missä Γ on Lebesguen σ-algebra ja μ Lebesguen mitta. Olkoon $b^* \in B^*$. Rieszin esityslause 1.19 antaa kuvauksen $g \in l_2([0,1])$ siten, että $(b^*f)(t) = \langle e_t, g \rangle$. Koska $e_t(n) \neq 0$ jos ja vain jos $n \neq t$, on $(b^*f)(t) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$. Siten b^*f on mitallinen kaikille b^* eli f on heikosti mitallinen.

Jos $E \subseteq [0,1]$, aiemmin tehdyn huomion nojalla $f([0,1] \setminus E)$ on separoituva jos ja vain jos $[0,1] \setminus E$ on numeroituva. Jos $\mu(E) = 0$, tämä ei ole mahdollista, joten f ei ole melkein separoituva-arvoinen eikä siis Lauseen 2.4 nojalla mitallinen.

2.2 Bochner-integraali

Kun $B = \mathbb{R}$, käytettiin Määritelmässä 1.35 yleisen funktion f integraaliin apuna reaalilukujen järjestystä. Yleisessä Banach-avaruudessa korvataan tämä raja-arvolla yksinkertaisista funktioista. Jotta raja-arvo on järkevästi määritelty eli kuvaus f on integroituva, riittää tutkia Lebesgue-integraalin itseistä suppenemista. Käyttäen sivun 19 yksinkertaisten kuvausten integraalia saadaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 2.11. (Bochner-integraali) Olkoon $f\colon X \to B$ mitallinen. Jos on olemassa jono yksinkertaisia funktioita $(s_n) \subseteq S(A)$, joiden Lebesgue-integraalille on

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|f - s_n\| \, d\mu = 0,$$

on kuvaus f *Bochner-integroituva* ja sen *Bochner-integraali* määritellään vektorina

$$\int_A f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, d\mu \in B.$$

Bochner-integroituvien kuvausten joukkoa merkitään $\mathcal{L}^1(X, B)$ tai $\mathcal{L}^1(X, B; \mu)$.

- Voidaan sanoa, että f on *Bochner-integroituva jonon (s_n) suhteen*, kun halutaan täsmentää mihin jonoon viitataan. Näytetään hieman myöhemmin, että jonon valinta ei vaikuta integraalin arvoon. Integroituvuuden määritelmä voidaan vaihtoehtoisesti aloittaa numeroituva-arvoisista kuvauksista $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \chi_{X_i \cap A}$ [13, s. 78-79]. Myöhemmin nähdään, että määritelmät ovat kuitenkin yhtäpitäviä.

- Kuvaus $\|f - s_n\|$ on mitallinen kaikille $n \geq 1$ (Huomautus 2.3). Siten Lebesgue-integraali $\int_A \|f - s_n\| \, d\mu$ on hyvin määritelty.

- Koska jokainen f voidaan jatkaa nollakuvauksena joukkoon $X \setminus A$, voidaan integroida aina koko avaruuden X yli. Tällöin avaruus X voidaan jättää myös merkitsemättä ja joukon A yli integroidessa voidaan hyödyntää karakteristista funktiota χ_A:

$$\int f \, d\mu := \int_X f \, d\mu \, , \quad \int_A f \, d\mu := \int_X f \chi_A \, d\mu$$

Edellä käytetään samaa merkintää kahdelle integraalille: integroituvuutta testatessa raja-arvossa $\lim_{n\to\infty} \int_A \|f - s_n\| \, d\mu$ käytetään Lebesgue-integraalia, kun taas Bochner-integraali on raja-arvo Banach-arvoisista yksinkertaisista kuvauksista. Itseasiassa määritelmät yhtyvät, kun $B = \mathbb{R}$, joten samaa notaatiota voidaan käyttää ilman sekaannuksen vaaraa. Näytetään todistus lähteeseen [6, s. 122] pohjautuen:

Lause 2.12. *Olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$ mitallinen, $\int f$ kuvauksen Bochner-integraali ja $L(f)$ kuvauksen Lebesgue-integraali. Kuvaus f on Lebesgue-integroituva jos ja vain jos se on Bochner-integroituva. Tällöin $\int f = L(f)$.*

Todistus. Olkoon f ei-negatiivinen eli $f \geq 0$. Huomautuksen 2.3 nojalla voidaan olettaa, että f on Γ-mitallinen. Asetetaan

$$s_n(x) = \begin{cases} k4^{-n} & \text{kun } f(x) \in [k4^{-n}, (k+1)4^{-n}) \text{ ja } k = 0, 1, ..., 8^n - 1, \\ 2^n, & \text{kun } f(x) \geq 2^n. \end{cases} \tag{5}$$

Tällöin s_n toteuttaa seuraavat ehdot:

- $s_n \in S(X)$,
- $s_n \le s_{n+1}$: olkoon $x \in X$. Jos $f(x) \in [k4^{-n}, (k+1)4^{-n}) =: I_k$ jollekin k. Koska $k4^{-n} = (4k)4^{-(n+1)}$ ja $(k+1)4^{-n} = (4k+4)4^{-(n+1)}$, rajoittumille $s_{n+1|_{I_k}}$ saadaan

$$s_{n+1|_{I_k}}(x) = \begin{cases} k4^{-n}, & \text{kun } f(x) \in [k4^{-n}, (4k+1)4^{-(n+1)}) \\ (4k+1)4^{-(n+1)}, & \text{kun } f(x) \in [(4k+1)4^{-(n+1)}, (4k+2)4^{-(n+1)}) \\ (4k+2)4^{-(n+1)}, & \text{kun } f(x) \in [(4k+2)4^{-(n+1)}, (4k+3)4^{-(n+1)}) \\ (4k+3)4^{-(n+1)}, & \text{kun } f(x) \in [(4k+3)4^{-(n+1)}, (k+1)4^{-n}). \end{cases}$$

  Jokainen aiempi väli siis jakautuu neljään osaan vaiheessa $n+1$, kun $f(x) < 2^n$. Näin ollen $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$.

  Jos $f(x) \ge 2^n$, on $s_n(x) = 2^n$. Vaiheesa n on 8^n kappaletta osavälejä. Tällöin ensimmäisellä uudella välillä $f(x) \in [(4 \cdot 8^n)4^{-(n+1)}, (4 \cdot 8^n + 1)4^{-(n+1)})$ eli $s_{n+1}(x) = (4 \cdot 8^n)4^{-(n+1)} = 2^n$. Tutkimalla jokainen uusi väli vastaavasti, antaa $f(x) \in [(4 \cdot 8^n)4^{-(n+1)}, (8^{n+1})4^{-(n+1)})$ arvion $2^n \le s_{n+1}(x) < 2^{n+1}$. Jos $f(x)$ on suurempaa kuin annetulla välillä, antaa määritelmä $s_{n+1}(x) = 2^{n+1}$ lopuille pisteille $f(x) \ge 2^{n+1}$. Niinpä tässäkin tapauksessa $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$.

- $s_n \to f$: jos $x \in X$, kuvauksen määritelmän nojalla $s_n(x)$ lähestyy kuvapistettä $f(x)$, sillä pisteen $f(x)$ sisältävän välin mitta lähestyy nollaa.

Oletetaan ensin, että f on Bochner-integroituva. Yksinkertaisille funktioille on $L(s_n) = \int s_n$ kaikilla $n \ge 1$, joten monotoninen konvergenssi antaa

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n = \lim_{n\to\infty} L(s_n) = L(f). \tag{6}$$

Olkoon $(c_n) \subseteq S(X, \mathbb{R})$ jono, jonka suhteen f on Bochner-integroituva. Lebesgue-integraalin kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$L(f) = L(|f|) \le L(|f - c_n|) + L(c_n) \to \int f < \infty,$$

koska $L(|f - c_n|) \to 0$. Erityisesti Bochner-integroituvuudesta seuraa edellisen nojalla Lebesgue-integroituvuus. Lisäksi monotoninen konvergenssi antaa

$$\lim_{n\to\infty} L(|f - s_n|) = \lim_{n\to\infty} L(f - s_n) = L(f) - \lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0, \tag{7}$$

joten f on Bochner-integroituva jonon (s_n) suhteen. Niinpä yhtälöstä (6) seuraa, että $\int f = L(f)$.

Jos f on Lebesgue-integroituva, antaa (7) integroituvuuden ja yhtäsuuruus integraaleille seuraa yhtälöstä (6).

Yleinen tapaus seuraa integraalin lineaarisuudesta positiivi -ja negatiiviosille:

$$L(f) = L(f^+) - L(f^-) = \int f^+ - \int f^- = \int f.$$

□

• Kuten mitallisuudessa puhuttaessa tarkoitetaan ensisijaisesti μ-mitallisuutta, **integraalilla tai integroituvuudella viitataan vastaavasti Bochner-integraaliin tai Bochner-integroituvuuteen**. Myöhemmin tarvitaan myös heikon integraalin käsitettä heikosti mitallisille kuvauksille, joten samaistetaan vastaava mitallisuuden ja integroituvuuden käsite. Teoria keskittyy kuitenkin ensisijaisesti μ-mitallisiin kuvauksiin ja Bochner-integraaliin, joten vaikka terminologiaa integraali/integroituvuus esiintyy Bochner- ja Lebesgue-etuliitteineen jatkossakin, Lebesgue-integraali viittaa vain reaaliarvoisiin kuvauksiin.

Esimerkki 2.13. Olkoon $f\colon [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Konstruoidaan Lauseen 2.12 tapaan yksinkertainen funktio s_n^1 välille $(0,1]$. Samaa funktiota voidaan käyttää myös välille $[-1,0)$ peilaamalla origon suhteen; merkitään tätä s_n^2. Määritelemällä $f_n = s_n^1 + s_n^2$ saadaan yksinkertaiset kuvaukset, joille $f_n \to f$ eli f on mitallinen.

Lisäksi kaikille $n \geq 1$ on

$$\int_{[-1,1]} f_n \, d\mu = \int_{[-1,1]} s_n^1 \, d\mu + \int_{[-1,1]} s_n^2 \, d\mu = 0,$$

koska Lebesgue-integraalit kumoamat toisensa. Niinpä $\int_{[-1,1]} f \, d\mu = 0$. Nyt f ei kuitenkaan ole Bochner-integroituva, koska $\int_{[-1,1]} |f - f_n| \, d\mu = \infty$ kaikille $n \geq 1$. Edelleen $\int_{[-1,1]} f^+ \, d\mu = \int_{[-1,1]} f^- \, d\mu = \int_{(0,1]} \frac{1}{x} \, d\mu = \infty$, joten f ei ole myöskään Lebesgue-integroituva.

Siirrytään seuraavaksi integraaliin perusominaisuuksiin. Apuna toimii [13, s. 76-89], joka sisältää suurimman osan tämän aliluvun tuloksista. Vertaislähteenä käytetään [10, II], jossa osa todistuksista on muotoiltu selkeämmin.

Aloitetaan lineaarisuudesta ja kolmioepäyhtälöstä, jotka saadaan suoraviivaisesti määritelmästä:

Lemma 2.14. *Olkoot $f, g\colon X \to B$ Bochner-integroituvia ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin integraalille on seuraavat ominaisuudet:*

(1) *Kolmioepäyhtälö: $\|f\|$ on integroituva ja*

$$\Big\| \int_X f \, d\mu \Big\| \leq \int_X \|f\| \, d\mu.$$

(2) *Lineaarisuus:*

$$\int_X af + g \, d\mu = a \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Todistus. Molemmat seuraavat yksinkertaisille funktioille Lebesgue-integraalin vastaavista tuloksista.

(1) Olkoon f integroituva jonon $f_n \in S(X)$ suhteen. Käänteinen kolmioepäyhtälö ja Lebesgue-integraalin monotonisuus antavat

$$\int_X \big| \|f\| - \|f_n\| \big| \, d\mu \leq \int_X \|f - f_n\| \, d\mu \to 0,$$

joten $\|f\|$ on integroituva ja $\lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n\|\, d\mu = \int_X \|f\|\, d\mu$. Tällöin normin jatkuvuus ja kolmioepäyhtälö funktioille $f_n \in S(X)$ antaa

$$\Big\| \int_X f\, d\mu \Big\| = \Big\| \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \Big\| = \lim_{n\to\infty} \Big\| \int_X f_n\, d\mu \Big\| \le \lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n\|\, d\mu = \int_X \|f\|\, d\mu.$$

(2) Olkoot $f_n, g_n \in S(X)$ siten, että f on integroituva jonon f_n ja g jonon g_n suhteen. Kuvaus $af + g$ on integroituva, koska

$$\int_X \|(af+g) - (af_n + g_n)\|\, d\mu \le |a| \int_X \|f - f_n\|\, d\mu + \int_X \|g - g_n\|\, d\mu \to 0.$$

Tällöin lineaarisuus yksinkertaisille kuvauksille antaa

$$\begin{aligned} \int_X af + g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X af_n + g_n\, d\mu &= a \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu \\ &= a \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi on olennaista näyttää, että integraali on hyvin määritelty: se suppenee raja-arvoon avaruudessa B ja sen arvo ei riipu jonon (s_n) valinnasta.

Lemma 2.15. *Olkoon $f\colon X \to B$ Bochner-integroituva jonon $(s_n) \subseteq S(X)$ suhteen eli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f - s_n\|\, d\mu = 0.$$

Tällöin $\left(\int_X s_n\, d\mu \right)$ on Cauchy-jono avaruudessa B eli raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu$ on olemassa. Lisäksi, jos $s_n' \subseteq S(X)$ on toinen jono, jonka suhteen f on integroituva, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n'\, d\mu.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että jono on Cauchy: jos $n, m \ge N \ge 1$, niin lineaarisuuden ja kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \Big\| \int_X s_n\, d\mu - \int_X s_m\, d\mu \Big\| = \Big\| \int_X (s_n - s_m)\, d\mu \Big\| &\le \int_X \|s_n - s_m\|\, d\mu \\ &\le \int_X \|f - s_n\|\, d\mu + \int_X \|f - s_m\|\, d\mu \to 0, \end{aligned}$$

kun $N \to \infty$, sillä f on integroituva.

Yksikäsitteisyys: jos f on integroituva jonojen (s_n) ja (s_n') suhteen, niin vastaava arvio kuin edellä antaa

$$\Big\| \int_X s_n\, d\mu - \int_X s_n'\, d\mu \Big\| \le \int_X \|f - s_n\|\, d\mu + \int_X \|f - s_n'\|\, d\mu \to 0,$$

kun $n \to \infty$. □

Osoitetaan seuraavaksi Bochner-integroituvuuden ja normikuvauksen Lebesgue-integroituvuuden välinen yhteys:

Lause 2.16. *Mitallinen kuvaus $f\colon X \to B$ on Bochner-integroituva jos ja vain jos $\|f\| \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$ eli $\int_X \|f\| \, d\mu < \infty$.*

Todistus. Jos f on Bochner-integroituva, myös $\|f\|$ on integroituva Lemman 2.14 nojalla. Koska Lebesgue- ja Bochner-integraalit ovat samat reaaliarvoisille kuvauksille, on $\int_X \|f\| \, d\mu < \infty$.

Oletetaan nyt, että f on mitallinen ja $\int_X \|f\| \, d\mu < \infty$. Seurauksen 2.7 nojalla löytyy numeroituva-arvoiset (f_n) siten, että jokaisella $n \geq 1$ on $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$ m.k. joukossa X. Kolmioepäyhtälö antaa $\|f_n\| \leq \|f\| + \frac{1}{n}$ m.k. $x \in X$, joten $\int_X \|f_n\| \, d\mu < \infty$. Kuvaukset f_n voidaan esittää muodossa $f_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} \chi_{C_{n,m}}$ pareittain pistevieraille $C_{n,m} \in \Gamma$. Kiinnitetylle n merkitään $G_n^k := \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_{n,m}$. Koska $\mu(X) < \infty$ ja $\|f_n\|$ integroituva, voidaan valita $m_n \geq 1$ siten, että

$$\int_{G_n^{m_n}} \|f_n\| \, d\mu \leq \frac{\mu(X)}{n}.$$

Asettamalla $g_n := \sum_{m=1}^{m_n} b_{n,m} \chi_{C_{n,m}}$ saadaan yksinkertaiset kuvaukset, joille

$$\int_X \|f - g_n\| \, d\mu \leq \int_X \|f - f_n\| \, d\mu + \int_X \|g_n - f_n\| \, d\mu \leq \frac{2\mu(X)}{n} \to 0,$$

kun $n \to \infty$. $\square$

Bochner-integraalilla on reaaliarvoista integraalia vastaavia rajankäyntituloksia.

Lemma 2.17. (Integraalin rajankäyntiominaisuuksia)

(1) (Dominoitu konvergenssi) *Olkoot $f_n\colon X \to B$ integroituvia kuvauksia. Jos $f_n \to f$ mitassa μ eli kaikille $\varepsilon > 0$ on $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : \|f - f_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$ ja on integroituva $g\colon X \to \mathbb{R}$, jolle $\|f_n\| \leq g$ m.k. $x \in X$, niin f on integroituva, $\lim_{n\to\infty} \int_X \|f - f_n\| \, d\mu = 0$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu \text{ kaikille } A \in \Gamma$$

Kohtiin (2) ja (3): olkoon $f\colon X \to B$ Bochner-integroituva.

(2) *Kuvauksen f integraali on jatkuva mitan μ suhteen: jokaiselle $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle $\mu(A) < \delta$ antaa $\int_A f \, d\mu < \varepsilon$. Toisin sanoen,*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f \, d\mu = 0.$$

(3) *Olkoot $(A_n) \subseteq \Gamma$ jono pareittain pistevieraita joukkoja, joille $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tällöin*

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu,$$

missä $\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{A_n} f \, d\mu \right\| < \infty$.

Todistus. (1) Dominoidun konvergenssin voimassaolo myös mitassa suppeneville kuvauksille seuraa siitä, että jokaiselle mitassa suppenevalle jonolle löydetään osajono, joka suppenee m.k. $x \in X$ eli rajakuvaus on mitallinen. Osajonoon voidaan käyttää tavallista dominoitua konvergenssia. Tämän jälkeen voidaan näyttää, että alkuperäisen jonon tulee konvergoida samaan integraaliin. Yksityiskohdat löytyvät esimerkiksi lähteestä [6, s. 122 & 132].

Koska $f_n \to f$ mitassa, myös $\|f - f_n\| \to 0$ mitassa. Lisäksi $\|f - f_n\| \leq 2g$ m.k. $x \in X$, joten reaaliarvoisen dominoidun konvergensin nojalla saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

Siis f on integroituva, joten $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$.
(2) Lauseen 2.16 nojalla $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$, joten reaaliarvoisen integraalin vastaava ominaisuus ja normin jatkuvuus antavat

$$\Big\| \lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f \, d\mu \Big\| = \lim_{\mu(A)\to 0} \Big\| \int_A f \, d\mu \Big\| \leq \lim_{\mu(A)\to 0} \int_A \|f\| \, d\mu = 0.$$

(3) Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \|f\| \, d\mu < \infty \int_X \|f\| \, d\mu$, on sarja itseisesti suppeneva ja siten Lemman 1.7 nojalla suppeneva. Integraalille on äärellinen additiivisuus, sillä

$$\int_{A\cup B} f \, d\mu = \int_X \chi_{A\cup B} f \, d\mu = \int_X (\chi_A + \chi_B) f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Tästä saadaan

$$\Big\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu - \sum_{n=1}^{k} \int_{A_n} f \, d\mu \Big\| = \Big\| \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_i} f \, d\mu \Big\|. \tag{8}$$

Koska $\mu(X) < \infty$, saadaan $\lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_i \Big) = 0$ eli erityisesti kohdan (1) nojalla $\lim\limits_{k\to\infty} \Big\| \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_i} f \, d\mu \Big\| \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_i} \|f\| \, d\mu = 0$. Tulos seuraa yhtälöstä (8), kun $k \to \infty$. □

Huomautus 2.18. Esitetään myös seuraava tulos Seurausta 2.19 varten, joka sisältää käsitteen vektorimittojen variaatiosta. Tähän palataan Luvussa 3.

Olkoon $f\colon X \to B$ Bochner-integroituva. Merkitään $F(A) := \int_A f \, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$. Tällöin $|F|(X) := \sup_\Lambda \sum_{C\in\Lambda} \|F(C)\| < \infty$, missä Λ on joukon X pistevieras äärellinen ositus: $\Lambda = \{A_i\}_I$ äärelliselle I, $X = \bigcup_I A_i$, $A_i \in \Gamma$ pistevieraita. Erityisesti saadaan

$$|F|(A) = \int_A \|f\| \, d\mu \text{ kaikille } A \in \Gamma.$$

Seurauksena saadaan Lebesgue-integraaleilta tunnettu integraalien yksikäsitteisyystulos.

Seuraus 2.19. *Jos $f, g\colon X \to B$ ovat integroituva ja $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ jokaiselle $A \in \Gamma$, niin $f = g$ m.k. $x \in X$.*

Todistus. Asetetaan $F(A) := \int_A f - g\, d\mu$. Tällöin $F(A) = 0$ kaikille $A \in \Gamma$, joten saadaan $0 = |F|(X) = \int_X \|f - g\|\, d\mu$. Lebesgue-integraalia vastaava tulos antaa $\|f - g\| = 0$ m.k. joukossa X eli $f = g$ m.k. $x \in X$. □

Seuraava lause on tärkeä tulos lineaarikuvausten integroinnissa.

- Jos $L\colon B \to V$ on lineaarinen, on $G_L := \{(v, L(v) : v \in V\} \subseteq B \times V$ kuvauksen L *graafi*. Kuvaus L on *suljettu*, jos graafi on suljettu joukko normin $\|(b, v)\|_{B\times V} = \|b\|_B + \|v\|_V$ suhteen. Erityisesti jatkuvat kuvaukset L ovat suljettuja.

Lause 2.20. (Hillen lause) *Olkoot B, V Banach-avaruuksia, $L\colon B \to V$ lineaarinen ja suljettu. Jos $f\colon X \to B, L(f)\colon X \to V$ ovat Bochner-integroituvia, niin*

$$L\left(\int_A f\, d\mu\right) = \int_A L(f)\, d\mu \text{ kaikille } A \in \Gamma. \tag{9}$$

Todistus. Seurataan todistusta [10, s. 47]: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan Seurauksen 2.7 nojalla numeroituva-arvoiset $f_\varepsilon = \sum_{n=1}^\infty b_n \chi_{A_n}$, missä $b_n \in B, A_n \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraat ja löytyy nollamittainen joukko $C_1 \in \Gamma$ siten, että

$$\sup\{\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_B : x \in X \setminus C_1\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Valitaan edelleen $g_\varepsilon = \sum_{n,m=1}^\infty v_{n,m}\chi_{A_{n,m}}$, missä $A_{n,m} \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita, $\bigcup_{m=1}^\infty A_{n,m} = A_n, v_{n,m} \in V$ ja löytyy nollamittainen $C_2 \in \Gamma$, jolle

$$\sup\{\|L(f(x)) - g_\varepsilon(x)\|_V : x \in X \setminus C_2\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Seuraavaksi valitaan jokaiselle parille (n, m) mielivaltaiset alkiot $a_{n,m} \in A_{n,m}$ ja asetetaan $F(x) := \sum_{n,m=1}^\infty f(a_{n,m})\chi_{A_{n,m}}(x)$. Tällöin (10) antaa

$$\|f(x) - F(x)\|_B \le \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_B + \|F(x) - f_\varepsilon(x)\|_B < \varepsilon \text{ m.k. } x \in X \setminus C_1.$$

Vastaavasti (11) antaa $\|L(f(x)) - L(F(x))\|_V < \varepsilon$ kaikille $x \in X \setminus C_2$. Tästä saadaan

$$\int_X \|F\|_B\, d\mu \le \int_X \|f\|_B\, d\mu + \int_X \|f - F\|_B\, d\mu < \int_X \|f\|_B\, d\mu + \varepsilon\mu(X) < \infty$$

ja $\int_X \|Lf - LF\|_V\, d\mu < \varepsilon\mu(X)$ antaa $\int_X \|LF\|_V\, d\mu < \infty$.

Integraaleille on muodot

$$\int_X F\, d\mu = \sum_{n,m=1}^\infty f(a_{n,m})\mu(A_{n,m}) \text{ ja } \int_X L(F)\, d\mu = \sum_{n,m=1}^\infty Lf(a_{n,m})\mu(A_{n,m}). \tag{12}$$

Koska $\int_A F \, d\mu \in B$ ja L on suljettu, on suljetun graafin lauseen 1.18 nojalla L jatkuva. Lisäksi summat (12) suppenevat, joten rajasummien järjestyksellä ei ole väliä ja saadaan yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} L\Big(\int_A F \, d\mu\Big) &= \lim_{i,j\to\infty} L\Big(\sum_{n=1}^{i}\sum_{m=1}^{j} f(a_{n,m})\mu(A_{n,m})\Big) = \lim_{i,j\to\infty} \sum_{n=1}^{i}\sum_{m=1}^{j} Lf(a_{n,m})\mu(A_{n,m}) \\ &= \int_A L(F) \, d\mu. \end{aligned}$$

Koska edellinen on voimassa kaikille $\varepsilon > 0$, voidaan koko tähän asti tehty päättely korvata jonolla $\varepsilon_i = (\frac{1}{i}) \to 0$ ja valita vastaavat kuvaukset F_i. Tällöin $F_i, L(F_i)$ ovat integroituvia ja numeroituva-arvoisia,

$$\int_A F_i \, d\mu \to \int_A F \, d\mu, \ \int_A LF_i \, d\mu \to \int_A LF \, d\mu$$

ja $L\Big(\int_A f \, d\mu\Big) = \lim_{i\to\infty} L\Big(\int_A F_i \, d\mu\Big) = \lim_{i\to\infty} \int_A L(F_i) \, d\mu = \int_A L(f) \, d\mu$.

Kuten Lauseen 2.4 todistuksessa, numeroituva-arvoiset F_i voidaan korvata sopivilla yksinkertaisilla kuvauksilla (s_i) ja tulos on edelleen voimassa. Niinpä $L, L(F)$ ovat Bochner-integroituvia ja $L\Big(\int_A f \, d\mu\Big) = \int_A L(f) \, d\mu$ kaikilla $A \in \Gamma$. $\square$

Huomautus 2.21. Bochner-integraali on mahdollista määritellä yleisemmin lokaalisti konvekseihin topologisiin vektoriavaruuksiin, jollaisia myös Banach-avaruudet ovat. Tällaisissa avaruuksissa on edelleen voimassa Hahn-Banach -lause, jonka avulla avaruuteen saadaan duaalirakenne. Tällöin Hillen lauseen kaltainen yhtäsuuruus jokaiselle duaalille b^* riittää määrittelemään yksikäsitteisen integraalin Seurauksen 1.16 nojalla. Taustaa ja integraalin sovelluksia tällaisissa avaruuksissa voi lukea lähteestä [2].

Lauseen 2.20 avulla voidaan integroida tehokkaasti rajoitettuja lineaarikuvauksia. Saadaan muitakin hyödyllisiä tuloksia:

Seuraus 2.22. (1) *Jos $f, g\colon X \to B$ ovat mitallisia ja kaikille $b^* \in B^*$ on $b^*f = b^*g$ m.k. $x \in X$, niin $f = g$ m.k. $x \in X$.*
(2) *Olkoon f integroituva ja $A \in \Gamma, \mu(A) > 0$. Tällöin*
(i) $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in \overline{co(f(A))}$, *missä*

$$co(E) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in E, \lambda_i \geq 0, \ \text{joille} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}$$

on joukon E konveksi verho (= pienin konveksi joukko, johon E sisältyy).
(ii) Olkoon $C \subseteq B$ on suljettu ja konveksi sekä $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in C$ kaikille A. Tällöin $f(x) \in C$ m.k. $x \in X$.
(3) *Mitallinen $f\colon X \to B$ on integroituva jos ja vain jos on numeroituva-arvoiset f_n, joille $\int_X \|f - f_n\| \, d\mu = 0$.*

Todistus. Katso kohtaan (1) [10, s. 48] ja kohtaan (2) [10, s. 48], [14, s. 20]. Kohta (3) saadaan Lauseen 2.20 integraaliesityksestä $\sum_{n,m=1}^{\infty} f(a_{n,m})\mu(A_{n,m})$, kun asetetaan $f_n := \sum_{m=1}^{\infty} f(a_{n,m})\chi_{A_{n,m}}$. □

Viimeistellään Bochner-integraalien teoria L^p-avaruuksilla, jotka saadaan kuten reaaliarvoisille kuvauksille sivulla 15. Nyt itseisarvo korvataan avaruuden B normilla.

Määritelmä 2.23. (L^p-avaruudet) Olkoon $p \in [1, \infty)$. Määritellään

$$\mathcal{L}^p(X, B; \mu) := \Big\{ f \colon A \to B \text{ mitallinen } : \int_A \|f\|^p \, d\mu < \infty \Big\}$$

Toisin sanoen $f \in \mathcal{L}^p(X, B; \mu)$ jos ja vain jos $\|f\| \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Melkein kaikkialla samaistettavat kuvaukset muodostavat ekvivalenssiluokat $[f]$, jolloin $\mathcal{L}^p(A)/\sim := \big\{[f] : f \in \mathcal{L}^p(X, B; \mu)\big\}$. Voidaan asettaa

$$L^p(X, B; \mu) := \Big\{ \mathcal{L}^p(X, B)/\sim, \|\cdot\|_p = \Big(\int_A \|f\|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \Big) \Big\}, \text{ kun } 1 \le p < \infty \text{ ja}$$

$$L^\infty(X) := \big\{[f] : \|f\|_\infty = \inf\{a : |f(x)| \le a \text{ m.k. } x \in X\} < \infty\big\}.$$

Avaruuksia $L^p(X, B; \mu)$ voidaan merkitä myös $L^p(X, B)$ ja $L^p(X, \mu)$. Kun itseisarvo korvataan normilla, saadaan tulokset myös yleiseen tapaukseen. Niinpä voimassa ovat Minkowskin ja Hölderin epäyhtälöt.

(1) Minkowskin epäyhtälö: jos $f, g \in L^p(X, B)$ niin $f + g \in L^p(X, B)$ ja

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p,$$

(2) Hölderin epäyhtälö: jos $f \in L^p(X, B), g \in L^q(X, B)$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin $fg \in L^1(X, B)$ ja

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Jos $f \in L^p(X, \mathbb{R}), g \in L^q(X, B)$, saadaan edelleen $fg \in L^1(X, B)$.

L^p-kuvauksia voidaan approksimoida yksinkertaisilla kuvauksilla. Seuraavaa tulosta tullaan tarvitsemaan vain tapauksessa $p = 1$.

Lemma 2.24. *Olkoon* $1 \le p < \infty$.

(1) $\overline{S(X, B)} = L^p(X, B)$.

(2) *Jokaiselle* $f \in L^\infty(X, B)$ *ja* $\varepsilon > 0$ *löytyy* $s \in S(X, B)$ *sekä* $A \in \Gamma, \mu(A) < \varepsilon$ *siten, että* $\|s\|_\infty \le \|f\|_\infty$ *ja*

$$\sup_{x \in X \setminus A} \|f(x) - s(x)\| < \infty.$$

Todistus. [14, s. 23]. □

Osoitetaan seuraavaksi L^p-avaruuksien täydellisyys. Pohjana käytetään reaaliarvoista todistusta [7, s. 886-888 & 891]; nyt itseisarvo korvataan normilla.

Lause 2.25. *$L^p(X,B;\mu)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $1 \le p < \infty$. Olkoon $(f_n) \subseteq L^p(X,B)$ Cauchy-jono. Valitaan osajono $(k_i) \in \mathbb{R}$ siten, että $\|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_p < 2^{-i}$ kaikille $i \ge 1$. Asetetaan

$$g_n := \sum_{i=1}^{n} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_B \ \text{ ja } \ g = \lim_{k\to\infty} g_k.$$

Minkowskin epäyhtälön nojalla kaikille $n \ge 1$ on

$$\|g_n\|_p \le \sum_{i=1}^{n} \|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}\|_p \le \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$$

ja edelleen Fatou'n lemma 1.37 (ii) antaa

$$\int_X \|g\|_B^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X \|g_n\|_B^p \, d\mu \le 1$$

eli $\|g\|_p \le 1$, joten $g \in L^p(X,B)$. Erityisesti $\|g\|_B^p < \infty$ m.k. $x \in X$ eli g on hyvin määritelty m.k. $x \in X$.

Asettamalla

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[f_{k_1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \big(f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x) \big) \right]$$

saadaan kuvaus, joka suppenee avaruuden B alkioon m.k. $x \in X$, koska kuvauksen g määräämä itseinen sarja suppenee Banach-avaruudessa m.k. $x \in X$ (Lemma 1.7). Lopuissa pisteissä asetetaan $f(x) = 0$, jotta f on määritelty koko avaruudessa; tämä ei vaikuta normissa suppenemiseen. Osoitetaan seuraavaksi, että f on haluttu raja-arvo jonolle (f_n).

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N \ge 1$ siten, että $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ kun $n, m \ge N$. Kiinnittämällä indeksi m ja käyttämällä Fatoun lemmaa osajonoon (f_{k_i}) saadaan

$$\int_X \|f - f_m\|_B^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_X \|f_{k_i} - f_m\|_B^p \, d\mu = \liminf_{i\to\infty} \|f_{k_i} - f_m\|_p^p \le \varepsilon^p.$$

Tästä seuraa $\|f - f_m\|_p \le \varepsilon$ kun $m \ge N$ ja Minskowskin epäyhtälö antaa

$$\|f\|_p \le \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p \le \varepsilon + \|f_m\|_p < \infty,$$

joten $f_n \to f \in L^p(X,B)$.

Olkoon nyt $p = \infty$ ja $(f_n) \subseteq L^\infty(X)$ Cauchy-jono. Määritellään joukot

$$C_i := \{x \in X : \|f_i(x)\|_B > \|f_i\|_\infty\}$$

ja

$$B_{j,l} := \{x \in X : \|f_j(x) - f_l(x)\|_B > \|f_l\|_\infty\}.$$

Normin $\|\cdot\|_\infty$ määritelmän nojalla kaikki joukot ovat nollamittaisia. Asetetaan

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup \bigcup_{j,l=1}^{\infty} B_{j,l}$$

jolloin D on nollamittaisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä nollamittainen. Nyt (f_n) suppenee tasaisesti joukossa $X \setminus D$ johonkin rajafunktioon f, koska (f_n) on Banach-avaruuden Cauchy-jono. Asetetaan $f(x) = 0$ kaikille $x \in D$, jolloin f on määritelty koko avaruuteen X. Siis $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$ ja kuten aiemmassa tapauksessa, suppenemisesta seuraa

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < \infty,$$

eli $f_n \to f \in L^\infty(X, B)$. □

Sivulla 16 todettiin, että $l^p(X, \mathbb{K})$-avaruudet saadaan $L^p(X, \mathbb{K}, \mu)$-avaruuksista lukumäärämitalla, kun σ-algebrana on potenssijoukko 2^X. Vastaava seuraa suoraviivaisesti myös Banach-kuvauksille.

Seuraus 2.26. *Avaruus $l^p(X, B)$ on Banach-avaruus, kun $1 \leq p \leq \infty$.*

2.3 Pettis-integraali

Esimerkissä 2.10 nähtiin, että myös Bochner-integraalille löytyy heikosti mitallisia kuvauksia, jotka eivät ole mitallisia. Pettisin mitallisuuslause antaa ymmärtää, ettei tällaisessa tapauksessa kuvajoukkoa voida approksimoida numeroituvalla joukolla eli integraalia ei voida määrittää. Jos kuitenkin duaalit $b^* f$ ovat integroituvia, on mahdollista määritellä heikompi integraali.

Aloitetaan seuraavalla määritelmällä ja siihen liittyvällä lemmalla.

Määritelmä 2.27. Olkoon B normiavaruus.

(i) Avaruuden B *biduaali* on duaalin B^* duaali eli $B^{**} := (B^*)^*$, varustettuna normilla $\|b^{**}\|_{B^{**}} = \sup_{\|b^*\| \leq 1} |b^{**}(b^*)|$.

(ii) Olkoon $\mathcal{K}_B \colon B \to B^{**}, \mathcal{K}_B(x)(b^*) := b^*(x)$ kaikille $b^* \in B^*$. Kuvaus $\mathcal{K}_B$ on avaruuden B *kanoninen upotus*.

(iii) Avaruus B on *refleksiivinen*, jos $\mathcal{K}_B$ on surjektio.

Lemma 2.28. *Kanoninen upotus on lineaarinen isometrinen upotus: $\mathcal{K}_B$ on lineaarinen, injektiivinen ja $\|\mathcal{K}_B(x)\|_{B^{**}} = \|x\|_B$ kaikille $x \in B$.*

Todistus. Jos $x, y \in B$ ja $a \in \mathbb{R}$ on kaikille $b^* \in B^*$

$$\mathcal{K}_B(ax + y) = b^*(ax + y) = ab^*(x) + b^*(y) = a\mathcal{K}_B(x) + \mathcal{K}_B(y),$$

joten $\mathcal{K}_B$ on lineaarinen. Edelleen

$$\|\mathcal{K}_B(x)(b^*)\|_{B^*} = |b^*(x)| \leq \|b^*\|\|x\|_B \text{ kaikille } b^* \in B^* \text{ eli } \|\mathcal{K}_B(x)\|_{B^{**}} \leq \|x\|_B$$

ja toisaalta Hahn-Banach-lause antaa $\tilde{b}^* \in B^*$ siten, että $\|\tilde{b}^*\| = 1$, $\tilde{b}^*(x) = \|x\|_B$ eli

$$\|x\|_B = |\tilde{b}^*(x)| = \mathcal{K}_B(\tilde{b}^*)| \leq \|\mathcal{K}_B(x)\|_{B^{**}}.$$

Näin ollen $\|\mathcal{K}_B(x)\|_{B^{**}} = \|x\|_B$. Lineaarisuus ja etäisyyden säilyttäminen antaa

$$\|\mathcal{K}_B(x) - \mathcal{K}_B(y)\|_{B^{**}} = \|\mathcal{K}_B(x-y)\|_{B^{**}} = \|x-y\|_B,$$

josta injektiivisyys seuraa. Siis $\mathcal{K}_B$ on isometrinen upotus. □

Huomautuksessa 1.39 puhuttiin $L^p(X,\mathbb{R})$-avaruuksien duaaleista. Seuraava lemma, josta voidaan käyttää myös nimeä Rieszin esityslause, antaa reaalisessa tapauksessa yhtäsuuruuden $(L^p)^* = L^q$ ja refleksiivisyyden:

Lemma 2.29. *Olkoot* $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i) *Kuvaus* $T\colon L^p(X,\mathbb{R}) \to (L^q(X,\mathbb{R}))^*$, $T(g)(f) = \int_X fg\, d\mu$, $g \in L^q(X,\mathbb{R})$ *on isometria, kun* $1 < p < \infty$. *Tapauksessa* $p = 1$ *vaaditaan lisäksi mitta-avaruuden* σ*-äärellisyys.*

(ii) $L^p(X,\mathbb{R})$ *on refleksiivinen, kun* $1 < p < \infty$.

Todistus. [11, s. 286-290]. □

Yleisissä avaruuksissa $L^p(X, B)$ vaaditaan myös ehdon $1 < p < \infty$ lisäksi refleksiivisyys avaruudelle B (katso Huomautus 4.20).

Jos heikosti mitallinen kuvaus on integroituva jokaiselle duaalilleen, seuraava lemma lähteestä [10, s. 52] takaa heikon integraalin olemassaolon biduaalina.

Lemma 2.30. *Olkoon* $f\colon X \to B$ *heikosti mitallinen ja* $b^*f \in L^1(X,\mathbb{R})$ *kaikille* $b^* \in B^*$. *Tällöin jokaiselle* $A \in \Gamma$ *on olemassa* $b_A^{**} \in B^{**}$, *jolle*

$$b_A^{**}(b^*) = \int_A b^* f\, d\mu \quad \textit{kaikilla } b^* \in B^*.$$

Todistus. Olkoon $A \in \Gamma$. Määritellään kuvaus $L\colon B^* \to L^1(X,\mathbb{R}), L(b^*) := b^*(f\chi_A)$. Osoitetaan, että L on suljettu: olkoon $(b_n^*) \subseteq B^*$, jolle $b_n^* \to b^*$ duaalinormissa ja $L(b_n^*) \to g$ jollekin $g \in L^1(X,\mathbb{R})$ L^1-normissa. Tällöin löytyy osajono $(n_k) \geq 1$, jolle $b_{n_k}^*(f\chi_A) \to g$ m.k. $x \in X$, mutta toisaalta $b_n^*(f\chi_A) \to b^*(f\chi_A)$. Koska $L(b^*)$ on nollakuvaus joukossa $X \setminus E$ jokaiselle b^*, saadaan $b^*(f) = b^*(f\chi_{X\setminus A}) + b^*(f\chi_A) = b^*(f\chi_A)$. Siis $b^*f = g$ melkein kaikkialla, joten $L(b_n^*) \to L(b^*)$. Tämä näyttää, että L on suljettu.

L on lineaarinen ja suljettu eli suljetun graafin lauseen nojalla jatkuva. Saadaan

$$\left| \int_A b^* f\, d\mu \right| \leq \|L(b^*)\|_1 \leq \|L\|_{B^{**}} \|b^*\|_{B^*} < \infty$$

eli $b^* \mapsto \int_A b^* f\, d\mu$ on jatkuva ja integraalina lineaarinen. Asettamalla $b_A^{**}(b^*) := \int_A b^* f\, d\mu$ saadaan haluttu biduaali, jolle $\|b_A^{**}\|_{B^{**}} \leq \|L\|_{B^{**}}$. □

Määritelmä 2.31. (Pettis-integraali) Jos $f\colon X \to B$ on heikosti mitallinen ja $b^*f \in L^1(X, \mathbb{R})$, on f *Dunford-integroituva.* Kuvauksen f *Dunford-integraali joukossa* A määritellään Lemman 2.30 antamana biduaalina $D_A := b_A^{**} \in B^{**}$.

Jos jokaiselle biduaalille D_A on olemassa $P_A \in B$ siten, että $\mathcal{K}_B(P_A) = D_A$ eli $b^*(P_A) = \int_A b^*f \, d\mu$ kaikille $b^* \in B^*$, niin f on *Pettis-integroituva* ja

$$\int\limits_A f \, d\mu := P_A$$

on kuvauksen f *Pettis-integraali joukossa* A.

Huomautus 2.32. (1) Dunford-integraali on heikompi kuin Pettis-integraali, sillä $\mathcal{K}_B$ ei ole aina surjektio. Refleksiivisille avaruuksille integraalit ovat aina samat.
(2) Jos P_A ja P'_A ovat Pettis-integraaleja joukossa A, niin lineaarisuuden nojalla $b^*(P_A - P_{A'}) = 0$ kaikille $b^* \in B^*$. Tällöin Hahn-Banach antaa duaalin $\phi \in B^*$, jolle $0 = \phi(P_A - P_{A'}) = \|P_A - P_{A'}\|$ eli $P_A = P_{A'}$. Pettis-integraali on siten yksikäsitteinen.
(3) Jos f on Bochner-integroituva, niin Bochner- ja Pettis-integraali ovat yhtäsuuret: tämä seuraa Hillen lauseesta ja Seurauksesta 2.19.

Dunford-integraalien teoriaa ei käsitellä. Pettis-integraalit sen sijaan muodostavat vektorimittoja, joihin palataan seuraavassa luvussa. Tarkemmin Pettis-integraalista, sen teoriasta ja suhteesta Dunford-integraaliin voi lukea lähteestä [20].

Annetaan vielä esimerkkejä Pettis-integroituvuuteen liittyen:

Esimerkki 2.33. (i) Esimerkissä 2.10 nähtiin, että f on heikosti mitallinen ja $b^*f = 0$ m.k. $x \in [0, 1]$ jokaiselle $b^* \in l^2([0, 1])^*$. Koska f ei ole mitallinen, se ei ole Bochner-integroituva, mutta Pettis-integraali on olemassa kaikille $A \in \Gamma$:

$$b^*(0) = \int_A b^*f \, d\mu = 0 \text{ kaikille } b^* \in B^* \text{ eli } \int\limits_A f \, d\mu = 0.$$

(ii) ([23, s. 53]) Olkoon $c_0 = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : x_n \to 0\}, X = ([0, 1], \Gamma, \mu)$ kuten Esimerkissä 2.10 ja $f\colon [0, 1] \to c_0, f(x) = \big(f_n(x)\big)_n := \big(n\chi_{I_n}(x)\big)_n$, missä $I_n := (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Koska $(c_0)^* = l^1(\mathbb{N})$, jokaiselle $b^* \in (c_0)^*$ löytyy jono $a = (a_n) \in l_1$ siten, että $b^*(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$. Nyt f on heikosti mitallinen, sillä sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ ovat yksinkertaisten kuvausten raja-arvoja. Lisäksi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |a_n f_n(x)| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, joten integroimisjärjestystä voidaan vaihtaa Tonellin lauseen nojalla (katso esimerkiksi [7, s. 439]). Tästä saadaan

$$\begin{aligned}\int_A b^*f \, d\mu &= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A a_n n \chi_{I_n}(x) \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \mu(A \cap I_n) = b^*(c),\end{aligned}$$

missä $c = \Big(n\mu(A \cap I_n)\Big)_n \in c_0$, koska monotonisuuden nojalla $n\mu(A \cap I_n) \leq n\mu(I_n) = \frac{1}{n+1} \to 0$ ja näin ollen Pettis-integraalille on

$$\int_A f \, d\mu = \Big(n\mu(A \cap I_n)\Big)_n.$$

Esimerkiksi $A = [0, 1]$ antaa Pettis-integraaliksi $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$.

Avaruus c_0 on separoituva, joten kuvauksen f heikko mitallisuus antaa Pettisin mitallisuuslauseella mitallisuuden. Kuitenkin $\|f(x)\| = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \notin \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, joten f ei ole Bochner-integroituva.

3 Vektorimitat

Jos $f\colon X \to B$ on Bochner-integroituva, voidaan σ-algebran Γ joukoille asettaa kuvaus $A \mapsto \int_A f\, d\mu$, joka nähdään mitan yleistyksenä vektoriavaruuteen B. Osoittautuu, että tällaisilla joukkokuvauksilla on erittäin tärkeä rooli Banach-avaruuksien teoriassa. Tässä luvussa tutustutaan yleisemmin vektoriarvoisiin joukkokuvauksiin eli vektorimittoihin. Tutustutaan näiden yleiseen teoriaan muun muassa variaation käsitteen kautta. Lisäksi tutkitaan tarkemmin edellä mainittuja integraalimuotoisia vektorimittoja, joita tarvitaan Luvussa 4 käsiteltävän Radon-Nikodym -ominaisuuden yhteydessä.

3.1 Vektorimitat, variaatiot ja avaruus $\mathcal{M}(\Gamma, B)$

Kuten tavallisilta mitoilta, halutaan vektorimitoilta vaatia additiivinen rakenne pistevieraille joukoille.

Määritelmä 3.1. Olkoon Γ σ-algebra ja $\nu\colon \Gamma \to B$.

(1) ν on *äärellisesti additiivinen vektorimitta*, jos $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ kaikille $A, B \in \Gamma$, joille $A \cap B \neq \emptyset$.

(2) Jos $\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_i)$ kaikille erillisille $A_i \in \Gamma$, on ν *numeroituvasti additiivinen vektorimitta* tai $\mathbb{N}$-vektorimitta.

Huomautus 3.2. (i) Additiivisuus antaa $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset)$ eli täytyy olla $\nu(\emptyset) = 0$.
(ii) Olkoon ν numeroituvasti additiivinen. Kun $B = \mathbb{R}$, käytetään yleensä nimitystä *merkkimitta*. Kuten aiemmin, tapauksesta $B = [0, \infty]$ käytetään nimitystä *mitta*.

Esimerkki 3.3. (i) Olkoon mitallinen avaruus $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$, $a := (a_n) \in c_0$ ja määritellään $\nu\colon 2^{\mathbb{N}} \to c_0$, $\nu(A) = \sum_{n \in A} a_n$. Tällöin ν siis summaa ne jonon a alkiot, joiden indeksit sisältyvät joukkoon A. Edelleen ν on selvästi $\mathbb{N}$-vektorimitta.
(ii) Olkoon $([0,1], \Gamma)$, missä Γ on välin $[0,1]$ Lebesguen σ-algebra. Asetetaan kuvaus $\nu\colon \Gamma \to L^p([0,1], \mu), \nu(A) := \chi_A$, missä μ on Lebesguen mitan rajoittuma välille $[0,1]$.
Tapauksessa $1 \leq p < \infty$ saadaan $\mathbb{N}$-vektorimitta: $\|\nu(A)\|_p^p = \int_{[0,1]} \chi_A^p\, d\mu = \mu(A)$ ja jokaiselle erillisille mitalliselle kokoelmalle $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) - \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) \Big\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \Big\| \nu\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) \Big\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) = 0.$$

Tapauksessa $p = \infty$ saadaan edellä $\Big\| \nu\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) \Big\|_{\infty} = 1$ kaikille n, jos $\mu(A_i) > 0$ kaikille $i \geq 1$. Niinpä tällöin on voimassa vain äärellinen additiivisuus.

• Tässä luvussa *vektorimitta* viittaa ensisijaisesti äärellisesti additiiviseen vektorimittaan. Lisäksi $\mathcal{V}$ viittaa kaikkien vektorimittojen $\nu\colon \Gamma \to B$ kokoelmasta.

Määritellään hyödyllinen variaation käsite, jolla voidaan tutkia vektorimitan rajoittuneisuutta:

Määritelmä 3.4. Olkoon $\nu\colon \Gamma \to B$ vektorimitta.

(1) Vektorimitan ν *variaatio* on kuvaus $|\nu|\colon \Gamma \to [0,\infty]$, joka määritellään

$$|\nu|(A) := \sup_{\Lambda_A} \sum_{C\in\Lambda_A} \|\nu(C)\|,$$

missä Λ_A on joukon A erillinen äärellinen ositus: $\Lambda_A = \{A_i\}_{i\in I}$, I äärellinen, $A = \bigcup_I A_i$ ja $A_i \in \Gamma$ pistevieraita.

(2) *Semivariaatio* määritellään kuvauksena $\|\nu\|\colon \Gamma \to [0,\infty]$,

$$\|\nu\|(A) := \sup\{|b^*\nu|(A) : b^* \in B^*, \|b^*\|_{B^*} \leq 1\},$$

missä $|b^*\nu|(A)$ on kuvauksen $b^*\nu\colon \Gamma \to [0,\infty)$ variaatio, kuten kohdassa (1).

(3) Jos $|\nu|(X) < \infty$, on ν *rajoitetusti varioituva* vektorimitta. Vastaavasti ν on *rajoitetusti semivarioituva*, jos $\|\nu\||X| < \infty$.

Huomautus 3.5. (i) Semivariaatio määrää mitan, sillä reaaliarvoisen mitan variaatiot ovat mittoja. Variaatio puolestaan on vain äärellisesti additiivinen mitta.
(ii) Koska $\sup_{\Lambda_A}\sum_{C\in\Lambda_A}|b^*\nu(A)| \leq \sup_{\Lambda_A}\sum_{C\in\Lambda_A}\|b^*\|_{B^*}\|\nu(A)\|$ ja toisaalta Hahn-Banachin nojalla $\|\nu(A)\| \leq \|\nu\|(A)$, on aina voimassa epäyhtälöketju

$$\|\nu(A)\| \leq \|\nu\|(A) \leq |\nu|(A).$$

Esimerkki 3.6. Kohdissa (i) ja (ii) jatketaan Esimerkin 3.3 vastaavia kohtia.

(i) Koska $|\nu|(A) = \sum_{n\in A}|a_n|$, on ν rajoitetusti varioituva jos ja vain jos $a \in l^1(\mathbb{N})$.

(ii) Jos $p = 1$, välin $[0,1]$ kompaktisuus reaalilukujen topologiassa antaa yhtäsuuruuden $|\nu|(A) = \mu(A)$ eli myös rajoitetun varioituvuuden.
Tapauksessa $p = \infty$ joukolle $A \in \Gamma$ valitaan erilliset $A_i \in \Gamma$ siten, että $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja $\Lambda_i := \{A_1, ..., A_{i-1}, \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\}$ jokaiselle $i \geq 1$. Tällöin $|\nu|(A) = \infty$, joten ν ei ole rajoitetusti varioituva.
Kun $1 < p < \infty$, on $S_p = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty$. Voidaan valita erilliset joukot $A_n \in \Gamma$ siten, että $\mu(A_n) = \frac{1}{S_p n^p}$ ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = [0,1]$, koska tällöin $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = 1 = \mu([0,1])$. Kuitenkin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\nu(A_n)\|_p = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)^{\frac{1}{p}} = S_p^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,$$

joten $|\nu|([0,1]) = \infty$, eikä ν ole tässäkään tapauksessa rajoitetusti varioituva.

(iii) Asetetaan $(2^{\mathbb{N}}, \Gamma)$, missä Γ sisältää joukot, jotka ovat joko äärellisiä tai näiden komplementti on äärellinen. Määritellään $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{R}$,

$$\nu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{kun } A \text{ on äärellinen} \\ -|A^c| & \text{kun } A^c \text{ on äärellinen.} \end{cases} \tag{13}$$

Koska duaalit b^* ovat reaaliluvuille muotoa $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$, saadaan yhtäsuuruus $\|\nu\|(A) = |\nu|(A)$. Valitaan kokoelmat

$$\Lambda_n := \big\{\{1\}, ..., \{n-1\}, \{n, n+1, ...,\}\big\}.$$

Tällöin

$$|\nu|(\mathbb{N}) \geq n - 1 + \left|\nu\big(\{n, n+1, ...,\}\big)\right| = 2(n-1) \to \infty,$$

joten ν ei ole rajoitetusti varioituva tai rajoitetusti semivarioituva.

Seuraava tulos karakterisoi $\mathbb{N}$-vektorimitat ja näiden variaatiot.

Lemma 3.7. *Olkoon $\nu\colon \Gamma \to B$ rajoitetusti varioituva vektorimitta. Tällöin $\nu\colon \Gamma \to B$ on $\mathbb{N}$-vektorimitta jos ja vain jos $|\nu|$ on mitta.*

Todistus. Olkoon $|\nu|(X) < \infty$. Oletetaan ensin, että ν on $\mathbb{N}$-vektorimitta. Valitaan jono pareittain pistevieraita $(A_i) \subseteq \Gamma$ ja olkoon Λ joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ äärellinen ositus. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\Lambda} \|\nu(A)\| &= \sum_{A\in\Lambda} \Big\|\nu\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)\Big\| = \sum_{A\in\Lambda} \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A\cap A_i)\Big\| \leq \sum_{A\in\Lambda}\sum_{i=1}^{\infty} \|\nu(A\cap A_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{A\in\Lambda} \|\nu(A\cap A_i)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\nu|(A_i),\end{aligned}$$

koska oletuksen nojalla kaksoissumma suppenee. Nyt edellinen on voimassa kaikille osituksille Λ, saadaan $|\nu|(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\nu|(A_i)$. Mutta nyt $|\nu|$ on äärellisesti additiivinen ja monotoninen, joten

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu|(A_i) = |\nu|\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq |\nu|\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

eli myös $\sum_i |\nu|(A_i) \leq |\nu|(\bigcup_i A_i)$. Niinpä $|\nu|$ on äärellinen mitta.

Jos $|\nu|$ on mitta, saadaan epäyhtälöstä $\|\nu(A)\| \leq |\nu|(A)$ myös vektorimitan ν numeroituva additiivisuus. □

Semivariaatiolle on seuraava esityslemma, josta saadaan sille hyödylliset arviot.

Lemma 3.8. *Vektorimitan semivariaatiolle on voimassa*

$$\|\nu\|(A) = \sup\Big\{\Big|\sum_{C_n\in\Lambda_A} \varepsilon_n \nu(C_n)\Big|\Big\},$$

missä supremum on yli kaikkien äärellisten kokoelmien Λ_A ja äärellisten joukkojen $\{\varepsilon_n : |\varepsilon_n| \leq 1\}$.

Lisäksi on voimassa epäyhtälöt

$$\sup\{\|\nu(A')\| : A \supseteq A' \in \Gamma\} \leq \|\nu\|(A) \leq 4\sup\{\|\nu(A')\| : A \supseteq A' \in \Gamma\}.$$

Todistus. [10, s. 4]. □

Esimerkki 3.9. Olkoot $\nu\colon \Gamma \to B$ rajoitetusti semivarioituva vektorimitta ja $s = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}(x) \in S(X, \mathbb{R})$, missä $a_i \in \mathbb{R}$. Asettamalla $L_\nu(s) := \sum_{i=1}^{n} a_i\nu(A_i)$ kaikille

$s \in S(X,\mathbb{R})$ saadaan lineaarikuvaus $L_\nu \colon S(X,\mathbb{R}) \to B$, jolle on Lemman 3.8 nojalla arvio

$$\|L_\nu(s)\| = \Big\| \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) \Big\| = m \Big\| \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m} \nu(A_i) \Big\| \leq m \|\nu\|(X),$$

missä $m = \|s\|_{\sup} = \sup\{|s(x)| : x \in X\}$. Jos asetetaan $(S(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ lähtöavaruudeksi, nähdään L_ν jatkuvana lineaarioperaattorina, jolle $\|L_\nu\| \leq \|\nu\|(X)$. Edelleen L_ν voidaan jatkaa kuvaukseksi $T_\nu \colon \mathcal{S}(X,\mathbb{R}) \to B$ Lauseen 1.17 avulla, missä

$$\mathcal{S}(X,\mathbb{R}) := \big(\{f \colon X \to \mathbb{R} : f = \lim_n s_n \text{ jollekin } (s_n) \subset S(X,\mathbb{R})\}, \|\cdot\|_{\sup}\big)$$

ja $\|T_\nu\| = \|L_\nu\|$. Toisin sanoen, $T_\nu(f) =: \int_X f \, d\nu$ on yksinkertaisten kuvauksen tasaisten rajafunktioiden $f \in \mathcal{S}(X,\mathbb{R})$ integraali vektorimitan ν suhteen.

Määritellään seuraavaksi vektorimitan vahva ja heikko additiivisuus.

Määritelmä 3.10. Olkoot $\nu \colon \Gamma \to B$ vektorimitta ja $\mathcal{A} = \{A_i\}_i \subseteq \Gamma$ erillinen kokoelma.

(i) Jos $\sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$ suppenee jokaiselle $\mathcal{A}$, on ν *vahvasti additiivinen*. Vektorimittojen kokoelma $\mathcal{V}$ on *tasaisesti vahvasti additiivinen*, jos jokaiselle kokoelmalle $\mathcal{A}$ on voimassa $\lim_n \sup_{\mathcal{V}} \| \sum_{i=n}^\infty \nu(A_i)\| = 0$.

(2) Jos $\sum_{i=1}^\infty b^*\nu(A_i)$ suppenee jokaiselle $b^* \in B^*$ ja $\mathcal{A}$, on ν *heikosti additiivinen*.

Vahvasti additiivisuus tarkoittaa, että vektorimitan numeroituvat summat suppenevat σ-algebrassa Γ, vaikka ν olisi vain äärellisesti additiivinen. Luonnollisesti $\mathbb{N}$-vektorimitta on aina vahvasti additiivinen ja siten heikosti additiivinen. Palataan vahvaan ja heikkoon additiivisuuteen myöhemmin Seurauksessa 3.14 ja Lauseessa 3.22.

Siirrytään seuraavaksi tutkimaan vektorimittojen normiavaruutta:

Määritelmä 3.11. Kaikkien $\mathbb{N}$-vektorimittojen $\nu \colon \Gamma \to B$ avaruutta semivariaationormin $\|\nu\|_{\mathcal{M}} := \|\nu\|(X)$ suhteen merkitään $\mathcal{M}(\Gamma, B)$ tai $\mathcal{M}$.

Mittojen avaruus muodostaa täydellisen normiavaruuden:

Lause 3.12. *Avaruus $\mathcal{M}(\Gamma, B)$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Seurataan todistusta [23, s. 95]: olkoon (ν_n) jono rajoitetusti semivarioituvia $\mathbb{N}$-vektorimittoja. Ensinnäkin jokaiselle $A \in \Gamma$ saadaan

$$\|\nu_n(A) - \nu_m(A)\| \leq \|\nu_n - \nu_m\|(A) \leq \|\nu_n - \nu_m\|_{\mathcal{M}},$$

joten jono $(\nu_n(A))$ on Cauchy-jono avaruudessa B. Asetetaan $\nu(A) := \lim_n \nu_n(A)$. Duaalien jatkuvuuden nojalla $b^*\nu(A) = \lim_n (b^*\nu_n)(A)$. Siis $b^*\nu$ on merkkimitta jokaisella $b^* \in B^*$ ja myöhemmin osoitettavan Lemman 3.20 nojalla myös $\nu \in \mathcal{M}(\Gamma, B)$.

Asetetaan $L_\nu \colon B^* \to \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R}), L_\nu(b^*) := b^*\nu$. Tällöin L_ν on rajoitettu avaruuden $\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R})$ määritelmän nojalla. Nyt normille saadaan $\|L_{\nu_n} - L_{\nu_m}\|_{\mathcal{M}} = \|\nu_n - \nu_m\|$, joten (L_{ν_n}) on Cauchy-jono lineaarikuvausten avaruudessa $L\big(B^*, \mathcal{M}(B,\mathbb{R})\big)$. Koska $\mathcal{M}(B,\mathbb{R})$ on Banach-avaruus ([23, s. 211-212]), myös $L\big(B^*, \mathcal{M}(B,\mathbb{R})\big)$ on Banach-avaruus ja siten (L_{ν_n}) suppenee. Duaalin jatkuvuus antaa jälleen $L_{\nu_n} \to L_\nu$, joten $\|\nu_n - \nu\| = \|L_{\nu_n} - L_\nu\|_{\mathcal{M}} \to 0$, kun $n, m \to \infty$. $\square$

Huomautus 3.13. Koska $\|\nu(A)\| \leq |\nu|(A) \leq \|\nu\|_{\mathcal{M}}$, on vektorimitan kuvajoukko rajoitettu. Yleisemmin rajoitetut joukot voidaan karakterisoida seuraavalla tuloksella:

[23, s. 215] Olkoon $K \subseteq \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R})$ rajoitettu. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) K on suhteellisen heikosti kompakti.
(2) K on tasaisesti vahvasti additiivinen.
(3) Jos $(A_i) \subseteq \Gamma$, missä A_i ovat erillisiä, $A_{i+1} \subseteq A_i$ ja $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ niin $\mu(A_i) \to \mu(A)$ tasaisesti joukossa K.
(4) On olemassa äärellinen mitta $\mu \colon \Gamma \to [0, \infty)$ siten, että K on tasaisesti μ-jatkuva: jokaiselle $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että $\mu(A) < \delta$ antaa $|\lambda(A)| < \varepsilon$ kaikille $\lambda \in K$.

Huomautuksen 3.13 kohdan (4) μ-jatkuvuuden käsitteeseen palataan Määritelmässä 3.17 ja kohtaa (3) hyödynnetään Lemmassa 3.18. Kohtia (1) ja (2) käyttämällä saadaan seuraava hyödyllinen päättely:

Olkoon $\nu \colon \Gamma \to B$ $\mathbb{N}$-vektorimitta ja $K \subseteq \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R})$ rajoitettu joukko, joka sisältää mitat muotoa $b^*\nu$, missä $b^* \in B^*$ ja $\|b^*\|_{B^*} \leq 1$. Jos $(A_i) \subseteq \Gamma$ ovat erilliset joukot, niin

$$\Big| \sum_{i=n}^{\infty} b^*\nu(A_i) \Big| \leq \Big\| \sum_{i=n}^{\infty} \nu(A_i) \Big\| \|b^*\|_{B^*} \leq \Big\| \sum_{i=n}^{\infty} \nu(A_i) \Big\|.$$

Koska yläraja ei riipu kuvauksesta b^*, on K tasaisesti vahvasti additiivinen. Edeltävän tuloksen kohdan (1) nojalla K on suhteellisen heikosti kompakti. Erityisesti Lauseessa 3.12 käytetylle operaattorille L_ν suljettu yksikköpallo kuvautuu suhteellisen heikosti kompaktille joukolle K, joten saadaan:

Seuraus 3.14. *$L_\nu \colon B^* \to \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R}), L_\nu(b^*) = b^*\nu$ on heikosti kompakti lineaarikuvaus, kun $\nu \colon \Gamma \to B$ on $\mathbb{N}$-vektorimitta.*

Operaattoria L_ν hyödyntäen voidaan näyttää, että vektorimittojen kuvajoukot ovat suhteellisen heikosti kompakteja. Tutustutaan ensin lineaarikuvauksen adjunkaattiin:

Määritelmä 3.15. [27, s. 193-194] Olkoon V, W normiavaruuksia ja lineaarinen $L \colon V \to W$. Määritellään kuvaus $L^* \colon W^* \to V^*, L^*(w^*) := w^*(L(v))$. Tällöin kuvaus L^* on lineaarikuvaus, jota kutsutaan kuvauksen L *adjunkaatiksi*.

Jos L on jatkuva, myös adjunkaatti L^* on jatkuva. Seurauksen 3.14 kuvaus toteuttaa edellisen määritelmän ehdot, joten voidaan asettaa jatkuva lineaarikuvaus $L_\nu^* \colon \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R})^* \to B^{**}$. Erityisesti L_ν^* on heikosti kompakti. Nyt voidaan näyttää seuraava kompaktisuuslemma:

Lemma 3.16. *Olkoon $\nu \colon \Gamma \to B$ $\mathbb{N}$-vektorimitta. Tällöin $C = \{\nu(A) : A \in \Gamma\}$ on suhteellisen heikosti kompakti joukko.*

Todistus. Olkoon L_ν^* Seurauksen 3.14 heikosti kompaktin kuvauksen adjunkaatti. Tällöin L_ν^* on heikosti kompakti lineaarikuvaus. Jokaiselle $A \in \Gamma$ voidaan valita lineaarikuvaus $m^* \colon \mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, m^*(\mu) = \mu(A)$, jolle $\|m^*\| = 1$. Erityisesti $L_\nu^*(m^*(b^*\nu)) = m^*(b^*\nu) = b^*\nu(A)$ kaikille $b^* \in B^*$, joten $L_\nu^*(m^*) = \nu(A)$. Jos $\overline{B}_{B^{**}}(0,1)$ on duaalin suljettu yksikköpallo niin $C \subseteq L_\nu^*\big(\overline{B}_{B^{**}}(0,1)\big)$, missä oikeanpuoleinen joukko on suhteellisen heikosti kompakti. Saadaan siis $\overline{C} \subseteq \overline{L_\nu^*\big(\overline{B}_{B^{**}}(0,1)\big)}$, joten $\overline{C}$ on heikosti kompaktin joukon suljettuna osajoukkona heikosti kompakti. $\square$

3.2 Integraali vektorimittana

Käydään seuraavaksi läpi vektorimitan ja mitan väliset jatkuvuuskäsitteet:

Määritelmä 3.17. Olkoot $\nu\colon \Gamma \to B$ vektorimitta, $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty)$ äärellinen mitta ja $A \in \Gamma$.

(1) Vektorimitta ν on *μ-jatkuva*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että ehdosta $\mu(A) < \delta$ seuraa $\|\nu(A)\| < \varepsilon$.

(2) Jos $\nu(A) = 0$ aina kun $\mu(A) = 0$, on ν *absoluuttisesti jatkuva* mitan μ suhteen ja merkitään $\nu \ll \mu$.

Kuten reaaliarvoisille mitoille, määritelmät ovat edelleen yhtäpitäviä:

Lemma 3.18. *Olkoon $\nu\colon \Gamma \to B$ $\mathbb{N}$-vektorimitta ja $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty)$ äärellinen mitta. Tällöin ν on μ-jatkuva jos ja vain jos $\nu \ll \mu$.*

Todistus. Jos $\mu(A) = 0$, voidaan jokaiselle $\varepsilon > 0$ valita sama joukko A. Siis μ-jatkuvuus antaa absoluuttisen jatkuvuuden. Vastakkaiseen suuntaan käytetään lähteen [23, s. 100] vasta-argumenttia: jos ν ei ole μ-jatkuva, löytyy $\varepsilon > 0$ ja jono $(A_i) \subseteq \Gamma$ siten, että $\mu(A_i) < 2^{-i}$ ja $\|\nu\|(A_i) \geq \|\nu(A_i)\| \geq \varepsilon$ jokaiselle $i \geq 1$. Asettamalla joukot

$$C_i := \bigcup_{k \geq i} A_i \quad \text{ja} \quad C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

saadaan vähenevä jono, jolle mitan μ ylhäältä jatkuvuus antaa $\mu(C) = \lim_i \mu(C_i) = 0$. Nyt joukko $\{|b^*\nu| : b^* \in \overline{B}_{B^{**}}(0,1)\big)\}$ on Seurauksen 3.14 nojalla suhteellisen heikosti kompakti avaruudessa $\mathcal{M}(\Gamma,\mathbb{R})$, joten Huomautuksen 3.13 kohta (3) antaa, että $|b^*\nu|(C_i) \to |b^*\nu|(C)$ tasaisesti joukossa $B_{B^*}(0,1)^*$. Tästä seuraa, että $\|\nu\|(C) \geq \varepsilon$ ja tällöin Lemman 3.8 nojalla löytyy $H \in \Gamma, H \subseteq C$ siten, että $\|\nu(H)\| \geq \frac{|\nu|(C)}{4}$ eli $\nu(H) \neq 0$. Mutta $\mu(H) = 0$ joukon C määritelmän ja mitan μ monotonisuuden nojalla, joten ν ei ole absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen. □

Absoluuttinen jatkuvuus on äärimmäisen tärkeä ominaisuus integraalien ja vektorimittojen välisessä teoriassa. Tätä varten halutaan osoitaa, että jokainen Pettis-integroituva kuvaus antaa vektorimitan integraalinsa kautta. Tähän liittyen tutustutaan kahteen aputulokseen, joista ensimmäinen koskee heikosti suppenevia sarjoja:

Määritelmä 3.19.

(1) Sarja $\sum_n b_n$ suppenee *ehdottomasti*, jos $\sum_k b_{n_k}$ suppenee jokaiselle jonolle (n_k).

(2) Sarja $\sum_n b_n$ suppenee *ehdottoman heikosti*, jos $\sum_k b^*(b_{n_k})$ suppenee jokaiselle jonolle (n_k) ja $b^* \in V^*$

Lemma 3.20. (Orlicz-Pettis) *Olkoon $(b_n) \subseteq B$ ja $S := \sum_n b_n$ siten, että S suppenee ehdottoman heikosti. Tällöin S suppenee ehdottomasti. Erityisesti jokainen heikosti numeroituvasti additiivinen vektorimitta ν on $\mathbb{N}$-vektorimitta.*

Todistus. Selitetään todistuksen [13, s. 61] idea; joitakin yksityiskohtia ohitetaan.

Näytetään ensin

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{b^*\in\mathcal{B}} \sum_{n=N}^{\infty} |b^*(b_n)| = 0, \tag{14}$$

missä $\mathcal{B} := \overline{B}_{B^*}(0,1) = \{b^* : \|b^*\|_{B^*} \leq 1\}$: olkoon $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$. Oletuksen nojalla löytyy $x \in B$, jolle $\sum_k b^*(b_{n_k}) = b^*(x)$ kaikilla $b^* \in B^*$ eli myös $\sum_k \|b^*(b_{n_k})\| < \infty$. Asetetaan $L\colon B^* \to l^1(\mathbb{N}), L(b^*) := \big(b^*(b_{n_k})\big)_k$, jolloin L on lineaarinen suljettu kuvaus eli suljetun graafin lause antaa, että L on rajoitettu. Seuraavaksi näytetään, että L on kompakti: tätä varten valitaan pienin suljettu aliavaruus $\mathcal{S}$, joka sisältää jonon (b_{n_k}), jolloin myös $b \in \mathcal{S}$. Jokaiselle duaalin yksikköpallon jonolle (b_k^*) voidaan ottaa rajoittuma aliavaruuteen $\mathcal{S}$, jota merkitään (v_k^*). Aliavaruus $\mathcal{S}$ on separoituva ja voidaan näyttää, että pallot $\{b^* : \|b^*\| \leq 1\}$ ovat jonokompakteja duaalin $\mathcal{S}^*$ heikko*-topologiassa. Valitaan siis suppeneva osajono $(v_{k_i}^*)$, jolla on heikko raja-arvo $v_0^* \in \mathcal{S}^*$. Käyttämällä Hahn-Banach -lausetta löydetään funktionaalin v_0^* jatkekuvaus b_0^*, jolle voidaan näyttää $L(b_{k_i}^*) \to L(b_0^*)$ avaruudessa $l^1(\mathbb{N})$; tästä saadaan lopulta operaattorin L kompaktisuus. Nyt $\overline{B}(0,1)$ sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon avaruudessa $l^1(\mathbb{N})$, missä duaalien sarjat suppenevat edelleen itseisesti. Avaruudessa $l^1(\mathbb{N})$ heikko suppeneminen antaa vahvan suppenemisen, josta (14) seuraa.

Jos $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$, saadaan oletuksesta $\sum_k b^*(b_{n_k}) = b^*(x)$ jokaiselle $b^* \in B^*$, missä $x \in B$. Hahn-Banach -lauseella saadaan $v^* \in B^*$, jolle $v^*(\sum_{k=1}^N b_{n_k} - x) = \big\| \sum_{k=1}^N b_{n_k} - x\big\|$ ja $\|v^*\|_{B^*} = 1$, jolloin

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} b_{n_k} - x \Big\| = v^*\Big(\sum_{k=1}^{N} b_{n_k} - x \Big) = \sum_{k=N}^{\infty} v^*(b_{n_k}) \leq \sum_{k=N}^{\infty} |v^*(b_{n_k})| \leq \sup_{b^*\in\mathcal{B}} \sum_{k>N} |b^*(b_{n_k})|,$$

missä $\mathcal{B} := \overline{B}_{B^*}(0,1)$. Nyt (14) antaa väitteen, kun $N \to \infty$.

□

Mainitaan vielä tulos, jota käytetään integraalioperaattorin kompaktisuuden varmentamiseen: tämä ei liity itsessään vektorimittoihin, joten todistus ohitetaan.

Lemma 3.21. *Olkoon f Pettis-integroituva ja $K\colon L^\infty(X,\mathbb{R}) \to B, K(g) := \int_X fg\, d\mu$. Jos f on mitallinen, K on kompakti.*

Todistus. [23, s. 55]. □

Näytetään nyt tulos Pettis-integraaliin liittyen, joka selventää Huomautuksen 2.18 väitteen sekä yhdistää vektorimittojen ja integraalien käsitteitä. Todistus mukailee lähteitä [23, s. 96] ja [10, s. 47-48].

Lause 3.22. *Olkoon $f\colon X \to B$.*

(1) *Olkoon f Pettis-integroituva. Tällöin $\nu\colon \Gamma \to B$,*

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu$$

määrää $\mathbb{N}$*-vektorimitan semivariaatiolla*

$$\|\nu\|(A) = \sup\Big\{\int_A |b^*f|\,d\mu : \|b^*\|_{B^*} \le 1\Big\}.$$

ja $\nu \ll \mu$*.*

(2) *Jos* f *on mitallinen ja Pettis-integroituva,* $\{\nu(A) : A \in \Gamma\}$ *on suhteellisen kompakti.*

(3) *Jos* f *on Bochner-integroituva, on* $|\nu|(X) < \infty$ *ja* $|\nu|(A) = \int_A \|f\|\,d\mu$*.*

Todistus.

(1) Pettis-integraalin määritelmä antaa

$$b^*\nu(A) = b^*\Big(\int_A f\,d\mu\Big) = \int_A b^*f\,d\mu \tag{15}$$

eli $b^*\nu$ on numeroituvasti additiivinen jokaiselle $b^* \in B$, joten Lemman 3.20 nojalla ν on $\mathbb{N}$-vektorimitta. Merkkimitalle $b^*\nu$ on Jordanin hajotelman (Seuraus 4.4) nojalla $|b^*\nu|(A) = \int_A |b^*f|\,d\mu$, joten

$$\|\nu\|(A) = \sup\Big\{\int_A |b^*f|\,d\mu : \|b^*\|_{B^*} \le 1\Big\}.$$

Yhtälöstä (15) seuraa selvästi $\nu \ll \mu$.

(2) Jos f on mitallinen ja Pettis-integroituva, antaa Lemma 3.21 operaattorin $K\colon L^\infty(X,\mathbb{R}) \to B, K(g) = \int_A fg\,d\mu$ kompaktisuuden. Koska $K(\chi_A) = \nu(A)$ ja $\|\chi_A\|_\infty = 1$, kompaktin operaattorin määritelmän nojalla $\overline{K(B_s(0,1)_\infty)}$ on kompakti ja $\overline{\{\nu(A) : A \in \Gamma\}}$ sen suljettuna osajoukkona kompakti.

(3) Olkoon f Bochner-integroituva, $A \in \Gamma$ ja $\{A_i\}_{i=1}^n$ joukon A ositus. Tällöin

$$\sum_{i=1}^n \|\nu(A_i)\| = \sum_{i=1}^n \Big\|\int_{A_i} f\,d\mu\Big\| \le \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \|f\|\,d\mu = \int_A \|f\|\,d\mu,$$

joten $|\nu|(A) \le \int_A \|f\|\,d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$ ja f on rajoitetusti varioituva. Näytetään vielä yhtäsuuruus: olkoon $\varepsilon > 0$, jolloin yksinkertaisten kuvausten tiheyden nojalla löytyy $s \in S(A,B)$ siten, että $\int_A \|f - s\|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$.
Olkoon $m\colon \Gamma \to B, m(A) := \int_A s\,d\mu$. Olkoot yksinkertainen kuvaus muotoa $s = \sum_{i=1}^k b_i\chi_{C_i}$ ja $\{A_i\}_{i=1}^m$ joukon A ositus. Koska normien summa variaatiossa ei pienene ositusjoukkojen määrän kasvaessa, voidaan olettaa, että $A \cap C_i$ ovat yhdisteitä osituksen $\{A_i\}_{i=1}^m$ joukoista. Näin ollen saadaan

$$\sum_{i=1}^m \|m(A_i)\| = \sum_{i=1}^m \Big\|\int_{A_i} s\,d\mu\Big\| = \sum_{i=1}^k \|b_i\|\mu(A \cap C_i) = \int_A \|s\|\,d\mu$$

eli variaatiolle on $|m|(A) = \int_A \|s\|\,d\mu$.

Edelleen käyttämällä alussa tehtyä tiheysoletusta saadaan

$$\begin{aligned}\sum_i \Big| \|\nu(A_i)\| - \|m(A_i)\| \Big| &\le \sum_i \|\nu(A_i) - m(A_i)\| = \sum_i \Big\| \int_{A_i} f - s \, d\mu \Big\| \\ &\le \int_A \|f - s\| \, d\mu < \varepsilon.\end{aligned}$$

Koska tähän asti tehdyt päätelmät eivät riipu osituksesta $\{A_i\}_i$, voidaan tämä valita siten, että $\Big| |\nu|(A) - \sum_i \|\nu(A_i)\| \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tälle ositukselle saadaan

$$\begin{aligned}\Big| |\nu|(A) - \int_A \|s\| \, d\mu \Big| &= \Big| |\nu|(A) - \sum_i \|m(A_i)\| \Big| \\ &\le \Big| |\nu|(A) - \sum_i \|\nu(A_i)\| \Big| + \Big| \sum_i \|\nu(A_i)\| - \|m(A_i)\| \Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Korvaamalla s jonolla (s_n) saadaan $\Big| |\nu|(A) - \int_A \|s_N\| \, d\mu \Big| < \varepsilon$, kun $N \ge 1$ on riittävän suuri. Niinpä kaikille $A \in \Gamma$ on

$$|\nu|(A) = \lim_n \int_A \|s_n\| \, d\mu = \int_A \|f\| \, d\mu.$$

□

4 Radon-Nikodym -ominaisuus

Bochner-integraalin ja vektorimittojen välisestä suhteesta on jo nähty esimerkkejä, kuten Lauseessa 3.22. Tätä teoriaa halutaan laajentaa tutkimalla, milloin vektorimitta voidaan esittää Bochner-integraalina jonkin mitan suhteen. Käydään ensin läpi reaaliarvoinen tapaus, jonka jälkeen siirrytään yleisiin Banach-avaruuksiin.

4.1 Radon-Nikodym -lause Banach-avaruuksissa

Reaaliluvuille absoluuttinen jatkuvuus riittää karakterisoimaan mittojen esittämisen integraaleina. Tämä tulos tunnetaan *Radon-Nikodym -lauseena*:

Lause 4.1. (Radon-Nikodym) *Olkoot (X, Γ) mitallinen avaruus, $\mu\colon \Gamma \to [0, \infty]$ σ-äärellinen mitta, $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ σ-äärellinen merkkimitta ja $\nu \ll \mu$. Tällöin on olemassa μ-mitallinen kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{kaikille } A \in \Gamma. \tag{16}$$

Huomautus 4.2. Lauseen oletukset voivat hieman vaihdella: esimerkiksi merkkimitta voidaan korvata myös mitalla. Toisaalta μ voi myös olla merkkimitta, ja näitä voidaan käyttää sekaisin eli μ, ν voivat olla merkkimittoja tai tavallisia mittoja. Lauseessa 4.1 käytetty esitys on kuitenkin sopivampi yleisten Banach-avaruuksien tilanteeseen, jossa μ on mitta.

Lauseen 4.1 todistus pohjautuu lähteisiin [6, s. 177-179] ja [7, s. 380], joista ensimmäinen käsittelee äärelliset mitat ja jälkimmäinen σ-äärellisen tapauksen. Todistusta varten tarvitaan esitietoja, kuten mitta-avaruuden *Hahnin hajotelma*.

Lause 4.3. *Olkoon $\mu\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ merkkimitta avaruudessa (X, Γ). Tällöin on olemassa erilliset joukot $X^-, X^+ \in \Gamma$ siten, että $X = X^- \cup X^+$ ja kaikille $A \in \Gamma$ on voimassa*

$$\mu(A \cap X^-) \leq 0 \quad \text{ja} \quad \mu(A \cap X^+) \geq 0.$$

Ositusta $X = X^+ \cup X^-$ kutsutaan Hahnin hajotelmaksi.

Todistus. Katso [6, Theorem 3.11, s. 175-176]. □

Hahnin hajotelma on yksikäsitteinen nollamittaisia joukkoja lukuunottamatta, sillä mille tahansa hajotelmalle $X = \tilde{X}^+ \cup \tilde{X}^-$ on voimassa $\mu(A \cap X^-) = \mu(A \cap \tilde{X}^-)$ ja vastaava myös positiiviosalle. Tämä johtuu siitä, että jos $A \in X^- \cap \tilde{X}^+$ tai $A \in X^+ \cap \tilde{X}^-$ niin Lauseen 4.3 nojalla joukolle A on oltava yhtäaikaa ei-negatiivinen ja ei-positiivinen mitta, siis se on nollamittainen.

Merkkimitat voidaan karakterisoida Hahnin hajotelmaa käyttäyen, jolloin saadaan *Jordanin hajotelma*:

Seuraus 4.4. *Olkoon $\mu\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ numeroituvasti additiivinen mitta-avaruudessa (X, Γ). Asettamalla $\mu^+(A) := \mu(A \cap X^+)$ ja $\mu^-(A) =: -\mu(A \cap X^-)$ kaikille $A \in \Gamma$, missä $X = X^+ \cup X^-$, saadaan mitat μ^+, μ^- siten, että $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$. Ositusta $\mu = \mu^+ - \mu^-$ kutsutaan merkkimitan μ Jordanin hajotelmaksi.*

Todistus. Nyt μ^+ ja μ^- ovat mittoja, sillä μ saa joukoissa $A \cap X^+$ vain ei-negatiivisia arvoja ja vastaavasti ei-positiivisia joukoissa $A \cap X^-$ (ja siten $-\mu$ on aina ei-negatiivista). Nämä ovat merkkimitan rajoittumina numeroituvasti additiivisia. Koska Hahnin hajotelma muodostaa pistevieraan osituksen, on $\mu = \mu^+ - \mu^-$. □

Seuraava maksimifunktion ositus on myös hyödyllinen:

Lemma 4.5. *Olkoot $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita ja $g_n = \max_{1 \le i \le n} f_i(x)$. Tällöin g_n on mitallinen ja jokaiselle $A \in \Gamma$ löytyy joukot $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \Gamma$ siten, että $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, A_i ovat pareittain pistevieraita ja $g_n(x) = f_i(x)$, kun $x \in A_i$.*

Todistus. Näytetään ensin mitallisuus: tapaus $n = 1$ on selvä. Jos $n = 2$, voidaan kirjoittaa

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}\big|f_1 - f_2\big| + \frac{1}{2}\big|f_1 + f_2\big|.$$

Mitallisuus seuraa mitallisten kuvausten perustuloksista.
Kun $n = 3$ saadaan

$$\max\{f_1, f_2, f_3\} = \max\{\max\{f_1, f_2\}, f_3\}$$

mikä on tapauksen $n = 2$ nojalla mitallinen.
Yleisesti

$$\max_{1 \le i \le n} f_i(x) = \max\{\max_{1 \le i \le n-1} f_i(x), f_n(x)\}$$

josta induktio antaa mitallisuuden.

Olkoon A_1 joukko missä $g_n = f_1$. Seuraavaksi valitaan A_2, missä $g_n = f_2$ ja $f_2 \neq f_1$. Tällöin joukosta A_2 poistetaan pisteet, joilla $f_2 = f_1$ eli A_2 ei sisällä joukon A_1 pisteitä. Edelleen valitaan A_3 niin, että $g_n = f_3$ ja $f_3 \neq \max\{f_1, f_2\}$ eli joukko A_3 ei sisällä niitä pisteitä, joissa edeltävät kuvaukset saavuttavat saman maksimin. Yleisesti jatkamalla joukossa A_i on voimassa $g_n = f_i$ ja $f_i \neq \max_{1 \le k \le i-1} f_i$: tällöin A_i ei sisällä pisteitä, joissa edeltävät funktiot saavuttavat saman maksimin. Niinpä joukot A_i ovat pareittain pistevieraita ja $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Lisäksi joukot $A_i, 1 \le i \le n$, ovat mitallisia, sillä

$$A_i = \{x \in X : g_n(x) = f_i(x)\} \setminus \{x \in X : f_i(x) = \max_{1 \le k \le i-1} f_k(x)\}$$

on mitallisten funktioiden alkukuvien erotuksena mitallinen. Pistevieraudesta seuraa $g_n(x) = f_i(x)$, kun $x \in A_i$. □

Lauseen 4.1 todistus. Merkkimitalle ν saadaan Seurauksen 4.4 nojalla Jordanin hajotelma $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Olkoot X^+, X^- Hahnin hajotelman (Lause 4.3) ositukset. Riittää näyttää väite vain mitalle $\nu \ge 0$: jos oletetaan väite todeksi mitoille, saadaan merkkimitalle ν

$$\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = \int_A f_+ \, d\mu - \int_A f_- \, d\mu = \int_A (f_+ - f_-) \, d\mu$$

missä f_+, f_- ovat mittoja ν^+, ν^- vastaavat lauseen antamat funktiot, jotka ovat olemassa: nimittäin $\nu^+(A) = \nu(A \cap X^+), \nu^-(A) = -\nu(A \cap X^-)$ ovat absoluuttisesti jatkuvia mitan μ suhteen, kun oletetaan $\nu \ll \mu$. Asettamalla $f := f_+ - f_-$ saadaan haluttu funktio.

Osoitetaan väite ensin äärellisille mitoille: Merkitään

$$\mathcal{F} := \Big\{ f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu) : f \geq 0, \int_A f \, d\mu \leq \nu(A) \text{ kaikille } A \in \Gamma \Big\}.$$

Äärellismitallisuuden nojalla $\mathcal{F}$ on ylhäältä rajoitettu eli voidaan asettaa

$$M := \sup \Big\{ \int_X f \, d\mu : f \in \mathcal{F} \Big\}.$$

Ideana on näyttää, että $\mathcal{F}$ sisältää integraalin maksimoivan funktion f ja lisäksi $\nu(A) = \int_A f d\mu$ kaikilla $A \in \Gamma$. Supremumin määritelmän nojalla löydetään jono $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ siten, että $\int_X f_n \to M$, kun $n \to \infty$. Asetetaan nyt $g_n(x) := \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x)$ kaikille $n \geq 1$. Funktioille g_n saadaan Lemman 4.5 nojalla ositus $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ missä joukot A_i ovat pareittain pistevieraita, mitallisia ja $g_n(x) = f_i(x)$ kun $x \in A_i$. Tällöin

$$\int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_i} g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_i} f_i d\mu \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) = \nu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \nu(A). \tag{17}$$

Jono (g_n) on kasvava ja yhtälön (17) nojalla $g_n \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$, sillä $\nu(X) < \infty$. Koska kuvauksille $f_i \in \mathcal{F}$ on $f_i \geq 0$, on $g_n \geq 0$ eli $g_n \in \mathcal{F}$. Monotoninen konvergenssi antaa rajafunktion $\lim_{n\to\infty} g_n =: f \geq 0$. Yhtälöketjun (17) ja monotonisen konvergenssin nojalla myös $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$. Siis $f \in \mathcal{F}$ ja lisäksi

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = M,$$

joten supremumin määritelmän nojalla $\int_X f d\mu = M$.

Näytetään, että f antaa yhtäsuuruuden jokaiselle $A \in \Gamma$ yhtälössä (16). Asetetaan $\tau(A) := \nu(A) - \int_A f \, d\mu$ ja osoitetaan, että $\tau(A) = 0$ kaikille $A \in \Gamma$. Nyt τ on mitta, koska $\int_A f \, d\mu \leq \nu(A)$ ja ν, μ ovat mittoja. Lisäksi se on absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen: jos $\mu(A) = 0$, niin $\nu(A) = 0$ oletuksen $\nu \ll \mu$ nojalla ja lisäksi $\int_A f \, d\mu = 0$.

Tehdään vastaoletus $\tau \neq 0$. Määritellään merkkimitat $\tau_n := \tau - \frac{1}{n}\mu$. Tällöin jokaisella τ_n on Lauseen 4.3 nojalla Hahnin hajotelma $X = X_n^+ \cup X_n^-$. Asetetaan $X_0^- := \bigcap_{n=1}^\infty X_n^-$. Hajotelman ja leikkausjoukon määritelmän nojalla $\tau_n(X_0^-) \leq 0$ eli $\tau(X_0^-) \leq \frac{1}{n}\mu(X_0^-)$ kaikilla $n \geq 1$, joten on oltava $\tau(X_0^-) = 0$. Koska oletettiin $\tau \neq 0$, on $\tau(X_n^+) > 0$ jollekin $n \geq 1$. Jokaiselle mitalliselle $E \subseteq X_n^+$ on jälleen hajotelman määritelmän nojalla $\tau_n(E) \geq 0$ eli $\frac{1}{n}\mu(E) \leq \tau(E)$.

Määritellään kuvaus $h(x) := f(x) + \frac{1}{n}\chi_{X_n^+}(x)$ ja olkoon $A \in \Gamma$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_A h \, d\mu &= \int_A f \, d\mu + \frac{1}{n}\int_A \chi_{X_n^+}(x) \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap X_n^+) \\
&\leq \int_A f \, d\mu + \tau(A \cap X_n^+) = \int_A f \, d\mu + \Big(\nu(A \cap X_n^+) - \int_{A \cap X_n^+} f \, d\mu\Big) \\
&= \int_{A \setminus X_n^+} f \, d\mu + \nu(A \cap X_n^+) \\
&\leq \nu(A \setminus X_n^+) + \nu(A \cap X_n^+) = \nu(A)
\end{aligned}$$

eli $h \in \mathcal{F}$. Kuitenkin $\mu(X_n^+) := a > 0$, joten

$$\int_A h \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \frac{1}{n} \int_A \chi_{X_n^+}(x) \, d\mu = M + \frac{a}{n} > M,$$

mikä on ristiriita, sillä funktion f piti olla kokoelman $\mathcal{F}$ integraalien maksimoiva alkio. Siten $\tau = 0$, joten $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$.

Olkoot nyt ν, μ σ-äärellisiä mittoja ja $\nu \ll \mu$. Tällöin löydetään pareittain pistevieraat kokoelmat $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ ja $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ missä $X = \bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ ja $\nu(A_i) < \infty, \mu(B_i) < \infty$ kaikille $i \geq 1$ Koska kokoelmat ovat numeroituvia, myös kokoelma $\{A_i \cap B_j\}_{i,j=1}^\infty := C_i$ on numeroituva ja toteuttaa ehdot $X = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$ sekä $\mu(C_i) < \infty, \nu(C_i) < \infty$. Asetetaan $\mu_i(A) := \mu(A \cap C_i), \nu_i(A) := \nu(A \cap C_i)$. Selvästi $\nu_i \ll \mu_i$ ja mitat ovat äärellisiä kaikille $i \geq 1$. Niinpä edellä osoitettu Radon-Nikodym -lauseen äärellismitallinen tulos antaa funktiot $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\nu_i(A) = \int_A f \, d\mu_i \text{ kaikille } A \in \Gamma.$$

Kun $A \in \Gamma$, saadaan

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A \cap C_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \nu_i(A) = \sum_{i=1}^\infty \int_A f_i \, d\mu_i &= \sum_{i=1}^\infty \int_{A \cap C_i} f_i \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_X \chi_{A\cap C_i} f_i \, d\mu.\end{aligned}$$

Lemman 1.36 kohdan (ii) nojalla

$$\sum_{i=1}^\infty \int_X \chi_{A\cap C_i} f_i \, d\mu \overset{1.36(ii)}{=} \int_X \sum_{i=1}^\infty \chi_{A\cap C_i} f_i \, d\mu = \int_A \sum_{i=1}^\infty \chi_{C_i} f_i \, d\mu$$

eli valitsemalla kuvaukseksi mitallinen $f := \sum_{i=1}^\infty \chi_{C_i} f_i$, saadaan $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$. $\square$

Huomautus 4.6. (i) σ-äärellisyydessä käytetään usein määritelmää ilman parillista pistevierautta. Pistevieraus on kuitekin yhtäpitävää alkuperäisen kanssa: pistevierauden poisto ei muuta muita ominaisuuksia ja toisaalta valitulle kokoelmalle $\{A_i\}_i$ voidaan asettaa joukot $B_1 := A_1$ ja $B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$, kun $i \geq 2$; nämä ovat pistevieraita, äärellismitallisia ja näiden yhdistejoukko on X.
(ii) Oletus äärellismitallisuudesta on oleellinen: valitaan $X = \{0\}, \nu(X) = \infty, \mu(X) = 1$, jolloin $\int_X f \, d\mu = f(0) < \infty$ kaikille kuvauksille, jotka on määritelty pisteessä $f(0)$.
(iii) Radon-Nikodym -lause on voimassa myös kompleksiluvuille $\mathbb{C}$, sillä $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ joillekin merkkimitoille ν_1, ν_2 ja näitä vastaaville kuvauksille f_1, f_2 on $f = f_1 + if_2$.

Siirrytään seuraavaksi yleisiin Banach-avaruuksiin. Nyt kysymys on, voidaanko rajoitettu vektorimitta ν esittää Bochner-integraalina mitan μ suhteen, jos vektorimitta on absoluuttisesti jatkuva kyseisen mitan suhteen. Tässä absoluuttinen jatkuvuus annettiin Määritelmässä 3.17 ja rajoittuneisuus ymmärretään vektorimitan rajoitettuna variaationa $|\nu|(X) < \infty$. Seuraava esimerkki kuitenkin osoittaa, että nämä ehdot eivät aina takaa olemassaoloa sopivalle kuvaukselle $f \colon X \to B$:

Esimerkki 4.7. (i) Olkoon mitta-avaruutena $([0,1],\Gamma,\mu)$, missä Γ on Lebesguen σ-algebra välillä $[0,1]$ ja μ Lebesguen mitan rajoittuma välille $[0,1]$. Jos $\nu\colon \Gamma \to L^1([0,1],\mathbb{R};\mu), \nu(A) := \chi_A$, niin Esimerkissä 3.6 todettiin, että $|\nu|(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$ eli ν on rajoitetusti varioituva. Erityisesti $\mu(A) = 0$ antaa $|\nu|(A) = 0$ eli myös $\nu \ll \mu$. Mitan kuvajoukon sulkeuma $\overline{\{\chi_A : A \in \Gamma\}}$ ei kuitenkaan ole kompakti: voidaan valita joukot

$$A_n := \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\Big),$$

missä $\mu(A_n) = \frac{1}{2}$. Merkitään vaiheen n väliä k $I_k^n := \Big[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\Big)$. Tällöin väli I_{2k-1}^{n+1} sisältyy vastaavaan väliin I_k^n jokaiselle $k \in \{1,...,2^{n-1}\}$ ja välit I_{2k}^{n+1} eivät leikkaa välejä I_k^n. Näin ollen saadaan

$$\big\|\chi_{A_n} - \chi_{A_{n+1}}\big\|_{L^1} = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{2k-1}^{n+1}\Big) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu(I_{2k-1}^{n+1}) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Joukoille A_n ja A_{n+2} saadaan vastaava: nyt välit $I_{4k-3}^{n+2}, I_{4k-2}^{n+2}$ sisältyvät väliin I_k^n jokaiselle $k \in \{1,...,2^{n-1}\}$ kun taas välit $I_{4k}^{n+2}, I_{4k-1}^{n+2}$ eivät leikkaa tätä väliä. Vastaavasti

$$\big\|\chi_{A_n} - \chi_{A_{n+2}}\big\|_{L^1} = \mu\Big(\bigcup_{l=4k-3}^{4k-2} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_l^{n+2}\Big) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu(I_{4k-3}^{n+2}) + \mu(I_{4k-2}^{n+2}) = 2^{n-1} \cdot \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}.$$

Jos $m > n$, saadaan välit $I_{k,N}^m := I^m_{\left(2^{m-n}k-N\right)}$, missä $N \in \{2^{(m-n-1)},...,2^{m-n}-1\}$ ja $k \in \{1,...,2^{n-1}\}$. Välit $I_{k,N}$ sisältyvät kaikilla N vastaavaan väliin I_k^n ja indekseille $N \in \{0,...,2^{m-n-1}-1\}$ on $I_k^n \cap I_{k,N}^m = \emptyset$. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\big\|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\big\|_{L^1} &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \bigcup_{N} I_{k,N}^m\Big) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{N} \mu(I_{k,N}^m) = 2^{n-1} \cdot \frac{2^{m-n} - 2^{m-n-1}}{2^m} \\ &= (2^{n-m-1}) \cdot (2^{m-n-1}) = (2^{n-m+m-n-2}) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Saadaan $\|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\|_{L^1} = \frac{1}{4}$ kaikille $n \neq m$. Siispä jonolla $\big(\nu(A_n)\big)_n$ ei ole suppenevaa osajonoa, eikä kuvajoukko siten ole suhteellisen kompakti. Jos oletetaan, että on Bochner-integroituva $f\colon [0,1] \to L^1([0,1])$, jolle $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$, niin f on Pettis-integroituva ja mitallinen. Lause 3.22 (ii) antaa tällöin ristiriidan.
(ii) Olkoon $([0,1],\Gamma,\mu)$ kuten kohdassa (i) ja $B = c_0$. Asetetaan

$$\nu_n(A) := \int_A \sin(2^n \pi x)\, dx$$

ja edelleen $\nu(A) := (\nu_n(A))_{n=1}^{\infty}$. Riemann-Lebesgue -lemma [7, s. 1028] antaa $\nu \in c_0$. Lisäksi kaikille $A \in \Gamma$ saadaan

$$\|\nu(A)\| \leq \sup_n \int_A |\sin(2^n \pi x)|\, dx \leq \mu(A),$$

joten ν on rajoitetusti varioituta $\mathbb{N}$-vektorimitta, jolle $\nu \ll \mu$.

Oletetaan, että on olemassa Bochner-integroituva $f\colon [0,1] \to c_0$ siten, että $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$. Merkitään $f = (f_1, f_2, ...)$. Koska n-koordinattikuvaus $f \mapsto (0, .., f, ...)$ on jatkuva lineaarikuvaus kaikille n, on jokainen f_n mitallinen ja saadaan yhtäsuuruus $\nu_n(A) = \int_A f_n\, d\mu$ eli $f_n(x) = \sin(2^n \pi x)$ m.k. $x \in [0,1]$.

Valitaan joukot $C_n := \{x \in [0,1] : f_n(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Koska $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ jos ja vain jos $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, saadaan $f_n(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ jos ja vain jos $\frac{1}{2^{n+2}} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3}{2^{n+2}} + 2\pi k$. Koska tapauksessa n kyseisen välin yli kuljetaan 2^{n-1} kertaa, saadaan $\mu(C_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}$ kaikille n. Edelleen $\mu(\limsup_n C_n) \geq \limsup_n \mu(C_n) \geq \frac{1}{4}$, joten $\mu(\{x \in [0,1]) : f(x) \in c_0\}) \leq \frac{3}{4}$, mikä on ristiriita. Siis sopivaa kuvausta f ei ole olemassa.

Edellä nähtiin, että avaruudet $L^1([0,1])$ ja c_0 ovat vastaesimerkkejä. Seuraava esimerkki näyttää kuitenkin tapauksen, jossa oletukset ovat riittävät:

Esimerkki 4.8. Merkitään $l^1 := l^1(\mathbb{N})$. Olkoot $\nu\colon \Gamma \to l^1$ rajoitetusti varioituva vektorimitta ja μ äärellinen mitta siten, että $\nu \ll \mu$. Voidaan merkitä $\nu(A) = \big(\nu_n(A)\big)_n$, missä $\nu_n\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ ovat merkkimittoja.

Nyt ν on rajoitetusti varioituva jos ja vain jos $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|(A)$ suppenee kaikilla $A \in \Gamma$: jos $|\nu|(A) < \infty$, niin $\sum_i \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n(A_i)| = \sum_i \|\nu(A_i)\| < \infty$ kaikille äärellisille erillisille kokoelmille A_i. Niinpä edellä summausjärjestystä voidaan vaihtaa, jolloin myös $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|(A) < \infty$. Vastaava toimii myös toiseen suuntaa, kun $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|(A) < \infty$, jolloin $|\nu|(A) < \infty$.

Edellisestä seuraa, että jokainen ν_n on rajoitetusti varioituva ja $\nu \ll \mu$ antaa $\nu_n \ll \mu$ kaikille n. Lauseesta 4.1 saadaan integroituvat $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, joille $\nu_n(A) = \int_A f_n\, d\mu$. Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n|(X) < \infty$, on $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ m.k. $x \in X$. Asetetaan $f\colon X \to l^1$, $f(x) := \big(f_n(x)\big)_n$. Koordinaattikuvaukset $f \to (0, ..., f, ...)$ ovat mitallisia, joten f on mitallinen tällaisten summana. Lause 2.16 antaa integroituvuuden, sillä integraalin ja summan järjestystä voidaan vaihtaa. Identtinen kuvaus $\mathrm{Id}_{(l^1)}$ on jatkuva lineaarikuvaus avaruudelta l^1 itselleen, joten Hillen lause 2.20 antaa

$$\nu(A) = \big(\nu_n(A)\big)_n = \Big(\int_A f_n\, d\mu\Big)_n = \int_A (f_n)\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

kaikille $A \in \Gamma$.

Tämän luvun päämääränä on esittää tuloksia, jotka takaavat Radon-Nikodym -lausetta vastaavan ominaisuuden olemassaolon koko Banach-avaruudessa, kuten edellä Esimerkin 4.8 tapauksessa $l^1(\mathbb{N})$. Esitetään seuraavaksi täsmällinen määritelmä:

Määritelmä 4.9. (Radon-Nikodym -ominaisuus) Olkoot (X, Γ) mitallinen avaruus, $\nu\colon \Gamma \to B$ rajoitetusti varioituva $\mathbb{N}$-vektorimitta, $\mu\colon \Gamma \to [0, \infty)$ äärellinen mitta ja $\nu \ll \mu$. Jos löytyy Bochner-integroituva $f\colon X \to B$ siten, että

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{kaikilla } A \in \Gamma, \tag{18}$$

on avaruudella B Radon-Nikodym -ominaisuus avaruuden (X, Γ) suhteen. Jos ehto on voimassa kaikille (X, Γ), on avaruudella B *Radon-Nikodym -ominaisuus*. Kuvausta f voidaan kutsua vektorimitan ν *Radon-Nikodym -derivaataksi* mitan μ suhteen.

Huomautus 4.10. Koska Radon-Nikodym -ominaisuudessa on mielivaltainen avaruus (X, Γ) sekä sen rajoitetusti varioituva vektorimitta ja äärellinen mitta, ominaisuus riippuu olennaisesti vain avaruudesta B. Näin ollen ominaisuudesta seuraa sekä topologisia, mutta myös geometrisiä tuloksia. Tämän luvun tulokset liittyvät pääosin topologisiin ominaisuuksiin, mutta Aliluvussa 4.3 nähdään myös geometrinen tulkinta konvekseihin joukkoihin liittyen.

- **Tästä eteenpäin termillä vektorimitta viitataan vain $\mathbb{N}$-vektorimittoihin.**

Ennen varsinaiseen teoriaan siirtymistä näytetään lemma, joka karakterisoi Radon-Nikodym -ominaisuuden vektorimitan variaation avulla.

Lemma 4.11. *Avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos jokaiselle rajoitetusti varioituvalle vektorimitalle $\nu\colon \Gamma \to B$ on esitys $\nu(A) = \int_A f \, d|\nu|$, missä $|\nu|$ on vektorimitan variaatio ja $f \in L^1(X, B; |\nu|)$.*

Todistus. Oletetaan, että avaruudella B on Radon-Nidodym -ominaisuus. Epäyhtälöstä $\|\nu(A)\| \leq |\nu|(A)$ nähdään, että $\nu \ll |\nu|$. Jos siis ν on rajoitetusti varioituva, niin $\nu(A) = \int_A f \, d|\nu|$ jollekin $f \in L^1(X, B; |\nu|)$.

Oletetaan sitten, että jokaiselle ν, jolle $|\nu|(X) < \infty$, on esitys $\nu(A) = \int_A f \, d|\nu|$ ja olkoon μ mitta, jolle $\nu \ll \mu$. Rajoitettu varioituvuus Lemman 3.7 kanssa antaa, että $|\nu|$ on äärellinen mitta ja edelleen vektorimitan ν esityksestä saadaan $|\nu| \ll \mu$. Radon-Nikodym -lause antaa kuvauksen $g \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, jolle $|\nu|(A) = \int_A g \, d\mu$. Edelleen saadaan

$$\nu(A) = \int_A f \, d|\nu| = \int_A fg \, d\mu.$$

Perustellaan edellinen yhtäsuuruus: karakteristisille kuvauksille saadaan

$$\int_A \chi_C \, d|\nu| = |\nu|(A \cap C) = \int_{A \cap C} g \, d\mu = \int_A \chi_C g \, d\mu$$

josta väite seuraa lineaarisuuden nojalla myös yksinkertaisille kuvauksille.

Yleinen tapaus on monimutkaisempi: jos $B = \mathbb{R}$ ja f ei-negatiivinen, löytyy μ-yksinkertaiset kuvaukset $s_n \to f$ μ-m.k., joille $s_n \leq s_{n+1}$. Koska μ ja $|\nu|$ ovat mittoja, on oltava $g \geq 0$ μ-m.k. $x \in X$. Nyt $s_n g$ on kasvava, $s_n g \to fg$ μ-m.k. ja monotonisella konvergenssilla saadaan

$$\int_A f \, d|\nu| = \lim_n \int_A s_n \, d|\nu| = \lim_n \int_A s_n g \, d\mu = \int_A fg \, d\mu, \tag{19}$$

josta nähdään, että haluttu kuvaus on $fg \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$.

Olkoon nyt B mielivaltainen Banach-avaruus. Lauseen 3.22 (iii) nojalla on $|\nu|(A) = \int_A \|f\| \, d|\nu|$ eli $\|f\| = 1$ $|\nu|$-m.k. joukossa X. Edellisen reaaliarvoisen tapauksen (19) nojalla $\int_A \|f\| \, d|\nu| = \int_A \|f\| g \, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$. Toisaalta $|\nu|(A) = \int_A g \, d\mu$, joten on $\int_A \|f\| g \, d\mu = \int_A g \, d\mu$ kaikille $A \in \Gamma$. Siis on oltava $\|f\| g = g$ μ-m.k. $x \in X$ ja saadaan $\|f\| = 1$ joukossa $X \setminus C$, missä $\mu(C) = 0$. Absoluuttinen jatkuvuus $|\nu| \ll \mu$ takaa, ettei ristiriitaa synny, jos argumentti toistetaan joukolle C: muuten voisi olla $\mu(C) = 0$, mutta $|\nu|(C) > 0$ ja $\int_C \|f\| \, d|\nu| > 0 = \int_A \|f\| \, d\mu$.

Nyt voidaan soveltaa dominoitua konvergenssia: Pettisin mitallisuuslauseen 2.4 todistuksen nojalla voidaan valita μ-yksinkertaiset $s_n \in S(X, B)$ siten, että $\|s_n\| \leq \|f\|$ ja $s_n \to f$ μ-m.k. $x \in X$. Niinpä $s_n g \to fg$ μ-m.k. joukossa X ja tulokuvaukselle on μ-m.k. voimassa $\|gs_n\| = |g|\|s_n\| \leq |g|\|f\| = |g| \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu)$, joten Lemman 2.17 (i) avulla (19) antaa jälleen yhtäsuuruuden. Tässäkin tapauksessa $fg \in L^1(X, B; \mu)$, joka on haluttu Radon-Nikodym -derivaatta. □

4.2 L^1-operaattorin Riesz-esitettävyys

Koska Radon-Nikodym -ominaisuudessa halutaan tutkia Bochner-integroituvan kuvauksen olemassaoloa, aloitetaan teoria tällaisiin kuvauksiin liittyvistä jatkuvista lineaarioperaattoreista.

• Jatkossa jatkuvaa lineaarioperaattoria $L\colon L^1(X, \mathbb{R}; \mu) \to B$ merkitään $\mathcal{T}_\mu$ tai $\mathcal{T}_\mu(B)$.

Määritelmä 4.12. Operaattori $\mathcal{T}_\mu$ on *Riesz-esitettävissä*, jos löytyy $g \in L^\infty(X, B; \mu)$ siten, että

$$\mathcal{T}_\mu(f) = \int_X fg \, d\mu \quad \text{kaikille } f \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu).$$

Jos $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_\mu$ on aina Riesz-esitettävissä Lemman 2.29 nojalla. Yleisessä tapauksessa osoittautuu, että tämä on täsmälleen yhtäpitävää Radon-Nikodym -ominaisuuden kanssa. Seuraavaan todistukseen käytetään apuna lähdettä [23, s. 115-116].

Lause 4.13. *Avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä jokaiselle mitalle μ.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä jokaiselle äärelliselle μ. Olkoon ν rajoitetusti varioituva. Koska $|\nu|$ on äärellinen mitta, voidaan määritellä operaattori $T\colon L^1(X, \mathbb{R}, |\nu|) \to B$ seuraavasti:

Olkoon $s \in S(X, B)$ yksinkertainen kuvaus ja $Ts = \int_A s \, d\nu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$. Tällöin

$$\|Ts\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|\nu(A_i)\| \leq \sum_{i=1}^n a_i |\nu|(A_i) = \int_X |s| \, d|\nu|$$

eli $\|T\| \leq |\nu|(X) < \infty$. Lauseesta 1.17 saadaan jatkekuvaus $\mathcal{T}_{|\nu|}\colon L^1(X, B; |\nu|) \to B$, koska $S(X, B)$ on tiheä avaruudessa $L^1(X, B; |\nu|)$ Lemman 2.24 nojalla. Erityisesti $\mathcal{T}_{|\nu|}(\chi_A) = \nu(A)$.

Nyt $\mathcal{T}_{|\nu|}$ on Riesz-esitettävissä oletuksen nojalla, joten $\mathcal{T}_{|\nu|}(f) = \int_X fg \, d|\nu|$ jollekin $g \in L^\infty(X, B; |\nu|)$. Jokaiselle $A \in \Gamma$ saadaan

$$\nu(A) = \mathcal{T}_{|\nu|}(\chi_A) = \int_X \chi_A g \, d|\nu| = \int_A g \, d|\nu|.$$

Lemmasta 4.11 seuraa, että avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus.

Oletetaan nyt, että avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus ja olkoon μ mitta. Tällöin $\nu(A) = \mathcal{T}_\mu(\chi_A)$ määrittää rajoitetusti varioituvan vektorimitan, jolle

$\nu \ll \mu$: tämä seuraa arviosta $|\nu|(A) \leq \|\mathcal{T}_\nu\|\mu(A)$. Radon-Nikodym -ominaisuus antaa kuvauksen $g \in L^1(X, B; \mu)$, jolle

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{jokaisella } A \in \Gamma.$$

Näytetään ensin, että $g \in L^\infty(X, B; \mu)$: koska g on mitallinen, $g(X \setminus C)$ on separoituva jollekin nollamittaiselle $C \in \Gamma$ Pettisin mitallisuuslauseen nojalla. Jatkamalla g nollakuvaukseksi voidaan olettaa, että B on separoituva. Olkoot $b_n^* \in B^*$ Lemman 1.21 antamat normitetut duaalit. Hillen lause antaa $b_n^* \nu(A) = b_n^*\Big(\int_A g \, d\mu\Big) = \int_A b_n^* g \, d\mu$, joten kaikille $n \geq 1$ ja $A \in \Gamma$ on Lauseen 3.22 (iii) nojalla voimassa

$$\int_A |b_n^*(g)| \, d\mu = |b_n^* \nu|(A) \leq \|\nu\|(A) \leq \|\mathcal{T}_\mu\|\mu(A).$$

Niinpä löytyy nollamittaiset $A_n \in \Gamma$ siten, että $|b_n^* g(x)| \leq \|\mathcal{T}_\mu\|\mu(X \setminus A_n)$ joukossa $X \setminus A_n$. Nyt $\bigcup_{i=1}^\infty A_n$ on nollamittainen ja $\|g(x)\| = \sup_n |b_n^*(g(x))|$, joten saadaan $\|g(x)\| \leq \|\mathcal{T}_\mu\|\mu(X)$ m.k. $x \in X$ eli $\|g\|_\infty \leq \|\mathcal{T}_\mu\|\mu(X)$.

Nyt Hölderin epäyhtälön nojalla $fg \in L^1(X, B; \mu)$ jokaiselle $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$, joten voidaan asettaa $T(f) := \int_X fg \, d\mu$ kaikille $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$. Koska $T = \mathcal{T}_\mu$ joukossa $S(X, B)$ ja $S(X, B)$ on tiheä avaruudessa L^1, approksimoimalla saadaan $\mathcal{T}_\mu(f) = \int_X fg \, d\mu$ kaikille $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$. Siten $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä.

□

Mainitaan myös Lauseen 4.13 seuraus, joka näyttää Esimerkissä 4.8 tutkitun $l^1(\mathbb{N})$-avaruuden keskeisen roolin Riesz-esitettävien operaattoreiden muodostumisessa. Todistus kuitenkin ohitetaan, sillä tulokselle ei ole jatkotulosten kannalta käyttöä.

Seuraus 4.14. *Operaattori $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä jos ja vain jos on olemassa operaattorit $S_\mu \colon L^1(X, \mathbb{R}) \to l^1(\mathbb{N})$ ja $T_\mu \colon l^1(\mathbb{N}) \to B$ siten, että $\mathcal{T}_\mu = T_\mu(S_\mu)$. Erityisesti avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos jokaista äärellistä mittaa vastaavalle operaattorille $\mathcal{T}_\mu$ löytyy edellä mainittu esitys.*

Todistus. [23, s. 116]. □

Lauseen 4.13 sovelluksena voidaan näyttää, että Radon-Nikodym -ominaisuuden olemassaoloon riittää tutkia sen separoituvia suljettuja aliavaruuksia:

Lause 4.15. (i) *Jos avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus, on sen jokaisella suljetulla aliavaruudella $E \subseteq B$ Radon-Nikodym -ominaisuus.*
(ii) *Jos jokaisella suljetulla separoituvalla aliavaruudella $E \subseteq B$ on Radon-Nikodym -ominaisuus, on avaruudella B Radon-Nikodym- ominaisuus.*

Ennen lauseen todistusta osoitetaan hyödyllinen lemma Riesz-esitettävien operaattoreiden kuvajoukkojen suhteellisesta kompaktisuudesta:

Lemma 4.16. (i) *Jos $f \in L^1(X, B; \mu)$, niin joukko $\{\int_A f \, d\mu : A \in \Gamma\}$ on suhteellisen kompakti.*
(ii) *Jos $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä ja $\mu(X) < \infty$, on joukko $\{\mathcal{T}_\mu(\chi_A) : A \in \Gamma\} \subseteq B$ suhteellisen kompakti.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Asetetaan yksinkertainen kuvaus $s := \sum_{i=1}^n b_i \chi_{A_i}$, $n \geq 1$, jolle $\|f - s\|_1 < \varepsilon$. Määritellään $K_\varepsilon := \big\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i \|b_i\| \leq \|f\|_1 + \varepsilon \big\}$. Koska n on kiinnitetty, määritellään äärellisulotteinen aliavaruus $E := (\mathrm{span}\{b_1, ..., b_n\}, \|\cdot\|_E)$, missä $\|\cdot\|_E$ on avaruuden B indusoitu normi aliavaruuteen E. Tällöin $K_\varepsilon \subseteq \overline{B}_{(E)}(0, r)$, missä $\overline{B}_{(E)}(0, r)$ on avaruuden E suljettu pallo säteellä $r = \|f\|_1 + \varepsilon$. Tällöin K_ε on kompakti äärellisulotteisen avaruuden kompaktin joukon suljettuna osajoukkona. Integraalille saadaan

$$\int_A f \, d\mu = \int_A s \, d\mu + \int_A (f - s) \, d\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(A \cap A_i) + \int_A (f - s) \, d\mu \in K_\varepsilon + \overline{B}_{(B)}(0, \varepsilon),$$

missä joukkojen summaus määritellään $A + A' := \{a + a' : a \in A, a' \in A'\}$. Kun $\varepsilon \to 0$, saadaan $\{\int_A f \, d\mu : A \in \Gamma\} \subseteq K_\varepsilon + \{0\}$, missä jälkimmäinen joukko on täysin rajoitettu. Väite seuraa, sillä Banach-avaruuden täysin rajoitetut joukot ovat Lemman 1.23 nojalla suhteellisen kompakteja.
(ii) Jos $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä, saadaan kuvaus $g \in L^\infty(X, B; \mu)$, jolle $\mathcal{T}_\mu(\chi_A) = \int_A g \, d\mu$. Äärellismitallisuudesta seuraa $L^\infty(X, B; \mu) \subseteq L^1(X, B; \mu)$ (inkluusio saadaan Hölderin epäyhtälöstä vastaavasti kuten tapauksessa $B = \mathbb{R}$), joten kohta (i) antaa suhteellisen kompaktisuuden. $\square$

Lauseen 4.15 todistus. (i) Olkoon $E \subseteq B$ suljettu aliavaruus. Vektorialiavaruus on aina konveksi ja Banach-avaruuden suljettuna aliavaruutena myös Banach-avaruus. Olkoon nyt $\nu \colon \Gamma \to E$ rajoitetusti varioituva vektorimitta ja μ mitta, jolle $\nu \ll \mu$. Koska ν on myös avaruuden B vektorimitta, on oletuksen nojalla kuvaus $f \in L^1(X, B; \mu)$, jolle

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \text{ kaikilla } A \in \Gamma. \tag{20}$$

Niinpä $\int_A f \, d\mu \in E$ ja koska E on vektoriavaruus, $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in E$ kaikille $A \in \Gamma, \mu(A) > 0$. Seurauksen 2.22 (2) nojalla $f(x) \in E$ m.k. $x \in X$, joten $f \in L^1(X, E; \mu)$. Nyt yhtäsuuruus (20) on edelleen voimassa, joten myös aliavaruudella E on Radon-Nikodym -ominaisuus.

(ii) Olkoon $(A_n) \subseteq \Gamma$ ja $\mathcal{E} \subseteq \Gamma$ pienin σ-algebra, joka sisältää joukot A_n. Koska $\mathcal{E}$ tuotetaan numeroituvasta kokoelmasta (A_n), on $L^1_{\mathcal{E}} := L^1\big((X, \mathcal{E}), \mathbb{R}; \mu\big)$ separoituva; katso esimerkiksi [8, s. 102].

Olkoon $\mathcal{T}_\mu$ mielivaltainen. Jos T on operaattorin $\mathcal{T}_\mu$ rajoittuma avaruuteen $L^1_{\mathcal{E}}$, on jatkuvuuden nojalla $\overline{T(L^1_{\mathcal{E}})}$ myös separoituva ja edelleen suljettu aliavaruus Banach-avaruudelle B, siis Banach-avaruus. Oletuksen nojalla avaruudella $\overline{T(L^1_{\mathcal{E}})}$ on Radon-Nikodym -ominaisuus eli Lauseesta 4.13 seuraa operaattorin T Riesz-esitettävyys. Nyt Lemma 4.16 (ii) antaa joukon $\{T(\chi_A) : A \in \mathcal{E}\} = \{\mathcal{T}_\mu(\chi_A) : A \in \mathcal{E}\}$ suhteellisen kompaktisuuden. Siten jokaiselle jonolle $\mathcal{T}_\mu(\chi_{A_n})$ on suppeneneva osajono, mistä seuraa myös joukon $\{\mathcal{T}_\mu(\chi_A) : A \in \Gamma\}$ suhteellinen kompaktisuus. Lineaarisuuden nojalla tämä voidaan laajentaa yksinkertaisille kuvauksille ja edelleen Lemmasta 2.24 kaikille $f \in L^1(X, B; \mu)$. Kuvajoukko $\mathcal{T}_\mu(L^1(X, B; \mu))$ on siis suhteellisen kompakti ja koska kompaktit joukot ovat täysin rajoitettuja Lemman 1.23 nojalla, on sulkeuma Lemman

1.22 nojalla separoituva. Nyt $\overline{\mathcal{T}_\mu(L^1(X,B;\mu))}$ on separoituva sekä suljettuna aliavaruutena Banach-avaruus ja oletuksesta seuraa, että $\mathcal{T}_\mu\colon L^1(X,B;\mu) \to \overline{\mathcal{T}_\mu(L^1(X,B;\mu))}$ on Riesz-esitetttävissä. Mutta tämä tarkoittaa, että $\mathcal{T}_\mu$ on Riesz-esitettävissä avaruudelle B, joten Lause 4.13 antaa Radon-Nikodym -ominaisuuden. □

Sanotaan, että B on *separoituva duaaliavaruus*, jos B on separoituva ja on Banach-avaruus M, jolle $M^* = B$. Osoitetaan seuraavaksi, että jos B on separoituva, myös M on separoituva. Todistukseen tarvitaan aputulos, joka esitetään kohtana (i); Seuraus 1.16 saadaan tämän erikoistapauksena $E = \{0\}$.

Lemma 4.17. (i) *Jos $E \subset B$ on aito suljettu aliavaruus ja $x \in B \setminus E$, löytyy $b^* \in B^*$, jolle $b^*|_E = 0, \|b^*\|_{B^*} = 1$ ja $b^*(x) = d$, missä $d = \inf_{x' \in E} \|x - x'\|$.*
(ii) *Jos B^* on separoituva, myös B on separoituva.*

Todistus. Lähteinä kohtiin (i) ja (ii) toimivat vastaavasti [12, s. 159] ja [14, s. 522].
(i) Olkoot $x \in B \setminus E$ ja $d = \inf_{x' \in E} \|x - x'\|$. Määritellään kuvaus

$$f\colon E + \mathbb{K}x, f(y + ax) := ad, y \in E, a \in \mathbb{K}.$$

Koska aliavaruus M on suljettu, on $d > 0$. Tällöin $f(x) = d$ ja $f|_E = 0$. Jos $a \neq 0$, saadaan $|f(y + ax)| = |a|d \leq |a|\|\frac{y}{a} + x\| = \|y + ax\|$. Hahn-Banach -lausetta 1.14 voidaan soveltaa normiin $p(x) = \|x\|$ ja saadaan jatkekuvaus $F\colon B \to \mathbb{K}$, jolle edelleen $F(x) = d$ ja $F|_E = 0$. Kuvaus F on jatkuva normin jatkuvuuden ja monotonisuuden $|F(x)| \leq p(x)$ nojalla. Vastaava epäyhtälö antaa $\|F\|_{B^*} \leq \|f\|_{B^*}$ ja jatkekuvaukselle on aina $\|F\|_{B^*} \geq \|f\|_{B^*}$, joten $\|F\|_{B^*} = \|f\|_{B^*}$. Koska vektori y ei vaikuta kuvauksen f arvoon, voidaan normi maksimoida suljetussa yksikköpallossa alkioilla ax. Mutta tällöin selvästi $\|f\|_{B^*} = 1$, joten $F \in B^*$ on haluttu jatkuva lineaarikuvaus.
(ii) Valitaan separoituvuuden nojalla jono $(b_n^*) \subseteq B^*$, jolle $\|b_n^*\|_{B^*} = 1$ kaikilla $n \geq 1$ ja joka on tiheä yksikköpallon reunalla eli joukossa $\{b^* \in B^* : \|b^*\|_{B^*} = 1\}$. Duaalinormin määritelmän nojalla löytyy $(b_n) =: D \subseteq B$, joille $\|b_n\| = 1$ ja $|b_n^*(b_n)| \geq \frac{1}{2}$. Lineaarikombinaatioiden joukko $\mathcal{L} := \Big\{ \sum_{n=1}^m q_n b_n : m \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}, b_n \in D \Big\}$ on tiheä avaruudessa B: jos näin ei ole, on $\overline{\mathcal{L}}$ aito suljettu aliavaruus. Kohdan (i) nojalla voidaan valita $y^* \in B^*$, jolle $\|y^*\|_{B^*} = 1$ ja $y^*(b_n) = 0$ kaikille $n \geq 1$. Koska (b_n^*) on tiheä yksikköpallon reunalla, voidaan valita $N \geq 1$, jolle $\|b_N^* - y^*\|_{B^*} < \frac{1}{2}$. Tämä antaa ristiriidan, sillä

$$\frac{1}{2} \leq |b_N^*(b_N)| = |b_N^*(b_N) - y^*(b_N)| = |(b_N^* - y^*)(b_N)| \leq \|b_N^* - y^*\|_{B^*}\|b_N\| < \frac{1}{2}.$$

Siten $\overline{\mathcal{L}} = B$. Lisäksi $\mathcal{L}$ on numeroituva, sillä

$$\mathcal{L} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{(b_n)_{n=1}^m \subset D} \bigcup_{(q_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{Q}} \Big\{ \sum_{n=1}^m q_n b_n \Big\}.$$

□

Näytetään lopuksi L^1-operaattorien osalta lähteeseen [14, s. 53-54] perustuva lause, jonka avulla saadaan konkreettisia esimerkkejä Radon-Nikodym -ominaisuuden omaavista topologisista avaruuksista.

Lause 4.18. *Seuraavilla avaruuksilla on Radon-Nikodym -ominaisuus:*
(1) *Separoituvat duaaliavaruudet.*
(2) *Refleksiiviset avaruudet.*

Todistus. (1) Olkoon B separoituva ja M Banach-avaruus, jolle $M^* = B$. Jos operaattori $T\colon L^1(X, \mathbb{R}; \mu) \to M^*$ on lineaarinen, voidaan jokaiselle $m \in M$ asettaa edelleen lineaarioperaattori

$$T_m\colon L^1(X, \mathbb{R}; \mu) \to \mathbb{R}, T_m(f) := T(f)(m).$$

T_m on rajoitettu, sillä $\|T_m\|_{(L^1)^*} \leq \|T\|_{M^*}\|m\|$. Koska $L^1(X, \mathbb{R})^* = L^\infty(X, \mathbb{R})$, löytyy yksikäsitteinen $g_m \in L^\infty(X, \mathbb{R}; \mu)$, jolle

$$T_m(f) = \int_X f g_m \, d\mu \quad \text{kaikille } f \in L^1(X, \mathbb{R}; \mu) \quad \text{ja} \quad \|g_m\|_\infty \leq \|T\|_{M^*}\|m\|. \qquad (21)$$

Lemman 4.17 nojalla avaruus M on separoituva, joten voidaan valita tiheä jono $(m_i) \subseteq M$. Olkoon $m \in \mathcal{M} := \{\sum_{i=1}^N q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q}, m_i \in (m_N)_{N \in \mathbb{N}}\}$. Jokaisella f saadaan lineaarikuvaus muuttujan m suhteen, joten

$$T_m(f) = T(f)(\sum_{i=1}^N q_i m_i) = \sum_{i=1}^N q_i T_{m_i}(f) = \int_X \sum_{i=1}^N q_i g_{m_i} \, d\mu. \qquad (22)$$

Yhtälöitä (21) ja (22) vertaamalla saadaan $g_m(x) = \sum_{i=1}^N q_i g_{m_i}(x)$ m.k. $x \in X$. Koska $\mathcal{M}$ on numeroituva (sillä $(m_i)_i$ on numeroituva), löytyy nollamittainen $A \subseteq X$ siten, että $g_m(x) = \sum_{i=1}^N q_i g_{m_i}(x)$ kaikille $x \in X \setminus A$ ja $m \in \mathcal{M}$. Nyt kuvaus $g(x)\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ voidaan jatkaa Hahn-Banach -lauseella lineaariseksi jatkuvaksi kuvaukseksi koko avaruuteen M m.k. $x \in X$, toisin sanoen saadaan kuvaukset $m \mapsto g_m(x) \in M^*$ m.k. $x \in X$. Yhtälön (21) nojalla kuvauksen $g(x)$ normille on arvio $\|g(x)\|_{M^*} \leq \|T\|_{M^*}$ eli $g(x)$ on rajoitettu m.k. $x \in X$.

Näytetään seuraavaksi mitallisuus: olkoon $x \in X \setminus A$. Selvästi $\mathcal{M}$ on tiheä avaruudessa M, joten itseasiassa kuvaus $g(x)$ on muotoa $g_m(x) = \sum_{i=1}^\infty q_i g_{m_i}(x)$ kaikille $m \in M$. Tästä seuraa, että $g(x)$ on raja-arvo yksinkertaisista kuvauksista, siis mitallinen. Koska tämä on voimassa melkein kaikille x, on $x \mapsto g(x)$ heikko*-mitallinen eli duaaliavaruudessa heikosti mitallinen. Mutta M^* on separoituva, joten tämä on Pettisin mitallisuuslauseen nojalla yhtäpitävää mitallisuuden kanssa. Siis $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{M^*}$, joten $g \in L^\infty(X, M^*; \mu)$. Nyt T on Riesz-esitettävissä kuvauksen g suhteen, sillä jokaiselle $m \in M$ on

$$T_m(f) = \int_X f(x) g_m(x) \, d\mu(x).$$

Lauseesta 4.13 seuraa, että avaruudella M^* on Radon-Nikodym -ominaisuus.

(2) Olkoon B on refleksiivinen ja $E \subseteq B$ suljettu separoituva aliavaruus. Näytetään ensin, että E on refleksiivinen: jos $x^{**} \in E^{**}$, määritellään kuvaus $F \in B^{**}$ siten,

että $F(b^*) = x^{**}(b^*|_E)$; tämä on hyvin määritelty jatkuva lineaarikuvaus. Avaruuden B refleksiivisyys antaa vektorin $b \in B$, jolle $\mathcal{K}_B(b) = F$. Jos $b \notin E$, niin E on aito aliavaruus ja oletuksen nojalla suljettu. Lemma 4.17 (i) antaa kuvauksen $g \in B^*$ siten, että $g(b) = 1$ ja $g \equiv 0$ avaruudessa E. Tästä seuraa ristiriita, sillä $0 = x^{**}(0) = x^{**}(g|_E) = F(g) = \mathcal{K}_B(b)(g) = g(b) = 1$. Siis $b \in E$.

Vielä tulee näyttää $\mathcal{K}_E(b) = x^{**}$. Olkoon $e^* \in E^*$ ja $b^* \in B^*$ kuvauksen e^* Hahn-Banach -lauseen jatkokuvaus. Tällöin saadaan

$$\mathcal{K}_E(b)(e^*) = e^*(b) = b^*(b) = \mathcal{K}_B(b)(b^*) = F(b^*) = x^{**}(b^*|_E) = b^{**}(e^*).$$

Palataan varsinaiseen todistukseen: E on refleksiivinen eli $E = (E^*)^*$. Siten E on separoituva duaaliavaruus, joten kohta (1) antaa Radon-Nikodym -ominaisuuden eli jokaisella suljetulla separoituvalla aliavaruudella on tämä ominaisuus. Väite seuraa Lauseesta 4.15. □

Kootaan seuraavaan esimerkkiin tyypillisiä refleksiivisiä avaruuksia, joilla on Lauseen 4.18 nojalla Radon-Nikodym -ominaisuus.

Esimerkki 4.19. (i) Olkoon B äärellisulotteinen. Dimensiolauseen nojalla saadaan $\dim(Im(\mathcal{K}_B)) + \dim(Ker(\mathcal{K}_B)) = \dim(B)$. Koska $\mathcal{K}_B$ on injektio ja $\dim(B) = \dim(B^*) = \dim(B^{**})$, on $\dim(Im(\mathcal{K}_B)) = \dim(B^{**})$. Siis $Im(\mathcal{K}_B) = B^{**}$, sillä äärellinen aliavaruus, jolla on sama ulottuvuus, on oltava avaruus itse. Siten $\mathcal{K}_B$ on surjektio eli B on refleksiivinen.
(ii) $L^p(X, \mathbb{R}; \mu)$-avaruudet, $1 < p < \infty$ ovat refleksiivisiä (Lemma 2.29).
(iii) Jos B on Hilbert-avaruus, dualille $f \in B^*$ saadaan Rieszin esityslauseesta 1.19 yksikäsitteinen $b_f \in B$, jolle $f(b) = \langle b, b_f \rangle_B$. Voidaan määritellä sisätulo avaruuteen B^* muodossa $\langle f, g \rangle_{B^*} := \langle b_f, b_g \rangle_B$. Lisäksi duaali on aina täydellinen, joten B^* on Hilbert-avaruus.

Jos nyt $F \in B^{**}$, niin Rieszin esityslause antaa yksikäsitteisen $f_F \in B^*$, jolle $F(f) = \langle f, f_F \rangle_{B^*}$ kaikilla $f \in B^*$. Lisäksi jokaiselle duaalille saadaan aiempi esitys. Tällöin kanoninen upotus on surjektio, sillä

$$\mathcal{K}_B(b_{f_F})(f) = f(b_{f_F}) = \langle b_{f_F}, b_f \rangle_B = \langle f_F, f \rangle_{B^*} = \langle f, f_F \rangle_{B^*} = F(f).$$

Huomautus 4.20. Yleisissä L^p-avaruuksissa Radon-Nikodym -ominaisuus avaruudessa B on yhtäpitävää seuraavien tulosten kanssa:
(1) $L^p(X, B; \mu) = L^q(X, B^*; \mu)$, kun $1 \leq p < \infty$ ja $q = \frac{p}{p-1}$.
(2) Avaruudella $L^p(X, B), 1 < p < \infty$, on Radon-Nikodym -ominaisuus.
Edelleen $L^p(X, B; \mu)$ on refleksiivinen jos ja vain jos molemmat B ja $L^p(X, \mathbb{R}; \mu)$ ovat refleksiivisiä. Toisin sanoen, $L^p(X, B; \mu)$ refleksiivinen jos ja vain jos B on refleksiivinen ja $1 < p < \infty$.

Todistukset ovat melko raskaita: esimerkiksi tyypilliset todistukset kohtaan (2) käyttävät joko stokastisia menetelmiä, kuten martingaaleja ([10, s. 140-141]) tai operaattoriteoriaa sekä L^p-avaruuden ehdottomia kantoja ([24]). L^p-avaruuksien aihealueisiin ei tutustuta enempää, joten todistukset ohitetaan. Muista mainituista ominaisuuksista voi katsoa tarkemmin [10, s. 98-100].

4.3 Lommoontuvat joukot

Tutustutaan rajoitettujen joukkojen konveksisuuteen, jonka avulla voidaan havainnollistaa Radon-Nikodym -ominaisuutta geometrisena ominaisuutena. Keskeisenä käsitteenä on joukon lommoontuvuus (dentability).

Määritelmä 4.21. (i) Joukko A on *konveksi*, jos $tx + (1-t)y \in A$ kaikille $x, y \in A$ ja $t \in [0, 1]$.
(ii) Pisteitä x ja y yhdistävää janaa merkitään $J[x, y]$; toisin sanoen A on konveksi, jos $J[x, y] \subseteq A$ kaikille $x, y \in A$. Lisäksi merkitään $J(x, y)$, jos kumpikaan päätepisteistä ei kuulu janalle ja $J[x, y)$, jos vain päätepiste x kuuluu janalle.

Esitetään seuraavaksi luvun keskeiset määritelmät.

Määritelmä 4.22. (Lommoontuvat joukot)
(1) $co(A) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ joille } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}$ on joukon A *konveksi verho* ja $\sigma(A) := \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ joille } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1 \Big\}$ *σ-konveksi verho.*
(2) Jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $x \in A$ siten, että
 (i) $x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$, on A *lommoontuva*;
 (ii) $x \notin \sigma\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$, on A *σ-lommoontuva.*
 Tässä $\overline{co}$ viittaa joukon sulkeumaan ja $\overline{B}$ suljettuun palloon.

Esimerkki 4.23. [10, s. 135]: Suljettu yksikköpallo $\overline{B}(0, 1)$ avaruudessa $L^\infty([0, 1])$ on σ-lommoontuva, mutta ei lommoontuva: merkitään $B^\infty := \overline{B}(0, 1)$. Olkoon kuvaukselle $h := \chi_{[0,1]}$ esitys $h = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i$, missä $\|h_i\|_\infty \leq 1$, $0 \leq a_i \leq 1$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Tällöin on oltava $h_i = h$ m.k. $x \in [0, 1]$ jokaiselle $i \geq 1$ eli selvästi $h \notin \sigma\big(A \setminus \overline{B}(h, \varepsilon)\big)$ kaikille $\varepsilon > 0$. Niinpä B^∞ on σ-lommoontuva.

Näytetään seuraavaksi, ettei B^∞ ole lommoontuva. Olkoon $f \in B^\infty$ ja $\varepsilon > 0$. Jaetaan todistus kahteen osaan:
•$\|f\|_\infty > \varepsilon$: jokaiselle luvulle $k \geq 1$ voidaan valita pareittain pistevieraat $\{A_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \Gamma$ siten, että $\|f\chi_{A_i}\|_\infty > \varepsilon$. Asetaan nyt $f_i := f - f\chi_{A_i}$, jolloin $\|f - f_i\|_\infty = \|f\chi_{A_i}\|_\infty > \varepsilon$ ja $\|f - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} f_i\|_\infty \leq \frac{1}{k}\|f\|_\infty$. Näistä seuraa, että kuvaukset f_i eivät sisälly suljettuun palloon $\overline{B}(f, \varepsilon)$, mutta näiden konvekseilla kombinaatioilla voidaan approksimoida kuvausta f. Kun $\varepsilon \in (0, 1)$, myös $\overline{B}(f, \varepsilon) \cap B^\infty \neq \emptyset$, jolloin $f \in \overline{co}\big(B^\infty \setminus \overline{B}(f, \varepsilon)\big)$.
•$\|f\|_\infty \leq \varepsilon < \frac{1}{3}$: saadaan $\|f \pm 2\varepsilon\chi_{[0,1]} - f\|_\infty = 2\varepsilon$. Asetetaan kuvaukset $f_1 := f + 2\varepsilon\chi_{[0,1]}, f_2 := f - 2\varepsilon\chi_{[0,1]}$, jolloin $\|f_i\|_\infty < 3\varepsilon < 1, i = 1, 2$. Niinpä $f_1, f_2 \in B^\infty \setminus \overline{B}(f, \varepsilon)$ ja $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$, joten $f \in co\big(B^\infty \setminus \overline{B}(f, \varepsilon)\big)$. Koska $f \in B^\infty$ ja B^∞ on suljettu, saadaan edelleen $f \in \overline{co}\big(B^\infty \setminus \overline{B}(f, \varepsilon)\big)$.

Molemmissa tapauksissa löydettiin ε, jolle ehto ei päde. Siis B^∞ ei ole lommoontuva.

Seuraavaa lemma sisältää Lauseen 4.25 todistukseen tarvittavia aputuloksia.

Lemma 4.24. (i) *Jos $\overline{co}(A)$ on lommoontuva, on myös A lommoontuva.*
(ii) *A ei ole lommoontuva jos ja vain jos on $\varepsilon > 0$ siten, että $A \subseteq \overline{co}\big(A \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}\big)$ jokaiselle $x \in A$. Suljetulle ja konveksille A on $A = \overline{co}\big(A \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}\big)$ kaikille $x \in A$.*
(iii) *Jos A on konveksi, niin $int(A) = int(\overline{A})$; tässä $int(A)$ on joukon A sisäpisteiden joukko.*

Todistus. Käytetään apuna tuloksia [21, s. 72, Proposition 2] ja [9, s. 119, Lemma 1].

(i) Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $c \in \overline{co}(A)$ siten, että $c \notin E := \overline{co}\big(\overline{co}(A) \setminus \overline{B}(c, \frac{\varepsilon}{2})\big)$. Siten $c \in \overline{co}(A) \setminus E$ ja koska E on suljettu ja konveksi, E ei voi sisältää koko joukkoa A eli $A \setminus E \neq \emptyset$. Olkoon nyt $a \in A \setminus E$, jolloin $a \in \overline{B}(c, \frac{\varepsilon}{2})$. Niinpä poistamalla joukosta A pallo $\overline{B}(a, \varepsilon)$ saadaan erotusjoukosta joukon E osajoukko; siis $A \setminus \overline{B}(a, \varepsilon) \subseteq E$. Erityisesti $a \notin \overline{co}(A \setminus \overline{B}(a, \varepsilon))$. Koska $a \in A$, seuraa väite.

(ii) Jos A ei ole lommoontuva, voidaan valita $2\varepsilon > 0$ siten, että jokaiselle $y \in A$ on $y \in \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(y, 2\varepsilon)\big)$. Jos $x \in A$, jolle $\|x-y\| > \varepsilon$, saadaan $y \in \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$. Jos taas $\|x-y\| \leq \varepsilon$, on $\overline{B}(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B}(y, 2\varepsilon)$ ja $y \in \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(y, 2\varepsilon)\big) \subseteq \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$. Toiseen suuntaan tulos on selvä. Jos A ei ole lommoontuva ja on suljettu sekä konveksi, saadaan $A = \overline{co}(A) \supseteq \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$, joten $A = \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)\big)$.

(iii) Merkitään $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$, missä ∂A on reunajoukko. Olkoot $a \in \mathrm{int}(A), a' \in \partial A$. Näytetään, että jokaiselle $t > 1$ on $a + t(a' - a) \notin \overline{A}$: jos tämä on totta, niin saadaan $\|a + t(a' - a) - a'\| = |t - 1|\|a' - a\|$ eli erityisesti $\|a + t(a' - a) - a'\| = \|a' - a\|$, kun $t = 2$. Mutta nyt jokainen avoin pallo sisältää sisäpisteen, joten tästä seuraa $a + t(a' - a) \in B(a', r) \notin \overline{A}$ kaikille $r > 0$ eli $\mathrm{int}(\overline{A})$ ei sisällä joukon ∂A pisteitä. Niinpä $\mathrm{int}(\overline{A}) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \cup \partial A) = \mathrm{int}(A)$.
Osoitetaan nyt käytetty tulos: tehdään vastaoletus eli löydetään $t > 1$, jolle $x = a + t(a - a') \in \overline{A}$. Koska $a' \in J(a, x)$, löytyy $t_{a'} \in (0, 1)$ siten, että $a' = t_{a'}a + (1 - t_{a'})x$. Niinpä $x \in \overline{A}$ eli on jono $(x_i) \subseteq A$, jolle $x_i \to x$. Sisäpisteen määritelmästä saadaan $B := B(a, r) \subseteq \mathrm{int}(A)$ jollekin $r > 0$. Asetetaan pallot $B_i := t_{a'}B + (1 - t_{a'})x_i \subseteq \mathrm{int}(A)$ kaikille $i \geq 1$; näiden keskipisteet ja säteet ovat vastaavasti muotoa $t_{a'}a + (1 - t_{a'})x_i$ ja $t_{a'}r$. Koska

$$\begin{aligned}\|a' - (t_{a'}a - (1 - t_{a'})x_i)\| &= \|t_{a'}a + (1 - t_{a'})x - (t_{a'}a - (1 - t_{a'})x_i)\| \\ &= |1 - t_{a'}|\|x - x_i\| < t_{a'}r,\end{aligned}$$

saadaan riittävän suurelle i voimaan $a' \in \mathrm{int}(A)$. Tämä on ristiriita, sillä a' on reunapiste ja $\mathrm{int}(A) \cap \partial A = \emptyset$.

□

Siirrytään luvun päätulokseen, joka samaistaa Radon-Nikodym -ominaisuuden ja avaruuden rajoitetut lommoontuvat joukot.

Lause 4.25. *Olkoon $A \neq \emptyset$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
(1) *Avaruudella B on Radon-Nikodym ominaisuus.*
(2) *jokainen rajoitettu joukko A on lommoontuva.*
(3) *jokainen rajoitettu joukko A on σ-lommoontuva.*

Huomautus 4.26. Seuraavan todistuksen Radon-Nikodym -ominaisuuteen liittyyvä yhtäsuuruus (1) $\Leftrightarrow$ (3) ohitetaan, sillä todistukset
(i) hyödyntävät useita tuloksia, joita ei ole aiemmin esitetty ja joiden todistukset vievät huomioita varsinaisesta tuloksesta, ja

(ii) painottuvat konstruktio-argumentteihin, jotka ovat vahvasti topologisiin ja mittateoreettisiin menetelmiin pohjautuvia, ohittaen geometrisen näkökulman, jota tämä aliluku käsittelee.

Todistus sen sijaan keskityy siihen, että Radon-Nikodym -ominaisuus samaistaa kaikki lommoontuvat ja σ-lommoontuvat joukot rajoitetuissa avaruuksissa B. Osoitetaan siis vain yhtäsuuruus kohtien (2) ja (3) välille.

Lauseen 4.25 todistus. Edeltävän Huomautuksen 4.26 johdosta kohtien (1) ja (3) todistus ohitetaan. Selitetään kuitenkin idea lyhyesti:
(1) $\to$ (3): tehdään vastaoletus ja konstruoidaan sopiva vektorimitta ν, joka ei toteuta Radon-Nikodym -ominaisuutta; tämä on vahvasti (vektori)mittateoriaa käyttävä argumentti; katso [16, Theorem 3.1].
(3) $\to$ (1): Jos ν on rajoitetusti varioituva vektorimitta ja μ äärellinen mitta siten, että $\nu \ll \mu$, joukot $E_\nu(C) := \left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)} : A \subseteq C, A \in \Gamma, \mu(A) > 0\right\}, C \in \Gamma$, ovat rajoitettuja eli oletuksen nojalla σ-lommoontuvia. Myöhemmin esitettävässä Lauseessa 4.31 joukkoja $E_\nu(\varepsilon)$ koskeva ehto voidaan korvata joukkojen $E_\nu(C)$ σ-lommoontuvuudella (Huomautus 4.32). Tämä antaa Radon-Nikodym -ominaisuuden. Yksityiskohtia varten katso [21, Theorem 2.2.].

Näytetään nyt yhtäsuuruus kohtien (2) ja (3) välille seuraten todistusta [9]. Suunta (2) $\to$ (3) seuraa määritelmästä ja (3) $\to$ (2) saadaan näyttämällä seuraavat tulokset:

(a) Olkoon A on suljettu konveksi joukko, jonka sisäpisteiden joukolle on $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ ja A ei ole lommoontuva. Tällöin löytyy $\varepsilon > 0$, jolle jokaisella $x \in A$ on $\mathrm{int}(A) \subseteq co\big(\mathrm{int}(A) \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)\big)$; erityisesti $\mathrm{int}(A)$ ei ole σ-lommoontuva.

(b) Jos B sisältää rajoitetun epätyhjän joukon A, joka ei ole lommoontuva, niin se sisältää joukon C, joka on suljettu, rajoitettu, konveksi, symmetrinen ($c \in C$ jos ja vain jos $-c \in C$), $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ ja joka ei ole lommoontuva.

Jos nimittäin (a) ja (b) ovat totta, tekemällä vastaoletus saadaan, että B sisältää rajoitetun ei-lommoontuvan joukon. Kohdan (b) nojalla löydetään rajoitettu, suljettu, konveksi ja ei-lommoontuva C, jolle $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$. Tällöin (a) antaa, että $\mathrm{int}(C)$ on rajoitettu, mutta ei σ-lommoontuva, joten saadaan ristiriita.

Näytetään seuraavaksi kohdat (a) ja (b):

(a) Olkoon A kuten annettu. Lemman 4.24 (i) nojalla löytyy $\varepsilon > 0$, jolle $A = \overline{co}\big(A \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)\big)$ jokaisella $x \in A$. Asetetaan $I_x := A \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$. Tällöin $\mathrm{int}(I_x) = \mathrm{int}(A) \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)$, koska pallo on suljettu. Valitsemalla riittävän pieni ε saadaan oletuksesta $\mathrm{int}(I_x) \neq \emptyset$. Kiinnitetään nyt piste x ja asetetaan $I := I_x$, jolloin $A = \overline{co}(I)$. Väitteen näyttämiseksi tulee siis osoittaa $\mathrm{int}\big(\overline{co}(I)\big) \subseteq co\big(\mathrm{int}(I)\big)$.
Osoitetaan ensin, että $I \subseteq \overline{\mathrm{int}(I)}$: jos $c \in I$, on $c \in A$ ja $\|c - x\| > \varepsilon$. Olkoon $c' \in \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Lemman 4.24 (iii) nojalla $\mathrm{int}(A) = co\big(A \setminus \overline{B}(x,\varepsilon)\big)$, joten $\mathrm{int}(A)$ on konveksi ja $J[c', x) \subseteq \mathrm{int}(A)$. Tällöin löytyy $d \in J[c', x) \cap \overline{B}(x,\varepsilon)$ ja aiemmasta etäisyysehdosta seuraa $J[d, c) \subseteq \mathrm{int}(A)$. Edelleen löytyy $d' \in J[d, c)$, jolle $J[d', c) \subseteq \mathrm{int}(A) \setminus \overline{B}(x,\varepsilon) = \mathrm{int}(I)$ ja siis $J[d', c] \subseteq \overline{\mathrm{int}(I)}$ eli $c \in \overline{\mathrm{int}(I)}$.
Käyttämällä edellistä inkluusiota saadaan

$$co(I) \subseteq co\big(\overline{\mathrm{int}(I)}\big) \subseteq \overline{co}\big(\mathrm{int}(I)\big),$$

joka taas seuraa siitä, että $C \subseteq co(C)$ eli $\overline{C} \subseteq \overline{co}(C)$ ja koska $\overline{co}(C)$ on konveksi, saadaan $co(\overline{C}) \subseteq co(\overline{co}(C)) = \overline{co}(C)$. Edelleen konveksille joukolle C on $\mathrm{int}(\overline{C}) = \mathrm{int}(C)$ Lemman 4.24 (iii) nojalla, joten

$$\mathrm{int}\big(\overline{co}(I)\big) = \mathrm{int}\big(co(I)\big) \subseteq \mathrm{int}\big(\overline{co}(\mathrm{int}(I))\big) = \mathrm{int}\big(co(\mathrm{int}(I))\big) \subseteq co\big(\mathrm{int}(I)\big).$$

Lemman 4.24 (ii) tulos voidaan yleistää suoraviivaisesti myös σ-lommoontuville joukoille. Koska $co(C) \subseteq \sigma(C)$ jokaiselle joukolle C, $\mathrm{int}(A)$ ei ole σ-lommoontuva edellisen nojalla.

(b) Symmetrisyys ei ole oleellinen ominaisuus, mutta helppo todistaa muiden ominaisuuksien ohessa: olkoon A rajoitettu epätyhjä joukko, joka ei ole lommoontuva. Tällöin $-A = \{-x : x \in A\}$ ei ole myöskään lommoontuva: valitaan sama $\varepsilon_A > 0$ myös pisteille $-x$. Sama on totta myös joukolle $A_1 = A \cup -A$ ja Lemman 4.24 (i) nojalla joukolle $A_2 = \overline{co}(A_1)$. Tämä säilyy joukolle $A_3 = A_2 + \overline{B}(0,1)$: korvataan annettu $\varepsilon_{A_2} > 0$ luvulla $\varepsilon + 1$. Olkoon nyt $C := \overline{A_3}$. Jälleen Lemma 4.24 (i) antaa, että C ei ole lommoontuva ja säilyttää aiemmat ominaisuudet: se on suljettu, symmetrinen (A_1), konveksi (A_2), $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ (A_3) ja rajoitettu. Aiemmin osoitettu kohta (a) antaa, että $\mathrm{int}(C)$ ei ole σ-lommoontuva.

□

Määritellään lopuksi lyhyesti konveksien joukkojen ääriarvopisteet, näihin liittyvä keskeinen tulos ja annetaan esimerkki L^1-avaruuden kautta.

Määritelmä 4.27. Olkoon A konveksi. Jos $a \in A$ ja $a \notin J(x,y)$ kaikille $x, y \in A$, on a joukon A *äärimmäinen piste*.

Lemma 4.28. (Krein-Milman) *Olkoon B topologinen lokaalisti konveksi Hausdorff-vektoriavaruus. Jos $A \neq \emptyset$ on kompakti konveksi joukko ja*

$$E := \{a \in A : a \notin J(x,y) \text{ kaikille } x, y \in A\}$$

sen äärimmäisten pisteiden joukko, niin $E \neq \emptyset$ ja $A = \overline{co}(E)$.

Todistus. [27, s. 362-363]. □

Huomautus 4.29. Krein-Milman -lauseessa kompaktisuus on vahva ehto äärimmäisten pisteiden olemassaololle. Kompaktit joukot ovat suljettuja ja rajoitettuja, mutta toiseen suuntaan näin ei ole, kuten ääretönulotteisten avaruuksien pallot $\overline{B}(0,1)$ osoittavat. Jos kuitenkin kompaktisuus voidaan korvata tällä heikommalla vaatimuksella ainakin konvekseille joukoille, puhutaan Krein-Milman -ominaisuudesta:

• Avaruudella B on *Krein-Milman -ominaisuus*, jos sen jokainen suljettu rajoitettu konveksi joukko on ääriarvopisteidensä suljettu konveksi verho.

Tähän liittyen voidaan näyttää, että avaruuden B Radon-Nikodym -ominaisuus takaa Krein-Milman -ominaisuuden ([10, s. 189-191]); se, että seuraako tulos myös toiseen suuntaan, ei tiedetä. Yhtäpitäviä karakterisointeja kuitenkin tunnetaan. Näistä tyypillisin on seuraava: avaruudella B^* on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos avaruudella B^* on Krein-Milman -ominaisuus ([10, s. 198]).

Esimerkki 4.30. Esimerkissä 4.7 (i) nähtiin, että avaruudella $L^1([0,1],\mathbb{R};\mu)$, missä μ on Lebesguen mitta, ei ole Radon-Nikodym -ominaisuutta. Avaruudella ei myöskään ole Krein-Milman -ominaisuutta: väli $[0,1]$ on suljettu, rajoitettu ja konveksi reaalilukujen topologiassa. Jos $\|f\|_1 = 1$, voidaan jatkuvaan kuvaukseen $f \mapsto \int_{[0,1]} |f|\, d\mu$ soveltaa väliarvolausetta. Tällöin on $a \in (0,1)$, jolle $\int_{[0,a]} |f|\, d\mu = \frac{1}{2}$ ja siten myös $\int_{[a,1]} |f|\, d\mu = \frac{1}{2}$. Asetetaan $f_1 := 2f\chi_{[0,a]}$, $f_2 := 2f\chi_{[a,1]}$ jolloin $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ ja $\|f\|_1 = \|f_1\|_1 = \|f_2\|_1$. Tapauksessa $\|f\|_1 = 0$ saadaan $0 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}(-f)$ ja jos $0 < \|f\|_1 < 1$, voidaan edeltävä argumentti toistaa ja saadaan $\|f_1\|_1 = \frac{1}{2}, \|f_2\|_1 < \frac{1}{2}$ ja $\|f\|_1 < 1$. Niinpä suljetulla yksikköpallolla ei ole äärimmäisiä pisteitä.

4.4 Muita karakterisointeja

Tutustutaan kolmeen Radon-Nikodym -ominaisuuden kanssa yhtäpitävään tulokseen: Lause 4.31 liittyy vektorimitan ja mitan välisien osamääräjoukkojen kompaktisuuteen, Lause 4.33 mittojen itseisesti suppeneviin sarjoihin ja viimeisenä Lause 4.38 karakterisoi absoluuttisesti jatkuvien kuvausten differentioituvuuden. Esitettävät lauseet ovat toisistaan erillisiä, mutta käyttävät aiempien lukujen tuloksia.

Aloitetaan vektorimittojen muodostamista heikosti kompakteista joukoista. Seuraava tulos on ensimmäisimpiä Radon-Nikodym -ominaisuuden karakterisointeja: alkuperäinen todistus on peräisin R. S. Phillipsiltä vuodelta 1943. Seuraava esitys ja todistus ovat lähteestä [19].

Lause 4.31. *Olkoon $\nu\colon X \to B$ vektorimitta ja $\mu\colon X \to [0,\infty)$ äärellinen mitta. Avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos jokaiselle rajoitetusti varioituvalle vektorimitalle ν ja äärelliselle mitalle μ, joille $\nu \ll \mu$, on voimassa seuraava ehto:*

Kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy $A_\varepsilon \in \Gamma$ siten, että $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ ja joukko

$$E_\nu := \left\{ \frac{\nu(A)}{\mu(A)} : A \subseteq A_\varepsilon, A \in \Gamma, \mu(A) > 0 \right\}$$

sisältyy johonkin heikosti kompaktiin joukkoon.

Todistus. Osoitetaan vain Radon-Nikodym -ominaisuuden riittävyys. Välttämättömyys on huomattavasti raskaampi ja käyttää heikon kompaktisuuden tuloksia, kuten Krein-Smulian -lausetta [26]; todistus tähän suuntaan löytyy [19, s. 534, Theorem 2].

Oletetaan, että avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus. Koska jokainen kompakti joukko on heikosti kompakti, riittää osoittaa, että E on sisältyy kompaktiin joukkoon. Jos $\nu \ll \mu$ ja ν rajoitetusti heilahteleva, on $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ jollekin $f \in L^1(X,B;\mu)$. Löydetään $s_n \in S(X,B)$, joille $s_n \to f$ m.k. $x \in X$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Egorovin lauseesta 2.6 saadaan joukko $A_\varepsilon \in \Gamma$, jolle $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ ja $s_n \to f$ tasaisesti joukossa A_i. Erityisesti f on rajoitettu joukossa A_ε, koska kuvaukset s_n ovat rajoitettuja. Asettamalla $T(g) := \int_{A_\varepsilon} fg\, d\mu$ ja $T_n(g) := \int_{A_\varepsilon} s_n g\, d\mu$ saadaan rajoitetut lineaarioperaattorit $T, T_n\colon L^1(X,B;\mu) \to B$. Jos $\|g\|_1 \leq 1$, saadaan

$$\|(T - T_n)g\| = \left\| \int_{A_\varepsilon} g(f - s_n)\, d\mu \right\| \leq \int_{A_\varepsilon} |g| \|f - s_n\|\, d\mu \leq \sup_{A_\varepsilon} \|f - s_n\|$$

eli $T_n \to T$ tasaisesti normissa $\|\cdot\|_{L^1,B}$. Jos $A \subseteq A_\varepsilon$, ovat joukot $T_n(A)$ äärellisiä ja kuten Lauseen 2.4 todistuksessa, seuraa joukkojen $T(A)$ täysin rajoittuneisuus. Edelleen Lemma 1.23 antaa näiden kompaktisuuden eli T on kompakti. Nyt $T(\frac{\chi_A}{\mu(A)}) = \frac{\nu(A)}{\mu(A)}$ ja $\left\|\frac{\chi_A}{\mu(A)}\right\|_1 = 1$ kaikille $A \subseteq A_\varepsilon$, joten kompaktin operaattorin määritelmän nojalla E_ν on suhteellisen kompakti ja sisältyy kompaktiin joukkoon $\overline{E_\nu}$. □

Huomautus 4.32. Edellä nähtiin, että voidaan valita jopa kompakti joukko, johon E_ν sisältyy. Niinpä tulos voidaan esittää myös kompaktilla oletuksella. Joukkoja E_ν koskevassa ehdossa voidaan myös jättää pois lukuun ε viittaaminen. Tällöin riittää näyttää, että jokaiselle $C \in \Gamma$ joukot

$$E_\nu(C) := \left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)} : A \subseteq C, A \in \Gamma, \mu(A) > 0\right\}$$

sisältyvät (heikosti) kompaktiin joukkoon. Edelleen joukkojen $E_\nu(C)$ kompaktisuus voidaan korvata σ-lommoontuvuudella ([16, s. 496]) ja näitä koskeva ehto on yhtäpitävää seuraavan kanssa.

[22]: jokaiselle $A \in \Gamma$, jolle $0 < \mu(A) < \infty$, löytyy $C_A \subseteq A$ ja kompakti $K_A \subseteq B$ siten, että $\{0\} \notin K, \mu(C_A) > 0$ ja $\nu(\tilde{A}) \subseteq cone(K_A)$ kaikille $\tilde{A} \subseteq A_C$, missä

$$cone(K_A) = \{cx : c > 0, x \in K_A\}$$

on joukon K_A *kartiojoukko.*

Karakterisoidaan seuraavaksi Radon-Nikodym -ominaisuus avaruuden mittojen itseisesti suppenevien sarjojen avulla. Tulos löytyy lähteestä [18, s. 80, Theorem 2.2].

Lause 4.33. *Avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus jos ja vain jos jokaisella rajoitetusti varioituvalla vektorimitalla ν ja äärellisellä mitalla μ, joille $\nu \ll \mu$, on esitys*

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n(A),$$

missä $b_n \in B$, $(\mu_n)_n\colon \Gamma \to [0,\infty)$ ovat mittoja, $\mu_n \ll \mu$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_i\| \mu_n(X) < \infty$.

Todistus. Olkoon ν rajoitetusti varioituva vektorimitta ja μ mitta siten, että $\nu \ll \mu$. Oletetaan ensin Radon-Nikodym -ominaisuuden voimassaolo. Löytyy $f \in L^1(X, B; \mu)$, jolle $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ kaikilla $A \in \Gamma$. Integraalille on esitys $\int_A f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu(A \cap A_n)$ joillekin $b_n \in B$ ja pareittain pistevieraille $A_n \in \Gamma$, joten saadaan yhtäsuuruus

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n(A),$$

missä $\mu_n(A) := \mu(A \cap A_n), \mu_n \ll \mu$ ja integraalia vastaava sarja suppenee itseisesti, koska $\|f\|$ on integroituva.

Olkoon nyt jokaiselle vektorimitalle esitys $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n(A)$, missä $b_n \in B$ ja μ_n ovat mittoja, joille $\mu_n \ll \mu$ sekä $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| \nu_n(A) < \infty$. Asetetaan jokaiselle n

kuvaus $f_n := \frac{d\mu_n}{d\mu}$ eli mitan μ_n Radon-Nikodym -derivaatta mitan μ suhteen; nämä ovat olemassa Radon-Nikodym -lauseen 4.1 nojalla. Edelleen saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\| \mu_n(X) < \infty,$$

koska $\|f_n\|_1 = \int_X \frac{d\mu_n}{d\mu}\, d\mu = \int_X d\mu_n = \mu_n(X)$; tämä seuraa Lemman 4.11 todistuksesta. Banach-avaruuden itseisesti suppenevana sarjana tällä on raja-arvo $f \in L^1(X, B; \mu)$. Edelleen itseisesti suppenevan sarjan integroimisjärjestystä voidaan vaihtaa, joten saadaan yhtäsuuruus

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n(A) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_A f_n\, d\mu = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu.$$

$\square$

Siirrytään lopuksi differentioituvuuden käsitteeseen. Jos $B = \mathbb{R}$, voidaan analyysin peruslause nähdä Radon-Nikodym -lauseen erikoistapauksena: olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kasvava ja oikealta jatkuva. Voidaan määritellä Lebesgue-Stieljes -mitta

$$\nu_f(A) := \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \Big\}.$$

Jos f on edelleen absoluuttisesti jatkuva, saadaan $\nu_f \ll \mu$, missä μ on Lebesguen mitta. Tällöin Radon-Nikodym -derivaattana on melkein kaikkialla määritelty derivaattakuvaus f'. Erityisesti $F(b) - F(a) = \nu_f([a, b]) = \int_{[a,b]} f'\, d\mu$. Tämä tulos löytyy lyhyesti [7, s. 373 & s. 477] ja yksityiskohtaisemmin kyseisen lähteen luvusta 7.

Edellinen tulos on läheisesti yhteydessä yleisen Banach-avaruuden tilanteeseen: osoittautuu, että Radon-Nikodym -ominaisuus on yhtäpitävää absoluuttisesti jatkuvan kuvauksen $f\colon [a, b] \to B$ melkein kaikkialla differentioituvuudelle, jonka avulla jokaiselle tällaiselle f on voimassa analyysin peruslause. Jos f ei ole absoluuttisesti jatkuva tai B ei omaa Radon-Nikodym -ominaisuutta, voidaan silti muotoilla vastaavanlaisia tuloksia: [25] käyttää analyysin peruslauseen esittämiseen Hausdorff-mittoja.

Aloitetaan seuraavista oleellisista määritelmistä:

Määritelmä 4.34. (i) Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}$ avoin joukko. Kuvaus $f\colon U \to B$ on *differentioituva* pisteessä $x \in U$, jos löytyy jatkuva lineaarikuvaus $F\colon \mathbb{R} \to B$, jolle

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - F(h)\|}{h} = 0.$$

Voidaan käyttää myös nimitystä *Fréchet-differentioituvuus*.
(ii) Kuvaus $f\colon [a, b] \to B$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$ siten, että kaikille pareittain pistevieraille väleille $(a_i, b_i), 1 \le i \le N$, joille $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \delta$, on voimassa $\sum_{i=1}^{N} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$.
(iii) Kuvauksen f *heilahtelu* välillä $[a, b]$ määritellään

$$V_f([a, b]) := \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| : n \ge 1, a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b \Big\}.$$

Jos $V_f([a,b]) < \infty$, on f *rajoitetusti heilahteleva* joukossa $[a,b]$.

Osoitetaan ensin Lebesguen differentioituvuuslauseen Banach-arvoinen versio. Reaaliarvoinen tulos sanoo, että jokaiselle $L^1(X,\mathbb{R};\mu)$-kuvaukselle, missä μ on Lebesguen mitta, on voimassa

$$\frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} |f(x)-f(y)|\,d\mu(x) \overset{r\to 0}{\to} 0 \quad \text{m.k. } y\in\mathbb{R}$$

eli näille pisteille x on $f(y) = \lim_{r\to 0}\int_{(y,y+r)} f(x)\,d\mu(x)$. Tulos toimii myös tapauksessa $\frac{1}{r}\int_{(y-r,y)} |f(x)-f(y)|\,d\mu(x)$ ja yleisemmin sopiville pisteeseen y kohti suppeneville joukoille. Tästä ja lauseen todistuksesta voi lukea lähteestä [12, s. 98].

Lemma 4.35. *Jos μ on Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}$ ja $f\in L^1(X,B;\mu)$, niin*

$$\frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} \|f(x)-f(y)\|\,d\mu(x) \overset{r\to 0}{\to} 0 \quad \textit{m.k. } y\in\mathbb{R}$$

ja edelleen näille pisteille on $f(y) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} f(y)\,d\mu(x)$.

Todistus. [4, s. 101]: Koska $f\in L^1(X,B;\mu)$, on f mitallinen ja Pettisin mitallisuuslauseen nojalla voidaan olettaa avaruuden B separoituvuus. Olkoon siis (b_i) tiheä joukko. Soveltamalla Lebesguen differentioituvuuslausetta reaaliarvoisille kuvauksille $\|f(x)-b_i\|$ saadaan melkein kaikille $y\in\mathbb{R}$ yhtäsuuruus

$$\|f(y)-b_i\| = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} \|f(x)-b_i\|\,d\mu(x), \quad \text{kun } i\geq 1.$$

Niinpä näille luvuille y ja kaikille $i\geq 1$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_{(r,y+r)} \|f(x)-f(y)\|\,d\mu(x)\\
&\leq \limsup_{r\to 0^+}\Big(\frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} \|f(x)-b_i\|\,d\mu(x) + \frac{1}{r}\int_{(y,y+r)} \|f(y)-b_i\|\,d\mu(x)\Big)\\
&= 2\|f(y)-b_i\|,
\end{aligned}$$

joten väite seuraa tiheydestä. Jälkimmäinen väite saadaan kolmioepäyhtälöstä. □

Seurauksena saadaan integraalifunktion differentioituvuus.

Seuraus 4.36. *Olkoon μ Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}$. Jos $f\colon (a,b)\to B$ on Bochner-integroituva ja $F\colon [a,b]\to B, F(y) := \int_{[a,y]} f(x)\,d\mu(x)$, niin F on differentioituva m.k. $x\in(a,b)$ ja $F' = f$.*

Todistus. Jos $y\in(a,b)$ ja $h>0$, saadaan

$$\limsup_{h\to 0^+}\Big\|\frac{1}{h}\big(F(y+h)-F(y)\big)-f(y)\Big\| \leq \limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{(y,y+h]} \|f(x)-f(y)\|\,d\mu(x)$$

ja kun $h < 0$, niin vastaavasti saadaan

$$\limsup_{h\to 0^-} \left\| \frac{1}{h}\big(F(y+h) - F(y)\big) - f(y) \right\| \le \limsup_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \int_{[y-h,y)} \|f(x) - f(y)\| \, d\mu(x).$$

Väite seuraa Lemmasta 4.35, sillä todistus saadaan vastaavasti saaduille väleille. □

Esitetään vielä tarpeellinen tulos ilman todistusta, joka karakterisoi absoluuttisesti jatkuvat kuvaukset ja merkkimitat.

Lemma 4.37. *Olkoon $F_\lambda(x) := \lambda((-\infty, x])$, missä λ on äärellinen merkkimitta. On olemassa bijektio $\lambda \mapsto F_\lambda$ kaikkien äärellisten merkkimittojen kokoelman ja oikealta jatkuvien, rajoitetusti heilahtelevien kuvausten kokoelman välille. Erityisesti jokainen absoluuttisesti jatkuva kuvaus f voidaan esittää muodossa $f = F_\lambda$, missä λ on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan μ suhteen.*

Todistus. Katso [8, s. 135-136]. □

Siirrytään varsinaiseen tulokseen. Seuraavassa lauseessa väli $[0,1]$ voidaan luonnollisesti korvata millä tahansa suljetulla välillä $[a,b]$ ja merkintä $\mathcal{B}_\mathbb{R}([0,1])$ tarkoittaa välin $[0,1]$ Borel-joukkoja reaalilukujen topologian suhteen. Todistus seuraa tuloksia [10, s. 107] ja [4, s. 112].

Lause 4.38. *Avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus Borel-joukoille $\mathcal{B}_\mathbb{R}([0,1])$ Lebesguen mitan μ suhteen jos ja vain jos jokainen absoluuttisesti jatkuva $f\colon [0,1] \to B$ on melkein kaikkialla differentioituva.*

Todistus. Olkoon mitta-avaruutena $([0,1], \mathcal{B}_\mathbb{R}([0,1]), \mu)$. Merkitään $\Gamma := \mathcal{B}_\mathbb{R}([0,1])$.

Oletetaan ensin, että jokainen absoluuttisesti jatkuva kuvaus f on differentioituva m.k. $x \in [0,1]$. Ideana on käyttää Lemmaa 4.37 ja muodostaa mitta, jonka avulla voidaan konstruoida rajoitetusti varioituva ja Lebesguen mitan suhteen absoluuttisesti jatkuva vektorimitta. Olkoon nyt $V_f(x)$ kuvauksen f heilahtelukuvaus eli

$$V_f(x) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^n \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| : n \ge 1, 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = x \Big\}.$$

Koska f on absoluuttisesti jatkuva, myös V_f on. Lisäksi $V_f \ge 0$, joten Lemman 4.37 nojalla löytyy äärellinen mitta $\lambda\colon \Gamma \to [0,\infty)$, jolle $V_f(x) = \lambda([0,x])$ ja $\lambda \ll \mu$.

Määritellään vektorimitta $\nu\colon \Gamma \to B$ seuraavasti: jos $A \in \Gamma$ on avoin, rationaalilukujen tiheyden nojalla voidaan valita erilliset avoimet välit (a_i, b_i) siten, että $A = \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$. Asetetaan $\nu(A) := \sum_{i=1}^\infty (f(b_i) - f(a_i))$, jolloin $\lambda(A) \to 0$ antaa $\|\nu(A)\| \to 0$. Siis ν on λ-jatkuva. Jos A on mielivaltainen Borel-joukko, käytetään approksimaatio-ominaisuutta

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(C) : C \text{ on avoin joukko}, A \subseteq C\}$$

ja valitaan jono (A_i) avoimia joukkoja, joille $A \subseteq A_i$ kaikille i, $A_{i+1} \subseteq A_i$ ja $\lambda(A_i) \to \lambda(A)$. Koska $\lambda(A_n \setminus A_m) \to 0$, kun $n, m \to \infty$, saadaan avoimien joukkojen λ-jatkuvuudesta, että myös $\|\nu(A_n \setminus A_m)\| \to 0$. Nyt $(\nu(A_i))_i$ on Cauchy-jono avaruudessa B, joten raja-arvo $\nu(A) := \lim_{i\to\infty} \nu(A_i)$ on olemassa.

Edelleen ν on hyvin määritelty numeroituvasti additiivinen vektorimitta: jos $A_i \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita ja avoimia, on $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$. Koska välit (a_k, b_k) ovat pistevieraita, voidaan edelleen merkitä $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j^i, b_j^i)$, missä $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j^i, b_j^i) = A_i$ ja nämä välit ovat pistevieraita. Mutta tällöin $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty}(f(b_j^i) - f(a_j^i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. Jos A_i ovat pistevieraita Borel-joukkoja, voidaan jokaiselle A_i valita jono avoimia väheneviä joukkoja A_n^i, joille $\lambda(A_n^i) \overset{n\to\infty}{\to} \lambda(A_i)$. Tällöin myös $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n^i) \overset{n\to\infty}{\to} \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$, joten

$$\nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_n \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n^i\Big) = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_n^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Edelleen $|\nu|([0,1]) \leq V_f([0,1]) < \infty$ ja $\|\nu(A)\| \leq \lambda(A)$, joten $\nu \ll \lambda$ eli myös $\nu \ll \mu$. Käyttämällä Radon-Nikodym -ominaisuutta saadaan $g \in L^1([0,1], B; \mu)$, jolle

$$f(x) = \nu([0,x]) + f(0) = \int_{[0,x]} g \, d\mu + f(0).$$

Seuraus 4.36 antaa differentioituvuuden ja $f'(x) = g(x)$ m.k. $x \in [0,1]$.

Näytetään vastakkainen suunta: olkoon $\nu\colon \Gamma \to B$ rajoitetusti varioituva vektorimitta, jolle $\nu \ll \mu$. Asetetaan $f\colon [0,1] \to B$, $f(x) := \nu([0,x])$. Tällöin f on absoluuttisesti jatkuva, sillä

$$\sum_{i=1}^{N} \|f(b_i) - f(a_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \big\|\nu\big((a_i, b_i]\big)\big\| \leq |\nu|\Big(\bigcup_{i=1}^{N}(a_i, b_i]\Big)$$

ja $|\nu| \ll \mu$, joka on yhtäpitävää μ-jatkuvuuden kanssa (Määritelmä 3.17). Kuvaus f' on määritelty oletuksen nojalla m.k. $x \in [0,1]$. Jos $b^* \in B^*$ ja $0 \leq a < b \leq 1$, saadaan

$$b^*\nu\big((a,b]\big) = b^*f(b) - b^*f(a) = \int_{[a,b]} b^*f' \, d\mu,$$

koska b^*f on absoluuttisesti jatkuva ja kuvauksen b^*f derivaatta on b^*f' m.k. $x \in [0,1]$: $\sum_{i=1}^{N} \|b^*f(b_i) - b^*f(a_i)\| \leq \|b^*\|_{B^*} \sum_{i=1}^{N} \|f(b_i) - f(a_i)\|$ antaa absoluuttisen jatkuvuuden ja toisaalta derivaatan ketjusäännöstä ([3, s. 6]) saadaan $Db^*f = (Db^*(f))(Df) = b^*f'$, sillä lineaarikuvauksen derivaatta on kuvaus itse. Niinpä reaaliarvoisena absoluuttisesti jatkuvana kuvauksena b^*f toteuttaa analyysin peruslauseen.

Absoluuttisen jatkuvuuden nojalla äärelliset joukot kuvautuvat vektorimitalle ν nolla-alkioksi, joten tulos on voimassa kaikille väleille $I \subseteq [0,1]$. Tästä seuraa, että tulos voidaan yleistää approksimoimalla kaikille Borel-joukoille, joten saadaan

$$\nu(A) = \int_A f' \, d\mu \quad \text{kaikille } A \in \Gamma.$$

Koska f' on mitallinen, on tälle esitys $f' = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \chi_{A_i}$, missä $b_i \in B$ ja $A_i \in \Gamma$ pareittain pistevieraita. Koska ν on rajoitetusti varioituva, suppenee sarja itseisesti. Edelleen $\|f'\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\|\chi_{A_i}$, joten $\int_X \|f'\| \, d\mu < \infty$. Siis f' on Bochner-integroituva ja avaruudella B on Radon-Nikodym -ominaisuus avaruuden $([0,1], \Gamma, \mu)$ suhteen. $\square$

Lähteet

[1] R. F. Bass, *Real analysis for graduate students*, Version 3.1, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.

[2] R. Beckmann, A. Deitmar, *Two applications of nets*, Ann. Funct. Anal. 6. no. 3, 176-190 (2015).

[3] J. Bell, *Fréchet derivatives and Gâteaux derivatives*, Department of Mathematcis, University of Toronto, 2014. URL: `http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/frechetderivatives.pdf`. Viitattu 7.5.2022.

[4] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometrical Nonlinear Functional Analysis: Volume 1*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 48, Providence, Rhode Island, 2000.

[5] S. Bochner, *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind*, Fund. Math. 20 (1933), 262-276.

[6] V.I. Bogachev, *Measure Theory, Volume 1*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[7] A.M. Bruckner, J. B. Bruckner, B. S. Thompson, *Real Analysis*, Seconds Edition, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

[8] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Second Edition, Birkhäuser, New York, 2013.

[9] W. J. Davis, R. R. Phelps, *The Radon-Nikodym Property and Dentable Sets in Banach Spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 45(1), 1974, 119-122.

[10] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys; no. 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[11] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, First Edition, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958-71.

[12] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, Wiley-Interscience, New York, 1999.

[13] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 31, Providence, Rhode Island, 1957.

[14] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Volume I : Martingales and Littlewood-Paley theory*, First Edition, Springer, Cham, 2016.

[15] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Third Edition, Springer, New York, 1993.

[16] H. B. Maynard, *A Geometrical Characterization of Banach Spaces with the Radon Nikodym Property*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 185, American Mathematical Society, 1973, 493-500.

[17] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, First Edition, Birkhäuser, Basel, 1978.

[18] P. Mikusiński, J. P. Ward, *On the Radon-Nikodym Property for Vector Measures and Extensions of Transfunctions*, Annales Mathematicae Silesianae 35 (2021), no. 1, 77–89.

[19] S. Moedomo, J. J. Uhl Jr. *Radon-Nikodým theorems for the Bochner and Pettis integrals*, Pacific Journal of Mathematics, Pacific J. Math. 38(2), 531-536, (1971).

[20] B. J. Pettis, *On Integration in Vector Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 44, no. 2, American Mathematical Society, 1938, 277–304.

[21] M. A. Rieffel, *Dentable Subsets of Banach Spaces, with Applications to a Radon-Nikodym Theorem*, Proceedings of the Conference on Functional Analysis, Thompson Book Co., Washington, 1967.

[22] M. A. Rieffel, *The Radon-Nikodym Theorem for the Bochner Integral*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 131, no. 2, American Mathematical Society, 1968, 466-487.

[23] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2002.

[24] K. Sundaresan, *The Radon-Nikodym Theorem for Lebesgue-Bochner Functions Spaces*, Journal of Functional Analysis 24, 276-279 (1977).

[25] C. Volintiru, *A Proof for the Fundamental Theorem of Calculus Using Hausdorff Measures*, Real Anal. Exchange 26 (1) 381 - 390, 2000/2001.

[26] R. Whitley, *The Krein-Smulian Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 97, no. 2, American Mathematical Society, 1986, 376-377.

[27] K. Yosida, *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.