

Johdatus diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin ja kaaokseen

Alexi Kangas

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2022

Tiivistelmä: Aleksi Kangas *Johdatus diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin ja kaaokseen*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 62 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2022.

Tämän tutkielman tarkoitus on auttaa lukijaa ymmärtämään matematiikkaa dynaamisten systeemien ja kaaoksen takana. Kirjoitelman toivotaan herättävän lukijassa kiinnostusta matemaattisia ilmiöitä kohtaan, sekä kannustavan empiiriseen matematiikan tutkimiseen. Tutkielmassa esitellään diskreettien dynaamisten systeemien toimintaperiaate, tutustutaan kaaokseen, sekä näiden sovelluksena esitellään Mandelbrotin joukko ja sen ominaisuuksia. Tutkielmassa käsitteitä esitellään pääosin sanallisesti selittäen menemättä liian syvällisiin matemaattisiin määritelmiin. Lukijan oletetaan hallitsevan lukion pitkän matematiikan oppimäärää vastaavat taidot. Tekstin ymmärtämisen kannalta lukijan oletetaan hallitsevan algebran ja analyttisen geometrian lisäksi funktioiden ja yhtälöiden, raja-arvon ja derivaatan, lukujonojen, numeeristen menetelmien, sekä matemaattisen väitelauseen todistamisen perustaidot.

Dynaamisella systeemillä tarkoitetaan järjestelmää, joka riippuu ajasta. Järjestelmä voi olla hyvin yksinkertainen, kuten bakteerin leviäminen, tai todella monimutkainen, kuten pörssiosakkeen hinta. Ensimmäisessä luvussa tutustutaan miten systeemi käyttäytyy, kun sen taustalla on jokin yksinkertaisen funktio. Luvun lopussa perehdytään, miten dynaamista systeemiä voidaan hyödyntää populaation mallintamisessa ja samalla johdetaan populaation mallinnuksessa käytetyn logistisen funktion lauseke, jolla ilmenee olevan mielenkiintoisia ominaisuuksia.

Matematiikassa kaaoksella tarkoitetaan ilmiötä, jossa tarkasti määritelty systeemi alkaa käyttäytyä pitkällä aikavälillä täysin arvaamattomasti. Arkikielessä kaaoksella tarkoitetaan usein sekasortoa ja totaalista järjestyksen puuttumista. Niin ristiriitaiselta kuin se kuulostaakin, matematiikassa kaaoksella tarkoitetaan täysin päinvastaista, täydellisesti määriteltyä systeemiä niiden arvaamattomasta käyttäytymisestä huolimatta. Toisessa luvussa perehdytään logistisen funktion avulla ratajoukon kaoottiseen käyttäytymiseen. Luvussa määritellään kaoottisuus ja tarkastellaan hieman tarkemmin mikä tekee systeemistä kaoottisen. Luvun lopussa tutkitaan myös, miten satunnaisuus eroaa kaoottisuudesta.

Viimeisessä luvussa keskitytään matemaattisemmasta näkökulmasta iteroinnin avulla aikaan saatavaan Mandelbrotin joukkoon. Tätä varten luvussa esitellään kompleksiluvut, sekä muutamia muita kaksiulotteisen avaruuden relevantteja käsitteitä. Mandelbrotin joukon ominaisuuksien esittämisen ja todistamisen yhteydessä lukijaa haastetaan hieman syvällisempään matemaattiseen ajatteluun. Lisäksi tarkastellaan, miten tietokoneen avulla voidaan luoda hämmästyttävän upeita kuvia Mandelbrotin joukosta ja miten kaaos liittyy Mandelbrotin joukkoon.

Avainsanat: Iterointi, diskreetti dynaaminen systeemi, logistinen funktio, kaaos, Mandelbrotin joukko

Sisällys

Johdanto	1
1 Johdatus diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin	3
1.1 Iteroivat funktiot	3
1.1.1 Yleistä iteraatiosta	3
1.1.2 Mihin iterointia tarvitaan?	5
1.2 Dynaamiset systeemit ja radan kohtalo	6
1.2.1 Neliöntifunktion käyttäytyminen	7
1.2.2 Kiintopisteet geometrisesti	11
1.2.3 Erilaiset kiintopisteet	11
1.3 Populaation mallinnus	13
1.3.1 Eksponentiaalinen kasvu	14
1.3.2 Logistinen funktio	15
1.4 Yhteenvedo	21
2 Kaaos	22
2.1 Kaaos ja logistinen funktio	23
2.1.1 Jaksollinen käyttäytyminen	24
2.1.2 Jaksoton käyttäytyminen	27
2.1.3 Kaaoksen määritelmä	29
2.2 Perhosefekti	30
2.2.1 Alkuarvoherkkyyden määritelmä	33
2.3 Haarautumisdiagrammi	34
2.4 Yhteenvedo	36
3 Mandelbrotin joukko	37
3.1 Kompleksiluvut	37
3.1.1 Luvun -1 neliöjuuri	37
3.1.2 Kompleksilukujen laskusäännöt	38
3.1.3 Kompleksilukujen geometria	39
3.2 Avoimet ja suljetut joukot, joukon reuna sekä yhtenäisyys	44
3.3 Mandelbrotin joukko ja sen ominaisuuksia	47
3.4 Mandelbrotin joukon visuaalisointi	56

3.4.1	Mandelbrotin joukon karkaamisaika	57
3.5	Mandelbrotin joukko ja kaaos	58
3.6	Yhteenveto	59
	Kirjallisuutta	62

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on johdatella lukijaa dynaamisten systeemien käyttäytymiseen ja soveltamiseen, sekä kaaokseen ja sen ilmenemiseen.

Populaarikulttuurissa puhutaan usein kaaosteorista. Luonnontieteellinen teoria, kuten esimerkiksi evoluutioteoria, pyrkii antamaan selityksen laajalle kokonaisuudelle ja sen kehittämiseksi on tarvittu useita mittauksia ja havaintoja, yhtälöitä, laskuja ja päätelmiä. Tällaisen määritelmän perusteella kaaos ei ole teoria siinä missä evoluutioteoria, laattatektoniikka tai kysynnän ja tarjonnan laki ovat. Ei ole olemassa kaaosyhtälöä tai -aksiomia, eikä kaaos tarjoa meille yhtälöitä joiden avulla voisimme laskea jotain. Kaaoksella tarkoitetaan systeemin käyttäytymistä - kyseessä on teorian sijaan ilmiö.

Kaaoksen ymmärtäminen vaatii paljon vähemmän matemaattisen teorian ymmärtämistä, kuin luullaan. Se näyttäytyy meille jokapäiväisinä ilmiöinä esimerkiksi ympäristössä ja talouselämässä, joten sen toimintaperiaatteiden ymmärtäminen on verrattain helppoa. Pohjimmiltaan kaaoksessa on kyse monimutkaisten luonnollisten systeemien käyttäytymisestä ajan kuluessa, missä pienikin poikkeama lähtötilanteessa aiheuttaa myöhemmin suuria eroja ilmiöitä havainnoissa.

Edward Lorenz esitteli ensimmäiset kaaokseen liittyvät ajatuksensa 1970-luvun alussa osana dynaamisten systeemien tutkimusta. Seuraavalla vuosikymmenellä Benoit Mandelbrot oivalsi esittää kaaottisen käyttäytymisen havainnoitavana ilmiönä sen täsmällisen selittämisen sijaan. Kaaoksen tutkimus on osoittanut, että yksinkertainen systeemi voi käyttäytyä monimutkaisesti ja ennalta-arvaamattomasti. Tämä havainto asettaa rajan meidän kyvyillemme ennustaa jotain ilmiötä, mutta toisaalta se tarjoaa mahdollisuuden löytää monimutkaiseen käyttäytymiseen yksinkertaisen ratkaisun. Yksinkertaisesti sanottuna kaaoksen tutkiminen haastaa intuitiomme yksinkertaisuudesta ja monimutkaisuudesta, järjestyksestä ja epäjärjestyksestä.

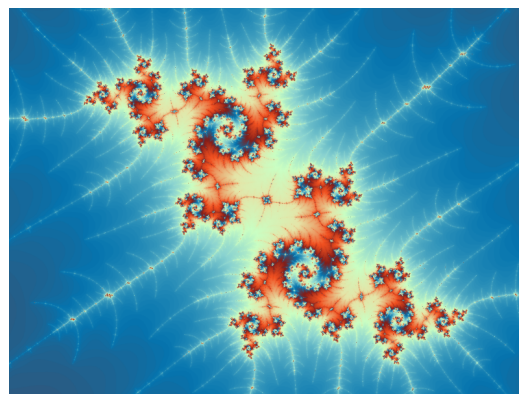
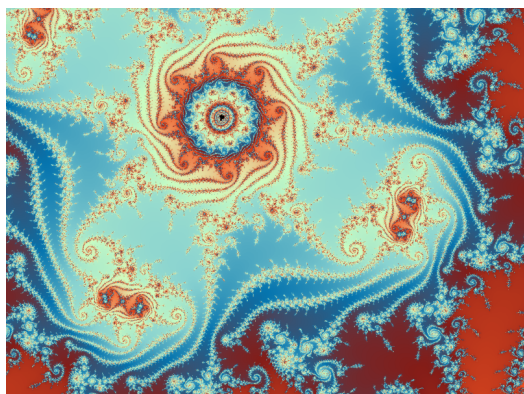
Kaaos liittyy usein dynaamisten systeemien tutkimiseen, johon törmätään monilla eri tieteenaloilla. Enimmäkseen dynaamisten systeemin tutkimus on osa matematiikkaa ja fysiikkaa, mutta sitä tutkitaan myös muilla aloilla, kuten taloustieteessä ja ympäristöbiologiassa. Dynaaminen systeemi on systeemi, joka muuttuu ajan kuluessa. Usein ollaan kiinnostuneita siitä, miten systeemi käyttäytyy pitkällä aikavälillä.

Kaaos on vain yksi niistä lukuisista ilmiöistä, joita dynaamisten systeemien tutkimisessa ilmenee. Tämän teoksen tarkoituksena on esitellä lukijalle järjestyksen ja epäjärjestyksen välistä suhdetta, jonka dynaamiset systeemit kätkevät taakseen.

Tänä päivänä voimme tietokoneiden avulla havainnollistaa, miltä kaaos näyttää. Samalla voimme värien avulla tutkia sen hämmästyttävän kiehtovia ja monimutkai-

sia aikaansaannoksia. Teoksen viimeisessä luvussa keskitytään Mandelbrotin joukkoon, joka on kenties tunnetuin fraktaaliksi. Fraktaalilla tarkoitetaan objektia, jonka pienemmät osat näyttävät suuremmalta osalta. Esimerkiksi puu on fraktaaliksi. Jos katkaisit puun oksan, se näyttää pienoiskokoiselta puulta. Fraktaaleja ja kaaosta ei pidä sekoittaa keskenään, sillä ne ovat täysin eri asioita. Fraktaalit ovat geometrisiä objekteja, kun kaaos puolestaan on deterministisen systeemin aikaansaamaa ennalta-arvaamatonta käyttäytymistä. Kuitenkin, näillä asiolla on paljon mielenkiintoisia yhteyksiä toisiinsa. Viimeisessä luvussa näemme, miten Mandelbrotin joukko ja kaaos ovat kietoutuneet toisiinsa.

Esimerkkien laskuissa, sekä kuvien piirtämisessä on käytetty apuna *GeoGebra*- ja *Scilab*-tietokoneohjelmia. Mandelbrotin joukon piirtämisessä on puolestaan hyödynnetty *A Mandelbrot Viewer Program* -piirto-ohjelmaa.



Kuva 0.1: Kuvia Mandelbrotin joukosta.

Luku 1

Johdatus diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin

1.1 Iteroivat funktiot

Ajattele jotain lukua x . Korota luku x toiseen potenssiin. Toista toiseen korotus uudelleen ja uudelleen. Mikäli valitsemasi luku oli suurempi kuin 1 tai pienempi kuin -1 , saat toiseen korotuksen seurauksena aina edellistä lukua suuremman luvun. Hyvin pian luvusta tulee niin suuri, ettet pysty enää jatkamaan toiseen korotusta päässälas-kuna. Itseasiassa siitä tulee nopeasti niin suuri, että emme enää pysty hahmottamaan luvun suuruusluokkaa. Oleellista kuitenkin on, että toistettaessa toiseen korotusta x^2 luku vaikuttaa kasvavan äärettömän suureksi. Joissain tapauksissa tulos pienenee pienenemistään lähestyen nollaa ja joskus voit päätyä lukuun 1.

Päädyitpä sitten mihin tahansa lopputulokseen, siihen vaikutti ainoastaan valitsemasi luku x sekä käyttämäsi funktio $f(x) = x^2$.

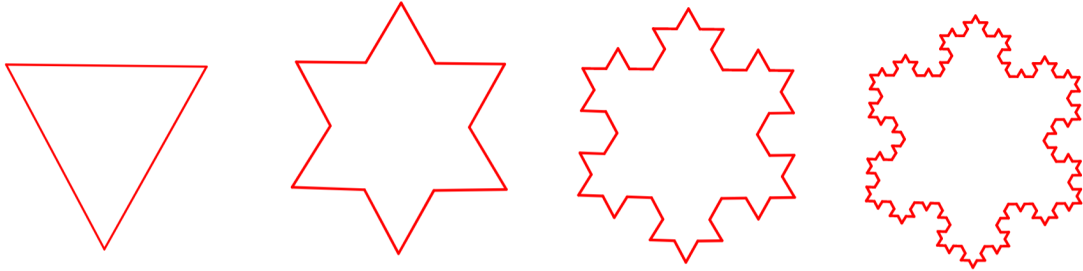
1.1.1 Yleistä iteraatiosta

Iteraatio on yleinen nimitys menetelmille, jossa samaa toimintaa toistetaan uudelleen ja uudelleen.

Esimerkiksi numeeristen menetelmien avulla voimme etsiä jatkuvan funktion nollakohdan likiarvoa, mikäli yhtälön ratkaiseminen tarkasti ei ole mahdollista tai se on niin työlästä, että se ei ole kannattavaa. Haarukointimenetelmä lienee näistä yksinkertaisin: Valitsemme kaksi pistettä, joissa funktio saa erimerkkiset arvot. Tällöin näiden kahden pisteen välillä on Bolzanon lauseen nojalla nollakohta. Lasketaan funktion arvo välin puolivälissä, joka on samalla seuraava likiarvo nollakohdaksi. Jos saatu likiarvo ei ole vielä riittävän tarkka, valitaan seuraavaksi väliksi se, jonka päätepisteissä funktio saa erimerkkiset arvot. Funktion arvo välin puolivälissä valitaan jälleen uudeksi nollakohdan likiarvoksi ja näin jatketaan, kunnes nollakohdan likiarvo saavutetaan riittävällä tarkkuudella.

Iteraatiota voidaan hyödyntää myös muilla matematiikan osa-alueilla. Muokataan tasasivuista kolmiota seuraavalla tavalla: Piirretään kappaleen jokaisen janan keskimäisen kolmanneksen ympärille uusi ulospäin osoittava tasasivuinen kolmio ja poiste-

taan sen jälkeen kolmion kantana toiminut jana. Toistetaan samaa prosessia uudelleen ja uudelleen. Jatkamalla tätä prosessia äärettömän pitkään saadaan aikaiseksi *Kochin lumihiutale*. Kuvassa 1.1 on esitetty iteraation neljä ensimmäistä vaihetta. Pystytkö päättämään, mitä Kochin lumihiutaleen pinta-alasta tai piiristä voidaan sanoa?



Kuva 1.1: Kochin lumihiutaleen neljä ensimmäistä iteraatiota.

Tässä työssä käsitellään tapauksia, jossa iteroimme jonkin funktion avulla annettua alkuarvoa. Toisin sanoen aloitamme valitsemalla luvun ja käytämme lukuun sovittua funktiota saadaksemme uuden luvun. Otamme saamamme uuden luvun ja käytämme jälleen sovittua funktiota saadaksemme jälleen uuden luvun ja niin edelleen.

Tilannetta voidaan miettiä esimerkiksi jänispopulaation avulla. Kuvitellaan, että eräälle saarelle viedään pieni jänispopulaatio. Elinympäristöllä on rajallinen kantokyky jänispopulaation suuruudelle, jonka tiedämme. Näiden tietojen perusteella voimme luoda populaation kokoa tietyinä vuotena mallintavan funktion. Iteroimalla populaatiota funktion avulla saamme selville populaation koon ensimmäisenä vuonna. Tämän tiedon perusteella pystymme arvioimaan toisen vuoden populaation koon, jota hyödynnämme kolmannen vuoden populaation koon arvioimiseen. Pystymme alkuperäisen populaation suuruuden ja populaation kokoa mallintavan funktion avulla arvioimaan populaation kokoa tulevana vuosina käyttäen tietoja edellisen vuoden populaatiosta.

Seuraavissa kappaleissa perehdytään syvällisemmin iteroiviin funktioihin. Sitä varten tarvitaan muutamia käsitteitä. Tarkastellaan asiaa uuden esimerkin kautta. Olkoon f neliöintifunktio, $f(x) = x^2$. Jos aloitamme luvusta 4, saamme seuraavaksi luvut 16, 256, 65536 ja niin edelleen.

$$4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 256 \xrightarrow{f} 65536 \dots \quad (1.1)$$

Lukua jolla iteraatio aloitetaan, tässä tapauksessa 4, sanotaan **alkuarvoksi**. Usein alkuarvoa merkitään x_0 , joka luetaan ”x nolla”. Seuraavaa arvoa merkitään x_1 , sitä seuraavaa x_2 ja niin edelleen. Iteroiva funktio muodostaa jonon, johon kuuluu kaikki iteroinnin aikana saadut tulokset. Tätä lukujonoa kutsutaan **radaksi**.

Huomioi, että annetulla alkuarvolla saadaan erilaisia ratoja riippuen iteroitavasta funktiosta. Epäselvyyksien välttämiseksi voidaan sanoa, että ”alkuarvon x_0 rata funktiolla f ”.

On mahdollista ilmaista myös, missä vaiheessa iterointia ollaan menossa.

Olkoon funktio f jokin funktio, jolla iteroimme alkuarvoa x_0 saadaksemme radan seuraavan arvon x_1 :

$$x_1 = f(x_0).$$

Seuraavaksi kuvaamme arvon x_1 uudelleen funktiolla f saadaksemme uuden arvon x_2 :

$$x_2 = f(x_1)$$

ja edelleen

$$x_3 = f(x_2).$$

Edelliset yhtälöt voidaan yhdistää seuraavalla tavalla:

$$x_3 = f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))).$$

Tämä ilmaus kiteyttää iteraation idean. Kuvaamme ensin alkuarvon x_0 funktiolla f ja saamme tuloksena luvun $f(x_0)$, joka kuvataan funktiolla f vielä uudelleen ja uudelleen. Näin saatu $f(f(f(x_0)))$ on luku, joka saadaan kun alkuarvoa x_0 on iteroitu funktiolla f kolme kertaa.

Esimerkki 1.1. *Olkoon funktio f neliöintifunktio $f(x) = x^2$ ja olkoon alkuarvo $x_0 = 2$. Tällöin*

$$f(f(f(2))) = f(f(2^2)) = f(f(4)) = f(4^2) = f(16) = 16^2 = 256.$$

Iteroivia funktiota tutkittaessa ollaan harvoin kiinnostuneita mitä muutaman iteraation jälkeen tapahtuu. Sen sijaan oleellisempaa on se, minkälaista informaatiota usemman iteraation jälkeinen tulos antaa. Kun alkuarvoa on iteroitu n kertaa funktiolla f , sitä merkitään

$$f(\overset{n \text{ kertaa}}{f(\cdots f(x_0))}) = f^{(n)}(x_0).$$

Huomaa, että merkintä ei tarkoita, että lukua $f(x_0)$ on kerrottu itsellään n kertaa. Esimerkki 1.1 voidaan lyhentää muotoon

$$f^{(3)}(2) = 256.$$

Jos kertoisimme lukua $f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$ kolmesti itsellään, päätyisimme eri tulokseen.

$$f^{(3)}(2) \neq f(2) \cdot f(2) \cdot f(2) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Merkintää $f^{(n)}(x_0)$ ei pidä myöskään sekoittaa funktion f n :nteen derivaattaan.

1.1.2 Mihin iterointia tarvitaan?

Monia todellisen elämän ilmiöitä voidaan mallinta luomalla funktio ja käyttämällä sitä uudelleen ja uudelleen. Edellisessä kappaleessa tutustuimme esimerkkiin jänispopulaation koon muuttumisesta ajan kuluessa. Seuraavan vuoden populaation koko riippui tietyn säännön mukaisesti edellisen vuoden populaation koosta. Tietysti oikeassa elämässä asia ei ole näin yksiselitteistä, vaan jänispopulaation koon mallintamisessa

on otettava huomioon lukuisia muita muuttujia. Kyseinen esimerkki on kuitenkin sopivan yksinkertainen ja samalla ymmärrettävä, jotta sitä syvemmin tarkastelemalla voimme oppia lisää.

Jänikset ovat suloisia, mutta maailmassa on paljon muutakin tutkittavaa kuin suloisten jänisten seuraaminen. Fysiikan ilmiöt voidaan nähdä tietynlaisina funktioina. Objektien liikkumissuunta ja nopeus muuttuvat, kun fysikaaliset voimat vaikuttavat niihin. Nämä voimat ovat yleensä hyvin tunnettuja, joten kun voima vaikuttaa objektiin, se liikkuu. Objektiin vaikuttaa uudelleen voima ja se liikkuu jälleen. Tällä kertaa liike voi olla erilaista, koska vaikuttava voima voi olla erilainen objektin sijaitessa eri kohdassa. Jälleen objektiin vaikuttaa voima ja objekti liikkuu. On hyvä panna merkille, että kaiken tämän ajan objektiin vaikuttavien voimien lainalaisuudet ovat täsmälleen samat. Esimerkiksi meteoriitin pudotessa avaruudesta Maan pinnalle meteoriitin lentorataan vaikuttaa maapallon gravitaatiovoima. Gravitaation seurauksena meteoriitin kohtisuora putoamiskiikkyvyys kasvaa lähestyttäessä maata. Päästyään Maan ilmakehään, myös ilmanvastus vaikuttaa meteoriitin liikkeeseen hidastaen sen putoamista. Lisäksi meteoriitin koko ja sen nopeus ilmakehään tunkeuduttaessa vaikuttavat kappaleen lentorataan. Näiden tietojen avulla pyritään ennustamaan meteoriitin suunta ja nopeus kullakin ajanhetkellä, jotta lentorata ja putoamispaikka voitaisiin määrittää etukäteen mahdollisimman tarkasti.

Myös todellisen maailman objekteilla on alkuarvo. Kun fysiikan lakeja sovelletaan uudelleen ja uudelleen, objekti päättyy jonnekin toisaalle. Voidaan pohtia, pitääkö kaikki tämä paikkansa siinä todellisessa maailmassa jossa elämme? Ehkä. Siitä huolimatta, että tarkastelemme asiota todella yksinkertaistettujen mallien ja esimerkkien avulla tulemme huomaamaan, että maailmankaikkeudella on tarjota meille mielenkiintoisia yllätyksiä. Perehdymme kaaokseen ja siihen, kuinka se on muuttanut ihmiskunnan käsitystä fysikaalisten ilmiöiden ennustettavuudesta.

Iteroitavat funktiot ovat esimerkkejä **dynaamisista systeemeistä**. Dynaaminen systeemi on yleisnimitys järjestelmälle, systeemille, jonka tila riippuu ajasta. Dynaamisia systeemejä on lukuisia erilaisia ja ne voivat olla todella pieniä ja yksinkertaisia tai valtavan monimutkaisia, kuten esimerkiksi jonkin geometrisen kappaleen muoto kullakin ajan hetkellä. Luonnontieteiden lisäksi dynaamisten syteemien teoriaa hyödynnetään esimerkiksi kauppatieteissä mallintamaan pörssikurssien osakkeiden arvon muutosta tai lääketieteessä terveydentilaa voidaan ennustaa dynaamisiin systeemiin pohjautuvien mallien avulla.[1]

1.2 Dynaamiset systeemit ja radan kohtalo

Tarkasteltava systeemi voi olla diskreetti tai jatkuva riippuen siitä, millaisina ajanhetkinä systeemin tilaa tarkastellaan. Jos systeemin tilaa tarkastellaan vain tiettyin ajanhetkinä, kuten esimerkiksi tunnin välein, kyseessä on diskreetti systeemi. Esimerkiksi bakteeripopulaation kasvua tutkittaessa voidaan luoda malli, jossa oletetaan bakteeriden jakautuvan samanaikaisesti ja määritetään aikayksikön pituudeksi jakautumiseen kulunut aika. Tällöin bakteeripopulaation kasvun tutkimiseski saadaan aikaan yksinkertainen diskreetti malli, jossa populaation kokoa voidaan tarkastella kunkin

jakautumisen jälkeen. Tässä tutkielmassa tarkastellaan **diskreettejä** systeemejä. Iteroitavat funktiot ovat diskreettejä, sillä ne muuttuvat askelittain tietyillä väleillä.

Aiemmin keskityimme määrittämään iteroinnin tuottaman radan tietyllä alkuarvolla. Esimerkiksi alkuarvon $x_0 = 1$ radaksi funktiolla $f(x) = 5x - 3$ saadaan

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 32 \longrightarrow 157 \cdots .$$

Sen sijaan, että miettisimme iteroinnin seurauksena syntyvän radan yksityiskoh-
tia, on mielekkäämpää tutkia miten rata käyttäytyy pitkällä aikavälillä: kasvavatko
luvut suuremmiksi ja suuremmiksi vai pienenevätkö ne pienenemistään? Sen sijaan,
että kiinnittäisimme huomiota pelkästään yksittäisiin alkuarvoihin, yritämme osoittaa
radan käyttäytymisen useammille - kenties jopa kaikille - alkuarvoille kerralla.

1.2.1 Neliöntifunktion käyttäytyminen

Palataan aiempaan ja tuttuun esimerkkiin. Olkoon $f(x) = x^2$, valitaan alkuarvoksi
 $x_0 = 2$ ja katsotaan mitä tapahtuu iteroitaessa alkuarvoa:

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 256 \longrightarrow 65536 \cdots .$$

Huomataan, että luvut kasvavat yhtä suuremmiksi. Jatkaessamme iterointia, luvut
kasvaisivat vieläkin suuremmiksi.

Samoin kävisi, jos käyttäisimme alkuarvona lukua 3 tai 10 ja jatkaisimme neliöin-
tiä. Tässä tapauksessa minkä tahansa lukua 1 suuremman alkuarvon x_0 rata olisi
kasvava, sillä lukua 1 suuremman luvun toinen potenssi on aina suurempi kuin luku
itse.

Tarkasteltaessa radan käyttäytymistä pitkällä aikavälillä rata joko suppenee kohti
jotain lukua tai ei. Mikäli rata ei suppene sanotaan, että rata **hajaantuu**. Rata voi
hajaantua negatiiviseen tai positiiviseen äärettömyyteen tai vaihtoehtoisesti oskilloida
(esim. $2, 5, 2, 5, \dots$), jolloin rata ei myöskään suppene.

Neliöntifunktion tapauksessa rata on kasvava, sillä radan alkioit ovat aina edellistä
suurempia. Lisäksi radan alkioit kasvavat rajatta, eli radan alkioiden suuruudelle ei
ole olemassa ylärajaa, jolloin rata hajaantuu positiiviseen äärettömyyteen.

Tarkastellaan asiaa vielä matemaattisesti: Olkoon $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funktio siten, että
 $f(x) = x^2$ ja olkoon alkuarvo $x_0 > 1$. Tällöin alkuarvon x_0 rata funktiolla f on
kasvava, sillä

$$f(x) = x^2 > x \quad \text{kaikilla } x > 1.$$

Lisäksi rata hajaantuu, sillä radan alkioille ei ole olemassa ylärajaa. Tämän osoittami-
seksi tulee näyttää, että mille tahansa luvulle $M > 0$ on olemassa indeksi $N \in \mathbb{N}$ siten,
että kaikille radan alkioille $f^n(x_0)$ indeksistä $n = N$ alkaen pätee, että $f^n(x_0) > M$.
Ideana on siis osoittaa, että olipa valittu luku M miten suuri tahansa, jostain indek-
sistä N alkaen radan alkioit ovat lukua M suurempia.

Radan hajaantumisen osoittamisessa hyödynnetään Bernoullin epäyhtälöä, jota
käytetään usein reaalianalyysissä luvun $1 + x$ potenssien alaspäin arvioimisessa.

Lause 1.2. (Bernoullin epäyhtälö) Kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$ ja kaikilla reaaliluvuilla $x > -1$ pätee

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (1.2)$$

Bernoullin epäyhtälön täsmällinen todistus sivuutetaan, mutta väitteen osoittaminen todeksi kaikilla ei-negatiivisilla reaaliluvuilla x onnistuu helposti derivaatan avulla.

Todistus. Olkoon $x \geq 0$, $f(x) = (1 + x)^n$ ja $g(x) = 1 + nx$. Nyt $f(0) = 1 = g(0)$ kaikilla n . Derivaatan avulla voidaan osoittaa, että funktio f kasvaa nopeammin kuin funktio g riippumatta luvusta n . Vertaamalla funktioiden derivaattoja saadaan, että kaikille $x \geq 0$ pätee, että

$$f'(x) = n \underbrace{(1 + x)^{n-1}}_{\geq 1} \geq n = g'(x).$$

Tällöin funktio f kasvaa nopeammin kuin funktio g , kun $x \geq 0$. Täten $f(x) \geq g(x)$ kaikilla $x \geq 0$. \square

Palataan takaisin neliöntifunktioon ja osoitetaan, että alkuarvon $x_0 > 1$ radan alkioit todella kasvavat rajatta.

Todistus. Merkitään alkuarvoa $x_0 = 1 + \epsilon$, missä $\epsilon > 0$. Lisäksi olkoon $M > 0$ ja $f(x) = x^2$.

Valitaan $N = \log_2 \frac{M}{\epsilon}$. Tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= \underbrace{\left((x_0^2)^2 \cdots \right)}_{n \text{ kpl}}^2 \\ &= x_0^{(2^n)} \\ &= (1 + \epsilon)^{(2^n)} \\ &\geq 1 + \epsilon 2^n && (1.2) \\ &\geq 1 + \epsilon 2^N && (n \geq N) \\ &= 1 + \epsilon 2^{\log_2 \frac{M}{\epsilon}} \\ &= 1 + \epsilon \frac{M}{\epsilon} \\ &= 1 + M > M. \end{aligned}$$

Olipa M miten suuri luku tahansa, löydettiin indeksi N josta alkaen kaikki radan alkioit ovat suurempia kuin mielivaltaisen suuri luku M , kun alkuarvo $x_0 > 1$. Yhdessä radan kasvavuuden kanssa tästä seuraa, että rata hajaantuu positiiviseen äärettömyyteen. \square

Entä muut alkuarvot? Jos laskemme lukujen 0 ja 1 välillä olevan luvun toisen potenssin, luku pienenee. Esimerkiksi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Jos iteroimme alkuarvolla $x_0 = \frac{1}{2}$ neliöintifunktiolla saamme radaksi

$$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{1}{256} \longrightarrow \frac{1}{65536} \cdots$$

Iteroitaessa neliöintifunktiolla alkuarvoa, joka on lukujen 0 ja 1 välissä lukujonon luvut pienenevät pienentymistään, lähemmäksi ja lähemmäksi lukua 0. Sanotaan, että alkuarvon rata **lähestyy nollaa**. Joku saattaa miettiä, että miten voidaan osoittaa, että radan alkiot todella lähestyvät nollaa eivätkä suppene jotain todella pientä positiivista lukua kohti. Bernoullin epäyhtälön avulla tämä voidaan osoittaa vastaavanlaisella päättelyllä kuin tapauksessa $x_0 > 1$ osoitettiin radan hajaantuminen. Lähestyäkseen nollaa, radan alkioiden tulee olla jostain alkioista alkaen itseisarvoltaan pienempää kuin mielivaltaisen pieni luku δ , eli alkioiden etäisyys nolasta menee mielivaltaisen pieneksi.

Todistus. Merkitään nyt alkuarvoa $x_0 = \frac{1}{1+\epsilon}$, missä $\epsilon > 0$. Tällöin $0 < x_0 < 1$. Olkoon $\delta > 0$ jokin todella pieni luku ja valitaan $N = \log_2 \frac{2}{\delta\epsilon}$. Tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että

$$\begin{aligned}
|f^n(x_0)| &= \left| \underbrace{\left((x_0^2)^2 \cdots \right)^2}_{n \text{ kpl}} \right| \\
&= |x_0^{(2^n)}| && \text{(aina positiivista)} \\
&= x_0^{(2^n)} \\
&= \left(\frac{1}{1+\epsilon} \right)^{(2^n)} \\
&= \frac{1}{(1+\epsilon)^{(2^n)}} \\
&\leq \frac{1}{1+\epsilon 2^n} && (1.2) \\
&\leq \frac{1}{1+\epsilon 2^N} && (n \geq N) \\
&= \frac{1}{1+\epsilon 2^{\log_2 \frac{2}{\delta\epsilon}}} \\
&= \frac{1}{1+\epsilon \frac{2}{\delta\epsilon}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{2}{\delta}} \\
&< \frac{1}{\frac{2}{\delta}} \\
&= \frac{\delta}{2} < \delta.
\end{aligned}$$

Vaikka valittaisimme miten pienen positiivisen luvun δ tahansa, niin löydämme aina ideksin N , josta alkaen radan alkioit ovat pienempiä kuin δ . Siispä rata lähestyy nollaa. \square

Entä luku 0? Nolla kertaa nolla on nolla, joten iteroitaessa nollaa neliöintifunktiolla saamme radan joka koostuu nolista

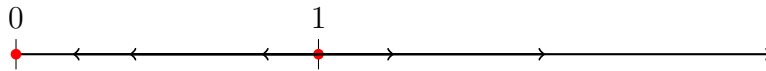
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

Sanotaan, että luku 0 on **kiintopiste**, sillä se ei muutu iteroitaessa. Matemaattisesti merkiten $f(0) = 0$. Myös luku 1 on kiintopiste, sillä $1^2 = 1 \implies f(1) = 1$.

Tiedämme nyt mitä kaikkien positiivisten alkuarvojen x_0 radoille tapahtuu neliöintifunktion tapauksessa:

- Jos $0 < x_0 < 1$ niin x_0 :n rata lähestyy nollaa.
- Jos $x_0 > 1$ niin x_0 :n rata hajaantuu.
- Jos $x_0 = 0$ tai $x_0 = 1$ niin x_0 on kiintopiste.

Päätelmää on havainnollistettu graafisesti lukusuoran avulla kuvassa 1.2. Lukusuora kuvaa miten kunkin alkuarvon radat käyttäytyvät, eli mitkä alkuarvoista lähestyvät nollaa, mitkä ääretöntä ja mitkä alkuarvot pysyvät paikoillaan. Usein tällainen pitkän aikavälin käyttäytyminen on ainut kiinnostava asia. Saatamme esimerkiksi haluta tietää, miten jänispopulaatiolle käy vuosien kuluessa. Pysyykö kanta vakaana, kuolevatko jänikset vai kasvaako populaatio saarella rajatta? Tämä tieto on paljon mielekkäämpää kuin tieto jänispopulaation koosta tietyinä vuotena.



Kuva 1.2: Lukusuora, jolla on kuvattu alkuarvojen $x_0 \geq 0$ käyttäytymistä iteroitaessa funktiolla $f(x) = x^2$.

Voimme helposti laajentaa neliöntifunktion havaintomme koskemaan kaikkia reaalilukuja.

- Jos $x_0 < -1$, niin $f(x_0) = (x_0)^2 > 1$. Tästä eteenpäin rata hajantuu.
- Jos $x_0 = -1$ niin $f(x_0) = (-1)^2 = 1$. Koska $f(1) = 1$, niin alkuarvon $x_0 = -1$ rata lähestyy lukua 1.
- Jos $-1 < x_0 < 0$, niin $0 < f(x_0) < 1$. Tästä eteenpäin rata lähestyy nollaa.

1.2.2 Kiintopisteet geometrisesti

Määritellään seuraavaksi funktion kiintopiste ja tutkitaan, miten kiintopiste voidaan löytää geometrisesti.

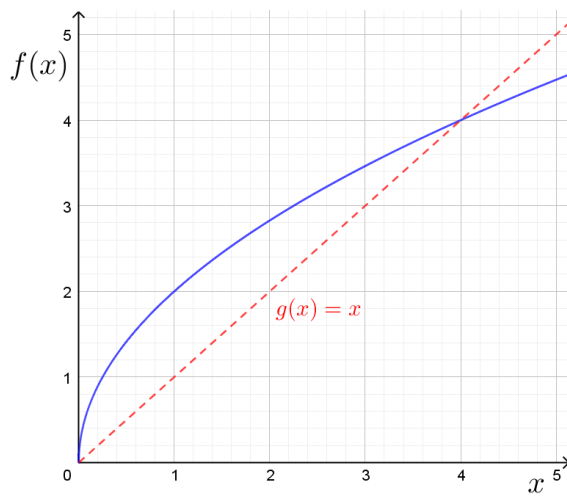
Määritelmä 1.3. Piste x on funktion $f: X \mapsto X$ kiintopiste, jos $f(x) = x$.

Geometrisesti kiintopisteitä voidaan yrittää etsiä piirtämällä funktion f kuvaajan kanssa samaan kuvaan funktion $g(x) = x$ kuvaaja, joka on suora $y = x$. Funktion f kiintopisteet ovat funktioiden f ja g kuvaajien leikkauspisteet.

Kuvaan 1.3 on piirretty erään funktion f ja suoran $g(x) = x$ kuvaajat. Tässä tapauksessa funktion ainut positiivinen kiintopiste on $x_0 = 4$, sillä kuvan perusteella käyrät leikkaavat kyseisessä pisteessä. Esimerkiksi piste $x_0 = 3$ ei ole kiintopiste, sillä käyrät eivät leikkaa pisteessä $x_0 = 3$. Tämä voitaisiin huomata myös siitä, että $f(3) \approx 3.4 \neq 3$.

1.2.3 Erilaiset kiintopisteet

Edellisessä kappaleessa löysimme neliöntifunktiolle $f(x)$ kaksi kiintopistettä: luvut 0 ja 1. Näiden kahden kiintopisteen välillä on kuitenkin varsin merkittävä ero siinä miten ne käyttäytyvät. Luvun 0 lähellä olevat luvut lähestyvät iteroitaessa nollaa, kun taas luvun 1 lähellä olevat luvut suuntautuvat kauemmaksi luvusta 1.



Kuva 1.3: Kuvaajaan on piirretty erään funktion f ja funktion $g(x) = x$ kuvaajat. Funktion f kiintopisteet löytyvät funktioiden f ja g kuvaajien leikkauspisteistä.

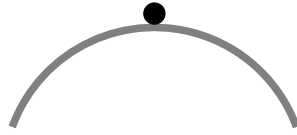
Ero näiden kiintopisteiden välillä on tärkeä. Kiintopisteen $x = 0$ läheisyydessä rata lähestyy kohti kiintopistettä $x = 0$. Kuvitellaan, että jokin pieni ulkoinen vaikuttava muutos aiheuttaisi sen, että alkuarvo x_0 liikahtaisi edes pölyhiukkasen verran luvusta 0 jompaan kumpaan suuntaan. Tällä liikkeellä ei kuitenkaan olisi merkitystä, sillä iteroitaessa lähestyisimme takaisin kohti nollaa. Tällaista kiintopistettä kutsutaan **vakaaksi**. Tilannetta voidaan havainnollistaa kuvittelemalla marmorikuula lasikulhon pohjalle. Vaikka liikuttaisimme kuulaa hieman, se palaisi lopulta takaisin kulhon pohjalle kuten kuvassa 1.4.



Kuva 1.4: Havainnollistus vakaasta kiintopisteestä. Marmorikuula on kiintopisteessä. Pienestä liikuttamisesta huolimatta kuula palaa takaisin kiintopisteeseen. Tällainen kiintopiste on vakaa.

Toisaalta kiintopiste $x_0 = 1$ on täysin erilainen. Jos nyt liikuttaisimme pistettä hieman jompaan kumpaan suuntaan iteroinnin seurauksena rata lähestyisi joko nollaa tai ääretöntä riippuen siitä kumpaan suuntaan vaikuttava voima pistettä siirtäisi. Rata ei siis enää palaisi takaisin kiintopisteeseen $x = 1$. Tällaista kiintopistettä x_0 , jonka lähellä olevat arvot työntyvät pois päin pisteestä x_0 sanotaan **epävakaaksi**. Tilannetta on havainnollistettu marmorikuulan avulla kuvassa 1.5. Nyt marmorikuula on paikoillaan kiintopisteessä ylösalaisin käännetyn kulhon päällä. Pienikin kuulaan kohdistuva liike aiheuttaisi kuulan vierimisen alas kulhon reunaa pitkin ja liikkumisen pois kiintopisteestä.

Ero vakaiden ja epävakaiden kiintopisteiden välillä on tärkeä. Todellisia tilanteita jäljittelevissä tietokonemallinnuksissa ei oleteta törmättävän epävakaasiin kiintopistei-



Kuva 1.5: Havainnollistus epävakasta kiintopisteestä. Marmorikuula on kiintopisteessä. Pienen liikuttamisen seurauksena kuula työntyy pois kiintopisteestä. Tällainen kiintopiste on epävakaa.

siin kovinkaan usein, koska pienikin niihin kohdistuva muutos aiheuttaa radan etäännyttämisen pisteestä. Yleensä ollaan kiinnostuneita vakasta kiintopisteistä. Numeerisia laskentamenetelmiä käytettäessä pieniä virheitä esiintyy aina. Vakaiden kiintopisteiden tapauksessa nämä virheet voidaan antaa anteeksi, sillä ne eivät oleellisesti vaikuta systeemin käyttäytymiseen.

Olet ehkä joskus yrittänyt asettaa kahta kolikkoa päällekkäin ja huomannut, kuinka ylemmän kolikon asettaminen paikalleen on todella vaikeaa. Mikäli et onnistu asettamaan sitä täydellisesti alemman kolikon päälle se vierii välittömästi alas pöydälle. Todellisessakaan elämässä harvoin törmää vertauskuvallisesti marmorikuuliin, jotka ovat asetettu ylösalaisin olevan kulhon päälle. Paljon todennäköisempää on löytää marmorikuula kulhon pohjalta.

Mikäli kiintopiste ei ole vakaa eikä epävakaa, kyseessä on **neutraali** kiintopiste. Ratojen käyttäytyminen neutraalin kiintopisteen läheisyydessä ei ole aivan yhtä yksiselitteistä kuten vakaaan ja epävakaaan kiintopisteen tapauksessa. Siirryttäessä neutraalista kiintopisteestä pois pisteen rata saattaa esimerkiksi palata takaisin kiintopisteeseen tai loitota siitä kauemmas riippuen siitä kumpaan suuntaan kiintopisteestä siirryimme. Rata saattaa myös pysyä paikoillaan, kuten esimerkiksi funktion $f(x) = x$ tapauksessa, missä jokainen piste $x \in \mathbb{R}$ on neutraali kiintopiste.

Olemme nyt tutustuneet iteroinnin oleellisimpiin asioihin. Tiedämme, että radan käyttäytyminen pitkällä aikavälillä on oleellisempaa kuin lyhyen ajan yksityiskohdat. Samoin kiintopisteen tyyppi, sekä radan lähestyminen ääretöntä ovat oleellisia asioita. Vaikka esimerkit ja havainnollistukset marmorikuulien avulla ovat olleet tähän mennessä todella suoraviivaisia, niin todellinen käyttäytyminen näiden termien takana on samankaltainen monimutkaisemminkin malleissa. Jatkossa tarvitsemme näitä termejä tarkastellessamme lisää dynaamisia systeemejä.

1.3 Populaation mallinnus

Tähän mennessä olemme tarkastelleet ja iteroineet funktioita ilman minkäänlaista kytköstä todelliseen maailmaan. Seuraavaksi otamme askeleen lähemmäksi todellisuutta johtamalla eliölajien populaatiokokojen muutosta mallintavan yhtälön.

1.3.1 Eksponentiaalinen kasvu

Kuvitellaan tilanne, jossa joukko purjehtijoita rantautuu asuttamattomalle saarelle lepäämään ja täydentämään muonavarastoaan tuoreilla hedelmillä. He tuovat mukanaan saarelle muutaman lemmikkijäniksen, joista neljä karkaa rehevään metsään palaamatta koskaan takaisin. Kun retkikunta muutaman päivän kuluttua jatkaa matkaansa, nämä neljä jänistä jäävät saarelle.

Kysymys kuuluu: mitä tapahtuu jänispopulaatiolle vuosien kuluessa? Oletettavasti se kasvaa vuosi vuodelta. Jos oletamme, että populaation koko tuplaantuu vuosittain niin voimme luoda funktion $f(x) = 2x$ mallintamaan populaation kokoa. Iteroimalla alkuarvoa $x_0 = 4$ funktiolla f huomaamme, että populaation koko alkaa kasvaa muutaman vuoden jälkeen todella nopeasti:

$$4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow 32 \longrightarrow 64 \longrightarrow 128 \longrightarrow 256 \longrightarrow 512 \longrightarrow 1024 \cdots \quad (1.3)$$

Kuten aiemmin opimme, usein olemme kiinnostuneita radan pitkän aikavälin käyttämisestä. Tässä tapauksessa funktion f yhtälö on helppo, joten voimme määrittää yhtälön jänispopulaation koolle, kun aikaa saarelle saapumisesta on kulunut n vuotta.

Iteroitaessa funktiolla $f(x) = 2x$ radan arvot tuplaantuvat jokaisen iteraation välillä. On siis selvää, että saadaksemme n :nnen iteraation tuloksen, tulee alkuarvoa kertoa n kertaa luvulla 2. Matemaattisesti merkittynä

$$f^{(n)}(x_0) = x_0 2^n.$$

Esimerkiksi kuten huomaamme yhtälöstä (1.3), niin neljännen iteraation jälkeen populaation koko on 64 jänistä. Täsmällisesti

$$f^{(4)}(4) = 4 \cdot 2^4 = 4 \cdot 16 = 64.$$

Tämä tulos voidaan yleistää helposti. Vuosittaista kasvua kuvaava suhdeluku ei ole välttämättä 2. Olkoon se jokin reaaliluku $r \in \mathbb{R}$. Täten saamme funktion f yhtälöksi

$$f(x) = rx, \quad (1.4)$$

missä luku x on populaation koko jonain vuonna ja $f(x)$ on populaation koko seuraavana vuonna. Vastaavasti radan n :s alkio on

$$f^{(n)}(x_0) = x_0 r^n. \quad (1.5)$$

Lukua r yhtälössä (1.4) kutsutaan parametriksi. Populaation koko muuttuu (usein) iteroitaessa funktiota, mutta parametri r pysyy vakiona. Funktion iterointi voidaan aloittaa uudelleen ja muuttaa parametria r ja tutkia, miten parametrin muutos vaikuttaa populaation kokoon iteraation edetessä.

Kirjoitetaan populaation kokoa n vuoden kuluttua mallintava yhtälö 1.5 uudelleen muodossa

$$P(t) = P_0 r^t, \quad (1.6)$$

missä P_0 on alkuperäisen populaation koko, t on kulunut aika vuosina ja $P(t)$ kuvaa populaation kokoa t vuoden kuluttua.

Huomasimme, että populaation koko kasvaa eksponentiaalisesti ainakin kun $r = 2$ ja $x_0 = 4$. Miten populaation koolle ajan kuluessa käy, jos $r = 1$? Entä jos $r = 0.5$?

Eksponentiaalinen mallinnus on yksinkertainen ja oiva työkalu arvioitaessa ilmiötä, joilla ei ole merkittäviä rajoittavia tekijöitä. Esimerkiksi radioaktiivisen aineen aktiivisuutta ja säästötilillä olevan pääoman määrää voidaan arvioida eksponentiaalisen mallin avulla. Usein systeemeillä, kuten esimerkiksi jänispopulaatiolla, on olemassa ikuisen kasvun estäviä rajoittavia tekijöitä. Seuraavaksi muokkaamme aikaansaamaamme yhtälöä 1.6 hieman monimutkaisemmaksi.

1.3.2 Logistinen funktio

Edellä esitelty malli populaation mallintamiseen on selvästi epärealistinen. Mallin mukaan kaikilla parametreilla $r > 1$ populaation koko kasvaa rajatta. Eihän jänispopulaation koko voi kasvaa äärettömän suureksi? Tässä kappaleessa luomme hieman todellisemmän mallin, jossa populaation koko ei kasva ikuisesti. Myöhemmin pääsemme tutkimaan tämän mallin avulla kaoottisia systeemejä.

Jos autiolle saarelle jätetään muutama jänis ja saarella kasvaa runsaasti maistuvaa ruohoa, jänikset saavat pidettyä itsensä kylläisinä ja lisääntyvät muutaman ensimmäisen vuoden aikana. Jossain vaiheessa jäniksiä alkaa olla niin paljon, että ruokaa ei riitä enää kaikille. Jänikset näkevät nälkää ja seuraavana vuonna kuolleisuus on suurempi kuin syntyvyys, jolloin populaation koko pienenee. Miten tällainen idea voidaan mallintaa yhtälön avulla?

Lähdetään liikkeelle tutusta tilanteesta, jossa parametri r on ainoa populaation kokoon vaikuttava tekijä:

$$f(P) = rP \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad (1.7)$$

Nyt haluamme rajoittaa funktion arvojen kasvua jotenkin. Merkitään muuttujalla T sitä populaation kokoa, kun jäniksiä on niin paljon, että kaikki jänikset näkevät nälkää. Jos populaation koko P on yhtä suuri kuin T (kirjaimella T viitataan populaation kuvitteelliseen *tuhoutumisrajaan*) kaikki jänikset nääntyvät nälkään ja kaikki populaation jänikset kuolevat. Haluamme luoda mallin, jossa populaation suhteellinen koko sen maksimikokoon vaikuttaa seuraavan vuoden populaatioon. Mikäli populaatio on todella pieni, se voi kasvaa lähes eksponentiaalisesti, mutta populaation kasvaessa haluamme hillitä sen kasvua ja lopulta populaation kasvaessa lähelle ympäristön kantokykyä haluamme populaation pienenevän.

Muokataan yhtälöä 1.7 seuraavasti:

$$f(P) = rP \left(1 - \frac{P}{T}\right). \quad (1.8)$$

Termi $\left(1 - \frac{P}{T}\right)$ saa aina arvoja lukujen 0 ja 1 väliltä ja toimii kertoimena populaation kasvulle. Mitä pienempi populaation suhteellinen koko $\frac{P}{T}$ on, sitä suurempia arvoja

kerroin saa ja täten se rajoittaa populaation kasvua melko vähän. Mikäli populaation suhteellinen koko on suuri, tällöin kertoimesta tulee pieni ja näin ollen se rajoittaa voimakkaasti populaation kasvua.

Mitä nyt tapahtuu, jos populaation koko P kasvaa yhtä suureksi kuin T , eli populaatio saavuttaa teoreettisen maksimikoon? Lasketaan seuraavan vuoden populaation koko, kun populaatio $P = T$:

$$\begin{aligned} f(T) &= rT \left(1 - \frac{T}{T}\right) \\ &= rT(1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

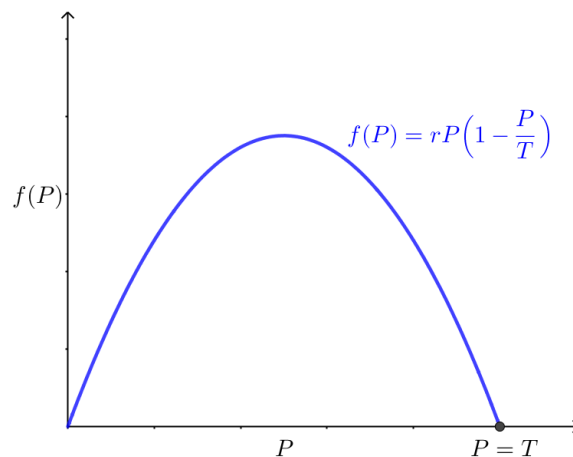
Jos $P = T$, populaation kaikki jäsenet todellakin kuolevat pois. Miten sitten käy, jos populaation koko on todella pieni verrattuna tuhoutumisrajaan? Tässä tapauksessa saarella olisi tarjolla olevaan ravintoon nähden todella vähän jäseniä ja voidaan olettaa, että populaatio kasvaa nopeasti. Jos P on paljon pienempi kuin T , niin $\frac{P}{T} \approx 0$ ja

$$\left(1 - \frac{P}{T}\right) \approx (1 - 0) = 1.$$

Tällöin yhtälöstä 1.8 tulee

$$f(P) \approx rP.$$

Siispä pienillä parametrin P arvoilla malli muistuttaa edellisessä kappaleessa tutkittua eksponentiaalisen kasvun mallia.



Kuva 1.6: Funktion $f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{T}\right)$ kuvaaja. Huomaa, että kun $P = T$, niin seuraavan vuoden populaatio $f(P) = 0$.

Tarkastelemalla tätä mallia geometrisesti (kts. kuva 1.6) huomataan, että jos $P = 0$, niin seuraavana vuonna jäseniä on myös nolla - mikä on täysin loogista. Jos

populaation koko on nollan ja tuhoutumisrajan T välillä, populaation koko muuttuu. Pienet populaatiot kasvavat nopeasti ja kun P on lähellä tuhoutumisrajaa, populaation koko pienenee.

Muokataan vielä aikaansaamaamme yhtälöä 1.8 hieman. Olemme tarkoittaneet luvulla P populaation kokoa ja merkinnällä $f(P)$ populaation kokoa seuraavan vuonna. Täsmällisesti merkittynä se voidaan kirjoittaa muodossa

$$P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{T}\right), \quad (1.9)$$

missä P_n on n :nnen sukupolven koko ja P_{n+1} on vastaavasti $(n+1)$:nnen sukupolven koko.

Yhtälö 1.9 riippuu parametrilla T , joka kertoo jänisten maksimimäärän. Yleisesti ottaen se voi olla todella suurikin luku. Parametri T riippuu monista tekijöistä. Saari, jonne jänikset saapuvat voi olla pieni tai suuri. Saaren ravinnon määrä, ilmasto, petoeläinten lukumäärä ja lukemattomat muut tekijät vaikuttavat parametrin T arvoon, eli jänispopulaation maksimaaliseen kokoon kyseisellä saarella. Emme kuitenkaan olleet kiinnostuneita parametrin T tarkasta arvosta, emmekä populaation koosta. Haluamme luoda yleisen mallin jonka avulla rajoitetun populaation kokoa voidaan arvioida ajan kuluessa.

Jatketaan vielä mallin muokkaamista jakamalla yhtälö 1.9 puolittain luvulla T

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= rP_n \left(1 - \frac{P_n}{T}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{P_{n+1}}{T} &= \frac{rP_n}{T} \left(1 - \frac{P_n}{T}\right) \end{aligned}$$

ja merkitään $x = \frac{P}{T}$. Tällöin yhtälö saadaan kirjoitettua yksinkertaisen näköisesti

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Luku x ilmaisee populaation koon ja tuhoutumisrajan välisen suhteen ja täten $x \in [0, 1]$ aina. Esimerkiksi jos $T = 500$ ja $P = 200$, niin $x = \frac{2}{5} = 0.4$. Toisin sanoen saarella olisi jäniksiä 40% niiden maksimimäärästä.

Voimme palata kuvaamaan tilannetta funktion f avulla. Nyt

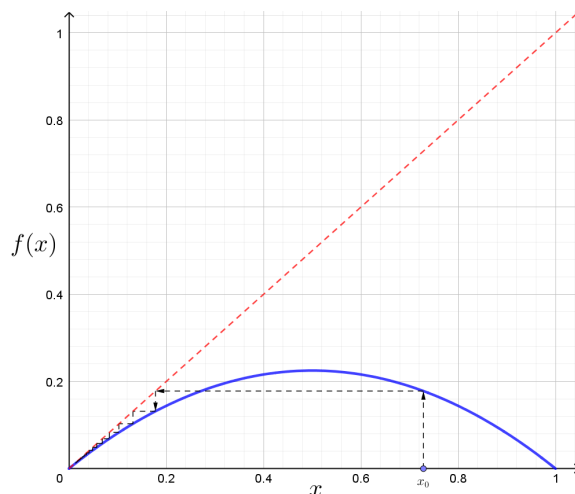
$$f(x) = rx(1 - x), \quad (1.10)$$

missä x ilmaisee populaation nykykoon ja maksimikoon välisen suhteen kuten yllä esiteltiin ja vastaavasti $f(x)$ on vastaava suhdeluku seuraavana vuonna. Muuttuja r on kasvunopeuteen vaikuttava parametri. Eksponenttiyhtälön tapauksessa huomattiin, että populaatio kasvaa rajatta jos $r > 1$. Lisäksi se pysyy ennallaan jos $r = 1$ ja pienenee kohti nollaa jos $0 < r < 1$. Funktiota 1.10 kutsutaan **logistiseksi funktioksi** ja sen käyttäytyminen parametriä r muuttaessa poikkeaa täysin eksponenttifunktiosta.

Pian huomaamme, että logistisella funktiolla on sen yksinkertaisuudesta huolimatta mielenkiintoisia ja monimutkaisia ominaisuuksia. Luvussa 2 tulemme käyttämään logistista funktiota esimerkkinä kaoottisesta systeemistä.

Tutkitaan, miten logistinen funktio käyttäytyy parametrin r eri arvoilla. Olkoon aluksi $r < 1$, vaikkapa $r = 0.9$. Oletettavasti iteroitaessa funktion rata lähestyy nollaa, eli laji kuolee sukupuuttoon, sillä parametri r kuvaa nimenomaan vuotuista populaation muutoskerrointa.

Alkuarvon rataa voidaan selvittää myös kuvaajan avulla iteroimalla alkuarvoa graafisesti. Kuvitellaan, että olemme kiinnostuneita alkuarvon $x_0 = 0.73$ radasta funktiolla $f(x) = 0.9x(1 - x)$. Piirretään ensin funktion f kanssa samaan kuvaan suora $y = x$. Aluksi meidän täytyy selvittää $f(x_0)$ funktion kuvaajasta. Aloitamme radan piirtämisen kulkemalla x -akselin pisteestä $x_0 = 0.73$ pystysuoraan kunnes saavutamme funktion f kuvaajan. Saamme, että $x_1 = f(x_0) \approx 0.17$. Saadaksemme selville radan seuraavan alkion, meidän tulee laskea funktion arvo pisteessä $x_1 \approx 0.17$. Tätä varten kuljemme vaakasuoraan vasemmalle, kunnes leikkaamme suoran $y = x$. Tässä pisteessä $x = x_1$. Seuraavaksi kuljemme jälleen pystysuoraan saadaksemme selville radan seuraavan alkion $x_2 = f(x_1)$. Jatkamalla tällä tavalla voimme selvittää nopeasti miten alkuarvon rata käyttäytyy.

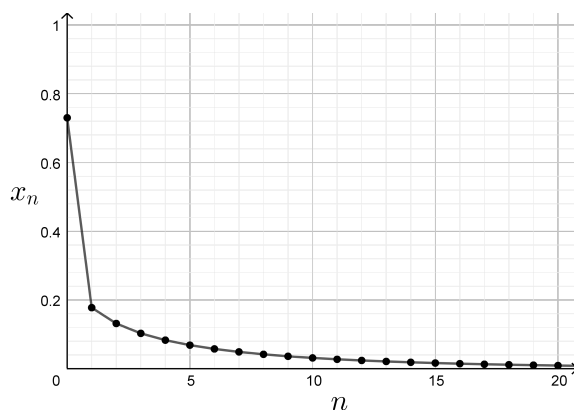


Kuva 1.7: Logistisen funktion $f(x) = rx(1 - x)$ kuvaaja, kun $r = 0.9$. Kuvassa on iteroitu graafisesti alkuarvon $x_0 = 0.73$ rataa. Piste $x = 0$ on vakaa kiintopiste.

Graafista iterointia esittävästä kuvasta 1.7 ja iteraation etenemistä ajan suhteen esittävästä kuvaajasta 1.8 huomataan, että iteroitaessa alkuarvoa logistisella funktiolla muutoskerroimella $r = 0.9$, rata lähestyy vähitellen vakaata kiintopistettä $x = 0$.

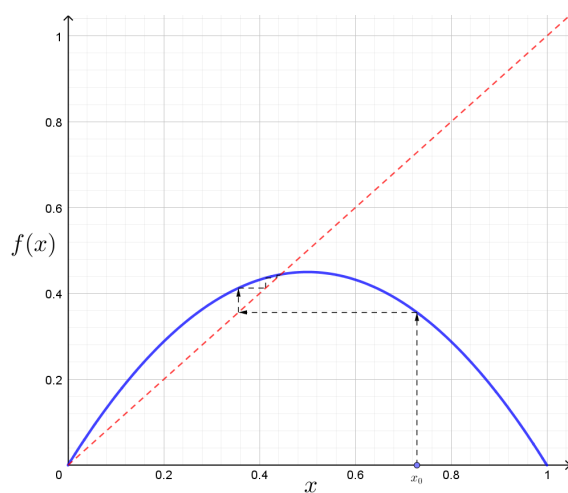
On hyvä muistaa, että mittaamme populaation kokoa suhdelukuna. Populaation koon ollessa esimerkiksi $x = 0.4$ populaation koko on 40% maksimaalisesta koosta, ei 0.4 jänistä.

Entä jos muutoskerroin r on suurempi kuin 1? Oletettavasti laji ei ainakaan kuole sukupuuttoon, vaan kasvaa jonkin aikaa kunnes kasvu alkaa tasaantua. Juuri tällaista tilannetta varten loimme tämän mallin vastaamaan paremmin todellisuutta rajoittamalla populaation kasvamista ikuisesti. Kuvissa 1.9 ja 1.10 on esitetty alkuarvon



Kuva 1.8: Aikasarja kuvassa 1.7 esitetylle radalle. Kuvaajasta huomataan, että populaatio pienenee ja lopulta kaikki jänikset kuolevat pois.

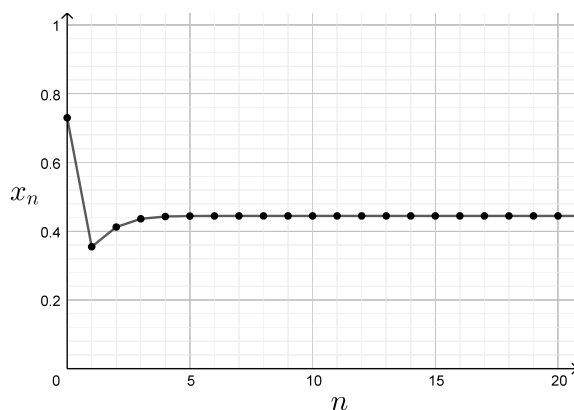
$x_0 = 0.73$ rata logistisella funktiolla kun $r = 1.8$. Huomataan, että aluksi populaation koko pienenee, mutta toisesta iteraatiosta alkaen rata tasaantuu kohti kiintopistettä $x \approx 0.45$.



Kuva 1.9: Logistisen funktion $f(x) = rx(1-x)$ kuvajaa, kun $r = 1.8$. Kuvassa on iteroitu graafisesti alkuarvon $x_0 = 0.73$ rataa. Huomataan, että $x \approx 0.45$ on vakaa kiintopiste. Myös $x = 0$ on kiintopiste, mutta nyt kyseessä on epävakaa kiintopiste.

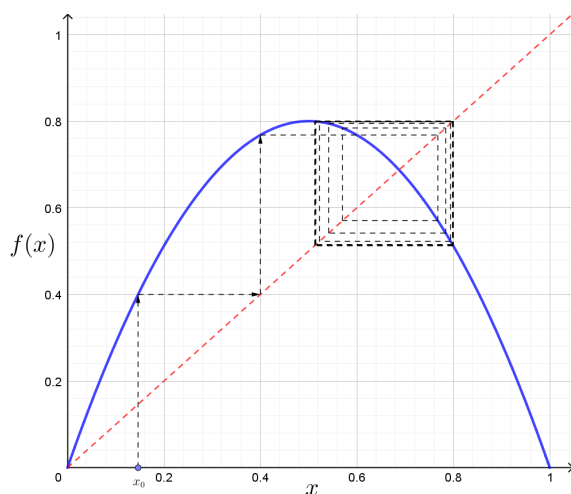
Tällaisissa tapauksissa jokin luonnonilmiö, sairaus ja jänisten ravintoon vaikuttava tuholaishyönteinen saattaa aiheuttaa jonain vuonna poikkeaman populaation koossa. Populaation koko palautuu kuitenkin nopeasti takaisin vakaaseen kiintopisteeseen. Tällaisen poikkeaman ilmentymistä voidaan pitää indikaattorina jostain populaation kokoon vaikuttavasta ulkoisesta ilmiöstä saarella.

Katsotaan vielä yhtä esimerkkitapausta kun $r = 3.2$. Kasvukerroin on nyt lähes kaksi kertaa suurempi kuin edellisessä tapauksessa. Kasvaako populaatio nyt niin nopeasti, että se saavuttaa tuhoutumisrajan? Vai tasaantuko populaatio nytkin, kenties hieman suurempaan lukuun?



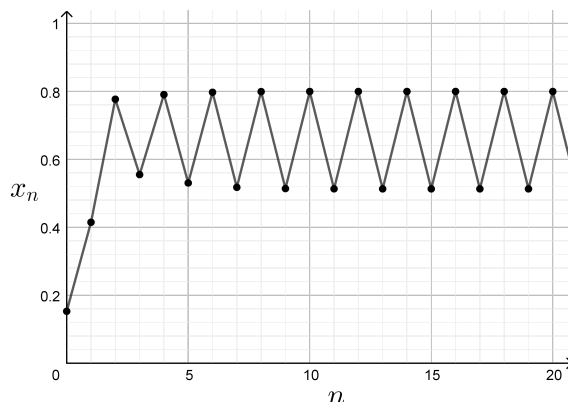
Kuva 1.10: Aikasarja kuvassa 1.9 esitellylle radalle. Piste $x \approx 0.45$ on vakaa kiintopiste.

Kuvissa 1.11 ja 1.12 on esitetty alkuarvon $x_0 = 0.153$ radan 20 ensimmäistä iteraatiota muutoskertoimella $r = 3.2$. Huomataan, että populaatio ei enää lähestykään jotain tiettyä arvoa, vaan heilahtelee kahden populaation koon välillä.



Kuva 1.11: Logistisen funktion $f(x) = rx(1 - x)$ kuvajaa, kun $r = 3.2$. Kuvassa on iteroitu graafisesti alkuarvon $x_0 = 0.153$ rataa. Rata ei lähesty tiettyä pistettä. Radalla on kaksi osajonoa, joista ensimmäinen lähestyy pistettä $x \approx 0.5$ ja toinen pistettä $x \approx 0.8$. Rata on 2-jaksoinen.

Muutaman vuoden kuluttua saarella eläisi paljon jäniksiä - noin 80% maksimimäärästä. Seuraavana vuonna jänikset ovat ylikuluttaneet ravintona käytettävän ruohon ja populaatio kutistuu noin 50% maksimimäärästä. Populaation pienentyessä ruoho saa rauhassa kasvaa. Seuraavalle sukupolvelle ruohoa riittää jälleen runsaasti ja populaatio kasvaa takaisin noin 80% maksimimäärästä. Radan sanotaan olevan 2-jaksoinen. Rata voidaan jakaa kahteen osaan, osajonoon. Ensimmäiseen osajonoon kuuluvat ne alkio, jotka on saatu parillisilla iteraatioiden määrällä ja vastaavasti toiseen osajonoon kuuluvat parittomilla iteraatioiden määrällä saadut alkio. Ensimmä-



Kuva 1.12: Aikasarja kuvassa 1.11 esitetylle radalle. Rata ei lähesty tiettyä pistettä. Radalla on kaksi osajonoa, joista ensimmäinen lähestyy pistettä $x \approx 0.5$ ja toinen pistettä $x \approx 0.8$.

mäinen osajono lähestyy lukua 0.5 ja toinen osajono lukua 0.8.

Määritelmä 1.4. (Jaksollinen rata) Olkoon $f: X \rightarrow X$ dynaaminen systeemi. Alkuarvon x_0 rata on n -jaksollinen, jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että osajonot $f^{k+nm}(x_0)$ suppenevat kaikilla $k \in \{1, \dots, n\}$ kun $m \in \mathbb{N}$ lähestyy ääretöntä.

Määritelmässä n tarkoittaa radan jakson pituutta. Esimerkiksi kuvissa 1.11 ja 1.12 esitetty rata on 2-jaksoinen. Tällöin radan parittomien iteraattien osajono

$$f^{1+2m}(x_0) = \{f^1(x_0), f^3(x_0), f^5(x_0), f^7(x_0) \dots\}$$

suppenee kohti lukua 0.5 kun m lähestyy ääretöntä. Vastaavasti parillisten iteraattien osajono

$$f^{2+2m}(x_0) = \{f^2(x_0), f^4(x_0), f^6(x_0), f^8(x_0) \dots\}$$

suppenee kohti lukua 0.8 kun m lähestyy ääretöntä.

On oleellista, että osajonot $f^{k+nm}(x_0)$ suppenevat kaikilla $k \in \{1, \dots, n\}$. Jos esimerkiksi parillisten iteraattien osajono suppeneisi ja parittomien iteraattien osajono hajaantuisi, varsinainen rata ei olisi 2-jaksoinen.

1.4 Yhteenveto

Tutkimme alkuarvojen ratojen käyttäytymistä iteroitaessa alkuarvoa logistisella funktiolla. Tutkimme miten radan käyttäytyminen muuttuu eri parametrin r arvoilla. Koekelimme kolmea eri parametrin r arvoa ja näimme kolme erilaista käyttäytymistä. Arvolla $r = 0.9$ (kuva 1.7) radalla oli vakaa kiintopiste $x = 0$. Arvolla $r = 1.8$ (kuva 1.9) radalla oli vakaa kiintopiste $x \approx 0.45$ ja viimeisimpänä huomasimme, että arvolla $r = 3.2$ (kuva 1.11) rata oli 2-jaksoinen. Nämä nähdyt käyttäytymiset ovat vain pintaraapaisu siitä, millaisia ilmiöitä logistinen funktio sen yksinkertaisuudestaan huolimatta tuottaa.

Luku 2

Kaaos

Vuonna 1687 Isaac Newton julkaisi teoksen *Principia Mathematica*, jossa hän esitteli mekaniikan kolme peruslakiaan ja pohti ajan ja avaruuden käsitteitä. Newton esitteli ideansa universaalista painovoimalaista, jonka mukaan samat fysiikan lait pätevät putoavaan omenaan missä päin Englantia tahansa. Newtonin painovoimalain mukaan maailmankaikkeuden jokaisen massallisen hiukkasen aiheuttama voima toiseen massalliseen hiukkaseen on tarkkaan määritelty. Newton näytti, että putoavan omenan ja maan, sekä kuun ja maan väliset voimat voidaan esitellä samojen lakien avulla.

Teoksen julkaisun aikaansaama mekaniikan syvempi tutkimus on osoittanut, että Newtonin painovoimalaki ei ollutkaan täydellisen täsmällinen. Albert Einstein julkaisi vuonna 1905 yleisen suhteellisuusteorian, jossa hän osoittaa Newtonin painovoimalain epätarkkuuden, kun kappaleet ovat planeettojen kokoisia. Myöskään todella pienillä objekteilla painovoimalaki ei pidä täsmällisesti paikkaansa, vaan se on korvattu kvanttimekaniikan tuloksilla. Newtonin aikakaudella maailmankaikkeuden katsottiin koostuvan konkreettisista objekteista, jonka seurauksena heräsi ajatus maailmankaikkeuden käyttäytymisen ennustamisesta. Uskottiin, että on olemassa säännöt, joiden avulla maailmankaikkeus rakentuu.[1, s. 67-72]

Vaikka Newtonin lait eivät osoittautuneet täydelliksi, mekaniikan tutkimisen myötä on todettu, että asioilla on olemassa tietyt lainalaisuudet. Newtonin aikakaudella tieteen tehtävänä oli etsiä nämä lait ja muotoilla ne matematiikan kielelle.

Objektit liikkuvat ennalta määriteltyjen lakien mukaan. Tällainen maailmankaikkeus on **deterministinen**, jossa nykyhetki on määritelty aiemman hetken perusteella. Jos me tiedämme objektin nykyisen sijainnin, sekä fysiikan täsmälliset lait - voimat, jotka objektiin vaikuttavat - voimme laskea objektin tulevan sijainnin. Yleisemmin ajateltuna tarkkojen mittausten ja täsmällisten fysiikan kaavojen avulla saamme otteen tulevaisuudesta. Tulevaisuuden laskemiseksi tarvitsemme vain tehokkaan tietokoneen, joka kykenee monimutkaisiin laskutoimituksiin. Siistiä, eikö olekin?

Tietenkään tämä ei ole mahdollista, sillä emme pysty mittaamaan asioita *äärettömän tarkasti*, eikä meillä ole teknologian huimasta kehityksestä huolimatta käytössä niin tehokkaita tietokoneita, jotka pystyisivät valtavan datamäärän avulla laskemaan mitä tulevaisuudessa tapahtuu. Lisäksi fysiikan lakeja johdettaessa tehdään käytännössä aina pienen pieniä yksinkertaistuksia.

Tiede kehittyy jatkuvasti ja meillä on käytössä entistä parempia mittaustyökaluja, ymmärrämme luonnonlakeja ja ilmiöitä paremmin kuin koskaan aiemmin ja tietokoneet pystyvät yhä vaativampiin laskutoimituksiin. Siitä huolimatta emme pysty ennustamaan hurrikaanin täsmällistä reittiä tai edes seuraavan viikon säätä. Kyse ei ole kuitenkaan siitä, ettemmekö ymmärtäisi niitä fysiikan lakeja jotka vaikuttavat energian liikkeeseen, ilman lämpötilaan tai kosteuteen. Meidän tulisi tuntea kaikki tutkittavaan ilmiöön vaikuttava lainalaisuudet täsmällisen tarkasti ilman pienintäkään yksinkertaistusta. Tarvitsisimme myös tarkempia mittaustuloksia ilmakehän tämänhetkistä olosuhteista, sekä tehokkaampia tietokoneita saatavilla olevan datan analysointia varten.

Vaikka fysiikan peruslait ovat yksinkertaisia, se ei tarkoita että maailmankaikkeus olisi yksinkertainen tai ennalta arvattavissa. Itseasiassa monimutkaisuutta ja satunnaisuutta ilmenee kaikkialla. Miten tämä oikein on mahdollista, jos kaikki on lähtöisin yksinkertaisista ja ennalta määräytyistä fysiikan lainalaisuuksista? Yksi oletus on, että monimutkaiset ilmiöt syntyvät kun systeemi on suurikokoinen. Esimerkiksi syvänmeren virtauksissa on osallisena suunnattoman monta vesimolekyyliä, jotka liikkuvat enemmän tai vähemmän vapaasti aiheuttaen vesimassojen ennalta-arvamaattoman käyttäytymisen. Vastaavasti yksinkertaiset systeemit, kuten esimerkiksi aiemmin tutkimamme iteroivat funktiot ovat tuottaneet yksinkertaisia tuloksia.

Tässä luvussa tutkimme kaaosta. Miten satunnaisuutta voi esiintyä deterministisessä maailmankaikkeudessa? Ovatko fyysikan lait sittenkään oikeassa? Oliko Newton väärässä? Tuskin. Tulemme huomaamaan kuinka yksinkertaiset deterministiset systeemit voivat tuottaa yllätyksellisiä ja satunnaisia tuloksia.

2.1 Kaaos ja logistinen funktio

Ensimmäisessä luvussa esiteltiin logistinen funktio

$$f(x) = rx(1 - x), \quad (2.1)$$

missä x kuvaa populaation kokoa suhdelukuna populaation maksimikokoon. Täten $x \in [0, 1]$. Jotta seuraavan vuoden populaation määrää kuvaava $f(x)$ saisi myös arvoja pelkästään väliltä $[0, 1]$ on parametrin r arvoja rajoitettava välille $[0, 4]$. Asia voidaan osoittaa seuraavalla tavalla:

Logististinen funktio on jatkuva kaikkialla, joten se saavuttaa maksiminsa välillä $x \in [0, 1]$ joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolla on nollakohta välin molemmissa päätepisteissä. Funktio f ei siis saavutta maksimiaan välin päätepisteissä. Voidaan myös helposti todeta, että $f(0) = 0 = f(1)$ ja $f(x) > 0$ kun $x \in]0, 1[$ ja $r > 0$.

Funktion f derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(1 - x) - rx \\ &= r - 2rx \\ &= r(1 - 2x), \end{aligned}$$

jonka ainut nollakohta sijaitsee pisteessä $x_0 = \frac{1}{2}$. Funktion minimi välillä $x \in [0, 1]$ on 0 ja maksimiksi saadaan derivaatan nollakohdassa parametrin r arvosta riippuen

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= r \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

On siis oltava $r \in [0, 4]$, jotta $f(x) \in [0, 1]$.

Tähän mennessä olemme tutkineet alkuarvojen ratoja logistisella funktiolla muutamilla eri parametrin r arvoilla. Katsotaan mitä tapahtuu, kun parametrin r arvot lähestyvät lukua 4.

2.1.1 Jaksollinen käyttäytyminen

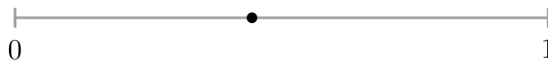
Edellisessä luvussa tutkimme logistisen funktion käyttäytymistä muutamissa eri tilanteissa. Aloitimme asettamalla parametrin arvoksi $r = 0.9$ ja huomasimme, että alkuarvolla $x_0 = 0.73$ populaatio pienenee nopeasti ja kuolee lopulta pois. Tilannetta kuvattiin graafisen iteroinnin ja iteroitujen arvojen kuvaajan avulla kuvissa 1.7 ja 1.8. Huomattiin, että $x = 0$ on vakaa kiintopiste, eli kaikki alkuarvot x_0 lähestyvät iteroitaessa nollaa.

Tätä lähestymistä on mallinettu kuvassa 2.1 **lopputilanne-diagrammilla**. Kuvaan on piirretty piste kohtaan $x = 0$. Se kertoo systeemin lopullisen tilanteen, eli näyttää mihin pisteeseen alkuarvon rata tulee lopulta päätymään parametrin arvolla $r = 0.9$.



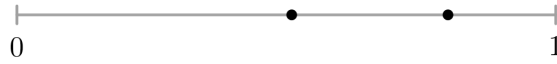
Kuva 2.1: Lopputilanne-diagrammi logistiselle funktiolle kun $r = 0.9$. Vertaa kuviin 1.7 ja 1.8.

Kokeilimme myös, miten logistinen funktio käyttäytyy kun $r = 1.8$. Huomasimme kuvien 1.9 ja 1.10 avulla, että rata lähestyy vakaata kiintopistettä $x \approx 0.45$. Tilannetta vastaava lopputilanne-diagrammi on esitetty kuvassa 2.2.



Kuva 2.2: Lopputilanne-diagrammi logistiselle funktiolle kun $r = 1.8$. Vertaa kuviin 1.9 ja 1.10.

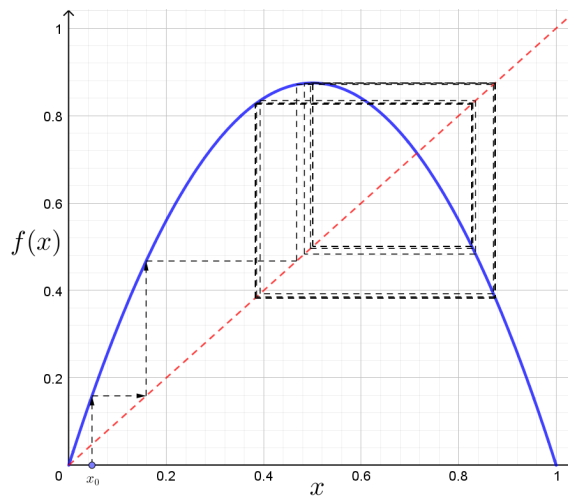
Kolmannessa tutkimassamme tapauksessa asetimme parametrin arvoksi $r = 3.2$ ja huomasimme yhtälön käyttäytymisen poikkeavan kahdesta edellisestä: rata ei enää lähestynyt yhtä tiettyä pistettä, vaan vuorotteli kahden arvon $x \approx 0.5$ ja $x \approx 0.8$



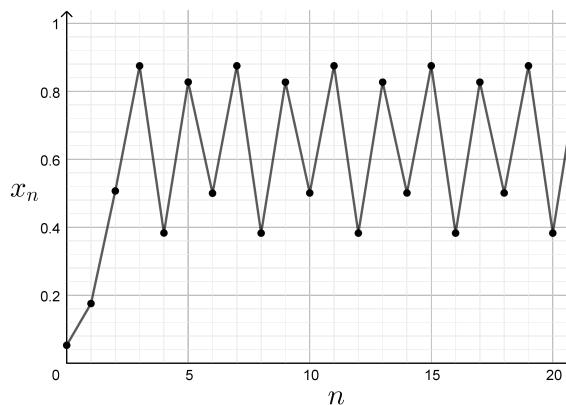
Kuva 2.3: Lopputilanne-diagrammi logistiselle funktiolle kun $r = 3.2$. Vertaa kuviin 1.11 ja 1.12.

välillä (kts. kuvat 1.11 ja 1.12). Tätä tilannetta vastaava lopputilanne-diagrammi on esitetty kuvassa 2.3, johon on piirretty *kaksi* pistettä.

Kokeillaan seuraavaksi mitä tapahtuu, kun valitaan parametriksi $r = 3.5$. Lopputulokset on esitetty kuvissa 2.4 ja 2.5.

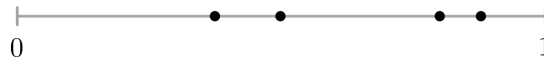


Kuva 2.4: Logistisen funktion kuvaaja kun $r = 3.5$. Kuvassa on esitetty myös alkuarvon $x_0 = 0.05$ iterointi graafisesti.



Kuva 2.5: Aikasarja kuvassa 2.4 esitetylle radalle. Kuvaajasta huomataan, että rata on 4-jaksoinen.

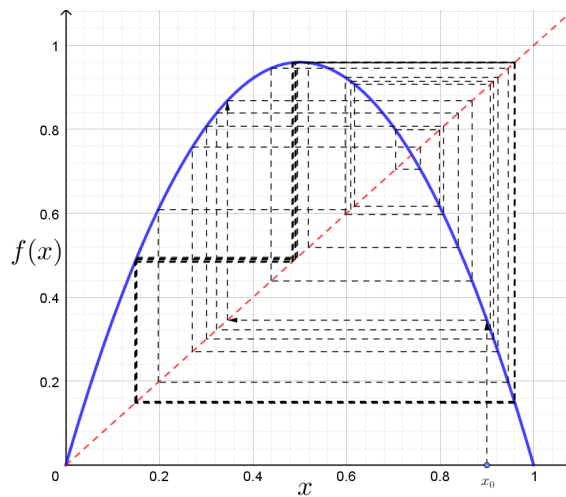
Katsottaessa kuvaajan käyttäytymistä tarkemmin huomataan, että radan arvot alkavat toistua joka neljännen iteroinnin jälkeen ja nämä arvot ovat suurinpiirtein



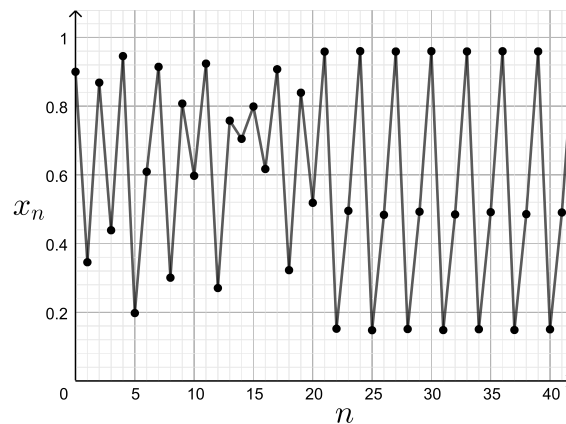
Kuva 2.6: Lopputilanne-diagrammi logistiselle yhtälölle $f(x) = rx(1 - x)$, $r = 3.5$. Vertaa kuviin 2.4 ja 2.5.

0.38, 0.83, 0.50 ja 0.87. Vastaavasti lopputilanne-diagrammissa (kuva 2.6) on nyt neljä pistettä kuvaamassa iteroinnin ”lopullista” tilaa. Vaikuttaa siltä, että mitä suurempi parametrin r arvo on, sitä ”vaihtelevampi” iteroinnin tuloksena syntyvä rata on.

Asetetaan seuraavaksi parametrin arvoksi $r = 3.84$. Lopputulokset on esitetty kuvissa 2.7-2.9.



Kuva 2.7: Logistisen funktion kuvaaja kun $r = 3.84$. Kuvassa on esitetty myös alkuarvon $x_0 = 0.9$ iterointi graafisesti.



Kuva 2.8: Aikasarja kuvassa 2.7 esitetylle radalle. Kuvaajasta huomataan, että rata on 3-jaksoinen.

Nyt radasta tulee lopulta 3-jaksoinen. Joudumme kuitenkin iteroida usemman kerran, ennen kuin hahmotamme radan käyttäytymisen. Kuvasta 2.8 huomataan, että jaksollisuus alkaa hahmottua vasta kun $n = 22$.

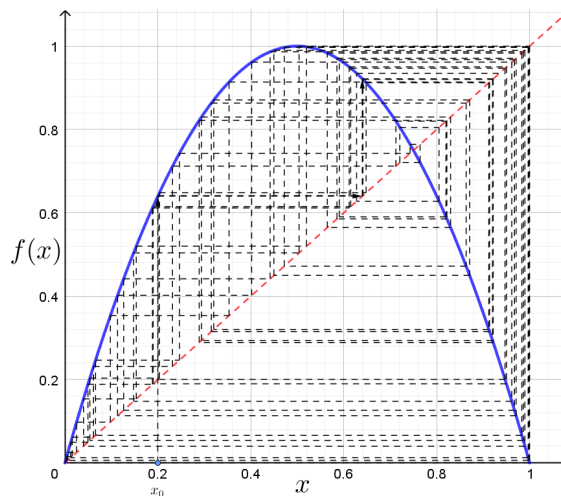
Olemme huomanneet, että logistinen funktio $f(x) = rx(1 - x)$ pystyy lukuisiin erilaisiin jaksollisiin käyttäytymisiin. Riippuen parametrin r arvosta, olemme löytäneet 1-, 2-, 3- ja 4-jaksoisen käyttäytymisen. Mihin muuhun logistinen funktio pysyy? Onko eri pituisten jaksojen ilmaantumiselle olemassa jokin tietty sääntö?



Kuva 2.9: Lopputilanne-diagrammi logistiselle funktiolle $f(x) = rx(1 - x)$ kun $r = 3.84$. Vertaa kuviin 2.7 ja 2.8.

2.1.2 Jaksoton käyttäytyminen

Kuvassa 2.10 on esitetty logistisen funktion kuvaaja kun $r = 4$ ja alkuarvon $x_0 = 0.2$ radan graafinen iterointi.

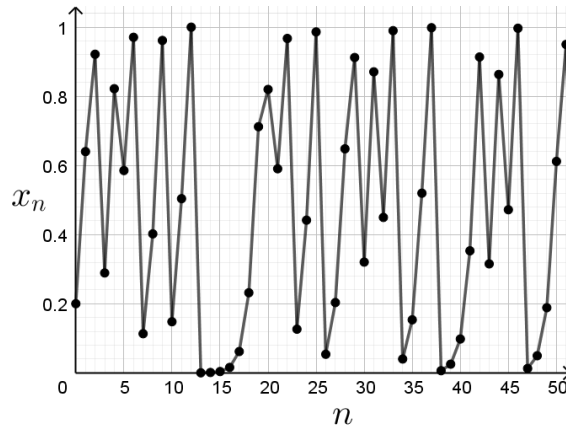


Kuva 2.10: Logistisen funktion kuvaaja kun $r = 4$. Kuvassa on esitetty myös alkuarvon $x_0 = 0.2$ iterointi graafisesti.

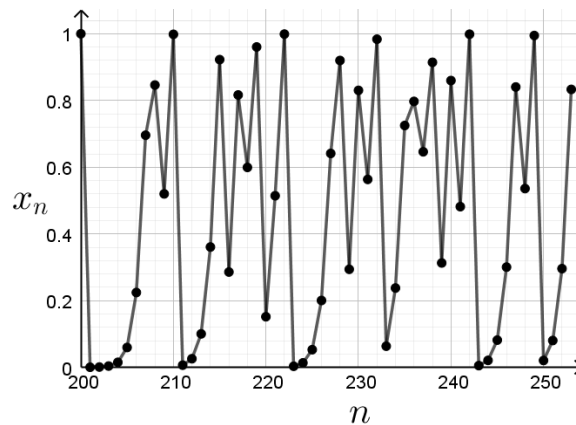
Vaikuttaa siltä, että radalla ei ole minkäläistä jaksollisuutta. Kenties kyseessä on todella pitkä jakso, jota emme pysty havaitsemaan kuvaajasta. Jaksottomuuden huomaa kenties vielä paremmin kuvasta 2.11. Mitä tässä oikein tapahtuu?

Kenties rata on jaksollinen, mutta säännöllisyys on huomattavissa vasta paljon myöhemmin. Tarvitsimmehan parametrin arvolla $r = 3.84$ 22 iteraatiota ennen kuin 3-jaksoinen rata alkoi hahmottua.

Kuvassa 2.12 on esitetty uudelleen iteroinnin tulokset ja tällä kertaa iterointia on jatkettu 252 iteroinnin verran. Kuvaajaan on piirretty viimeiset 52 iteraatiota. Rata



Kuva 2.11: Aikasarja kuvassa 2.10 esitetylle radalle. Rata ei vaikuta olevan jaksollinen.



Kuva 2.12: Kuvassa 2.10 esitetyn radan aikasarja, johon on piirretty vain iteroinnit $n = 200, \dots, 250$. Rata ei vaikuta olevan jaksollinen.

ei vaikuta olevan vieläkään jaksollinen. Kenties jakso on yli 50 mittainen? Vaikka iteroisimme kymmeniä miljoonia kertoja, lopputulos olisi sama. Ei ole olemassa lukua $n \in \mathbb{N}$ siten, että rata olisi n -jaksoinen ja voitaisiin pilkkoa määritelmän 1.4 mukaisiin osajonoihin

$$f^{1+nm}(x_0) = \{f^1(x_0), f^{1+n}(x_0), f^{1+2n}(x_0), f^{1+3n}(x_0), \dots\}$$

$$f^{2+nm}(x_0) = \{f^2(x_0), f^{2+n}(x_0), f^{2+2n}(x_0), f^{2+3n}(x_0), \dots\}$$

⋮

$$f^{n+nm}(x_0) = \{f^n(x_0), f^{n+n}(x_0), f^{n+2n}(x_0), f^{n+3n}(x_0), \dots\}$$

siten, että jokainen osajono suppenisi kun m lähestyy ääretöntä. Tällöin radan sanotaan olevan **jaksoton**.

Logistisen funktion jaksottomuuden täsmällinen todistaminen kun $r = 4$ sivuutetaan. Sen osoittaminen vaatii hieman syvällisempiä matemaattisen analyysin taitoja joita monilla lukijoista ei todennäköisesti vielä ole. [2, seuraus 3.12]

Joku saattaa pohtia, mitä lopputilanne-diagrammi tarkoittaa tässä tilanteessa. Mitä tarkoitetaan *lopputilanteella*, jos systeemi pyörii ikuisesti ilman jaksollisuutta? Tässä tapauksessa voidaan ajatella, että ensin funktiota iteroidaan todella monta kertaa jollain alkuarvolla. Sitten iteroidaan uudelleen vaikkapa 100 askelta lisää. Emme ikinä tule löytämään suppenevaa osajonoa, joten lopputilanne-diagrammiin piirretään nuo 100 pistettä. Tilanne on esitetty kuvassa 2.13.



Kuva 2.13: Lopputilanne-diagrammi logistiselle funktiolle kun $r = 4$. Rata on jaksoton.

2.1.3 Kaaoksen määritelmä

Logistisen funktion parametrin arvolla $r = 4$ tuottamien ratojen sanotaan olevan **kaoottisia**. Määritellään seuraavaksi, mitä kaoottinen systeemi tarkoittaa.

Määritelmä 2.1. *Dynaaminen systeemi on kaoottinen, jos se toteuttaa seuraavat ehdot (lähes kaikilla alkuarvoilla):*

1. *Dynaaminen sääntö on deterministinen*
2. *Alkuarvojen radat ovat jaksottomia*
3. *Alkuarvojen radat ovat rajoitettuja*
4. *Dynaaminen systeemi on alkuarvoherkkä*

Sanotaan, että jokin ominaisuus pätee *lähes kaikilla* joukon X alkiolla, jos se pätee koko joukossa X lukuunottamatta merkityksettömän pientä joukkoa $Y \subset X$. Esimerkiksi voidaan sanoa, että

- Lähes kaikki positiiviset kokonaisluvut ovat suurempia kuin 100.
- Lähes kaikki alkuluvut ovat parittomia.
- Olkoon $ABC \subset \mathbb{R}^2$ jokin kolmio. Lähes kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}^2$ eivät kuulu kolmioon ABC .

Esimerkiksi alkuarvon $x_0 = \frac{3}{4}$ rata funktiolla $f(x) = 4x(1 - x)$ ei ole jaksoton, sillä

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4\frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}. \quad (2.2)$$

Tällaisia alkuarvoja on kuitenkin merkityksettömän vähän, joten voidaan sanoa, että *lähes kaikkien* alkuarvojen radat funktiolla f ovat jaksottomia.

Dynaamisella säännöllä tarkoitetaan sääntöä joka määrittää systeemin radan. Tässä tapauksessa sääntö on funktio, jolla iteroimme. Funktio on deterministinen, jos sille syötetty arvo määrittää funktion palauttaman arvo - toisin sanoen funktio palauttaa aina saman tuloksen, jos sille syötetään sama arvo uudestaan ja uudestaan. Esimerkiksi funktio, joka palauttaa 50% todennäköisyydellä luvun 1 tai 0 ei ole deterministinen.

Ollakseen kaoottinen, systeemin ratojen on oltava jaksottomia. Kuten juuri opimme, jaksottomalla radalla tarkoitetaan rataa, joka ei ikinä toistu. Vaikka iteroisimme ikuisesti, emme koskaan päätyisi aimmin saatuun lukuun uudelleen, emmekä täten saisi jaksoa joka toistuisi radassa.

Tästä pääsemme seuraavaan ehtoomme. Ratojen tulee olla rajoitettuja. Iteroitaessa determinististä funktiota $f(x) = 2x$ alkuarvolla $x_0 = 1$ rata olisi seuraavanlainen:

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 16 \dots$$

Tämä todellakin olisi jaksoton. Rata ei ikinä toistuisi, mutta se lähestyisi ääretöntä. Kyseinen systeemi ei ole kovin mielenkiintoinen, joten radan tulee olla rajoitettu ollakseen kaoottinen. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa jokin luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|f^n(x)| < M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Viimeisenä ehtona on, että dynaamisen systeemin tulee olla **alkuarvoherkkä**. Tähän ilmiöön perehdymme seuraavassa kappaleessa. Lyhyesti sanottuna jos systeemi on alkuarvoherkkä, niin pienikin muutos alkuarvossa saa hyvin nopeasti aikaan suuria muutoksia radassa. 1960-luvulla yhdysvaltalainen meteorologi Edward Lorenz huomasi sääennustusta luodessaan, että hyvin pieni, perhosen kokoinen muutos hänen syöttämässään alkuarvossa saa aikaan radikaaleja säätyypin muutoksia sääennusteessa. Hänen havainnoistaan muodostui vertaus, jonka mukaan perhosen siivenisku Brasiliassa voisi johtaa tornadoon Texasissa. Alkuarvoherkkyydestä aloitettiin käyttämään myös nimitystä **perhosefekti**.

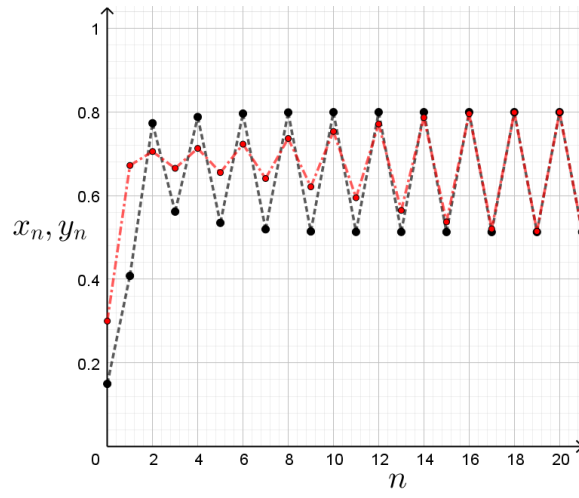
2.2 Perhosefekti

Määrittelimme edellisessä kappaleessa kaoottisen systeemin neljänneksi ehdoksi alkuarvoherkkyyden. Sen ideana on, että pienikin muutos alkutilanteessa ilmenee myöhemmin valtavana muutoksena. Tarkastellaan tätä ilmiötä esimerkin avulla. Tutkitaan ensin logistista funktiota $f(x) = rx(1-x)$ parametrin arvolla $r = 3.2$. Tämä funktio ei ole alkuarvoherkkä.

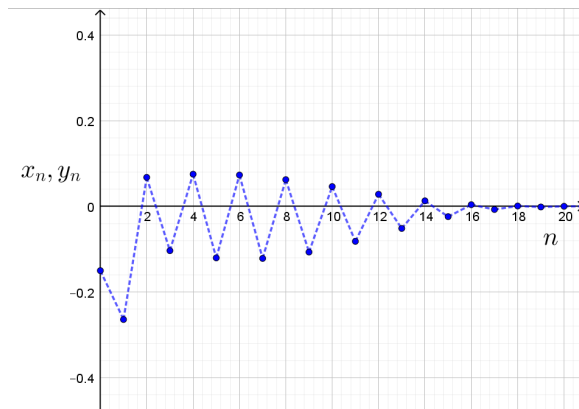
Edellisessä kappaleessa huomasimme, että tällä parametrin r arvolla alkuarvojen radat ovat 2-jaksoisia. Kuvassa 2.14 on esitetty iteroinnin kuvaajat kahdella eri alkuarvolla $x_0 = 0.15$ ja $y_0 = 0.3$. Huomataan, että näiden alkuarvojen radat lähestyvät vähitellen toisiaan ja samalla 2-jaksoista sykliä.

Kuvassa 2.15 on esitetty näiden kahden radan välinen erotus $x_t - y_t$ kunkin iterointikerran jälkeen. Kun radat ovat kaukana toisistaan, niiden välinen erotus on suuri ja vastaavasti ollessaan hyvin lähellä toisiaan ratojen erotus $x_n - y_n$ lähestyy nollaa.

Palataan takaisin mielenkiintoiseen tapaukseen kun $r = 4$ ja tutkitaan mitä tällöin tapahtuu. Aiemmin huomasimme, että ratojen käyttäytyminen on jaksotonta. Mitä



Kuva 2.14: Alkuarvojen $x_0 = 0.15$ (mustalla) ja $y_0 = 0.3$ (punaisella) ratojen aikasarjat iteroitaessa alkuarvoja logistisella funktiolla kun $r = 3.2$. Näiden ratojen välinen erotus on esitetty kuvassa 2.15.

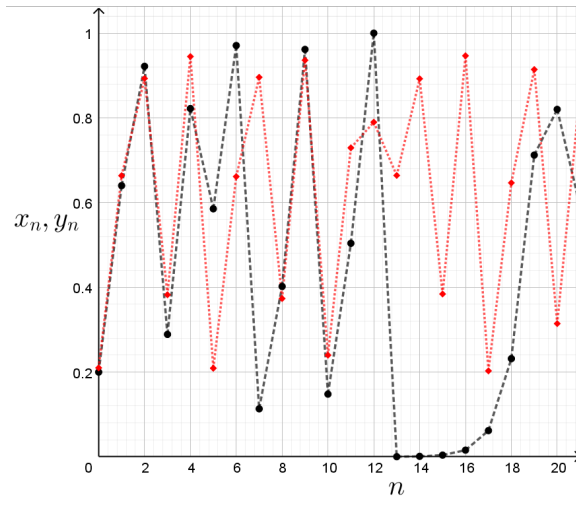


Kuva 2.15: Kuvassa 2.14 esitettyjen ratojen välisen erotuksen aikasarja.

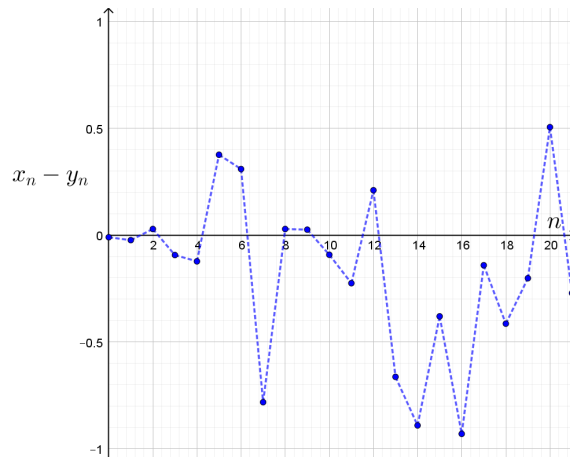
tapahtuu, jos valitsemme kaksi lähekkäistä alkuarvoa ja iteroimme näitä. Lähenevätkö radat toisiaan?

Radat ovat aluksi lähekkäin toisiaan, mutta jo viidennen iteraation kohdalla radat alkavat poiketa toisistaan (kuva 2.16). Tämä voidaan nähdä myös kuvasta 2.17, johon on piirretty näiden ratojen välinen erotus. Välillä radat tulevat lähelle toisiaan, mutta loittonevat jälleen. Käyttäytyminen ei selvästikään ole samanlaista kuin edellisessä esimerkissä.

Lähekkäisten alkuarvojen ratojen loittomisella on huomattavia vaikutuksia. Kuvitellaan, että käytämme logistista funktiota mallintamaan jänispopulaation kokoa autiolla saarella. Saavuttuamme saarelle laskemme jänikset ja saamme populaatioksi 0.21. Muista, että ilmoitamme populaation koon suhteessa maksimaaliseen populaatioon. Siispä 0.21 tarkoittaa 21% jänisten teoreettisesta maksimimäärästä. Jänikset kuitenkin hyppivät ja pomppivat sekä näyttävät varsin samanlaisilta, joten teimme laskuvirheen. Todellinen populaation koko on 0.2. Mittausvirhettä syntyi 5%.



Kuva 2.16: Alkuarvojen $x_0 = 0.2$ (mustalla) ja $y_0 = 0.21$ (punaisella) ratojen aikasarjat iteroitaessa alkuarvoja logistisella funktiolla kun $r = 4$. Näiden ratojen välinen erotus on esitetty kuvassa 2.17.



Kuva 2.17: Kuvassa 2.16 esitettyjen ratojen välisen erotuksen aikasarja.

Virhe vaikuttaa varsin pieneltä, mutta kuten kuvasta 2.17 käy ilmi, mahdollisuuksiemme ennustaa tulevaa populaatiota on kovin rajoittunut. Tämän pienen mittausvirheen takia jo viiden vuoden jälkeen ennustuksemme poikkeaisi lähes 40% todellisesta tilanteesta. Myöhemmin poikkeama kutistuisi ja kasvaisi jälleen noudattamatta mitään tiettyä kaavaa. Jos olisimme onnekkaita, jonain vuonna ennustemme olisi lähes yhtäpitävä todellisen tilanteen kanssa, kun taas toisena vuonna poikkeama saattaisi olla hyvinkin suuri. Poikkeaman suuruus todelliseen tilanteeseen vaikuttaisi olevan satunnaista.

Vaikka palaisimme saarelle laskemaan jänikset uudelleen - tällä kertaa todella huolellisesti, saattaisimme silti laskea yhden jäniksen kahteen kertaan saaden populaation kooksi 0.20001. Tällöin mittausvirhemme todelliseen arvoon nähden olisi vaivaiset 0.005%, mutta siitä huolimatta emme pystyisi ennustamaan tarkasti kuin noin kym-

menen vuoden päähän. Tämän jälkeen radat alkaisivat poikkeamaan toisistaan ja pitkän aikavälin ennusteemme olisi hyödytön.

Jälleen joku voisi kysyä, että eikö tämä ole aivan riittävä tarkkuus; voimme menä kymmenen vuoden kuluttua takaisin saarelle laskemaan jänikset uudelleen. Miksi emme voisi toimia näin? Jälkimmäisellä kerralla laskimme jänikset 1000 kertaa tarkemmin kuin ensimmäisellä kerralla saaden mittausvirheeksi ainoastaan 0,005%. Huolimatta paljon tarkemmasta laskennasta luotettava ennustamisemme parani viidestä vuodesta vain kymmeneen. Vaikka teimme huomattavasti tarkempia mittauksia populaation koon määrittämiseksi, emme edelleenkään kykene ennustamaan tulevaa luotettavasti kovin pitkälle.

Alkuarvoherkkää systeemiä on mahdotonta ennustaa täsmällisesti pitkällä aikavälillä. Tarkemmilla havainnoilla voimme parantaa tarkkuutta, mutta lopulta systeemi ajautuu jälleen omille teilleen. Vaikka radan muodostumiseen käytettävä funktio on hyvin määritelty ja yksinkertainen, ilmenee pitkällä aikavälillä hyvinkin ennalta-arvaamatonta käyttäytymistä. Tästä syystä kaottisia systeemejä kutsutaan **deterministisiksi satunnaisuuden lähteiksi**.

2.2.1 Alkuarvoherkkyyden määritelmä

Kaottisen systeemin määritelmässä asetimme syteemille neljä ehtoa ollakseen kaotinen; deterministisen säännöön, jaksottomuuden, rajoittuneisuuden ja alkuarvoherkkyyden. Olemme todenneet, että ollakseen alkuarvoherkkä jokaisella alkuarvolla tulee olla ominaisuus, että pienikin muutos alkuarvossa saa aikaan pitkällä aikavälillä suuria muutoksia. Edellisessä kappaleessa havainnollistimme alkuarvoherkkyyttä esimerkin avulla. Määritellään seuraavaksi alkuarvoherkkyyys matemaattisesti ja täsmällisesti:

Määritelmä 2.2. *Olkon $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on alkuarvoherkkä jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikille alkuarvoille $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$ on olemassa alkuarvo $y_0 \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_0 - y_0\| < \delta$ ja $\|f^n(x_0) - f^n(y_0)\| > \epsilon$.*

Määritelmä sanoo, että ollakseen alkuarvoherkkä jokaisen alkuarvon x_0 ympäristöstä on löydettävä toinen alkuarvo y_0 , jonka etäisyys alkuarvosta x_0 on korkeintaan δ ja jollain iteraatiolla n näiden alkuarvojen radat poikkeavat toisistaan vähintään luvun ϵ verran.

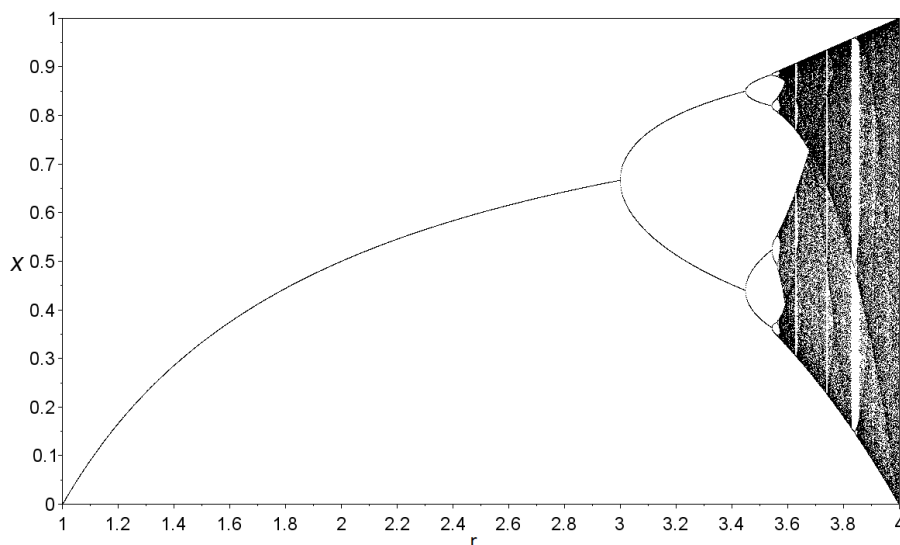
Logistisen funktion osoittaminen alkuarvoherkkäksi parametrin arvolla $r = 4$ ei kuitenkaan ole kovin helppoa. Väitteen osoittamiseksi tulisi näyttää, että jokaiselle alkuarvolle x_0 löytyy ehdot täyttävä alkuarvo y_0 . On helpompaa osoittaa, että jokin funktio ei ole alkuarvoherkkä. Tällöin riittää löytää yksi alkuarvo $x_0 \in A$, jonka läheisyydessä ei ole ehtoja toteuttavaa alkuarvoa y_0 .

Alkuarvoherkkyyden täsmällinen matemaattinen todistaminen systeemille on hankalaa. Logistinen funktio on todistettu olevan alkuarvoherkkä ja täten myös kaotinen parametrin arvolla $r = 4$. Kuten pian tulemme huomaamaan, logistinen funktio käyttäytyy kaottisesti myös lukuisilla muilla parametrin r arvoilla, mutta näille parametrin arvoille kaottisuutta ei ole pystytty todistamaan. [2, s. 8].

2.3 Haarautumisdiagrammi

Palataan vielä hetkeksi logistisen funktion pariin. Aiemmin tarkastelimme lopputilanne-diagrammien avulla radan käyttäytymistä parametrin r eri arvoilla. Lopputilanne-diagrammien avulla voidaan muodostaa **haarautumisdiagrammi**, joka kuvaa ratojen kiintopisteiden määrän ja sijainnin jokaisella parametrin r arvolla. Logistisen funktion haarautumisdiagrammi saadaan aikaiseksi kun valitaan satunnainen alkuarvo $x_0 \in [0, 1]$ ja muodostetaan jokaisella parametrin r arvolla alkuarvon x_0 radan lopputilannediagrammi. Logistisen funktion haarautumisdiagrammi on esitetty kuvassa 2.18.

Parametrin arvolla $r < 1$ ratojen ainut kiintopiste on 0. Mikäli mallintaisimme jänispopulaatiota tällaisella funktiolla, jänikset kuolisivat ajan kuluessa pois viimeisintä yksilöä myöten. Pisteessä $r = 1$ tapahtuu selvä muutos. Tästä eteenpäin jänispopulaatio ei enää häviä, vaan jänisten määrä asettuu johonkin positiiviseen lukumäärään. Tällaista pistettä, jossa systeemin käyttäytyminen muuttuu äkillisesti kutsutaan haarautumispisteeksi. Seuraava haarautumispiste on nähtävissä kohdassa $r = 3$, missä populaatio muuttuu 2-jaksoiseksi populaatioksi.



Kuva 2.18: Logistisen funktion $f(x) = rx(1-x)$ haarautumisdiagrammista nähdään kriittisten pisteiden lukumäärä ja sijainti kullakin parametrin r arvolla. Kuvaan on piiretty parametrin r arvoja väliltä $[1, 4]$. Tätä pienemmillä parametrin arvoilla rata lähestyy aina nollaa.

Tästä eteenpäin kasvatettaessa parametria r huomataan, että kiintopisteiden määrä tuplaantuu hyvin nopeasti kohti kaoottiselta vaikuttavaa käyttäytymistä. Olkoon r_n pienin parametrin r arvo, jolla rata on 2^n -jaksoinen. Tällöin tietokoneen avulla

voidaan laskea [2, s.4-5], että

$$\begin{aligned}r_1 &= 3 \\r_2 &= 3.449\dots \\r_3 &= 3.544\dots \\r_4 &= 3.564\dots\end{aligned}$$

Kun n kasvaa äärettömän suureksi, lukujono r_n lähestyy kohti pistettä

$$r_\infty = 3.56994\dots$$

Parametrin arvolla $r = r_\infty$ alkuarvojen radan tulisi olla 2^∞ -jaksoinen. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että kun $r > r_\infty$ radat muuttuvat jaksottomiksi ja täten kaoottisiksi. Pisteestä r_∞ alkaen *lähes kaikilla* parametrin r arvoilla *lähes kaikkien* alkuarvojen rata käyttäytyy kaoottisesti.

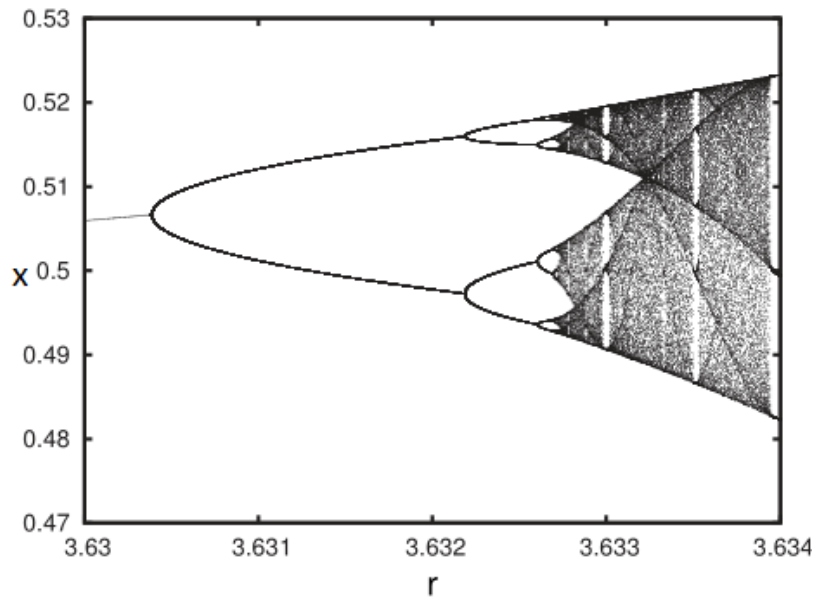
Kuten aiemmin totesimme, alkuarvon $x_0 = \frac{3}{4}$ rata funktiolla $f(x) = 4x(1-x)$ ei ole kaoottinen (2.2). On siis olemassa yksittäisiä alkuarvoja, joiden radat eivät ole kaoottisia, vaikka funktio olisi kaoottinen (lähes kaikilla alkuarvoilla).

Mielenkiintoista on kuitenkin se, että haarautumisdiagrammissa on havaittavissa lukuisia jaksollisia ikkunoita, jolloin radat käyttäytyvät jaksollisesti vaikka $r > r_\infty$. Tarkkasilmäisimmät voivat huomata haarautumidiagrammissa kapean kaistaleen kohdassa $r = 3.8$, jolloin rata vaikuttaisi olevan 3-jaksollinen. Näin todella on ja laskimme sen edellisessä kappaleessa. Tulokset on esitetty kuvissa 2.7-2.9.

Myös parametrin arvon $r = 3.63$ ympärissä on jaksollinen ikkuna. Tässä tapauksessa rata on 6-jaksollinen. Se tuplaantuu nopeasti 12-jaksoiseksi, sitten 24-jaksoiseksi ja lopulta rata on jälleen kaoottinen. Tilanne on esitetty kuvassa 2.19, josta huomataan, että kyseessä oleva suurennos muistuttaa alkuperäistä haarautumisiagrammia todella paljon. Myös tästä kuvasta voidaan havaita, että haarautumisiagrammista löytyy kaoottisten alueiden sisältä yhä kapeampia ja kapeampia ikkunoita, joissa rata on jaksollinen.

Oleellista on se, että vaikka tällaisia jaksollisia ikkunoita löytyy kaoottiselta alueelta $r \in]r_\infty, 4]$ useita, niitä on merkityksettömän vähän. Voidaan sanoa, että funktio $f(x) = rx(1-x)$ on kaoottinen lähes kaikilla $r \in]r_\infty, 4]$.

Haarautumisiagrammin avulla voimme nähdä, kuinka dynaamisen systeemin käyttäytyminen muuttuu, kun muutamme parametrin arvoa. Logistisen funktion tapauksessa näille muutoksille vaikuttaisi esiintyvän tiettyjä lainalaisuuksia. Kiintopisteiden jaksojen lukumäärä kaksinkertaistuu jatkuvasti yhä nopeammin ja nopeammin. Kun $r = r_\infty$ jaksojen lukumäärä kasvaa niin suureksi, että systeemin käyttäytyminen muuttuu kaoottiseksi. Kuitenkin lähestyttäessä parametrin arvoa $r = 4$ vastaan tulee ikkunoita, jolloin ratojen käyttäytyminen on jälleen selvästi jaksollista. Nämä jakso kaksinkertaistuvat jälleen nopeasti ja ajautuvat kohti kaaosta. Logistinen funktio pystyy tuottamaan niin kaoottisia kuin jaksollisia ratoja. Muutos käyttäytymisessä saattaa olla hyvinkin nopea, kun parametrin r arvoa muutetaan.



Kuva 2.19: Logistisen funktion $f(x) = rx(1 - x)$ haarautumisdiagrammin osa välillä $r \in [3.630, 3.634]$. Huomioi pystyakselin mittakaava. Parametrin arvolla $r = 3.6$ rata on 6-jaksoinen. Jos tarkastelisimme koko haarautumisdiagrammia $x \in [0, 1]$ parametrin arvon $r = 3.6$ läheisyydessä, löytäisimme viisi muutakin vastavaa suurennosta. Suurennos muistuttaa kuvassa 2.18 esitettyä alkuperäistä haarautumisdiagrammia. Kuva: [1, s.110].

2.4 Yhteenveto

Tässä luvussa perehdyimme kaaokseen. Dynaaminen systeemi on kaaottinen, jos se on deterministinen, rajoitettu, alkuarvoherkkä ja sillä on jaksottomia ratoja. Kyseisten systeemien käyttäytymisen ennustaminen pitkällä aikavälillä on mahdotonta, sillä pienikin epätarkkuus alkuarvossa saa iteroinnin edetessä aikaan suuria muutoksia, kuten logistisen funktion tapauksessa parametrin arvolla $r = 4$. Usein dynaamisen systeemin radat vaikuttavat käyttäytyvän satunnaisesti, vaikka ne on luotu deterministisen säännön perusteella.

Seuraavassa luvussa tutustumme kenties kaikkein tunnetuimpaan fraktaalisiin, Mandelbortin joukkoon. Tulemme huomaamaan, miten dynaamisesta systeemistä, logistinen funktio ja kaaos liittyvät siihen.

Luku 3

Mandelbrotin joukko

Tässä luvussa esitellään Benoit Mandelbrotin (1924-2010) mukaan nimetty Mandelbrotin joukko, jota pidetään yhtenä parhaista esimerkeistä matemaattisen visuaalisuuden ja kauneuden ilmentymänä. Mandelbrotin joukko yhdistää kaaoksen ja järjestyksen ja sitä pidetään tunnetuimpana fraktaalina. **Fraktaali** tarkoittaa joukkoa, joka näyttää samankaltaiselta, katsoi sitä millä suurennoksella tahansa. Tulemme huomaamaan, miten hyvin yksinkertaisella yhden muuttujan diskreetillä dynaamisella systeemillä saadaan aikaan visuaalisesti monimutkainen ja kiehtova kokonaisuus.

Olemme jo ensimmäisessä luvussa todenneet, miten neliöintifunktion $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ei-negatiivisten alkuarvojen radat käyttäytyvät. Yleisesti kaikille alkuarvoille $x_0 \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{kun } |x_0| < 1, \\ 1, & \text{kun } |x_0| = 1, \\ \infty, & \text{kun } |x_0| > 1 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Mandelbrotin joukon muodostamisessa tarkastellaan niin ikään ratajoukon käyttäytymistä pitkällä aikavälillä. Ennen kuin voimme tarkastella joukkoa tarkemmin, meidän on perehdyttävä kompleksilukuihin. Mandelbrotin joukon ominaisuuksien esittämistä varten esitellään myös suljetun ja avoimen joukon, joukon reunan ja yhtenäisen joukon käsitteet.

3.1 Kompleksiluvut

Tässä kappaleessa esitellään kompleksiluvut ja niihin liittyviä ominaisuuksia. Mandelbrotin joukko saadaan aikaiseksi iteroitaessa alkuarvoa funktioilla, jotka operoivat reaalilukujen sijaan kompleksiluvuilla.

3.1.1 Luvun -1 neliöjuuri

Kuten tiedämme, yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisuja reaalilukujen joukossa. Ratkaistaessa yhtälöä saamme, että $x = \pm\sqrt{-1}$.

Tiedämme, että tällaista edellisen ehdon täyttävää reaalilukua x ei ole olemassa. Tämän ongelman ratkaisemiseksi tarvitsemme uuden luvun i joka määritellään siten, että luku toiseen korotettuna antaa tulokseksi -1 :

$$i^2 = -1. \quad (3.2)$$

Tällöin $\sqrt{-1} = \pm i$. Lukua i kutsutaan **imaginääriyksiköksi**. Yhtälön $x^2 + 1 = 0$ ratkaisuksi kompleksilukujen joukossa saadaan $\pm i$. Tähän asti olemme toimineet reaalilukujoukon \mathbb{R} kanssa. Reaalilukuihin kuuluvat kaikki ”tavalliset” luvut, kuten 2 , -5 , $\frac{1}{8}$ ja π . Negatiivisesta äärettömyydestä positiiviseen äärettömyyteen jatkuva lukusuora koostuu reaaliluvuista. Imaginääriyksikön avulla voimme laajentaa reaalilukujen joukon **kompleksiluvuiksi** \mathbb{C} .

Määritelmä 3.1. *Kompleksilukujen joukko on reaalilukujen laajennus*

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kompleksilukuun viitataan usein muuttujalla z ja se on reaaliluvun ja imaginääriluvun yhdistelmä

$$z = x + yi. \quad (3.3)$$

Esimerkiksi

$$z = 3 + 4i \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Luvulla x viitataan kompleksiluvun z reaaliosaan $\operatorname{Re}(z)$ ja luvulla y imaginääriosaan $\operatorname{Im}(z)$. Esimerkin 3.4 kompleksiluvun reaaliosa on $\operatorname{Re}(z)=3$ ja imaginääriosa $\operatorname{Im}(z)=4$.

3.1.2 Kompleksilukujen laskusäännöt

Kompleksilukujen laskusäännöt poikkeavat hieman reaalilukujen laskusäännöistä. Esi- tellään seuraavaksi kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku. Suoritettaessa laskutoimi- tuksia kompleksiluvuilla imaginääriyksikköä kohdellaan kuin se olisi jokin muuttuja ja on syytä muistaa, että $i^2 = -1$.

Kahden kompleksiluvun yhteenlaskussa lasketaan erikseen yhteen lukujen reaali- ja imaginääriosat.

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Tällöin

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + bi + c + di \\ &= (a + b) + (c + d)i. \end{aligned}$$

Summana saadun luvun $z_1 + z_2$ reaaliosa on summattavien reaaliosien summa ja vastaavasti imaginääriosa on summattavien imaginääriosien summa.

Esimerkki 3.2. *Olkoon $z_1 = 3 + 4i$ ja $z_2 = 1 - 7i$. Tällöin*

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (3 + 4i) + (1 - 7i) \\ &= (3 + 1) + (4 + (-7))i \\ &= 4 - 3i.\end{aligned}$$

Kompleksilukujen kertolasku puolestaan muistuttaa binomien kertolaskua. Olkoon $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tällöin binomien kertolasku esitetään usein muodossa

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Kompleksilukujen kertolaskussa reaali- ja imaginääriosat kerrotaan keskenään binomien tapaan. Hyödyntämällä tietoa $i^2 = -1$ reaali- ja imaginääriosat yhdistetään keskenään.

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$ kompleksilukuja. Tällöin

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Lasketaan esimerkin vuoksi kahden konkreettisen kompleksiluvun tulo.

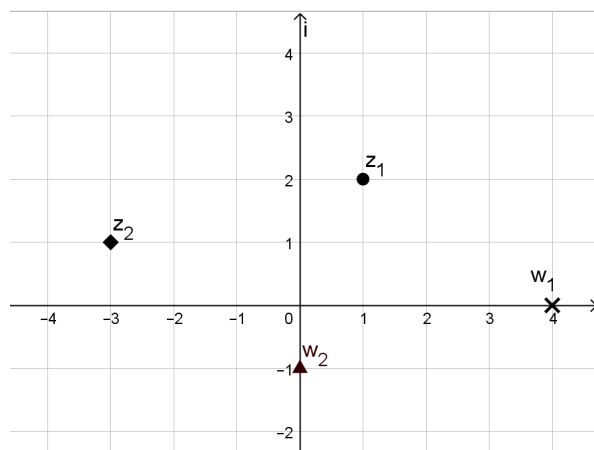
Esimerkki 3.3. *Olkoon $z_1 = 3 + 4i$ ja $z_2 = 1 - 7i$. Tällöin*

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (3 + 4i)(1 - 7i) \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-7)i + 4 \cdot 1i + 4 \cdot (-7)i^2 \\ &= 3 - 21i + 4i + 28 \\ &= 31 - 17i.\end{aligned}$$

Kompleksilukujen käyttäytymistä edellä esitellyn kertolaskun yhteydessä on vaikea tulkita. Helpottaaksemme tulkintaa perehdytään tarkemmin kompleksilukujen geometriseen käyttäytymiseen.

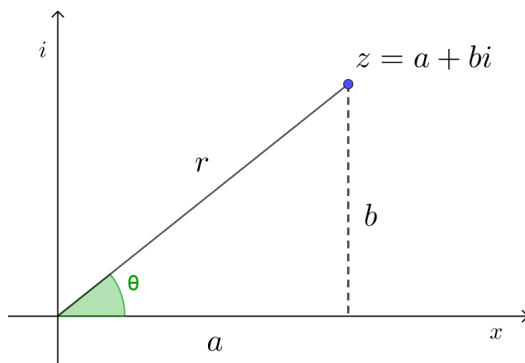
3.1.3 Kompleksilukujen geometria

Ymmärtääksemme Mandelbrotin joukon luomismekanismiin, on tärkeää ymmärtää miten kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku käyttäytyy geometrisesti. Kompleksilukujen joukko voidaan tulkita kaksiulotteisena avaruutena \mathbb{R}^2 , jolle käytetään nimitystä **kompleksitaso**, merkitään \mathbb{C} . Vaaka-akselina on reaali- ja pystyakselina imaginäärilukujen $(\dots - 2i, -i, 0, i, 2i \dots)$ lukusuora. Jokainen kompleksiluku $z = a + bi$ voidaan tulkita kompleksitason pisteinä (a, b) . Vastaavasti jokainen kompleksitason piste (a, b) voidaan ajatella olevan kompleksiluku $z = a + bi$. Huomaa, että jos $\text{Im}(z)=0$, niin kyseessä on reaali- ja imaginaariluku. Kaikki reaali- ja imaginaariluvut siis kuuluvat kompleksilukujen joukkoon.



Kuva 3.1: Kompleksitaso, johon on piirretty neljä pistettä kuvaamaan neljää kompleksilukua: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + i$, $w_1 = 4$, $w_2 = -i$.

Kaksiulotteisen tason pisteet voidaan kuvata myös **napakoordinaatistossa**. Tällöin sen sijaan, että esittäisimme kompleksiluvun z sen reaali- ja imaginääriosan a ja b avulla, esitämme kuinka kaukana piste z on origosta ja mikä on vaakasuoran akselin ja origosta pisteeseen z piirretyn janan välinen kulma. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.2. Pisteeseen z etäisyyttä origosta merkataan muuttujalla r , sekä vaakaa-akselin ja origosta pisteeseen z piirretyn janan välistä kulmaa muuttujalla θ (*theta*).



Kuva 3.2: Kompleksitason pisteet $z = a + bi$ voidaan esittää napakoordinaatistossa muodossa $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Kartesisisessa koordinaatistossa ilmoitettu kompleksiluku voidaan muuttaa napakoordinaattiesitykseksi. Kulma θ voidaan määrittää trigonometrian avulla. Kuten kuvasta 3.2 nähdään, suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b , sekä hypotenuusan pituus r . Tällöin kulmaksi saadaan

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right).$$

Vastaavasti luvut a ja b voidaan ilmaista kulman θ avulla:

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$$

missä r on pisteen (a, b) etäisyys origosta. Kulmaa θ kutsutaan kompleksiluvun **argumentiksi** (merkitään $\arg(z) = \theta$).

Kompleksiluvun etäisyyttä origosta kutsutaan **moduliksi**. Reaalilukujen tapauksessa luvun x etäisyys origosta on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}.$$

Kompleksilukujen tapauksessa luvun z etäisyys origosta, eli luvun z moduliksi saadaan Pythagoraan lauseen avulla

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kompleksiluku $z = a + bi$ voidaan siis esittää napakoordinaattien avulla muodossa

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z &= r \cos \theta + r \sin \theta i \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Kuten aiemmin totesimme, kahden kompleksiluvun tuloa on vaikea hahmottaa karteesisessa koordinaatistossa. Napakoordinaattien avulla pystymme tulkitsemaan kompleksilukujen kertolaskua helposti:

Lause 3.4. *Olkoon $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ja $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ kompleksilukuja. Tällöin*

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Todistus.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)). \end{aligned}$$

Käyttämällä sinin ja kosinin summakaavoja

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

ja

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha,$$

saadaan edelleen, että

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)) \\ &= |z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

□

Huomataan, että kerrottaessa kaksi kompleksilukua z_1 ja z_2 keskenään, saadun kompleksiluvun $z_1 z_2$ moduli on alkuperäisten lukujen moduliin tulo. Vastaavasti luvun $z_1 z_2$ argumentti on lukujen z_1 ja z_2 argumenttien summa.

Esimerkki 3.5. *Olkoon $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + i$ ja $z_3 = -1 - i$. Tällöin $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$ ja $\arg(z_3) = \frac{5\pi}{4}$, sekä $|z_1| = 2$ ja $|z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$. Lasketaan $z_1 z_2$ ja $z_1 z_3$. Luvun $z_1 z_2$ moduliksi saadaan*

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

Lauseen 3.4 nojalla

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

joten

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{8} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

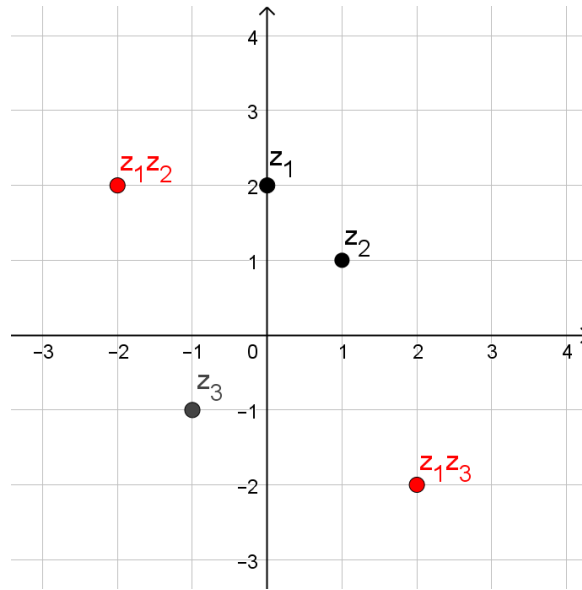
Vastaavasti luvun $z_1 z_3$ moduliksi saadaan

$$|z_1 z_3| = |z_1| |z_3| = 2\sqrt{2} = \sqrt{8},$$

joten

$$\begin{aligned} z_1 z_3 &= \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{8} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2 - 2i. \end{aligned}$$

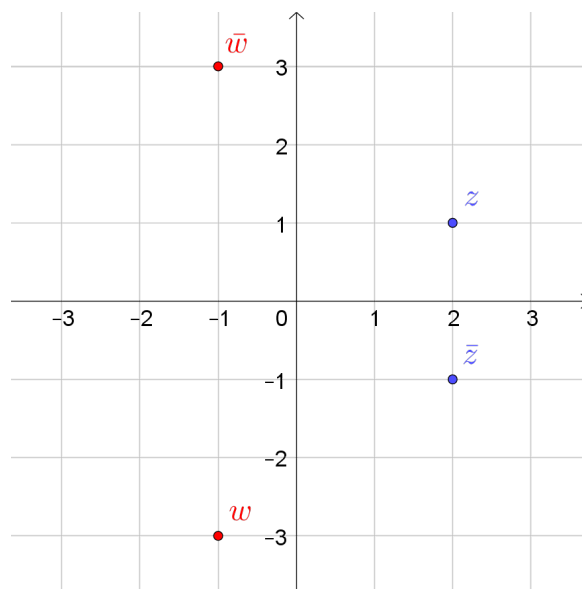
Tulemme näyttämään, että Mandelbrotin joukko on symmetrinen x -akselin suhteen. Tätä varten hyödynnämme **kompleksikonjugaatin** seuraavia ominaisuuksia.



Kuva 3.3: Havainnollistus esimerkin 3.5 kertolaskuista.

Määritelmä 3.6. Kompleksiluvun $z = a + bi$ kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = a - bi$.

Esimerkki 3.7. Olkoon $z = 2 + i$ ja $w = -1 - 3i$. Tällöin $\bar{z} = 2 - i$ ja $\bar{w} = -1 + 3i$,



Kuva 3.4: Kompleksiluvun kompleksikonjugaatti on geometrisesti tulkittuna peilaus reaaliakselin suhteen.

Lause 3.8. Olkoon $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Tällöin kompleksikonjugaatin määritelmän nojalla

$$1. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Huomautus 3.9. Edellisen lauseen 3.8 nojalla

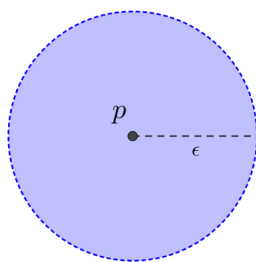
$$\overline{(z^2)} = (\bar{z})^2.$$

3.2 Avoimet ja suljetut joukot, joukon reuna sekä yhtenäisyys

Tiedämme, että reaaliakselilla lukujen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ välissä olevien lukujen joukkoa A kutsutaan avoimeksi tai suljetuksi väliksi riippuen siitä, kuuluvatko päätepisteet a ja b joukkoon vai eivät. A on suljettu, jos välin päätepisteet a ja b kuuluvat kyseiseen joukkoon, eli $A = [a, b]$. Vastaavasti A on avoin väli, jos päätepisteet eivät kuulu joukkoon, eli $A =]a, b[$. Molemmissa tapauksissa päätepisteitä voidaan ajatella joukon A reunana.

Yleistämällä tätä ideaa voidaan määritellä avoimet ja suljetut joukot korkeammissa ulottuvuuksissa \mathbb{R}^n kuten esimerkiksi tasossa \mathbb{R}^2 . Määritellään tätä varten ensin avoin pallo. Reaalilukujen joukossa \mathbb{R} avoin pallo olisi avoin väli.

Määritelmä 3.10. Olkoon $\epsilon > 0$. Avoin pallo $B(p, \epsilon)$ on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä p on vähemmän kuin ϵ .

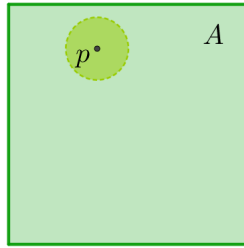


Kuva 3.5: Avoin pallo $B(p, \epsilon)$

Määritelmä 3.11. Olkoon $\epsilon > 0$. Piste $p \in A$ on joukon A **sisäpiste**, jos on olemassa avoin pallo $B(p, \epsilon)$, joka kuuluu kokonaan joukkoon A . Merkitään $B(p, \epsilon) \subset A$.

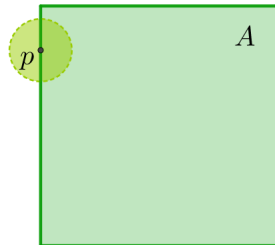
Intuitiivisesti piste p on joukon A sisäpiste, jos voimme kutistaa p -keskeisen pallon niin pieneksi, että se kuuluu kokonaan joukkoon A . Piste on joukon sisäpiste, jos se on aidosti joukon ”sisällä”.

Määritelmä 3.12. Piste $p \in A$ on joukon A **reunapiste**, jos $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(p, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ kaikilla $\epsilon > 0$. Joukon A **reuna** on joukko ∂A joka koostuu kaikista joukon A reunapisteistä.



Kuva 3.6: Piste P on joukon A sisäpiste, sillä $B(p, \epsilon) \subset A$

Määritelmä sanoo, että p on joukon A reunapiste, jos pisteeseen p piirretty mielivaltaisen pieni avoin pallo leikkaa sekä joukkoa A , että sen komplementtia A^c . Intuitiivisesti reunapisteet ovat joukon ”reunalla”.



Kuva 3.7: Piste p on joukon A reunapiste, sillä $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(p, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ kaikilla $\epsilon > 0$.

Määritelmä 3.13. Joukko A on

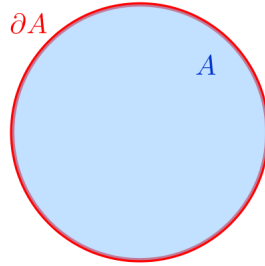
1. **Avoin**, jos jokainen joukon A piste on joukon A sisäpiste.
2. **Suljettu**, jos joukon A komplementti A^c on avoin.

Esimerkki 3.14. Olkoon $A = [2, 4] \subset \mathbb{R}$. Kaikki joukon A pisteet eivät ole sisäpisteitä, sillä $2 \in A$, mutta 2 ei ole joukon A sisäpiste. Tämä seuraa siitä, että olipa $\epsilon > 0$ miten pieni tahansa, niin piste $2 - \frac{\epsilon}{2} \in B(2, \epsilon)$, mutta $2 - \frac{\epsilon}{2} \notin A$. Pisteeseen 2 piirretty ϵ -säteinen avoin pallo ei siis sisälly kokonaisuudessaan joukkoon A , sillä löysimme palloon kuuluvan pisteen, joka ei kuulu joukkoon A . Täten 2 ei ole joukon A sisäpiste.

Joukon A komplementti $A^c =] - \infty, 2[\cup] 4, \infty[$ on puolestaan avoin. Siispä joukko A on suljettu.

Esimerkki 3.15. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Tällöin joukko A on avoin ja joukon reuna on $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Huomautus 3.16. Suljetun ja avoimen joukon määritelmästä seuraa, että suljettu joukko sisältää kaikki joukon reunapisteet. Avoin joukko puolestaan ei sisällä yhtään joukon reunapistettä.



Kuva 3.8: Esimerkin 3.15 joukko A on esitetty sinisellä ja joukon A reuna ∂A punaisella.

Huomautus 3.17. On olemassa joukkoja, jotka eivät ole avoimia eivätkä suljettuja. Yksinkertaisesti esimerkiksi sopii puoliavoin väli $]0, 1]$. Se ei ole avoin eikä suljettu.

Lause 3.18. Joukkojen leikkauksille ja yhdisteille pätevät seuraavat ominaisuudet:

- (a) Avointen joukkojen yhdiste on avoin.
- (b) Avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin.
- (c) Suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu.
- (d) Suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu.

Todistus. Todistetaan (a) ja (c)-kohdat.

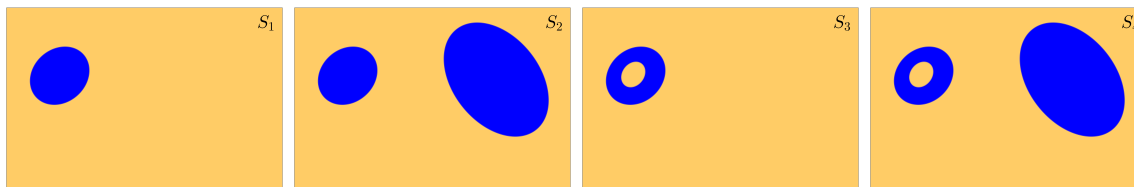
- (a) Olkoon joukot A_i avoimia kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ja olkoon $x \in A$. Piste x kuuluu joukkojen A_i yhdisteeseen, joten se kuuluu ainakin yhteen joukkoon A_j . Olkoon $x \in A_j$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Koska kaikki joukot A_i ovat avoimia, erityisesti A_j on avoin ja tällöin on olemassa avoin pallo $B(x, \epsilon) \subset A_j$. A_j on joukon A osajoukko, joten $B(x, \epsilon) \subset A$. Täten piste x on joukon A sisäpiste. Koska kaikki joukon A pisteet ovat sisäpisteitä, joukko A on avoin.
- (c) Olkoon joukot B_i suljettuja kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $B = \cap_{i=1}^{\infty} B_i$. Joukon B komplementti voidaan ilmaista joukkojen B_i komplementtien yhdisteenä, eli $B^c = \cup_{i=1}^{\infty} B_i^c$. Suljetun joukon määritelmän nojalla joukot B_i^c ovat avoimia ja (a)-kohdan tuloksen nojalla B^c on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Siispä B on suljettu.

□

Huomautus 3.19. Edellisen lauseen (b) ja (d)-kohdan tulokset eivät välttämättä päde äärettömälle leikkaukselle tai yhdisteelle. Esimerkiksi $\frac{1}{i}$ -säteisten origokeskeisten avointen pallojen ääretön leikkaus $\cap_{i=1}^{\infty} B(0, \frac{1}{i})$ on piste $\{0\}$, joka on suljettu.

Määritellään seuraavaksi joukon yhtenäisyys. Intuitiivisesti joukon epäyhtenäisyys on helppo käsittää. Joukko on epäyhtenäinen, jos se koostuu vähintään kahdesta erillisestä komponentista. Erillisillä komponenteilla tarkoitetaan osajoukkoja, joiden leikkaus on tyhjä joukko. Jos joukko ei ole epäyhtenäinen, se on luonnollisesti yhtenäinen.

Määritelmä 3.20. Joukko S on epäyhtenäinen, jos on olemassa vähintään kaksi erillistä epätyhjää avointa joukkoa T, U , siten että $S \subset (T \cup U)$. Jos joukko S ei ole epäyhtenäinen, niin se on yhtenäinen.



Kuva 3.9: Keltaisella väritetyt joukot S_1 ja S_2 ovat yhtenäisiä. Joukot S_3 ja S_4 ovat epäyhtenäisiä.

Huomautus 3.21. Kuten kuvasta 3.9 nähdään, joukon yhtenäisyyden perusteella ei voida päätellä mitään sen komplementin yhtenäisyydestä.

Tarkastellaan yhtenäisyyttä muutaman esimerkin avulla:

- (a) Olkoon joukko S taso \mathbb{R}^2 josta on poistettu x -akseli, eli

$$S = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = (x, y), y \neq 0\}.$$

Valitaan

$$T = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = (x, y), y > 0\}$$

ja

$$U = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = (x, y), y < 0\}.$$

Tällöin joukot T ja U ovat avoimia ja erillisiä, sekä $S \subset (T \cup U)$, joten joukko S on epäyhtenäinen.

- (b) Joukko $A = [0, 1] \cup [1, 2]$ on yhtenäinen, koska sillä ei ole olemassa kahta erillistä avointa joukkoa joiden yhdisteeseen joukko A sisältyisi.
- (c) Reaalilukujen osajoukko $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ on epäyhtenäinen.
- (d) Tason osajoukko $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on yhtenäinen.

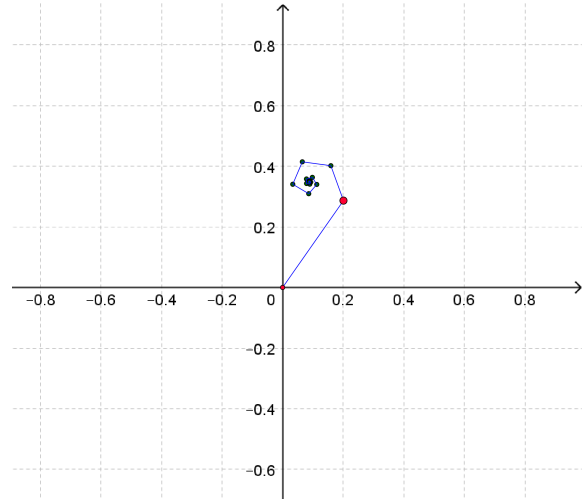
3.3 Mandelbrotin joukko ja sen ominaisuuksia

Olkoon $c \in \mathbb{C}$ ja $f_c: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$. Mandelbrotin joukossa on kysymys siitä, mitä alkuarvon $z_0 = 0$ ratajoukolle tapahtuu iteroitaessa alkuarvoa funktiolla f_c eri parametrien c arvoilla.

Taulukossa 3.1 on laskettu, mitä ratajoukolle $f_c^n(0)$ tapahtuu, kun $c = 0.2 + 0.28i$. Kuten huomaamme, ratajoukko lähestyy pistettä $z_1 \approx 0.09 + 0.34i$ kun n kasvaa. Piste z_1 on siis funktion f_c kiintopiste, kun $c = 0.2 + 0.28i$.

n	f_c^n
0	0.2000 + 0.2800i
1	0.1616 + 0.3920i
2	0.0725 + 0.4067i
3	0.0398 + 0.3389i
4	0.0867 + 0.3070i
5	0.1133 + 0.3332i
6	0.1081 + 0.3555i
7	0.0840 + 0.3524i
8	0.0829 + 0.3392i
9	0.0918 + 0.3362i
10	0.0954 + 0.3417i
11	0.0923 + 0.3452i
12	0.0894 + 0.3437i
13	0.0898 + 0.3414i
14	0.0915 + 0.3413i
15	0.0919 + 0.3425i
\vdots	\vdots

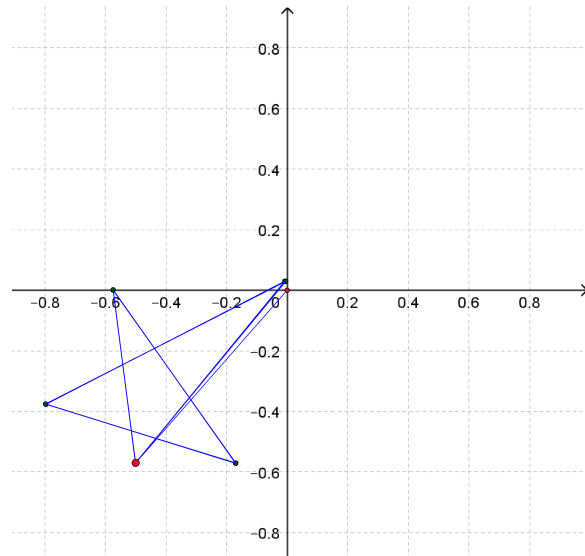
Taulukko 3.1: Ratajoukko f_c^n , kun $c = 0.2 + 0.28i$.



Kuva 3.10: Taulukon 3.1 ratajoukko esitettynä graafisesti.

n	f_c^n
0	-0.5000 - 0.5700i
1	-0.5749 + 0.0000i
2	-0.1694 - 0.5700i
3	-0.7961 - 0.3767i
4	-0.0080 + 0.0299i
5	-0.5008 - 0.5704i
6	-0.5746 + 0.0014i
7	-0.1698 - 0.5716i
8	-0.7979 - 0.3758i
9	-0.0045 + 0.0298i
10	-0.5008 - 0.5702i
11	-0.5743 + 0.0012i
12	-0.1701 - 0.5714i
13	-0.7976 - 0.3755i
14	-0.0048 + 0.0290i

Taulukko 3.2: Ratajoukko f_c^n , kun $c = -0.5 - 0.57i$.



Kuva 3.11: Taulukon 3.2 ratajoukko esitettynä graafisesti.

Taulukossa 3.2 on puolestaan laskettu, mitä ratajoukolle $f_c^n(0)$ tapahtuu, kun $c = -0.5 - 0.57i$. Nyt huomataan, että ratajoukko lähestyy 5-jaksoista sykliä, kun n kasvaa.

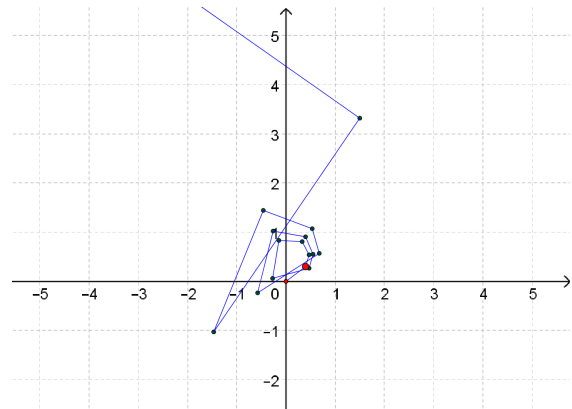
Näillä kahdella edellä esitellyllä kompleksitason pisteellä c yhteistä on se, että indeksin n lähestyessä ääretöntä ratajoukko $f_c^n(0)$ ei hajaannu äärettömyyteen. On

syitä huomata, että toisin kuin yksiulotteisessa tapauksessa, tasossa hajaantumisella ei ole välttämättä selkeää suuntaa, vaan se voi olla esimerkiksi spiraalimaista

Tarkastellaan vielä kolmatta tapausta, kun $c = 0.4 + 0.3i$. Taulukosta 3.3 huomataan, että 13. iteraation jälkeen ratajoukon jäsenet loittonevat origosta hyvin nopeasti ja kyseinen ratajoukko todella hajaantuu, kun n lähestyy ääretöntä.

n	f_c^n
0	$0.4000 + 0.3000i$
1	$0.4700 + 0.5400i$
2	$0.3293 + 0.8076i$
3	$-0.1437 + 0.8318i$
\vdots	\vdots
13	$-1.46802 - 1.0274i$
14	$1.49943 + 3.3166i$
15	$-8.3517 + 10.24614i$
16	$-34.8311 - 170.8470i$
17	$-27975.11 + 11901.89i$

Taulukko 3.3: Ratajoukko f_c^n , kun $c = 0.4 + 0.3i$.



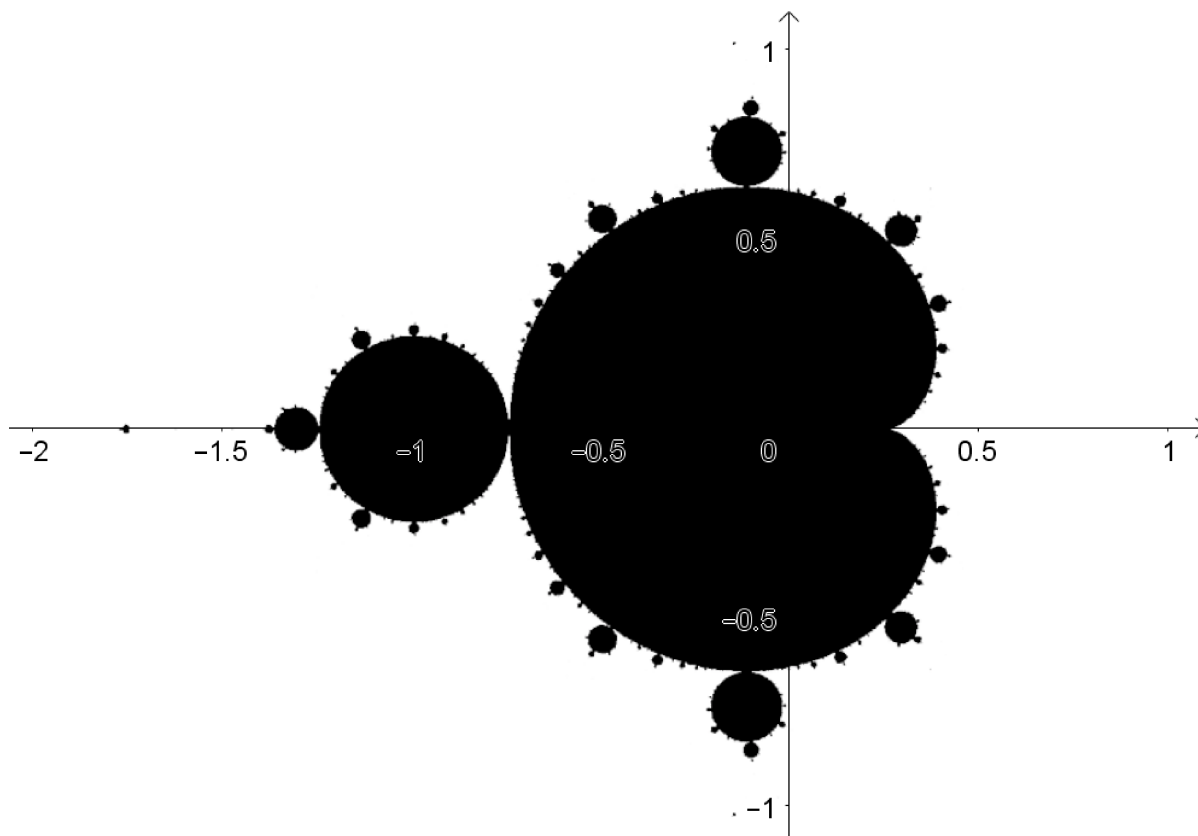
Kuva 3.12: Taulukon 3.3 ratajoukko esitettyinä graafisesti.

Määritelmä 3.22. Olkoon $c \in \mathbb{C}$ ja $f_c: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$ funktio. **Mandelbrotin joukko** \mathcal{M} koostuu niistä pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joilla alkuarvon $z_0 = 0$ rata ei hajaannu äärettömyyteen iteroitaessa sitä funktiolla f_c .

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| \neq \infty\}.$$

Mandelbrotin joukko on suhteellisen tuore löytö matematiikan tutkimuksessa. Sen löytyminen juontaa juurensa 1900-luvun alkuun, jolloin ranskalaiset matemaatikot Pierre Fatou ja Gaston Julia julkaisivat teorian *Julian ja Fatoun joukoista*. Funktion f täytetty Julia joukko koostuu niistä alkuarvoista, joiden rata ei iteroitessa hajaannu äärettömyyteen. Niin ikään ranskalainen matemaatikko Benoit Mandelbrot tutki vuonna 1980 Julia joukkoja tietokoneen avulla piirtäessään kuvia joukosta. Tietokoneet olivat kehittyneet riittävästi mahdollistaen raskaiden laskuoperaatioiden käsittelyn ja visualisoinnin. Samalla hän innostui tutkimaan tietokoneen avulla muutamaa vuotta aiemmin määriteltyä Julia joukkojen teoriaan perustuvaa joukkoa, jossa alkuarvon muuttamisen sijaan tutkitaan, miten alkuarvon $z_0 = 0$ ratajoukko käyttäytyy muutettaessa vakiota c iteroivassa funktiossa $f(z) = z^2 + c$. Mandelbrot oli ensimmäinen, joka näki tietokoneella piirretyn kuvan kyseisestä joukosta. Nykyään tuo joukko on nimetty hänen mukaansa Mandelbrotin joukoksi.[4, s.10]

Aiemmissa luvuissa tutkiessamme jänispopulaation kehittymistä ja logistisen funktion eri alkuarvojen ratojen käyttäytymistä, iteroimme valittua alkuarvoa ennalta määrättyllä funktiolla ja tutkimme mitä alkuarvon radalle tapahtuu pitkällä aikavälillä. Mandelbrotin joukkoa tarkastellessa kyse on myös dynaamisesta systeemistä. Tällä kertaa alkuarvon sijaan muutetaan vakiota c , joka on jokin kompleksitason piste



Kuva 3.13: Vuonna 1980 julkaistu ensimmäinen kuva Mandelbrotin joukosta oli tarkkuudeltaan rajoittunut. Mandelbrotin joukkoon kuuluvat pisteet on väritetty mustalla.

ja tutkitaan, miten alkuarvon $z_0 = 0$ rata käyttäytyy iteroitaessa alkuarvoa funktiolla $f(z) = z^2 + c$. Oikeastaan Mandelbrotin joukossa ollaan kiinnostuneita siitä, millä pisteillä c ratajoukko hajaantuu äärettömyyteen ja millä ei. Ne pisteet c , joilla ratajoukko ei hajaannu, kuuluvat Mandelbrotin joukkoon. Tutkitaan seuraavaksi Mandelbrotin joukkoa tarkemmin ja osoitetaan muutamia joukon ominaisuuksia.

Reaalilukujen tapauksessa kaikki ne luvut, joiden itseisarvo on suurempaa kuin yksi, hajaantuvat äärettömyyteen iteroitaessa alkuarvoa neliöintifunktiolla. Entä mitä tapahtuu alkuarvon $z_0 = 0$ radalle, kun muutammekin iteroivaa funktiota?

Valitulla luvulla c alkuarvon $z_0 = 0$ rata näyttää funktiolla $f(z) = z^2 + c$ iteroitaessa seuraavalta

$$0 \xrightarrow{f} c \xrightarrow{f} c^2 + c \xrightarrow{f} (c^2 + c)^2 + c \xrightarrow{f} \dots$$

ja luonnollisesti voimme olettaa radan hajaantuvan, kun valittu luku c on tarpeeksi kaukana origosta, eli sen moduli on tarpeeksi suuri. Toisin sanoen voidaan olettaa, että \mathcal{M} on rajoitettu, eli Mandelbrotin joukkoon kuuluvien pisteiden c modulille on olemassa jokin yläraja.

Kompleksifunktiolle $f(z) = z^2 + c$ pätee, että alkuarvon $z_0 = 0$ ratajoukko hajaantuu varmasti äärettömyyteen, jos piste c sijaitsee 2-säteisen origokeskeisen kie-

kon ulkopuolella, eli $|c| > 2$. Tällöin kyseinen piste c ei kuulu Mandelbrotin joukkoon. Osoitetaan joukon \mathcal{M} rajoittuneisuus hyödyntäen seuraavaa lemmaa.

Lemma 3.23. *Olkoon $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ ja $W_{c,\epsilon}$ niiden kompleksilukujen z joukko, joiden moduli on vähintään 2 ja suurempi kuin luvun c moduli.*

$$W_{c,\epsilon} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2 + \epsilon \text{ ja } |z| \geq |c|\}.$$

Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \infty$ kaikilla $z \in W_{c,\epsilon}$.

Lemma sanoo, että valitessamme ensin luvut c ja ϵ , niin kaikkien joukkoon $W_{c,\epsilon}$ kuuluvien kompleksilukujen z radat funktiolla $f(z) = z^2 + c$ hajaantuvat.

Todistus. Valitaan $c \in \mathbb{C}$ ja $\epsilon > 0$. Olkoon $z_0 \in W_{c,\epsilon}$. Tällöin saamme arvioitua alkuarvon z_0 radan seuraavaa alkioita alaspäin kolmioepäyhtälön avulla:

$$|f_c(z_0)| = |z_0^2 + c| \geq |z_0|^2 - |c| \geq |z_0|^2 - |z_0| = |z_0|(|z_0| - 1) \geq |z_0|(2 + \epsilon - 1) = |z_0|(1 + \epsilon).$$

Tästä seuraa, että myös $f_c(z_0) \in W_{c,\epsilon}$. Toistamalla edellinen päättely saadaan, että $|f_c^2(z_0)| \geq |z_0|(1 + \epsilon)^2$. Jatkamalla tätä induktiivisesti saadaan, että

$$|f_c^n(z_0)| \geq |z_0|(1 + \epsilon)^n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}, \text{ kun } z_0 \in W_{c,\epsilon}. \quad (3.5)$$

Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon)^n = \infty$, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_0|(1 + \epsilon)^n = \infty$. Tietoa 3.5 käyttäen on oltava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z_0)| = \infty \text{ kaikilla } z_0 \in W_{c,\epsilon}.$$

□

Mandelbrotin joukon määritelmän mukaan $c \in \mathcal{M}$ jos $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| \neq \infty$. Edellisen lemmän nojalla voidaan päätellä, että Mandelbrotin joukko sisältyy 2-säteisen origokeskeisen kiekon sisään. Jos $|c| > 2$, niin tällöin $c \in W_{c,\epsilon}$. Alkuarvon $z_0 = 0$ radan toinen alkio on $f_c(0) = c$. Jatkamalla iterointia tästä eteenpäin, edellisen lemmän nojalla rata hajaantuu, sillä $c \in W_{c,\epsilon}$ ja tällöin $|f_c^n(c)| = \infty$.

Muotoillaan saatu tulos lauseeksi:

Lause 3.24. *Jos $|c| > 2$, niin $c \notin \mathcal{M}$.*

Kuuluakseen Mandelbrotin joukkoon, on oltava $|c| \leq 2$. Matemaattisesti ilmaistuna

$$c \in \mathcal{M} \implies |c| \leq 2.$$

Yllä oleva implikaatio ei välttämättä päde toiseen suuntaan: on olemassa Mandelbrotin joukkoon kuulumattomia pisteitä, joiden moduli on korkeintaan kaksi.

Merkitään seuraavaksi yksinkertaisuuden vuoksi $F_n(c) := f_c^n(0)$ ja määritellään Mandelbrotin joukko kahdella muullakin tavalla.

Kaikille Mandelbrotin joukon pisteille on oltava $|F_n(c)| \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edellisen lauseen nojalla alkuarvon 0 rata funktiolla $F(c)$ hajaantuu, jos $|c| > 2$. Jos olisi $|F_k(c)| > 2$ jollain $k \in \mathbb{N}$ niin tällöin jatkettaessa iterointia eteenpäin luvusta $F_k(c)$, jonka moduli on suurempaa kuin 2, rata hajaantuisi äärettömyyteen. Tällöin määritelmän nojalla piste c ei kuuluisi Mandelbrotin joukkoon.

Mandelbrotin joukko voidaan siis määritellä myös siten, että siihen kuuluvat ne kompleksitason pisteet c , joilla alkuarvon $z_0 = 0$ ratajoukon kaikki alkiot pysyvät 2-säteisen origokeskeisen kiekon sisällä. Matemaattisesti ilmaistuna

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : |F_n(c)| \leq 2 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Jatkon kannalta esitetään vielä kolmaskin tapa ilmaista Mandelbrotin joukko.

Olkoon $S = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$. Tällöin joukon $F_1(S)$ alkukuvaan $F_1^{-1}(S)$ kuuluvat ne kompleksitason pisteet c , joille $|F_1(c)| \leq 2$, eli $F_1(c) \in S$. Vastaavasti joukkoon $F_2^{-1}(S)$ kuuluvat ne kompleksitason pisteet c joille pätee, että $|F_2(c)| \leq 2$, eli $F_2(c) \in S$. Yleisesti joukon $F_n^{-1}(S)$ alkukuvalla pätee:

$$F_n^{-1}(S) = \{c \in \mathbb{C} : |F_n(c)| \leq 2\}. \quad (3.6)$$

Kuten juuri totesimme, joukko \mathcal{M} koostuu niistä pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joille $|F_n(c)| \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kuuluakseen Mandelbrotin joukkoon pisteen c radan täytyy pysyä 2-säteisen kiekon sisällä. Siispä Mandelbrotin joukon pisteille pätee, että $c \in F_n^{-1}(S)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Täten joukolle saadaan seuraava esitystapa:

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}(S).$$

Joukon $F_n(S)$ alkukuvan esityksestä (3.6) nähdään, että joukko $\{c \in \mathbb{C} : |F_n(c)| = 2\}$ muodostaa alkukuvan reunan. Koska alkukuvan reuna sisältyy alkukuvaan, $F_n^{-1}(S)$ on suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 3.18 nojalla suljettujen joukkojen leikkauksena Mandelbrotin joukko on suljettu.

Lause 3.25. *Mandelbrotin joukko on symmetrinen reaaliakselin suhteen.*

Todistus. Ollakseen symmetrinen reaaliakselin suhteen, jokaisen Mandelbrotin joukkoon kuuluvan kompleksitason pisteen kompleksikonjugaatin on myös kuuluttava joukkoon \mathcal{M} . Halutaan siis osoittaa, että jos $c \in \mathcal{M}$, niin $\bar{c} \in \mathcal{M}$.

Osoitetaan ensin induktion avulla, että

$$f_{\bar{c}}^n(0) = \overline{f_c^n(0)} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Alkuaskel: $n = 1$

$$f_{\bar{c}}^1(0) = 0^2 + \bar{c} = \overline{0^2 + c} = \overline{f_c^1(0)}.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että $f_{\bar{c}}^m(0) = \overline{f_c^m(0)}$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f_{\bar{c}}^{m+1}(0) &= (f_{\bar{c}}^m(0))^2 + \bar{c} \stackrel{i.o.}{=} \overline{(f_c^m(0))^2 + c} \\ &= \overline{(f_c^m(0))^2 + c} = \overline{f_c^{m+1}(0)} \\ &= f_{\bar{c}}^{m+1}(0). \end{aligned}$$

Täten induktioperiaatteen nojalla

$$f_{\bar{c}}^n(0) = \overline{f_c^n(0)} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Koska $|z| = |\bar{z}|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin

$$|f_{\bar{c}}^n(0)| = |\overline{f_c^n(0)}| = |f_c^n(0)| \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi tiedetään, että pisteille $c \in \mathcal{M}$ pätee $|f_c^n(0)| \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan nyt, että $c \in \mathcal{M}$. Tällöin

$$2 \geq |f_c^n(0)| = |\overline{f_c^n(0)}| = |f_{\bar{c}}^n(0)| \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N} \implies \bar{c} \in \mathcal{M}.$$

Siispä Mandelbrotin joukko on symmetrinen reaaliakselin suhteen. □

Esitellään seuraavaksi hyödyllinen aputulos, jonka todistus vaatii syvällisempää matemaattisen analyysin hallintaa.[8] Todistus sivuutetaan.

Lemma 3.26 (Maksimiperiaate). *Olkoon D kompleksitason avoin osajoukko ja $f: D \mapsto \mathbb{C}$ derivoituva funktio. Tällöin $|f(x)|$ saavuttaa maksiminsa joukon D reunalla.*

Derivoituvuus kompleksilukujen joukossa määritellään samalla tavalla erotusosamäärän avulla kuin reaalilukujen joukossa. Kuten reaalilukujen joukossa, myös kaikki kompleksiset polynomit ovat derivoituvia.

Esimerkki 3.27. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin origokeskeinen pallo, jonka säde on 1 ja olkoon $f: D \mapsto \mathbb{C}$ funktio siten, että $f(z) = 2z$. Geometrisesti tulkittuna funktio f venyttää jokaisen pisteen $z \in D$ etäisyyden origosta kaksinkertaiseksi. Funktion f kuvajoukko on avoin origokeskeinen pallo, jonka säde on 2. Maksimiperiaatteen nojalla $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa joukon reunalla, eikä avoimessa joukossa D . Tämä voidaan todeta myös havainnoimalla, että joukon D reunalla $|f(z)| = 2$, kun taas joukossa D $|f(z)| < 2$.*

Osoitetaan seuraavaksi, että Mandelbrotin joukossa ei ole ”reikiä”, eli \mathcal{M}^c on yhtenäinen.

Lause 3.28. *Mandelbrotin joukon komplementti on yhtenäinen.*

Todistus. Tehdään antiteesi, eli oletetaan, että joukko \mathcal{M}^c on epäyhtenäinen.

Tällöin epäyhtenäisyyden määritelmän nojalla on olemassa (ainakin) kaksi erillistä epätyhjää avointa joukkoa E ja F siten, että \mathcal{M}^c sisältyy näiden joukkojen yhdisteeseen. \mathcal{M}^c voidaan siis jakaa kahteen osaan, siten että niiden ”väliin” jäävä alue sisältyy joukkoon \mathcal{M} . Voidaan olettaa, että $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\} \subset F$. Täten $E \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$, joten joukko $E \subset \mathcal{M}^c$ on avoin ja rajoitettu komponentti. Erityisesti kaikille pisteille $c \in E$ pätee, että

$$|f_c^n| > 2 \text{ jollain } n \in \mathbb{N},$$

jonka jälkeen rata hajaantuu iteroitaessa äärettömyyteen.

Maksimiperiaatteen 3.26 nojalla $|f_c^n|$ saavuttaa suurimman arvonsa avoimessa joukossa E sen reunalla. Jos kaikille joukon E reunapisteille $m \in \partial E$ pätsi, että $|f_m^n| \leq 2$, rata $|f_m^n|$ saavuttaisi maksiminsa jossakin joukon E sisäpisteessä. On siis oltava olemassa (ainakin yksi) piste $m' \in \partial E$ siten, että

$$|f_{m'}^n| > 2.$$

Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_{m'}^n| = \infty$ ja $m' \in \mathcal{M}^c$. \mathcal{M}^c ei ole avoin, sillä m' on joukon \mathcal{M}^c reunapiste, joka myös kuuluu joukkoon \mathcal{M} . Tiedämme kuitenkin, että \mathcal{M} on suljettu ja \mathcal{M}^c on suljetun joukon komplementtina avoin. Täten antiteesi ei pidä paikkaansa ja on oltava, että \mathcal{M}^c on yhtenäinen. \square

Lukijalle saattaa tulla mieleen kysymys, että onko Mandelbrotin joukko itsessään yhtenäinen. Ensimmäisten tietokoneella tehtyjen kuvitusten (kts. kuva 3.13) perusteella vaikutti siltä, että Mandelbrotin joukko on epäyhtenäinen. Myöhemmin on kuitenkin osoitettu, että Mandelbrotin joukko *on yhtenäinen*. Sen aikaiset tietokoneohjelmat eivät kyenneet havaitsemaan ohuita ”säikeitä”, jotka yhdistävät Mandelbrotin joukon eri osia. Yhtenäisyyden todistaminen vaatii syvempää topologian hallitsemista, joten sen todistus sivuutetaan.

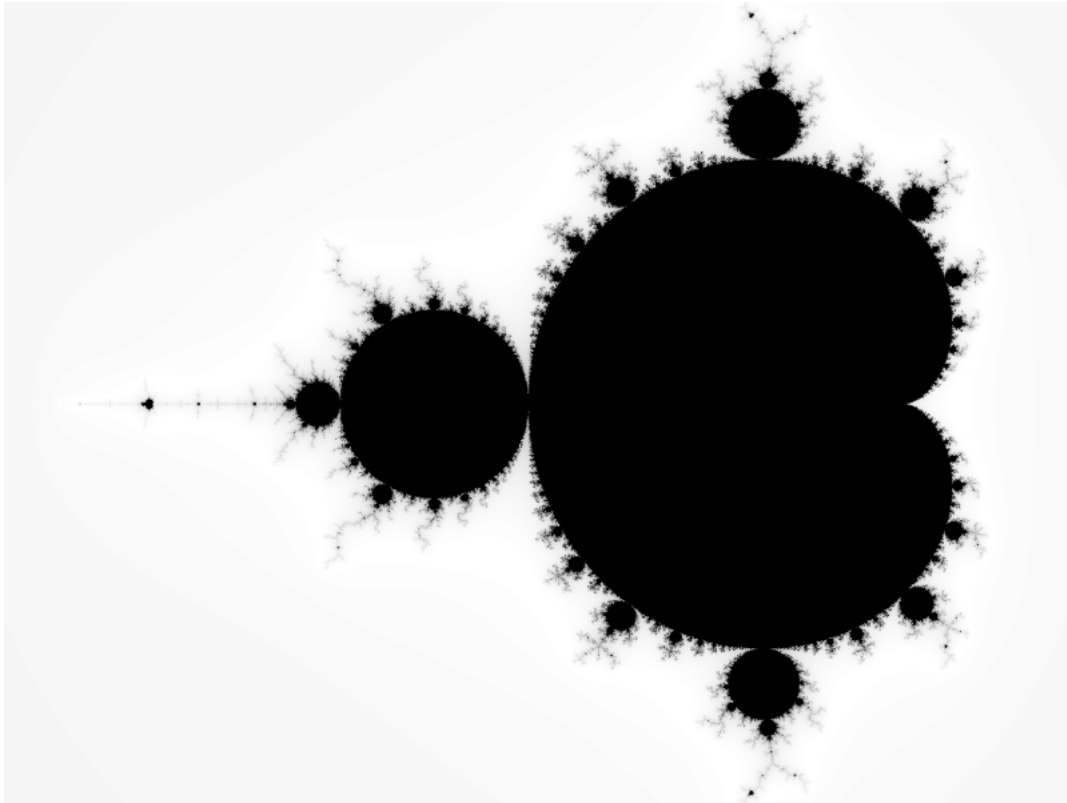
Katsottaessa kuvaa Mandelbrotin joukosta, sen pääkardioidista lähtee x -akselin suuntaisesti ketjumainen rakenne, joka vähitellen muuttuu niin pieneksi, että tietokoneen resoluutio ei riitä havainnollistamaan kuuluuko piste joukkoon \mathcal{M} vai ei. Todistetaan seuraavaksi, mitkä x -akselin pisteet kuuluvat Mandelbrotin joukkoon.

Lause 3.29. *Mandelbrotin joukon leikkaus reaalityönteiden kanssa on suljettu väli $[-2, \frac{1}{4}]$ eli*

$$\mathbb{R} \cap \mathcal{M} = [-2, \frac{1}{4}].$$

Todistus. Halutaan selvittää, mitkä reaalityönteet kuuluvat Mandelbrotin joukkoon, joten näyttäisi siltä, että $c \in \mathbb{R}$. Jaetaan tapaus kolmeen osaan:

Tapaus 1: $c < -2$. Tällöin $|c| > 2$ ja lauseen 3.24 nojalla $c \notin \mathcal{M}$.



Kuva 3.14: Mandelbrotin joukko on yhtenäinen.

Tapaus 2: $c > \frac{1}{4}$. Tällöin $c = \frac{1}{4} + \epsilon$, missä $\epsilon > 0$. Nyt kaikille c pätee

$$f_c(c) - c = c^2 + \frac{1}{4} + \epsilon - c = \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \epsilon \geq \epsilon,$$

joten

$$f_c(c) \geq c + \epsilon \text{ kaikilla } c > \frac{1}{4}. \quad (3.7)$$

Tietoa 3.7 hyödyntämällä saadaan, että

$$\begin{aligned} f_c^n(0) &= f_c(f_c^{n-1}(0)) \geq f_c^{n-1}(0) + \epsilon \\ &= f_c(f_c^{n-2}(0)) + \epsilon \\ &\geq (f_c^{n-2}(0) + \epsilon) + \epsilon \\ &= \dots \\ &\geq f_c(0) + (n-1)\epsilon \\ &\geq 0 + \epsilon + (n-1)\epsilon \\ &= n\epsilon. \end{aligned}$$

Tällöin kaikille $c > \frac{1}{4}$ pätee, että $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) = \infty$, sillä $f_c^n(0) \geq n\epsilon$ ja myös $\lim_{n \rightarrow \infty} n\epsilon = \infty$. Tällöin $c \notin \mathcal{M}$.

Tapaus 3: $c \in [-2, \frac{1}{4}]$. Ensimmäisessä luvussa esiteltiin funktion kiintopiste. Piste k on funktion f kiintopiste, jos $f(k) = k$. Yhtälöstä

$$f_c(x) = x \iff x^2 + c - x = 0 \quad (3.8)$$

saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa hyödyntäen ratkaistua funktion suuremmaksi kiintopisteeksi

$$\beta(c) := x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Hyödynnetään ennalta tuttua logistista funktiota ja merkitään:

$$g_\lambda(t) := rt(1 - t), \quad r = 2\beta(c), \quad t = \frac{1}{2} - \frac{x}{r}.$$

Kuten logistisessa funktiossa tällöin $r \in [1, 4]$ kun $c \in [-2, \frac{1}{4}]$. Koordinaattien muutoksen jälkeen pistettä $x = 0$ vastaa piste $t = \frac{1}{2}$. Koska $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ ja $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, niin $g_\lambda^n(\frac{1}{2}) \in [0, 1]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja täten ratajoukko $g_\lambda^n(\frac{1}{2})$ on rajoitettu. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että ratajoukko $f_c^n(0)$ on rajoitettu. Tällöin $c \in \mathcal{M}$. \square

Edellinen lause voitaisiin todistaa myös topologisesti käyttämällä apuna tietoa Mandelbrotin joukon symmetrisyydestä reaaliakselin suhteen, sekä joukon ja sen komplementin yhtenäisyyttä. [6, s. 3-4]. Todistuksen ideana on olettaa, että väliltä $[-2, \frac{1}{4}]$ löytyisi piste $a \in \mathcal{M}^c$, joka voidaan yhdistää joukon komplementtia pitkin kulkevan käyrän avulla selvästi johonkin joukon komplementtiin kuuluvaan pisteeseen. Saadaan aikaiseksi ristiriita, jolloin $[-2, \frac{1}{4}] \subset \mathcal{M}$.

3.4 Mandelbrotin joukon visuaalisointi

Visualisoitaessa Mandelbrotin joukkoa tietokoneen avulla, ohjelmisto käyttää hyödyksi Mandelbrotin joukon esitystapaa

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : |F_n(c)| \leq 2 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Kuvitellaan, että tietokoneemme käyttää tarkkuutena 100 iteraatiota. Jos ratajoukko $|F_k(c)| > 2$ jollain $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$ niin tiedämme, että $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(c)| = \infty$ ja $c \notin \mathcal{M}$. Tällöin voimme lopettaa iteroinnin ja jättää pisteen c värittämättä, sekä siirtyä seuraavaan pisteeseen. Jos $|F_{100}(c)| \leq 2$ oletamme, että kyseinen ratajoukko ei hajaannu ja väritämme pisteen mustaksi. Tällä tavoin saamme aikaiseksi hahmotelman Mandelbrotin joukosta.

Saamamme kuva antaa meille käsityksen siitä miltä joukko \mathcal{M} näyttää. Kuva ei kuitenkaan ole tarkka. Mitä lähemmäs Mandelbrotin joukon reunaa menemme, sitä arvaamattomampaa ratajoukon käyttäytyminen on. Reunan lähellä olevan Mandelbrotin joukkoon kuulumattoman pisteen ratajoukko saattaa viipyä todella pitkään (lähes äärettömän pitkään) 2-säteisen kiekon sisällä, kunnes lopulta jossain vaiheessa ajautuu 2-säteisen kiekon ulkopuolelle ja täten äärettömyyteen. Saadaksemme tarkan

kuvan Mandelbrotin joukosta, meidän tulisi pystyä havainnoimaan kompleksitason pisteitä äärettömällä tarkkuudella ja lisäksi tietokoneemme tulisi pystyä iteroimaan alkuarvoa äärettömän monta kertaa. Kuten aiemmissa luvuissa olemme todenneet, tietokoneiden rajallisen laskentatehon vuoksi emme pysty toimimaan näin.

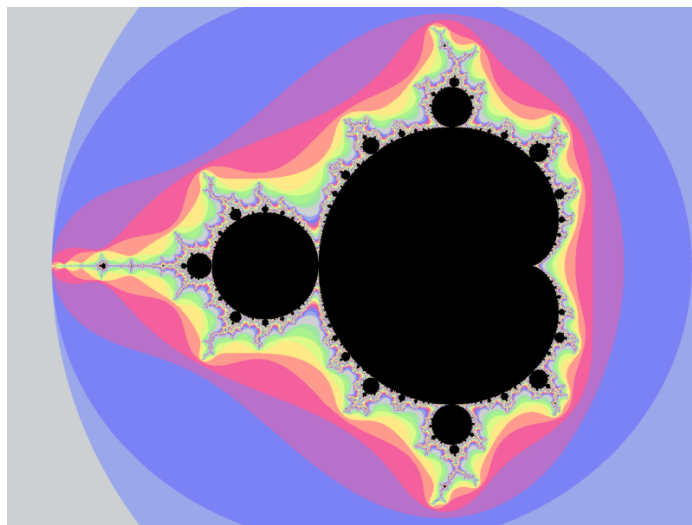
Tiedämme, että Mandelbrotin joukko on suljettu ja täten Mandelbrotin joukon reuna kuuluu joukkoon \mathcal{M} . Missä joukon \mathcal{M} reuna sitten tarkalleen kulkee? Reunan sijainnin täsmällinen määrittäminen on käytännössä mahdotonta, mutta seuraavaksi näemme, miten reunan sijaintia voidaan arvioida värillisen kuvan avulla.

3.4.1 Mandelbrotin joukon karkaamisaika

Sen sijaan, että värittäisimme kompleksitason pisteitä pelkästään mustaksi tai valkoiseksi, voimme laskea kuinka nopeasti Mandelbrotin joukkoon kuulumattomien pisteiden ratajoukko hajaantuu äärettömyyteen ja värittää pisteen sen perusteella. [3, 3.3.4]

Oletetaan edelleen, että tietokoneemme laskee ratajoukkoja sadanteen iteraatioon saakka. Valitaan esimerkiksi kymmenen väriä ja indeksoidaan ne indeksillä i - tässä tapauksessa nolasta yhdeksään. Yhdeksännen värin jälkeen aloitamme värien käyttämisen uudelleen, eli indeksejä 1 ja 11 vastaa sama väri kuten myös indeksejä 2 ja 12, ja niin edelleen. Olkoon i ensimmäinen indeksi, jolloin $|F_i(c)| > 2$. Tällöin värittäessämme pisteen c sillä värillä i , saamme Mandelbrotin joukon komplementille aikaiseksi 10-portaisen väriskaalan, joka indikoi kuinka ”lähellä” Mandelbrotin joukkoa kyseinen piste c on. Seuraavissa kuvissa värit on indeksöity seuraavasti: harmaa (0), vaaleansininen (1), sininen (2), lila (3), punainen (4), oranssi (5), keltainen (6), lime (7), vaaleanvihreä (8), vihreä (9).

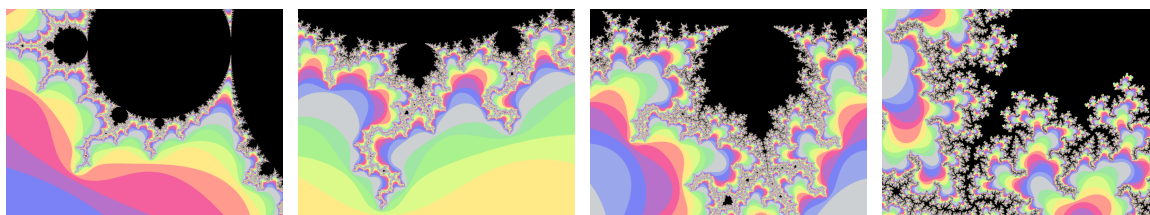
Kuvassa 3.15 uloin harmaa alue esittää niitä pisteitä c , joille $|F_0(c)| = |0^2 + c| = |c| > 2$. Vastaavasti viereinen vaaleansininen alue esittää niitä pisteitä c , joille $|F_1(c)| > 2$ ja niin edelleen.



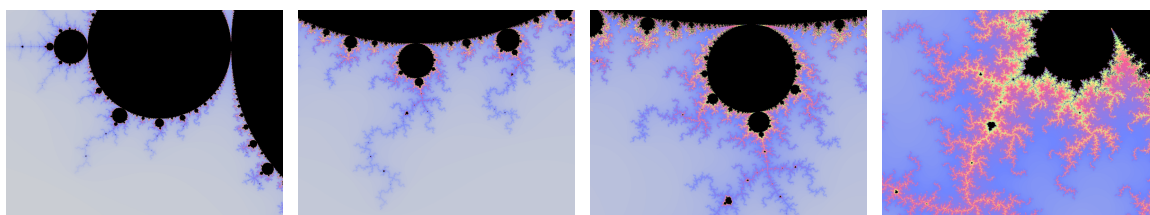
Kuva 3.15: Karkaamisajan värikartta Mandelbrotin joukkolle tekstissä esitellyin värein.

Huomaa, että väriskaala toistuu aina kymmenen askeleen jälkeen. Esimerkiksi harmaalla on väritetty kaikki ne pisteet, joille $|F_k(c)| > 2$ ensimmäisen kerran, kun $k \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$. Mustaksi jäävä alue on Mandelbrotin joukon approksimaatio, eli ne pisteet c , joille $|F_{100}(c)| \leq 2$.

Kuvasarjoissa 3.16 ja 3.17 on esitetty samat suurennot Mandelbrotin joukosta. Kuvien 3.17 luomisessa on käytetty kymmenportaisen väriskaalan sijaan 300 eri värisävyä, jonka seuraksena kuvien värit vaihtuvat sulavasti. Samalla iteraatioiden määrää on kasvatettu sadasta iteraatiosta viiteensataan iteraatioon, jolloin joukosta saadaan tarkempi arvio.



Kuva 3.16: Zoomaamalla Mandelbrotin joukkoa näemme sen reunan kiehtovan käytäytymisen. Kuvissa on käytetty 10 värisävyä ja korkeintaan 100 iteraatiota.



Kuva 3.17: Kuvissa on esitetty vastaavat suurennot Mandelbrotin joukosta kuin kuvassa 3.16. Nyt kuvissa on käytetty 300 värisävyä ja korkeintaan 500 iteraatiota. Useampien iteraatioiden seurauksena joukosta saadaan hahmoteltua tarkempi kuva.

Sen lisäksi, että värit ovat visuaalisesti kiehtovia ne antavat hyödyllistä informaatiota, sillä värien muodostamat muodot eivät ole sattumaa. Mustavalkoisesta kuvasta värien antamaa lisäinformaatiota ei luonnollisesti pystytä havaitsemaan.

Mandelbrotin joukon reunan lähellä ratajoukon karkaaminen äärettömään kullakin vakion c arvolla kestää sitä kauemmin mitä lähempänä joukon reunaa kyseinen piste sijaitsee. Toisin sanoen värisävyjen perusteella voidaan nähdä, missä joukon reuna sijaitsee. Värejä katsomalla voimme saada käsityksen siitä, missä joukon ”piilotettu” osa sijaitsee. Todellisuudessa mitään ”piilotettua” osajoukkoa ei ole olemassa, vaan joukon reunan läheisyydessä joukko on niin kapea, että kuvien resoluutio ei ole riittävän tarkka näyttämään sitä.

3.5 Mandelbrotin joukko ja kaos

Katsottaessa kuvaa Mandelbrotin joukosta voidaan nähdä mitkä pisteet kuuluvat joukkoon ja mitkä pisteet eivät. Toisin sanoen nähdään, millä kompleksiluvuilla rata

$F_n(c)$ hajaantuu ja millä luvuilla rata pysyy äärellisenä. Se mitä kuvasta ei voida suoraan nähdä, on se *miten* radat pysyvät äärellisinä.

Soveltamalla algebraa logistisen funktion lausekkeeseen $f(x) = rx(1-x)$, lauseke saadaan muuttujanvaihdolla tämmälleen samaan muotoon kuin Mandelbrotin joukon luomisessa käytetty iteroiva funktio $f(z) = z^2 + c$. Kyseisen muuttujanvaihdon seurauksena jokaista logistisen funktion parametrin $r \in [1, 4]$ arvoa vastaa täsmälleen yksi Mandelbrotin joukkoon kuuluva reaaliluku $c \in [-2, \frac{1}{4}]$. Siispä logistisen funktion tapauksessa parametrin r muutoksella aikaansaadut käyttäytymismuutokset alkuarvon radassa ovat täsmälleen samat kuin liikuttamalla Mandelbrotin joukkoon kuuluvaa pistettä c reaaliakselilla.

Joukon reunan läheisyydessä Mandelbrotin joukko on alkuarvoherkkä. Kahden todella lähekkäisen alkuarvon radat saattavat olla todella erilaiset. Esimerkiksi $c = \frac{1}{4} \in \mathcal{M}$, mutta $c = \frac{1}{4} + \epsilon \notin \mathcal{M}$ kun $\epsilon > 0$.

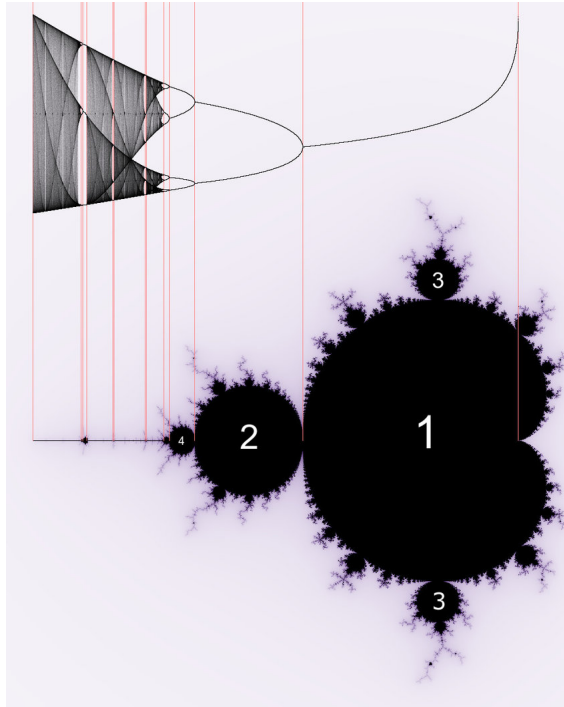
Mandelbrotin joukon pääosa koostuu kardioidista, johon on x -akselin suuntaisesti kiinnittynyt ketjumaisesti pienempiä ympyröitä aina joukon reunalle pisteeseen $x = -2$ saakka. Edellä kuvatun muuttujanvaihdon avulla huomataan, että jokainen ketjun ”kiinnityspiste” vastaa haarautumiskuvion haarautumispistettä. Siispä jokainen x -akselilla sijaitseva joukkoon kuuluva ympyrä vastaa aluetta, jonka pisteiden radoilla on tietty jaksollisuus. Esimerkiksi kaikkien pääkardioidiin kuuluvien pisteiden radat suppenevat yhteen pisteeseen. Viereiseen ympyrään kuuluvien pisteiden radat ovat 2-jaksoisia, seuraavan ympyrän radat 4-jaksoisia ja niin edelleen, kunnes vastaan tulee kaoottinen osa. Mandelbrotin joukossa tätä kutsutaan ”neulaksi”, sillä joukko kulkee suoraan x -akselin suuntaisesti ja vaikuttaa olevan todella kapea.

Kuten kuvasta 3.18 nähdään, joukon ”neulassa” on pieniä pullistumia, jotka ovat selvästi ympäristöönsä suurempia. Nämä pullistumat vastaavat haarautumisdiagrammin jaksollisia alueita. Tarkastellessamme haarautumisdiagrammia huomasimme, että sen suurennos muistuttaa hyvin paljon alkuperäistä haarautumisdiagrammia. Samoin nämä pienet pullistumat ovat mutatoituneita kopioita varsinaisesta Mandelbrotin joukosta.

Mandelbrotin joukon rakenne toistaa itseään x -akselin lisäksi säteittäin ympäri joukkoa. Jokaisella pullistumalla on omat pienemmät pullistumat, joilla puolestaan on omat pienemmät pullistumat ja niin edelleen. Mandelbrotin joukko koostuu itseään muistuttavista pullistumista, joita yhdistää joukko erittäin kierteisiä ja ikuisesti haarautuvia säikeitä. Kuten seuraavasta kuvakokoelmasta 3.19 nähdään, Mandelbrotin joukon yksityiskohdilla ei ole loppua.

3.6 Yhteenveto

Mandelbrotin joukko on merkittävä matetemaattinen objekti, joka kuuluu yhä modernin matematiikan tutkimuskohteisiin. Joukolla on sekä säännöllisiä että kaoottisia piireitä. Nämä muodot esiintyvät yhä uudelleen ja uudelleen tarkasteltaessa joukkoa pienemmällä mittakaavalla. Tarkasteltaessa Mandelbrotin joukkoa lähemmin, siinä ilmenee varsinaista joukkoa muistuttavia muotoja. Nämä eivät kuitenkaan ole täydellisiä kopiota varsinaisesta Mandelbrotin joukosta, sillä niistä lähtevien spiraalien

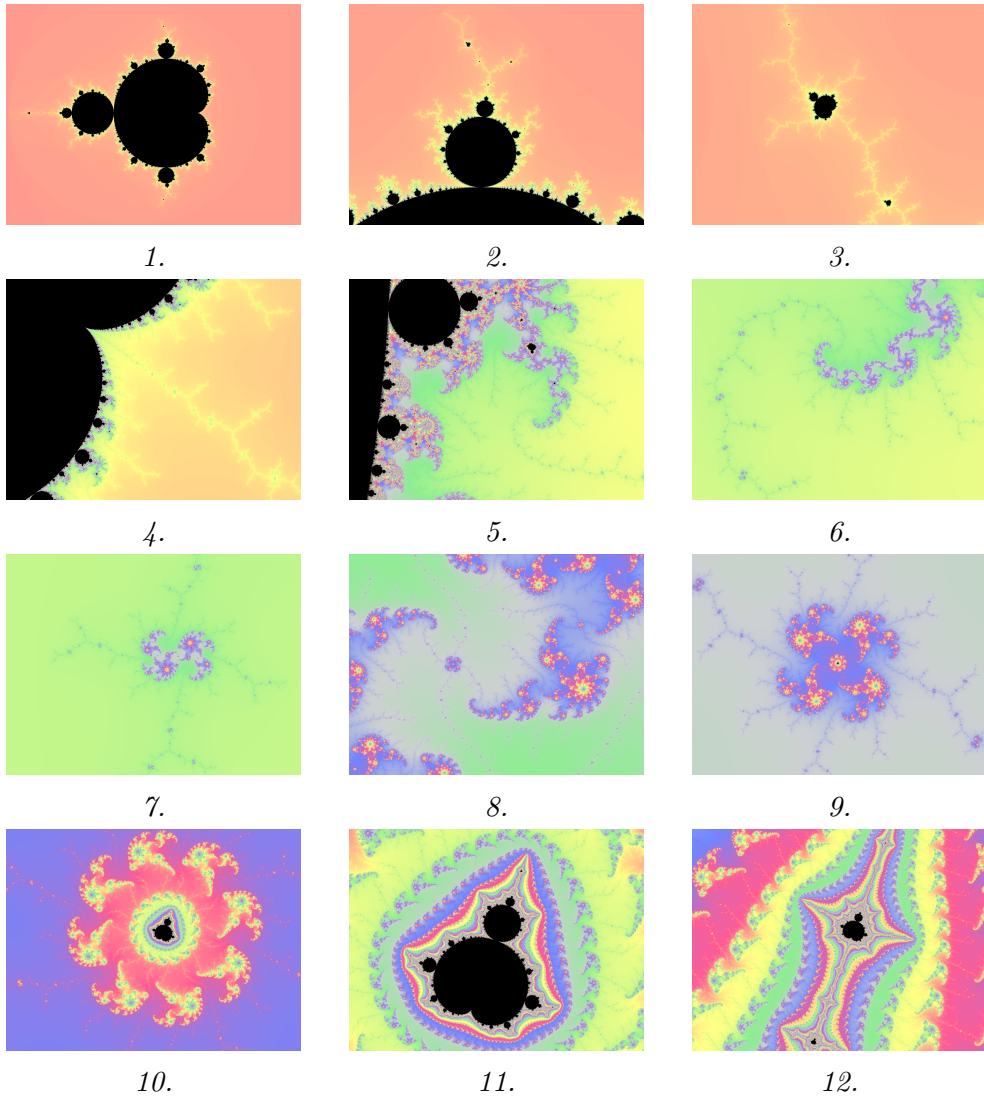


Kuva 3.18: Logistisen funktion haarautumisdiagrammin ja Mandelbrotin joukon välillä on yhteys. Kuva: [7, s.1].

ja antennien koko ja määrä vaihtelee. Zoomaamalla Mandelbrotin joukkoa voidaan luoda kauniita ja sanoinkuvaamattomia kuvia. Kaikki nämä muodot syntyvät todella yksinkertaisen yhtälön

$$f(z) = z^2 + c$$

avulla. Iteroitaessa tätä yksinkertaista kompleksista polynomifunktiota huomaamme, että yksinkertaiset dynaamiset systeemit voivat helposti käyttäytyä kaoottisesti.



Kuva 3.19: Kuvasarja Mandelbrotin joukosta.

Kirjallisuutta

- [1] FELDMAN D. P., *Chaos and Fractals. An Elementary Introduction.* Oxford University Press, 2012.
- [2] GUO J., *Analysis of Chaotic Systems,* The University of Chicago. 2014.
- [3] HELBERG G., *Getting Acquainted with Fractals,* Walter De Gruyter, 2007.
- [4] LESMOIR-GORDON N. I., *The Mandelbrot Set, Fractal Geometry and Benoit Mandelbrot - The Life and Work of a Maverick Mathematician,* Medicographia. 2012.
- [5] MAHANTA A., KUMAR SARMAH H. & CHOUDHURY G., *Some Structural and Dynamical Properties of Mandelbrot set,* International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences. 2017.
- [6] PRAŽÁK D., *The Mandelbrot Set,* Mezinárodní konf. Jubilanti kateder matematiky TUL, 2000.
- [7] SACHIN VENKATESH T. S., *Investigating the relation between chaos and the three body problem,* Delhi Technological University. 2020
- [8] SLOUGHTER D., *Maximum Modulus Principle,* Furman University. 2004