

**MISTÄ ON MATEMATIIKAN OPPITUNTI TEHTY – ETNOGRAFINEN  
TAPAUSTUTKIMUS MATEMATIIKAN OPETTAMISESTA 4. LUOKALLA**

**Marika Mäkinen**

**Kasvatustieteiden pro gradu**

**-tutkielma**

**Syksy 2001**

**Opettajankoulutuslaitos**

**Jyväskylän yliopisto**

## TIIVISTELMÄ

Mäkinen, M. Mistä on matematiikan oppitunti tehty – etnografinen tapaustutkimus matematiikan opettamisesta 4. luokalla. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma 2001, 97.

Tutkielma on etnografisella tutkimusotteella toteutettu tapaustutkimus, jossa oli tutkimuskohteena yksi Hämeessä sijaitsevan peruskoulun luokanopettaja ja hänen neljännen luokan oppilaansa. Tutkimus suoritettiin marraskuussa 2000. Luokalla oli 25 oppilasta, joista 11 oli poikia ja 14 tyttöjä. Aineistonkeruumenetelmiä olivat osallistuva havainnointi, videointi, kysely ja niitä täydentävät haastattelut. Tutkimustehtävänä oli kuvata ja ymmärtää mitä matematiikan tunnilla todella tapahtuu. Kiinnostuksen kohteena oli, miten opettaja toteuttaa matematiikan opetuksensa – mitkä ovat oppitunnin vaiheet, millaisia työtapoja käytetään, miten havainnollistetaan ja konkretisoidaan, mitä ja miten opetusvälineitä käytetään jne. Toisena tehtävänäni oli selvittää miten opettajan ja oppilaan käsitykset matematiikan opetuksesta kohtaavat. Tässä keskityin siihen, mikä on opettajan ja oppilaiden käsitys opittujen asioiden yhteydestä aiemmin opittuihin asioihin, opittujen asioiden merkityksestä ja oppitunnin pääkohdista.

Tutkimuksen perusteella näyttää siltä, luokanopettaja toteuttaa matematiikan opetustaan varsin oppikirjasidonnoisesti ja opettajajohtoisesti. Oppitunnilla hyödynnetään oppikirjan tehtäviä ja opettajan oppaan harjoituksia. Matematiikan hierarkkinen rakenne näkyy siten, että uusien opittavien asioiden oppiminen on vaikeaa, mikäli aiemmin opituissa aiheeseen liittyvissä taidoissa on puutteita. Opettaja käyttää oppitunnilla runsaasti taulua havainnollistamiseen ja oppilaiden itsenäisen työskentelyvaiheen aikana hän kiertää luokassa antaen oppilaille ohjeita. Opettaja rohkaisee oppilaita arvioimaan ja keskustelemaan matemaattisista ratkaisutavoistaan, mutta oppilaille tämä on vaikeaa.

**Asiasanat:** Etnografinen tutkimus, matematiikan opetus, allekkain kertominen

1.	JOHDANTO .....	5
1.1.	Mitä opetus on? .....	6
1.2.	Oppimiskäsitykset lähtökohtana .....	10
1.2.1.	Behavioristisen oppimiskäsityksen seurauksia .....	10
1.2.2.	Konstruktivistisen oppimiskäsityksen seurauksia .....	12
2.	MATEMATIIKKA JA SEN OPETTAMINEN .....	14
2.1.	Mitä matematiikka on? .....	14
2.2.	Matematiikka oppiaineena .....	16
2.2.1.	Miksi matematiikkaa .....	18
2.2.2.	Kritiikkiä perinteiselle matematiikan opetukselle .....	20
2.2.3.	Uusia tuulia matematiikan opetuksessa .....	21
2.3.	Luokanopettaja matematiikanopettajana .....	25
3.	MATEMATIIKAN OPETUKSEN TOTEUTUS .....	28
3.1.	Oppitunnin vaiheet .....	28
3.1.1.	Pääsälasku .....	28
3.1.2.	Kotitehtävät .....	29
3.1.3.	Koonta ja kertaus .....	31
3.1.4.	Uuden asian opetus .....	31
3.1.5.	Harjoittelu .....	32
3.2.	Opetuksen järjestämisperiaatteet .....	33
3.2.1.	Työtavat .....	33
3.2.2.	Havainnollistaminen ja konkretisointi .....	37
3.2.3.	Motivointi ja aktivointi .....	38
3.2.4.	Eriyttäminen .....	40
3.2.5.	Integrointi .....	42
3.2.6.	Arviointi .....	42
4.	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS .....	45
4.1.	Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat .....	45

4.2. Tutkimusmenetelmä .....	47
4.2.1. Tapaustutkimus.....	48
4.2.2. Etnografinen tutkimus.....	49
4.3. Aineiston kuvaus .....	51
4.4. Aineiston analyysi .....	53
4.5. Tutkimuksen luotettavuuden ja yleistettävyyden arviointia .....	54
5. MISTÄ ON MATEMATIIKAN OPPITUNTI TEHTY?.....	57
5.1. Aiempien tietojen merkitys.....	57
5.1.1. Kertolasku .....	60
5.1.2. Allekkain kertominen yksinumeroisella luvulla ilman muistinumeroa.....	65
5.2. Uutta oppimassa: allekkainlaskua kaksinumeroisella kertojalla ilman muistinumeroa .....	66
5.3. Oppituntien solmukohtia .....	72
5.3.1. Ohjeidenanto .....	72
5.3.2. Salapoliisitehtäviä.....	73
5.4. Oppilaan ja opettajan käsitykset matematiikan oppitunnista.....	75
5.4.1. Yhteys aiemmin opittuihin asioihin.....	75
5.4.2. Opeteltavien asioiden merkitys .....	77
5.4.3. Oppitunnin pääkohdat.....	78
6. TARKASTELU .....	80
LÄHTEET .....	89

Liite 1. Havainnointilomake

Liite 2. Kysymykset oppilaille

## 1. Johdanto

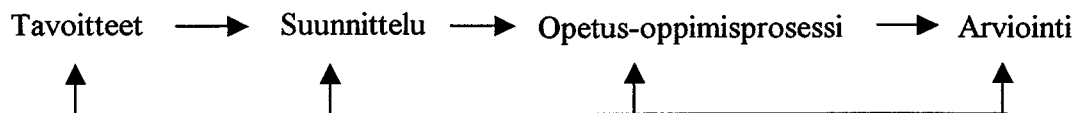
Nykyinen tietoyhteiskunta vaatii opettajalta paitsi aineen hallintaa niin myös kasvatuskäytänteiden tuntemusta. Tärkeä koulutyön tavoite on oppia itsenäiseksi tiedonhankkijaksi ja –prosessoijaksi – oppia mukautumaan yhteiskunnan jatkuvaan muutokseen. Opettajalta tämä vaatii näkemystä yhteiskunnasta ja sen tulevaisuudesta unohtamatta syvällistä opetettavan aineen hallintaa ja pedagogista erityisosaamista.

Matematiikan haastavuus oppiaineena opettajalle on ilmeinen, sillä matemaattisella ajattelulla on merkittävä asema jokaisen ihmisen elämässä. Ympäristöä tarkkaillessamme voimme huomata, että oikeastaan kaikki liittyy tavalla tai toisella matematiikkaan. Monet ihmiset muistavat muutaman kymmenen vuoden takaisilta kouluajoiltaan tylsät ja hyvin opettajajohtoiset oppitunnit. Paljon on kuitenkin tapahtunut muutosta, niin matematiikan opetuksessa kuin muussakin opetuksessa. Vai onko? Värikkäät ja kauniisti laaditut oppikirjat on laadittu siten, että niitä on helppo edetä aukeama per tunti –menetelmällä. Opettajanoppaiden valmiiksi laaditut mallitunnit ja muodissa olevat ongelmanratkaisutehtävät houkuttelevat opettajia noudattamaan oppikirjojen sisällystä. Nopeille oppilaille on tarjolla runsaasti lisämateriaalia ja hitaimmat voivat laskea perustehtäviä.

Matematiikkakokemukset omilta kouluajoilta ja opettajankoulutuksessa saatu matematiikanopetus ovat edelleenkin suurimmalle osalle luokanopettajista opetuksen perustana. Suurin osa opettajista pitää matematiikkaa ehdottoman eksaktina ja totena tietorakenteena. Tällainen ajattelutapa näkyy varmasti myös tarkasteltaessa matematiikan opetusta. Matematiikan näkeminen eräänlaisena siirtyvänä tietona opettajalta oppilaille ei anna tilaa oppilaan omalle tiedonprosessoinnille. Näin ei kuitenkaan tarvitse käydä. Matematiikan aktiivinen ja dynaaminen luonne on tärkeätä ymmärtää, sillä silloin opettaminen ja oppiminen voi olla haastavampaa, mielenkiintoisempaa ja jopa hauskeempaa.

### 1.1. Mitä opetus on?

Sanat opetus ja opettaminen mielletään usein toistensa synonyymeiksi. Kasvatustieteessä näiden sanojen välillä nähdään kuitenkin yleensä eroa. Opetus ymmärretään abstraktina käsitteenä ja myös laajemmin tarkoittaen kaikkia opetusjärjestelyjä. Kangasniemi (1993, 52-54) ja Lahdes (1997, 14) määrittelevät opetuksen tietoiseksi ja tarkoitukselliseksi toiminnaksi jolla pyritään oppilaan oppimiseen ja kehittämiseen toivottuun suuntaan. Tavoitteellisuuden ja tietoisuuden lisäksi opetukselle on ominaista vuorovaikutus. Oppilas on vuorovaikutuksessa häntä ympäröivän tilan ja henkilöiden kanssa. Lahdes (1997, 14) esittää opetuksen 4-vaiheisen perusmallin avulla (kuvio 1). Opetusprosessi lähtee tavoitteista, joiden pohjalta suunnittelulla pyritään ennakolta estämään odottamattomien ja haitallisten tekijöiden vaikutusta. Opetus- ja oppimisprosessi koostuu erilaisista opetusmuodoista, oppimateriaalista ja -välineistä, opetus- ja oppimistaidoista, periaatteista jne. Arviointi on mallin tukipilareita. Sitä tapahtuu niin mikrotasolla kuin makrotasolla. Mikrotason arviointia tapahtuu opetustapahtuman aikana opettajan tehdessä päätöksiä tunnin etenemisestä oppilaiden reaktioiden pohjalta. Makrotason arviointitoimia ovat puolestaan jaksojen ja lukuvuosien päättökokeet.

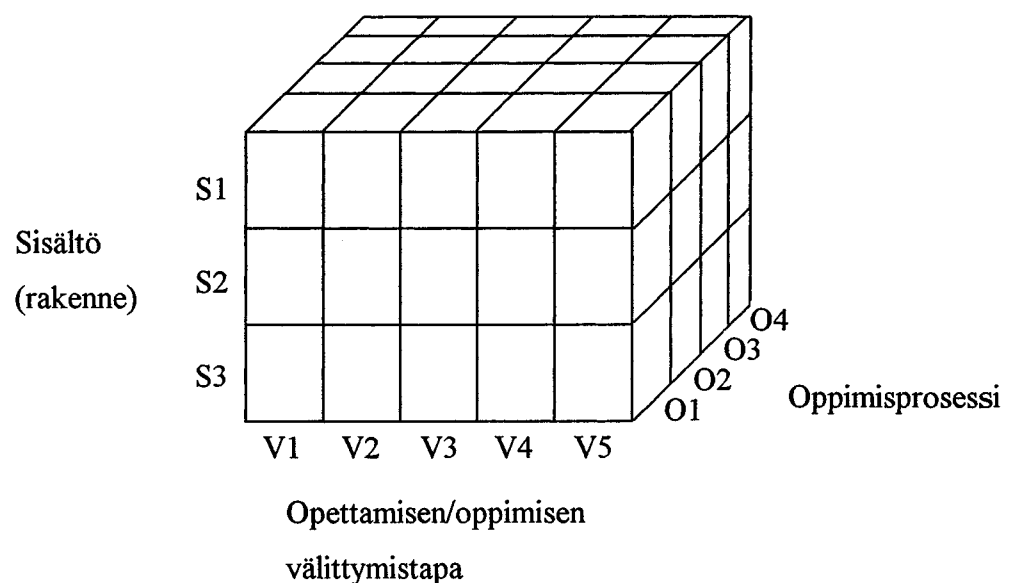


**Kuvio 1. Opetuksen perusmalli (Lahdes 1997, 14)**

Opettamisella puolestaan tarkoitetaan konkreetteja, käytännön toimenpiteitä. Oppiminen ja opettaminen liitetään toisiinsa, koska opettamisen tuloksena on oppiminen. Opettaminen ei kuitenkaan automaattisesti johda oppimiseen, vaikka niin on ajateltu. Opetus on aina tavoitteellista toimintaa, eikä opetusta voida antaa ilman, että opetukselle on annettu tavoitteet. Opetuksen suunnittelu ja analysointi tulevat esiin käytännön opetustilanteissa. Lahdeksen (1997, 90) mukaan tietoinen ja erityisesti mielekäs oppiminen syntyy silloin, kun opetus on kasvatustavoitteiden suuntaisesti suunniteltua ja

siinä on tavoitteellista vuorovaikutusta. Opettaja henkilönä liittyy olennaisesti opetuksen antamiseen.

Opetus on perusuonteeltaan luokassa tapahtuvaa välillistä tai välitöntä vuorovaikutusta, johon todellisessa elämässä sisältyy yleensä myös ainakin opettajan ennakko-oletuksia. Aebli (1991, 21-25) kuvaa opetustapahtuman kolmen ulottuvuuden valossa: välittymistavan ulottuvuus, sisältöjen ulottuvuus ja oppimisprosessin funktioiden ulottuvuus. Opetus voidaan jakaa sen välittymistavan mukaan viiteen perusmuotoon. Nämä viisi välittymistapaa oppilaan ja opettajan sekä oppilaan ja asian välillä ovat kertominen ja selostaminen, demonstrointi ja jäljittely, yhteinen esineiden, ilmiöiden ja kuvien havainnointi, lukeminen ja kirjoittaminen. Sisältöjen eli rakenteiden ulottuvuus jaetaan kolmeen osaan: toimitaskemat, operaatiot ja käsitteet. Näiden pohjana on tietty psykologinen ja tietoteoreettinen käsitys ajattelun alkuperästä. Oppimisprosessin funktioiden ulottuvuudet ovat puolestaan rakenteen ongelmia ratkaiseva konstruointi, syventäminen, harjoittelu/kertaus ja soveltaminen. Nämä muodolliset asteet kuuluvat opetusprosessiin, joka tutustuttaa oppilaat uuteen menetelmään tai uuteen käsitteeseen ja vakiinnuttaa sen heidän käyttöönsä. Olennaisinta Aeblin (1991) opetustapahtuman kuvauksessa on, että jokaisen kolmen ulottuvuuden arvot yhdistyvät toistensa osailmiöiksi. Järjestelmä voidaankin kuvata suorakulmaisena särmiönä, jossa välittymistapojen ulottuvuus muodostaa vaaka-akselin, sisällöt pystyakselin ja oppimisprosessin funktiot syvyysakselin (kuvio 2).



**Kuvio 2. Opetustapahtuman ulottuvuudet (Aebli 1991,24)**

Engeströmin (1984, 62-64) mukaan opetusprosessissa on tarkoitus yhdistää oppiminen ja opetus mahdollisimman hyvin yhteen. Opetus eroaa oppimisesta Kangasniemen (1993, 54) mukaan siinä, että opetuksen tavoitteena on tietoinen oppilaan kehittäminen, opettaminen. Opetuksen tehtävänä on kohottaa oppimisen laatua ja tehdä oppimisesta määrätietoista ja suunnitelmallista. Opetus on kokonaisuus johon kuuluvat opetus ja oppiminen.

Jarvis (1994, 149-153) määrittelee oppimisen prosessiksi, jossa kokemus ensin konstruoidaan ja sen jälkeen muunnetaan tiedoiksi, taidoiksi, asenteiksi, arvoiksi, emootioiksi, käsityksiksi, uskomuksiksi jne. Oppiminen on siis kokemusten muuntamisprosessi. Kokemuksen syntymiseen vaikuttaa aina kulttuuriset ja sosiaaliset tekijät. Huhtala (2000) on tutkinut negatiivisten matematiikkakokemusten vaikutuksia myöhempään matematiikan opiskeluun, ja todennut negatiivisten, turhauttavien ja masentavien tunteiden vaikuttavan vahvasti vielä myöhemmissä opinnoissakin. Aiemmin koetuista vaikeuksista on vaikea vapautua tai niitä on vaikea kokonaan unohtaa. On siis tärkeää puuttua tällaisiin turhautumisiin jo hyvissä ajoin myös alasteella ja yrittää suunnitelmallisella työllä estää tällaisten tuntemuksien ja oppimiskokemusten syntymistä. Oman kokemukseni mukaan jo alkuopetuksessa lapselle voi syntyä käsitys omien taitojen riittämättömyydestä ja ajattelun heikkoudesta niin voimakkaaksi, että uusien matemaattisten haasteiden kohtaaminen on miltei mahdotonta – oppilas ei enää luota omiin kykyihinsä ja mahdollisuuksiinsa kokemustensa perusteella.

Jarvisin (2000) mukaan kohtaamamme kokemukset voivat olla oppimiskokemuksia tai kokemukseen voi reagoida ei-oppimalla (kuvio 3). Oppimiskokemukset ovat joko tiedostettuja tai tiedostamattomia. Ei-oppimisen muotoja ovat ennakko-oletus, huomiottajättäminen ja torjunta. Ennakko-oletukset voivat estää oppimisen silloin, kun yksilö olettaa, ettei maailma ole muuttunut sitten hänen aiempien kokemustensa, ja että hän voi siten edelleen toimia niiden mukaisesti. Pelkotilat, asenteet, uusien asioiden kohtaaminen liian nopeasti tai yksinkertaisesti päätös siitä, että ei halua oppia, saavat aikaan ei-oppimista mahdollisista oppimiskokemuksista huolimatta. Ei-tiedostavassa oppimisessa yksilö sisäistää malleja, arvoja, tietoja ja taitoja ilman, että tiedostaisi



muutoksia tai muuttumista. Ei-tiedostavan oppimisen muotoja ovat esitietoinen oppiminen jota tapahtuu päivittäisten kokemusten seurauksena, mallioppimisesta seurannut taitojen oppiminen sekä ulkoa oppiminen. Tiedostavan oppimisen muodoissa Jarvisin (2000) mukaan on mahdollisuus ulkoiseen muutokseen. Nämä kolme tiedostavan oppimisen muotoa ovat pohdiskelu, ajattelun taidot ja kokeellinen tieto. Kokeellisessa tiedossa teoreettinen ymmärtäminen yhdistyy asian kokeelliseen havaintoon. Ajattelun taidot tarkoittavat taitojen oppimista sekä ajattelun, että käytännön kautta. Pohdiskelussa päädytään usein opittavassa asiassa johonkin ratkaisuun, mutta myöhempi tilanne voi uudelleen aktivoida asian oppijan mielessä.

Ei-oppiminen	Ennakko-oletus Huomiottajättäminen Torjunta
Ei-tiedostava oppiminen	Esitietoinen Taidot Ulkoa oppiminen
Tiedostava oppiminen	Pohdiskelu Ajattelun taidot Kokeellinen tieto

**Kuvio 3 Oppimisen typologia (Jarvis 1994, 150)**

Millainen on sitten opettaja, jonka voidaan sanoa osaavan opetustyönsä? Aebelin (1991, 25-26) mukaan työnsä osaava opettaja on oppilaiden mielenkiinnon herättäjä. Opettajan käyttämä kieli mahdollistaa kommunikaation ja sanoman perillemenon. Toiseksi opettajalla on tiedon lisäksi myös käytännön taitoa. Opettaja pystyy toimimaan niin puhumalla, kirjoittamalla, piirtämällä, soittamalla, tekemään työtä lapiolla, jakoavaimella kuin maalarin siveltimelläkin. Kolmanneksi opettaja tarvitse silmät nähdäkseen ja korvat kuullakseen. Näin opettaja kykenee avaamaan oppilaiden silmät ja korvat luonnon ilmiöiden ja kulttuurin sisäisen olemuksen, rakenteen ja toiminnan ymmärtämiseksi. Aebli (1991) korostaa lisäksi opettajan jäsentynyttä tietoa opetettavasta sisällöstä. Hän näkee opettajan kykenemättömäksi toimimaan opettajana, mikäli tämä ei ymmärrä jotakin niistä asioista, joita oppilaalle välittää.

## *1.2. Oppimiskäsitykset lähtökohtana*

### 1.2.1. Behavioristisen oppimiskäsityksen seurauksia

Behaviorismi on objektiiviseen psykologiaan pyrkivä oppijan järjestelmä, jonka teoreettinen tavoite on käyttäytymisen ennustaminen ja kontrolli. Behaviorismi on varsinaisesti lähtöisin Amerikasta 1910 – 1920 -luvulta, vaikka sen juuret ulottuvat kauemmaksikin. Suomessa behavioristiseen oppimisen psykologiaan suuntauduttiin voimakkaasti 1950-luvulla. (Takala & Nuutinen 1982, 109)

Behaviorismin käsitys oppimisprosessista on selkeä ja muistuttaa mekaanista työsuoritusta. Oppi korostaa ärsyke-reaktio -suhdetta, toisin sanoen käyttäytymisessä vallitsee syyn ja vaikutuksen tiukka determinismi. Se antaa selviä viitteitä opetussuunnitelman laatimiseksi. Suunnitelma on laadittava etukäteen ja yksityiskohtaisesti niin, että siitä ilmenee selkeät, konkreettiset ja mitattavissa olevat tavoitteet. Siitä tulee ilmetä tavoitteeseen johtavan tehtävä/ärsyke-toiminta/reaktioryksiköiden sarja. Opettajan tehtävä on aineksen esittäminen suunnitelman määrittämällä tavalla ositettuna ja ajoitettuna sekä huolehtiminen siitä, että tämä johtaa oppilaissa tavoitteen kulloinkin edellyttämiin reaktioihin. (Raustevon Wright & von Wright 1994 Tynjälä 1999, 30)

Behavioristisiin periaatteisiin perustuvassa opetuksen kehittämisessä ja tutkimisessä mielenkiinto on kohdistunut voimakkaasti opetuksen järjestelyihin ja erityisesti opettajan toimintaan sekä oppilaiden reaktioihin ja käyttäytymisen muuttumiseen. Prosessia hallitsee opettaja, oppilas on hänen toimintansa kohde. Opetuksen korostaminen on johtanut opettajakeskeiseen toimintaan, jossa opettajan havaittava käyttäytyminen on keskeisessä roolissa oppimistapahtumassa. Oppija on behaviorismin mukaan ollut lähinnä passiivisen vastaanottajan roolissa. Opetus onnistuu silloin, kun oppilas tuottaa oikeat, ennalta määrätyt, reaktiot tai suoritteet. (Berry & Sahlberg 1995, 19) Behavioristinen teoria perustuukin staattiseen tiedonkäsitykseen. Siinä ei kiinnitetä huomiota sen enempää tiedon merkitykseen kuin siihen, miten oppilas hankkii ja omaksuu tietoa. Oppilas tuntee monesti itsensä passiiviseksi objektiksi, jolle oppiminen

on ymmärtämisen sijasta asian ulkoa muistamista. Tästä on syntynyt monenlaisia negatiivisia uskomuksia matematiikkaa kohtaan. (Haapasalo 1997, 6)

Behavioristinen oppimis- ja opettamiskäsitys keskittyy ensisijaisesti siihen, mitä opitaan. Tämän oppisuunnan arvellaan johtaneen oppimisympäristön kutistamiseen kirjallisiksi oppimateriaaleiksi, havaintovälineiksi ja todellisuutta esittäviksi malleiksi. Oppimisprosessien pohjana olevien havaintojen oli rajoitettava näiden rakenteiden muodostamaan kehykseen. Kehityksen seurauksena on syntynyt oppikirjasidonnaisuus, joka on ominainen juuri kouluoppimisessa. Lehtisen et al. (1990, 18) mukaan opetuksessa on ollut pitkään nähtävissä behavioristisia jäänteitä, joiden ajatellaan edustavan itsestään selviä ja luonnollisia opettamisen sääntöjä esim. nopea välitön palaute, oppiaineksen osittaminen, ulkoisen aktiivisuuden korostaminen. Tästä nähdään seuranneen koulutuskäytäntö, jossa opettajat pyrkivät opetuksellaan kattamaan oppikirjan tekstiä ja oppilaiden yrittävän miellyttää vastauksillaan opettajaa saadakseen suorituksistaan mahdollisimman hyvän numeron. (Suonperä 1995, 98)

Behaviorismin mukaan oletetaan, että sama oppimateriaali samalla tavalla välitettynä vaikuttaa periaatteessa samalla tavalla kaikkiin yksilöihin. Oppijan aktiivisuutta ovat näkyvät teot, ja oppimishalukkuutta edistetään palkkioin. Tuloksen parantamiseksi opittavia asioita voidaan yksinkertaistaa ja kokeissa kysyä sitä, mitä on opetettu. (Yrjönsuuri & Yrjönsuuri 1994, 22) Pitkälle valmiiksi suunniteltu, opettajan oppaissa esitelty, didaktinen etenemismalli on houkuttanut myös opettajat antamaan didaktisen vastuunsa oppimateriaaleille. Oppilaiden otaksutaan oppineen vähimmällä mahdollisella älyllisellä ponnistelulla vastaamaan oppikirjan tyypillisiin tehtäviin ja vaatimuksiin. (Patrikainen 1997, 76)

Yhteiskunnassa selviäminen vaatii nykyään ihmisiltä laajojen kokonaisuuksien ja monipuolisten asia- ja toimintayhteyksien hallintaa. Osittain tästä syystä behavioristinen tieto on osoittautunut riittämättömäksi. Tarvitaan ymmärrystä, jota saadaan aikaan yhdistämällä tiedot toimintaan. Tiedon tulee olla joustavaa, käytäntöön sitoutuvaa ja soveltamiskelpoista. (Suonperä 1995, 100-101) Vaikka behavioristinen teoria ei pysty antamaan riittäviä lähtökohtia oppimaan oppimisen taitojen ymmärtämiselle ja opettamiselle, on edelleen asioita, joiden oppimisessa ja opettamisessa behavioristinen

lähestymistapa puoltaa paikkaansa. Esimerkiksi oppimisvaikeuksista kärsiville oppijoille opittavan asian osittaminen ja ajoittaminen voi olla hyödyllistä. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 18; Patrikainen 1997, 76)

### 1.2.2. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen seurauksia

Piaget esitti konstruktivistisia ajatuksia korostaessaan lapsen toiminnan merkitystä ajattelun ja käsitteistön kehittämisessä. Konstruktivismin mukaan tieto on jotakin, mikä jokaisen oppijan on itse rakennettava, konstruoitava. Konstruktivistisessa oppimisessa oppija valikoi, tulkitsee ja rakentaa samaansa informaatiota omalla yksilöllisellä tavallaan. Uusi tieto jäsenetään aiemman tiedon avulla ja siihen sitoen. Oppimisprosessissa eri tietoyksiköiden välisten uusien suhteiden rakentuminen on oleellista. (Resnick & Ford 1981, 249) Rauste-von Wright ja von Wright määrittelevät konstruktivistisen oppimisen seuraavasti: ”Ihmisen ns. kognitiiviset toiminnot kuten havaitseminen, muistaminen ja ajattelemine nivotuvat toisiinsa saumattomasti. Ihmiselle ominainen informaation prosessointi (sen vastaanotto, muokkaus ja tulkinta) on jatkuva, kokonaisvaltainen prosessi. Se (voi) aiheuttaa muutoksia tiedoissamme, käsityksissämme, taidoissamme ym. Yhteistä monenlaiselle oppimiselle on, että ne kytkeytyvät toimintaan, auttavat meitä orientoitumaan, sopeutumaan, kehittymään, ratkaisemaan ongelmia ja vastaamaan haasteisiin.” Tämä konstruointi- eli oppimisprosessi on sidoksissa siihen tilanteeseen ja kulttuuriin, jossa se tapahtuu, ja se ankkuroituu sosiaalisiin vuorovaikutusprosesseihin ja niiden välityksellä syntyneisiin merkitysrakenteisiin. (Rauste-von Wright ja von Wright 1994, 15-19)

Konstruktivismin mukaan tiedon täytyy rakentua oppijassa itsessään, sitä ei voi siirtää. Ihmiset ymmärtävät ja rakentavat kuvaa maailmasta ja itsestään kokemustensa pohjalta. Todellisuudessa ei voi koskaan tietää eikä havainnoida suoraan, vaan havainnoija itse käsitteellistää kaiken kohtaamansa. Tieto tavoitetaan siis todellisuudessa toimimalla. Konstruktivistit korostavat, että käsitteellistä tietoa voi verrata työkaluihin: niiden käyttö opitaan vain käyttämällä niitä. Oppiminen on kontekstisidonnaista ja sosiaalisella vuorovaikutuksella on keskeinen merkitys. (Resnick & Ford 1981, 249) Opettajan ja muiden oppilaiden kanssa keskustellessaan oppilas pääsee nopeammin ja selvemmin

sisälle ongelmaan samoin kuin sen ratkaisuideaan. Yhdessä pohtimalla ja kokeilemalla oppilaat löytävät todisteita omille ja toisten näkemyksille. Oppilaat tottuvat työskentelemään ryhmässä ja saavat monipuolisen näkemyksen käsiteltävästä asiasta. (Ahtee & Kankaanrinta & Virtanen 1994, 59; Tynjälä 1999, 65)

Konstruktivistinen oppimiskäsitys painottaa myös emootioita erottamattomana osana oppimista. Opetusratkaisuja tehtäessä tulee huomioida persoonallisuuden tunne-elämän alue siten, että motivaatio, asenteet, tuntemukset ja mielikuvat sitoutuvat osaksi opittavaa tietoa. Näiden kautta oppija virittyy uusiin oppimistilanteisiin, mikä edelleen ohjaa hänen havaintojaan ja tulkintojaan. Tynjälä (1999, 62) on nostanut esille juuri tulkintojen ja merkityksien huomioimisen opetuksessa. On ajateltava, että erilaisten kokemustensa perusteella oppilaat tulkitsevat asioita eri tavoin. Opittavien asioiden merkitys ja kiinnostavuus vaihtelee oppijakohtaisesti, ja kaikki eivät opi samoja asioita samoista sisällöistä. Tästä syystä opetuksessa tulisikin käyttää erilaisia menetelmiä, jotta erilaiset oppijat tulkintoineen, kokemuksineen ja kiinnostuksen kohteineen tulisi huomioitua. Oppimisen kannalta myönteinen tunnetila on tärkeä. Esimerkiksi opittavien asioiden tärkeys ja miellyttävyys auttavat niiden oppimista. (Patrikainen 1997, 82)

Konstruktivistinen oppimisprosessi on johdonmukainen, mutta oppimiskäsityksen soveltaminen opetukseen on vaativaa. Sen onnistuminen riippuu opettajan taidoista, tiedoista, tavasta hahmottaa tehtävänsä ja hänen kyvystään sopeutua uusiin tilanteisiin luovasti. Opettajan on ymmärrettävä konstruktivistisen oppimiskäsityksen opetukselliset seuraukset käytännön tasolla. Opettaja ei konstruktivistisesti toteutetussa opetuksessa ole enää tiedon siirtäjä vaan pikemminkin oppimisprosessin ohjaaja ja oppimistilanteiden järjestäjä. Opetuksen lähtökohdaksi tulee ottaa oppilaiden olemassa olevat tiedot, käsitykset ja uskomukset. Konstruktivistisessa oppimisympäristössä pyritään välttämään mekaanista ulkoaopettelua ja asioiden toistamiseen pyrkivää 'pänttäystä'. Näin opetuksessa luodaan merkityksiä ja lisätään opittujen tietojen käyttöarvoa ymmärtämisen kautta. Opetuksen kontekstisidonnaisuuden tiedostaminen, ajatteluprosessien, aktiiviatason ja informaation tulkinnan huomioiminen sekä itsereflektointi niin omaan opetukseen kuin oppilaisiin liittyen asettavat opettajan vaativan tehtävän eteen työssään. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 133-134, 200-201; Tynjälä 1999, 62)

## 2. Matematiikka ja sen opettaminen

### 2.1. Mitä matematiikka on?

Matematiikkaa on kaikessa, mitä ihminen on tehnyt, eli kulttuurissa. Matematiikkaa on myös kaikessa, mitä ihminen ei ole tehnyt, eli luonnossa. Matematiikan kaksi olennaista komponenttia ovat määrä ja muoto. Kaikella, mikä on olemassa, on määrä ja muoto. Määrästä ja muodosta on kysymys tutkittaessa luontoa ja toisaalta luotaessa tekniikkaa. Tämän vuoksi matematiikka tunnustetaan tieteen ja tekniikan perustaksi. Luonnontieteiden ja tekniikan kautta matematiikka palvelee lisäksi muita tieteitä ja myös taiteita ja taitoja, esim. lääketiede, tekstiilityö ja urheilu. (Malaty 1997, 53)

Jokaisella ihmisellä on käsitys siitä, mitä matematiikka on. Käsitteemme ovat muotoutuneet kokemuksiemme myötä. Koulusta saadut oppimiskokemukset ovat muokanneet näitä kokemuksia, ja siten myös käsityksiä siitä mitä matematiikka on. Lindgren (1995) kirjoittaa Frankin (1988, 32-34) tutkimuksesta, jonka mukaan oppilaat uskovat matematiikan olevan vain laskemista, missä tavoite on vain oikean vastauksen, vieläpä oikean, saaminen. Matemaattisten ongelmien tulisi ratketa nopeasti vain muutamaa vaihetta käyttäen. Oppilaan tehtävä tunnilla on vastaanottaa tietoa ja esittää omaksuneensa opetetut asiat. Opettajan roolin oppilaat kokevat tiedonvälittäjänä ja oppimisen varmistajana, eli opettaja testaa onko opetetut asiat tulleet ymmärretyiksi. Matematiikkaa ei nähdä ongelmanratkaisuprosessina, vaikka matematiikka tieteistä vanhimpana on syntynyt juuri ongelmanratkaisuprosessien seurauksena. (Haapasalo 1993, 4-5; Lindgren 1995, 14)

Matematiikan juuret perustuvat havaintoihin, joita ihminen on tehnyt ympäröivästä maailmasta. Havaintojen teko on avain myös mielekkääseen matematiikan oppimiseen. Matematiikan formaali kieli ja teoriat on kehittynyt havaintojen käsittelemiseen ja havaintojen välisten relaatioiden ymmärtämiseen. (Leino 1978, 4)

Opettajan käsitys siitä, mitä matematiikka on ja miten sitä pitää opettaa, ovat ratkaisevan tärkeitä matematiikan oppimisen kannalta. Nämä käsitykset matematiikasta vaikuttavat

opiskeltavan sisällön valintaan, opetuksen organisointiin, ja yleisesti ottaen siihen, mikä opettajan käsitys on opettajan ja oppilaan roolista matematiikan opiskelussa. Myös opettajan kokemukset matematiikan opettamisesta ja oppimisesta ohjaavat vahvasti hänen opetustoimintaansa uskomustasolla – usein jopa tiedostamattomasti. Pehkosen (1992, 279) mukaan uskomuksilla on keskeinen rooli opettajan ajattelun ja toiminnan taustavaikuttajana. Hän kokee, että opettajan matemaattiset uskomukset toimivat eräänlaisena suodattimena, jonka läpi hänen matematiikan opetusta koskevat ajatuksensa ja tietonsa suodattuvat. Lindgren (1997) esittelee Ernestin (1989) näkemyksen siitä, että on olemassa kolme erilaista käsitystä siitä, mitä matematiikka on. Instrumentaalisen näkemyksen mukaan matematiikka on työkalupakki, joka sisältää faktoja, sääntöjä ja taitoja ulkoisen päämäärän saavuttamiseen. Platonistisen näkemyksen mukaan matematiikka on johdonmukainen, staattinen ja yhtenäinen kokonaisuus, jonka koossapitävä voima on logiikka - matematiikkaa luodaan, ei löydetä. Ongelmanratkaisunäkemyksessä perustuu dynaamisuuteen, jossa uudet ongelmat johdattavat eteenpäin. Säännöt yleistetään yksityistapauksista ja järjestelmässä on tilaa korjauksille ja laajennuksille. (Lindgren 1997, 307-309; Pehkonen 1992, 278-281)

Kangasniemen (2000) tutkimuksen perusteella näyttää, että opettajan uskoessa matematiikan olevan dynaamista ja ongelmanratkaisultaan moninaista, niin opettaja käyttää muita enemmän ryhmätyötä ja vähemmän opettajajohtoista opetusta: opettajakeskeistä opettamista, johon liittyy oppilaiden laskuharjoitukset yksistään tunnilla. Vastaavasti opettajan uskoessa matematiikan olevan staattista, ei muuttuvaa, ja on olemassa 'yksi' oikea ratkaisutapa, opettaja suosii opettajajohtoista työskentelyä eli opettajakeskeistä opettamista ja oppilaiden laskuharjoituksia, joissa oppilaat pyrkivät soveltamaan sitä, mitä opettaja juuri äsken opetti. Toisaalta opettaja, jolla on uskomus, että matematiikka edellyttää omaperäistä ajattelua, on taipuvainen käyttämään opettajajohtoista työskentelyä.

Kupari (1999) on myös tutkinut opettajakyselyiden avulla opetuksen toteuttamistapoja. Kyselyissä opettajat vastasivat sellaisiin matematiikan opetuksen toteuttamista koskeviin kysymyksiin kuten esimerkiksi, millä tavoin opetus on järjestetty, millaisia painotuksia opettajilla on opetuksessaan ja millaisia menettelytapoja he opetuksessaan käyttävät. Kokoneiden opettajien ryhmässä uskomuksissa tuli esille laskemisen perustaidot, runsas

rutiiniharjoittelu, oikeiden vastausten saaminen tehtävistä ja järjestyksen ylläpitäminen luokassa. Nuoremmilla opettajilla nämä uskomukset olivat heikommalla ja tärkeässä asemassa olivat oppijakeskeisyyteen ja vuorovaikutukseen liittyvät uskomukset. Opetuksen järjestämisessä nuoret opettajat järjestivät harvemmin summatiivisia kokeita, mutta formatiivisia enemmän kuin kokeneemmat opettajat. Opetuksen painotuksissa ja työmuodoissa erot olivat selkeämpiä. Kokeneet opettajat ilmoittivat painottavansa laskutaidon merkitystä, kun taas nuoret harvemmin. Soveltaminen ja ajattelun taitojen kehittäminen oli kummallakin ryhmällä yhtä painokkaasti esillä. Opetussisältöjen lähestymistavan suhteen eroja oli myös havaittavissa. Kokeneet opettajat suosivat säännöllisesti opettajajohtoista työskentelyä, kun taas nuoret menettelivät näin harvemmin ja suosivat useammin pari- tai ryhmätyöskentelymuotoja. Matematiikkauskomukset heijastuivat Kuparin mukaan opetustoimintaan mm. laskutaitopainotteisuuden, opettajajohtoisuuden ja kokeiden käytön kohdalla. Tarkastelu osoittaa myös, että opettajien matematiikka-uskomuksilla on yhteyksiä oppilaiden matematiikan oppimistuloksiin. Neljännellä luokalla oppilaiden tuloksia voimakkaimmin selittävä tekijä oli kodin antama apu ja tuki matematiikan kotitehtävissä. Opettajien harjoittelukeskeisyys-uskomusten merkitys näkyi kuitenkin siten, että voimakkaat uskomukset ilmenivät heikompina oppilaiden tuloksina. Oppilaiden matematiikan suoritukset olivat sitä paremmat, mitä pidemmälle oppilaat halusivat jatkaa koulunkäyntiä peruskoulun jälkeen.

## *2.2. Matematiikka oppiaineena*

Linnanmäen (1997, 283) ja Kuparin (1997, 222) mukaan matematiikka on kautta aikojen ollut arvostettu oppiaine koulussa. Yksittäiselle oppilaalle tämä tarkoittaa, että hän kokee matematiikassa onnistumisen tärkeänä asiana. Oppilaiden mielestä matematiikan saavutukset ovat muita aineita merkittävämmässä asemassa. Vuoden 1990 arviointitutkimuksessa todettiin, että kaksi kolmasosaa neljäs- ja kuudesluokkalaisista ilmaisi matematiikan osaamisen tärkeänä hyvän työpaikan saamiseksi. Noin neljä viidesosaa oppilaista ajatteli naisten tarvitsevan matematiikkaa yhtä paljon kuin miehet. Vuoden 1979 tuloksiin verrattuna osoitettiin kuitenkin, että vuonna 1979 matematiikkaa pidettiin tärkeämpänä kuin vuonna 1990. (Kupari 1997, 221-222)



Vuoden 1990 arviointitutkimuksen tulosten mukaan matematiikka kuului neljäs- ja kuudesluokkalaisten oppilaiden mielestä viiden miellyttävimpänä pidetyn oppiaineen joukkoon - biologian, liikunnan, englannin ja maantiedon ohella. Neljäsluokkalaiset pitivät matematiikkaa jopa mieliaineenaan. Matematiikan asennekyselyssä tulokset ovat samansuuntaiset. Tutkimus osoittaa, että neljännen luokan oppilaista 40 % piti matematiikasta hyvin paljon. Vain joka kymmenes oppilaista piti oppiainetta vastenmielisenä. Kuudenteen luokkaan mennessä muutosta näyttää tapahtuvan varsinkin matematiikkaa vastenmielisenä pitävien oppilaiden määrässä - osuus oli kaksinkertaistunut (22 %) neljänteen luokkaan verrattuna. Kuudennella luokalla lähes kolmannes oppilaista piti matematiikasta hyvin paljon. Matematiikka-asenteita selvittäneet tutkimukset ovat osoittaneet, että asenteiden ja saavutusten välillä on merkittävä yhteys. Matematiikka koettiin tärkeäksi oppiaineeksi työpaikan saamisen ja työelämässä menestymisen kannalta. (Kupari 1997, 221)

Leino (1978, 5) sekä Rauhala, Vehmaa ja Wuolijoki (1985, 2) tuovat esille matematiikan oppimisen kivijalkamallin - matematiikka nähdään voimakkaasti kumulatiivisena aineena, jossa uuden asian oppiminen perustuu aiemmin opitun pohjalle. Aukkopaikat oppimisessa johtavat oppimisvaikeuksiin, ja niiden kasautuessa oppimisen kivijalka uhkaa sortua. Mm. oppimisvaikeuksien estämiseksi ja koko matematiikan oppimisen kivijalan koossapitämiseksi Rauhala et al. (1985, 2) esittävät matematiikan opetuksen tarvitsevan eriyttämistä, mielekästä oppimista, yksilöllistä ohjausta, erilaisia lähestymistapoja, hyvää asiantuntemusta, harjoittelua, monipuolista opetusta, vaihtelevia työtapoja, tukiopetusta, joustavaa ryhmittelyä, mieleen palauttamista, jatkuvaa palautetta, diagnosointia, kertausta ja kokeita sekä sosiaalista kanssakäymistä.

Matematiikan opetuksen runkona on opetussuunnitelma. Sen laadinnassa huomioidaan paitsi matematiikka oppiaineena, niin myös oppilas oppimistapahtuman keskeisenä tekijänä. Kulttuuri ja koulutuspoliittiset näkökulmat vaikuttavat aina myös siihen, mitä peruskoulussa matematiikasta opetetaan. (Koponen 1992, 8) Peruskoulun opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 1994) matematiikan opetuksen keskeisiä tavoitteita ja sisältöjä ovat:

- Hankkia matemaattiset perustiedot ja –taidot
- Kehittää kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa
- Harjaannuttaa johdonmukaiseen ja täsmälliseen ajatteluun sekä asioiden esittämiseen
- Ymmärtää luonnollisen luvun, murto- ja desimaaliluvun käsitteet
- Oppia peruslaskutaidot päässä, paperilla ja laskimilla sekä niiden käyttäminen arkielämän ongelmien ratkaisemisessa
- Oppia arvioimaan ja mittamaan pituutta, massaa, pinta-alaa, tilavuutta, kulmaa ja aikaa sekä oppia näiden suureiden tavallisimmat mittayksiköt
- Ymmärtää mittakaavan käsite ja käyttö
- Tunnistaa ja piirtää geometriset kappaleet ja kuviot sekä kuvaa näiden perusominaisuuksia, laskea pinta-aloja ja tilavuuksia, tutustuu symmetriaan
- Löytää säännönmukaisuuksia ympärillä olevasta maailmasta, tottuu lukemaan, laatimaan ja tulkitsemaan yksinkertaisia taulukoita ja diagrammeja

Matematiikan opetuksessa korostuu ongelmanratkaisuprosessien merkitys tietojen hankkimisessa, mutta myös niiden soveltamisessa. Opiskelutilanteissa keskeisenä nähdään kysymysten asettelu, ongelman hahmottaminen, tehtävän rajaaminen, oikeiden ratkaisumenetelmien löytämistä ja läpiviemistä sekä tulosten arviointia. Oppimistilanteiden tulisi olla keskustelunomaisia, kokeilevia ja ongelmakeskeisiä oppilaan konkreettinen arkielämä huomioituna. Rakentelu ja mallien tekeminen johdattaa oppilaan oikeiden mielikuvien ja käsitteiden muodostamiseen. Oppilas nähdään aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana. Tiedot ja taidot jäsentyvät ja tarkentuvat liittämällä opittavat asiat aiempiin tietoihin sekä täydentämällä ja uudelleen rakentamalla pitkäjänteisen työskentelyn tuloksena. (Opetushallitus 1994, 76-77)

### 2.2.1. Miksi matematiikkaa

Matematiikka tarjoaa oppilaalle välineitä johdonmukaisen ja täsmällisen ajattelun edistämiseen sekä käytännön ja tieteellisten ongelmien ratkaisemiseen. Matematiikka

kehittää myös avaruudellista hahmottamista. Matematiikan opiskelun myötä mahdollistuu keksimiskyvyn ja luovan ajattelun kehittyminen. Lisäksi matematiikka tarjoaa keinon välittää informaatiota täsmällisesti, koska se käyttää abstraktista symbolikieltä. Kohtaamme matematiikkaa päivittäisissä askareissamme, ja se on käyttökelpoinen väline ratkaista arkipäivän ongelmia. (Opetushallitus 1994, 74)

Matematiikka oppiaineiden joukossa vaikuttaa itsestäänselvyydeltä. Kupari (1993, 115) kuitenkin toteaa, että viimeisen viidentoista vuoden aikana yleisissä mielipiteissä on tapahtunut muuttumista. Tietokoneiden ja yleensä laskentavälineiden kehityksen myötä matematiikan etuoikeutettu asema voitaneen kyseenalaistaa. Kuinka paljon matematiikkaa on siis tarpeellista opettaa yleissivistävässä koulutuksessa koko ikäluokalle?

Nykyajan teknistyneessä yhteiskunnassa on keskeistä eri muodoissa esitetyn matemaattisen informaation lukeminen ja ymmärtäminen. Ihminen kohtaa matematiikkaa päivittäisessä rahan käsittelyssä ja tavarahintojen vertailussa, kellonajan ilmaisemisessa ja mittaamisessa. Monille matematiikka on hyödyllistä laskennallisina taitoina, joita käytämme kotona, työpaikalla ja vapaa-aikana. Matematiikan opettaminen koko ikäluokalle selittyy myös sillä, että matematiikka tarjoaa paitsi tehokkaan, niin myös selkeän ja täsmällisen kommunikointivälineen. (Kupari 1993, 115-116; Linnanmäki 1997, 283)

Sekä Kupari (1993) että Linnanmäki (1997) tuovat esille matematiikkasuoritusten yhteyden oppilaan minäkäsityksen muodostumiseen. Myönteisen minäkäsityksen kehityksen tueksi oppilaan tulisi kielteisten elämysten sijasta kokea matematiikan parissa myönteisiä ja mieluisia onnistumisen elämyksiä. Oppilaan tulisi saada myönteistä palautetta sekä opettajalta että luokkatovereilta, sekä ymmärtää oma panoksensa tehtävän ratkaisemisen onnistumiseen. Minäkäsitys ja matematiikka – tutkimuksen (Linnanmäki 1997, 290-296) tulokset osoittavat voimakkaasti sen, että minäkäsityksen yhteys matematiikan saavutuksiin voimistuu voimistumistaan ylemmillä luokkatasoilla. Myönteisen palautteen saamiseksi erityisesti ikätovereilta voitaisiin lisätä pari- ja ryhmätyöskentelyä. Jo ala-asteelta opettajan ohjatessa ryhmitystä työmuotoja ja

menetelmiä vaihtelemalla voidaan työskennellä oppilaan minäkäsityksen myönteisen kehityksen hyväksi.

### 2.2.2. Kritiikkiä perinteiselle matematiikan opetukselle

Matematiikka on perinteisesti nähty taitona laskea ja käyttää matematiikan sääntöjä, menetelmiä ja kaavoja. Opetus on nojautunut behavioristiseen oppimiskäsitykseen ja staattiseen tiedonkäsitykseen. Tällaisessa opetuksessa ei ole kiinnitetty huomiota tiedon merkitykseen tai siihen, miten oppilas hankki ja omaksuu tietoa. Oppilas on passiivinen objekti, jolle oppiminen on ymmärtämisen sijasta asian ulkoa oppimista. (Haapasalo 1993, 9)

Perinteisesti toteutetulla opettajajohtoisella ja oppikirjaa painottavalla matematiikan opetuksella ei ole saavutettu haluttuja tavoitteita (Kinnunen & Vauras 1997, 273). Oppilaat näyttävät kyllä oppivan suuren joukon merkitsemistöjä, laskuoperaatioita ja algoritmeja sekä näiden muistitueksi kehiteltyjä sääntöjä, mutta ymmärtäminen ja perimmäinen tarkoitus jää usein puutteelliseksi. Matemaattisella algoritmilla tarkoitetaan tässä perättäisten operaatioiden prosessia, jonka toiminta-askleet, niiden järjestys samoin kuin prosessin päätyväisyys ovat tarkoin määräytyt ja perusteltavissa (Haapasalo 1997, 189). Kupari (1993, 121) näkee ongelmana symbolien liiallisena ja liian varhaisena painottamisena opetuksessa. Matematiikka nähdään miltei pelkästään matemaattisten symbolien kirjoittamisena. Vasta käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ja toimintasääntöjen ymmärtäminen voi johtaa oppimiseen. Oppilaat eivät opi ajattelemaan matemaattisia ongelmia tai vertailemaan eri ratkaisuvaihtoehtoja. Opetuksessa ei hyödynnetä konkreettista toimintaa sekä kuvallisen ja verbaalisen esitysmuodon tarjoamia mahdollisuuksia. Matematiikkaa ei opita soveltamaan todellisissa elämäntilanteissa. (Kinnunen & Vauras 1997, 273)

Kaasilan (1997, 6-14) mukaan sekä opettajien että oppilaiden mielestä eniten käytettyjä työtapoja matematiikan tunneilla ovat opettajajohtoinen opetus ja oppikirjan tehtävien laskeminen yksin. Keskustelu on matematiikan tunneilla vähäistä. Matematiikan opettaminen konstruktivistisesti ei ole mahdollista, mikäli opettaja opettaa ensin teoriaa ja sitten sitä sovelletaan käytäntöön oppikirjan tehtävissä. Tämä johtaa matematiikan

tietoaineksen ulkoa opetteluun, ja mekaanisten laskutaitojen harjoittamista pidetään usein ensisijaisena tavoitteena ongelmanratkaisu- ja soveltamistaidon kustannuksella.

Kupari (1993, 122) näkee, että matematiikan opetuksen ongelmana on puutteellinen (jopa virheellinen) käsitys matematiikan opiskelusta. Väärät uskomukset ja pinnalliset strategiat korostuivat teknisten menettelytapojen ja laskuoperaatioiden harjoittelun seurauksena. Matematiikka nähdään laskemisena, eli laskutoimitusten suorittamisena tai symboleja kirjoitettaessa yhtälönratkaisuna. Opetuksen tarkoituksena on tietojen muistaminen ja oppilaan tulisi ratkaista tehtävät mahdollisimman monta tehtävää mahdollisimman nopeasti. Lehtisen et al. (1990) mukaan oppiminen noudattaa passiivisen mukautumisen mallia yksittäisine reaktioineen ilman oppilaan aktiivista tilannehallintaa. Ongelmanratkaisuun painottuva opetus on yksi tie monipuolisempaan ja ajattelutaitoja kehittävään matematiikan opetukseen.

Matematiikan opetuksen tulisi tarjota lapselle haasteita. Oppimisen tutkimuksen mukaan (Kupari 1993, 122) monet oppilaat pystyvät etenemään nykyisten opetussuunnitelmien etenemisvauhtia paljon nopeammin ja pysyvämmiin tuloksiin. Oppikirjassa hidas eteneminen näkyy sisältöjen runsaassa määrällisessä harjoittelussa ja jatkuvana kertaamisena. Opetuksen spiraaliperiaatteen (sivu 57) mukaan oppisisällöt tulee kohdata aina uudella tasolla ja haastavina oppimistehtävinä.

### 2.2.3. Uusia tuulia matematiikan opetuksessa

Konstruktivistinen oppimiskäsitys nähdään haasteena uudistuvalla matematiikan opetukselle. Toteutuessaan se tulee muuttamaan suuresti sekä perinteisiä oppimisympäristöjä ja oppimateriaaleja että käsitystämme hyvästä opetuksesta. Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä ja dynaamisessa tiedonkäsityksessä korostuu oppilaan aktiivinen rooli tiedon konstruoijana ja prosessoijana. Matematiikka ymmärretään oppilaan ajatteluprosessien kehittämisenä. Yhteyksien, sääntöjen ja kaavojen etsiminen ja rakentaminen perustuu oppilaan todellisiin kokemuksiin ja ympäristöstä saadut kokemukset ja uudet tiedot muokkaavat oppilaan tietojärjestelmää. Tämä edellyttää matematiikan opetukselta tilanteita, jotka entistä enemmän pohjautuvat

oppilaiden arkielämän kokemuksiin. Tällaisessa aktiivisessa prosessissa oppilas rakentaa siis itselleen kuvaa todellisuudesta. Opettajan rooli keskittyy oppimisympäristöjen suunnittelemiseen, joissa oppilaan on mahdollista kehittää itselleen monipuolisia ajattelu- ja toimintamalleja. (Haapasalo 1993, 9-10; Leino 1992, 40, 44)

Opetushallituksen helmikuussa 1990 perustaman työryhmän tehtävänä oli arvioida peruskoulun ja lukion matematiikan opetuksen kehittämistarpeita ja tehdä kehittämisehdotuksia. Väli raportissa (Opetushallitus 1991) esiteltiin matematiikan opetuksen yhdeksän kehittämisperiaatetta. Opetukseen siirtyäkseen kehittämisperiaatteet vaativat konkreettista oppimisympäristöjen suunnittelua, oppimateriaalin ja opettajan toiminnan kehittämistä. Ensimmäiset kolme periaatetta korostavat matematiikkaa ajattelun ja ongelmanratkaisun välineenä.

**PERIAATE 1.** Matematiikka tulee nähdä laajempaan kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Matematiikan omaksuminen on liitettävä oppilaan henkisen kasvuun, hänen ajattelunsa laajuuden ja johdonmukaisuuden lisäämiseen sekä maailmakuvan muodostumiseen. Ongelmanratkaisun on oltava matemaattis-loogisten vaatimusten ohella keskeinen periaate.

**PERIAATE 2.** Matematiikan opetuksen tavoitteena tulee olla ennen muuta kehittää oppilaan kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa ympäröivässä maailmassa eteen tulevia tilanteita. Tämän mukaisesti opetuksessa lähtökohtana ei ole pidettävä valmiiksi strukturoituja ja oppilaalle sellaisenaan välitettävää tietoa, vaan heuristisia tiedonhankintaprosesseja korostaen on pyrittävä siihen, että tiedot ja taidot vähitellen jäsentyvät ja tarkentuvat oppilaalle käyttökelpoiseksi rakennelmaksi.

**PERIAATE 3.** Oppilas nähdään aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana, jolle oppiminen on aikaisempien ajatus- ja toimintamallien korjausta ja täydentämistä.

Opetussuunnitelmien nykyiset fraasimaiset tavoitelausumat ja sisältöehdotukset tulisi työryhmän mukaan kuvata niin, että ne antavat pikemminkin ohjeita opetuksen

monipuolisiin lähestymistapoihin ja työmuotoihin. Periaatteen 4 mukaan on kuvattava tarkemmin sitä, miten oppimisympäristö materiaaleineen voitaisiin suunnitella toiminnallisia, kokeilevia, tutkivia ja keksiviä muotoja suosien. Nämä tavoitteet toimitus edelleen kriteereinä oppimateriaalin laatimiselle ja hyväksymiselle.

**PERIAATE 4.** Opetukselle asetettujen sisältöpainotteisten tavoitteiden asemasta korostetaan oppimisen prosessitavoitteita. Ne on pyrittävä muotoilemaan oppilaan henkistä kasvua tukevassa hengessä niin, että ne myös ohjaavat käytännön opetustyötä sekä oppimateriaalien laadintaa ja käyttöä.

Periaate 5 painottaa matemaattisen tiedon syntymistä ongelmanratkaisuprosessien seurauksena. On huomioitava matemaattisen tiedon syntyhistorian tarjoamat näkökohdat tiedonhankinnalle ja oppimiselle.

**PERIAATE 5.** Matematiikan tulee olla myös sisällöllisesti avoin uusille tiedoille, keksinnöille ja tärkeiksi nousseille asiaryhmille ja ajankohtaisille sovelluksille. Vaikka oppisisältöjen strukturoinnissa tulee ottaa huomioon matematiikan syntyhistoria, perinteisiä oppisisältöjä on uskallettava tarkastella kriittisesti. On voitava jättää pois sellaista tietoa, joka ei ole matematiikan rakenteen ymmärtämisen kannalta ehdottoman välttämätöntä.

Työryhmän muotoilema kuudes periaate sisältää näkökulman matematiikan sovellusten ja ongelmatilanteiden löytämisestä muistakin aineista kuin luonnontieteistä.

**PERIAATE 6.** Matematiikan opetuksen integroituminen koulun muiden aineiden opetukseen edellyttää sopivien sovellutusmallien luomista sekä muilta tiedonaloilta saatavan tietoaineksen ja menetelmien hyväksikäyttöä. Toisaalta tarvitaan matematiikan tarjoamien mallien ja laskentamenetelmien käyttökelpoisuuden ja rajoitusten tuntemusta. Opetussuunnitelmallisia esteitä integroitumiselle ei saisi olla.

Seuraavilla kehittämisperiaatteilla tarkoitetaan sitä, että erilaisten apuvälineiden käyttö luonnollisena työvälineenä on tärkeää sekä oppimisessa että arvioinnissa. Oppilaalla

tulee olla realistinen kuva tietokoneen merkityksestä yhteiskunnassa ja ihmisen työvälineenä.

PERIAATE 7. Oppimisen arviointi sekä siinä käytetyt perusteet ohjaavat vahvasti eri osien painottumista. Kun arvioinnin painopistettä siirretään oppimisprosesseihin, joudutaan kehittämään uusiakin mittaus- ja arviointitapoja sekä palautteen antamista oppilaalle.

PERIAATE 8. Opetussuunnitelman perusteet ja muut ohjeet tulee muotoilla siten, että ne mahdollistavat uusien välineiden ja uuden tiedon joustavan käyttöönoton opetustyössä. Koska teknisten välineiden (esimerkiksi laskinten ja tietokoneiden) nopean kehityksen vuoksi ei ole mahdollista ennakoida kaikkia käyttötapoja ja niiden seurauksia, ohjeissa tulee olla riittävästi väljyyttä.

Oppilaalla tulee olla mahdollisuus vaikuttaa opintojensa sisältöön. Valinnaiset tai vaihtoehtoiset kokonaisuudet määräytyvät mm. paikkakunnan erityispiirteiden, koulun mahdollisuuksien ja oppilaiden kiinnostuksen mukaan.

PERIAATE 9. Opetussuunnitelman perusteiden tulee tarjota valinnaisuuden mahdollisuuksia kunnille ja kouluille. Kunnan ja koulun opetussuunnitelman puolestaan tulee tarjota myös oppilaalle riittävästi valinnaisuutta.

Matematiikan opetuksen ensisijaisena tavoitteena tulee olla oppilaan ajatteluprosessien kehittäminen ja yhteyksien rakentuminen eri käsitteiden välille. Opetusmenetelmissä tulee tapahtua suuri muutos opettajajohtoisesta ja laskemispainotteisesta opetuksesta kohti oppilaskeskeisiä opetusmenetelmiä. Uudistuvassa matematiikan opetuksessa opettaja ottaa selville oppilaiden tiedollisen tason ja etsii sitä kehittäviä uusia aihepiirejä ja ongelmia. Opittavasta asiasta ja taidosta on jätettävä paljon oppilaiden oman työskentelyn varaan ja heidän vastuulleen. Vastuu omasta opiskelusta siirtyy pala palalta oppilaille itselleen. (Keranto 1992, 16, 19-22) Pienryhmätyöskentely mahdollistaa oppilaiden erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen pohtimisen ja suuntaa oppilaita tarkentamaan omaa kieltään ja ajatteluaan. Yhteisesti käytävät keskustelut ja oppilaiden



oppimisprosessin seuranta antavat myös opettajalle perinteistä opetusta paremman kuvan oppilaiden edistymisestä. (Leino 1992, 44-45)

Matematiikan opetuksen kehittämisessä päähuomio asetetaan usein ongelmanratkaisuun ja soveltamiseen. Haapasalon (1991) mukaan keskeisimmäksi nousee kuitenkin kysymys matemaattisten käsitteiden opettamisesta, sillä soveltamisessa ja ongelmaratkaisussa tarvittavat asia- ja menetelmätiedot perustuvat juuri käsitteiden hallitsemiselle. Uudistuvassa matematiikan opetuksessa tulisikin Haapasalon mielestä antaa entistä enemmän aikaa käsitteenmuodostuksen ohjaamiseen. Riittävä käsitteiden hallinta antaa oppilaalle tarvittavat valmiudet soveltaa tietämystään vaihtuvissa ongelmatilanteissa. (Haapasalo 1991, 32-36)

### *2.3. Luokanopettaja matematiikanopettajana*

Koulujen matematiikan opetus perustuu kulloinkin vallitseviin kasvatuskäsityksiin ja voimassaoleviin opetussuunnitelmiin. Opettajien matemaattiset taustat voivat olla hyvinkin erilaisia – toisessa ääripäässä taustaan voi kuulua välttävästi suoritettu kansakoulun ja seminaarin matematiikka ja toisessa erinomaisesti läpäisty lukion laajan matematiikan kurssi yliopiston arvosanoilla täydennettynä. Lisäksi jokaisella opettajalla on ollut kouluajasta lähtien myös oma tapansa asennoitua matematiikkaa ja sen opiskelukäsityksiä kohtaan, minkä merkitystä ei saa unohtaa. Luokanopettajien erilaisista taustoista johtuen heidän tietonsa matematiikasta ovat vaihtelevia sekä opettajien omassa osaamisessa että heidän valmiuksissaan opettaa matematiikkaa on eroja. Useimmat opettajat ovat saaneet vain opettajankoulutuksen matematiikan perusopetuksen kouluaikeisten tietojensa lisäksi.

Suomessa perusopetuksen vuosiluokilla 1-6 matematiikkaa opettaa pääsääntöisesti luokanopettaja. Opetussuunnitelmien mukaan matematiikan opetusta annetaan 3-4 oppituntia/viikko. Perinteisesti luokanopettajankoulutuslaitos on opettanut kaikille tietyn pakollisen määrän matematiikkaa (2-4ov). Esimerkiksi Jyväskylän yliopiston (1999) luokanopettajakoulutuksen tarjoaman 3 ov:n matematiikan opetuksen tavoitteet kuvataan seuraavasti: Opiskelijaa tuetaan ymmärtämään ja hyväksymään matematiikka

dynaamisena rakennelmana, joka rakentuu omista todellisista kokemuksista lähtien. Ajatteluprosessien kehittämisessä sekä käsitteiden, yhteyksien, sääntöjen ja kaavojen etsimisessä korostuu opiskelijan aktiivinen rooli tiedon konstruoijana ja prosessoijana. Tällöin uudet tiedot ja kokemukset sulautuvat aikaisempiin muuntaen niitä koko ajan sosiaalisissa vuorovaikutustilanteissa. Joensuun yliopiston (1997) luokanopettajien koulutuksessa matematiikan yhteisiä, kaikille pakollisia, kursseja on yhteensä 4 ov:a Matematiikan perusopinnot (2ov) ja Matematiikan didaktiikka (2ov). Kaikille yhteisten matematiikan opintojen lisäksi yliopistoissa on halukkaille yhdessä ainelaitoksen kanssa järjestetty mahdollisuus matematiikan erikoistumisopintoihin. Käytännössä aika harvat opiskelijat ovat kuitenkin tähän mennessä suorittanut approbatur-arvosanaa. Luokanopettajille tarjottava matematiikan approbaturia kehitetään parhaillaan ja opintoihin pyritään houkuttelemaan mahdollisimman suuri osa luokanopettajaksi opiskelevista. Lindgren (1995) painottaa opettajankoulutuksen matematiikan opintojen, kuten muiden oppiaineiden kohdalla, sitä miten opiskellaan. Tulevaisuutta ajatellen se, mitä opiskellaan ei ole yhtä merkittävässä asemassa kuin se, miten on opiskeltu eli käytetyt menetelmät. Opettajankoulutuksella onkin tärkeä rooli ja mahdollisuus kehittää opiskelijan tulevia valintoja toteuttaessaan matematiikan opetusta – opiskelun tulee välittää mahdollisimman laaja ja monipuolinen käsitys matematiikasta, joka ei perustu pelkkään laskemiseen. (Kahanpää & Koskela 1997, 369; Lindgren 1995, 18; Pehkonen 1990, 43)

Matematiikan opetuksen kannalta keskeisimmät tiedon hankintaan ja käsittelyyn liittyvät prosessit, ongelmanratkaisu- ja päättelytaidot ovat käytännössä jääneet omaksumatta useimmilta opettajaksi opiskelevilta. Vaatimukset opetuksen ongelmakeskeistämistä ja luovan ajattelun opettamisesta jäävätkin vain korulauseiksi, jollei opettajalla itsellään ole omakohtaisia kokemuksia ongelmanratkaisu- tai käsitteenmuodostusprosesseista. Miten opettaja, jolla itsellään ei ole kokemusta luovasta toiminnasta matematiikan parissa, pystyy havaitsemaan sitä oppilaissaan, saati ohjaamaan heitä tällaiseen toimintaan? (Haapasalo 1993, 35)

Opettajankoulutuksessa tulisi erityisesti kiinnittää huomio opettajien matemaattisen tietämyksen, opettajien didaktisten valmiuksien ja oppilaisiin ja uskomuksiin liittyvän tietämyksen kohottamiseen (Haapasalo 1997, 255). Haapasalo (1997) on todennut

Steinbergiin, Haymoreen ja Marksiin (1985) viitaten, että korkean matemaattisen kompetenssin omaavan opettajan oppilaat kykenivät monipuoliseen konseptuaalisen tiedon oppimiseen. Huonon kompetenssin omaavat opettajat puolestaan kykenivät vain opettamaan sääntöjä tiettyjen rutiinimallien mukaisesti. Opettajan didaktisten valmiuksien kehittämisen perustaksi sopinevat seuraavat näkemykset: matematiikan didaktiikka on tietynlainen filosofinen perspektiivi matematiikkaan (Thom 1973, 194) tai käsitys siitä, mitä matematiikka on, vaikuttaa siihen, miten sitä esitetään ja opetetaan (Hersh 1986, 13). Edellisten iskulauseiden pohjalta voidaankin miettiä sitä, minkälainen näkemys oppilaille välittyy matematiikasta ja sen oppimisesta, miten tulee huomioitua ja opetettua kasvatuksen kannalta relevantit osa-alueet tai tarjotaanko oppilaalle ylipäättänsä mahdollisuuksia matemaattisten käsitystensä pohtimiseen? Moni Haapasalon esittämä opettajankoulutuksen kehittämiskohde vaatii aikaa ja uskallusta kyseenalaistaa vanhat käytännöt. Nämä hitaat ja vaikeatkin kehittämisprosessit ovatkin suurimpia perus- ja täydennyskoulutuksen haasteita. Asiantuntijoiden käyttö, täydennyskoulutus, tieteellisyyden ja yhteistyön lisääminen eri ainelaitosten välillä ovat eräitä mahdollisia kehittämisstrategioita. (Haapasalo 1997, 255-259)

Uusien menetelmien ja ideologioiden kuten ongelmanratkaisumenetelmien käyttö opetuksessa ei suinkaan tee perinteistä matematiikan tiedon rakennetta tarpeettomaksi vaan ne ovat toisiaan täydentäviä ja rinnakkaisia. Sekä vanhassa että uudemmassa tavassa opettaa matematiikkaa on omat hyvät ja huonot puolensa. On tilanteita, joissa myös perinteiset menetelmät ovat käyttökelpoisia ja ehkä sopivimpiakin. Matematiikan rakenteeseen liittyy olennaisesti tietty järjestys, hierarkkisuus, jota ei myöskään voida unohtaa opetuksen suunnittelussa. Yksinkertaisena esimerkkinä voisi mainita kertolaskun perustuminen yhteenlaskuun. Opettajan tulisi pystyä aina valitsemaan käyttämänsä menetelmät oppilaan ja tilanteen mukaan. Matematiikan opetustodellisuus riippuu ennen kaikkea opettajasta – hänen persoonallisuudesta ja koulutuksesta. Matematiikka eksaktina aineena vaatii opettajalta syvällistä opetettavan aineen hallintaa jo opetuksen alkuvaiheessa. (Haapasalo 1997, 257-259)

### 3. Matematiikan opetuksen toteutus

#### 3.1. Oppitunnin vaiheet

Matematiikan oppitunnin rakenteeseen ei ole olemassa mitään kaavamaista ratkaisua, joka olisi muita parempi. Koponen (1992, 63-64) on kuitenkin antanut ohjeellisen neuvon matematiikan oppitunnin rakenteesta ja sisällöstä, jota pitää uskaltaa muunnella monipuolisesti ja tarkoituksenmukaisesti tilanteen, opittavien asioiden ja oppilaiden tieto- ja taitotason mukaan. Oppitunti voi pitää sisällään ainakin seuraavia komponentteja: kotitehtävien tarkistus, uuden asian opettaminen, harjoittelu, tarkistus ja kertaus. Esittelen tässä oppitunnin vaiheet perustuen mm. Ikäheimon (1995), Koposen (1992) ja Leinon, Kallan ja Paasosen (1978) näkemyksiin asioista. Vaikka Leinon et al. (1978) Matematiikan didaktiikka 2 on kirjoitettu behavioristisen oppimis- ja opetusnäkökulman ollessa vallalla, mutta esitutkimukseni perusteella nämä vaiheet ja niiden piirteitä on löydettävissä myös nykyisestä oppituntirakenteesta. Tämä luku oli pohjana laatiessani aineistonkeruujakson havainnointilomaketta (liite 1) ja valmistautuessani opetusjakson seuraamiseen.

##### 3.1.1. Päässä-lasku

Matematiikan opiskelussa yksinkertaisten suoritusvalmiuksien automatisoituminen on usein välttämätön edellytys niitä seuraavien vaativampien valmiuksien omaksumiselle. Oppilaiden on omaksuttava useita sellaisia yksinkertaisia suoritusvalmiuksia, joiden varman hallinnan saavuttaminen edellyttää päässä-laskuharjoittelua. Tällaisia ovat esimerkiksi kokonais-, murto- ja desimaalilukujen peruslaskutoimitukset sekä polynomilaskennan helpohkot tehtävät. Esimerkiksi puutteellinen kertotaulun hallinta saattaa hidastaa ja vaikeuttaa kertolaskun algoritmin omaksumista. Päässä-laskutaitojen sujuvuudella saavutetaan se etu, että probleematehtävässä on helppo keskittyä oleellisempaan – itse ongelmaan – eikä tarvitse jännittää sitä, miten ratkaisun mekaaniset vaiheet, laskutekniikka, hallitaan.

Päässäälaskuharjoittelun jatkuvaa käyttöä puoltaa se, että automatisoituneetkin suoritusvalmiudet rapistuvat käyttämättöminä nopeasti. Jo hankittuja laskuvalmiuksia ja taitoja tulee harjoitella ja ylläpitää silloinkin, kun niitä ei tarvita juuri sillä hetkellä opittavien asioiden yhteydessä. Päässäälaskutehtävissä voidaan korostaa laskutoimitusten ominaisuuksia, esim. laskulakien harjoittelua, mutta niihin tulisi liittää myös arviointia ja sanallisia tehtäviä. Sanallisilla tehtävillä on mahdollista kehittää myös lapsen matemaattista ajattelua, ei vain automatisoida laskusuorituksia. Päässäälaskutuokio voi sijoittua tunnilla mihin vaiheeseen tahansa, mutta usein se on tunnin alussa ja kestää 5-10 minuuttia. Tuokion tulisi muodostua sellaiseksi, että suurin osa oppilaista kokee osaavansa. Tavoitteeksi voidaankin asettaa oppilaiden osaamisen tunteen vahvistaminen. Lindgrenin (1986) on tutkinut 4. luokkalaisten oppilaiden mielipiteitä matematiikan tunnin hauskimmista ja ikävimmistä asioista. Vihkoon laskemisen ja kokeiden jälkeen ikävimpänä asiana oppilaat pitivät päässäälaskuja. Vaihtelevin toteutustavoin päässäälaskunkin mieluisuutta voitaisiin ehkä lisätä ja motivoida. Erilaiset bingot, laskusokkelot tai ongelmatehtävät (esim. Koponen 1992, 30-31) voisivat elävöittää tavanomaisia päässäälaskutuokioita.

Päässäälaskutuokio mahdollistaa luokassa myös monipuolisen ja aktiivisen luokkakeskustelun. Keskusteluissa opettaja ja muut oppilaat voivat saada tietoa lapsen ajattelumaailmasta ja tavasta ratkaista matemaattisia ongelmia. Oppilaan kertoessa omista ratkaisumalleistaan hän myös itse käsittelee aktiivisesti tietoaan ja tietorakenteitaan. Olisikin arvokasta oppia ymmärtämään, että päässäälaskumenetelmiä on useita, joita ei suinkaan pidä aliarvioida. Opettajana tulisikin keskittyä kuuntelemaan, mitä lapsi todella sanoo pikemmin kuin keskittyä tarkkailemaan, onko vastaus varmasti oikea. Päässäälasku kuuluu ehdottomasti niihin taitoihin, joista on hyötyä myös koulun ulkopuolella.

### 3.1.2. Kotitehtävät

Kotitehtävien antamisen tarkoituksena voidaan pitää oppimisen varmistamista, mekaanisen ja soveltavan laskemisen harjoittelemista, uuden asian pohjustamista itsenäisesti ja jo opittujen asioiden kertaamista. Jokaiselle oppilaalle pakollisia

kotitehtäviä tulisi olla kohtuullinen määrä ja ensimmäisten tehtävien tulisi olla riittävän helppoja, jotta kaikki oppilaat pääsevät laskemisen vauhtiin. Motivaatio ja yrittämisen halu saadaan säilymään valitsemalla kotitehtävät niin, että suurin osa oppilaista pystyy niistä selviämään. Kotitehtäviä voidaan myös eriyttää määrällisesti ja laadullisesti oppilaiden taitotason mukaan – heikommille oppilaille perustehtäviä ja paremmille enemmän ajattelutyötä vaativia. Kotitöiden määrä ja laatu on siis myös huomioitava, kun oppilaalla on oppimisvaikeuksia matematiikassa. Kotitehtävien antamisen ongelma on kuitenkin siinä, että kotien mielestä läksyjä on usein liikaa, liian vähän tai ne ovat joko liian vaikeita tai liian helppoja. Toisaalta, jos oppilaille annetaan erilaisia tehtäviä, niiden tarkistamiseen kuluu melko paljon aikaa. On kuitenkin huomattava, että kotitehtävien tarkistaminen on oppimisen ja motivaation kannalta tärkeää, sillä omista ja toisten virheistä voi oppia paljonkin.

Tehtävien tarkistuksen tavoitteena on paitsi oppia virheistä, niin myös saada palautetta opettajalle. Tavallisimmin tehtävät voidaan tarkastaa siten, että oppilaat esittävät ratkaisutapansa taululla tai piirtoheittimellä samalla selittäen. Tämän tarkistustavan etuna voidaan pitää sitä, että se mahdollistaa monipuolisen vuorovaikutteisen keskustelun erilaisista ratkaisutavoista. Tehtäviä voidaan tarkistaa myös itsenäisesti esim. tarkistuspisteissä, missä laskujen ratkaisutapa on esitetty oikein. Tapa on nopea ja tehokas, mutta tällöin oppilas voi vain nopeasti kopioida oikeat ratkaisut miettimättä tai oppimatta virheistään. Mielestäni liian usein matematiikassa puhutaan siitä, kuinka on ehdittävä seuraavaan kappaleeseen, vaikka oppilaille olisi ymmärryksessä vielä selviä puutteita. Tällöin usein ajatellaan, että samoihin asioihin palataan vielä myöhemmin, mutta oppilaalle on todellisuudessa saattanut jäädä käsitys omasta heikkoudestaan tai lahjattomuudestaan. Kodin ja koulun yhteistyö kotitehtäviin liittyvissä asioissa on myös ensiarvoisen tärkeää, sillä näin opettaja voi saada tietoa kotitehtävien eriyttämistarpeesta. Antamiensa kotitehtävien avulla opettaja välittää oppilailleen ja heidän vanhemmilleen pedagogisia periaatteitaan, esim. opetuksen keskeiset tavoitteet, motivointi ja eriyttäminen.

### 3.1.3. Koonta ja kertaus

Oppitunnin alussa voidaan pitää lyhyt koonta ja kertaus, minkä tarkoituksena on:

- mieleenpalauttaa ja vahvistaa aiemmin opittua,
- diagnosoida heikkouksia,
- motivoida oppilaita,
- tukea kotitehtävien tarkastusta,
- luoda pohja alkaneen tunnin opetukselle ja
- aktivoida oppilaita.

Koonta ja kertaus on siis oppimistapahtumaa aktiivisesti edistävä vaihe. Tässä tulisi tarkistaa edellisellä tunnilla opittuja asioita, joita tarvitaan alkaneella tunnilla. Jos edellisestä tunnista on kulunut jo useampia päiviä, on tämä vaihe apuna ”oikean vaihteen löytymiseen”. Koonnan ja kertauksen päätarkoituksena on auttaa oppilaita seuraamaan opetusta, orientoitumaan oppimistehtäviin sekä palauttaa mieleen ja vahvistaa tarpeellisia asioita. Vaihe kestää yleensä vain muutaman minuutin oppitunnin alussa.

Koontaa ja kertausta voidaan toki tehdä myös oppitunnin lopussa, jotta oppilaille jäisi mielikuva oppitunnin tärkeimmistä asioista ja pääkohdista. Kertauksen tarkoituksena ei saisi kuitenkaan olla sellaisten asioiden ’listaus’, jotka tulee opetella tai osata ulkoa. Koonta voi olla asioiden pohtimista ja opittujen asioiden merkityksistä keskustelemista.

### 3.1.4. Uuden asian opetus

Opettajan tehtävänä on luoda sellaisia oppimistilanteita, jolloin oppilaalla on mahdollisuus oppia käsiteltävä asia. Opetustilanteessa opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus tulisi tapahtua suurimmaksi osaksi kielellisesti ja vuorovaikutteisesti. Kielellisen vuorovaikutuksen vuoksi opettajan tulisikin opetuksessaan kiinnittää huomiota matemaattisen termistön johdonmukaiseen ja täsmälliseen käyttöön sekä ohjata myös oppilaita tähän.

Kyselemällä etenevää opetusta suositellaan erityisesti alemmille luokka-asteille uuden asian opettamisessa. Tällä menetelmällä opettajan on mahdollista saada jatkuvasti palautetta tiedon perillemenosta ja näin samalla suunnitella opetustapahtuman etenemistä. Kysymyksillä pyritään herättämään paitsi mielenkiintoa opittavaa asiaa kohtaan, niin myös aktivoimaan oppilaita. Sillä myös palautetaan mieliin aiemmin opittuja asioita, kiinnitetään oppilaiden huomio haluttuihin seikkoihin, jäsennetään oppiainetta ja opitaan tekemään johtopäätöksiä ja yhteenvetoja. Uuden asian opetuksen lähtökohdana tulisi olla mahdollisimman usein jokin tilanne tai ongelma, johon pyritään löytämään ratkaisu tai ratkaisuvaihtoehtoja matematiikkaa soveltamalla. Näin oppilaskeskeisyys korostuisi ja perinteiset opetusmallit rikastuisivat.

Kyselymenetelmällä toteutetun opetuksen ongelmana on vaikeus arvioida opetuksen perillemenoja etenkin passiivisten oppilaiden osalta. Tämän vuoksi yhteisharjoittelua tulisin seurata vielä yksittäisharjoitteluvaihe, jolloin opettaja voi luokassa kiertelemällä ja seuraamalla yksittäisten oppilaiden työskentelyä saada tarkempaa tietoa oppilaiden taidoista ja tiedoista.

### 3.1.5. Harjoittelu

Harjoittelu voidaan toteuttaa yhteisesti tai yksittäisesti oppitunnilla. Uuden asian opetukseen liittyy miltei aina yhteisharjoittelu, jolloin uutta asiaa harjoitellaan yhteisesti vaihe vaiheelta. Näin pystytään varmistamaan oppilaiden keskeisten asioiden hahmottaminen ja luomaan pohja yksittäisharjoittelulle. Yksittäisharjoitteluun siirtymisen ehtona on tehtävätyyppien selkeys. Kaikki oppilaat pääsevät harjoittelun vauhtiin, kun etukäteen yhdessä on harjoiteltu aloitettavan tehtävän kaltaisia harjoituksia.

Edellä esitetyssä harjoitteluvaiheeseen 'valmistautumisessa' on kuitenkin varottava, ettei tehtävien tekemisestä tule jo opittujen asioiden toistamista ja opetuksesta laskutaitopainotteista. Harjoitteluvaiheessa tehtävien pitäisi sisältää aina jotakin "uutta" ja erilaisia variaatioita esimerkkilaskuista poiketen. Uusien asioiden harjoittelu mallista on myös tärkeä taito, mutta miksi nämä vaiheet – opetus ja harjoittelu, on usein erillisinä



toisistaan opetustapahtumassa? Uusien asioiden opettelu vie usein aikaa ja oppilaille on annettava mahdollisuus ajattelutoimintojensa kautta sisäistää nämä. Matematiikassa tämä sisäistämiseen käytettävä aika kulutetaan nähdäkseni usein niin, että lasketaan oppikirjassa toistuvia samantapaisia tehtäviä niin kauan, että uusi asia on ainakin näennäisesti opittu! Joskus voisikin kokeilla menetelmää, jossa oppilas tai oppilasryhmät alusta asti itsenäisesti konstruoisivat uuden asian olennaisimmat piirteet. Esimerkiksi allekkain kertolaskussa oppilaille tai oppilasryhmälle voisi antaa ongelmatehtäväksi selvittää algoritmin vaiheet ja merkitsemistavat. Oppilaista tämä saattaisi olla jopa mielenkiintoista salapoliisityötä, jossa oppimista tapahtuisi omien löydösten kautta. Tällöin voitaisi pohtia ja etsiä myös niitä tuttuja elementtejä, jotka jo aiemmin on opittu. Näin oppilaskin voisi havaita oppimiensa asioiden merkityksellisyyden uusia asioita opiskeltaessa.

Vastaopittuja asioita tulee päästä harjoittelemaan ja soveltamaan itsenäisesti mahdollisimman pian. Lindgrenin (1986) tutkiessa 4. luokkalaisten oppilaiden mielipiteitä matematiikan tunnin hauskimista ja ikävimmistä asioista paljastui, että hauskimpana asiana tunnilla koettiin kirjaan laskeminen. Uusien metodien, työskentelymuotojen ja konkreettisten materiaalien suunnittelussa ei siis kuitenkaan sovi unohtaa tavallista laskujen soveltamista ja harjoittelusta oppikirjaan. Erilaisin harjoittelumuodoin ja välinein (kilpailut, pelit), avustamalla ja varmistamalla myös oppilaille voidaan, ja tuleekin, lisätä harjoitteluvaiheen mielekkyyttä, motivointia ja merkitystä.

### ***3.2. Opetuksen järjestämisperiaatteet***

#### **3.2.1. Työtavat**

Työtapa on toiminto, jolla pyritään hallitsemaan opetustilanteessa vallitsevaa kahta voimaa: pyrkimys opettaa ja oppia tiettyjä asioita sekä sosiaalinen osallistuminen monimutkaisessa ympäristössä. Työtavasta puhuttaessa korostuu opettajan toiminnan ohella oppilasnäkökulma. Työtapoja voidaan eritellä johtamisvastuun, etenemistavan,

oppilaiden osallistumisasteen ja ajallisen keston perusteella. Ryhmittelyyn ja painottumisen vaikuttavat kunkin ajankohdan didaktiset suuntaukset ja kasvatusihanteet. Peruskoulussa käytettävät työtavat voidaan jakaa neljään ryhmään: esittävä opetus, luokkakeskustelu, ryhmätyöskentely ja yksilöllinen työ. (Lahdes 1997, 151)

### Esittävä opetus

Esittävä opetus on opettajajohtoinen opetusmenetelmä, jossa viestintä tapahtuu yksisuuntaisesti esittäjältä vastaanottajalle. Esittävä opetus voidaan jakaa suulliseen esitykseen ja näyttävään esitykseen. Suullinen esitys sopii käytettäväksi opetustilanteen motivoimiseen, uuden tiedon välittämiseen, ajatusten syventämiseen ja tulosten esittämiseen. Esittävä opetus soveltuu matematiikan opetukseen hyvin, koska opettaja jäsentää opittavan materiaalin ja esittää sen luokalle tehokkaasti. (Ahtee & Pehkonen 2000, 53.) Suullista esitystä täydennettäessä havaintomateriaaleilla ja -välineillä voidaan puhua näyttävästä esityksestä tai demonstraatiosta. Havainnollistamisvälineissä mallin ja todellisuuden vastaavuus tulee olla mahdollisimman hyvä. Demonstraatiossa on kyse mallioppimisesta, jolloin oppilas jäljittelee havainnoimaansa tapahtumaa sisäisesti. Opettajan sisäiset kognitiiviset prosessit saadaan esiin mallintamisella ja käytännön taidot opitaan harjoittelemalla opettajan tai muiden oppilaiden avulla. Demonstrointi soveltuu herättämään oppilaiden mielenkiinnon tai vahvistamaan ja selkeyttämään muistamista. (Lahdes 1997, 154-158)

### Luokkakeskustelu

Luokkakeskustelusta voidaan puhua silloin, kun oppilaiden puheosuuden kasvaessa siirrytään kyselevän opetuksen kautta vuoropuheiseen opetukseen. Kyselemällä opettaja voi arvioida oppilaiden tiedollista lähtötasoa, motivoida ja ylläpitää oppimisprosessia sekä ohjailla oppimisprosessia. Kysymysten tulee olla selkeitä ja riittävän vaikeita. Oppilaalle on annettava riittävästi miettimisaikaa ja opettajan tulee välttää kysymysten toistoa tai korjailua. Moniosaiset kysymykset ovat usein liian vaikeita ja uuden opittavan asian kohdalla vertailu tai kuvailukehotus on määrittely-kysymystä (Mikä on ...) helpompi. Laurilehdon (1980) mukaan opetuksen yksinkertaisin sykli on opettajan kysymys → oppilaan vastaus → vastauksen arviointi. Oppilaan väärä vastaus voi johtaa

syklicketjun vuoropuheiseksi. Korjaavat, täydentävät, selittävät, soveltavat, arvioivat, syitä selvittävät ja perustelevat kannanotot kehittävät ajattelua ja oppimisprosesseja. Laurilehto (1980) katsoo, että tällaisia kognitiivisesti korkeatasoisia kysymyksiä ja syklejä tulisi olla nykyistä enemmän. Toisaalta oppilaan ajattelua kehittävät myös kysymykset, joihin on useita mahdollisia vastauksia tai oikeaa vastausta ei ole olemassakaan. (Lahdes 1987, 159-161)

Oppilaiden aktiivisuuden lisääntyessä puhutaan opetuskeskustelusta. Kysymysten ja ongelmanasettelun avulla opettaja pyrkii samaan oppilaat aktiivisiksi ja etsimään itse vastauksia ongelmiin. Opettaja toimii paitsi prosessin käynnistäjänä, niin myös ohjaa keskustelun johdonmukaisuutta. Leiwo, Kuusinen, Nykänen ja Pöyhönen (1987, 161) esittävät aidon opetuskeskustelun piirteitä. Välttämätöntä opetuskeskustelulle on avoin aihe, johon voi esittää erilaisia vastauksia. Lisäksi tulee olla:

- keskustelua sisällöllisesti eteenpäin vieviä tiedon esittämisen- ja osoittamiskysymyksiä,
- yhteinen tarkoite tai tulkinta, joka varmistetaan keskustelemalla ja käyttämällä hyväksi oppilaiden tietoa,
- oppilaan oikeus olla vastaamatta aitoihin kysymyksiin sekä
- opettajan tehtävä selvittää väärin vastausten perustelut keskustelemalla.

Opetuskeskustelu on mielipiteiden vaihtoa, jossa oppilailla on jo asian perustiedot. Se on vaativa työtap, jossa etenkin ala-asteella tarvitaan keskustelutaitojen ohjausta. Opetuskeskustelun avulla oppilas voi selkiyttää ajatuksiaan ja niiden ilmaisua, kehittää keskustelutaitojaan sekä oppia ymmärtämään ja hyväksymään muiden ihmisten näkökantoja ja arvoja. (Lahdes 1987, 160-163)

### Ryhmätyöskentely

Koskenniemi (1970, 137) kuvailee ryhmätyötä seuraavasti: ”Ryhmätyössä luokan tehtävä jaetaan oppilasryhmien suoritettavaksi ja oppilaat osallistuvat opetuksen suunnitteluun sekä työnjaosta päättämiseen. Ryhmien aikaansaannokset esitellään

lopuksi koko luokalle ja niistä keskustellaan yhteisesti”. Konstruktivistinen oppimiskäsitys korostaa sosiaalisen vuorovaikutuksen roolia oppimisessa. Keskusteluissa ja ryhmätoiminnassa yksilön on mahdollista reflektoida ja pohdiskella omia ajatteluprosessejaan (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 128).

Ryhmätyöskentelyn muotoja ovat mm. tutor-opetus, ryhmätyö, ryhmäkeskustelu ja projektityöskentely. Ryhmätyö soveltuu tietojen ja taitojen harjaannuttamiseen, soveltamiseen, ongelmatehtävien ratkaisemiseen, tietojen syventämiseen ja asenteiden ja arvojen pohdintaan. Ajallisesti ryhmätyöskentelyn pituus voi tehtävästä riippuen vaihdella 10 minuutin tuokiosta kuukausiin. Opettaja ohjaa ja tukee ryhmän työskentelyä, kun taas oppilaan roolissa korostuu vastuullisuus ja itsenäisyys. Ryhmien tehtävät voivat olla kaikilla samat tai erilaiset muodostaen yhtenäisen kokonaisuuden. Ryhmällä on usein sisäinen tuntijako ja jäsenillä erilaisia rooleja. Roolit voivat olla ennalta määrättyjä tai muodostua työskentelyn edetessä. Opettajan tulee arvioida ryhmätyöskentelyyn soveltuvat aiheet, sillä monimutkaisten käsitteiden tai rakenteiden muodostamisessa opettajajohtoisempi opetus paitsi helpottaa ja nopeuttaa, niin myös varmentaa oppimista. (Lahdes 1997, 164-166)

Eräs ryhmätyömuoto on yhteistoiminnallinen oppiminen. Yhteistoiminnallisen oppimisen taustalla on uskomus, että jokainen voi tulla paremmaksi oppijaksi auttamalla toisia oppimaan ja oppimalla yhdessä toisten kanssa. Ryhmällä tulee olla yhteinen tavoite ja kukaan ryhmässä ei voi saavuttaa tätä tavoitetta, elleivät kaikki muutkin onnistu tehtävässään. Tämä ei tarkoita sitä, että jokaisen ryhmän jäsenen pitäisi tehdä samoja asioita, pohtia samoja ongelmia ja edetä samaa tahtia. Roolijako on hyvin tyypillistä myös yhteistoiminnallisessa oppimisessä. Tunne siitä, että ollaan samassa veneessä ja vastuussa omasta ja toisten oppimisesta merkitsee siirtymistä uuteen oppimiskulttuuriin. Juuri tästä syystä opetuksen muuttaminen yhteistoiminnalliseen suuntaan on hidas prosessi. Opettajan voi yhteistoiminnallisen oppimisen aikana havainnoida mm. ryhmien jäsenten osallistumista työskentelyyn, työskentelyn asiallisuutta ja tehokkuutta, ilmenneitä ongelmia ja hyvin sujuneita asioita sekä arvioida yhteistyön parantamiskeinoja. (Berry & Sahlberg 1995, 36-37)

Ryhmätyöskentelyn muotojen käyttöä rajoittavat todelliset ja luulotellut esteet. Niitä on voitu pitää liian tehottomina suhteessa tunnilla kuluvaan aikaan. Opettajalta suunnittelu, oppimateriaali-, tila- ja työjärjestysongelmineen vaatii oman aikansa. Ongelmana voi olla myös pelko siitä, että joku selviytyy työskentelystä toisen ”siivellä”. Sosiaalisen osallistumisen osalta taas voidaan pelätä järjestyshäiriöitä. (Lahdes 1997, 167)

### Yksilöllinen työ

Yksilöllinen työskentely konkreettisten välineiden kanssa tai ilman niitä on hyvin tarpeellinen vaihe oppilaan oman ajattelun ja harjoittelun kannalta. Kukaan ei toisaalta myöskään voi oppia toisen puolesta, minkä vuoksi yksilöllisen työskentelyn vaihe on luonnollinen osa opetus-oppimisprosessin kaikkia osia. (Ikäheimo 1995, 49)

Itsenäinen työ, jossa oppilas itse vastaa suunnittelusta valmistumiseen asti edellyttää perustaitojen hallintaa. Iän ja kokemuksen vuoksi tällaista työtapaa suositellaan käytettäväksi mm. yläasteella ja lukiossa. Kokemuksiin vaikuttaa paitsi opiskelijan omat itsenäiseen työskentelyyn vaikuttavat tekijät, niin myös oppiaine ja opettaja. Tavoitteiden, materiaalien, välineiden ja osin myös etenemisen suhteen opettajalla on suuri merkitys yksilöllisen työn onnistumisessa pienemmillä oppilailla. Matematiikassa yksilöllistä työskentelyä tulisi kuitenkin toteuttaa erilaisten välineiden avulla, jolloin lapsella on mahdollisuus käyttää ajattelunsa tukena esim. 10-järjestelmävälineitä. Oppiminen on monimuotoinen prosessi ja sitä tapahtuu monella tavalla, joten yhdessä oppimisen rinnalla itsenäisen työskentelyn taidot ovat yhtä tärkeitä. (Lahdes 1997, 173-174)

### 3.2.2. Havainnollistaminen ja konkretisointi

Peruskoulun 1.-6. -luokkalaisilla oppilailla ajattelu on vielä suurelta osin havaintoihin perustuvaa. Matematiikan käsitteet ovat monesti luonteeltaan kuitenkin abstraktisia, joten matematiikan käsitteiden opetuksessa tulee pyrkiä etenemään havaintojen pohjalta kohden abstraktioita. Havainnollistamista on laajasti ottaen kaikki, mikä kytkee

opetettavan asian oppilaan kokemuksiin tai hänelle tuttuihin asioihin. (Berry & Sahlberg 1995, 55-56)

Matemaattinen havainnollistaminen ja konkretisointi tapahtuu tavallisesti mallin avulla. Uusi asia kytketään aluksi havainnollistavaan malliin, josta myöhemmin voidaan irtaantua ja siirtyä abstraktioiden käsittelyyn. Oppilaan yksilölliset tiedolliset ja taidolliset ominaisuudet määrävää sen, kuinka nopeasti malleista voidaan irtaantua. Malleja voidaan esittää piirroksina, mutta joskus on mielestäni tarkoituksenmukaisempaa esittää konkreettisten välineiden, esim. Unifix-palikkoiden, helmitaulun tai satatalon avulla. (Aebli 1991, 106-107)

Havainnollistamismallien tulee olla niin selkeitä ja yksinkertaisia, että oppilaan on siitä helppo hahmottaa opittavan asian olennaisimmat piirteet. Mallin tulee olla myös rakenneyhtäinen havainnollistettavan matemaattisen käsitteen kanssa. Käsitteellä on olemassa usein myös erilaisia ominaisuuksia, joita mallin avulla tulee voida konkretisoida. Tutut toiminnot, riittävä ajankäyttö ja oppilaiden valmius mallin käyttämiseen mahdollistaa mallista saatavan konkreettisen hyödyn. Usean mallin samanaikaista käyttöä on syytä pyrkiä välttämään. Mallin tulee olla opettajalle tuttu ja sitä tulee käyttää tarkoituksenmukaisesti. Oppilaille outo malli tai opettajan tietämättömyys mallin käytöstä voi pikemminkin lisätä kyseisessä tilanteessa oppimisvaikeuksia kuin ehkäistä niiden syntymistä. Mallin tulee olla aina siten kiinnostava, että oppilaan huomio kiinnittyy opittavan asian kannalta olennaisiin mallin ominaisuuksiin. (Aebli 1991, 108-111)

### 3.2.3. Motivointi ja aktivointi

Motivoinnin merkitystä matematiikan opetuksessa ei tule vähätellä. Matematiikan opiskelu on luonteeltaan pitkäjänteinen, vaivaa ja ponnisteluja vaativa prosessi, jonka hyödyllisyys ei ole oppilaalle itsestäänselvyys. Leino et al. (1978) määrittelevät motivoinnin tietynsuuntaisen käyttäytymisen virittämiseksi ja ylläpitämiseksi. Käsitteessä on oleellista tiettyyn päämäärään suuntautuneisuus. Aktivointi puolestaan voidaan kuvailla toiminnan virittämiseksi ja ylläpitämiseksi. On ilmeistä, että tietty

motivaatiotaso on oleellista aktiivisuuden kehittymiselle, mutta toisaalta tuloksellisen aktiivisuuden tuottama tuotos ja mielihyvä lisää motivaatiota. (Leino et al. 1978, 117-118; Tynjälä 1999, 98-100)

Motivaatiotason kohottamisen apuna voidaan pitää tavoitteellisuutta. Selvä tavoitteiden ilmaiseminen ja yksityisen uuden asian liittäminen laajempiin yhteyksiin vaikuttaa motivaatiotasoa nostavasti. Tavoitteenasettelua ja opiskelun pitkäjänteisyyttä voidaan selkiyttää ja kehittää opettajan ja oppilaiden välisellä yhteissuunnittelulla ja sijoittamalla ajoitussuunnitelmat kaikkien nähtäväksi. Myös yksittäisen oppitunnin tavoitteen ilmaiseminen on tärkeää. Tavoitteilla on sekä kognitiivisia, affektiivisia että sosiaalisia ulottuvuuksia. (Tynjälä 1999, 102-103)

Oppilaiden työllistäminen siten, että tehtävät vastaavat niin vaikeustasoltaan kuin kiinnostavuudeltaan oppilaan taitotasoa motivoi ja saa oppilaan jatkamaan työskentelyä. Pienet urakkamuotoiset työskentelytavat, opettajan antama välitön palaute sekä selvät ohjeistukset kannustavassa työskentelyilmapiirissä auttavat oppilaita jatkamaan ponnistelujaan. Onnistumisen ja suoriutumisen tunteiden kautta oppilas huomaa ponnistelujen tuottavan tuloksia, mikä varmistaa motivaatiotason säilymisen ja kohoamisen. Tällaisia onnistumisentalanteita on oppilaille kyettävä järjestämään mahdollisimman paljon. (Tynjälä 1999, 108)

Tuttuus, havainnollisuus ja käytännöllisyys ovat myös opetuksen motivointikeinoja. Lähteminen liikkeelle oppilaan jokapäiväisen kokemusmaailman ilmiöistä ja näihin liittyvistä ongelmista tekee asiat mielenkiintoisiksi ja nostaa motivaatiotasoa. Havainnollisuuden merkitys korostuu erityisesti käsitteiden oppimisessa. Myös sen korostaminen, että tietoa voidaan käyttää jokapäiväisessä elämässä nostaa motivaatiotasoa. (Aebli 1991, 376-377)

Oppitunnin jaksottaminen erilaisten opetusmuotojen kesken estää väsymistä ja ylläpitää kiinnostusta. Yksi vakiintuneimmista aktivointikeinoista on oppilaiden käyttäminen taululle tai kalvolle merkitsemiseen, näyttämiseen, kyselemiseen tai selittämiseen aina mahdollisuuksien mukaan. Myös erilaisten pelien ja esiintymisten aktivoiva vaikutus on

ilmeinen, ja luokassa voidaan järjestää myös itse keksittyjä tai mukailtuja pelejä. (Leino et al. 1978, 118)

#### 3.2.4. Eriyttäminen

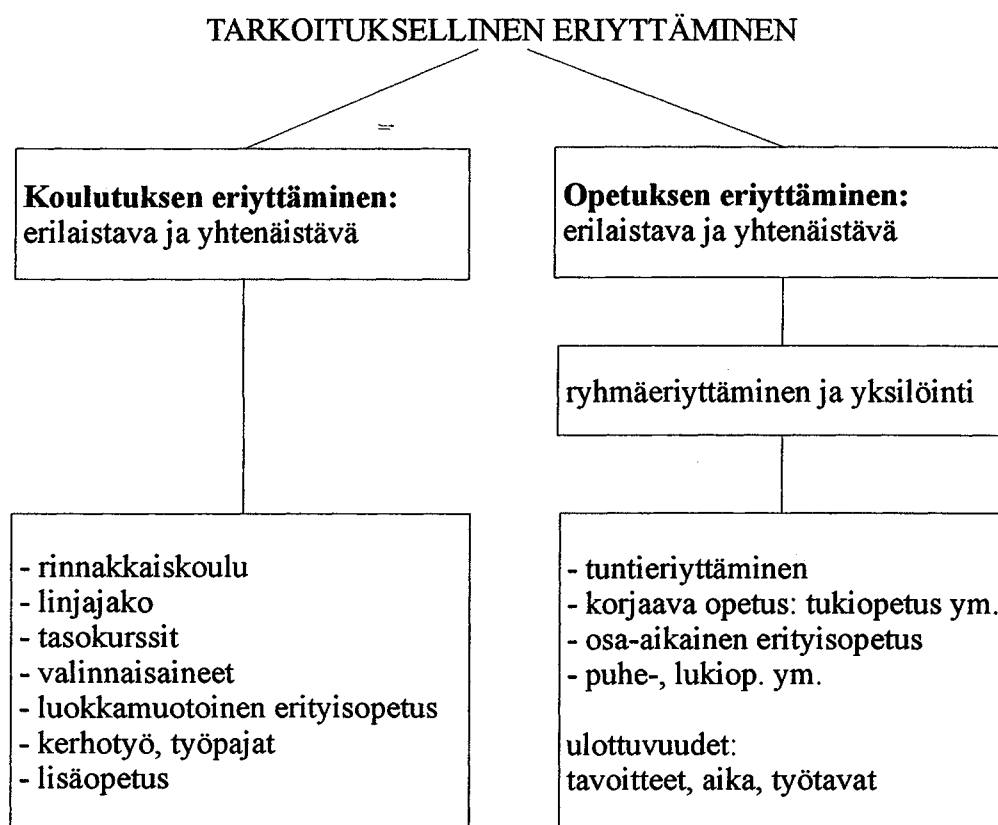
Jokaisen lapsen tulisi saada edellytystensä mukaista opetusta. Opettajan tehtävä ei ole helppo, koska kaikilla luokkatasoilla on oppilaita, joiden kehitystaso ja -valmiudet eroavat huomattavasti toisistaan. Lapsi kehittyy tiettyjen laadullisten muutosten funktiona: kehitysjärjestys on vakio, mutta kehitysnopeus vaihtelee. (Ikäheimo 1995, 9)

Kulloisetkin tavoitteet ratkaisevat eriyttämisen tarkoituksen, mutta läheskään aina ei tähdätä oppilaiden erilaistumiseen, vaan kysymys on usein samankaltaistamisesta, esim. tukiopetus. opetuksen eriyttäminen voi tapahtua ryhmämuotoisena tai yksilöllisenä. Opetuksen eriyttämisen kolme ulottuvuutta ovat:

- Tavoitteet; oppilailla samat tai erilaiset tavoitteet.
- Aika; kotitehtäviksi tehtävät, joita oppilas ei ole tunnilla ehtinyt tehdä tai tunnin ulkopuolinen tukiopetus.
- Työtavat; oppilaat valitsevat itse opiskelun muotonsa.

Eriyttäminen voi olla ei-tarkoituksellista tai tarkoituksellista koulutuksen eriyttämistä. Tarkoituksellinen eriyttäminen on organisatorista, koulutuksen tai opetuksen eriyttämistä (Kuvio 4).





**Kuvio 4 Tarkoituksellinen eriyttäminen (Lahdes 1997, 200)**

Rauhala et al. (1985, 21) esittävät seuraavat eriyttämisteesit tavalliselle matematiikan oppitunnille:

1. Käytä oppitunnilla vaihtelevia työtapoja. rytmitä oppimista sisällyttämällä oppituntiin sekä yhteisiä opetustuokioita että itsenäisen työskentelyn jaksoja.
2. Jaa oma ajankäyttösi eri oppilasryhmille tilanteen ja tarpeen mukaan.
3. Käytä hitaasti edistyvien oppilaiden opettamiseen enemmän aikaa, varaa yhteiseen opetustuokion jälkeen lisäaikaa uuden asian yksilölliselle opetukselle.
4. Varaa oppitunnin aikana nopeasti edistyville oppilaille opetusaikaa asioissa, joita ei ole tarpeen esittää kaikille yhteisesti.
5. Huolehdi erilaisten oppilaiden työllistämisestä, älä jätä ketään opetuksen ja opiskelun ulkopuolelle.

6. Eriytä harjoitteluvaiheessa tehtävillä, niiden laadulla, vaikeusasteella ja määrällä. Muista suunnitella myös tehtävien tarkistustapa.
7. Eriytä kohtuuden rajoissa myös kotitehtävillä, sekä itse tehtävillä että niiden tarkistuksessa.

### 3.2.5. Integrointi

Integroinnilla tarkoitetaan erilaisten ainesten, esimerkiksi oppiainesten sulattamista yhdeksi kokonaisuudeksi. Koulutyössä voidaan puhua suppeasta integroinnista silloin, kun oppiaineet on sulautettu käytännössä vakiintuneiden eri oppiaineiden piiristä. Oppilaan kannalta tarkasteltuna integraatio on suppeassa mielessä oppilaan oppimien asiakokonaisuuksien laaja-alaista hallintaa. Laajimmillaan integraatiolla tarkoitetaan opetussuunnitelman yhteydessä koko persoonallisuuden tasapainoista kehittymistä. (Kari 1991, 86)

Integroinnin suuntia ovat horisontaalinen ja vertikaalinen integrointi. Horisontaalisella integroinnilla tarkoitetaan eri oppiaineissa toisiinsa liittyvien oppiainesten samanaikaista, rinnakkaista opettamista. Vertikaalisella integroinnilla puolestaan tarkoitetaan ajallisesti peräkkäisten toisiinsa liittyvien asioiden opettamista niin, että oppilaille muodostuu integroituja tietokokonaisuuksia. (Kari 1991, 86)

### 3.2.6. Arviointi

Oppilasarviointi on perinteisesti nähty keinona, jolla voidaan toisaalta motivoida oppilaita, toisaalta tuottaa tietoa oppilaan edistymisestä hänelle itselleen, hänen vanhemmilleen, opettajalle sekä tuleville oppilaitoksille ja työnantajille. Oppimisen arviointi on ollut tapana jakaa diagnostiseen, formatiiviseen ja summatiiviseen arviointiin. Diagnostisella arvioinnilla pyritään selvittämään oppilaiden lähtötaso uuden opetusjakson alussa. Formatiivisella arvioinnilla on tarkoitus motivoida oppilaita opetuksen aikana ja tuottaa opettajalle tietoa siitä, miten opetusta tulisi jatkossa

suunnata. Summatiivinen arviointi taas on päättöarviointi kurssin tai opetusjakson lopussa. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen myötä arviointia tarkastellaan laajemmin. Se ei ole enää opetus- ja oppimisprosessin erillinen osa, vaan olennainen osa opettamista ja oppimista. (Tynjälä 1999, 169)

Arviointi liittyy tavoitteelliseen opetukseen oleellisena osana. Opettaja ja oppilaat saavat tietoa opetuksen ja opiskelun onnistumisesta sekä opetusjärjestelyjen toimivuudesta jo opetustapahtuman aikana. Opettajalle tämä mahdollistaa opetustapahtuman välittömän korjaamisen ja kehittämisen. Opiskelun edistymisestä annettava välitön palaute tekee arvioinnista luonnollisen, oppilaalle myönteisen ja oppimista edistävän opetuksen osan, joka myös auttaa oppilasta tuntemaan omia kykyjään ja mahdollisuuksiaan. Arvioinnin neljä päätehtävää ovat: 1) toteava, 2) motivoiva, 3) ohjaava ja 4) ennustava. (Koponen 1992, 169)

Arvioinnin vaikutus motivaation syntyyn ja ylläpitämiseen on ilmeinen. Perinteiset arviointimenetelmät, jotka painottavat tuotosta tai lopputulosta, saavat oppilaan asennoitumaan koulutyöhön suoriutumisorientaation mukaisesti. Arvioinnin osittainen julkisuus - parhaiden nimet mainitaan ja arvosanojen vertailu kavereiden kanssa, lisää myös suorituskeskeisyyttä. Tehtävä- ja oppimisorientaation kannalta toivottavia ovat sellaiset arviointimenettelyt, joissa korostuu oppilaiden yksilöllisen edistymisen ja oppimisen seuraaminen, ei niinkään vertailu tovereihin. (Tynjälä 1999, 109-110)

Oppimisen arviointi sekä siinä käytetyt perusteet ohjaavat voimakkaasti opetuksen tavoitteiden painottumista. Kun matematiikan opetuksessa korostuu oppimisen prosessiluonne, tulee arvioinnin aluetta laajentaa ja painopistettä siirtää. Tästä seuraa, että tulee kehittää uusia mittaus- ja arviointitapoja samoin kuin palautteen antamista oppilaille. On esitettävä uudenlaista toiminnan luonnehdintaa ja luokittelua: esimerkiksi miten järkevästi oppilas suunnitteli ja toteutti työnsä, kuinka aktiivisesti hän myötävaikutti ryhmän toimintaan, millaisia kysymyksiä hän esitti ongelman kannalta sekä miten hän kokosi ja esitti tulokset toisille. Prosessiarvioinnin avulla oppilas tulee tietoiseksi myös omasta oppimisestaan sekä matematiikan merkityksestä omassa kehityksessään. Tarkoituksena on myös päästä pois pelkästä laskusuoritusten

arvioinnista kohti matematiikan käyttötaitojen arviointia. Arvioinnissa tulisi myös painottaa suullisen, kirjallisen ja kuvallisen kyvyn taitoa. (Pehkonen 1995, 45-46)

Oppilasarvioinnin keskeisinä lähtökohtina olisi oltava oppilaan ajatteluprosessien selkiyttäminen. Opetuksen, oppimisen ja arvioinnin integrointi on keskeistä uudenlaisessa arviointiajattelussa. Niin sanottujen perinteisten koetyyppien rinnalle olisi tuotava oppilasarviointiin muotoja, joiden avulla kyettäisiin arvioimaan itse oppimisprosessia ja myös asenteita. Näitä voivat olla: itsearviointi kirjallisesti ja suullisesti, matematiikasta keskusteleminen, kokeitten monipuolisuus ja portfolioit. Matematiikan menetelmien ja arviointitapojen valinnoilla on pyrittävä kohti parempaa matemaattista ymmärrystä. (Berry & Sahlberg 1995, 84-85; Pehkonen 1995, 46-49; Tynjälä 1999, 169-170)

## 4. Tutkimuksen toteutus

### 4.1. Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat

Opettajankoulutuksessa opettajakokelas tietoineen ja taitoineen on monissa eri opetukseen liittyvässä tilanteessa arvioinnin kohteena. Koulutuksen jälkeen arviointi kohdistuu kuitenkin perinteisesti oppilaisiin – ei enää opettajaan. Opettaja on tässä oppimisprosessissa niin keskeisessä asemassa, että hänen tekemisiinsä tulee mielestäni silti vielä kiinnittää huomiota. Opettajan toiminnan kuvaaminen ja analysointi auttaa hahmottamaan ja täydentämään kuvaa opetusprosessin käytännöllisestä puolesta, johon pelkkä teorioiden tunteminen sellaisenaan ei ole riittävä avain. Monet opetustilanteet vilahtavat luokassa ohi niin nopeasti, ettei niitä tapahtumahetkellä juurikaan ehdi tiedostaa, saati problematisoida. Tapaustutkimuksen menetelmin seuraamalla ja analysoimalla itse opetustapahtumaa tutkija, ja myös tutkittava raportoinnin myötä, pystyy ymmärtämään opetustapahtuman syvällisemmin kaikkien osallistujien, eli myös oppilaiden kannalta.

Tehtäväni tässä tutkimuksessa laajasti on yhden opettajan matematiikan oppitunnin toiminnan kokonaisvaltainen tarkastelu ja kuvaus, jota ei voi tutkia irrallaan itse opetustapahtumasta. Tässä tutkimuksessa halutaan ensisijaisesti nähdä, millaista matematiikan opetus tällä hetkellä on. Opetus on lainsäädännön mukaan julkista, mutta opetustapahtuman tutkiminen edellyttää yksittäiseltä opettajalta rohkeutta. Opettajan persoonallisuus on hänen työvälineensä, ja opetuksen tutkimus merkitsee analysoinnin kohteena olemista. Ojasen (1993, 9) mukaan opettajankoulutusta on kritisoitu siitä, että tutkijat ovat etäännyttäneet itsensä opettamisen todellisesta luonteesta ja opettajien mahdollisuudet muuttaa käytäntöä on jätetty yksinkertaisesti tutkimuksen ulkopuolelle. Osoituksena tästä ovat tutkimukset, jotka perustuvat vain osittain tai eivät ollenkaan empiriaan. Tämä tutkimus on empiirinen ja kontekstuaalinen: 'kentällä' työtään tekevää luokanopettajaa on tutkittu hänen omassa työympäristössään ja aidossa tilanteessa. Tutkimuksen tulokset, kokemukset ja ideat antavat arvokasta tietoa minulle tutkijana ja aloittelevana luokanopettajana sekä myös tutkimuksen kohteena olevalle luokanopettajalle siitä, miten opetusta voisi kehittää tai millaisia painopisteitä oppimisen

kannalta tulisi huomioida. Nerokkainkaan opettaja ei yksikseen ehdi kaikkea ajatella saati kokeilla, joten opetuksen tarkastelu tutkimuksen valossa luo toivottavasti myös uusia ideoita ja ajatuksia opetuksen toteuttamiseen!

Toinen tehtäväni tässä tutkimuksessa liittyy opettajan ja oppilaiden käsitysten tutkimiseen. Oppimisen menestyksellisyyden kannalta on tärkeää selvittää oppilaiden käsitykset. Tässä tutkimuksessa tutkitaan oppilaan ja opettajan käsityksiä opitun asian merkityksellisyydestä, yhteydestä aiemmin opittuihin asioihin sekä oppitunnin pääkohdista. Haapasalo (1997, 51) kritisoikin, että kouluopetuksessa harvoin osataan toteuttaa Herbartin, Pestalozzin ja Rousseauin vaatimuksia opettavan asian liittämistä mahdollisimman hyvin aiemmin opittuun. Käsitysten selvittäminen vaatii opettajalta paneutumista. Opetuksen tulee olla ennakoivaa, johdonmukaista ja reflektioivaa oppimisen menestyksellisyyden turvaamiseksi.

Roolini tässä tutkimuksessa on aktiivinen ja tarkoitukseni on ymmärtää tutkittavan asian merkitys tutkittavien näkökulmasta: tutkimuksen tavoite on siis ymmärryksen lisääminen, ajattelun ja diskurssin rikastuttaminen. Koska etnografisen tutkimuksen luonne on kokonaisvaltainen ja suomalaisessa kasvatustieteessä vielä melko vähän käytetty, tutkimustehtävänä voi pitää myös tutkimusmenetelmän ja sen raportoinnin kehittelyä.

Tutkimuksessa etsitään vastauksia seuraaviin ongelmiin:

### 1. Mitä matematiikan tunnilla todella tapahtuu?

\* Mitkä ovat oppitunnin vaiheet?

\* Mikä on oppitunnin vaiheiden rakenne?

Millaisia työtapoja käytetään?

Miten havainnollistetaan ja konkretisoidaan?

Mitä ja miten opetusvälineitä käytetään?

Miten opetusta motivoidaan?

Miten opetusta aktivoidaan?

Miten opetusta eriytetään?

Miten opetusta integroidaan?

Millaista arviointia tunnilla on?

2. Miten opettajan ja oppilaan käsitykset matematiikan opetuksesta kohtaavat?

\* Mikä on opittujen asioiden yhteys aiemmin opittuihin asioihin?

\* Mikä on opittujen asioiden merkitys?

\* Mikä on opittujen asioiden pääkohta?

#### *4.2. Tutkimusmenetelmä*

Tutkimus on laadullinen, etnografinen tapaustutkimus. Denzin ja Lincoln (1994) määrittelevät laadullisen tutkimuksen monimetodiseksi tavaksi lähestyä todellisuuden ilmiötä sen omassa ympäristössään. Tutkimusta luonnehtii tutkittavien oman puheen, kirjoituksen ja havaittavan toiminnan analyysi, jolloin pyrkimyksenä on ymmärtää ihmisten antama merkitys asioille. Laadullisen tutkimuksen lähtökohtana onkin todellisen elämän moninainen kuvaaminen. Juuri tästä syystä laadulliselle tutkimukselle on luonteenomaista kerätä aineistoa, joka tekee mahdollisimman monenlaiset tarkastelut mahdollisiksi. Kohdetta pyritään tutkimaan kokonaisvaltaisesti, ja tapahtumien monensuuntaisia suhteita ei voi erottaa toisistaan. Nämä lähtökohdat huomioiden laadulliselle aineistolle on ominaista sen ilmaisullinen rikkaus, monitasoisuus ja kompleksisuus. (Alasuutari 1994, 74-75; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2000, 151-152)

Laadullisessa tutkimuksessa tutkijan rooli on aktiivinen. Mm. Maykut ja Morehouse (1994, 46) korostavat tutkijan keskeistä roolia aineiston hankinnassa ja etenkin aineiston analysointivaiheessa. Laadullinen tutkimus on luonteeltaan kokonaisvaltaista tiedonhankintaa ja tavoitteena on todellisen elämän kuvaaminen. Aineisto kootaan luonnollisissa, todellisissa tilanteissa. Omassa tutkimuksessani aineiston kokoaminen luonnollisessa tilanteessa tulee varsin hyvin esille, sillä seurasin opettajan opetusta normaaleissa luokkahuonetilanteissa. (Bogdan & Biglen 1992, 29-30; Borg & Call 1989, 385-386; Maykut & Morehouse 1994, 45)

Hirsjärvi et al. (2000, 152) toteavat, että laadullisen tutkimuksen tulokset ovat vain ehdollisia selityksiä johonkin aikaan ja paikkaan rajoittuen. Tutkimukseni pyrkimyksenä onkin siis pikemminkin löytää tai paljastaa tosiasioita opettajan opetuksesta kuin todentaa olemassaolevia väittämiä. Lähtökohtanani ei ole siis teorian tai hypoteesin testaaminen.

#### 4.2.1. Tapaustutkimus

Tapaustutkimuksessa mielenkiinto voi kohdistua yksittäiseen ihmiseen, ihmisjoukkoon tai sosiaaliseen tapahtumaan. Tutkimuksessa voidaan tarkastella myös tietyssä ympäristössä tapahtuvaa käytännön toimintaa. Tutkimukseni käsittelee juuri tällaista käytännön toimintaa, eli matematiikan opetustyötä. Syrjälä, Ahonen, Syrjäläinen ja Saari (1994, 11) huomauttavat, että yhtenäistä tapaustutkimuksen määritelmää ei ole mahdollista esittää, sillä sen luonne vaihtelee tiede- ja tutkimuskohtaisesti. Pelkän tapaustutkimuksen käsitteen sijasta Syrjälä et al. (1994) luonnehtivat näitä tutkimuksia esimerkiksi etnografiseksi, evaluaatio- tai toimintatutkimukseksi. Tapaustutkimuksen tavoitteet ja toteutus usein vaihtelevat, mutta yhteistä on monipuolisilla ja monilla eri tavoilla hankittujen tietojen koonti tutkittavasta tapauksesta.

Yin (1994, 13) määrittelee tapaustutkimuksen empiiriseksi tutkimukseksi, joka tutkii jotakin tapahtumaa tai ihmistä tietyssä nykyhetken todellisessa ympäristössä. Aineiston hankinta on avointa ja kokonaisvaltaisen kuvan saamiseksi tutkimuskohteestaan aineistoa kerätään useita metodeja käyttämällä. Tässä tutkimuksessa todellisena tutkimusympäristönä on koululuokka, jossa opettaja ja oppilaat toimivat. Tutkimuksen aineisto on kerätty havainnoimalla, kyselemällä ja videoimalla oppitunteja.

Tapaustutkimuksen kohteen valinta perustuu Syrjälän et al. (1994, 23) mukaan tyypillisyyteen, kriittisyyteen, ainutkertaisuuteen tai paljastavuuteen. Tapauksen valinta perustuu myös yleensä harkintaan, jossa keskeisenä valintaperusteena on mm. se, onko kyseiseen tutkimuskohteeseen pääsy mahdollista. Tässä tutkimuksessa kohteen valinta perustui siihen, että kirjoitukse lähestyttyäni opettaja antoi luvan opetuksensa tutkimiseen. Tapaustutkimuksen joustavuus mahdollistaakin tietojen etsimisen sieltä, mistä niitä



voidaan saada. Tyypillisyyttä tai paljastavuutta ei ajateltu kohdetta valittaessa, mutta jokainen opettaja on työssään varmasti ainutkertainen. Bogdan ja Biklen (1992, 66-67) varoittavat tyypillisen tapauksen valintaa, sillä silloin unohdetaan lukijan oikeus ja mahdollisuus arvioida tutkimuksen arvo ja merkitys sekä yritetään parantaa luotettavuutta muiden tutkijoiden kanssa samanlaisilla tuloksilla.

#### 4.2.2. Etnografinen tutkimus

Sana "etnografia" merkitsee ihmisistä kirjoittamista, ihmisen kuvaamista. Syrjäläisen (1995, 78) mukaan etnografinen tutkimus lähtee tutkittavan ilmiön sisällöstä, tutkittavien omat kokemukset ja oma konteksti pyritään pitämään tutkimuksen selkärankana. Etnografia on määritelty mm. taiteelliseksi ja tieteelliseksi tavaksi kuvata ryhmää tai kulttuuria. Usein etnografia ja antropologia assosioidaan kuuluviksi yhteen ja ymmärretään niiden edellyttävän pitempiaikaista oleskelua yhdessä tutkittavien kanssa. Etnografinen metodologia onkin kehittynyt antropologiasta. Ideana on osoittaa, kuinka sosiaalisia toimintoja jossakin kulttuurissa voidaan ymmärtää ulkopuolelta toisen kulttuurin näkökulmasta katsoen. (Alvesson & Sköldbberg 1994, 109)

Van Maanen (Syrjälä & Numminen 1998, 27) tiivistää etnografisen tutkimuksen pyrkimykseksi löytää ja esittää tapoja, joilla ihmiset tietyissä tilanteissa ymmärtävät, toimivat ja selittävät toimintaansa. Hammersleyn ja Atkinsonin (1995, 1-2) mukaan etnografiselle tutkimukselle on kuvaavaa osallistua ihmisten päivittäiseen elämään tietyn ajan. Tutkija kokoaa aineistonsa mm. osallistuvan observoinnin eli havainnoinnin ja haastattelujen avulla. "Läsnäolo" on avainsana tutkijan roolille. Riippuen tutkijan omasta perehtyneisyydestä asiaan, edellyttää menetelmä pidempää tai lyhyempää aikaa olla läsnä.

Etnografisen tutkimuksen tehtävä on pyrkiä ymmärtämään ihmismielen prosesseja ja tekojen taustalla vaikuttavia merkityksiä tutkimuksessa mukana olevien omasta näkökulmasta. Tutkija pyrkii asettumaan tutkittavansa asemaan. Mitä intensiivisempään ja avoimempaan vuorovaikutukseen tutkija pääsee tutkittavan kanssa, sen luontevampia tulkintoja tutkija voi tehdä. (Syrjälä et al. 1994, 77) Itse olen valmistumassa

luokanopettajaksi joten uskon, että opintojeni ja opettajankokemukseni myötä minulla on mahdollisuus onnistua luontevien tulkintojen teossa. Koko tutkimuksen ajan pyrin viettämään mahdollisimman paljon aikaa tutkittavien oppilaiden ja opettajan seurassa, jotta näinkin lyhyessä ajassa pystyisin saamaan mahdollisimman kattavan kuvan tutkimuskohteestani. Etnografian voidaan sanoa olevan tutkimuksellisesti sekä tutkimuksen prosessia että sen produktia – lopullisten totuuksien sijasta on tulkinta, jossa yhdistyy teoreettinen tietämys, oma ja tutkittavien näkökulmat. (Syrjäläinen 1995, 78)

Tutkimus käynnistyy aluksi väljän suunnitelman varassa, mutta kiinteytyy aikaa myöten. Tutkimustehtäväkin hahmotetaan yhteisön toimintaa jo jonkin aikaa seurattua, jotta se on relevantti toimintaan nähden ja jotta se kasvaisi yhteisön sisältä päin. Syrjäläinen (1995, 82) toteaa kuitenkin, että aloittelevalla tutkijalla edes alustava tutkimustehtävä on välttämätön. Tutkimukseni alkuvaiheessa hahmottelin alustavat tutkimuskysymykset, jotta kenttätyövaiheen suunnittelu ja itse aineiston keräys sujuisi tehokkaasti. Tutkimuskysymysten hahmottaminen auttoi myös teoriakirjallisuuden valintaa ja aiheeseen perehtymistä ennen kenttätyövaihetta.

Etnografisessa tutkimuksen keskeisimmät aineistonkeruumenetelmät ovat haastattelu, osallistuva observointi ja kenttämuistiinpanot. Dokumenttiaineistoa koostuu myös ääni- ja videonauhoitteista, tutkijan omista muistiinpanoista, talteen otetuista työnäytteistä yms., joista sitten analysoidaan varsinainen tutkimusaineisto. Itselläni tutkimusaineisto koostui juuri osallistuvan observoinnin aikana tekemistäni havainnoista, videoinneista sekä kyselylomakkeiden vastauksista. Observoinnin ja koko tutkimusprosessin myötä tutkijan uteliaisuuden tulisi kasvaa, tutkimuksen tulisi elää ja uusia näkökulmia tulisi ilmaantua. Dokumenttiaineistoa kertyy pitkän ajan kuluessa, ja tutkijan arkisto kasvaa, ellei sen kertymistä pidetä silmällä samalla kun tutkimustehtävä tarkentuu ja dokumenttien tarve täsmentyy. Tutkimuksessani aika oli rajattu melko kahdeksi viikoksi, joten tutkijan arkisto ei paisunut mahdottoman suureksi. (Syrjäläinen 1995, 84)

Opettajan näkemysten, toiminnan ja koko luokkahuoneyhteisön konkreettinen kokeminen tarjoaa varsin tarpeellista kokemuksellista ja persoonallista tietoa, joka on konkreettista ja spesifiä ja peräisin tietystä koulusta, koulusysteemistä ja yhteiskunnasta. Tällainen tieto on ikkuna opettajan arkielämään. Opettajankoulutuksen näkökulmasta se

auttaa ymmärtämään opettajan ammattia. Tämä on yksi niistä tärkeimmistä syistä, mikä ohjasi minut tämän tutkimuksen pariin ja sellaisiin metodologisiin valintoihin mitä olen tehnyt. Uskon tutkimukseni avaavan ennen kaikkea minulle ikkunan opettajan arkielämään ja antavan tärkeitä näkökulmia matematiikan opetukseeni. (Syrjälä, Estola, Mäkelä & Kangas 1996, 137)

### *4.3. Aineiston kuvaus*

Tässä tutkimuksessa pääasialliset tiedonhankintamenetelmät olivat osallistuva havainnointi ja tutkimuksen kohteena oleville opettajalle ja oppilaille tehdyt kyselyt. Havainnoinnilla oli tarkoitus saada vastaus ensimmäiseen tutkimuskysymykseen ja kyselyillä valottaa toista tutkimuskysymystä. Osallistuvassa havainnoinnissa tutkijan osallistumisaste määräytyy aineistonkeruutarpeen mukaan. Kuten kouluetnografoissa yleensä (Syrjälä et al. 1994, 84), niin myös tässä tutkimuksessa tutkija oli luokkahuoneessa tarkkailijan roolissa. Aineistonkeruun apuna käytin havainnointirunkoa, kenttämuistiinpanoja ja videointia, jotta voisin myöhemmin analyysivaiheessa palata aitoihin kenttätilanteisiin.

Aineiston hankintaa edelsi esitutkimus, jossa testasin ja kehitin kysely- ja havainnointirunkoa. Esitutkimus suoritettiin Jyväskylässä Normaalikoulussa, jolloin havainnoin matematiikan oppituntia ja suoritin oppitunnin päätteeksi opettajalle ja oppilaille kyselyn. Esitutkimuksessa tarkkailun kohteena oli lähinnä se, miten kyselyn muotoilu mm. sanavalintojen ja sisällön suhteen oli onnistunut. Tämän esitutkimusvaiheen jälkeen viimeistelin kyselylomaketta (liite 2) mahdollisimman oppilasläheiseksi ja hioin opetuksen havainnointirunkoa varsinaista tutkimusta varten. Oppilaille ja opettajalle esitettiin sisällöllisesti samat kysymykset, vaikka muotoilin ne eri tavoin (esim. 2. Kysymys oppilaalle / opettajalle: Mihin arvelet tarvitsevasi... / Mihin ajattelet oppilaiden tarvitsevan...).

Tutkimuksen tutkimusjoukko koostuu 25:stä neljännellä luokalla olevasta oppilaasta sekä heidän miespuolisesta luokanopettajastaan. Luokalla on 11 poikaa ja 14 tyttöä. Koulu sijaitsee Hämeessä ja on pilottikouluna mukana valtakunnallisessa

opetushallituksen LUMA-hankkeessa. Opettaja on valmistunut luokanopettajaksi vuonna 1972, mutta toiminut useamman vuoden ajan myös muissa työtehtävissä. Nykyisessä työpaikassaan hän on toiminut 7 vuotta. Nyt opettamiensa oppilaiden kanssa opettaja on työskennellyt kolmannelta luokasta lähtien. Oppilaidensa matemaattisia taitoja opettaja luonnehtii tasaisiksi ja keskivertoisiksi – luokalla ei ole ketään matemaattisesti erityisen heikkoa tai toisaalta erityisen lahjakasta. Koulun kehittämishakkeet ja mm. LUMA-hankkeessa mukana olo on opettajan mielestä tuonut koululle lisää opetusvälineitä, mutta itse hän ei ole hankkinut mitään ammatillista lisäkoulutusta.

Tutkimukseni kohteena oleva opettaja kokee matematiikan opetuksen tärkeäksi, koska hänen mukaansa laskutaitoja tarvitsee jokapäiväisessä elämässä. Opetuksessaan hän kokeekin tärkeäksi painottaa sellaisia matemaattisia taitoja, joita tarvitaan päivittäisten asioiden hoitamisessa. Lisäksi hän näkee matematiikan ryhmätyövälineenä, jonka avulla on mahdollista saada koko luokka keskustelemaan yhdessä. Opetuksessaan hän kokee pyrkivänsä välttämään selvyyksiä – 'tehdään näin' –ohjeita. Matematiikan opetuksessa hän näkee vaikeana sen, että matematiikka on niinkin kahtia jakautunut aine: jotkut asiat on opeteltava ulkoa ja toisaalta pitäisi painottaa päättely- ja ajattelutaitojen kehittämistä.

Oppitunneilla oppilaat istuvat luokassa 4-5 hengen ryhmissä. Oppitunneilla, joilla oppilaista on paikalla vain puolet, voidaan istumajärjestystä muuttaa niin, että jokaisella on halutessaan mahdollisuus istua ryhmässä.

Kenttätöväiheen ensimmäisen viikon ajan tutustuin opettajaan ja perehdyin hänen toimintaansa oppitunneilla sekä laajemmin kouluyhteisössä. Tämä viikko oli varattu myös oppilaisiin tutustumiseen, jotta toisella viikolla aineiston hankinnan aikana havainnointi ja läsnäoloni vaikuttaisivat enää mahdollisimman vähän oppilaiden ja opettajan toimintaan. Viikon alussa kerroin oppilaille ja opettajalle itsestäni ja tutkimuksestani. Oppilaiden vanhemmille lähetettiin myös kirje, jossa tiedotettiin tutkimuksen tekemisestä. Kerroin oppilaille myös, että suoritan videointia seuraavan viikon matematiikan tuntien aikana. Tutustumisviikon aikana toin luokkaan jo videokameran vähentämään oppilaiden ihmetystä ja kummastelua seuraavaa viikkoa ajatellen. Tutkimuksen aineisto kerättiin kenttätöväiheen toisella viikolla matematiikan

tuntien aikana. Havainnoitavia oppitunteja oli kaikkiaan neljä, joista yksi ryhmätunti, jolloin luokan oppilaista opetukseen osallistui noin puolet. Kysely suoritettiin kunkin oppitunnin lopuksi. Kenttätyövaiheen lopussa kysyin opettajalta, kuinka tietoisuus tutkimuksesta vaikutti hänen tunneille valmistautumiseen. Opettaja kertoi, että toki häntä hieman alussa jännitti mukana oloni, mutta ensimmäisen tutustumisviikon aikana läsnäoloni oli tullut jo niin tutuksi, että se ei enää juuri vaikuttanut varsinaisen aineistonkeruun aikana.

Havaintojen teon apuna käytin havainnointirunkoa, jossa oli teemat oli muodostettu teoriakirjallisuuden ja esitutkimuksen perusteella (liite 1). Tein merkintöjä sitä mukaa, kuin havainnointirungossa mainittu ilmiö oli havaittavissa matematiikan tuntien aikana. Kaikkiin havainnointirungon teemoihin en luonnollisestikaan saanut merkintää, koska oppitunnit kulki omaansa, ei minun polkuani pitkin. Havainnointia täydensi lyhyt kuvaus oppitunnin kuluessa toteutuneista oppimistilanteista.

Kyselyä varten kävimme opettajan ja oppilaiden kanssa ensimmäisellä viikolla kysymykset läpi, jolloin varmistin kysymysten ymmärrettävyyden. Kyselyyn harjoiteltiin vastaamaan kenttätyövaiheen ensimmäisellä viikolla, jolloin minulla oli vielä mahdollisuus selventää oppilaille esiintyneitä ongelmia.

#### ***4.4. Aineiston analyysi***

Laadullisen aineiston analyysi on monivaiheinen ja pitkäjänteinen ja elävä prosessi – se alkaa jo ensimmäisestä kenttäpäivästä ja päättyy lopullisen raportin kirjoittamiseen.

Aineiston analysoinnin peruseriaatteena on löytää ja kehittää sellaisia käsitteitä, jotka auttavat ymmärtämään, mistä aineistossa on tutkittavassa ilmiössä on kysymys. Ei pyritä ymmärtämään, *miksi* jokin on, vaan *mitä* jokin on. - Joskus saatetaan ajatella, että kyse on jostakin mystisestä asiasta, johon ei voida antaa minkäänlaisia ohjeita. Näin ei kuitenkaan ole. - Ensiksi tulee litteroitu aineisto tietenkin huolellisesti lukea läpi, ei edes vain kerran, vaan useamman kerran, jotta sen sisältö avautuisi kunnolla. Samalla voidaan havaita siinä olevia rakenteita, ajatusmalleja ja käsityksiä. Apuna voidaan käyttää eri

tavoin kehitettyjä ja eri teorioihin liittyviä hahmotteluja. Usein niitä löytää aikaisemmista tutkimustuloksista. (Hammersley & Atkinson 1995,209-214)

Itselläni on monien vuosien vuoden kokemus kouluelämästä, joten ymmärrykseni, olettamukseni ja arvoni koulumaailmasta ja siellä toimimisesta vaikuttavat varmasti siihen mitä ja miten tulkitseen tutkimaani ilmiötä. Tutkimusprosessin aikana uskon myös itse oppivani ja kasvavani opettajana, sillä tutkimustulosten peilaaminen omiin kokemuksiini ja käsityksiini matematiikan opetuksesta vaikuttivat osin tehtävänvalinnassa.

#### *4.5. Tutkimuksen luotettavuuden ja yleistettävyyden arviointia*

Ennen varsinaista aineistokeruuta suoritin esitutkimuksen, jossa harjoittelin opetuksen havainnointia ja testasin kyselylomakkeen ymmärrettävyyttä ja oppilaiden kykyä vastata siihen. Näin pyrin parantamaan tutkimuksen luotettavuutta ja saamaan kyselylomakkeen kysymykset lopulliseen muotoonsa. Robson (1995, 164-165) korostaa esitutkimuksen tekoa tutkimuksen luotettavuuden parantamisessa. Esitutkimus testaa tutkimus- ja aineistonkeruumenetelmiä ja antaa tutkijalle suoraa tietoa menetelmien toimivuudesta. Ei riitä, että tutkimus suunnitellaan ja valmistellaan tarkasti, sillä tutkijan on päästävä ajoissa käsiksi todelliseen tilanteeseen.

Esitutkimuksen toteutin siten, että kysyin Jyväskylän Normaalikoulun harjoittelijalta mahdollisuutta päästä seuramaan hänen oppituntiaan ja suorittamaan kyselyn oppitunnin päätteeksi. Oppituntien havainnoinnin avuksi olin kehittänyt havainnointirungon, jonka käytännöllisyyttä ja mahdollisia puutteita oli esitutkimuksessa tarkoituksena testata. Kyselylomakkeen testaamisen ensisijainen tarkoitus oli kiinnittää huomiota kysymysten muotoiluun, sisällölliset seikat oli jo päätetty. Oppitunnin pitänyt harjoittelija sekä toinen luokanopettajaksi opiskeleva saivat esittää oman mielipiteensä kyselylomakkeesta. Heidän ja oppilaiden vastausten avulla muokkasinkin kyselylomakkeen lopulliseen muotoonsa. Havainnointirunkoon ei tarvinnut tehdä sisällöllisiä muutoksia.

Tulevana opettajana minulla on monien vuosien kokemus koulumaailmasta oppilaana, sekä luokanopettajakoulutuksen ja työkokemuksen myötä jonkin verran kokemusta opettajan työstä. Hammersleyn ja Atkinsonin (1995, 103) mukaan tutun asetelman tutkiminen on yllättävän hankalaa, koska tutkijan on vaikea ottaa noviisin roolia. Tämän vuoksi kouluetnografiset tutkimukset vaativat Syrjälän et al. (1994, 79) mukaan tutkijalta erityistä terävyyttä ja herkkyyttä. Itse tutkijana pyrin myös havainnointijakson aikana tutustumaan aihetta käsittelevään kirjallisuuteen sekä metodin että teoria kannalta poistaakseni näennäistä tuttuutta ja ennakkoluulojani sekä ymmärtääkseni myös opettajan näkemyksiä paremmin.

Borg ja Gall (1989, 475) ovat tutkimuksissaan todenneet, että sekä opettajan että oppilaiden käyttäytyminen muuttuu, kun tutkija astuu luokkaan. Myös Uusikylä (1980) on voimakkaasti tuonut esille sen, kuinka observoinnin häiriövaikutukset ovat yhteydessä tutkimustulosten luotettavuutta arvioitaessa. Tutkimuksissa ei olla pystytty yksimielisesti selvittämään observoinnin haittavaikutuksia. Uusikylä (1980) viittaa Samphin (1976) tutkimukseen, jonka mukaan observoinnin aikana oli havaittavissa tavallista enemmän sellaisia piirteitä, joita he olivat kyselyssä ilmoittaneet sisältyvän ihanneopettajan käyttäytymiseen. Tutkimuksessa ei selvitetty, miten oppilaiden käyttäytyminen muuttui observoinnin aikana. Useat Uusikylän (1980) viittaamat tutkijat (mm. Brandt 1972; Weick 1968; Adams & Biddle 1970) ovat kuitenkin päätyneet siihen, että tutkimusjärjestelyt eivät ratkaisevasti vääristä opetuksesta saatavaa kuvaa. Tarkkailu vaikuttaa yksilöihin tosin tavalla tai toisella, mutta yleensä tutuissa olosuhteissa havainnoituna, he varsin nopeasti unohtavat olevansa tarkkailun kohteina. Itse pyrin vähentämään observoinnin haittavaikutuksia seuraamalla opetusta viikon ajan ennen varsinaista havainnointiviikkoa. Tämän 'tutustumisviikon' aikana seurasin päivittäin opetusta useita tunteja sekä pyrin tutustumaan oppilaisiin ja opettajaan juttelemalla ja kiertelemällä luokassa. Opetus ja oppimistapahtuma on siis mahdollisesti saanut joitakin erilaisia piirteitä tutkimukseni ja läsnäoloni vaikutuksesta, mutta näitä on mahdotonta kuitenkaan täysin hyvinkään valmistautuneena poistaa. Opetus tapahtui koko tutkimuksen ajan omassa tutussa luokahuoneessa, joten siitä ei syntynyt haittavaikutuksia tutkimuksen tuloksia arvioitaessa. Mm. Hirsjärvi et al. (2000, 200) varoittavat tutkijaa myös sitoutumasta emotionaalisesti tutkittavaan ryhmään tai tilanteeseen, jotta tutkimuksen objektiivisuus ei kärsisi.

Havainnointimenetelmän rajoituksena on se, että sen toteuttaminen vie aikaa. Tässä pro gradu - tutkielmassa havainnointijakso oli viikon mittainen, joten tämä tutkimus innostakoon vielä syvempiin ja laajempiin tutkimuksiin. Tutkimuksen aineistonkeruuta edelsi tarkkaa suunnittelua ja syventymistä aiheeseen liittyvään kirjallisuuteen, jotta lyhyen havainnointijakson aikana tutkija pystyisi suuntaamaan tarkkaavaisuutensa olennaisimpaan.

Tässä raportissa vastaavuuden arviointia on pyritty helpottamaan siten, että raportissa esitellään alkuperäistä aineistoa, jonka turvin ulkopuolinen lukija pääsee tutustumaan tutkimuskohteen tapahtumiin ja tutkittavien käsityksiin.

Etnografisessa tutkimuksessa luotettavuutta on pyritty parantamaan triangulaation avulla. Triangulaatio on tutkimusmenetelmien yhteiskäyttöä. Tässä tutkimuksessa triangulaatiota on käytetty hyväksi siten, että havainnoimalla, videoimalla, kyselemällä ja haastatteleamalla tutkimusongelmaa pyritään lähestymään mahdollisimman monipuolisesti ja siten myös luotettavasti.

Hammersleyn ja Atkinsonin (1995, 228) mukaan tutkimuksen luotettavuuden arviointia voidaan pyrkiä parantamaan siten, että tutkimuksen kohteena olevalle henkilölle annetaan mahdollisuus tarkastaa jo kirjoitetut analyysit. Tutkittava joko löytää itsensä tehdyistä tulkinnoista tai hänellä on ainakin mahdollisuus korjata ja täydentää niitä. Tämän tutkimuksen tulkintojen paikkansapitävyys on pyritty varmentamaan tutkittavalla itsellään tulkintojen valmistumisen jälkeisessä keskustelussa.

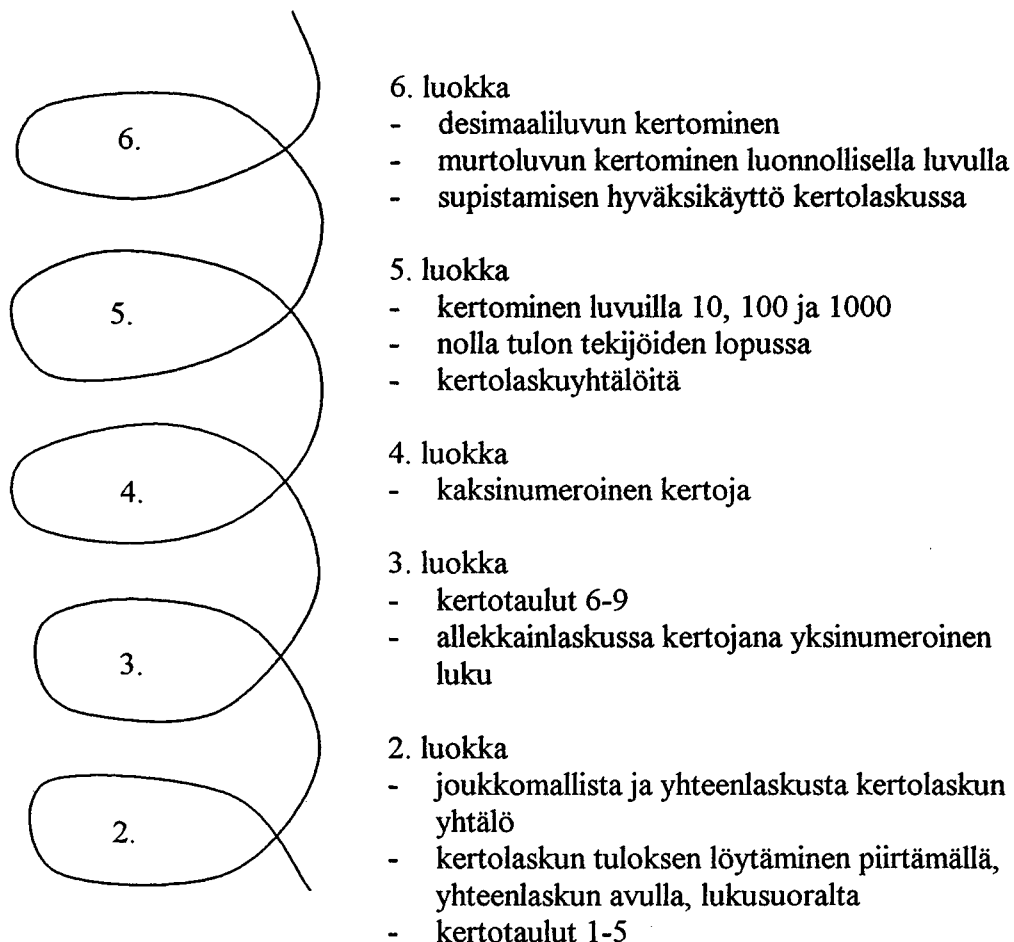
Tutkija viime kädessä päättää aina siitä, mitä kokonaisuuksia ja yksityiskohtia voi jättää pois luotettavuuden kärsimättä. Aineiston karsimisen ja asioiden tulkinnan vastuu jää siis tutkijalle. Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden arviointi jää viime kädessä kuitenkin aina lukijalle.



## 5. Mistä on matematiikan oppitunti tehty?

### 5.1. Aiempien tietojen merkitys

Tutkimukseni aineistonkeruu sijoittui jaksoon, jonka tavoitteena oli oppia kertomaan kaksinumeroisella luvulla allekkain muistinumeron kanssa. Koposen (1992, 40) mukaan tietyn matemaattisen kokonaisuuden oppimiseen käytettävä aika voidaan jakaa jaksoihin, joiden sisältö vaikeutuu siirryttäessä ylemmille luokille. Käsitteitä kehitellään intuitiiviselta tasolta analyyttiselle tasolle edeten, aiheen pintapuolisesta tarkastelusta sen hallintaan. Tällaista saman oppiaineuksen käsittelemistä eri laajuudessa eri ikäasteilla sanotaan spiraaliperiaatteeksi. Kertolasku voidaan myös kuvata spiraalirakenteen avulla (kuvio 5).



**Kuvio 5. Kertolaskun spiraalirakenne (Koponen 1992, 42)**

Konstruktivistisen oppimisenäkemyksen mukaan oppiminen on aktiivinen tapahtuma, jossa oppilas aikaisempien kokemustensa ja itse muodostamiensa käsitysten pohjalta muodostaa tietoa. Tällöin pääongelmana on oppilaiden esiyymmärrysten esille saaminen kulloinkin kohteena olevasta aihepiiristä. Toiminnan ja kommunikoinnin avulla opettaja saa selville oppilaiden esitiedot ja pystyy näin suunnittelemaan opetustaan. Spiraaliperiaatteen avulla opetettavista asioista muodostuu loogisia kokonaisuuksia.

Behavioristinen oppimisenäkemyksen painottaa opetuksessa ennalta laadittuja suunnitelmia ja odottaa oppilailta toivotun kaltaisia reaktioita. Oppiaineen osittaminen toisistaan irrallisiksi asioiksi, oppikirjasidonnaisuus ja ulkoisen aktiivisuuden korostaminen kuvaavat behavioristista oppimista ja opettamista. Spiraaliperiaatteen käyttämisessä saattaa syntyä myös behavioristisia piirteitä, jos opittava aines pilkotaan pieniin osiin eikä uusia asioita koskaan opeteta hyvin – ajatellaan, että niihin kuitenkin vielä palataan. Ymmärrys ja käsiteverkoston muodostuminen jää 'hipaisemalla' syntymättä. Tällöin oppilaasta tulee passiivinen objekti ja oppiminenkin on vain ulkoa opettelemista.

Opettajan näkemys matematiikan luonteesta ja olemuksesta vaikuttaa tapaan, jolla hän opettaa matematiikkaa oppilailleen. Tutkimuksessani pyysin luokanopettajaa pohtimaan mitä matematiikka hänen käsitystensä mukaan on. Vastauksessaan hän ilmoitti matematiikan olevan: *"muistin kehittämistä, päättelyä, ongelmien ratkaisua edeten mallista käytännön ongelmiin, arviointia, jokapäiväisten numeeristen asioiden käsittelyä sekä tilastojen, taulukoiden ja aikataulujen lukutaitoa"*. Seuraamani opettajan opetuksessa esimerkiksi muistin kehittäminen näkyy mielestäni siten, että oppitunneilla oli säännöllisesti erilaisia päässälaskuja, joissa vaadittiin kertotaulujen muistamista. Opettaja muistutti usein oppilaita tarkistamaan pyöristämisen avulla saatuja tuloksia, mikä on mielestäni selvä osoitus juuri arviointitaitojen korostamisesta. Opettajan käsitys matematiikan jokapäiväisyydestä ilmeni siten, että hän kehotti oppilaitaan etsimään ja ajattelemaan harjoitusten ratkaisutapoja helppojen esimerkkien avulla ja sitomaa ne oppilaiden omiin kokemuksiin. Matematiikka näyttää siis hänen käsityksissään varsin käytännönläheiseltä, ja hän pyrkii huomioimaan sellaisia asioita opetuksessaan, mistä olisi hyötyä arkipäivän toiminnoissa. Opettajan matematiikkauskomukset vaikuttavat mielestäni sekä dynaamisilta että staattisilta. Muistitaitojen korostaminen viittaa staattiseen, ei muuttuvaan matematiikkakäsitykseen, jolloin opetuksessa korostuu oikean

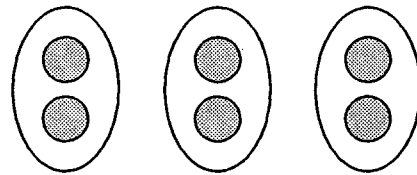
ratkaisutapojen löytyminen ulkoa opeteltujen laskuoperaatioiden avulla. Toisaalta opettaja painotti monissa keskusteluissamme niitä taitoja, joita oppilas tarvitsee *”ihan jokapäiväisessä elämässään”*. Hän haluaisi opetuksensa johtava siihen, että *”oppilaat pystyisivät ajattelemaan, pääättelemään ja arvioimaan matemaattisia ongelmia kriittisesti, avoimesti ja ennakkoluulottomasti”*. Kangasniemen (2000) tutkimustulosten perusteella voisi siis olettaa, että tutkimukseni kohteena oleva opettaja käyttäisi enemmän oppijakeskeisiä työtapoja ja vähemmän opettajajohtoista opetusta. Toisaalta on myös huomioitava Kuparin (1999) tutkimustulokset, joiden mukaan opettajan uskomuksissa esiintyvät oppijakeskeisyyttä suosivat piirteet eivät suoraan johda oppijakeskeisten työmuotojen käyttämiseen. Tämä näkökulma onkin varsin mielenkiintoinen myös omassa tutkimuksessani ja tuloksia pohdittaessa.

Kupari (1999) on edelleen tutkinut myös kokeneiden ja nuorten opettajien matematiikkauskomusten vaikutusta opetustapahtumaan. Itse luokittelisin tutkimukseni kohteena olevan opettajan Kuparin 'kokeneiden' opettajien joukkoon, joten tutkimustulosten perusteella voisi olettaa opetuksessa laskemisen perustaitojen merkityksen korostumista. Esitetyt tutkimukseni kohteena olevan opettajan matematiikkakäsitykset noudattavat edelleen Kuparin tutkimustuloksia, sillä arviointi-, päättely- ja sovellustaidot painottuivat niin kokeneiden kuin nuorempienkin opettajien matematiikkauskomuksissa. Matematiikan opetus perustuu tutkimukseni kohteena olevalla opettajalla hyvin pitkälle oppikirjan rytmitykseen ja harjoituksiin. Hän ilmoitti opettavansa matematiikkaa *”suunnilleen oppikirjan mukaan”*. Kupari (1999) on havainnut, että työmuodot voivat matematiikan opetuksessa olla hyvinkin perinteisiä, oppikirjaa ja laskuharjoituksia korostavia, vaikka opettajan käsitysmaailmassa oppijakeskeisyys painottuisikin. Keskusteluissamme opettaja perusteli oppikirjasitoutumistaan sillä, että *”opettajan oppaan ja oppilaan kirjan runsas materiaali antaa minulle mahdollisuuden valita luokalle sopivimmat toiminnalliset, suulliset tai itsenäiset harjoitukset”*. Harjoitukset hän pyrkii valitsemaan niin, että *”oppitunneilla olisi sopivasti vaihtelua, eikä kaiken aikaa tarvitsisi tehdä oppikirjan tehtäviä. Oppituntien pitäisi olla sillain tietysti monipuolisia, että jokaisten taitoja tulisi monipuolisesti kehitettyä.”* Opettajalla oli käytössään Laskutaito 3 –kirjasarja (Rikala & Uus-Leponiemi & Ilmavirta, 1997) joka kirjantekijöiden mukaan perustuu kognitiivisen oppimisen näkökulman mukaiseen aktiiviseen, ymmärtävään oppimiseen. Myös opettajan

käsitykset matematiikan luonteesta, opettamisesta ja oppimisesta ovat mielestäni tämänsuuntaiset.

### 5.1.1. Kertolasku

Kertotaulujen rakenteen ymmärtäminen ja sujuva ulkoa oppiminen on välttämätöntä, jotta selvittää kertomisesta allekkain. Kertolaskun käsite luonnollisilla luvuilla perustuu toistettuun yhteenlaskuun. Opetuksen alkuvaiheessa kertolaskun käsitettä voidaan havainnollistaa erillisten yhtä monen alkion joukkojen avulla. Esimerkiksi lasku  $3 \cdot 2$  voidaan esittää kuvion 6 osoittamalla tavalla:



**Kuvio 6. Kertolasku  $3 \cdot 2$  alkioden ja joukkojen avulla esitettynä**

Suurin osa oppilaista oppii kertotaulut ulkoa melko helposti, ja osa hallitsee ne kerran opittuaan. Monelle hyvällekin laskijalle tulee kuitenkin vaikeuksia myöhemmin kouluaikana siitä, että he eivät ymmärrä kertolaskun käsitettä. (Ikäheimo 1995, 80) Kertotauluja kannattaa mielestäni harjoitella monipuolisilla toiminnallisilla harjoituksilla sekä päässä laskuharjoituksin. Peleissä ja leikeissä käytetyt konkreettiset välineet ja piirroksot auttavat oppilasta ymmärtämään kertolaskun merkityksen eri asiayhteyksissä. Ikäheimon mukaan parhaat tulokset kertolaskun käsitteen oppimisessa on saatu, kun opetuksessa on esimerkkejä oppilaille tutuista käytännön tilanteista. Käsitteitä sovelletaan siis ymmärtämisen ja motivaation takia.

Tutkimuksessani päässä laskuharjoittelu toteutui joka oppitunti yleensä samalla tavalla opettajajohtoisesti joko oppitunnin alussa tai lopussa. Päässä laskuissa keskityttiin nähdäkseni kertotaulujen vahvistamiseen, jotta jatkossa kertolaskualgoritmin

harjoittelussa ei oppilaalla menisi kohtuuttomasti aikaa kertolaskujen miettimiseen. Näin opettaja ja tietysti myös oppilas voisi opetuksessa keskittyä olennaisimpaan, eli uuden asian opettamiseen ja oppimiseen. Matematiikassa yksi tärkeistä taidoista tutkimukseni kohteena olevan opettajan mielestä on oppia arvioimaan saadun tuloksen oikeellisuutta. Tämän harjoittelu oli nähdäkseni myös yksi päässälaskutehtävien tavoitteista. Esimerkiksi laskussa  $43 \cdot 28$  voidaan tulon tekijät pyöristää aluksi kymmeniksi, eli  $40 \cdot 30$  ja arvioida näin saadun tuloksen tarkkuutta. Näin oppilaat eivät opettajan käsityksen mukaan *"laske vain mekaanisesti allekkain, vaan oppivat myös arvioimaan saamiaan tuloksia"*.

Oppitunnilla opettajan esittäessä oppilaille päässälaskuja paljastui oppilaiden vaikeus ymmärtää luvuilla 10 ja 100 kertomista. Tämä on kuitenkin käsittääkseni edellytys laskujen tuloksien oikeellisuutta arvioitaessa, sillä arvioinnissa luvut pyöristetään juuri esim. kymmeniksi tai sadoiksi, minkä jälkeen kertolaskuoperaatio suoritetaan. Opettaja oli kirjoittanut taululle luvut (kuvio 7):

30	70	90	40
500	600	700	900

**Kuvio 7. Päässälaskutehtävien luvut**

Oppilaiden tehtävänä oli päätellä, mitkä luvut on kerrottava keskenään, jotta tuloksi saadaan 2700, 6300, 18000, 49000 jne. Seuraavasta oppitunnin katkelmasta ilmenee, miten tehtävä suoritettiin - opettaja kysyi tulon tekijöitä ja oppilaat vastasivat hetken mietittyään. Vastausta analysoitiin heti yhdessä koko luokan kanssa.

*OPE: "Mistä kahdesta luvusta tulee tuloksi 2700?... Ville."*

*O1: "70·40"*

*OPE: "Ville, miten sää laskit sen, kerro."*

*O1: "Öö, tollai, oho, ei se ookkaan."*

*OPE: "Osaisitko perustella? ... Olli, mitäs sinä sanot?"*

*O2: "30·900"*

*OPE: "Oletteko samaa mieltä? Olli, miten sää laskit sen?"*

*O2: "Öö, mikä se oli, tulo, ahaa, jaa...kyllä se on... en mä osaa vielä."*

*OPE: "Ahti?"*

*O3: "30·90"*

*OPE: "Miksi?"*

*O3: "Koska 3·9 on 27 ja nollat perään."*

Oppilaiden vastauksista voidaan havaita, että oppilaiden käsitys 10:llä ja 100:lla kertomisesta ei ole jäsentynyt. Opettajalla näyttäisi olevan jokin ajatus tai ratkaisumalli, jonka hän haluaa esittää myös oppilaille. Opettaja ei suoraan hylkää oppilaan väärää vastausta, vaan pyytää oppilasta perustelemaan ja esittelemään ratkaisuperiaatteita. Tällaisia matemaattisia keskusteluja ja ajatuksien kertomista ääneen painotetaan myös uudistuvassa matematiikan opetuksessa. Erilaisia ratkaisutapoja ja menetelmiä ääneen pohdittaessa oppilaillekin välittyy käsitys siitä, että matematiikassa ei ole vain yhtä oikeaa tapaa ratkaista ja ajatella matemaattisia ongelmia. Esitetystä oppitunnilla käydystä keskustelusta voidaan huomata, että oppilaiden on kuitenkin kovin vaikeaa perustella saamiaan tuloksia. Opettaja siirtyy tällaisessa tilanteessa toiseen oppilaaseen, joka jälleen esittää vastauksensa, mutta ei kuitenkaan pysty perustelemaan.

Ikäheimo (1995) on myös todennut, että oppilaiden verbaalinen viestintä matematiikassa on usein varsin puutteellista. Tästä syystä avoimet ongelmatilanteet tai projektityyppiset pienryhmätyöskentelyt olisivatkin suositeltavia työtapoja. Tällaisten menetelmien etu olisi mielestäni siinä, että oppilailla olisi yhdessä mahdollisuus ja aikaa pohtia erilaisia mahdollisuuksia. Pienryhmien etuna on myös se, että niissä oppilailla on mahdollisuus kommunikoida ja siten tuoda myös ääneen esille omia matemaattisia mallejaan ja ajatuksiaan, joita ei ehkä oikean tai väärän vastauksen pelossa uskalla opettajalle tai koko luokalle esittää. Edellä esitetystä viimeisestä oppilaan vastauksesta (O3) sekä seuraavasta samalla oppitunnilla käydystä keskustelusta selviää, miten opettaja on aiemmilla oppitunneilla opettanut kertomaan luvuilla 10 ja 100. Tehtävänanto on sama kuin edellä.

OPE: "No entä 18000? ... Tanja, montako nollaa on 18000:ssa?"

O4: "3 nollaa."

OPE: "No siitä sä voit lähtee Tanja liikkeelle. Valitse kaksi lukua ja niistä tulee tuloksi 18. Ja sitten sinne perään pitää vielä saada kolme nollaa. Joonas?"

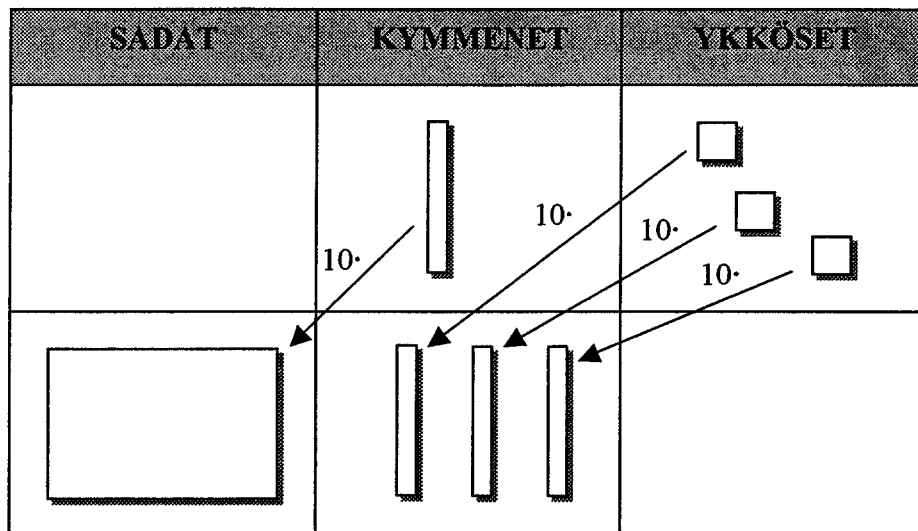
O5: "30·600"

OPE: "Paljonko Tanja on 3·6? Ja montako nollaa tulee perään... kolme... eli 18000"

Oppilaille on opetettu sääntö: "Kun 10:llä kerrotaan, laitetaan nolla loppuun!". Opetettu on täysin mekaaninen suoritus, vaikkakin johtaa oikeaan lopputulokseen suhteellisen nopealla miettimisellä. Tällaisessa opetuksessa on ensin opetettu teoria, jota sitten sovelletaan käytäntöön. Konstruktivistinen, uusi opettamiskäsitys, painottaa kuitenkin ongelmanratkaisu- ja sovellustaitoja, jolloin ulkoa opetellun aineksen sijasta oppilaalla on mahdollisuus ymmärtää matematiikkaa. Oppilaiden vastauksista ja eleistä oli nähtävissä tuskastumista, kun he eivät muistaneet "sitä oikeaa sääntöä tai laskutapaa". Ulkoa oppiminen on tuskallista varsinkin silloin, kun 'sitä oikeaa sääntöä' ei muista! Tällaisia tuskan hetkiä voitaisiin kuitenkin opetuksessa välttää, kun oppilas vasta ymmärryksen jälkeen itse omien havaintojensa avulla huomaa muistisäännöt! Mielestäni tällaisten analogioiden ja muistisääntöjen löytyminen matematiikassa on varsin hauskaa, mutta kovin työlästä jos niiden varaan ja muistamiseen rakentuu koko matemaattinen osaaminen. Myös opettaja ilmoitti oppitunnin jälkeen, että hän kokee vaikeaksi juuri 10:llä ja 100:lla kertomisen opettamisen. "Kun tietäis miten tän asian sais niille sillain helposti opetettua. Oliskohan olemassa jotakin toista tapaa?", opettaja pohti edellistä oppituntia ja havaitsemiaan ongelmia. Selviä puutteita ja siten myös virheitä oppilaiden vastauksissa aiheutuu paitsi muistisäännön unohtumisesta, niin myös kertotaulun osaamattomuudesta: oppilaan vastaus  $70 \cdot 40 = 2700$  viittaa oikeaan vastaukseen, mutta jo kertolaskussa  $7 \cdot 4$  on tapahtunut virhe. Muistisääntö "nolla loppuun" toimii siis varsin hyvin kymmenillä ja sadoilla kerrottaessa, kunhan oppilas osaa kertotaulun ja tuskastumatta imaisee muistisäännön käyttötiedokseen.

Ongelmia muistisäännön opettelusta saattaa tulevaisuudessa muodostua, kun desimaalilukuja kerrotaan esim. kymmenellä. Tällöin oppilas voi saada esim. laskusta

10·1,8 tulokseksi 1,80 muistaessaan säännön ”nolla loppuun”. Eräs ratkaisu myös tutkimuksen opettajaa askarruttaneisiin ongelmiin voisi olla Ikäheimon (1995, 77) esittämä malli lukujen kertomisesta 10:llä ja 100:lla. Asia voidaan oppia ja opettaa muistisäännön sijasta 10-järjestelmän avulla. Kun opetuksessa käytetään apuna 10-järjestelmävälineitä, lukujen kertominen 10:llä ja 100:lla tulee ymmärrettäväksi, ei vain muistisäännön ulkoa opettelemiseksi. Esim. lasku  $10 \cdot 13$  voidaan tehdä ja ajatella seuraavasti (kuvio 8):



**Kuvio 8. Kymmenjärjestelmävälineet apuna kymmenellä kerrottaessa (Ikäheimo 1995, 77)**

Ensiksi rakennetaan luku 13. Se pitää ottaa 10 kertaa. Otetaan ensin esille 10-sauva 10 kertaa. Vaihdetaan nämä sauvat 100-levyksi. Ykköskuutio otetaan myös kymmenen kertaa, ja vaihdetaan saadut kuutiot 10-sauvaksi. Sama tehdään kahdelle muulle 1-kuutiolle. Tulos on 130. Näin voidaan harjoitella, kunnes oppilas itse havaitsee ”nolla loppuun” säännön. 10-järjestelmävälineiden avulla voidaan jatkossa opettaa myös, miten luvuilla 10, 100 ja 1000 jaetaan. Tässä mallissa apuna käytetään 10-järjestelmävälineitä havaintojen tekemiseen, ymmärtämiseen ja asian konkretisoimiseen. Välineiden käyttö voi oppilaille olla tuttua jo 1.luokasta lähtien, joten he hallitsevat niiden käytön luultavasti jo oikein hyvin. Välineiden käyttö vaatii aina myös opettajalta ajattelun palauttamista konkreettiseen vaiheeseen. Käsitteiden konkretisoiminen välineiden avulla, yhdessä miettiminen, asian johdonmukainen eteneminen helpommasta vaikeampaan jne. vaatii opettajan tarkkaa suunnittelua ja johtamista. Se voi olla



vaikeata, mutta se onnistuu, jos tietää, että se on tärkeää kaikkien oppilaiden käsitteenmuodostuksen takia.

Kokeilemisen arvoisena asiana pitäisin, opetus- ja havainnointivälineiden lisääntyvän käytön ohella, myös pienryhmäyöskentelyn kokeilemista 10:llä ja 100:lla kertomisen opettelussa. Edellisten kaltaisten ongelmien (Mistä kahdesta luvusta tulee tuloksi...?) antaminen ryhmille, jossa oppilaat keskustelevat eri ratkaisumahdollisuuksista, voisi olla hyvinkin hedelmällistä matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta. Näin ei myöskään korostuisi ajatus siitä, että matemaattisiin tehtäviin olisi vain saatava vastaus mahdollisimman nopeasti. Havaintojenteon kautta opetuksessa lisääntyisi myös haasteellisuus, kun opettaja ei automaattisesti tarjoile valmiita ratkaisumenetelmiä tai muistisääntöjä. Opettajan huomio siitä, että muistisäännön opettaminen ja opettelu ei johda toivottuun päämäärään, on mielestäni kovin edistyksellistä ja oppilaiden kannalta arvostettava huomio. Opettajana oman työn, ja siten myös omien taitojen kriittinen arvioiminen ei ole helppoa. Opetusmenetelmien kriittinen arvioiminen ja uusien ideoiden etsiminen vanhoja tapoja ja käytänteitä korvaamaan, kuuluu mielestäni hyvän matematiikan opettajan piirteisiin.

### 5.1.2. Allekkain kertominen yksinumeroisella luvulla ilman muistinumeroa

Allekkain kertominen yksinumeroisella luvulla opetetaan yleensä koulussa kolmannella vuosiluokalla. Kertolaskualgoritmi noudattaa yhteen- ja vähennyslaskualgoritmia siinä, että laskeminen aloitetaan ykkösistä ja edetään vasemmalle suurempiin lukuyksiköihin. Kertolaskualgoritmi ilman muistinumeroa on esitetty vaiheissa 1-4. Yhteenlaskusta poikkeavaa on muistinumeron paikka, silloin kun sitä laskussa tarvitaan. Onkin hyvä korostaa muistinumeron paikkaa ja sitä, että muistinumero vedetään heti yli, kun sitä on käytetty.

Vaihe 1. Kerrotaan ykköset.

	1	2	3	2
·				3
				6

Vaihe 2. Kerrotaan kymmenet.

	1	2	3	2
·				3
			9	6

Vaihe 3. Kerrotaan sadat.

	1	2	3	2
.				3
		4	9	6

Vaihe 4. Kerrotaan tuhannet.

	1	2	3	2
.				3
	2	4	9	6

Opetuksessa siirryttäessä allekkain laskussa kaksinumeroiseen kertojaan on mielestäni syytä kerrata ja varmistaa allekkainlasku yksinumeroisella kertojalla. Oppilasryhmän mukaan kertaus voidaan aloittaa ilman muistinumeroa ja edetä edelleen muistinumerollisiin kertolaskuihin. Tutkimuksen ensimmäisen oppitunnin aiheena oli opettajan mukaan allekkain kertominen yksinumeroisella luvulla. Tarkoituksena oli opettajan mukaan *”luoda pohja vaativimmille kertolaskuille sekä kerrata kertolaskuja, allekkain yhteenlaskua ja arviointia”*. Oppitunnin pääkohtana opettaja piti juuri allekkain kertolaskun tekniikan kertaamista ja vahvistamista.

Oppitunnilla oppilaat laskivat sanallisia tehtäviä, joiden ratkaisuihin käytettiin apuna allekkain kertolaskua yksinumeroisella kertojalla. Ongelmakohdat näyttivät liittyvän pikemminkin ratkaisuperiaatteen löytymiseen kuin laskuteknisiin seikkoihin. Suurimmalla osalla oppilasta oli kuitenkin nähdäkseni virheitä, jotka johtuivat kertotaulujen osaamattomuudesta. Laskuissa kerrattiin myös muistinumeron käyttöä. Näistäkin oppilaat selviytyivät mielestäni melko hyvin - muutama oppilas unohti merkitä muistinumeron kokonaan tai muistinumero ja laskuun tuleva numero vaihtoi paikkaansa. Opettajalle jäi oppitunnista varmastikin sellainen käsitys, että oppilaat osaavat allekkain kertomisen yksinumeroisella luvulla.

### ***5.2. Uutta oppimassa: allekkainlaskua kaksinumeroisella kertojalla ilman muistinumeroa***

Allekkain kertolaskun suoritus tapa moninumeroisella kertojalla perustuu yhteen- ja kertolaskun osittelulain hyväksikäyttöön. Osittelulakia voidaan havainnollistaa seuraavien vaiheiden 1-4 avulla. Moninumeroisella kertojalla kerrottaessa tulee korostaa suoritusjärjestystä: ensin kerrotaan ykkösillä, sitten kertojan kymmenillä jne. eri lukuyksiköillä kerrottaessa saadut tulot kirjoitetaan omille paikkajärjestelmän

määrämille riveilleen. Kun havaitaan, että rivin oikeaan laitaan tulee aina yksi nolla kymmenillä kerrottaessa, kaksi nollaa sadoilla kerrottaessa jne., voidaan sopia, että nollat jätetään merkitsemättä. Matematiikassa pyritään aina mahdollisimman lyhyeen merkitsemistapaan.

Vaihe 1. Merkitään luvut allekkain, ykköset ykkösten kohdalle, kymmenet kymmenten kohdalle ja sadat satojen kohdalle.

		2	3	1
.			1	2

Vaihe 2. Kerrotaan tuttuun tapaan ykkösillä.

		2	3	1
.				2
		4	6	2

Vaihe 3. Kerrotaan kymmenillä, mutta nyt on huomattava, että tulo merkitään alkaen kertojan alapuolelta eli kymmenten paikalta.

		2	3	1
.			1	
		4	6	2
	2	3	1	0

Vaihe 4. Lasketaan osatulot yhteen ( $462 + 2310 = 2772$ ).

		2	3	1
.			1	2
		4	6	2
+	2	3	1	0
	2	7	7	2

Tutkimuksessa seuraamallani ensimmäisellä oppitunnilla harjoitettiin soveltavien sanallisten harjoitusten avulla allekkain kertolaskujen hallintaa. Tehtävissä oli allekkain kertolaskuja yksinumeroisella kertojalla sekä muistinumerolla että ilman muistinumeroa. Lisäksi tarvittiin allekkain yhteenlaskutaitoja. Seuraavan seuraamani oppitunnin

tavoitteena oli opettajan mukaan ”oppia kertomaan allekkain kaksinumeroisella luvulla”. Opettaja kirjoitti taululle opettajan oppaassa olleen laskuesimerkin (kuvio 9):

$12 \cdot 25 =$ $  \begin{array}{r}  25 \\  \cdot 12 \\  \hline  \end{array}  $
---

**Kuvio 9. Opettajan laskuesimerkki**

Lukujen 12 ja 25 nimitykset kertoja ja kerrottava, sekä nimitys tulon tekijät palautettiin mieleen – opettaja kysyi oppilailta ”Mikä nimi voidaan antaa tälle luvulle?” Taululle merkittyä allekkainlaskua ryhdyttiin laskemaan siten, että opettaja kyseli oppilailta ”Mitä tehdään?” Vastauksen saatuaan opettajan tarkoituksena oli täydentää taululla olevaa laskua.

Keskustelu ja allekkainlaskun laskeminen ei onnistunut, sillä oppilaat eivät - viime oppitunnin harjoittelusta huolimatta, osanneet kertoa opettajalle, miten kerrotaan ykkösillä. Oppilaat eivät tieneet, mitä tehdä tai mistä aloittaa. Opettaja peitti kädellään kymmeniä osoittavan luvun 1 osoittaakseen, että lasku on vanha tuttu. Allekkainlaskussa laskutoimitus 2·5 ja merkitsemistapa, jossa 0 merkitään ykkösten kohdalle ja 1 muistiin ei onnistunut. Opettaja pyyhki laskun taululta, ja muutti sen allekkainlaskuksi 2·25. Lasku oli siis sama kuin edellä, mutta nyt siis kymmenet puuttuivat. Lasku saatiin hätäisesti laskettua niin, että pari luokan etevintä oppilasta kertoi laskettavat luvut ja merkitsemistavat. Opettaja vaikutti hämmentyneeltä, sillä edellisellä oppitunnilla allekkainlasku yksinumeroisella kertojalla ilman muistinumeroa ja muutamassa laskussa myös muistinumerolla oli onnistunut. Opettaja kirjoitti laskun ratkaisun taululle.

Seuraavaksi opettaja esitti esimerkkilaskun, jossa ei ollut oppilaita sekoittavaa muistinumeroa. Oppitunnin alussa taululla näkynyt kaksinumeroinen kertoja (12·25) oli saanut oppilaat selvästikin hämilleen ja empimään laskutaitojaan. Taululle kirjoitettiin lasku (kuvio 10) ja opettaja kysyi oppilailta:

$12 \cdot 23 =$	
	23
	<u>·12</u>

**Kuvio 10. Laskuesimerkki ilman muistinumeroa**

*OPE: "Mitä nyt tehdään? Mika?"*

*OP1: "2·3 on 6"*

*OPE: "Ja sitten?"*

*OP2: "2·2 on 4"*

*OPE: "Miten jatketaan? Osaatko sanoa Joonas? ... Et? No mietitään.*

*Laskuhan on 12·23. Niin eikö tämä ole ihan sama asia kuin 10·23 ja plus 2·23, vai? Eiks o?"*

Opettaja esittää oppilaille allekkainlaskun viereen osittelulakiin perustuen laskettavan laskulausekkeen (kuvio 11). Laskua jatketaan vieretysten taululla laskemalla ensiksi osittelulakiin perustuva lasku ja sitten palataan allekkainlaskuun. Allekkainlaskun vaiheissa opettaja palaa osittelulakiin perustuvan laskun vaiheisiin ja havainnollistaa sekä perustelee näin oppilaille allekkainlaskun vaiheita. Kerrottaessa allekkainlaskussa kymmenellä 1·3 opettaja kysyy oppilailta mihin tulokseksi saatu luku 3 merkitään. Eräs etevimmistä vastaa jälleen, että *"tulos on 3 ja se merkitään nelosen alle, koska siinä kerrottiin kymmenellä"*.

$12 \cdot 23 =$		$12 \cdot 23 =$
	23	
	<u>·12</u>	$10 \cdot 23 + 2 \cdot 23$

**Kuvio 11. Osittelulakiin perustuva esimerkki**

Kun lasku saadaan lasketuksi allekkain loppuun, monet oppilaista ovat rauhattomia ja ilmoittavat osaamattomuudestaan opettajalle. Opettaja kertoo taululla olevan allekkainlaskun laskuvaiheet läpi ja esittää lopuksi pari uutta esimerkkiä. Työskentelytapa on jälleen sama, eli oppilaat kertovat opettajalle laskun ratkaisuun johtavat vaiheet ja opettaja täydentää ne taululle. Oppitunti päättyy esimerkkilaskuihin.

Seuraavalla oppitunnilla opettaja olettaa ilmeisesti kaikkien jo osaavan kertoa kaksinumeroisella kertojalla. Kertauksen vuoksi opettaja näyttää vielä taululla allekkain esimerkkilaskun, jossa on kaksinumeroinen kertoja. Tämän jälkeen oppitunnilla aloitetaan itsenäisen työskentelyn vaihe. Allekkainlaskun harjoittelua kaksinumeroisella kertojalla jatketaan oppikirjan tehtävien avulla. Suurin osa oppilaista ilmoittaa, ettei osaa laskea laskuja ja luokassa syntyy rauhattomuutta; *"en osaa"*, *"miten se nyt meni"*, *"näähän on vaikeita"*, *"ei näitä voi tajuta"*. Opettaja näyttää taululla vielä oppikirjan ensimmäisen tehtävän ratkaisun, minkä jälkeen itsenäistä työskentelyä yritetään jatkaa.

Oppitunnin aikana muutamat oppilaat hoksaavat allekkainlaskun suoritusidean. Idean löytäminen innostaa oppilaita neuvomaan myös vierustoveria ja hiljalleen luokasta alkaa jo kuulumaan iloisia *"ahaa"*- tai *"jes, mä osasin"* -hihkaisuja. Eräs oppilas kommentoi innostuneena onnistumisestaan opettajalle: *"On vähän äreitä laskuja, kun näissä saa laskea niin paljon."* Osalla oppilaista, joille tämä mekaaninen, monia vaiheita sisältävä allekkainlasku tuottaa eniten vaikeuksia, unohtuu jo allekkain yhteenlaskunkin periaate tai yhteenlaskuvaiheessa muistinumero puuttuu. Laskuissa tapahtuu edelleen paljon virheitä, jotka johtuvat nähdäkseni kertotaulujen osaamattomuudesta. Matematiikan hierarkkinen rakenne on selvästi nähtävissä: uuden oppiminen perustuu edellisen asian, tässä tapauksessa kertotaulujen hallintaan. Laskuissa oppilailta myös tyhjä ruutu (ks. 6.2.2. vaihe 3) on unohtunut oikealta kymmenillä kerrottaessa tai ensin on kerrottu kertojan kymmenillä, vasta sitten kertojan ykkösillä. Opettaja kiertää jatkuvasti luokassa ja neuvoo apua tarvitsevia oppilaita. Kun opettaja ei ehdi neuvomaan jokaista apua tarvitsevaa, syntyy hälinää ja muutama oppilaista näyttää turhautuvan koko laskutouhuun.

Virheiden ennaltaehkäisemiseksi ja korjaamiseksi sekä oppituntien elävöittämiseksi opettaja voisi mielestäni ehkä käyttää sellaisia tehtäviä, joissa oppilaat saavat itse miettiä

ja selostaa, mikä laskuissa on väärin ja korjata virheet. Näin oppilaille tulisi enemmän vastuuta oppimisestaan ja yksittäisen oppilaan aktiivisuus lisääntyisi. Vaarana tällaisissa tehtävissä saattaa toki olla se, että oppilaille jää mieleen virheellinen suoritus etenkin siinä tapauksessa, että oppilas ei jaksa seurata koko aikaa tarkkaavaisesti. Kyselemällä toteutetun opetuksen etuna näyttäisi olevan se, että opettaja todellakin pystyy kiinnittämään oppilaiden huomion allekkainlaskun tärkeisiin vaiheisiin ja saa jatkuvasti oppilaiden vastauksista palautetta opetuksen perillemenosta. Ongelmana näyttäisi kuitenkin olevan se suuri osa luokasta, joka on passiivinen. Passiivisuus voi olla merkki monesta, mutta pääteltävissä on myös osaamattomuus vastata opettajan kysymyksiin. Passiivisena oppilaan helppo jäädä sivuun opetuksesta ja etenkin oppimisesta – voi olla tekemättä mitään, kun ei osaa!

Allekkainlaskujen yhtenä tavoitteena voidaan mielestäni pitää sitä, että oppilaat ohjataan tarkistamaan allekkainlaskut. Alkuperäiset luvut pyöristetään ja lasku lasketaan päässä pyöristetyillä luvuilla. Näin saadun tuloksen suuruusluokkaa verrataan allekkainlaskun tulokseen. Seuraamillani oppitunneilla opettaja kyllä kehotti oppilaita arvioimaan saatua vastausta pyöristämällä, mutta ymmärtääkseni oppilaat eivät joko malttaneet tai osanneet tarkastaa saamiaan tuloksia pyöristämällä. Allekkainlaskussa tärkeä tavoite voisi olla myös oppia merkitsemään laskettavat luvut allekkain, sillä käytännön elämässä allekkainlaskua tarvittaessa luvut eivät ole yleensä koskaan valmiiksi allekkain asetettuina – oppikirjan tehtävissä näin usein on. Tästä syystä allekkainlaskuja tulisikin mielestäni harjoitella runsaasti myös vihkoon. Oppitunnilla yleensä vain nopeimmat ehtivät tähän vaiheeseen, sillä vihkotehtävät ovat usein vasta viimeisiä aukeaman tehtävistä. Seuraamallani oppitunnilla 2-3 oppilasta ehti aloittamaan vihkotehtäviä. Laskemisen ei tulisi olla vain pelkkää mekaanista laskujen suorittamista. Kuten todettu, allekkainlasku on käyttökelpoinen tapa laskea laskuja myös käytännön elämässä, joten oppilaan tulisi oppia käyttämään allekkainlaskua myös sovellustehtävien ratkaisemiseksi. Itse tehdyt laskut ja esimerkit käytännön elämästä sekä laskujen ratkaiseminen nopeasti allekkain laskun avulla saa oppilaat huomaamaan, miten tärkeä ja käytännöllinen asia on kyseessä. Tämä on myös oppimista motivoiva tekijä.

### 5.3. Oppituntien solmukohtia

#### 5.3.1. Ohjeidenanto

Opettajan yksi tehtävä mielestäni oppitunnilla on 'avata' tehtävät oppilaille: ennen työskentelyyn ryhtymistä kannattaa selvittää mitä tehtävässä tulee tehdä, mitä lyhenteitä, merkitsemistapoja tai termejä tehtävässä esiintyy. Tehtävän 'avaamisella' opettaja pystyy varmistamaan sen, että suurin osa oppilaista osaa aloittaa itsenäisen työskentelyn vaiheen. Tässä vaiheessa tarkoituksena ei kuitenkaan saa mielestäni olla täsmälleen tehtävätyyppisten esimerkkien esittely, minkä jälkeen oppilaat mekaanisesti laskevat esimerkkityyppisiä laskuja. Usein sekin jo auttaa oppilaita tehtävien aloittamisessa, kun opettaja lukee oppikirjassa olevan tehtävänannon tärkeitä kohtia painottaen. Erityisesti merkitsemistavat, jotka saattavat olla oppilaille epäselviä tai outoja tulee selvittää. Seuraamalla oppitunnilla opettaja kävi yhteisesti luokan kanssa oppikirjassa olevat merkinnät läpi seuraavasti:

OPE: *"...Mitä tarkoittaa siellä vasemmassa yläreunassa. Siellä lukee hoidamme lapsia 38 markkaa ja sitten on tommonen kauttaviiva ilta. Mitä se tarkoittaa? ...tee lauseke, muista laadut..."*

Opettaja antaa luokassaan myös ohjeita siitä, miten seuraavan tehtävän aikana voidaan työskennellä. Tehtävätyypistä riippuen oppilaalle voidaan antaa mahdollisuus valita työskentelytapansa:

OPE: *"Voitte keskustella ryhmässä keskenänne tai vastata itsenäisesti."*

Tilanteissa, joissa oppilas ei opettajan tai oppikirjan ohjeista huolimatta ymmärrä tehtävässä ratkaisuperiaatetta, auttaa usein jokin arkielämän esimerkki. Tutkimuksessa muutamat oppilaat eivät ymmärtäneet matematiikan tunnilla oppikirjassa olleita sanallisia tehtäviä. Tehtävässä tuli kirjoittaa lauseke ja laskea, kuinka paljon lapset hankkivat rahaa lippukunnalle. Tehtävänannossa kerrottiin, että lapset tarjosivat apua lastenhoidossa, koirien ulkoiluttamisessa, siivouksessa ja auton pesussa. Hinnat oli



ilmoitettu esim. lasten hoito 38mk/ilta ja koirien ulkoiluttaminen 13mk/kerta. Oppikirjan tehtävässä luki: Lotta hoitaa lapsia 3 iltana ja ulkoilutti koira 6 kertaa. Tehtävän ensimmäisen osan oppilaat selvittivät ongelmitta, mutta koiran ulkoiluttaminen kuudesti viikossa tuotti vaikeuksia. Oppilaat näyttivät mieltäväksi tehtävää ensiksi omassa ryhmässään, mutta turvautuivat pian opettajan apuun. Opettajan johdatus tehtävän ratkaisuun löytyi arkielämän esimerkin kautta. Oppilas, joka esitti ongelman opettajalle, oli innokas jalkapalloilija. Opettaja johdatti oppilaita tehtävän ratkaisuun seuraavan esimerkin avulla:

*OPE: "...jos sulle maksetaan kymppi joka kerta, kun sää meet harjoituksiin. Harjoituksiahan sulla on 6 kertaa viikossa. Paljonko sää saat viikossa?"*

Oppilaiden ei tarvinnut juuri vastausta miettiä, kun he jo keksivät oikean vastauksen. Opettaja kehotti vielä oppilaita itsekin keksimään vastaavanlaisia omia arkielämän esimerkkejä. Oppilaille tämä on nähdäkseni kuitenkin melko vaikeaa, sillä oppilaat keskittyvät ratkaisemaan vain ja ainoastaan edessään olevaa tehtävää. Toiseksi oppilailla näyttää olevan kiire suoriutua tehtävistä, jolloin ei ole aikaa miettiä tehtävien ratkaisua muiden, omien esimerkkien kautta. Lindgrenin (1995) esittämät oppilaiden käsitykset matematiikasta tukevat mielestäni havaintojani hyvin, sillä tutkimuksessahan oppilaat näkevät matematiikan olevan juuri laskujen suorittamista mahdollisimman lyhyessä ajassa mahdollisimman paljon.

### 5.3.2. Salapoliisitehtäviä

Opettajan tehtävänä konstruktivistiseen oppimisenäkemykseen perustuen on suunnitella ja rakentaa oppitunnit siten, että opetettavat asiat rakentuvat hierarkkisesti edellisten tietojen pohjalle. Suunnittelun tueksi opettajan tulee saada tietoa myös siitä, mitä oppilaat ovat oppineet, sillä opetettu ei aina ole sitä mitä oppilaat lopulta ovat omaksuneet. Ikäheimo (1995, 83) toteaaakin: "Pitäisi selvittää tarkkaan, mitä oppilas osaa. Sen jälkeen on helpompi miettiä, miten häntä voidaan auttaa."

Seuraamallani viimeisellä oppitunnilla oppitunnin pääkohtana oli opettajan mukaan ”*opeteltujen asioiden testaus*”. Opettaja kertoi oppilaille: ”*Haluan vähän kontrolloida, miten hyvin allekkain kertominen kaksinumeroisella sujuu.*” Testissä oli samantyyppisiä allekkainlaskuja, mitä oli harjoiteltu edellisillä tunneilla. Oppilaiden tehtyä testin, opettaja antoi itsenäisiä lisätehtäviä ja tarkasti testin tuloksen välittömästi. Testi näytti osoittavan, että suurin osa oppilaista osaa laskea allekkain kaksinumeroisella kertojalla. Oppitunnin jälkeen käymässämme keskustelussa opettaja kertoi, että ”*muutamalla oli edelleen kertotaulusta johtuvia virheitä ja huolimattomuuteen viittaavia virheitä, mutta vain kahdella selviä puutteita kertolaskualgoritmin ymmärtämisessä*”. Testin tulosten perusteella opettaja pystyi arvioimaan oppilaiden taitoja, ja tarjoamaan tukiopetusta sitä tarvitseville kahdelle oppilaalle. Testin tuloksista opettaja kertoi oppilaille näin:

*OPE: ”Mulla on vähän asiaa näistä kertolaskuista. Ensimmäinen asia on sellainen, että tässä tuli nyt havainto, josta kaikkien on hyvä ottaa opiksi. Sellainen, että matematiikassa on hyvin harvoin kiire, paitsi joskus kassalla kun joku takana rupee ärhentelemään. Esimerkiksi Tatu, joka toi paperin viimeisenä, ja silti oli kaikki laskut oikein. Jos nyt olis ollu vaikka koe, jolla olis päässy vaikka johonkin Teknilliseen korkeakouluun opiskelemaan, niin mitä merkitystä sillä kiireellä olis. Pääasia, että tulee tehtyä hommat oikein. ... Mutta, tämän testin perusteella pidetään huomenna tukiopetusta kello 8, ja se on matematiikkaa. Ja sinne tulee Tanja ja Mika, niin kerrataan tätä allekkain kertomista...”*

Yllättävää testin tuloksessa oli mielestäni se, miten hyvin oppilaat todellakin olivat sisäistäneet asian. Edellisten oppituntien ja oppilaiden reaktioiden perusteella testin tuloksen olisi odottanut olevan toisenlainen, mitä puoltaa myös opettajan kommentti: ”*Mää olin hiukan yllättyne tästä testituloksesta.*” Testiä edeltäneellä oppitunnilla oli harjoiteltu allekkain laskemista kaksinumeroisella kertojalla ilman muistinumeroa (ks. 6.1.2.). Kotitehtäväksi oppilaat saivat tuolloin tehtäviä oppikirjan kotitehtävä sivuilta, joissa käytettiin myös muistinumeroita, esim. lasku 65·65, vaikka oppitunnilla muistinumeroita ei harjoiteltu. Itse jäin pohtimaan, mikä oli vanhempien osuus oppilaiden oppimistapahtumassa? Kotitehtävät käytiin oppitunnin alussa ennen testiä läpi nopeasti siten, että vain tehtävien tulokset lueteltiin. Näin en pystynyt arvioimaan

kuinka suurella osalla oppilaista tehtävät olivat oikein, mutta testituloksen mukaan arvelisin, että tehtäviä oli tehty ja harjoiteltu kotona yhdessä vanhempien kanssa. Tuskaiset ilmeet olivat vaihtuneet iloisein ja tyytyväisiin ilmeisiin – opetus oli kohdannut oppilaan ja oppilaalla oli aikaa prosessoida tapahtumia myös kotona. Tavalla tai toisella allekkain kertominen kaksinumeroisella kertojalla oli opittu melko hyvin!

#### ***5.4. Oppilaan ja opettajan käsitykset matematiikan oppitunnista***

##### **5.4.1. Yhteys aiemmin opittuihin asioihin**

Osborne ja Freyberg (1985) ovat tutkimuksessaan päätyneet siihen tulokseen, että opettajan ja oppilaan käsitykset oppitunnin pääkohdista, tärkeimmistä opetettavista asioista ja opittavien asioiden sitoutumisesta aiempiin oppitunteihin ei ole täysin yksiselitteinen. Oppilaiden käsitys opittavien asioiden liittymisestä aiempiin oppitunteihin oli varsin erilainen suhteessa opettajan käsityksiin. Oppilaat kokivat oppitunnin erillisenä, muista oppitunneista eroavina tapahtumina ja tietoina. Opettaja puolestaan koki oppitunnin rakentuvan edellisten oppituntien ja siellä käsiteltyjen ja opittujen asioiden varaan.

Omat tutkimustulokseni myötäilevät Osbornen ja Freybergin tuloksia. Oppitunnista riippuen oppilaiden ja opettajan käsitykset opittavien asioiden liittymisestä aiemmin opittuihin asioihin vaihteli jonkin verran. Ensimmäisellä seuraamallani oppitunnilla, minkä aiheena oli sovellustehtävien avulla kerrata allekkainlaskua yksinumeroisella kertojalla, oppilaat liittivät harjoittelemansa asiat oppimaansa kertotauluun ja aiemmin olleeseen allekkainlaskun harjoitteluun. *”Mä opin kertotaulun jo ajat sitten ja onhan sitä kertolaskua ollu vaikka noissa päässä laskuissakin. Ja sit sitä allekkainlaskemista me ollaan tehty jo ennenkin”*, vastasi eräs oppilas kysyessäni miten hänen oppimansa asiat liittyvät aiemmin opittuihin asioihin. Myös opettaja ilmoitti näiden (kertotaulun ja allekkainlaskun) jo opettujen asioiden mielestään liittyvän tähän oppituntiin. Oppilaista neljä muisteli myös, että *”on meillä emekin ollu soveltamista, koska kirjassa on joskus sellasia otsikoita”*. Matematiikan kokeminen laskemisena tuli

myös erään oppilaan vastauksessa esille, sillä hän ilmoitti opettujien asioiden liittyvän edelliseen oppituntiin siten, että *"on meillä ennenkin ollu laskemista"*. Kuitenkin viisi oppilasta koki, että *"en muista, mikä liittyisi tähän tuntiin"*. Selaamalla oppikirjaa voin kuitenkin todeta, että esimerkiksi kertotaulu on tavalla tai toisella esiintynyt oppikirjan tehtävissä viime aikoina useastikin. Opettajan ilmoittamaa arviointia ei yksikään oppilas liittänyt aiempiin oppitunteihin. Useissa keskusteluissamme opettajan kanssa opettaja painotti, kuinka tärkeänä hän pitää juuri arviointitaitojen kehittämistä ja painottamista opetuksessaan. Arviointi ei oppitunnilla tehdyissä oppikirjan tehtävissä ollut kuitenkaan 'pakollinen vaihe', vaikka opettaja tunnin kuluessa ja tehtäviä tehdessä kehottikin oppilaita pohtimaan saatuja vastauksia arvioinnin ja pyöristämisen avulla.

Toisen seuraamani oppitunnin päätteeksi sekä opettaja että 15 oppilasta ilmoittivat kertotaulun liittyvän aiemmin opettuihin / opittuihin asioihin. Opettaja ilmoitti jälleen arvioinnin yhdeksi tutuksi osa-alueeksi, mutta oppilaat eivät tätä kirjanneet. Oppilaista yksi ilmoitti jälleen laskemisen ja kolme vihkotehtävien tekemisen liittyvän aiempiin oppitunteihin. Näyttäisikin siltä, että oppilaille tuttu tekeminen, kuten oppikirjan tehtävien laskeminen ja vihkotyöskentely, ovat oleellinen osa oppitunteja. Opittuja asioita ei ehkä osata eritellä, nimetä tai yhdistää hieman erityyppisissä tilanteissa ja tehtävissä. Tämä ilmiö näkyikin mielestäni niiden kolmen oppilaan vastauksissa, ettei nyt opitut tai tehdyt asiat liity aiemmin opittuihin *"mitenkään, kun ennen ei ollut kaksinumeroista kertojaa"*. Opettajalla puolestaan on vankka käsitys niistä osataidoista, joita tarvitaan allekkain kertomiseen kaksinumeroisella kertojalla – *"aiemmin on opetettu kertotaulun lisäksi yhteenlaskua allekkain ja allekkain kertomista yksinumeroisella kertojalla, niitä taitojahan tässä nyt taas tarvitaan"*.

Viimeisellä seuraamallani oppitunnilla opettaja teetätti oppilailla testin, mikä sisälsi allekkainlaskuja kaksinumeroisella kertojalla. Tavoitteena opettajan mukaan oli saada selville tukiopestusta tarvitsevat oppilaat. Oppilaista valtaosa, eli 18 oppilasta ilmoitti allekkain kertomisen kaksinumeroisella kertojalla liittyvän aiemmin opittuihin asioihin. Yksi oppilaista koki, että *"tämän oppitunnin asiat ei liittynyt mitenkään edellisiin opittuihin asioihin, kun ei tehty kirjan tehtäviä"*.

#### 5.4.2. Opeteltävien asioiden merkitys

Boalerin (1997) tutkimuksesta käy ilmi, että opettajajohtoinen, oppikirjaan tukeutuva, kaikille oppilaille samantapainen perinteinen opetustyyli tuottaa sellaisia matemaattisia taitoja, joista 10-11 -vuotiaiden oppilaiden mielestä ei ole hyötyä koulun ulkopuolella. Puolestaan valinnan mahdollisuuksia ja projekteihin perustuvassa, oppilaiden omia ideoita ja ajattelutapoja painottavassa opetuksessa oppilaat kokevat, että matemaattisista taidoista on hyötyä myös oppitunnin jälkeen 'oikeassa elämässä'.

Tekemieni kyselyiden perusteella matematiikassa taitoja voi oppilaiden mukaan käyttää ja tarvita monissa eri tehtävissä. Pääasiassa käsitykset jakoutuivat liittyen joko koulunkäyntiin tai aikuisuuteen. Aikuisuuteen liittyvissä vastauksissa oppilaat ilmoittivat, että *"Töissä voi tarvita laskutaitoja"*, *"Isona laskujen maksamisessa täytyy osata laskea"*, *"Matikkaa osaamalla oppii selviytymään elämässä"*, *"Matikkamaisterin työssä pitää osata laskea"* ja *"Myyjän tai kauppiaan ammatissa tarvii laskea"*. Noin kolmasosa, 6-7 oppilasta / oppitunti, oppilaista ilmoitti tarvitsevänsä matematiikan oppitunnilla oppimiaan asioita kokeessa. Koulunkäyntiin liittyvissä vastauksissa oppilaat pohtivat seuraavaa oppituntia tai tunnilla harjoiteltavia päässä-laskutehtäviä: *"Seuraavalla tunnilla varmaan vielä puhutaan näistä asioista ja sit päässä-laskuja voi laskea vaikka paperilla allekkain kun ei osaa."* Eräs oppilas hieman pessimistisesti arveli, että *"ehkä näitä vielä koulussa joskus voi tarvita"*. Muutama oppilaista kertoi, että *"kotiläksyjä on vaikee tehdä, jos ei ole tunnilla oppinut asioita"*. Näin siis oppitunnilla opittuja asioita tarvitaan myös kotiläksyjen tekemiseen. Nähdäkseni allekkain laskemisen suurin merkitys ja hyöty on lopulta kuitenkin siinä, että se on käyttökelpoinen väline suurien lukujen laskuoperaatioihin. Neljän seuraamani oppitunnin jälkeen, joista jokaisella oli laskettu allekkain-laskuja, vain kaksi oppilasta oli käsittänyt asian näin: *"Jos on tärkeitä, mutta vaikeita laskuja, niin mähän voin laskea allekkain"* tai *"Nyt voin ratkoa vaikeita laskuja allekkain"*.

Opettajan käsitys opettettujen asioiden tarpeellisuudesta ja käytännöllisyydestä oli mielestäni varsin tehtäväorientoitunut. Opettajan vastaukset, *"Matemaattisten tehtävien ratkaiseminen edellyttää hyvin usein taitoa ratkaista sanallisia sovellustehtäviä"* tai *"Opettamani asiat luovat pohjan vaativimmille kertolaskuille"*, kuulostavat melko

suorituskeskeisiltä. Kuitenkin kysyessäni opettajan käsityksiä matematiikan luonteesta (ks. 6.1.) voisi olettaa toteutustapojen ja opetuksen merkityksellisyyden olevan oppijakeskeisempi. Nyt näkisin, että opetuksen painopiste on tehtävien ratkaisutaidon kehittämisessä. Vaikka allekkainlasku on käytännössä varsin mekaaninen suoritus opettaa ja oppia, niin opetuksessa voisi ehkä pyrkiä enemmän tarjoamaan oppilaille päättely-, havainnointi- ja ongelmanratkaisutaitoja painottavia tehtäviä. Näin opetuksen merkityksellisyys koskisi jo ajattelutoimintojen, ei vain tehtävien ratkaisutaitojen, kehittymistä.

'Sanallisia sovellustehtäviä' tulee oppikirjoissa vastaan sadoittain, mutta entä todellisessa elämässä? Elämäntilanteissa, joissa tarvitaan matemaattisia taitoja, korostuu toki taito soveltaa, mutta myös taito nähdä matematiikassa opittujen taitojen ja tietojen hyödyllisyys. Hyödyllisyyden kokeminen voisi innostaa myös soveltamaan matematiikkaa. Matematiikan kokeminen hyödyllisenä välineenä, hyvänä esimerkkinä juuri allekkain laskemisen hyödyllisyys, olisi siis mielestäni tavoittelemisen arvoinen opetuksen päämäärä.

Kuparin (1999) tutkimuksessa on myös ilmennyt yhteensopimattomuutta uskomusten ja toteutustapojen välillä. Myös Deforges ja Cockburn (1987) ovat päätyneet samankaltaisiin tuloksiin. Kupari huomioi, että vaikka opettajaryhmien uskomuksissa painottuivat selkeästi oppijakeskeisyyttä suosivat piirteet, olivat työmuodot hyvin perinteisiä ja suorituskeskeisiä. Tulkintani valossa myös seuraamassani opetuksessa työmuodot ja opetustavat näyttivät melko perinteisiltä – opettajan esittävää opetusta ja oppilailla tehtävien itsekseen laskeminen. On kuitenkin nähtävä, että seuraamani opetusjakson aihe, allekkain kertolaskualgoritmin opettaminen ja oppiminen, voi helposti johtaa mekaanisten ominaisuuksiensa vuoksi pänttäävään ja harjoitusta painottavaan opetukseen.

#### 5.4.3. Oppitunnin pääkohdat

Osborne ja Freyberg (1985) tekivät tutkimuksessaan mielenkiintoisen havainnon, minkä mukaan opettajan ja oppilaan käsitykset oppitunnin pääkohdista ja yhteydestä

todelliseen maailmaan olivat hyvin ristiriitaiset. Opetuksen suurimpia haasteita onkin mielestäni saada opettajan omat kokemukset ja tietoon perustuvat ajatukset myös oppilaan käyttötiedoksi ja -taidoksi sellaisilla menetelmillä, että oppilas itse oman toimintansa, ajattelunsa ja kokemusmaailmansa kautta ymmärtää opittavat asiat. Tutkimuksessani oppilaiden käsitykset oppitunnin tärkeimmistä asioista liittyi yleisesti laskemiseen. Myös opettaja painotti oppitunnin pääkohtiin liittyvissä vastauksissaan laskuteknisiä seikkoja; *”allekkain kertomisen tekniikan opetteleminen”*, *”yksinumeroisella kertojalla allekkain kertomisen vahvistaminen”* tai *”sanallisten tehtävien ratkaiseminen”*. Oppikirjan sanallisten tehtävien käytännönläheisyyttä ja tärkeyttä hän perusteli seuraavasti: *”On tärkeää oppia tekemään lausekkeita ja ratkaisemaan lähes jokapäiväiseen elämään liittyviä pulmia.”* Kuitenkin oppilaiden reaktioista (ks. 6.3.1) oppitunnilla tehtäviä laskettaessa voidaan päätellä, että tehtävien käytännönläheisyys ja jokapäiväisyys ei tavoittanut oppilaita. Vasta opettajan antama oppilasta itseään koskeva esimerkki antoi mallin ja ratkaisutavan oppikirjan tehtävän ratkaisemiseksi. Tehtävien sitominen oppilaan omaan elämään ja kokemusmaailmaan siis auttaa ja motivoi oppilasta, mutta suurelle osalle opettajista tällaisen lisämateriaalin ja oppituntien suunnitteleminen osaksi tai kokonaan oppikirjattomaksi tuntuu hankalalta ja vie liian paljon aikaa (Esim. Neuvo-Hakala & Räsänen, 1999).

Oppilaat kokivat tärkeimmäksi asiaksi lähes poikkeuksetta, oppitunnista riippumatta, myös laskemiseen liittyvät seikat; *”tärkeintä oli allekkain laskut, koska ei ollut muuta”*. Oppilaiden perustelut allekkain laskemisen tärkeimmyyteen eivät muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta liittyneet käytännön seikkoihin. Vain kaksi oppilasta oli sitä mieltä, että *”allekkain laskeminen on tärkein asia, koska opittiin laskemaan suurilla luvuilla”* tai *”nyt osaan laskea vaikeita ja monimutkaisia laskuja paljon helpommin, eikä tarte yrittää sillain vaikeesti päässä”*. Matematiikan näkeminen jäykkänä, oikeita vastauksia painottavana oppiaineena tuli myös muutaman oppilaan vastauksessa esille; *”tärkeintä oli kuunnella ja vastata opettajan kysymyksiin”*, *”tärkeintä oli kokeen harjoittelu, koska koe on tulossa”* ja *”tärkeintä oli kertaus, koska asiat jää päähän”*. Opettajan valitsemat tehtävätyypit, työmuodot ja opetuksen painotukset muokkaavat vahvasti myös oppilaan käsitystä matematiikasta ja sen luonteesta. Tehtävistä tuloksien saaminen ja niistä kertominen painottuu mielestäni juuri opettajajohtoisessa työskentelyssä, jossa usein opettaja kysyy ja oppilaat vastaavat.

## 6. Tarkastelu

Tutkielma käsittelee matematiikan opettamista - sitä mitä matematiikan tunnilla todella tapahtuu. Tarkoituksena on ollut tutkia miten luokanopettaja käytännössä toteuttaa matematiikan opetuksen ja miten oppilaiden ja opettajan käsitykset opetustapahtumasta kohtaavat. Matematiikan opiskelu ja opettaminen peruskoulussa on perusteltua, sillä se tarjoaa välineitä johdonmukaisen ja täsmällisen ajattelun edistämiseen, avaruuden hahmottamiseen sekä monien käytännön ja tieteellisten ongelmien ratkaisemiseen. Matematiikan opiskelu antaa mahdollisuuden kehittää keksimiskykyä ja luovaa ajattelua. Lisäksi matematiikka tarjoaa keinon välittää informaatiota täsmällisesti, koska se käyttää abstraktista symbolikieltä. Nykyisessä maailmassa ihminen kohtaa matematiikan lähes kaikkialla jossakin muodossa ja joutuu sen kanssa tekemisiin miltei päivittäin. Matematiikan merkitys tulisi ilmetä sen käyttökelpoisuutena ratkaista arkielämän ongelmia.

Peruskoulussa opiskeltava matematiikka on nähtävä laajempaan kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Sillä on ennen kaikkea tärkeä merkitys oppilaan henkiseen kasvuprosessiin. Oppilaan ajattelu ja yleinen maailmankuva laajenee sekä johdonmukaisuus lisääntyy. Matemaattisten ongelmien ratkaisukyky ei ole mikään yksittäinen kyky, vaan se näyttää käsittävän suuren joukon tiedollisia ja taidollisia komponentteja. Matematiikka on luonteeltaan hierarkkista sisällöllisesti ja myös ongelmanratkaisu voidaan nähdä hierarkkisen kokonaisuutena – tehtävän ratkaisun suunnittelu, käsitteiden ja strategioiden sekä tekniikoiden ymmärtäminen, strategiset valinnat, tekninen suoritus sekä operaatiot joissa tarvitaan esim. päässälaskutaitoja. Teknisen osaamisen ja sujuvien mentaalisten laskuoperaatioiden rinnalla taitava ratkaisija tietää ja ymmärtää 'mitä' ja 'miten' -ratkaisun päässään. Tutkimuksessa seuraamassani luokassa harjoiteltiin teknisen tason taitoja, allekkain kertolaskun algoritmia. Samalla käsitteellisellä ja strategisella tasolla pyrittiin ymmärtämään ja vertaamaan vaihtoehtoisia ratkaisutapoja esim. allekkain yhteenlaskun ja allekkain kertolaskun välinen yhteys. Harjoitteluvaiheessa korostui laskutekniikoiden toteutuksen yksityiskohdat ja aritmeettiset operaatiot. Työskentelymuodoissa suosittiin



opettajajohtoista, kyselevää opetusta ja itsenäisen työvaiheen aikana tehtiin oppikirjan tehtäviä. Opetuksessa edettiin aukeama tunnissa –periaatteen mukaan.

Peruskoulun matematiikan opetuksen tavoitteena pidetään, että kaikille oppilaille tarjotaan mahdollisuudet hankkia peruskoulun aikana sellaiset matemaattiset perustiedot ja -taidot, jotka luovat pohjaa jatko-opinnoille ja jotka antavat valmiuksia selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä. Peruskoulun matematiikan opetuksen tavoitteena on ennen muuta kehittää oppilaan kykyä luokitella, jäsentää ja mallintaa ympäröivässä maailmassa eteen tulevia tilanteita aiemmin oppimillaan käsitteillä. Tämän rinnalla tavoitteena on harjaannuttaa oppilaita johdonmukaiseen ja täsmälliseen ajatteluun sekä asioiden esittämiseen yhtä hyvin suullisesti kuin kirjallisestikin. Oppilaiden tulee myös saada kuva matematiikan merkityksestä ennen ja nyt sekä sen osuudesta kulttuurimme kehittämisessä.

Peruskoulun matematiikan tulee opetussuunnitelmien mukaisesti olla sisällöllisesti avoin uusille tiedoille, keksinnöille, tärkeiksi nousseille asiaryhmille ja ajankohtaisille sovelluksille. Vaikka oppisisältöjen valinnassa ja järjestämisessä tulee ottaa huomioon matematiikan syntyhistoria, perinteisiä oppisisältöjä tulee tarkastella kriittisesti. On voitava jättää pois sellaista tietoa, joka ei ole matematiikan rakenteen ymmärtämisen ja tietojen soveltamisen kannalta välttämätöntä. Toisaalta tavoitteiden mukaan on voitava muodostaa aikaisempia laajempia opintokokonaisuuksia, jolloin oppilaille tarjoutuu paremmat mahdollisuudet matemaattisten käsitteiden ja tietorakenteiden ymmärtävään oppimiseen. Samalla mekaanisen laskennan osuutta pitäisi voida vähentää kaikilla luokilla. Tutkimukseni kohdistuessa vain yhteen opettajaan ja hänen toimintatapoihinsa ei tutkimuksen tuloksia voi yleistää koko opettajakuntaan. Kattavampi tutkimus opettajien oppikirjasidonnaisuudesta olisi kuitenkin mielenkiintoinen, sillä näyttäisi siltä, että opettaja noudattaa käyttämänsä oppikirjan sisältöä melko orjallisestikin. Oppikirjoissa ja opettajanoppaissa ei ole välttämättä riittävästi tietoa karsimismahdollisuuksista, ja oppitunnit noudattanevat usein aukeama ja tunti –periaatetta. Oppilaiden erilaisuus, suuret oppilasmäärät, pienet tuntimäärät ja opetuksen konkretisoiminen vie usein niin paljon aikaa, että oppikirjojen sisällöstä on pakkokin karsia osa pois. Käytännöllisyys, konkreettisuus ja luovuus mahdollisesti lisääntyisi, kun oppikirjojen sitovuudesta päästäisiin irti.

Matematiikan opiskelussa oppilas nähdään uusimpien oppimiskäsitysten mukaan aktiivisena tiedon hankkijana, käsittelijänä ja tallentajana, jolle oppiminen on opittavien asioiden liittämistä hänen aiempiin tietoihinsa sekä hänen aikaisempien ajatustensa ja toimintamalliensa uudelleenrakentamista ja täydentämistä. Näin tähdätään siihen, että pitkäjänteisen työskentelyn tuloksena tiedot ja taidot vähitellen jäsentyvät ja tarkentuvat oppilaalle käyttökelpoiseksi rakennelmaksi.

Oppimistilanteet tulisi rakentaa keskustelunomaisiksi, kokeileviksi ja ongelma-keskeiseksi pitäen lähtökohtana mahdollisimman usein oppilaille tuttua konkreettista arkielämän tilannetta. Tutkimuksen valossa on syytä olettaa, että matematiikan tunneilla suositaan opetuskeskusteluja, joissa oppilaalle annetaan mahdollisuus selvittää omaa ajatteluaan ja hahmottamistaan – oppitunneilla kysytään ”miksi?” ja oppilaita pyydetään perustelemaan vastauksiaan. Oppitunneilla tekemieni havaintojen perusteella on todettava, että ainakin neljäsluokkalaisella on vaikeuksia selittävässä ja analysoivissa matemaattisissa keskusteluissa. Myös Ikäheimo (1995) on päätenyt tämänsuuntaisiin päätelmiin. Vaikka oppilaiden puhuminen matematiikan oppitunnilla onkin melko vähäistä, ollaan opetuksessa ja sen kehittämisessä oikeilla jäljillä, kun oppilaalle annetaan mahdollisuus matemaattiseen kommunikointiin. Nyt vain olisi kehitettävä lisää sellaisia tilanteita, jotka innostaisivat ja rohkaisisivat oppilaita puhumaan matemaattisista ajatuksistaan, malleistaan ja käsityksistään.

Opettajanoppaiden monipuoliset harjoitukset, pelit ja leikit mahdollistavat opetuksen elävöittämisen ja monipuolistavat työtapoja. Lindgren (1990) on erilaisten toimintamateriaalien käytön avulla saanut lupaavia tutkimustuloksia käsitteiden sisäistämisestä ja hallinnasta. Erilaiset harjoitukset, pelit ja leikit on valittava kuitenkin huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti. Tutkimuksessaan Lindgrenillä oli toimintamateriaalina mukana myös 10-järjestelmävälineitä, joita voisi mahdollisesti kokeilla myös 10:llä ja 100:lla kerrottavien opetukseen. Lindgrenin kokemusten mukaan 10-järjestelmäateriaalin käyttö on erittäin opettavaa, mutta heikommat oppilaat tarvitsevat ohjausta ja runsaasti aikaa voidakseen sisäistää materiaalin tarjoaman hyödyn. Välineiden ollessa oppilaalle tuttuja jo ensimmäisestä luokasta saakka, ei heikommillakaan ole varmasti niin paljon ongelmia. Lindgrenin tutkimuksessa mukana

olleet lapset olivat toisluokkalaisia ja hänen mukaansa 10-järjestelmämateriaalia ehdittiin tutkimuksessa käyttää aivan liian vähän aikaa.

Opettajan valitessa erilaisia tehtävätyyppejä opettajanoppaat ovat oivallinen lähde valinnoille, mutta mahdollisesti myös rajoittavia. Oppikirjasidonnaisuuden ohella olisi ehkä myös selvitettävä miten erilaiset materiaalit, kuten opettajanoppaat vaikuttavat opetustodellisuuteen. Näyttäisikö eri materiaalien käytöllä olevan vaikutusta oppilaiden oppimiseen ja ajatteluun? Alusta alkaen matematiikan opiskelussa tulisi kuitenkin tähdätä vankkaan käsitteiden ymmärtämiseen. Tämä tapahtuu erityisesti konkreetin toiminnan kautta askartelua ja leikinomaisuutta korostaen. Lukujen numeeriset merkinnät sekä niiden peruslaskutoimitukset otetaan vähitellen käyttöön ongelmatilanteiden tutkimisen, oppilaiden sanallisten tulkintojen ja mittaamisen kautta. Voisiko siis olla mahdollista, että allekkain kertolaskujen aivan opetuksen alussa oppilaalle tai oppilasryhmälle annetaan selvittää ”mitä tässä on tehty”. Erilaisilla kehyskertomuksilla, saduilla ja mielikuvituksen avulla Ikäheimo (1995) neuvoo opettajia innostamaan ja elävöittämään opetusta. ”Mitä tässä on tehty” –tyyppiset tehtävänannot voidaan esittää vaikkapa niin, että oppilaille annetaan salapoliisin rooli selvittää esim. allekkain kertomisen algoritmin vaiheet. Opettajan rooli, innostuneisuus ja kekseliäisyys voivat yllättävästikin auttaa oppilaita ymmärtämään muuten vaikeiltakin tuntuvia matemaattisia ongelmia.

Työskentelymuotojen valinnassa opettajan tulee käyttää tervettä harkintaa, sillä esimerkiksi kirjallisuudesta on vaikea löytää mitään yksiselitteisiä ohjeita. Voidaankin ajatella, että valinta riippuu siitä, minkä tapaista oppimista halutaan, minkä tapaisista ongelmista on kysymys, millaisia ovat oppilaat ja heidän valmiutensa tai paljonko aikaa on käytettävissä. Tässä korostuu opettajan pedagoginen ja didaktinen tuntemus sekä kasvatukselliset arvot, joiden pohjalta koko opetustapahtuma rakentuu. Myös opettajan ’tuntuma’ tietyissä opetustilanteissa, esim. kokemus ja taidot vaikuttavat kulloisenkin työskentelymuodon valintaan jo oppimisprosessien onnistumiseen. Kirjallisuudessa esitetään usein edellisten kaltaisia kuvauksia siitä, kuinka opettaja pedagogisesti, kokemuksellisesti ja tilannekohtaisesti suunnittelee ja toteuttaa opetustapahtumia. Neuvo-Hakala ja Räsänen (1999) jakaa tutkimuksensa mukaan luokanopettajat selvästi kahteen eri ryhmään. ’Suorittavan selviytyjän’ toimintaa matematiikan tunnilla kuvastaa

mekaaninen oppikirjaan tukeutuva opetus. Matematiikan opettaminen koetaan helppona ja vaivattomana, koska opetusta ei tarvitse pahemmin suunnitella. 'Tavoitteellisella toimijalla' puolestaan on laaja ja monipuolinen lähestymistapa matematiikkaa ja sen opetusta kohtaan. Kirjallisuus antaakin mielestäni liiankin kullatun ja kattavan kuvan siitä, miten matematiikkaa tulisi opettaa. Nyt tulisi keskittyä siihen, miten opettajat saataisi innostua innostumaan ja käyttämään sitä pedagogista ja kokemuksellista tietoaan, jota heillä on. Ei riitä, että tiedetään mitkä ja millaiset metodit saavat aikaan toivotun kaltaisia oppimistuloksia, jos opettaja ei käytännön tasolla tiedä mitä kuitenkaan tehdä. Tutkimukseni perusteella näyttäisi, että opettaja haluaa toki kehittyä pedagogina ja huomioida oppilaan tarpeet ja kyvyt, mutta ei yksinkertaisesti tiedä miten! Opettajien asenteisiin ja käsityksiin opetettavasta aineesta ei ehkä kannata keskittyä, sillä mm. Kupari (1999) on todennut, että oppijakeskeisyys matematiikkakäsityksissä ei suoraan johda oppijakeskeisten työmuotojen käyttämiseen. Mielestäni olisikin saatava konkreetteja, kokemukseen perustuvia onnistuneita menetelmiä, jotta opetuksen käytänteet muuttuisivat.

Perinteistä matematiikan opetusta on kritisoitu merkitsemistapojen, laskuoperaatioiden, algoritmien ja sääntöjen liiallisesta painottamisesta. Ymmärtämisen katsotaan jäävän silloin pinnalliseksi ja puutteelliseksi. Tutkimukseni aineistonkeruuvaihe ajoittui juuri ajankohtaan, jolloin opetuksen aiheena oli allekkain kertolasku. Tavoitteena oli sovellustehtävien avulla kerrata aiemmin opittua allekkain kertomista yksinumeroisella kertojalla. Uutena asiana jakson tavoitteena oli oppia kertolasku allekkain kaksinumeroisella kertojalla. Oppikirjan sovellustehtävillä pyrittiin lähestymään jokapäiväisiä elämäntilanteita, ja oppilailla oli tehtävien välityksellä mahdollisuus havaita allekkain kertomisen käyttökelpoisuus. Ongelmanratkaisun tasolla oppilailla näkyi puutteita, sillä laskuteknisten ratkaisujen suhteuttaminen käsillä olevaan matemaattiseen ongelmaan oli hankalaa. Käytetyt luvut, menettelytavat tai strategiset vaihtoehdot saattoivat olla pinnallisia tai väärin ymmärrettyjä. Oppilaat näyttävät kiiruhtavan toteuttamaan laskutoimituksia, ennen kuin ovat ymmärtäneet ratkaistavana olevaa ongelmaa tai lukeneet sitä huolellisesti. Näin Lindgrenin (1995) esittämät Frankin (1988) tutkimustulokset oppilaiden matematiikkakäsityksistä on löydettävissä myös omasta aineistostani. Oppilaiden näyttäisi olevan vaikeaa soveltaa tai muuttaa tehtävää sellaiseksi, että omasta kokemusmaailmasta voisi löytää tehtävään ratkaisumallin.

Ongelmatilanteissa opettajan tehtävänä usein onkin esittää oppilaalle esimerkki tämän omasta elämästään, jonka turvin oppilas ymmärtää oppikirjan tehtävän ratkaisuperiaatteen. Näin myös oppilastuntemus opetustilanteissa korostuu. Ongelmanratkaisu on matemaattis-loogisten vaatimusten ohella opetuksen keskeisimpiä periaatteita. Ongelmanratkaisuprosessien merkitys korostuu ennen kaikkea tietojen hankkimisessa, mutta myös näköjään niiden soveltamisessa. Osuvien kysymysten asettaminen, ongelman hahmottaminen, tehtävän rajaaminen, sopivien ratkaisumenetelmien löytäminen ja läpivieminen sekä tulosten arviointi ja muotoilu ovat opiskelutilanteissa keskeisiä.

Opetuksessa ei näyttäisi riittävän oppimis- ja opetustraditio, jossa toistaa samankaltainen tuntiohjelma ja oppikirjanmukainen yksinään laskeminen. Tutkimukset ovat osoittaneet, että matematiikan mieluisuus vähenee siirryttäessä ylemmille luokka-asteille. Tutkimustulosteni valossa yhdyin Kuparin (1997) näkemykseen siitä, että matematiikka oppiaineena koetaan tärkeäksi ja merkitykselliseksi esim. myöhemmin työelämässä. Tärkeänä pitäminen ei kuitenkaan riitä ylläpitämään sen opiskelun mielisuutta tai estää sen vaikeutumista. Matematiikan mekaanisuus, kuten esim. allekkainlasku kaksinumeroisella kertojalla, ei tue oppilaan kasvua tai oppimismotivaatiota. Se, että oppilaat tutkimusten mukaan pitävät matematiikkaa yhä vaikeampana mitä ylemmällä luokalla he peruskoulussa ovat, voi johtua kiinnostavuudesta tai motivoituneisuudesta. Opetuksen tulisikin olla merkityksellistä ja mielekästä. Silloin, kun oppilas kokee hyötyvänsä opiskelusta, kasvaa motivaatio ja oppimistulokset paranevat. Esimerkiksi oppilaan havaitessa, että suuria lukuja on helpompi laskea allekkain kuin päässä laskuna, kasvaa motivaatio myös algoritmin ymmärtämiseksi. Myös Keranto (1981) on kiinnittänyt huomiota motivaation merkitykseen ja syntyyn oppimistapahtumassa. Hänen mukaansa oppilas motivoituu matematiikan opiskeluun mikäli se on haasteellista, kiinnostavaa, hän kokee sen tarpeelliseksi ja tärkeäksi sekä oppilaan emotionaaliset ja sosiaaliset tarpeet on tyydytetty ja suunnattu oikein. Opetusta seurattessani oppilaat selvästikin innostuivat laskemisesta, kun asiat kiinnostivat ja olivat omakohtaisia (ks. 6.3.1.). Myös haasteellisuus, että muisti algoritmin vaiheet, oli selvästikin motivoivaa (ks. 6.2.2.). Toisaalta se, että tehtävät olivat vaikeustasoltaan aluksi liiankin haasteellisia, laski motivaatiota ja synnytti hälinää (ks. 6.2.2.).

Kaikenikäisten ja -tasoisten oppilaiden tulisi saada rakennella ja tehdä käsillään malleja kyetäkseen luomaan oikeita mielikuvia ja muodostamaan käsitteitä. Tämä edistää myös loogisen päättelytaidon kehittymistä. Matemaattisen ajattelun kehittymistä tuetaan usein parhaiten silloin, kun ei liian nopeasti kiirehdiä abstraktiin symboliesitykseen. Mm. kertolaskun käsitteen ymmärtämättä jääminen voi aiheuttaa hyvillikin lakijoille hankaluuksia myöhemmin kouluaikana (Ikäheimo 1995). Konkreettisella tasolla toteutetulla opetuksella voidaan luoda oppilaille mahdollisuudet ymmärtää matematiikan osaamisen merkitys ja saada luottamusta omiin kykyihinsä rakentaa, oppia ja käyttää sekä matematiikkaa mielekkäissä ja järkevissä tilanteissa. Konkreettisuus on opetusta ja didaktiikkaa käsittelevän kirjallisuuden yksi muotianoista. Konkreettisuutta korostamalla voidaan eittämättä päästä parempiin oppimistuloksiin, mutta miten innokaskaan luokanopettaja ehtii, kykenee tai taitaa rakentaa opetuksestaan mahdollisimman konkreetista. Tämänkin tutkimuksen perusteella voidaan olettaa, että opettajat kyllä pyrkivät konkreettisuuteen, mutta vanhojen hyväksikin koettujen työtapojen ohella kaivataan uusia käytännönläheisiä ja innostavia keinoja.

Matematiikka herättää ihmisissä, sekä aikuisissa että lapsissa, usein vahvoja tunteita. Opiskelukokemukset odotukset sekä opiskelutilanteiden ulkoiset puitteet ja toteutus usein määräävät tunnekokemusten suunnan. Opiskeluun motivoituminen vaatii edullisten oppimismahdollisuuksien tarjoamista ja positiivisen, sisäisen oppimishalun virittämistä. Tähän voidaan myötävaikuttaa valitsemalla esimerkit oppilaiden elämän piiristä sekä työskentelemällä käytännöllisesti ja toiminnallisesti. Näin voidaan lisätä matematiikan opiskelussa kiehtovuutta, jännittävyttä ja yllätyksellisyyttä ja nautittavuutta. Toisaalta tämä vaatii oppilailta oma-aloitteisuutta, yhteistyökykyä ja omaperäisyyttä ja se saattaa myös olla vaivalloista ja edellyttää sitkeyttä.

Menetelmien valinnoilla olisi pyrittävä tukemaan oppilaiden monipuolisten strategioiden kehittymistä sekä käsitteiden parempaa ymmärtämistä ja omaksumista. Olisi pyrittävä järjestämään oppilaille myös tilanteita, jotka hän kokee itse ongelmina. Hyvin valituilla menetelmillä luodaan pohja oppimismotivaatiolle. Yksittäisen opettajan matematiikan opettaminen kuvastaa mitä ilmeisimmin hänen historiaansa ja kokemuksiaan matematiikan parista. Lindgren (1997) kirjoittaa Fossin ja Kleinsasserin (1996) tutkimuksesta, jonka mukaan opettajakokelaiden käsitykset matematiikasta pysyvät

vakiona 16 viikon matematiikan metodikurssista huolimatta. Myös omassa tutkimuksessani ja tulosten yleistettävyyttä pohdittaessa on oltava varovainen, sillä tutkimani luokanopettajan työhön heijastuu hänen omakohtaiset kokemukset ja näkemykset elämästä, opettamisesta ja oppimisesta sekä matematiikasta. Aineopintoihin liittyvä oivallus sekä perinteisesti avoimemmat lähestymistavat voivat tuottaa myös hyviä tuloksia matematiikan opetuksessa, mutta arvatenkin ne vaihtelevat opettajakunnassa suuresti. Tutkimukseni tulokset ovat siis vain yksi kuvaus eräästä opettajasta ja hänen matematiikan opetuksestaan. Opetuksen kehittämistyössä, jota tälläkin hetkellä maassamme opetushallituksen taholta tehdään, on tärkeää lähteä liikkeelle koulusta ja aidoista opetustapahtumista. Näin saadaan todellisuuteen pohjautuva kuva siitä, mitä ollaan kehittämässä ja voidaan löytää todellisia ja konkreetteja kehittämispainopisteitä.

### *Lopuksi*

Etnografinen tapaustutkimus luokanopettajasta antaa mahdollisuuden muodostaa yhden kuvan siitä, miten luokanopettaja opettaa matematiikkaa. Tavoitteena oli hahmottaa yhden opettajan toimintaa matematiikan parissa viitekehyksessä, joka nousee hänen puheestaan ja toiminnastaan. Raportoinnin tavoitteena on pidetty aineiston ja kirjallisuuden välistä dialogia. Kirjallisuus on pyritty sitomaan opettajan puheen ja tätä tukevien havaintojen yhteyteen, mitä kautta on päästy kokonaiskuvaukseen ja löydetty yksi tapa löytää teorian ja käytännön yhteys sekä toisaalta yhdistää käytäntöä ja teoriaa tutkimuksen raportoinnissa.

Tutkimusraportissa on huomattava, että luokanopettajan toimintatapojen muotoutuneen omien kokemusten ja työssä kehittymisen kautta, jota tässä tutkimuksessa ei ole paljoakaan tutkittu. Myös opettajan kontekstisidonnaisuus oppilaan, ryhmän ja koulun tasolla on huomioitava. Näin matematiikan opetuksen yleisen kuvan luominen, varsinkaan yhden opettajan näkökulmasta ei ole mahdollista. Menetelmään ja siten myös aineiston rajaamiseen vaikutti se, että tein tutkimusta yksin. Jos tutkimusta ja sen yleistettävyyttä haluttaisiin laajentaa, menetelmä olisi vaatinut lukuisia haastatteluja,

pitempiä ja useamman opettajan havainnointijaksoja, mikä ei tämän tutkimuksen puitteissa ollut mahdollista.

Edelliset rajoitteet olisi pystynyt ainakin osin välttämään sillä, että minulla olisi ollut työpari. Työmäärä olisi jakautunut kahdelle ja myös erilaisia näkökulmia olisi todennäköisesti tullut esiin tutkimusmetodin ja tutkittavan suhteen. Tutkittavalle tällainen jatkuva ja vaihtuva kahden tutkijan havainnointi olisi ollut ehkä raskasta tai vaikea toteuttaa. Yksin tutkimusta tekemällä sain kuitenkin syventyä kaikkiin tutkimuksen teon vaiheisiin ja koko aineistoon. Työskentelyä olen myös voinut rytmittää omien aikataulujeni mukaan.

Tutkimuksen tekemisellä on ollut vaikutusta kasvuuni ja oppimiseeni sekä käsityksiini opettamisesta yleensä, matematiikan opettamisesta ja merkityksestä osana kouluopetusta. Toivottavasti myös lukija voi tarkastella omaa opettamistaan, teoriaa ja käytäntöä, tämän tutkimuksen pohjalta ja löytää aineksia opetuksensa uudelleenrakentamiseen.

Opettajan työn esille nostaminen tulisi nähdä kunnian osoituksena ja mahdollisuutena nostaa sen arvostusta yhteiskunnassa. Kun opettajan työstä puhutaan ammattitaitoa vaativana työnä, voidaan väriä käsityksiä ja yleistyksiä kumota. Opettajuuteen kasvamisessa osana opettajan koulutusta toisen opettajan työhön perehtyminen olisi varmastikin hyödyllistä.

On huomattava, että ammattitaitoisen opettajan syntyminen on kehittyvä prosessi, ja etnografisen luonteen mukaisesti tämä opettajan tutkiminen on ollut mukana olemista ja yhdessä kokemista. Omista kokemuksista ja toisen havainnoimisesta paljon jää kertomatta ja kerrottavaa syntyy myös lisää. Tässä on esitetty yksi kuva siitä, miten matematiikkaa opetetaan, mutta kuva elää.



## Lähteet

- Adams, R.S. & Biddle, B.J. 1970. Realities of teaching: Explorations with video tape. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Aebli, H. 1991. Opetuksen perusmuodot. Helsinki: WSOY.
- Ahtee, M. & Kankaanrinta, I-K. & Virtanen, L. 1994. Luonnontieto koulussa. Helsinki: Otava.
- Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Oy Edita Ab.
- Alasuutari, P. 1994. Laadullinen tutkimus. 2. painos. Tampere: Vastapaino.
- Alvesson, M. & Sköldbberg, K. 1994. Tolkning och reflektion vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod. Lund: Studentlitteratur.
- Berry, J. & Sahlberg, P. 1995. Matematiikka elämään. Juva: WSOY.
- Boaler, J. 1997. Experiencing school mathematics. Teaching styles, sex and setting. Buckingham: Open University Press.
- Bogdan, R. & Biklen, S. 1992. Qualitative research for education. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.
- Borg, W.R. & Gall, M.D. 1989. Educational research. An introduction. 5. painos. New York: Longman.
- Brandt, R.M. 1972. Studying behavior in natural settings. New York: Holt, Rinehart & Winston.

- Deforges, C & Cockburn, A-D. 1987. Understanding the mathematics teacher: A study of primary school practice. Basingstoke: Falmer Press.
- Denzin, N. & Lincoln, Y. 1994. Introduction, entering the field of qualitative research. Teoksessa N. Denzin & Y. Lincoln (toim.) Handbook of qualitative research, 1-17. London: Sage Publication.
- Engeström, Y. 1984. Perustietoa opetuksesta. Helsinki: Valtionvarainministeriö.
- Foss, D.H, & Kleinsasser, R.C. 1996. Preservice elementary teachers' view of pedagogical and mathematical content knowledge. Teaching and Teacher education, 12(4), 429-442.
- Frank, M-L. 1988. Problem Solving and Mathematical Beliefs. Arithmetic Teacher 35(5), 32-34.
- Haapasalo, L. 1991. Konstruktivismi matemaattisen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisuja A:43.
- Haapasalo, L. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehitysnäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.
- Haapasalo, L. 1997. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. 2. painos. Vaajakoski: Medusa-Software.
- Hammersley, M. & Atkinson, P. 1995. Ethnography. Principles in practice. 2. painos. London: Routledge.
- Hersch, R. 1986. Some Proposals for Receiving the Philosophy on Mathematics. Teoksessa T. Tymoczko (toim.) New directions in the philosophy of mathematics. Boston, Ma.: Birkhauser, 9-28.

- Hirsjärvi, S. Remes, P. & Sajavaara P. 2000. Tutki ja kirjoita. Vantaa: Tummavuoren kirjapaino Oy.
- Huhtala, S. 2000. Lähihoitajaopiskelijan oma matematiikka. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 219.
- Ikäheimo, H. 1995. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. 2. painos. Helsinki: Oy OPPERI Ab.
- Jarvis, P. 1994. Elinikäinen oppiminen ja kokemus. Teoksessa Kajanto, A. & Tuomisto, J. (toim.) Elinikäinen oppiminen. Aikuiskasvatuksen vuosikirja. Kansanvalistusseura. Aikuiskasvatuksen tutkimusseura. Helsinki: BTJ Kirjastopalvelu Oy, 143-157.
- Joensuun yliopisto. 1997. Kasvatustieteiden tiedekunnan opinto-opas 1997-1999. Joensuu: Yliopistopaino.
- Jyväskylän yliopisto. 1999. Kasvatustieteiden tiedekunnan opinto-opas 1999-2001. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.
- Kaasila, R. 1997. Konstruktivismiin eri muodot matematiikan opetuksessa peruskoulun ala-asteella. Lapin yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja B. Tutkimusraportteja ja selvityksiä, 26.
- Kahanpää, L. & Koskela, P. 1997. Matematiikan opettajakoulutuksen kehittämissuunnista. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 364-370.
- Kangasniemi, E. 1993. Lue, etsi, tutki. Tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Porvoo: WSOY.

- Kangasniemi, E. 2000. Opettajan uskomukset ja opetusmenetelmät sekä oppilaiden oppimistulokset matematiikassa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimusselosteita 11.
- Kari, J. 1991. Kasvatus- ja opetustavoitteet. Teoksessa J. Kari (toim.) Didaktiikka ja opetussuunnittelu. Juva: WSOY, 59-92.
- Keranto, T. 1981. Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen. Acta Universitatis Tamperensis ser. A vol. 125.
- Keranto, T. 1992. Näkemykset matematiikan oppimisesta ja opetuksesta muuttuvat; Muuttuuko kouluopetus? Dimensio 56, 9, 16-22.
- Kinnunen, R & Vauras, M. 1997. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269-282.
- Koponen, R. 1992. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. Jyväskylä: Atena kustannus Oy.
- Koskeniemi, M. & Hälinen, K. 1970. Didaktiikka: lähinnä peruskoulua varten. Helsinki: Otava.
- Kupari, P. 1993. Mistä rohkeus ja kainot koulumatematiikan uudistamiseen. Teoksessa E. Kangasniemi & R. Kontinen (toim.) Lue, etsi, tutki – tutkittua tietoa koulun kehittämiseksi. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Porvoo: WSOY, 114-131.
- Kupari, P. 1997. Mitä matematiikasta opitaan koulussa? Valtakunnallisten arviointitutkimusten tuloksia. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 216-237.

- Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen tutkimuksia 7.
- Lahdes, E. 1997. Peruskoulun uusi didaktiikka. Helsinki: Otava.
- Laurilehto, T.O. 1980. Syklisetjut opetuksessa. Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos. Sarja B;7.
- Lehtinen, E. & Kinnunen, R. & Vauras, M. & Salonen, P. & Olkinuora, E. & Poskiparta, E. 1990. Oppimiskäsitys koulun kehittämisessä. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Leino, J. 1978. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa 2. Matemaattinen ajattelu ja suoritusprosessi. Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 66.
- Leino, J. & Kalla, H. & Paasonen, J. 1978. Matematiikan didaktiikka 2. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Leino, J. 1992. Uutta ajattelua matematiikan opetukseen! Kasvatus 23, 1, 40-46.
- Leiwo, M. & Kuusinen, J. & Nykänen, P. & Pöyhönen, M-R. 1987. Kielellinen vuorovaikutus opetuksessa ja oppimisessa II. Peruskoulun luokkakeskustelun määrällisiä ja laadullisia piirteitä. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 3.
- Lindgren, S. 1986. Toiminnallisuuden ja puheen merkitys peruskoulun 4. Luokan kevätlukukauden matematiikan oppisisältöjen sisäistämisessä. Tampereen yliopiston Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Julkaisu no 17.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla. Acta Universitatis Tamperensis ser. A vol. 307.

- Lindgren, S. 1995. Pre-service Teachers' Beliefs and Conceptions about mathematics and teaching mathematics. Reports from the Department of Teacher education in Tampere University A4/1995.
- Lindgren, S. 1997. Voidaanko matematiikan opiskeluasenteita muuttaa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 301-315.
- Linnanmäki, K. 1997. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 283-300.
- Malaty, G. 1997. Mitä matematiikka on? Teoksessa M. Siniharju (toim.) Esi- ja alkuopetuksen uusia tuulia. Opetushallitus. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy, 53-90.
- Maykut, P. & Morehouse, R. 1994. Beginning qualitative research. A philosophical and practical guide. London: Falmer Press.
- Neuvo-Hakala, M. & Räsänen, K. 1999. Luokanopettaja matematiikan opettajana – Tutkimus matematiikan opetuksen nykytilasta tamperelaisilla ala-asteilla. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Pro gradu –tutkielma.
- Opetushallitus. 1991. Matematiikan opetuksen kehittämisen suunnat. Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän väliraportti 29.5.1991. Helsinki: Opetushallitus.
- Opetushallitus. 1994. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994. Helsinki: Painatuskeskus.
- Osborne, R. & Freyberg, P. 1985. Learning in Science. The implications of children's science. Birkenhead: Heinemann.

- Ojanen, S. 1993. Reflektiivisyys opetuksessa ja ohjauksessa. Teoksessa S. Ojanen (toim.) Tutkiva opettaja. Opetus 21. vuosisadan ammattina. Helsinki: Hakapaino, 125-147.
- Patrikainen, R. 1997. Ihmiskäsitys, tiedonkäsitys ja oppimiskäsitys luokanopettajan pedagogisessa ajattelussa. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja. N:o 36.
- Pehkonen, E. 1990. Matematiikan kouluopetuksen näkymiä. Arkhimedes 1. 36-47.
- Pehkonen, E. 1992. Opettajan uskomukset matematiikasta ja sen opettamisesta. Teoksessa S. Tella (toim.) Joustava ja laaja-alainen opettaja. Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 7.2.1992. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 100, 277-286.
- Pehkonen, L. 1995. Oppilasarviointi muutoksessa. Teoksessa R. Seppälä (toim.) Toimi, laske ja ajattele. Ala-asteen matematiikka. Helsinki: Opetushallitus, 45-49.
- Rauhala, T., Vehmaa, J. & Wuolijoki, H. 1985. Peruskouluopas matematiikka. Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOL ry. Seinäjoki: Offsetpaino Tekari.
- Rauste- von Wright, M. & von Wright, J. 1994. Oppiminen ja koulutus. Juva: WSOY.
- Resnick, L. & Ford, W. 1981. The psychology of mathematics for instruction. New Jersey: LEA.
- Rikala, S. & Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 1997. Laskutaito 3. 4. uud. painos. Porvoo: WSOY.
- Robson, S. & Foster, A. 1995. Qualitative research in action. London: Edward Arnold.
- Samph, T. 1976. Observer effects on teacher verbal classroom behavior. Journal of educational Psychology. Vol. 68, no. 6, 736-741.

- Steinberg, R. & Haymore, J. & Marks, R. 1985. Teachers' Knowledge and Structuring Content in Mathematics. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.
- Suonperä, M. 1995. Kehittyvä oppimiskäsitys koulutuksen laatuajattelun perustana. Teoksessa E. Anttonen & S. Helakorpi & P. Juuti & H. Summa & M. Suonperä (toim.) Laatu koulun. Juva: WSOY, 98-115.
- Syrjälä, L. & Ahonen, S. & Syrjäläinen, E. & Saari, S. 1994. Laadullisen tutkimuksen työtapoja. Helsinki: Kirjayhtymä Oy.
- Syrjälä, L. & Estola, E. & Mäkelä, M. & Kangas, P. 1996. Elämäkerrat opettajien ammatillisen kasvun kuvaajina. Teoksessa S. Ojanen (toim.) Tutkiva opettaja 2. Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus, 137-150.
- Syrjälä, L. & Numminen, M. 1998. Tapaustutkimus kasvatustieteessä. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia 51.
- Syrjäläinen, E. 1995. Etnografinen lähestymistapa opetuksen tutkimuksessa. Teoksessa A. Vaahtokari & A. Vähäpassi (toim.) Tutki, vertaile, arvioi. Näkökulmia opetuksen suunnitteluun ja tutkimukseen. Tampere: Tammer-Paino Oy, 78-93.
- Takala, A. & Nuutinen, P. 1982. Psykologisen tiedon hyväksikäytöstä kasvatuksen ongelmien tarkastelussa. Teoksessa A. Antikainen & P. Nuutinen (toim.) Näkökulmia kasvatuksen ongelmiin ja tutkimukseen. Helsinki: Oy Gaudeamus Ab, 100-114.
- Thom, R. 1973. Modern mathematics: Does It Exist? Teoksessa A.G Howson (toim.) Developments in Mathematical Education. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 194-209.
- Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä Oy.
- Uusikylä, K. 1980. Miten kuvaan opetustapahtumaa. Helsinki: Oy Gaudeamus Ab.



- Weick, K.E. 1968. Systematic observational methods. Teoksessa Lindzey, G. & Aronson, E. (toim.) Handbook of social psychology. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 357-451.
- Yin, R.K. 1994. Case study research: Design and methods. 2. painos. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Yrjönsuuri, R. & Yrjönsuuri, Y. 1994. Opiskelun merkitys. Helsinki: Yliopistopaino.

**Liite 1. Havainnointilomake**

Pvm. \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

Oppitunnin vaiheet		Oppitunnin vaiheiden rakenne					
	Työtavat	Opetusvälineet	Aktiivointi	Motivointi	Integrointi	Eriyttäminen	Arviointi
Pääsälasku							
Korjitehtävien tarkistus							





Pvm. \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

Oppitunnin Oppitunnin vaiheiden rakenne							
Oppitunnin vaiheet	Työtavat	Opetusvälineet	Aktivointi	Motivointi	Integrointi	Eriyttäminen	Arviointi
Muuta							

## Liite 2. Kysymykset oppilaille

Nimi \_\_\_\_\_

Mieti **edellistä matematiikan tuntia**, ja vastaa huolellisesti seuraaviin kysymyksiin. On tärkeää, että pyrit aina perustelemaan vastauksesi!

1. Miten matematiikan tunnilla käsitellyt asiat **liittyvät** aiemmin käsiteltyihin asioihin? Perustele.

2. Mihin arvelet **tarvitsevasi** matematiikan tunnilla oppimiasi asioita? Perustele.

3. Mitkä olivat matematiikan tunnin **tärkeimmät** asiat? Perustele.