Hilbertin avaruudet ja kompaktit operaattorit

Topi Pajala

Matematiikan Pro gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2020

Tiivistelmä

- *Korkeakoulu ja laitos:* Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- *Työn tekijä:* Topi Pajala.
- *Työn nimi:* Hilbertin avaruudet ja kompaktit operaattorit.
- *Työn laatu opinnäytetyönä:* Pro gradu -tutkielma.
- *Sivumäärä ja liitteet:* 61 sivua, ei liitteitä.
- *Tieteenala:* Matematiikka.
- *Valmistumiskuukausi ja -vuosi:* Marraskuu 2020.

Tässä työssä tutkitaan Hilbertin avaruuksia, kompakteja operaattoreita Hilbertin avaruuksissa ja sitä, miten kompaktien operaattoreiden avulla on mahdollista muodostaa kanta Hilbertin avaruudelle. Kompakteilla operaattoreilla tarkoitetaan rajoitettuja lineaarikuvauksia, jotka kuvaavat jokaisen rajoitetun jonon sellaiseksi, että sen kuvajoukosta löytyy osajono, joka suppenee. Tavallisesti äärellisulotteiselle sisätuloavaruudelle saadaan muodostettua kanta Hermiten operaattoreiden avulla, mutta ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden tapauksessa lähes täysin vastaava teoria löytyy kompakteista operaattoreista. Pääasiassa Hilbertin avaruuden kannan löytämiseksi riittää löytää kompakti operaattori avaruudesta, jolloin kannan muodostavat ne avaruuden alkiot, jotka operaattori kuvaa samaksi alkioksi jollain reaaliluvulla kerrottuna.

Tutkielma koostuu neljästä osasta, joista ensimmäisessä tutustutaan Hilbertin avaruuteen ja sen rakenteeseen, toisessa osassa tutkitaan kompakteja operaattoreita yleisessä Hilbertin avaruudessa ja osoitetaan, että yleiselle Hilbertin avaruudelle on mahdollista muodostaa kanta kompaktien operaattoreiden avulla. Kolmannessa osassa määritellään Sobolev-avaruudet ja tarkastellaan niiden yhteyttä Hilbertin avaruuksiin ja neljännessä osassa tutkitaan divergenssimuotoisia yhtälöitä erityisesti sellaisissa avaruuksissa jotka ovat sekä Hilbertin avaruuksia, että Sobolev-avaruuksia.

Tutkielman päätuloksena osoitetaan, että tiettyjen divergenssimuotoisten yhtälöiden ratkaisut ovat kompakteja operaattoreita ja edelleen näiden avulla on mahdollista muodostaa koko avaruudelle kanta. Lopuksi osoitetaan, että tällä edellä mainitulla menetelmällä on mahdollista ratkaista helposti niin sanottu lämpöyhtälö, joka kuvaa keskimääräistä lämmön jakautumista kappaleessa tietyllä ajanhetkellä.

Sisältö

1. Johdanto

Hilbertin avaruudet eli täydelliset sisätuloavaruudet ovat 1900-luvun alulla kehitetty yleistys euklidiselle avaruudelle. Lähtökohtaisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla tutkittiin ääretönulotteisia funktioavaruuksia, jotka tulivat luonnostaan tarpeeseen matematiikan ja fysiikan ongelmissa ja alunperin tähän tarkoitukseen näitä tiedetään tutkineen matemaatikot Frigyes Riesz, Erhard Schmidt ja David Hilbert, jonka mukaan nämä avaruudet ovat nimetty. Hilbert ei kuitenkaan itse nimennyt näitä, vaan tämän nimen näille avaruuksille määritti vasta vuonna 1929 David Hilbertin oppilas John von Neumann teoksessaan rajoitetuista Hermiten operaattoreista [1].

Vaikka Hilbertin avaruudet nykyään käsitetään yleisesti abstrakteina ääretönulotteisina avaruuksina on niillä silti merkittäviä käytännön sovelluksia muun muassa kvanttimekaniikassa, missä systeemin eri tiloja voidaan tarkasti kuvata Hilbertin avaruuden alkioina [2].

Äärellisulotteisissa sisätuloavaruuksissa jokaiselle Hermiten lineaarioperaattorille löytyy ominaisfunktioista muodostuva kanta, mutta ääretönulotteisille avaruuksille tämä on huomattavasti monimutkaisempaa, sillä Hermiten operaattoreilla ei aina edes ole ominaisfunktioita. Tätä vastaava teoria ääretönulotteisille Hilbertin avaruuksille tulee kompakteista operaattoreista, jotka kuvaavat kaikki avaruuden rajoitetut jonot siten, että niille löytyy suppenevat osajonot maaliavaruudesta. Kompakteille operaattoreille samalla periaatteella ominaisfunktiot muodostavat aina ortonormaalin kannan, kun kyseessä on ääretönulotteinen Hilbertin avaruus. Tässä tutkielmassa perehdytään Hilbertin avaruuden rakenteeseen ja siihen, miten kompakteja operaattoreita voidaan hyödyntää näissä avaruuksissa. Tutkielman päätuloksena osoitetaan, että avaruuden $H^1_{per,0}$ kompaktin operaattorin ominaisfunktiot muodostavat kyseiselle avaruudelle kannan. Kannan avulla on mahdollista esittää jokainen avaruuden H^1_{per} funktio ominaisfunktioiden muodostamana sarjana, jota on monissa tapauksissa huomattavasti helpompi käsitellä.

2. Hilbertin avaruudet

Hilbertin avaruudet ovat erityisiä vektoriavaruuksia, jossa on mahdollista määrittää alkion suuruus, sekä kahden alkion välinen kulma ja etäisyys. Lisäksi Hilbertin avaruus on aina täydellinen eli intuitiivisesti sen sisältä tai reunalta "ei puutu pisteitä" ja jokainen Hilbertin avaruuden jono raja-arvoineen pysyy avaruudessa.

Lähdetään seuraavaksi liikkeelle yleisestä vektoriavaruuden määritelmästä ja aletaan muodostaa tälle rakennetta lisäämällä avaruuteen normi ja sisätulo siten, että saadaan selvyyttä Hilbertin avaruuden toiminnasta ja erityisesti tälle hyvin käytännöllisestä Fréchet'n ja Rieszin esityslauseesta.

Määritelmä 2.1. Olkoon $V \neq \emptyset$ joukko, jossa on määritelty laskutoimitus $+$ ja vakiolla kertominen $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda v$. Tällöin sanotaan, että V on reaalinen vektoriavaruus, jos näillä laskutoimituksilla toteutuu ehdot

(1) $u + v = v + u$ kaikilla $u, v \in V$,

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ kaikilla $u, v, w \in V$,

(3) löytyy $0 \in V$, jolle $0 + u = 0$ kaikilla $u \in V$,

(4) kaikille $u \in V$ on $-u \in V$ siten, että $u + (-u) = 0$,

(5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $u, v \in V$,

(6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $u \in V$,

(7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $u \in V$ ja

(8) $1u = u$ kaikilla $u \in V$.

Lisäksi jokaista osajoukkoa $W \subset V$, joka myös toteuttaa vektoriavaruuden ehdot samoilla laskutoimituksilla kutsutaan V:n vektorialiavaruudeksi, jolloin siis myös W on reaalinen vektoriavaruus.

Määritelmä 2.2. Yleinen funktioavaruus vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle W määritellään

$$\mathcal{F}(V, W) := \{f \text{ on funktio } f : V \to W\}.$$

Tapauksessa $V = \mathbb{R}^n$ ja $W = \mathbb{R}$ saadaan kaikkien reaaliarvoisten funktioiden joukko $\mathbb{R}^n$:ltä eli $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jolle voidaan määrittää osajoukkoja

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : f \text{ on jatkuva}\},\\
\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \ \forall\, |\alpha| \leq k\},\\
\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) &:= \cap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Huomautus 2.3. Kaikki edellä määritellyt avaruudet on helppo todeta vektoriavaruuksiksi. Lisäksi on helppo tarkistaa, että $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ on aito aliavaruus avaruudelle $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ja edelleen $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ on aito aliavaruus avaruudelle $\mathcal{C}^l(\mathbb{R}^n)$ aina, kun $1 \leq l < k \leq \infty$.

Määritelmä 2.4. Olkoon V ja W vektoriavaruuksia. Kuvaus $L : V \to W$ on lineaarinen, jos kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $u, v \in V$ pätee:

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

Merkitään lineaarikuvausten joukkoa vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle W

$$\mathrm{Lin}(V, W).$$

Esimerkki 2.5. Matriisi on lineaarikuvaus. Olkoon $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mielivaltainen $m \times n$-matriisi, jolloin kaikille $u, v \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ saadaan

$$L(\lambda u + \mu v) = (\sum_{j=1}^n L_{1,j}(\lambda u + \mu v)_j, ..., \sum_{j=1}^n L_{m,j}(\lambda u + \mu v)_j)$$

$$= \lambda(\sum_{j=1}^n L_{1,j}(u)_j, ..., \sum_{j=1}^n L_{m,j}(u)_j) + \mu(\sum_{j=1}^n L_{1,j}(v)_j, ..., \sum_{j=1}^n L_{m,j}(v)_j)$$

$$= \lambda Lu + \mu Lv$$

Yleisesti vektoriavaruudelle saadaan luotua käyttökelpoista rakennetta määrittämällä sinne normi, jonka avulla jokaiselle vektoriavaruuden alkiolle voidaan määrittää sen suuruus, eli jokainen alkio voidaan normin avulla kuvata tietyin ehdoin reaaliluvuksi. Määritellään seuraavaksi seminormi ja normi.

Määritelmä 2.6. Olkoon V vektoriavaruus.
Kuvaus $||\cdot|| : V \to [0, \infty[$ on normi, jos

(1) $||v|| = 0$, jos ja vain jos $v = 0$,
(2) $||\lambda v|| = |\lambda|\, ||v||$, kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $v \in V$,
(3) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, kaikilla $v, w \in V$.

Kuvaus on *seminormi*, mikäli sille pätevät ehdot (2) ja (3).
Vektoriavaruutta V varustettuna normilla $||\cdot||$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Huom

(I) Ehtoa (3) kutsutaan kolmioepäyhtälöksi.
(II) Reaaliluvuille $\mathbb{R}$ tavallinen itseisarvo toteuttaa normin ehdot.

Määritelmä 2.7. Lineaarikuvaus $L : V \to W$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $M \geq 0$ siten, että

$$||Lv||_W \leq M\, ||v||_V \ \text{ kaikilla } v \in V.$$

Kutsutaan rajoitettuja lineaarikuvauksia operaattoreiksi ja merkitään rajoitettujen lineaarikuvausten avaruutta vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle W merkinnällä

$$Lin_b(V, W).$$

Nyt $Lin_b(V, W)$ on helppo tarkistaa vektoriavaruudeksi. Muodostetaan tästä normiavaruus sille määrittämällä normi kahdella yhtäpitävällä määritelmällä ja osoitetaan, että tämä toteuttaa määritelmän 2.6 ehdot.

Määritelmä 2.8. Operaattoreille $L \in Lin_b(V, W)$ voidaan määritellä normi asettamalla

$$||L||_{op} := \inf\{M \geq 0 : ||Lv||_W \leq M\, ||v||_V\, \forall v \in V\}.$$

Kutsutaan tätä operaattorinormiksi.

Lemma 2.9. *Jos vektoriavaruus* $V \neq \{0\}$ *ja* $L \in Lin_b(V, W)$*, pätee*

$$||L||_{op} = \sup_{||v||_V = 1} ||Lv||_W\,.$$

Todistus. Merkitään $N := ||L||_{op}$. Tässä voidaan olettaa $N > 0$, koska muuten olisi $L = 0$ jolloin väite on triviaali. Määritelmän nojalla saadaan suoraan

$$N \geq \frac{||Lv||_W}{||v||_V}$$

kaikilla $v \in V$, $||v||_V \neq 0$, jolloin siis

$$N \geq \sup_{||v||_V = 1} ||Lv||_W\,. \tag{2.1}$$

Toisaalta kaikilla $v \in V$, $||v||_V = 1$, on

$$||Lv||_W \leq \sup_{||v||_V = 1} ||Lv||_W$$

joten jokaiselle $u \in V$, jolle $||u||_V \neq 0$,

$$\frac{||Lu||_W}{||u||_V} = \left|\left|L\left(\frac{u}{||u||_V}\right)\right|\right|_W \leq \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_W$$

eli yhtäpitävästi tästä saadaan

$$||Lv||_W \leq ||v||_V \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_W .$$

Kuitenkin, koska operaattorinormin määritelmän mukaan N on infimum tämän epäyhtälön toteuttamista luvuista saadaan

$$N \leq \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_W . \tag{2.2}$$

ja lopulta yhdistämällä (2.1) ja (2.2) saadaan haluttu väite

$$||L||_{op} = \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_W .$$

□

Lemma 2.10. *Operaattorinormi on todellakin normi:*

Todistus.

Olkoot $L, K \in Lin_b(V, W)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $||L||_{op} = 0$. Tällöin kaikilla $v \in V$ $||Lv||_W = 0 \Rightarrow Lv = 0 \Rightarrow L = 0$.
"$\Leftarrow$" Oletetaan $L = 0$, jolloin selvästi $||Lv||_W \leq 0$ kaikilla $v \in V$, joten $\inf\{M \geq 0 : ||Lv||_W \leq M\,||v||_V, \forall v \in V\} = 0$.

(2) $||\lambda L||_{op} = \inf\{M \geq 0 : ||\lambda Lv||_W \leq M\,||v||_V, \forall v \in V\}$
$= \inf\{M \geq 0 : |\lambda|\,||Lv||_W \leq M\,||v||_V, \forall v \in V\}$
$= \inf\{\frac{M}{|\lambda|} \geq 0 : ||Lv||_W \leq \frac{M}{|\lambda|}\,||v||_V, \forall v \in V\}$
$= |\lambda| \inf\{M \geq 0 : ||Lv||_W \leq M\,||v||_V, \forall v \in V\} = |\lambda|\,||L||_{op}$.

(3) Käyttäen Lemman 2.9 esitysmuotoa saadaan
$||L + K||_{op} = \sup_{||v||_V=1} ||Lv + Kv||_W$
$\leq \sup_{||v||_V=1} ||Lv||_W + \sup_{||v||_V=1} ||Kv||_W = ||L||_{op} + ||K||_{op}$

□

Nyt $Lin_b(V, W)$ on normiavaruus, kun se varustetaan operaattorinormilla. On syytä huomata, että tälle ja lähes kaikille muillekin vektoriavaruuksille normin voi määrittää monin eri tavoin, mutta äärellisulotteisissa tapauksissa kaikki avaruuden eri normit käyttäytyvät riittävän siististi suhteessa toisiinsa, jolloin ei ole väliä mikä valitaan tarkastelua varten.

Seuraavaksi olettamatta yleistä vektoriavaruutta normiavaruudeksi muodostetaan sille toisenlaista rakennetta sisätulon avulla. Normista poiketen sisätulo kuvaa kaksi vektoriavaruuden alkiota reaaliluvuksi, joka puolestaan kertoo normin tavoin näiden alkioiden suuruudesta, mutta myös niiden välisestä kulmasta.

Määritelmä 2.11. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ on sisätulo, jos:

(1) $(v|v) \geq 0$ ja $(v|v) = 0 \iff v = 0$ kaikilla $v \in V$,
(2) $(v|w) = (w|v)$ kaikilla $v, w \in V$,
(3) kuvaus $v \to (v|w)$ on lineaarinen kaikilla $w \in V$.

Paria $(V, (\,\cdot\,|\,\cdot\,))$ kutsutaan *sisätuloavaruudeksi.*

Esimerkki 2.12. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen sisätulo määritellään

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

missä $x = (x_1, ..., x_n)$ ja $y = (y_1, ..., y_n)$.

Lemma 2.13. *Olkoon $(V, (\,\cdot\,|\,\cdot\,))$ sisätuloavaruus. Tällöin kuvaus*

$$||\cdot||_V : V \to \mathbb{R}, \quad ||v||_V = \sqrt{(v|v)}$$

määrittää normin avaruuteen V.

Todistus.

(1) seuraa suoraan sisätulon (1) ehdosta

(2) $v \to (v|w)$ on lineaarinen kaikilla $w \in V$ eli kun $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee
$||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v|\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 (v|v)} = |\lambda| \sqrt{(v|v)} = |\lambda| \, ||v||$

(3) Olkoot $v, w \in V$. Tällöin lineaarisuutta käyttämällä saadaan
$||v + w||^2 = (v + w|v + w) = (v|v) + 2(v|w) + (w|w)$
$\leq (v|v) + 2|(v|w)| + (w|w) \leq^* (v|v) + 2\sqrt{(v|v)}\sqrt{(w|w)} + (w|w)$
$= ||v||^2 + 2\,||v||\,||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$
eli
$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \,.$$

* voidaan huomata seuraavan Lauseen 2.14 todistuksesta.

$\square$

Edellisestä tuloksesta nähdään, että jokainen sisätuloavaruus on myös normiavaruus. Tämä helpottaa huomattavasti sisätuloavaruuden tarkasteluja, kun avaruudelle ei tarvitse erikseen määrittää normia vaan pelkästään sisätulon määrittäminen riittää. Seuraavaksi otetaan muutamia tuloksia, joita tarvitaan, jotta sisätuloavaruus saadaan täydennettyä Hilbertin avaruudeksi.

Lause 2.14. ***(Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö)***
Olkoon $(V, (\,\cdot\mid\cdot\,))$ vektoriavaruus. Tällöin kaikille $v, w \in V$ pätee epäyhtälö

$$|(v|w)| \leq ||v||_V \, ||w||_V$$

Todistus. Jos $v = 0$, pätee triviaalisti yhtäsuuruus, joten voidaan olettaa, että $v \neq 0$ eli erityisesti $(v|v) > 0$. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ mielivaltainen vakio. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 \leq ||w - cv||^2 &= (w - cv | w - cv) \\ &= (w|w) - 2c(w|v) + c^2(v|v) \end{aligned}$$

josta saadaan valinnalla $c = (w|v) \cdot (v|v)^{-1}$ kirjoitettua tämä epäyhtälö muotoon

$$0 \leq (w|w) - 2\frac{(w|v)^2}{(v|v)} + \frac{(w|v)^2}{(v|v)} = (w|w) - \frac{(w|v)^2}{(v|v)}$$

joka voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa muotoon

$$(w|v)^2 \leq (w|w)(v|v).$$

Tästä ottamalla neliöjuuri saadaan väite

$$|(w|v)| \leq ||v||_V \, ||w||_V \, .$$

$\square$

Lemma 2.15. *Olkoon $(V, (\,\cdot\mid\cdot\,))$ sisätuloavaruus. Sisätulon indusoimalle normille pätee kaikilla $v \in V$ tulos*

$$||v||_V = \sup\{|(v|w)| : w \in V \; ||w||_V = 1\}.$$

Todistus. Jos $v = 0$, väite on triviaali, joten voidaan olettaa, että $v \neq 0$. Vektorin v normin neliölle pätee

$$\begin{aligned} ||v||_V^2 = (v|v) &= ||v||_V \left(v \,\middle|\, \frac{v}{||v||_V} \right) \\ &\leq ||v||_V \sup\{(v|w) : w \in V, ||w||_V = 1\} \end{aligned}$$

mistä seuraa suoraan väitteen toinen suunta

$$||v||_V \leq \sup\{(v|w) : w \in V, ||w||_V = 1\}. \tag{2.3}$$

Toiseen suuntaan voidaan käyttää Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöä, jonka mukaan kaikille $v, w \in V$ pätee

$$|(v|w)| \leq ||v||_V \, ||w||_V$$

eli kun $||w||_V = 1$ saadaan

$$(v|w) \leq ||v||_V \, .$$

Tästä seuraa väitteen toinen suunta

$$\sup\{(v|w) : w \in V, ||w||_V = 1\} \leq ||v||_V \, . \tag{2.4}$$

Nyt yhdistämällä (2.3) ja (2.4) saadaan väite

$$||v||_V = \sup\{|(v|w)| : w \in V, ||w||_V = 1\}.$$

$\square$

Määritelmä 2.16. Olkoon V normiavaruus varustettuna normilla $|| \cdot ||$. Jonoa $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ kutsutaan Cauchyn jonoksi, jos kaikille $\epsilon > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$, jolle

$$||x_n - x_m|| < \epsilon$$

aina, kun $n, m \geq N$.

Lause 2.17. ***(Bolzano ja Weierstrass)***
Olkoon jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin on olemassa osajono

$$\{x_{j_k}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

joka suppenee arvoon $x \in \mathbb{R}$ eli toisin sanottuna

$$\lim_{k \to \infty} |x_{j_k} - x| = 0.$$

Todistus. Olkoon $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen rajoitettu jono. Koska $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu on olemassa luvut $a, b \in \mathbb{R}$, joille $a < x_j < b$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt ainakin yksi joukoista

$$\{x_j : a < x_j < \frac{b-a}{2}\}, \ \{x_j : x_j = \frac{b-a}{2}\}, \{x_j : \frac{b-a}{2} < x_j < b\}$$

sisältää äärettömän monta alkiota. Jos se sattuu olemaan $\{x_j : x_j = \frac{b-a}{2}\}$ voidaan tästä joukosta suoraan muodostaa haluttu osajono, joka suppenee arvoon $\frac{b-a}{2}$. Ääretön joukko voidaan taas jakaa samalla tavalla kolmeen osaan, jolloin jokaiselle $n > 0$ saadaan väli

$]a(n), b(n)[$, joka sisältää äärettömän monta jonon $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ alkiota. Nyt huomataan, että kaikilla $n > 0$ pätee

$$a(n+1) \geq a(n),\ a(n) < b \text{ ja}$$
$$b(n) \geq b(n+1),\ b(n) > a.$$

Koska molemmat jonot $a(n), b(n)$ ovat rajoitettuja, löytyy

$$A = \sup_{n \in \mathbb{N}} a(n) \text{ ja } B = \inf_{n \in \mathbb{N}} b(n),$$

joille $a(n) < b(n)$ eli täytyy olla $B \leq A$. Tällöin kuitenkin $A = B$ on haluttu raja-arvo sillä jokaiselle $n > N \in \mathbb{N}$ on

$$|x - A| < |b - a|(1/2)^N,$$
$$|x - B| < |b - a|(1/2)^N$$

ja osajonoksi voidaan valita mikä tahansa piste jokaisesta välin $]a(n), b(n)[$ iteraatiosta. □

Lemma 2.18. *Jokainen Cauchyn jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että jokainen Cauchyn jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

kaikilla $n, m \geq N$. Kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| < \epsilon$$

ja erityisesti valitsemalla $m = N$ saadaan

$$|x_n| - |x_N| < \epsilon$$

eli

$$|x_n| < \epsilon + |x_N|$$

kaikilla $n \geq N$. Siispä $|x_n| \leq \max\{|x_1|, ..., |x_{N-1}|, |x_N|, \epsilon + x_N\}$ joten $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu. Nyt Bolzanon ja Weierstrassin lause 2.17 sanoo, että tällä on suppeneva osajono $\{x_{j_k}\}_{j=1}^{\infty}$ joka suppenee arvoon $x \in \mathbb{R}$. Nyt on $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_{j_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

aina kun $k \geq N_1$ ja koska $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

aina kun $n, m \geq N_2$. Nyt valitaan $k \geq N_1$ niin suureksi, että $j_k \geq N_2$ ja tällöin kaikille $n \geq N_2$ saadaan

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{j_k}| + |x_{j_k} - x| < \epsilon$$

eli $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ suppenee. $\square$

Määritelmä 2.19. ***(Hilbertin avaruus)***
Normiavaruutta V varustettuna normilla $||\cdot||$ kutsutaan *täydelliseksi*, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa V.
Jos sisätuloavaruus V varustettuna sen sisätulon indusoimalla normilla on normiavaruutena täydellinen, sitä kutsutaan *Hilbertin avaruudeksi.*

Esimerkki 2.20. Yksinkertainen Hilbertin avaruus saadaan muodostettua varustamalla $\mathbb{R}^n$ esimerkissä 2.12 määritellyllä luonnollisella sisätulolla. Esimerkissä näytettiin tämän todellakin olevan sisätulo ja avaruuden täydellisyys voidaan osoittaa valitsemalla mielivaltainen Cauchyn jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$.
Lemmassa 2.18 osoitettiin, että kaikki Cauchyn jonot suppenee $\mathbb{R}$:ssä ja toisaalta jokainen jonon $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ koordinaatin i suuntainen komponentti on myös Cauchyn jono, eli jokaiselle komponentille $(x_j)_i$ on olemassa $y_i \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $\epsilon > 0$ on $N \in \mathbb{N}$ joille

$$|(x_j)_i - y_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

aina, kun $j \geq N$. Nyt käyttämällä vektoria $y := (y_1, y_2, ..., y_n)$ saadaan

$$||x_j - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |(x_j)_i - y_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n}} < \epsilon$$

eli $\mathbb{R}^n$ on täydellinen normiavaruus.

Hilbertin avaruuksille erityisen käyttökelpoinen tulos on Fréchet'n ja Rieszin esityslause, jonka mukaan jokainen Hilbertin avaruudessa määritelty operaattori voidaan esittää sisätulona jonkin kiinnitetyn avaruuden vektorin kanssa ja kaiken lisäksi vielä sillä tavalla, että operaattorin normi ja tämän kiinnitetyn vektorin normi ovat keskenään yhtä suuret. Tätä varten määritellään ensiksi Hilbertin avaruudelle sen duaali, ydin ja ortogonaalikomplementti.

Määritelmä 2.21. Olkoon H hilbertin avaruus. Määritellään avaruuden H *duaali*

$$H' := Lin_b(H, \mathbb{R}).$$

Määritelmä 2.22. Olkoon V ja W vektoriavaruuksia ja $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Lineaarikuvauksen L *ydin* on

$$\ker L = \{x \in V : L(x) = 0\}.$$

Lemma 2.23. *Olkoon V ja W vektoriavaruuksia ja $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin* $\ker L$ *on suljettu aliavaruus avaruudelle V.*

Todistus. Koska aina pätee $0 \in \ker L$, ei $\ker L$ ikinä ole tyhjä joukko. Otetaan suppeneva jono $(v_n)_{n=1}^{\infty} \in \ker L$, joka suppenee arvoon $v \in V$. Tällöin siis $v_n \to v$ ja erityisesti, koska L on lineaarinen pätee

$$L(v) = \lim_{n\to\infty} L(v_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

eli $v \in \ker L$. Siis $\ker L$ on suljettu. On helppo osoittaa, että $\ker L$ on vektorialiavaruus. □

Määritelmä 2.24. Olkoon H Hilbertin avaruus. Tällöin osajoukon $V \subset H$ *ortogonaalikomplementti* on

$$V^{\perp} = \{h \in H : (h|v) = 0 \ \ \forall v \in V\}.$$

Lause 2.25. *(**Projektiolause**) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $V \subset H$ tälle aliavaruus. Tällöin jokaiselle $h \in H$ löytyy $v \in V$ siten, että avaruuden sisätulon indusoimalle normille pätee*

$$||h - v|| = \inf_{u \in V} ||h - u||$$

ja

$$(h - v) \in V^{\perp}.$$

Todistus. Todistus on esitetty viitteessä [6]. □

Lause 2.26. *(**Fréchet'n ja Rieszin esityslause**) Olkoon H Hilbertin avaruus. Tällöin jokaiselle $h' \in H'$ on olemassa $h \in H$ siten, että*

$$h'(v) = (v|h).$$

kaikille $v \in H$. Lisäksi $||h'||_{op} = ||h||$.

Todistus. Lemman 2.23 mukaan voidaan todeta, että $\ker h'$ on avaruuden H suljettu aliavaruus. Jos $\ker h' = H$ niin tästä seuraa, että $h' = 0$ ja voidaan valita triviaalisti $h = 0$ ja väite on todistettu. Voidaan siis olettaa, että $\ker h'$ on aito aliavaruus. Nyt koska $\ker h'$ on suljettu ja aito aliavaruus voidaan Projektiolauseen 2.25 avulla todeta

$$(\ker h')^{\perp\perp} = \ker h' \neq H,$$

eli täytyy olla $(\ker h')^{\perp} \neq \{0\}$. Nyt ytimen määritelmän nojalla pätee

$$h'(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in ((\ker h')^{\perp} - \{0\}).$$

Olkoon $w \in ((\ker h')^{\perp} - \{0\})$ ja $v \in H$ jolloin laskusta

$$h'(h'(w)v - h'(v)w) = h'(w)h'(v) - h'(v)h'(w) = 0$$

huomataan suoraan että näille pätee

$$h'(w)v - h'(v)w \in \ker h'.$$

Tällöin erityisesti

$$0 = (h'(w)v - h'(v)w|w) = h'(w)(v|w) - h'(v)\,||w||^2$$

josta pienellä järjestelyllä ja jakamalla $||w||^2$ saadaan

$$h'(v) = \left(v \;\middle|\; \frac{h'(w)}{||w||^2}w\right)$$

kaikille $v \in H$. Nyt väitteessä Hilbertin avaruuden alkion h valinnalla

$$h := \frac{h'(w)}{||w||^2}w \quad \text{saadaan väite} \quad h'(v) = (v|h).$$

Tämä esitys on myös yksikäsitteinen, sillä oletuksesta $(x|u) = (x|v)$ kaikilla $x \in H$ seuraa suoraan

$$0 = (x|u) - (x|v) = (x|u - v)$$

eli $u = v$. Osoitetaan vielä $||h'||_{op} = ||h||$. Lemman 2.9 mukaan

$$||h'||_{op} = \sup_{||v||_H=1} |h'(v)| = \sup_{||v||_H=1} \left|\left(v \;\middle|\; \frac{h'(w)}{||w||^2}w\right)\right|.$$

Tämän supremumin löytämiseksi voidaan käyttää lemmaa 2.15, jonka mukaan

$$\sup_{||v||_H=1} \left|\left(v \;\middle|\; \frac{h'(w)}{||w||^2}w\right)\right| = \left|\left|\frac{h'(w)}{||w||^2}w\right|\right| = ||h||$$

eli väite on todistettu. $\square$

Nyt Hilbertin avaruudelle saatiin osoitettua merkittävä tulos, joka antaa huomattavasti tietoa Hilbertin avaruuksien rakenteesta. Jatkossa mielivaltaisia sisätuloavaruuksia on erityisen hyödyllistä osoittaa Hilbertin avaruuksiksi, jolloin saadaan suoraan yhteys kaikkien avaruuden operaattoreiden ja sisätulojen välille. Lisäksi avaruuden täydellisyys antaa paljon vapauksia mahdollisia raja-arvoja käsiteltäessä erityisesti Cauchyn jonoille.

3. Kompaktit operaattorit Hilbertin avaruuksissa

Seuraavassa kappaleessa tutkitaan niin kutsuttuja kompakteja operaattoreita Hilbertin avaruuksissa. Yleiset kompaktit operaattorit määritellään seuraavasti

Määritelmä 3.1. Olkoot X ja Y täydellisiä normiavaruuksia. Tällöin rajoitettua lineaarikuvausta eli operaattoria $L : X \to Y$ sanotaan *kompaktiksi*, jos jokaiselle rajoitetulle jonolle $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ on olemassa osajono $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ siten, että $\{Lx_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa Y.

Määritelmä 3.2. Olkoon X normiavaruus. Sanotaan, että osajoukko $Y \subseteq X$ on joukkona kompakti, jos sen jokaiselle avoimelle *peitteelle* on olemassa äärellinen osapeite.
Eli toisin sanottuna jokaiselle avoimien joukkojen kokoelmalle $\mathcal{U}$ jolle

$$Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

on olemassa **äärellinen** $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ siten, että myös

$$Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U.$$

Tässä tutkielmassa edellä esitettyä yleistä kompaktiuden määritelmää käytetään hyvin vähän ja sen sijaan kompaktien operaattoreiden yhteydessä käytetäänkin jonokompaktiutta ja jatkossa puhuttaessa kompaktiudesta käytetäänkin todellisuudessa jonokompaktiutta. Osoitetaan kuitenkin seuraavassa lemmassa, että normiavaruuksille nämä ovat ekvivalentteja.

Lemma 3.3. *Olkoon X normiavaruus. Tällöin X on joukkona kompakti jos, ja vain jos jokaisella jonolla $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ on olemassa suppeneva osajono.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Oletetaan aluksi, että X on joukkona kompakti eli sen jokaiselle avoimelle peitteelle on olemassa äärellinen osapeite. Olkoon jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ ja määritellään tämän avulla joukot

$$F_n := \overline{\{x_j : j \geq n\}}$$

ja näiden joukkojen avoimet komplementit

$$U_n := X - F_n.$$

joille voidaan konstruktiosta suoraan nähdä $U_m \subset U_k$ kun $m \leq k$. Oletetaan, että joukkojen F_n leikkaus on tyhjä eli

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$$

jolloin

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X - F_n) = X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$$

eli U_n muodostaa avaruudelle avoimen peitteen. Koska X on joukkona kompakti on olemassa äärellinen osapeite

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k} = U_{n_m}.$$

josta seuraa suoraan $F_{n_m} = \emptyset$ mikä on ristiriidassa joukkojen F_n konstruktion kanssa, joten täytyy olla

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Nyt voidaan ottaa avoimia palloja $B(x, \frac{1}{n})$ siten, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap \{x_j : j \geq n\} \neq \emptyset$$

ja suppenevaksi osajonoksi $\{x_{j_n}\}$ voidaan valita jokaisesta tällaisesta yhdisteestä yksi piste, jolloin tämä osajono suppenee kohti pistettä x.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että X:n jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Olkoon

$$X \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$$

avoin peite. Osoitetaan, että on olemassa vakio $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ siten, että

$$\begin{gathered}\text{jokaiselle } x \in X \text{ löytyy } U \in \mathcal{U} \text{ siten, että} \\ \text{avoin pallo } B(x,\delta) \text{ sisältyy joukkoon } U.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Tätä varten tehdään antiteesi: eli tällaista lukua δ ei ole. Tällöin jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ löytyy $x_j \in X$ siten, että kaikille $U \in \mathcal{U}$

$$B\left(x_j, \frac{1}{j+1}\right) \not\subset U. \tag{3.6}$$

Jonolle $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ löytyy oletuksen nojalla suppeneva osajono $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ joka suppenee pisteeseen $x \in X$. Lisäksi avoimesta peitteestä löytyy

$U_x \in \mathcal{U}$, johon x sisältyy ja koska U_x on avoin joukko, on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että

$$B(x,\epsilon) \subset U_x.$$

Jonon $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ suppenemisen nojalla voidaan myös valita $m \in \mathbb{N}$, jolle

$$\frac{1}{j_m+1} < \frac{\epsilon}{2} \text{ ja } ||x_{j_m} - x||_X < \frac{\epsilon}{2}$$

josta kuitenkin seuraa se, että

$$B(x_{j_m}, \frac{1}{j_m+1}) \subset B(x,\epsilon) \subset U_x$$

mikä on suoraan ristiriidassa antiteesin (3.6) kanssa eli ehto (3.5) täytyy pitää paikkaansa. Väitteen todistamiseksi riittää näyttää nyt, että tälle $\delta > 0$ löytyy äärellinen $\mathcal{V} \subset X$ jolle

$$X = \bigcup_{v\in\mathcal{V}} B(v,\delta)$$

ja tämän osoittamiseksi tehdään vielä antiteesi. Jos jokaiselle äärelliselle $\mathcal{V} \subset X$ olisikin

$$X \neq \bigcup_{v\in\mathcal{V}} B(v,\delta)$$

voitaisiin induktiivisesti muodostaa jono $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ jolle

$$\begin{aligned}
&x_0 \in X \\
&x_1 \in (X - B(x_0,\delta)) \\
&x_{j+1} \in (X - \cup_{t=1}^{j} B(x_t,\delta))
\end{aligned}$$

mutta tälle jonolle ei ole suppenevaa osajonoa, koska jokaiselle indeksille $r, s \in \mathbb{N}$, $r \neq s$ on $||x_r - x_s||_X \geq \delta$ ja tämä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa. Siispä antiteesi on kumottu eli alkuperäinen väite pätee. $\square$

Määritelmä 3.4. Olkoon $X \subseteq Y$ normiavaruuksia. Avaruus X on **(I)** *jatkuvasti upotettu* avaruuteen Y, jos on olemassa vakio $C \geq 0$ jolle kaikille $x \in X$ pätee

$$||x||_Y \leq C\,||x||_X$$

ja

(II) *kompaktisti upotettu* avaruuteen Y, jos lisäksi jokaisella rajoitetulla jonolla $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ on osajono, joka suppenee avaruudessa Y.

Edellisen määritelmän nojalla on helppo huomata, että operaattori $L : X \to Y$ on kompakti aina, kun $L(X)$ on kompaktisti upotettu avaruuteen Y.

Seuraavaksi siirrytään tutkimaan kompaktien operaattoreiden ominaisarvoteoriaa, jonka avulla kompaktin operaattorin ominaisarvoista saadaan muodostettua ortonormaaleja joukkoja ja tarvittaessa jopa kantoja ääretönulotteisille avaruuksille.

Määritelmä 3.5. Olkoon $K : X \to Y$ lineaarikuvaus. Tällöin kuvauksen K

(1) kuvajoukko on $R(K) := \{y \in Y : y = Kx, \text{ jollekin } x \in X\}$
ja kertauksena
(2) ydin on $\ker(K) := \{x \in X : Kx = 0\}$.

Lause 3.6. *Olkoon $K : H \to H$ kompakti operaattori ja $I : H \to H$ identtinen kuvaus. Tällöin*

(1) $\ker(I - K)$ *on äärellisulotteinen*
ja
(2) $R(I - K)$ *on suljettu.*

Todistus. (1) Jos $\ker(I-K)$ olisikin ääretönulotteinen, löytyisi ääretön ortonormaali joukko

$$\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \ker(I - K)$$

ja tällöin siis kaikilla $j \in \mathbb{N}$ olisi $(I - K)h_j = 0$ eli toisin sanottuna

$$Kh_j = h_j.$$

Nyt voidaan laskea

$$||h_k - h_l||^2 = ||h_k||^2 - 2(h_k|h_l) + ||h_l||^2 = 2,$$

aina, kun $k \neq l$ jolloin näillä ehdoilla myös pätee

$$||Kh_k - Kh_l|| = \sqrt{2}.$$

Kuitenkin tästä seuraa ristiriita, sillä nyt jonolla $\{Kh_j\}_{j=1}^{\infty}$ ei voi olla suppenevaa osajonoa eli K ei voi olla kompakti. Siispä $\ker(I - K)$ täytyy olla äärellisulotteinen.

(2) Osoitetaan, että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$||h - Kh|| \geq C\,||h|| \quad \text{kaikilla} \quad h \in \ker(I - K)^{\perp}. \tag{3.7}$$

Tehdään antiteesi, jonka nojalla voidaan jokaiselle $j \in \mathbb{N}$ valita alkiot $h_j \in \ker(I - K)^{\perp}$ siten, että $||h_j|| = 1$ ja $||h_j - Kh_j|| < \frac{1}{j}$ eli pätee

$$h_j - Kh_j \to 0, \tag{3.8}$$

kun $j \to \infty$. Koska $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu ja K on kompakti löytyy osajono $\{h_{j_k}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $Kh_{j_k} \to Kh$, ja kun tähän yhdistää havainnon (3.8) saadaan

$$h_{j_k} \to h.$$

Tällöin täytyy olla $h \in \ker(I-K)$, joten $(h_{j_k}|h) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja viemällä $j_k \to \infty$ saadaan ristiriita eli (3.7) täytyy olla totta.

Otetaan nyt suppeneva jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R(I-K)$, jolle $u_j \to u$. Tiedetään, että voidaan muodostaa jono $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \ker(I-K)^{\perp}$ siten, että kaikilla $j \in \mathbb{N}$ pätee yhtälö

$$v_j - Kv_j = u_j$$

ja käyttämällä nyt tälle yhtälölle aiemmin osoitettua ehtoa (3.7) valinnalla $h = v_k - v_l$ saadaan

$$||u_k - u_l|| = ||v_k - v_l - K(v_k - v_l)|| \geq C\,||v_k - v_l||\,.$$

Tällöin siis $\{v_j\}_{j=1}$ suppenee arvoon v, kun $v - Kv = u$ eli toisin sanottuna $R(I-K)$ on suljettu. □

Määritelmä 3.7. Olkoon $X \subset Y$ ja operaattori $L : X \to Y$. Sanotaan, että reaaliluku η on operaattorin L ominaisarvo ja $0 \neq w \in X$ on operaattorin L vastaava ominaisvektori, jos

$$Lw = \eta w.$$

Merkitään operaattorin L ominaisarvojen joukkoa $\sigma(L)$.

Huomautus 3.8. On helppo huomata, että η on operaattorin L ominaisarvo jos, ja vain jos

$$\ker(L - \eta I) \neq \{0\}.$$

Määritelmä 3.9. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $L : H \to H$ operaattori. Sanotaan, että L on symmetrinen, jos kaikilla $u, v \in H$ pätee

$$(Lu|v) = (u|Lv).$$

Lause 3.10. *Olkoon H Hilbertin avaruus, jolle on olemassa tiheä ja numeroituva osajoukko ja olkoon operaattori $L : H \to H$ symmetrinen ja kompakti. Olkoon operaattorin L ominaisarvot $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ja näitä vastaavat vektorit $0 \neq w_j \in H$. Tällöin $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ muodostaa ortonormaalin kannan avaruudelle H.*

Todistus. Määritellään jono $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ joka muodostuu operaattorin L eri ominaisarvoista pois lukien 0 ja merkitään $\eta_0 = 0$. Merkitään lisäksi

$$H_0 = \ker(L) \;\text{ ja }\; H_j = \ker(L - \eta_j I)$$

kun $j \in \mathbb{N}$. Lemmasta 3.6 saadaan selville että

$$0 \leq \dim H_0 \leq \infty \ \text{ ja } \ 0 < \dim H_j < \infty$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Valitaan nyt $u \in H_k$ ja $v \in H_l$, kun $k \neq l$ jolloin siis pätee $Lu = \eta_k u$ ja $Lv = \eta_l v$. Koska L on symmetrinen pätee

$$\eta_k(u|v) = (Lu|v) = (u|Lv) = \eta_l(u|v).$$

Koska oletettiin, että $\eta_k \neq \eta_l$ täytyy tämän yhtälön toteutumiseksi olla $(u|v) = 0$. Siispä jokaiselle $u \in H_k$ ja $v \in H_l$ pätee $(u|v) = 0$.

Olkoon $\tilde{H} \subset H$ pienin sellainen aliavaruus joka sisältää kaikki joukot $H_0, H_1, ...$ eli toisin sanottuna

$$\tilde{H} = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k : a_k \in \mathbb{R}, u_k \in H_k\}.$$

Osoitetaan, että tämä on tiheä joukko avaruudessa H. Tätä varten todetaan, että $L(\tilde{H}) \subseteq \tilde{H}$ ja erityisesti operaattorin L symmetrisyydestä seuraa, että jokaiselle $v \in \tilde{H}$ ja $u \in \tilde{H}^{\perp}$ pätee

$$(Lu|v) = (u|Lv) = 0$$

eli erityisesti $L(\tilde{H}^{\perp}) \subseteq \tilde{H}^{\perp}$. Rajoittamalla operaattori L vain joukon $\tilde{H}^{\perp}$ alkioille saadaan operaattori $\tilde{L} = L|_{\tilde{H}^{\perp}}$ joka on myös symmetrinen ja kompakti. Kun tutkitaan tämän operaattorin ominaisarvoja huomataan, että sen kaikki ominaisarvot ovat myös operaattorin L ominaisarvoja eli täytyy olla

$$\sigma(\tilde{L}) = \{0\}. \tag{3.9}$$

Määritellään seuraavaksi luvut

$$M := \sup_{\substack{h \in \tilde{H}^{\perp} \\ ||h||=1}} (\tilde{L}h|h) \ \text{ ja } \ m := \inf_{\substack{h \in \tilde{H}^{\perp} \\ ||h||=1}} (\tilde{L}h|h).$$

Nyt koska kuvaus $[u, v] := (Mu - \tilde{L}u|v)$ on myös symmetrinen ja $[u, u] \geq 0$ kaikilla $u \in \tilde{H}^{\perp}$, huomataan, että $[u, v]$ muodostaa sisätulon ja tällöin saadaan Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä 2.14 tulos

$$|(Mu - \tilde{L}u|v)| \leq \sqrt{(Mu - \tilde{L}u|u)}\sqrt{(Mv - \tilde{L}v|v)}$$

kaikille $u, v \in \tilde{H}^{\perp}$ ja erityisesti jokaiselle $u \in \tilde{H}^{\perp}$ on vakio C siten, että

$$\left|\left|Mu - \tilde{L}u\right|\right| \leq C\sqrt{(Mu - \tilde{L}u|u)} \tag{3.10}$$

jolloin valitsemalla jono $\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \tilde{H}^{\perp}$ jolle $||h_j|| = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $(\tilde{L}h_k, h_k) \to M$ saadaan seuraus

$$\left|\left|Mh_j - \tilde{L}h_j\right|\right| \to 0$$

kun $j \to \infty$. Jos $M \notin \sigma(\tilde{L})$, olisi tällöin kuvaus $MI - \tilde{L}$ bijektio ja tällöin pätisi

$$h_j = (MI - \tilde{L})^{-1}(Mh_j - \tilde{L}h_j) \to 0$$

mikä on selvästi ristiriidassa oletuksen $||h_j|| = 1$ kanssa eli täytyy olla $M \in \sigma(\tilde{L})$. Samalla menetelmällä voidaan näyttää, että myös $m \in \sigma(\tilde{L})$ ja kun tämä havainto yhdistetään aiemmin näytettyyn ehtoon (3.9) todetaan, että

$$\text{kaikille } u \in \tilde{H}^{\perp} \text{ on } (\tilde{L}u|u) = 0.$$

Kuitenkin kun $u, v \in \tilde{H}^{\perp}$ on näille

$$2(\tilde{L}u|v) = (\tilde{L}(u+v)|u+v) - (\tilde{L}u|u) - (\tilde{L}v|v) = 0$$

mikä on mahdollista ainoastaan jos $\tilde{L} = 0$. Operaattori $\tilde{L}$ oli alunperin määritetty operaattorin L rajoittumaksi joukkoon $\tilde{H}^{\perp}$ eli on

$$\tilde{H}^{\perp} \subset \ker(L) \subset \tilde{H}$$

jolloin $\tilde{H}^{\perp} = \{0\}$. Tästä seuraa, että sulkeuma

$$\overline{\tilde{H}} = (\tilde{H}^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

eli $\tilde{H}$ on tiheä avaruudessa H. Nyt riittää valita jokaisesta aliavaruudesta H_j, kun $j = 0, 1, ...$, ortonormaali kanta ja väite on todistettu.
$\square$

Tämä on yksi kompaktin ja symmetrisen operaattorin merkittävistä hyödyistä ääretönulotteiselle Hilbertin avaruudelle. Nyt riittää löytää avaruudesta itselleen yksi kompakti ja symmetrinen operaattori ja tämän ominaisfunktioista saadaan suoraan avaruudelle kanta. Kannan avulla saadaan muodostettua jokainen avaruuden alkio, joka tietyillä kannoilla on erittäin käyttökelpoinen ominaisuus.

4. Sobolev-avaruudet

Seuraavaksi määritellään yleiselle reaaliselle funktioavaruudelle $\mathcal{F}(V,\mathbb{R})$ rakennetta funktioiden integraalin ja derivaatan avulla. Ensiksi määritellään reaalifunktion kantaja.

Määritelmä 4.1. Funktion $u \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ *kantaja* on

$$\mathrm{spt}(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

Tavallisesti funktion derivoituvuuteen vaaditaan funktiolta tietynlaista sileyttä, vaikka useissa tapauksissa yksittäisissä pisteissä derivoituvuuden uupuminen ei ole merkittävää. Tätä varten määritellään yleisempi niin kutsuttu *heikko derivaatta*, joka määritellään klassiselle derivaatalle tutun osittaisintegrointikaavan avulla. Ennen tätä kuitenkin määritellään mitallisten funktioiden joukko, joka vaaditaan heikon derivaatan oikeaoppista määritelmää varten.

Määritelmä 4.2. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko. Merkitään *mitallisten reaalifunktioiden* joukkoa joukolta V merkinnällä $\mathcal{M}(V)$. Erityisesti pätee $\mathcal{M}(V) \subset \mathcal{F}(V,\mathbb{R})$. Mitallisten joukkojen ja funktioiden ominaisuuksia ja tarkka määritelmä on esitetty tarkemmin viitteessä [7].

Määritelmä 4.3. ***(Heikko derivaatta)***
Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ ja funktiot $u, v \in \mathcal{M}(V)$ siten, että kaikilla kompakteilla osajoukoilla $U \subset V$ pätee

$$\int_U |u(x)|dx < \infty \;\text{ ja }\; \int_U |v(x)|dx < \infty.$$

Sanotaan, että v on u:n heikko derivaatta, jos kaikille $\phi \in C^\infty(V)$, joille $\mathrm{spt}(\phi)$ on kompakti pätee

$$\int_V u\nabla\phi dx = -\int_V v\phi dx$$

ja merkitään tätä $Du = v$.

Erityisesti osittaisintegrointikaavalla on helppo todeta, että kun klassinen derivaatta on olemassa, on se myös heikko derivaatta. Jatkossa käytetään tätä korvaamaan klassinen derivaatta, jolloin funktion derivoituvuuteen riittää oletus integroituvuudesta ja myös ei-sileät funktiot soveltuvat tarkasteluun. Eli merkintä Du tarkoittaa samaa kuin ∇u silloin, kun jälkimmäinen on olemassa. Osoitetaan seuraavaksi vielä että heikko derivaatta on yksikäsitteinen.

Lemma 4.4. *Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset V$ ja funktio $u \in \mathcal{M}(V)$ kuten edellisessä määritelmässä ja oletetaan, että*

$$Du = v \quad ja \quad Du = w.$$

Tällöin on $v(x) = w(x)$ melkein kaikilla $x \in V$.

Todistus. Oletuksesta seuraa että kaikilla $\phi \in C^\infty(V)$, joille $\mathrm{spt}(\phi)$ on kompakti, pätee

$$\int_V uD\phi dx = -\int_V v\phi dx \quad \text{ja} \quad \int_V uD\phi dx = -\int_V w\phi dx.$$

Nämä yhdistämällä saadaan

$$-\int_V v\phi dx = -\int_V w\phi dx \iff \int_V (w-v)\phi dx = 0$$

kaikilla $\phi \in C^\infty(V)$, joille $\mathrm{spt}(\phi)$ on kompakti, ja tästä seuraa ns. variaatiolaskennan peruslauseen [5] avulla, että $v(x) = w(x)$ melkein kaikilla $x \in V$. □

Määritelmä 4.5. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$. Määritellään avaruudet

$$L^p(V) := \{u \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R}) : \int_V |u|^p dx < \infty\}, \text{ missä } 1 \leq p < \infty$$
$$H^1(V) := \{u \in L^2(V) : Du \in L^2(V)\}$$

Avaruutta $L^p(V)$ kutsutaan *Lebesgue-avaruudeksi* ja avaruutta $H^1(V)$ *Sobolev-avaruudeksi.*

Avaruuden $L^p(V)$ normina käytetään

$$||u||_{L^p(V)} := \left(\int_V |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ja avaruuden $H^1(V)$ normina

$$||u||_{H^1(V)} := \sqrt{\int_V |u|^2 dx + \int_V |Du|^2 dx}.$$

Määritellään lisäksi erityinen Lebesgue-avaruus

$$L^\infty(V) := \{u \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R}) : \operatorname*{ess\,sup}_{x \in V} |u(x)| < \infty\}$$

jonka normina toimii

$$||u||_{L^\infty(V)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in V}(|u(x)|).$$

Määritelmä 4.6. Määritellään niin kutsutut kompaktikantajaiset funktioavaruudet

$\mathcal{C}_0^\infty(V) := \mathcal{C}^\infty(V) \cap \{u \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R}) : \mathrm{spt}(u) \text{ on kompakti }\}$
$H_0^1(V) := \{u \in H^1(V) : \exists \{\phi_j\}_{j=1}^\infty \in (\mathcal{C}_0^\infty(V) \cap H^1(V)) \text{ s.e. } ||\phi_j - u||_{H^1(V)} \to 0\}.$

Määritelmä 4.7. Määritellään lokaali Sobolev-avaruus

$H_{loc}^1(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : u \in H^1(V) \text{ kaikille kompakteille } V \subset \mathbb{R}^n\}.$

Lokaalin Sobolev-avaruuden avulla tämän aliavaruuksina voidaan määritellä tämän tutkielman kannalta merkittävimmät aliavaruudet periodisille Sobolev-funktioille.

Määritelmä 4.8. Määritellään *periodinen Sobolev-avaruus*

$H_{per}^1([0,1]^n) := \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^n) : u(x+q) = u(x) \text{ kaikilla } q \in \mathbb{Z}^n \text{ ja m.k. } x \in \mathbb{R}^n\}$

ja tälle aliavaruus niistä funktioista, joille integraali kuution yli on 0,

$$H_{per,0}^1([0,1]^n) := \{u \in H_{per}^1([0,1]^n) \; : \; \int_{[0,1]^n} u(x) = 0\}.$$

Esimerkki 4.9. On helppo todeta, että funktiot $A\sin(2\pi x)$ ja $B\cos(2\pi x)$ ovat avaruudessa $H_{per,0}^1([0,1])$ kaikilla vakioilla $A, B \in \mathbb{R}$.
Vastaavasti funktiot $A\sin(2\pi x_1)$ ja $B\cos(2\pi x_1)$ ovat avaruudessa $H_{per,0}^1([0,1]^n)$ kaikilla $A, B \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Avaruudet $H_{per}^1, H^1, H_0^1, H_{loc}^1, L^p$ ja L^∞ ovat kaikki normiavaruuksia, mikä on helppo tarkastaa näille määritelmän avulla. Tutkitaan seuraavaksi muutama tulos, joka näissä avaruuksissa pätee ja näiden tulosten avulla osoitetaan, että $H_{per}^1([0,1]^n)$ on myös Hilbertin avaruus.

Lemma 4.10. ***(Youngin epäyhtälö)***
Olkoot $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin kaikille $a, b \geq 0$ pätee

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$, on väite triviaali. Voidaan siis olettaa, että $a, b > 0$. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Tämän derivaatta on

$$f'(x) = x^{p-1} - b$$

jonka ainoa nollakohta ei-negatiivisista reaaliluvuista löytyy arvolla $x = b^{\frac{1}{p-1}}$. Nyt tarkastelemalla funktion kulkua voidaan helposti todeta tämän olevan funktion minimi jolloin pätee

$$f(x) \geq f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{(b^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{1}{p-1}} b = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{p}{p-1}}$$

$$= \frac{b^{\frac{p}{p-1}} - pb^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{(1-p)b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Huomaamalla että

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$$

saadaan edellinen epäyhtälö kirjoitettua muotoon

$$f(x) \geq \frac{(1-p)b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} = -\frac{b^q}{q} + \frac{b^q}{q} = 0$$

eli vaihtamalla $x = a$ toisin sanottuna kaikilla $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

$\square$

Lause 4.11. ***(Hölderin epäyhtälö)***
Olkoot $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin kaikille funktioille $f \in L^p(V)$ ja $g \in L^q(V)$ pätee

$$||fg||_{L^1(V)} \leq ||f||_{L^p(V)} \, ||g||_{L^q(V)} \, .$$

Tätä kutsutaan Hölderin epäyhtälöksi.

Todistus. Olkoot

$$\alpha := ||f||_{L^p(V)} = \Big(\int_V |f|^p dx \Big)^{1/p}$$

ja

$$\beta := ||g||_{L^q(V)} = \Big(\int_V |g|^q dx \Big)^{1/q}.$$

Voidaan olettaa, että molemmat ovat aidosti positiivisia, sillä muuten olisi normin ominaisuuksien nojalla joko $f = 0$ tai $g = 0$, jolloin väite on triviaali. Sovelletaan Youngin epäyhtälöä 4.10 luvuille

$$\frac{|f(x)|}{\alpha} \text{ ja } \frac{|g(x)|}{\beta}$$

jonka mukaan pätee

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\alpha\beta} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\beta^q}$$

josta integroimalla molemmat puolet saadaan

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_V |f(x)g(x)|dx \leq \int_V \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p}dx + \int_V \frac{|g(x)|^q}{q\beta^q}dx$$
$$= \frac{\alpha^p}{p\alpha^p} + \frac{\beta^q}{q\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nyt yksinkertaisesti kerrotaan $\alpha\beta$ toiselle puolelle, jolloin saadaan suoraan väite

$$||fg||_{L^1(V)} \leq ||f||_{L^p(V)}\, ||g||_{L^q(V)}\, .$$

□

Lause 4.12. ***(Yleinen Hölderin epäyhtälö)***
Olkoon $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}$, $p_1, ..., p_m > 1$ *siten, että*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1.$$

Tällöin kaikille funktioille $f_k \in L^{p_k}(V)$, $k = 1, ..., m$ *pätee*

$$\int_V |u_1 \cdots u_m|dx \leq \prod_{j=1}^{m} ||u_j||_{L^{p_j}(V)}\, .$$

Todistus. Voidaan helposti todistaa induktiolla käyttämällä tavallista Hölderin epäyhtälöä. □

Lemma 4.13. ***(Lebesguen monotoninen konvergenssi)***
Olkoon $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ *jono mitallisia funktioita, joille*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$$

kaikilla $x \in \Omega$ *ja olkoon funktio* f *siten, että*

$$f_j(x) \to f(x)$$

kaikille $x \in \Omega$, *kun* $j \to \infty$. *Tällöin pätee*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Todistus. Koska

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$$

on helppo todeta, että pätee

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)dx \le \int_\Omega f(x)dx. \tag{4.11}$$

Määritellään vakio $0 < c < 1$ ja karakterististen funktioiden avulla muodostettu integroituva funktio

$$u := \sum_{k=1}^{T} a_k\chi_{A_k},\ \ T\in\mathbb{N}, a_k, \in\mathbb{R}, A_k\subset\Omega$$

siten, että $0\le u\le f$. Näiden avulla saadaan määriteltyä joukot

$$U_j = \{x\in\Omega : f_j(x)\ge cu(x)\},\ j\in\mathbb{N}$$

joille määritelmän nojalla pätee

$$U_1\subset U_2\subset ...\text{ ja selvästi }\ \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j.$$

Nyt u on integroituva jokaisessa joukossa U_j, missä $j\in\mathbb{N}$ sekä myös joukossa Ω. Lisäksi jokaiselle $j\in\mathbb{N}$ pätee

$$\int_\Omega f_j(x)dx \ge \int_{U_j} f_j(x)dx \ge c\int_{U_j} u(x)dx.$$

Viemällä $j\to\infty$ ja sitten $c\to 1$ saadaan

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)dx \ge \int_\Omega u(x)dx.$$

Tästä käyttämällä oletusta $f_j(x)\to f(x)$ kun $j\to\infty$ saadaan

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)dx \ge \int_\Omega f(x)dx$$

josta taas yhdistämällä tähän epäyhtälö (4.11) seuraa väite

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f_j(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

□

Usein jonojen suppenemista tutkittaessa on tarvetta käyttää raja-arvosta muotoa joka on varmasti aina olemassa. Tätä varten käytetään niin kutsuttua **yläraja-arvoa** ja **alaraja-arvoa**, jotka tavallisesta raja-arvosta poiketen on hyvin määritelty kaikille jonoille ja mikäli jonolla on tavallinen raja-arvo antavat nämä saman arvon.

Määritelmä 4.14. Jonon $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ alaraja-arvo on

$$\liminf_{j\to\infty}(x_j) := \lim_{j\to\infty}(\inf_{k\geq j}(x_k))$$

ja vastaavasti yläraja-arvo on

$$\limsup_{j\to\infty}(x_j) := \lim_{j\to\infty}(\sup_{k\geq j}(x_k)).$$

Huomautus 4.15. On syytä huomata, että aina pätee

$$\limsup_{j\to\infty}(x_j) = -\liminf_{j\to\infty}(-x_j)$$

Lemma 4.16. ***(Fatoun lemma)***
Olkoon $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ funktiojono mitallisia ja ei-negatiivisia funktioita ja olkoon

$$u := \liminf_{j\to\infty}(u_j).$$

Tällöin pätee

$$\int_\Omega u dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx.$$

Todistus. Määritellään funktiojono $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siten, että

$$f_n(x) = \inf_{j\geq n} u_j(x), \quad n\in\mathbb{N}$$

jolloin jokainen f_n on mitallinen ja kaikilla $x\in\Omega$ pätee

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq u_n(x) \tag{4.12}$$

ja määritelmän nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = u(x).$$

Monotonisesta konvergenssista 4.13 seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n dx = \int_\Omega u dx$$

ja tähän yhdistämällä (4.12) saadaan väite

$$\int_\Omega u dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx.$$

□

Seuraus 4.17. *Olkoon Fatoun lemman tavoin $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ funktiojono mitallisia ja ei-negatiivisia funktioita ja oletetaan lisäksi, että on olemassa positiivinen integroituva funktio g jolle $u_j \leq g$. Tällöin*

$$\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx \leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty}(u_j) dx.$$

Todistus. Käytetään Fatoun lemmaa jonolle $\{g-u_j\}_{j=1}^{\infty}$ jolloin

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty}(g-u_j)dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega (g-u_j)dx$$

joka saadaan yhtäpitävästi kirjoitettua integraalin lineaarisuutta käyttämällä muotoon

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty}(-u_j)dx \leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega -u_j dx$$

ja tälle huomautuksesta 4.15 seuraa

$$\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx \leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty}(u_j)dx.$$

□

Lemma 4.18. ***(Dominoitu konvergenssi)***
Olkoon $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ funktiojono mitallisia funktioita, joka suppenee pisteittäin kohti funktiota u ja jolle on olemassa funktio $v \in L^1(\Omega)$ siten, että kaikilla $j \in \mathbb{N}$

$$|u_j(x)| \leq v(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $u \in L^1(\Omega)$ ja

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx = \int_\Omega u dx.$$

Todistus. Koska jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin kohti funktiota u on myös $|u(x)| \leq v(x)$ jolloin $u \in L^1(\Omega)$ ja pätee

$$|u-u_j| \leq |u| + |u_j| \leq 2v$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja suoraan u:n määritelmästä

$$\limsup_{j\to\infty}|u-u_j| = 0.$$

Käyttämällä integraalin monotonisuutta ja lineaarisuutta saadaan

$$\left|\int_\Omega u dx - \int_\Omega u_j dx\right| = \left|\int_\Omega (u-u_j)dx\right| \leq \int_\Omega |u-u_j|dx \tag{4.13}$$

ja koska aiemmin näytettiin funktion $|u-u_j|$ olevan funktion $2v$ dominoimana integroituva voidaan Fatoun lemman Seurausta 4.17 käyttämällä huomata

$$\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega |u-u_j|dx \leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty}|u-u_j|dx = 0$$

eli tämän raja-arvon täytyy olla olemassa ja se on

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega |u-u_j|dx = 0.$$

Lopulta yhdistämällä tähän havainto (4.13) saadaan väite

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega u_j dx = \int_\Omega u dx.$$

□

Määritelmä 4.19. (1) Määritellään **tavallinen siloittaja** $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{kun } |x|<1, \\ 0 & \text{kun } |x|\geq 1, \end{cases}$$

missä vakio C valitaan siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx = 1.$$

(2) Jokaiselle $\epsilon > 0$ määritellään

$$\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

jolloin myös $\eta_\epsilon \in C^\infty$.
(3) Jokaiselle funktiolle $f \in L^1(U)$ määritellään sen **siloitus**

$$f_\epsilon := \eta_\epsilon * f$$

siten, että

$$f_\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)}\eta_\epsilon(y)f(x-y)dy.$$

Lemma 4.20. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $u \in H^1(U)$. Tällöin funktion u siloitukselle $u_\epsilon = \eta_\epsilon * u$ pätee*

(I) $u_\epsilon \in C^\infty$ jokaiselle $\epsilon > 0$ ja

(II) $u_\epsilon \to u$ $H^1(U)$:ssa kun $\epsilon \to 0$.

Todistus. (I) Kiinnitetään $x \in \{z \in U : \operatorname{dist}(z,\partial U) > \epsilon\}$, missä $j \in \{1,...,n\}$ ja valitaan $h > 0$ niin pieneksi, että myös

$$x + he_j \in \{z \in U : \operatorname{dist}(z,\partial U) > \epsilon\}.$$

Nyt löytyy avoin joukko $V \subset\subset U$ siten, että

$$\begin{aligned}\frac{u_\epsilon(x+he_j)-u_\epsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right)u(y)dy.\end{aligned}$$

Koska nyt osittaisderivaatan määritelmän nojalla käyttäen dominoitua konvergenssiä 4.18 todetaan, että

$$\frac{1}{h}\left(\eta\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right)\to\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

tasaisesti V:ssä on tällöin $\frac{\partial}{\partial x_j}u_\epsilon(x)$ olemassa ja se on

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u_\epsilon(x)=\int_U\left(\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_j}(x-y)\right)u(y)dy.$$

Samalla menetelmällä voidaan näyttää, että funktion u_ϵ mikä tahansa derivaatta $D^\alpha u_\epsilon$ on olemassa ja se on a

$$D^\alpha u_\epsilon=\int_U(D^\alpha\eta_\epsilon(x-y))u(y)dy$$

eli tästä saadaan $u_\epsilon\in C^\infty$.

(II) Todistus löytyy Lawrence C. Evansin kirjasta Partial differential equations sivuilta 630-631. [4] □

Lemma 4.21. ***(Gagliardon, Nirenbergin ja Sobolevin epäyhtälö)*** *Olkoot* $1\le p<n$ *ja*

$$p^*=\frac{np}{n-p}.$$

Tällöin on olemassa vakio $C=C(p,n)$ *siten, että*

$$||u||_{L^{p^*}([0,1]^n)}\le C\,||Du||_{L^p([0,1]^n)}$$

jokaiselle $u\in C^1([0,1]^n)$, *jolle* $\int_{[0,1]^n}udx=0$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että $p=1$. Funktiolle $u\in C^1([0,1]^n)$, $\int_{[0,1]^n}udx=0$, löytyy aina piste $x_0\in[0,1]^n$, jossa $u(x_0)=0$. Määrittelemällä uusi funktio $v(x)=u(x+x_0)$ on $v(0)=0$ ja jokaiselle indeksille $j=1,...,n$, pisteelle $x\in\mathbb{R}^n$ sekä $0<x_j<1$ todeta, että

$$v(x)=\int_0^{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}v(x_1,...,x_{j-1},y_j,x_{j+1},...,x_n)dy_j$$

eli erityisesti v:n normille saadaan arvio

$$|v(x)|\le\int_0^1|Dv(x_1,...,y_j,...,x_n)|dy_j.$$

Tästä saadaan vielä erityisesti

$$|v(x)|^{\frac{n}{n-1}}\le\prod_{j=1}^n\left(\int_0^1|Du(x_1,...,y_j,...,x_n)|dy_j\right)^{\frac{1}{n-1}}.\tag{4.14}$$

Integroidaan tätä arviota muuttujan x_1 suhteen ja käytetään Hölderin epäyhtälöä 4.11, jotta saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 |v|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_0^1 \prod_{j=1}^n \left(\int_0^1 |Du| dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_0^1 |Dv| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_0^1 \prod_{j=2}^n \left(\int_0^1 |Dv| dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left(\int_0^1 |Dv| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^n \left(\int_0^1 \int_0^1 |Dv| dx_1 dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Samalla menetelmällä voidaan edelleen integroida tätä jokaisen muuttujan $x_2, ..., x_n$ suhteen ja käyttää Hölderin epäyhtälöä, jolloin lopulta saadaan

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} |v|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 |Dv| dx_1 ... dy_i ... dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{[0,1]^n} |Dv| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Tämä todistaa jo väitteen tapauksessa, jossa $p = 1$. Tutkitaan seuraavaksi tapausta $1 < p < n$. Olkoon $\gamma > 1$ ja sijoitetaan funktio $h := |v|^\gamma$ epäyhtälöön (4.15) ja korotetaan potenssiin $\frac{n-1}{n}$, jolloin saadaan

$$\left(\int_{[0,1]^n} |v|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{[0,1]^n} |D|v|^\gamma| dx = \gamma \int_{[0,1]^n} |v|^{\gamma-1} |Dv| dx$$

ja tälle kun käytetään Hölderin epäyhtälöä, saadaan arvio muotoon

$$\left(\int_{[0,1]^n} |v|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma \left(\int_{[0,1]^n} |v|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{[0,1]^n} |Dv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.16}$$

Seuraavaksi valitaan

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$$

jolloin sopivasti saadaan

$$\frac{(\gamma-1)p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^* \text{ ja } \frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

eli arvio (4.16) muuttuu haluttuun muotoon kun merkitään $C = \gamma$

$$\left(\int_{[0,1]^n} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{[0,1]^n} |Dv|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tässä väite todistettiin funktiolle $v(x) = u(x + x_0)$, mutta koska vakiolla siirtäminen ei periodisessa tapauksessa vaikuta integraalin arvoon, seuraa tästä sama väite myös funktiolle u eli

$$||u||_{L^{p^*}([0,1]^n)} \leq C \, ||Du||_{L^p([0,1]^n)} .$$

□

Lemma 4.22. *Olkoon V avoin ja rajoitettu joukko, jolle $[0,1]^n \subset V$. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus*

$$L : H^1([0,1]^n) \to H^1(\mathbb{R}^n)$$

siten, että kaikilla $u \in H^1([0,1]^n)$

(1) $Lu = u$ m.k. $[0,1]^n$:ssa,

(2) $\mathrm{spt}(Lu) \subset V$ ja

(3) löytyy vakio $C = C(V)$ siten, että

$$||Lu||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \, ||u||_{H^1([0,1]^n)} .$$

Todistus. Todistus löytyy Lawrence C. Evansin kirjasta Partial differential equations sivuilta 254-257. [4] □

Lemma 4.23. *Olkoon $n \geq 3$ ja*

$$p^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Olkoon lisäksi $u \in H^1([0,1]^n)$. Tällöin $u \in L^{p^*}([0,1]^n)$ ja löytyy vakio $C = C(n)$ siten, että

$$||u||_{L^{p^*}([0,1]^n)} \leq C \, ||u||_{H^1([0,1]^n)} .$$

Todistus. Lemman 4.22 nojalla on olemassa lineaarikuvaus

$$L : H^1([0,1]^n) \to H^1(\mathbb{R}^n), \; Lu = \overline{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

siten, että on rajoitettu joukko V, joka on kompaktisti upotettu joukkoon $[0,1]^n$ ja

$$\begin{cases} \overline{u}(x) = u(x) \text{ m.k } x \in [0,1]^n, \\ \operatorname{spt}(\overline{u}) \subset V \text{ ja} \\ ||\overline{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{H^1([0,1]^n)}. \end{cases} \tag{4.17}$$

Käyttämällä hyväksi funktion $\overline{u}$ siloitusta voidaan Lemman 4.20 avulla todeta, että

$$\begin{gathered} \text{on olemassa funktiot } u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ j \in \mathbb{N} \text{ siten, että} \\ \operatorname{spt}(u_j) \text{ on kompakti ja } u_j \to \overline{u} \text{ avaruudessa } H^1(\mathbb{R}^n). \end{gathered} \tag{4.18}$$

Gagliardon, Nirenbergin ja Sobolevin epäyhtälön 4.21 mukaan saadaan epäyhtälö

$$||u_j - u_k||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||Du_j - Du_k||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

kaikilla $j,k \in \mathbb{N}$. Nyt koska u_j suppenee avaruudessa $H^1(\mathbb{R}^n)$ pätee edellisestä epäyhtälöstä

$$u_j \to \overline{u} \text{ avaruudessa } L^{p^*}(\mathbb{R}^n). \tag{4.19}$$

Koska epäyhtälö 4.21 myös antaa arvion $||u_j||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||Du_j||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ voidaan yhdistää ehdot (4.18) ja (4.19), jolloin saadaan

$$||\overline{u}||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||D\overline{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ja koska ehdon (4.17) mukaan $\overline{u}(x) = u(x)$ m.k $x \in [0,1]^n$ on lopulta

$$||u||_{L^{p^*}([0,1]^n)} \leq C\,||u||_{H^1([0,1]^n)}$$

eli väite on todistettu. $\square$

Lemma 4.24. ***(L^p-normien interpolaatioepäyhtälö)***
Olkoot $0 < \theta < 1$, luvut $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$, joille pätee

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$$

ja olkoon lisäksi funktio $u \in L^s([0,1]^n) \cap L^t([0,1]^n)$. Tällöin $u \in L^r([0,1]^n)$ ja pätee

$$||u||_{L^r([0,1]^n)} \leq ||u||^{\theta}_{L^s([0,1]^n)}\,||u||^{1-\theta}_{L^t([0,1]^n)}.$$

Todistus. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä 4.11 saadaan

$$||u||^r_{L^r([0,1]^n)} = \int_{[0,1]^n} |u|^r dx = \int_{[0,1]^n} |u|^{\theta r}|u|^{(1-\theta)r} dx$$

$$\leq \left(\int_{[0,1]^n} |u|^{\theta r \frac{s}{\theta r}} dx \right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_{[0,1]^n} |u|^{(1-\theta) r \frac{t}{(1-\theta) r}} dx \right)^{\frac{(1-\theta) r}{t}}$$
$$= ||u||^{\theta r}_{L^s([0,1]^n)} \, ||u||^{(1-\theta) r}_{L^t([0,1]^n)}$$

jota voidaan käyttää, koska

$$\frac{\theta r}{s} + \frac{(1-\theta) r}{t} = 1.$$

□

Määritelmä 4.25. Olkoon $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ reaalinen funktiojono. Sanotaan, että $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ on tasaisesti yhtäjatkuva, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|u_j(x) - u_j(y)| < \epsilon$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $j \in \mathbb{N}$ aina, kun $|x - y| < \delta$.

Lemma 4.26. ***(Arzelan ja Ascolin kompaktiuskriteeri)***
Olkoon $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ reaalinen jono funktioita joukolta $[0,1]^n$ jolle on vakio M siten, että

$$|u_j(x)| \leq M$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ lisäksi tasaisesti yhtäjatkuva. Tällöin on olemassa osajono

$$\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$$

ja jatkuva funktio u siten, että $u_{j_m} \to u$ tasaisesti joukossa $[0,1]^n$ kun $m \to \infty$.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että väite pätee kun $n = 1$. Tällöin väite tulee muotoon, jossa funktiot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ovat väliltä $[0,1]$. Tiedetään, että rationaaliluvut ovat numeroituva joukko, eli toisin sanottuna voidaan määrittää reaalijono $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, joka käy kaikki välin $[0,1]$ rationaaliluvut läpi. Koska oletuksen nojalla funktiot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ovat rajoitettuja myös jono $\{u_j(x_1)\}_{j=1}^{\infty}$ on rajoitettu, jolloin Bolzanon ja Weierstrassin lauseen 2.17 mukaan on olemassa osajono

$$\{u_{j_{m,1}}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$$

jolle $\{u_{j_{m,1}}(x_1)\}$ suppenee. Toistamalla sama päättely jonolla $\{u_{j_{m,1}}(x_2)\}$ saadaan muodostettua osajono

$$\{u_{j_{m,2}}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{u_{j_{m,1}}\}_{m=1}^{\infty}$$

jolle $\{u_{j_{m,2}}(x_2)\}$ suppenee ja induktioperiaatteen omaisesti tätä jatkamalla saadaan kasa osajonoja

$$\{u_{j_{m,1}}\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \{u_{j_{m,2}}\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \ldots$$

siten, että jokaisella $l \in \mathbb{N}$ jono $\{u_{j_{m,l}}\}_{m=1}^{\infty}$ suppenee pisteissä $x_1, ..., x_l$. Seuraavaksi muodostetaan diagonaalisesti osajono $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$ siten, että sen jäsen u_t on t:nnen aiemmin määritetyn osajonon t:s jäsen eli toisin sanottuna

$$u_t = u_{j_{t,t}}.$$

Nyt tämän osajonon konstruktiosta nähdään, että $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$ suppenee jokaisessa välin $[0,1]$ rationaalipisteessä. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ ja $x_k \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ on olemassa kokonaisluku $N = N(\epsilon, x_k)$ siten, että uudelle osajonolle pätee

$$|u_n(x_k) - u_m(x_k)| < \frac{\epsilon}{3},$$

aina, kun $n, m \geq N$ ja koska alussa oletettiin $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ tasaisesti yhtäjatkuvaksi on tälle juuri kiinnitetylle ϵ ja jokaiselle $x \in [0,1]$ olemassa avoin väli U_x jolle $x \in U_x$ siten, että

$$|u_j(r) - u_j(s)| < \frac{\epsilon}{3}$$

jokaiselle $u_j \in \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ja $r, s \in U_x$. Näistä avoimista väleistä $U_x, x \in [0,1]$ saadaan muodostettua avoin peite välille $[0,1]$ ja koska $[0,1]$ on suljettuna ja rajoitettuna välinä kompakti, on kompaktiuden määritelmän nojalla tälle olemassa äärellinen osapeite $U_1, ..., U_J$. Nyt on olemassa luku $K \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\begin{aligned} &\text{jokainen avoin joukko } U_j, 1 \leq j \leq J, \\ &\text{sisältää rationaaliluvun } x_k, \text{ kun } 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Nyt voidaan todeta, että jokaiselle $y \in [0,1]$ on olemassa j ja k siten, että y ja x_k kuuluvat samalle välille U_j ja tälle valitulle k:lle saadaan lopulta

$$\begin{aligned} |u_n(y) - u_m(y)| &\leq |u_n(y) - u_n(x_k)| + |u_n(x_k) - u_m(x_k)| + |u_m(x_k) - u_m(y)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

kaikilla $n, m > N = \max\{N(\epsilon, x_1), ..., N(\epsilon, x_K)\}$ eli toisin sanottuna osajono $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono ja Lemmassa 2.18 näytettiin, että jokainen Cauchyn jono suppenee $\mathbb{R}$:ssä. Siis väite on todistettu kun $n = 1$.

Yleisessä tapauksessa $[0,1]^n$:ssä voidaan käyttää edellisen erikoistapauksen todistusta jotta saadaan ensimmäisen koordinaatin suhteen osajono joka suppenee tasaisesti ja edelleen tästä osajono joka suppenee ensimmäisen kahden koordinaatin suhteen ja tätä jatkamalla saadaan väite todistettua koko $[0,1]^n$:lle. $\square$

Lause 4.27. ***(Rellich ja Kondrashov)*** *Olkoon $n > 2$ ja olkoon lisäksi*

$$p^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Tällöin avaruus $H^1([0,1]^n)$ on kompaktisti upotettu avaruuteen $L^q([0,1]^n)$ kaikilla $1 \leq q < p^*$. Lisäksi, kun $n = 2$ avaruus $H^1([0,1]^n)$ on kompaktisti upotettu avaruuteen $L^p([0,1]^n)$ kaikilla $p \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $1 \leq q < p^*$. Lemmasta 4.23 seuraa, että

$$H^1([0,1]^n) \subset L^q([0,1]^n), \; ||u||_{L^q([0,1]^n)} \leq C\, ||u||_{H^1([0,1]^n)}\,.$$

Väitteen osoittamiseksi riittää siis näyttää, että rajoitetulle jonolle $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^1([0,1]^n)$ on olemassa osajono $\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ joka suppenee avaruudessa $L^q([0,1]^n)$.
Lemman 4.22 avulla voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa, että:

(1) $[0,1]^n$ voidaan vaihtaa joukkoon $\mathbb{R}^n$,
(2) on olemassa avoin rajoitettu joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että funktioille $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ pätee

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{spt}(u_j) \subset V \tag{4.21}$$

(3) ja lisäksi pätee

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} ||u_j||_{H^1(V)} < \infty. \tag{4.22}$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja tämän avulla määritellään funktioille u_j siloitetut versiot

$$u_{\epsilon,j} := \eta_\epsilon * u_j, \; j \in \mathbb{N},$$

missä η_ϵ on Määritelmässä 4.19 esitelty siloittaja, jolloin myös näille funktioille pätee myös aiemmin todettu ehto (4.21) eli

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{spt}(u_{\epsilon,j}) \subset V.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\begin{gathered}\text{jokainen } u_{\epsilon,j} \text{ suppenee avaruudessa } L^q(V)\\ \text{tasaisesti kohti funktiota } u_j, \text{ kun } \epsilon \to 0.\end{gathered} \tag{4.23}$$

Tätä varten todetaan, että jos olisi $u_j \in C^\infty(V)$, niin tällöin

$$u_{\epsilon,j}(x) - u_j(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_j(x - \epsilon y) - u_j(x))dy$$

$$= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}(u_j(x - \epsilon t y))dtdy$$

$$= -\epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_j(x - \epsilon t y) \cdot y \, dtdy$$

jolloin lisäämällä itseisarvot, integroimalla ja huomaamalla, että uloimmassa integraalissa $y \in B(0,1)$, saadaan arvio

$$\int_V |u_{\epsilon,j}(x) - u_j(x)|dx$$

$$\leq \epsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_j(x - \epsilon t y)|dxdtdy$$

$$\leq \epsilon \int_V |Du_j(z)|dz.$$

Approksimoinnin avulla edellinen arvio pätee myös, kun $u_j \in H^1(V)$, joten rajoitetussa joukossa V pätee

$$||u_{\epsilon,j} - u_j||_{L^1(V)} \leq \epsilon \, ||Du_j||_{L^1(V)} \leq \epsilon C \, ||Du_j||_{L^2(V)}$$

eli toisin sanottuna tästä ja (4.22) seuraa, että jokainen $u_{\epsilon,j}$ suppenee avaruudessa $L^1(V)$ tasaisesti kohti funktiota u_j, kun $\epsilon \to 0$. Kuitenkin tätä saadaan sovellettua myös tasaiseen suppenemiseen avaruudessa $L^q(V)$: koska $1 \leq q < p^*$, voidaan käyttää interpolaatioepäyhtälöä 4.24 jonka mukaan

$$||u_{\epsilon,j} - u_j||_{L^q(V)} \leq ||u_{\epsilon,j} - u_j||^{\theta}_{L^1(V)} \, ||u_{\epsilon,j} - u_j||^{1-\theta}_{L^{p^*}(V)} \tag{4.24}$$

kun $0 < \theta < 1$ ja $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$. Nyt käyttämällä Gagliardon, Nirenbergin ja Sobolevin epäyhtälöä 4.21 edelliseen arvioon (4.24) saadaan lopulta

$$||u_{\epsilon,j} - u_j||_{L^q(V)} \leq C \, ||u_{\epsilon,j} - u_j||^{\theta}_{L^1(V)}$$

josta nähdään, että tasainen suppeneminen avaruudessa $L^q(V)$ seuraa suoraan tasaisesta suppenemisesta avaruudessa $L^1(V)$ eli väite (4.23) on todistettu.

Seuraavaksi osoitetaan, että

$$\begin{aligned}&\text{kaikille } \epsilon > 0 \text{ funktioperhe } \{u_{\epsilon,j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ on}\\ &\text{tasaisesti rajoitettu ja tasaisesti yhtäjatkuva.}\end{aligned} \tag{4.25}$$

Tässä tasainen rajoittuneisuus tarkoittaa sitä, että jokainen funktioista voidaan rajoittaa samalla vakiolla.

Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}^n$, jolloin jokaiselle $u_{\epsilon,j}$, $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} |u_{\epsilon,j}(x)| &\leq \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)|u_j(y)|dy \\ &\leq ||\eta_\epsilon||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \, ||u_j||_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\epsilon^n} < \infty \end{aligned}$$

ja vastaavasti näiden derivaatoille pätee jokaiselle $u_{\epsilon,j}$, $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |Du_{\epsilon,j}(x)| &\leq \int_{B(x,\epsilon)} |D\eta_\epsilon(x-y)||u_j(y)|dy \\ &\leq ||D\eta_\epsilon||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \, ||u_j||_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\epsilon^{n+1}} < \infty \end{aligned}$$

ja ehto (4.25) seuraa näistä kahdesta. Kiinnitetään seuraavaksi $\delta > 0$. Koska aiemmin osoitettiin (4.23) eli $u_{\epsilon,j}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota u_j, voidaan valita niin pieni $\epsilon > 0$, että pätee

$$||u_{\epsilon,j} - u_j||_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2} \tag{4.26}$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Koska aiemmin oletettiin, että funktioille $u_{\epsilon,j}$ pätee

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{spt}(u_{\epsilon,j}) \subset V$$

voidaan käyttämällä aiemmin osoitettua ehtoa (4.25) ja lemmmaa 4.26 löytää osajono $\{u_{\epsilon,j_m}\}_{m=1}^\infty \subset \{u_{\epsilon,j}\}_{j=1}^\infty$ joka suppenee tasaisesti V:ssä. Erityisesti tästä saadaan siis

$$\limsup_{m,k\to\infty} ||u_{\epsilon,j_m} - u_{\epsilon,j_k}||_{L^q(V)} = 0$$

jolloin kuitenkin tästä ja yhtälöstä (4.26) seuraa että tälle osajonolle pätee

$$\limsup_{m,k\to\infty} ||u_{j_m} - u_{j_k}||_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{4.27}$$

Nyt saadaan tästä löydetystä osajonosta konstruoitua haluttu osajono $\{u_{j_l}\}_{l=1}^\infty$ siten, että valitaan u_{j_1}:ksi se funktio osajonosta $\{u_{j_m}\}_{m=1}^\infty$, jolle ehto (4.27) pätee, kun $\delta = 1$ ja edelleen u_{j_l} on se funktio jolle tämä ehto pätee, kun $\delta = l^{-1}$. Tällä tavalla saatu jono $\{u_{j_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{u_j\}_{j=1}^\infty$ toteuttaa yhtälön

$$\limsup_{l,k\to\infty} ||u_{j_l} - u_{j_k}||_{L^q(V)} = 0$$

mikä on haluttu osajono. $\square$

Lause 4.28. ***(Poincarén epäyhtälö)***
Jokaiselle funktiolle $u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *pätee epäyhtälö*

$$||u||_{L^2([0,1]^n)} \leq C\,||Du||_{L^2([0,1]^n)}\,.$$

Todistus. Jos $||u||_{L^2([0,1]^n)} = 0$ on väite triviaali eli voidaan olettaa, että

$$||u||_{L^2([0,1]^n)} \neq 0.$$

Tehdään antiteesi: jokaiselle kokonaisluvulle $k = 1, 2, ...$ on olemassa funktio $u_k \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$, jolle

$$||u_k||_{L^2([0,1]^n)} > k\,||Du_k||_{L^2([0,1]^n)}\,. \tag{4.28}$$

Määrittämällä näille normitetut versiot

$$v_k := \frac{u_k}{||u_k||_{L^2([0,1]^n)}}$$

huomataan, että antiteesistä (4.28) seuraa

$$||Dv_k||_{L^2([0,1]^n)} < \frac{1}{k} \tag{4.29}$$

ja lisäksi nämä funktiot ovat rajoitettuja avaruudessa $H^1_{per,0}([0,1]^n)$. Koska Rellichin ja Kondrashovin lauseesta 4.27 seuraa, että $H^1([0,1]^n)$ on kompaktisti upotettu avaruuteen $L^2([0,1]^n)$ eli toisin sanottuna, koska $H^1_{per,0}([0,1]^n)$ on suljettu aliavaruus $H^1([0,1]^n)$:lle löytyy osajono $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{j=1}^{\infty}$ ja funktio $v \in L^2([0,1]^n)$ siten, että

$$v_{k_j} \to v \quad \text{avaruudessa} \quad L^2([0,1]^n)$$

ja funktioiden v_k konstruktiosta nähdään, että

$$||v||_{L^2([0,1]^n)} = 1 \quad \text{ja} \quad \int_{[0,1]^n} v dx = 0. \tag{4.30}$$

Nyt ehdosta (4.29) seuraa jokaiselle $t = 1, ..., n$ ja $\phi \in C_0^\infty([0,1]^n)$

$$\int_{[0,1]^n} v\phi_{x_t} dx = \lim_{k_j \to \infty} \int_{[0,1]^n} v_{k_j}\phi_{x_t} dx = -\lim_{k_j \to \infty} \int_{[0,1]^n} v_{k_j,x_t}\phi dx = 0$$

jolloin siis $v \in H^1([0,1]^n)$, missä $Dv = 0$ m.k. Tästä seuraa yhdessä joukon $[0,1]^n$ yhtenäisyyden kanssa, että funktion v täytyy olla vakio, mutta ehdon (4.30) mukaan $\int_{[0,1]^n} v dx = 0$ eli $v \equiv 0$ mikä on ristiriidassa ehdon $||v||_{L^2([0,1]^n)} = 1$ kanssa. Siispä täytyy olla

$$||u||_{L^2([0,1]^n)} \leq C\,||Du||_{L^2([0,1]^n)}\,.$$

□

Lemma 4.29. *$H^1_{per}([0,1]^n)$ on Hilbertin avaruus.*

Todistus. Koska $H^1_{per}([0,1]^n) \subset H^1_{loc}([0,1]^n) \subset L^2([0,1]^n)$ on kaikki suljettuja aliavaruuksia, pätee avaruuden täydellisyys suoraan aliavaruuksille, jos se pätee avaruudelle $L^2([0,1]^n)$. Toisin sanottuna väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että $L^2([0,1]^n)$ on Hilbertin avaruus. Tätä varten osoitetaan aluksi, että $L^2([0,1]^n)$ on sisätuloavaruus. Tämän avaruuden luonnollisena sisätulona toimii

$$(v|w) := \int_{[0,1]^n} v(x) \cdot w(x)dx$$

ja tälle pätevät selvästi ehdot

(1) $(v|v) = \int_{[0,1]^n} v(x)^2 dx \geq 0, \quad \int_{[0,1]^n} v(x)^2 dx = 0 \iff v = 0$ m.k. $x \in [0,1]^n$

(2) $(v|w) = \int_{[0,1]^n} v(x) \cdot w(x)dx = \int_{[0,1]^n} w(x) \cdot v(x)dx = (w|v)$

(3) $(\lambda v_1 + \mu v_2|w) = \int_{[0,1]^n} (\lambda v_1(x) + \mu v_2(x)) \cdot w(x)dx$

$$= \lambda \int_{[0,1]^n} v_1(x) \cdot w(x)dx + \mu \int_{[0,1]^n} v_2(x) \cdot w(x)dx = \lambda(v_1|w) + \mu(v_2|w)$$

mistä seuraa, että $L^2([0,1]^n)$ on sisätuloavaruus.

Osoitetaan vielä, että $L^2([0,1]^n)$ on täydellinen eli otetaan mielivaltainen Cauchyn jono ja osoitetaan, että se suppenee avaruudessa $L^2([0,1]^n)$. Olkoon tämä jono

$$\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^2([0,1]^n)$$

eli tälle jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$||u_k - u_l||_{L^2([0,1]^n)} < \epsilon$$

kaikilla $k, l \geq N$. Siis on olemassa jono $\{m_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ siten, että pätee

$$\left|\left|u_{m_{j+1}} - u_{m_j}\right|\right|_{L^2([0,1]^n)} < \frac{1}{2^j} \text{ kaikilla } j \geq 1.$$

Määritellään seuraavaksi funktiot

$$u(x) = u_{m_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (u_{m_{j+1}}(x) - u_{m_j}(x))$$

ja

$$g(x) = |u_{m_1}(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_{m_{j+1}}(x) - u_{m_j}(x)|$$

sekä näiden osasummat

$$u_K(x) = u_{m_1}(x) + \sum_{j=1}^{K} (u_{m_{j+1}}(x) - u_{m_j}(x))$$

ja

$$g_K(x) = |u_{m_1}(x)| + \sum_{j=1}^{K} |u_{m_{j+1}}(x) - u_{m_j}(x)|.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla jälkimmäiselle osasummalle pätee

$$\begin{aligned} ||g_K||_{L^2([0,1]^n)} &\leq ||u_{m_1}||_{L^2([0,1]^n)} + \sum_{j=1}^{K} \left|\left|u_{m_{j+1}} - u_{m_j}\right|\right|_{L^2([0,1]^n)} \\ &\leq ||u_{m_1}||_{L^2([0,1]^n)} + \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Viemällä $K \to \infty$ nähdään suoraan, että käyttämällä monotonista konvergenssia 4.13 funktion u määrittelevä sarja suppenee pisteittäin ja $u \in L^2([0,1]^n)$. Huomataan seuraavaksi, että

$$\begin{aligned} |u(x) - u_K(x)|^2 &\leq (\max\{|u(x)|, |u_K(x)|\})^2 \\ &\leq 4|u(x)|^2 + 4|u_K(x)|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $K \in \mathbb{N}$ ja tällöin voidaan käyttää dominoitua konvergenssia 4.18, jonka avulla saadaan

$$\left|\left|u_{m_j} - u\right|\right|_{L^2([0,1]^n)} \to 0 \text{ kun } j \to \infty.$$

Nyt yhdistämällä tämä tieto siihen, että alkuperäinen jono oli Cauchyn jono, on kaikilla $\epsilon > 0$ olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$||u_j - u||_{L^2([0,1]^n)} \leq \left|\left|u_j - u_{m_j}\right|\right|_{L^2([0,1]^n)} + \left|\left|u_{m_j} - u\right|\right|_{L^2([0,1]^n)} < \epsilon$$

aina, kun $j, m_j \geq N$. Tällöin $L^2([0,1]^n)$ on Hilbertin avaruus. □

Määritelmä 4.30. Olkoon jono $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1_{per}([0,1]^n)$. Sanotaan, että jono $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ *suppenee heikosti* kohti funktiota $h \in H^1_{per}([0,1]^n)$ jos jokaiselle $v \in H^1_{per}([0,1]^n)$ pätee avaruuden $H^1([0,1]^n)$ luonnolliselle sisätulolle

$$(v, h_k) \to (v, h)$$

ja merkitään tätä

$$h_k \rightharpoonup h.$$

Huomautus 4.31. On helppo todeta, että aina kun $h_k \to h$ niin myös $h_k \rightharpoonup h$. Lisäksi jokainen heikosti suppeneva jono on rajoitettu.

Lemma 4.32. *Olkoon jono* $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1_{per}([0,1]^n)$ *rajoitettu. Tällöin löytyy osajono* $\{h_{k_j}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ja funktio* $h \in H^1_{per}([0,1]^n)$ *siten, että*

$$h_{k_j} \rightharpoonup h$$

eli toisin sanottuna jokaisella rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono.

Todistus. Koska $H^1_{per}([0,1]^n) \subset H^1([0,1]^n)$ on heikosti suljettu aliavaruus, riittää näyttää, että jokaisella avaruuden $H^1([0,1]^n)$ rajoitetulla jonolla on heikosti suppeneva osajono. Tätä varten osoitetaan aluksi, että

$$\text{avaruudella } H^1([0,1]^n) \text{ on tiheä ja numeroituva osajoukko.} \tag{4.31}$$

Määritellään jatkuva lineaarikuvaus

$$K : H^1([0,1]^n) \to \underbrace{L^2([0,1]^n) \times ... \times L^2([0,1]^n)}_{n+1},$$

$$K(h) = \left(h, \frac{\partial h}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial h}{\partial x_n}\right)$$

joka on isometria, eli jokaiselle $h \in H^1([0,1]^n)$ on

$$||h||_{H^1([0,1]^n)} = ||K(h)||_{L^2([0,1]^n) \times ... \times L^2([0,1]^n)}$$

ja koska $H^1([0,1]^n)$ on Hilbertin avaruus on $K(H^1([0,1]^n))$ suljettu aliavaruus Hilbertin avaruudelle $L^2([0,1]^n) \times ... \times L^2([0,1]^n)$. Olkoon $\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^1([0,1]^n)$ jono siten, että $K(h_j)$ suppenee avaruudessa $L^2([0,1]^n) \times ... \times L^2([0,1]^n)$ pisteeseen $(f_0, f_1, ..., f_n)$. Tällöin siis pätee

$$h_j \to f_0 \text{ ja } \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \to f_k, \ k = 1, ..., n$$

avaruudessa $L^2([0,1]^n)$ kun $j \to \infty$. Nyt koska kaikilla $\phi \in C_0^{\infty}([0,1]^n)$

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x)\phi(x)dx = -\int_{[0,1]^n} h_j(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x)x$$

ja tästä viemällä $j \to \infty$ saadaan

$$\int_{[0,1]^n} f_k(x)\phi(x)dx = -\int_{[0,1]^n} f_0(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x)x$$

eli toisin sanottuna $f_0 \in H^1([0,1]^n)$ ja $K(f_0) = (f_0, f_1, ..., f_n)$.
Seuraavaksi todetaan, että avaruudella $L^2([0,1]^n)$ on jo olemassa tiheä

ja numeroituva aliavaruus. Koska jokaista avaruuden $L^2([0,1]^n)$ funktiota voi approksimoida karakteristisilla funktioilla, muodostaa suljettujen rationaali-intervallien karakterististen funktioiden virittämä aliavaruus

$$\langle\{\chi_{[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]} : a_j, b_j \in (\mathbb{Q}\cap[0,1]), j = 1, ..., n\}\rangle$$

avaruudelle $L^2([0,1]^n)$ kannan ja tällöin edelleen avaruudella $L^2([0,1]^n)\times...\times L^2([0,1]^n)$ on myös tiheä ja numeroituva kanta valitsemalla jokaiselle näistä edellä esitelty aliavaruus. Koska $K(H^1([0,1]^n))$ on tälle suljettu aliavaruus ja K on isometria, myös avaruudella $H^1([0,1]^n)$ on tiheä ja numeroituva aliavaruus eli ehto (4.31) on todistettu.
Otetaan nyt jono $\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^1([0,1]^n)$ joka on rajoitettu eli on $M > 0$ siten, että

$$|h_j(x)| < M$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $x \in [0,1]^n$. Koska avaruudelle $H^1([0,1]^n)$ on olemassa tiheä ja numeroituva aliavaruus voidaan Fréchet'n ja Rieszin esityslauseesta 2.26 nähdä, että sama ominaisuus pätee myös tämän duaalille $(H^1)'([0,1]^n)$ eli voidaan ottaa duaalille tiheä ja numeroituva aliavaruus $\{x_1', x_2'...\}$. Käyttämällä Bolzanon ja Weierstrassin lausetta 2.17 voidaan löytää osajono

$$\{h_{j_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{h_j\}_{j=1}^{\infty}$$

siten, että $x_1'(h_{j_{k,1}})$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä. Samalla päättelyllä jokaiselle x_t', $t = 2, ...$ löytyy osajono

$$\{h_{j_{k,t}}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{h_{j_{k,t-1}}\}_{k=1}^{\infty}$$

jolle $x_t'(h_{j_{k,t}})$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä. Erityisesti tästä saadaan osajonot

$$\{h_{j_{k,1}}\}_{k=1}^{\infty} \supseteq \{h_{j_{k,2}}\}_{k=1}^{\infty} \supseteq ...$$

siten, että jokaisella $l \in \mathbb{N}$ jono $x_r'(h_{j_{k,l}})_{k=1}^{\infty}$ suppenee kaikilla $1 \le r \le l$. Nyt saadaan "diagonaalisesti" muodostettua osajono $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, jolle u_m on m:nnen aiemmin määritetyn osajonon m:s jäsen eli

$$u_m = h_{j_{m,m}}$$

jolle edellisestä konstruktiosta on helppo huomata, että $\{x_k'(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ suppenee kaikilla x_k', $k \in \mathbb{N}$. Nyt mille tahansa $x' \in H'^1([0,1]^n)$ ja kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa tiheyden nojalla x_m', jolle $||x' - x_m'|| < \epsilon$ ja tällöin

$$\begin{gathered} ||x'(u_k) - x'(u_l)|| \le \\ ||x'(u_k) - x_m'(u_k)|| + ||x_m'(u_k) - x_m'(u_l)|| + ||x_m'(u_l) - x'(u_l)|| \\ \le (2\sup_{m\in\mathbb{N}} ||u_m|| + 1)\epsilon \end{gathered}$$

aina, kun $k, l > N$ eli toisin sanottuna $\{x'(u_m)\}_{m=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono. Toisaalta Lemman 2.18 mukaan Cauchyn jonot suppenee $\mathbb{R}$:ssä joten lineaarikuvaus $L(x') := \lim_{m\to\infty} x'(u_m)$ on hyvin määritelty ja rajoitettu, koska

$$|L(x')| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} ||u_m|| \, ||x'|| \, .$$

Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen mukaan jokaiselle x' on $x \in H^1([0,1]^n)$ siten, että

$$x'(v) = (v|x), \; ||x'||_{op} = ||x||$$

kaikilla $v \in H^1([0,1]^n)$ eli $L(x') = \lim_{m\to\infty} x'(u_m) = \lim_{m\to\infty} (u_m|x)$.
Toisin sanottuna on olemassa reaaliluku c siten, että

$$c := L(x') = \lim_{m\to\infty} (u_m|x)$$

ja koska jono $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ oli määritelty jonon $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ osajonona tämä todistaa väitteen. $\square$

5. Divergenssimuotoiset yhtälöt

Siirrytään tutkimaan elliptisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaa, jossa Lebesgue- ja Sobolev-avaruudet ovat keskeisessä roolissa.

Määritelmä 5.1. Olkoon vektorikenttä $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$F = (F_1, ..., F_n)$ sileä, eli $F_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $1 \leq j \leq n$.
Vektorikentän F divergenssi määritellään siten, että

$$\operatorname{div}(F) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Lause 5.2. ***(Divergenssilause)*** *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sileä vektorikenttä. Tällöin pätee*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} dS,$$

missä $\hat{n}$ on ulospäin osoittava normaalivektori joukon Ω reunalle.

Todistus. Todistus on esitetty viitteessä [3]. $\square$

Lemma 5.3. *(1) Divergenssille pätee seuraavanlainen tulosääntö:
Olkoon $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reaalinen vektorifunktio ja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
sileä vektorikenttä. Tällöin*

$$\operatorname{div}(\phi F) = D\phi \cdot F + \phi \operatorname{div} F.$$

*(2) Lisäksi tästä saadaan divergenssille osittaisintegrointikaava:
Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$ ja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sileä vektorikenttä. Tällöin*

$$\int_\Omega \phi \operatorname{div} F dx = \int_\Omega (\operatorname{div}(\phi F) - D\phi \cdot F) dx = -\int_\Omega D\phi \cdot F$$

Todistus. (1) Yksinkertaisella laskulla

$$\operatorname{div}(\phi F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\phi F_j)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \left(F_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \phi \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = D\phi \cdot F + \phi \operatorname{div} F.$$

(2) Olkoot funktiot $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Näille käyttämällä kohtaa (1) saadaan

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\phi_j F) dx = \int_\Omega (D\phi_j \cdot F + \phi_j \operatorname{div} F) dx$$

eli uudelleen sijoittelulla saadaan

$$\int_\Omega \phi_j \operatorname{div} F dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\phi_j F) dx - \int_\Omega D\phi_j \cdot F dx.$$

Toisaalta käyttämällä ensimmäiseen integraaliin divergenssilausetta 5.2 huomataan, että pätee

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\phi_j F) dx = \int_{\partial\Omega} \phi_j F \cdot \hat{n} dS = 0$$

sillä funktio ϕ_j on oletuksen nojalla nollaa joukon Ω reunalla ja tästä saadaan funktioille $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ osoitettua väite

$$\int_\Omega \phi_j \operatorname{div} F dx = -\int_\Omega D\phi_j \cdot F dx.$$

Oletuksesta $\phi \in H_0^1(\Omega)$ seuraa $\phi_j \to \phi$ $H^1(\Omega)$:ssa eli tämä ominaisuus säilyy rajalla myös funktiolle ϕ. □

Määritelmä 5.4. Olkoon $A(x)$ symmetrinen $n \times n$-matriisi. Tällöin sanotaan, että osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$-\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = f(x)$$

on elliptinen, jos on olemassa vakiot $\lambda, \Lambda > 0$ siten, että

(I) $A(x)\xi \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^2$

(II) $||A(x)||_{op} \leq \Lambda$

kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$ ja $x \in \Omega$.

Lemma 5.5. *Olkoon $A(x)$ matriisi joka toteuttaa Määritelmän 5.4 ehdot. Tällöin kuvaus*

$$(\cdot|\cdot)_A : H^1_{per,0}([0,1]^n) \times H^1_{per,0}([0,1]^n) \to \mathbb{R}, (w|v)_A = \int_{[0,1]^n} A(x)Dw \cdot Dvdx$$

määrittelee sisätulon avaruuteen $H^1_{per,0}([0,1]^n)$.

Todistus.

(1) Suoraan määritelmästä ja elliptisyysehdosta saadaan

$$(v|v)_A = \int_{[0,1]^n} A(x)Dv \cdot Dv\, dx \geq \lambda \int_{[0,1]^n} |Dv|^2 dx = \lambda\, ||Dv||^2_{L^2} \geq 0.$$

Väitteen toinen osa saadaan myös tästä epäyhtälöstä: Jos $(v|v)_A = 0$ tästä saadaan normin ominaisuuksia käyttämällä, että $Dv = 0$ melkein kaikkialla. Siis funktio v on vakio melkein kaikkialla ja oletuksesta $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ seuraa, että tämän

vakion täytyy olla 0.
Toisaalta toinen suunta on selvä, sillä kun $v = 0$ integraali on myös selvästi 0.

(2) Matriisin symmetrisyyden nojalla matriisin alkioille pätee $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $1 \leq i, j \leq n$ joten saadaan

$$(v|w)_A = \int_{[0,1]^n} A(x)Dv \cdot Dw\, dx = \int_{[0,1]^n} ((\sum_{i=1}^n a_{1i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_1}) + ...$$

$$+ (\sum_{i=1}^n a_{ni}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_n}))\, dx = \int_{[0,1]^n} ((\sum_{i=1}^n a_{1i}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_1}) + ...$$

$$+ (\sum_{i=1}^n a_{ni}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_n}))\, dx = \int_{[0,1]^n} A(x)Dw \cdot Dv\, dx = (w|v)_A$$

(3) Väite on selvä, sillä integraali, gradientti, pistetulo ja matriisi $A(x)$ ovat kaikki lineaarisia.

$\square$

Lemma 5.6. *Olkoon $f \in L^2([0,1]^n)$. Tällöin kuvaus*

$$L_f : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to \mathbb{R},\ L_f(v) = \int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx$$

on operaattori Lemmassa 5.5 määritellyn sisätulon indusoidun normin suhteen.

Todistus.

$$|L_f(g)| = \left| \int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx \right| \leq \int_{[0,1]^n} |f(x)v(x)|dx = ||f(x)v(x)||_{L^1([0,1]^n)}\,.$$

Tästä saadaan Hölderin 4.11 ja Poincarén 4.28 epäyhtälöillä

$$\begin{aligned} ||f(x)v(x)||_{L^1([0,1]^n)} &\leq ||f(x)||_{L^2([0,1]^n)}\, ||v(x)||_{L^2([0,1]^n)} \\ &\leq C\, ||f(x)||_{L^2([0,1]^n)}\, ||Dv(x)||_{L^2([0,1]^n)} \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\, ||f(x)||_{L^2([0,1]^n)} \sqrt{\int_{[0,1]^n} A(x)Dv(x) \cdot Dv(x)dx} \leq \infty \end{aligned}$$

joten kuvaus on rajoitettu.
Huom: tästä seuraa nyt, että kuvaus L_f on rajoitettu sekä avaruuden luonnollisen normin, että Lemmassa 5.5 määritellyn sisätulon muodostaman normin suhteen.
Lineaarisuus seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta. $\square$

Määritelmä 5.7. Funktion $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$ sanotaan olevan divergenssiyhtälön

$$-\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = f(x)$$

heikko ratkaisu, jos kaikilla $v \in H^1_{per}([0,1]^n)$ pätee

$$\int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx = \int_{[0,1]^n} A(x)Du \cdot Dv\, dx$$

Lause 5.8. *Olkoon funktio $f \in L^2([0,1]^n)$.*
Tällöin elliptisellä yhtälöllä

$$-\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in [0,1]^n$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$.

Todistus. Osoitetaan aluksi ratkaisun olemassaolo. Määritellään kuvaukset

$$L_f : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to \mathbb{R},\ L_f(v) = \int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx$$

ja

$$(\cdot|\cdot)_A : H^1_{per,0}([0,1]^n) \times H^1_{per,0}([0,1]^n) \to \mathbb{R},$$

$$(w|v)_A = \int_{[0,1]^n} A(x)Dw \cdot Dv\, dx.$$

L_f on Lemman 5.6 nojalla rajoitettu lineaarikuvaus ja $(\cdot|\cdot)$ Lemman 5.5 nojalla sisätulo. Tällöin Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen nojalla lineaarikuvaukselle L_f on olemassa $u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ jolle kaikilla $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ pätee $L_f(v) = (v|u)_A$ eli

$$\int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx = \int_{[0,1]^n} A(x)Du \cdot Dv\, dx$$

jolloin u on yhtälön 2.1 heikko ratkaisu.
Oletetaan seuraavaksi, että avaruuden $H^1_{per,0}([0,1]^n)$ funktiot u_1 ja u_2 ratkaisee yhtälön 2.1 jolloin saadaan yhtälöt

(1) $\int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx = \int_{[0,1]^n} A(x)Du_1 \cdot Dv\, dx$ ja
(2) $\int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx = \int_{[0,1]^n} A(x)Du_2 \cdot Dv\, dx$

jotka vähentämällä toisistaan saadaan

$$\int_{[0,1]^n} A(x)D(u_1 - u_2) \cdot Dv\, dx = 0\ \ \forall v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$$

Jos nyt valitaan testifunktio $v = (u_1 - u_2) \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ ja käytetään elliptisyysehtoa pätee

$$0 = \int_{[0,1]^n} A(x)D(u_1 - u_2) \cdot D(u_1 - u_2)\,dx \geq \lambda \int_{[0,1]^n} |D(u_1 - u_2)|^2\,dx$$
$$= \lambda\, ||D(u_1 - u_2)||^2_{L^2([0,1]^n)}$$

jolloin normin määritelmän nojalla täytyy olla $D(u_1 - u_2) = 0$ melkein kaikkialla. Siispä funktio $u_1 - u_2$ on melkein kaikkialla vakio ja oletuksen $u(x) \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ nojalla tämän vakion täytyy olla 0 eli $u_1 = u_2$ melkein kaikilla $x \in [0,1]^n$. $\square$

Nyt siis tiedetään, että elliptisellä yhtälöllä on aina olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$. Seuraava tehtävä onkin näyttää että myös Du on tässä samassa avaruudessa eli toisin sanottuna u on itse asiassa avaruudessa $H^2_{per,0}([0,1]^n)$. Tämän osoittamiseksi tarvitaan muutama aputulos, joista ensimmäisenä Cauchyn epäyhtälö.

Lemma 5.9. ***(Cauchyn epäyhtälö)*** *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee epäyhtälö*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Todistus. Yksinkertaisella laskulla saadaan

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$\iff a^2 + b^2 = 2ab$$
$$\iff ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

$\square$

Lause 5.10. ***(Cauchyn ϵ-epäyhtälö)*** *Olkoon $a, b > 0$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ pätee*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Todistus. Kirjoitetaan tulo ab muotoon

$$ab = \frac{(2\epsilon)^{1/2}}{(2\epsilon)^{1/2}} ab = ((2\epsilon)^{1/2} a)\left(\frac{b}{(2\epsilon)^{1/2}}\right)$$

ja käytetään tälle Cauchyn epäyhtälöä 5.9 jonka mukaan

$$((2\epsilon)^{1/2} a)\left(\frac{b}{(2\epsilon)^{1/2}}\right) \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

$\square$

Määritelmä 5.11. Olkoon $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$. Määritellään

$$D^h_k u(x) = \frac{u(x+he_k)-u(x)}{h}, \quad h \in \mathbb{R} - \{0\},$$

missä $e_k \in [0,1]^n$ on k:nnen koordinaattiakselin suuntainen yksikkövektori.

Lemma 5.12. *Olkoon $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$. Tällöin kaikilla $|h| > 0$ on vakio C, jolle*

$$\int_{[0,1]^n} |D^h u|^2 dx \leq C \int_{[0,1]^n} |Du|^2 dx,$$

missä $D^h u := (D^h_1 u, ..., D^h_n u)$.

Todistus. Kun $k \in \{1,...,n\}$ kaikilla $x \in [0,1]^n$ pätee

$$u(x+he_k) - u(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_k}(x + the_k)dt \cdot h,$$

josta saadaan

$$|u(x+he_k) - u(x)| \leq h \int_0^1 |Du(x+the_k)|dt.$$

Vastaavasti samalla päättelyllä saadaan yhdistettyä

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} |D^h u|^2 dx &\leq C \sum_{k=1}^n \int_{[0,1]^n} \int_0^1 |Du(x+the_k)|^2 dt dx \\ &= C \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_{[0,1]^n} |Du(x+the_k)|^2 dx dt.\end{aligned}$$

jolloin siis myöskin pätee

$$\int_{[0,1]^n} |D^h u|^2 dx \leq C \int_{[0,1]^n} |Du|^2 dx.$$

$\square$

Lemma 5.13. *Olkoon $u \in L^2_{per}([0,1]^n)$ ja oletetaan lisäksi että on olemassa vakio C, jolle*

$$\int_{[0,1]^n} |D^h u|^2 dx \leq C$$

kaikille $|h| > 0$. Tällöin

$$u \in H^1_{per}([0,1]^n) \text{ ja } \int_{[0,1]^n} |Du|^2 \leq C.$$

Todistus. Valitaan $k \in \{1, ..., n\}$, funktio $\Phi \in C^\infty([0,1]^n)$ ja todetaan, että tarpeeksi pienellä h pätee

$$\int_{[0,1]^n} u(x)\left(\frac{\Phi(x+he_k)-\Phi(x)}{h}\right)dx = -\int_{[0,1]^n}\left(\frac{u(x)-u(x-he_k)}{h}\right)\Phi(x)dx$$

eli toisin sanottuna saadaan tälle ”osittaisintegrointikaava”

$$\int_{[0,1]^n} u(D_k^h\Phi)dx = -\int_{[0,1]^n}(D_k^{-h}u)\Phi dx. \tag{5.32}$$

Nyt oletuksen

$$\int_{[0,1]^n} |D^h u|^2 dx \leq C, \text{ kun } |h| > 0,$$

nojalla saadaan myös

$$\sup_h ||D_k^{-h}u||_{L^2([0,1]^n)} < \infty$$

jolloin käyttämällä lemmaa 4.32 löytyy funktio $v_k \in L^2([0,1]^n)$ sekä jono $h_i \to 0$ siten, että

$$D_k^{h_i}u \rightharpoonup v_k \text{ heikossa mielessä } L^2([0,1]^n) : \text{ssä.}$$

Tätä heikkoa suppenemista voidaan hyödyntää siten, että

$$\int_{[0,1]^n} u\Phi_{x_k}dx = \lim_{h_i\to 0}\int_{[0,1]^n} uD_k^{h_i}\Phi dx$$
$$= -\lim_{h_i\to 0}\int_{[0,1]^n} D_k^{-h_i}u\Phi dx = -\int_{[0,1]^n} v_k\Phi dx$$

eli $\frac{\partial}{\partial x_k}u = v_k$ heikossa mielessä. Tällöin siis $Du \in L^2_{per}([0,1]^n)$ ja koska oletuksen nojalla myös $u \in L^2_{per}([0,1]^n)$ erityisesti $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$. $\square$

Lause 5.14. *Olkoon funktio $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$ heikko ratkaisu yhtälölle*

$$-\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in [0,1]^n$$

missä $f \in L^2([0,1]^n)$ ja $(A(x))_{ij} \in C^1([0,1]^n)$. Tällöin

$$u \in H^2_{per}([0,1]^n)$$

ja on olemassa vakio C, jolle

$$||u||_{H^2([0,1]^n)} \leq C(||f||_{L^2([0,1]^n)} + ||u||_{L^2([0,1]^n)}) \tag{5.33}$$

Todistus. Koska funktio $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$ on heikko ratkaisu yhtälölle

$$-\operatorname{div}(A(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in [0,1]^n$$

on toisin sanottuna

$$\int_{[0,1]^n} A(x)Du(x) \cdot Dv(x)dx = \int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx \tag{5.34}$$

kaikilla $v \in H^1_{per}([0,1]^n)$.

5.0.1. ***Yhtälön* (5.34) *vasen puoli*.** Käyttämällä Määritelmää 5.11 valitaan $|h| > 0$ riittävän pieneksi , olkoon $k \in \{1, ..., n\}$ ja valitaan

$$v := -D_k^{-h}(D_k^h u).$$

Yhtälön (5.34) vasen puoli saadaan nyt kirjoitettua muotoon:

$$\int_{[0,1]^n} A(x)Du \cdot Dv dx = -\int_{[0,1]^n} (A(x)Du) \cdot D(D_k^{-h}(D_k^h u))dx$$

josta osittaisintegroimalla ja käyttämällä derivaatan lineaarisuutta

$$-\int_{[0,1]^n} (A(x)Du) \cdot D(D_k^{-h}(D_k^h u))dx = \int_{[0,1]^n} D_k^h(A(x)Du) \cdot D(D_k^h u)dx$$

$$= \int_{[0,1]^n} A(x+he_k)(D_k^h Du) \cdot D(D_k^h u) + (D_k^h A(x))Du \cdot (D(D_k^h u))dx$$

$$= \int_{[0,1]^n} A(x+he_k)(D_k^h Du) \cdot (D_k^h Du)dx + \int_{[0,1]^n} (D_k^h A(x))Du \cdot (D_k^h Du)dx$$

$$=: I_1 + I_2$$

Näistä kahdesta integraalista ensimmäiselle saadaan alaraja suoraan elliptisyysehdosta

$$I_1 \geq \lambda \int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx. \tag{5.35}$$

Käyttämällä hyväksi tietoa $(A(x))_{ij} \in C^1([0,1]^n)$, on selvää, että jokainen $A(x)_{ij}$ on ylhäältä rajoitettu ja toista integraalia voidaan arvioida normin avulla

$$|I_2| \leq C \int_{[0,1]^n} |D_k^h Du||Du|dx$$

jollekin vakiolle $C > 0$. Nyt saadaan Cauchyn ϵ-epäyhtälöä käyttämällä arvio

$$|I_2| \leq \epsilon \int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_{[0,1]^n} |Du|^2 dx.$$

Valinnalla $\epsilon = \frac{\lambda}{2}$ saadaan edelleen kirjoitettua yläraja muotoon

$$|I_2| \leq \frac{\lambda}{2} \int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx + C \int_{[0,1]^n} |Du|^2 dx. \tag{5.36}$$

Jolloin siis koko yhtälön (5.34) vasen puoli saadaan arvioitua yhtälöillä (5.35) ja (5.36)

$$\int_{[0,1]^n} A(x)Du(x)\cdot Dv(x)dx \geq \frac{\lambda}{2}\int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx - C\int_{[0,1]^n} |Du|^2 dx \tag{5.37}$$

5.0.2. ***Yhtälön*** (5.34) ***oikea puoli.*** Arvioidaan seuraavaksi yhtälön (5.34) oikeaa puolta seuraavasti

$$\left|\int_{[0,1]^n} fv dx\right| \leq \int_{[0,1]^n} |f||v| dx.$$

Seuraavaksi todetaan, että Lemman 5.12 nojalla pätee

$$\int_{[0,1]^n} |v|^2 dx \leq C\int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx$$

jota käyttämällä nyt Cauchyn ϵ-epäyhtälön kanssa antaa

$$\int_{[0,1]^n} |f||v| dx \leq \epsilon\int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\epsilon}\int_{[0,1]^n} f^2 dx$$

valinnalla $\epsilon = \frac{\lambda}{4}$ saadaan koko yhtälön (5.34) oikea puoli arvioitua

$$\left|\int_{[0,1]^n} fv dx\right| \leq \frac{\lambda}{4}\int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx + C\int_{[0,1]^n} f^2 dx. \tag{5.38}$$

Nyt kun yhdistetään arviot (5.37) ja (5.38) saadaan tulos

$$\int_{[0,1]^n} |D_k^h Du|^2 dx \leq C\int_{[0,1]^n} (f^2 + |Du|^2) dx \tag{5.39}$$

kaikilla $k = 1, ..., n$, kun $|h| \neq 0$ on riittävän pieni. Tästä seuraa Lemman 5.13 avulla $Du \in H^1_{per}([0,1]^n)$ josta vastaavasti saadaan $u \in H^2_{per}([0,1]^n)$ ja tälle saadaan edellisestä yhtälöstä myös haluttu arvio

$$||u||_{H^2([0,1]^n)} \leq C\big(\,||f||_{L^2([0,1]^n)} + ||u||_{H^1([0,1]^n)}\,\big). \tag{5.40}$$

□

Lause 5.15. *Määritellään heikossa mielessä operaattori* $L : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *siten, että kaikilla* $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$

$$(L[u], v) := \int_{[0,1]^n} (A(x)Du(x))\cdot Dv(x) dx.$$

Määritellään lisäksi tälle käänteisoperaattori
$S : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *siten, että kaikille* $f \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *on* $S[f] = u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *se funktio, joka on ratkaisee yhtälön*

$$(L[u], v) = \int_{[0,1]^n} f(x)v(x)dx$$

kaikilla $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$*. Tällöin* S *on kompakti operaattori.*

Todistus. Lauseessa 5.8 osoitettiin, että jokaiselle $f \in L^2([0,1]^n)$ on olemassa yksikäsitteinen $u \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ joka ratkaisee yhtälön

$$(L[u], v) = (f|v), \text{ kaikilla } v \in H^1_{per,0}([0,1]^n) \tag{5.41}$$

kun $(\cdot \,|\, \cdot)$ on luonnollinen sisätulo avaruudelle $L^2([0,1]^n)$. Toisaalta operaattorille L saadaan myös elliptisyysehtoa käyttämällä arvio

$$(L[u], u) = \int_{[0,1]^n} (A(x)Du(x)) \cdot Du(x)dx \geq \lambda \int_{[0,1]^n} |Du(x)|^2 dx \tag{5.42}$$

ja Poincaré'n epäyhtälön 4.28 avulla saadaan oikeasta puolesta sopivalle vakiolle $C_1 > 0$

$$\lambda \int_{[0,1]^n} |Du(x)|^2 dx \geq C_1 \int_{[0,1]^n} |u(x)|^2 dx = C_1 \, ||u||^2_{L^2([0,1]^n)}$$

ja nyt tämän avulla saadaan arviota (5.42) muokattua seuraavasti

$$(L[u], u) \geq C_1 \, ||u||^2_{H^1([0,1]^n)} . \tag{5.43}$$

Yhdistämällä tulokset (5.41) ja (5.43) ja käyttämällä Cauchyn ja Schwartzin epäyhtälöä 2.14 saadaan

$$C_1 \, ||u||^2_{H^1([0,1]^n)} \leq (L[u], u) = (f|u) \leq ||f||_{L^2([0,1]^n)} \, ||u||_{H^1([0,1]^n)} .$$

Tätä epäyhtälöä sieventämällä voidaan suoraan todeta, että on olemassa vakio $C_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$||u||_{H^1([0,1]^n)} \leq C_2 \, ||f||_{L^2([0,1]^n)} . \tag{5.44}$$

Lemman 5.14 avulla tiedetään, että funktiolle $u = S[f]$ pätee

$$||u||_{H^2([0,1]^n)} \leq C_3(||f||_{L^2([0,1]^n)} + ||u||_{H^1([0,1]^n)})$$

josta edelleen epäyhtälön (5.44) avulla saadaan viimeinkin jollekin vakiolle C kirjoitettua

$$||u||_{H^2([0,1]^n)} \leq C \, ||f||_{L^2([0,1]^n)} \tag{5.45}$$

ja koska käyttämällä Rellichin ja Kondrashovin lausetta 4.27 derivaattaan Du

huomataan, että $H^2_{per,0}([0,1]^n)$ on kompaktisti upotettu avaruuteen $H^1_{per,0}([0,1]^n)$ eli toisin sanottuna epäyhtälön (5.45) avulla $S(H^1_{per,0}([0,1]^n))$ on kompaktisti upotettu avaruuteen $H^1_{per,0}([0,1]^n)$. Tällöin operaattorin S täytyy olla kompakti. $\square$

Nyt kun operaattori S on saatu osoitettua symmetriseksi ja kompaktisti voidaan helposti myös osoittaa, että sillä on samanlaisia ominaisuuksia kuin yleisellä symmetrisellä ja kompaktilla operaattorilla Lauseessa 3.10.

Lause 5.16. *Määritellään edelleen heikossa mielessä operaattori* $L : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to H^1_{per,0}([0,1]^n)$ *siten, että kaikilla* $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$

$$(L[u], v) := \int_{[0,1]^n} (A(x)Du(x)) \cdot Dv(x)dx,$$

missä $A_{ij} \in C^\infty([0,1]^n)$ *kaikilla* $i, j = (1, 2..., n)$ *ja* $A(x)$ *on symmetrinen. Olkoot luvut* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *ja näitä vastaavat funktiot* $0 \neq w_j \in H^1_{per}([0,1]^n)$ *ne, jotka toteuttavat heikossa mielessä yhtälön*

$$Lw_j(x) = \lambda_j w_j(x), \ \textit{kaikilla} \ x \in [0,1]^n$$

Tällöin kaikki L*:n ominaisarvot ovat positiivisia ja* $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ *muodostaa ortonormaalin kannan avaruudelle* $H^1_{per,0}([0,1]^n)$.

Todistus. Osoitetaan aluksi, että jokainen ominaisarvo on ja positiivinen. Kun λ_j on L:n ominaisarvo ja w_j tätä ominaisarvoa vastaava ominaisfunktio pätee määritelmän nojalla

$$\int_{[0,1]^n} (A(x)Dw_j(x)) \cdot Dv(x)dx = \lambda_j \int_{[0,1]^n} w_j(x)v(x)dx$$

kaikilla $v \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$. Erityisesti jos valitaan $v = w_j$ tämä saadaan kirjoitettua muotoon

$$\int_{[0,1]^n} (A(x)Dw_j(x)) \cdot Dw_j(x)dx = \lambda_j \int_{[0,1]^n} |w_j(x)|^2 dx. \tag{5.46}$$

Toisaalta käyttämällä elliptisyysehtoa ja Poincarén epäyhtälöä yhtälön vasempaan puoleen saadaan

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} (A(x)Dw_j(x)) \cdot Dw_j(x)dx &\geq \lambda \int_{[0,1]^n} |Dw_j(x)|^2 dx \\ &\geq C \int_{[0,1]^n} |w_j(x)|^2 dx \geq 0\end{aligned}$$

jollekin positiiviselle vakiolle C jolloin tämä yhdistettynä havaintoon (5.46) huomataan, että ominaisarvo λ_j on positiivinen.

Kannan löytämiseksi käytetään Lemmassa 5.15 määriteltyä operaattorin L käänteisoperaattoria $S : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to H^1_{per,0}([0,1]^n)$, joka on rajoitettu, lineaarinen, symmetrinen ja kompakti. Lemman 4.32 todistuksen alussa osoitettin, että avaruudella $H^1([0,1]^n)$ on tiheä ja numeroituva osajoukko ja todistuksesta nähdään, että tämä sama ominaisuus on myös avaruudella $H^1_{per,0}([0,1]^n)$. Nyt vihdoin Lauseen 3.10 oletukset täyttyvät ja lauseesta saadaan operaattorin S ominaisfunktioista kanta. Tämä kanta muodostettiin S:n ominaisvektoreista, mutta koska näille pätee $Sw = \eta w$ tasan silloin, kun $Lw = \frac{1}{\eta} w$ käyvät nämä todistamaan alkuperäinen väite. $\square$

Seuraus 5.17. *Olkoon $L : H^1_{per,0}([0,1]^n) \to L^2([0,1]^n)$ määritelty kuten Lauseessa 5.16. Olkoot lisäksi sen ominaisfunktiot $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$.*
Tällöin jokainen funktio $u \in H^1_{per}([0,1]^n)$ voidaan esittää muodossa:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u|w_i) w_i + a_0,$$

missä $a_0 = \int_{[0,1]^n} u(x)dx$.

Todistus. Lauseen 5.16 nojalla $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ muodostaa avaruuden $H^1_{per,0}([0,1]^n)$ ortonormaalin kannan, joten on olemassa jono reaalilukuja $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, joille funktion $(u - a_0) \in H^1_{per,0}([0,1]^n)$ esitykseksi saadaan

$$u - a_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i. \tag{5.47}$$

Toisaalta tutkimalla sisätuloa yhden ominaisfunktion ja funktion u välillä saadaan käyttämällä sisätulon lineaarisuutta

$$(u|w_j) = \big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i | w_j \big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \big(w_i | w_j \big)$$

ja koska Lemman 5.16 mukaan $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ on ortonormaali joukko on $(w_i|w_j) = 0$ aina kun $i \neq j$ ja $(w_i|w_j) = 1$ aina kun $i = j$. Siis

$$(u|w_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \big(w_i | w_j \big) = a_j \big(w_j | w_j \big) = a_j$$

eli yhtälö 5.47 saadaan kirjoitettua haluttuun muotoon

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u|w_i)w_i + a_0.$$

□

Esimerkki 5.18. Tutkitaan yhdessä ulottuvuudessa operaattoria

$$L : H^1_{per,0}[0, 2\pi] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \ L[u] = -\operatorname{div}(A(x)Du(x))$$

kun $A(x)$ on yksikkömatriisi I ja $n = 1$ eli $L[u]$ on Laplacen operaattori $L[u] = -\frac{d^2u}{dx^2}$. Tällöin L:n normitetut ominaisfunktiot $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ ilman reunaehtoa voidaan helposti selvittää ja ne ovat ovat

$$\begin{cases} w_k = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{k}{2}x), & \text{k parillinen,} \\ w_k = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{k-1}{2}x), & \text{k pariton,} \end{cases}$$

ja Lauseen 5.16 mukaan nämä funktiot muodostavat avaruudelle $H^1_{per,0}([0, 2\pi])$ kannan. Seurauksen 5.17 nojalla jokainen funktio $u \in H^1_{per}([0, 2\pi])$ voidaan esittää muodossa

$$u(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)),$$

missä $a_k = (u|\sin(kx))$, $b_k = (u|\cos(kx))$. Tätä kutsutaan funktion u Fourier'n sarjaksi.

Esimerkki 5.19. Osoittautuu, että lämmön jakautumista ajan funktiona $u(x, t)$ kuvaa n-ulotteisessa avaruudessa ns. lämpöyhtälö

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \Delta u(x, t) \text{ kaikilla } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \quad u(x, 0) = u_0(x) \ \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

missä ajan hetkellä $t = 0$ mitattu lämpöjakauma on $u_0 \in H^1_{per,0}(\mathbb{R}^n)$. Tämä yhtälö voidaan nyt helposti ratkaista edellisten tulosten avulla. Laplacen operaattorin ominaisfunktiot w_k ja ominaisarvot λ_k saadaan yhtälöstä

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k$$

ja Lemman 5.16 nojalla näiden avulla saadaan funktiolle u_0 esitys

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x)$$

missä $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Koska lämpöyhtälössä Laplacen operaattori ei vaikuta funktion $u(x, t)$ aikamuuttujaan voidaan käyttää ratkaisuun edellisen sarjaesityksen motivoimana yritettä

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x) A e^{Bt}$$

jonka sijoittaminen itse lämpöyhtälöön antaa

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \Delta u(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x) A e^{Bt}\right) = \Delta\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x) A e^{Bt}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x) A B e^{Bt} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k w_k(x) A e^{Bt}$$

josta suoraan saadaan vakio $B = -\lambda_k$ ja supistamalla turha vakio A pois on lämpöyhtälön ratkaisu muotoa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x) e^{-\lambda_k t}.$$

References

[1] https://pdfs.semanticscholar.org/b282/4b20dcebd702c3a242cfacee4df65512122e.pdf s.10, (7.9.2020)

[2] https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/klipfel.pdf, (22.8.2020)

[3] https://byjus.com/maths/divergence-theorem/, (2.9.2020)

[4] Lawrence C. Evans (1998): Partial Differential Equations.

[5] Jürgen Jost; Xianqing Li-Jost (1998), Calculus of variations, s.6.

[6] http://paulklein.ca/newsite/teaching/projections.pdf, s.6-8.

[7] http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS110.pdf.