Itsetarkistuvat STACK-tehtävät kurssille *Lineaarinen algebra ja geometria 1*

Sauli Räihä

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2019

Tiivistelmä: Sauli Räihä, *Itsetarkistuvat STACK-tehtävät kurssille Lineaarinen algebra ja geometria 1* (engl. *Self-check STACK-exercises for course Linear algebra and geometry 1*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 71 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2019.

Tässä pro gradu -tutkielmassa esitellään Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella luennoitavalle kurssille *Lineaarinen algebra ja geometria 1* luotu STACK-tehtäväkokoelma ja työprosessin eri vaiheita. STACK-tehtävät soveltuvat ominaisuuksiensa puolesta juuri matemaattisten tehtävien tekemiseen ja niiden avulla opiskelijoiden on mahdollista saada yksilöityä palautetta, tukea oppimisessa ja samalla kehittää itsenäisen työskentelyn taitoja.

Tutkielman ensimmäinen luku käsittelee kurssia Lineaarinen algebra ja geometria 1 yleisellä tasolla. Luvussa esitellään myös lineaarialgebran erilaisia esitystapoja ja pohditaan virhekäsitysten merkitystä matematiikan oppimisessa. Toisessa luvussa pureudutaan tarkemmin STACK-tehtävien luomiseen ja ominaisuuksiin. Seuraavissa luvuissa käydään läpi tehtäväkokoelma aihepiireittäin: *Vektorilaskentaa avaruudessa* $\mathbb{R}^n$, *Lineaarinen yhtälöryhmä ja Gaussin ja Jordanin menetelmä*, *Vektoriavaruudet ja niiden virittäminen*, *Matriisit* ja viimeisenä *Lineaarikuvaukset*. Lukujen sisällöt noudattavat likimain samaa järjestystä kuin kurssilla ja tehtäväkokoelmaan on valittu tehtäviä jokaisen luvun keskeisimmistä asiasisällöistä. Jokaisen luvun aluksi esitellään matematiikkaa tehtävien taustalla, erityisesti sitä teoriaa, jota tehtävien tekijänkin odotetaan tietävän. Seuraavaksi esitellään itse tehtäviä: kaikkia ei käydä yksityiskohtaisesti läpi vaan pääpaino on niissä tehtävissä, joiden sisältöihin opiskelijoilla liittyy virhekäsityksiä. Kahdeksannen ja viimeisen varsinaisen luvun aiheena on tehtäväkokoelman testaaminen opiskelijoilla, erityisesti sen yhteydessä toteutettu kysely ja saatu opiskelijapalaute. Tutkielman lopuksi on koottu vielä lyhyesti ajatuksia työprosessista.

Tehtäväkokoelma luotiin syksyn 2019 aikana ja testattiin kurssin opiskelijoilla. Saatu opiskelijapalaute oli pääsääntöisesti positiivista. Tehtävät olivat opiskelijoiden mielestä selkeitä ja monipuolisia, ne testasivat kurssin keskeisiä asiasisältöjä ja niistä saatu palaute tuki oppimista. Osa opiskelijoista kuitenkin koki STACK-järjestelmän käytön haasteelliseksi. Opiskelijapalautteen pohjalta tehtäväkokoelmaa on kehitetty ja se on tarkoitus ottaa käyttöön osaksi seuraavan syksyn kurssia.

Sisältö

Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa esitellään Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella luennoitavalle Lineaarinen algebra ja geometria 1 -kurssille luotu STACK-tehtäväkokoelma ja työprosessin eri vaiheita. Tehtäväkokoelma on luotu syksyn 2019 aikana ja se on testattu kurssin opiskelijoilla. Heiltä kerätyn palautteen pohjalta tehtäväkokoelmaa on kehitetty ja se on tarkoitus ottaa käyttöön osaksi seuraavan syksyn kurssia. Tehtävät on koottu Jyväskylän yliopiston Moodleen, joka on monella kurssilla käytössä oleva sähköinen oppimisympäristö.

Tehtäväkokoelma on luotu Cambridgen yliopistossa kehitetyllä STACK-järjestelmällä. STACK-tehtävien ominaisuudet soveltuvat erityisesti matemaattisten tehtävien tekemiseen. Tehtävät ovat luonteeltaan itsetarkistuvia, eli ne antavat vastaajalle välittömän palautteen ja malliratkaisun. Tehtävistä saatu palaute riippuu annetusta vastauksesta niin kutsutun vastauspuun avulla. Lisäksi tehtäviin saadaan luotua satunnaisuutta esimerkiksi määrittelemällä tehtävässä käytettäville lukuarvoille vaihteluväli. Siten STACK-tehtävät ovat yksilöityjä ja monipuolisia mutta silti ne säilyvät saman tasoisina eri vastaajien välillä. Tehtäväkokoelman ja erityisesti tehtävistä saatavan palautteen avulla pyritään oikaisemaan opiskelijoiden yleisimpiä virhekäsityksiä liittyen lineaariseen algebraan ja geometriaan. STACK-tehtävät soveltuvat myös opiskelijoiden itsenäisen työskentelyn taitojen kehittämiseen.

Tehtäväkokoelman laatimisen apuna ja tämän tutkielman lähteenä on käytetty opetusalan tutkimuksia, joissa on teetetty perustason lineaarisen algebran ja geometrian tehtäviä eri maiden korkeakoulujen opiskelijoilla. Kaikilla tutkimuksiin osallistuneilla opiskelijoilla on ollut takanaan jo jonkin verran lineaarialgebran opintoja. Tehtävien avulla on saatu tietoa opiskelijoiden yleisimmistä virhekäsityksistä liittyen lineaariseen algebraan ja geometriaan.

Tämän tutkielman matemaattinen osa pohjautuu pääsääntöisesti Theodore Shifrinin ja Malcolm R. Adamsin teokseen *Linear algebra: a geometric approach*. STACK-järjestelmän, erityisesti siinä käytettävien HTML- ja MAXIMA-kielien käytössä ovat olleet apuna Jyväskylän yliopiston Moodlen ohjeistukset ja Turun yliopiston Moodleen laatima STACK-kysymyspankki lineaarialgebran kurssille. Lisäksi tämän tutkielman lähteenä on käytetty tutkimusraportteja Itä-Suomen yliopistossa toteutetusta ABACUS-projektista sekä Helsingin yliopistossa kehitetystä tehostetun kisällioppimisen menetelmästä. Kaikki STACK-tehtävät ja opiskelijoille teetetty kysely löytyvät kokonaisuudessaan tutkielman liitteistä.

LUKU 1

Lineaarinen algebra ja geometria

1.1. Kurssin Lineaarinen algebra ja geometria 1 toteutus

Lineaarialgebra on yliopistomatematiikassa merkittävässä roolissa. Sen syvällinen hallinta edesauttaa muiden matematiikan aihealueiden ymmärtämistä, on siten avuksi opintojen menestyksekkäässä suorittamisessa ja sen sovelluksia löytyy työelämässä monilta eri aloilta. Juuri lineaarialgebran soveltuvuuden vuoksi se on otettu osaksi opinto-ohjelmaa useissa matematiikan opintoja tarjoavissa korkeakouluissa. Tärkeydestään huolimatta lineaarialgebra koetaan kuitenkin usein opiskelijoiden keskuudessa hyvin haastavaksi matematiikan osa-alueeksi sen abstraktin luonteen takia. Haastavuutta lisää myös se, että sellaisenaan lineaarialgebraa ei ennen korkeakouluopintoja matematiikassa ole paljoakaan käsitelty ja opiskelijoiden on vaikeaa muodostaa yhteyksiä lineaarialgebran kurssien ja aikaisempien matematiikan opintojen välillä. [**12**, sivut 147–148] Osaksi lineaarialgebran opetusta valitaankin usein geometriaa juuri tästä syystä. Geometrian avulla pystytään hahmottamaan muuten hyvin abstrakteja lineaarialgebran käsitteitä [**7**, sivu 491].

Lineaarialgebra on monelle opiskelijalle ensimmäinen kosketus yliopistomatematiikkaan. Näin on myös Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella, kun ensimmäisen vuoden opiskelijoille on tarjolla matematiikan perusopintoihin sisältyvä kurssi *Lineaarinen algebra ja geometria 1*. Kurssin keskeinen asiasisältö ja osaamistavoitteet on esitelty Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opetusohjelmassa [**8**].

- Lineaarialgebran keskeiset käsitteet ja niihin liittyvät tulokset todistuksineen.
- Euklidisen avaruuden lineaarinen ja geometrinen rakenne.
- Lineaarinen yhtälöryhmä ja sen ratkaiseminen Gaussin ja Jordanin menetelmällä sekä ratkaisujoukon analysointi.
- Lineaarinen riippumattomuus.
- Aliavaruus, kanta, dimensio ja ortogonaalisuus.
- Ortogonaaliprojektio ja Gramin ja Schmidtin ortogonalisointimenetelmä.
- Matriisien laskutoimitukset ja determinantti sekä niiden ominaisuudet.
- Lineaarikuvaukset ja niiden yhteys matriiseihin.

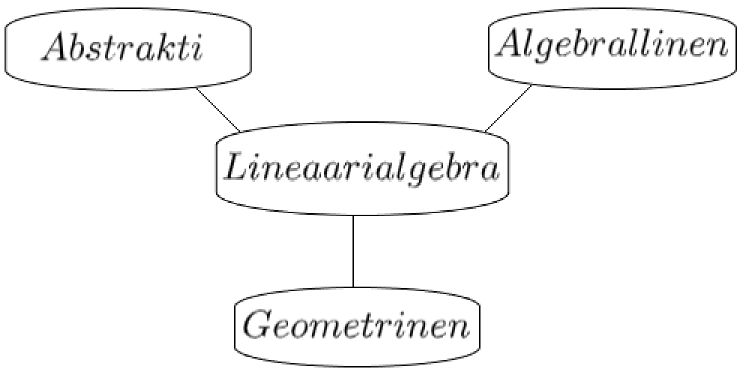
Syksyn 2019 kurssilla on aikaisempien vuosien tapaan kaksi erilaista suoritustapaa: välikokeet tai lopputentti. Välikokeita järjestetään opintojakson aikana kaksi kappaletta ja niihin voi kerätä lisäpisteitä viikoittaisten harjoitustehtävien avulla. Tässä suoritustavassa arviointi perustuu sekä välikokeista että harjoitustehtävistä saatuihin pisteisiin. Vaihtoehtoisesti kurssin voi suorittaa pelkästään lopputentillä, joka määrittää sellaisenaan kurssista saadun arvosanan. [**8**]

Harjoitustehtävät tehdään pääsääntöisesti paperisena versiona ja niitä käydään läpi yhdessä opettajan johdolla harjoitusryhmissä. Tämä menetelmä on käytössä lähes jokaisella matematiikan kurssilla. Tyypilliseen tapaan kurssin harjoitustehtäviä ratkotaan viikoittain, luentojen ja uuden aiheen esittelyn jälkeen. Harjoitustehtävät koostuvat sekä laskennallisista tehtävistä että todistustehtävistä. Monesti laskennalliset tehtävät ovat kuitenkin hyvin mekaanisia ja niiden läpikäyminen harjoitusryhmissä on aikaavievää. Jälkimmäinen tehtävätyyppi on monelle opiskelijalle uusi. Todistustehtävät koetaan usein yliopisto-opintojen alussa haastaviksi ja tutut laskennalliset tehtävät miellyttäviksi, sillä niihin on keskitytty myös aikaisemmissa matematiikan opinnoissa [**12**, sivu 149]. Lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan todistaminen on osana vasta matematiikan pitkän oppimäärän syventävää kurssia *Lukuteoria ja todistaminen* (MAA11). Kyseisen kurssin tavoitteena on tutustua todistusperiaatteisiin ja harjoitella todistamista. [**14**, sivu 135] Osana tätä pro gradu -tutkielmaa tehdyn STACK-tehtäväkokoelman avulla laskennallisten tehtävien läpikäymistä voidaan automatisoida ja tällöin esimerkiksi harjoitusryhmissä ajan voi käyttää tehokkaammin. Lineaarinen algebra ja geometria 1 on perusopintotason kurssi, joka sisältää todistustehtävien lisäksi myös paljon mekaanisia laskutehtäviä. Lisäksi kurssilla on suuri osallistujamäärä, joten yksilöityä ohjausta on tarjolla vähän moniin muihin matematiikan kursseihin verrattuna, joten kurssi soveltuu hyvin STACK-tehtäväkokoelman käyttöönottoon.

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella vastaaville kursseille, joissa on isoja opiskelijamääriä, on otettu käyttöön niin sanottu tehostetun kisällioppimisen menetelmä, jonka avulla pyritään tarjoamaan suuresta opiskelijamäärästä huolimatta myös yksilöityä ohjausta. Kurssien resursseja on suunnattu harjoitustehtävien tekovaiheeseen. Opiskelijat saavat kurssin opettajalta ja ohjaajilta tukea tehtävien tekemiseen ja niistä annetaan viikoittain palautetta opiskelijalle kirjallisesti. Lisäksi opiskelijat tekevät jo ennen luentoja perustason tehtäviä, joiden avulla tutustutaan uuteen aiheeseen ja siten luennoilla ajan voi käyttää tehokkaammin. Menetelmän käyttöönoton myötä monilla matematiikan kursseilla perinteisistä matematiikan harjoitusryhmistä on luovuttu kokonaan ja luentojen määrää on pystytty vähentämään. Eli vaikka opiskelijan itsenäisen työskentelyn määrä on tietyillä kursseilla lisääntynyt, on siihen käytettävissä enemmän aikaa eikä heidän tarvitse selviytyä tehtävistään yksin. [**18**, sivut 36–38] Myös STACK-tehtäviä opiskelijoiden on tarkoitus tehdä kurssin edetessä jo ennen luentoja. Niiden avulla tutustutaan uuteen aiheeseen ja vahvistetaan peruskäsitteiden ja määritelmien hallintaa. STACK-tehtävien tarkoitus ei ole siis korvata perinteisiä harjoitustehtäviä vaan täydentää niitä ja tukea oppimista.

1.2. Lineaarisen algebran ja geometrian oppiminen ja opetus

STACK-tehtäviä laadittaessa lähteenä on käytetty eri opetusalan tutkimuksia, joissa käsitellään opiskelijoiden yleisimpiä virhekäsityksiä liittyen lineaarialgebraan. Kuten matematiikassa yleisesti, myös tässä tutkielmassa termillä *virhekäsitys* ei viitata opiskelijan satunnaisesti tekemään yksittäiseen virheeseen. Virhekäsityksellä tarkoitetaan opiskelijan, yleensä toistuvasti tekemää, väärästä tiedosta johtuvaa virhettä, johon vaikuttaa opiskelijan aikaisempi tieto ja omat kokemukset. Yksittäiset virheet ovat usein seurausta siitä, ettei opiskelija ole ymmärtänyt asiaa ja tiedostaa tilanteen todennäköisesti myös itse. Sen sijaan virhekäsitystä opiskelija ei välttämättä edes itse tunnista virheelliseksi. [**12**, sivu 150] Virhekäsitykset eivät negatiivissävytteisestä nimestään huolimatta ole kuitenkaan aina huono asia vaan luonnollinen osa ajatusprosessia ja osoitus siitä, että opiskelija yrittää soveltaa aikaisemmin omaksumaansa tietoa uudessa tilanteessa. Matematiikan oppimisen kannalta keskeisessä roolissa on juuri yhteyksien löytäminen eri aihealueiden välille. [**10**, sivu 133] Osana tätä tutkielmaa luotu tehtäväkokoelma pyrkii huomioimaan yleisimmät virhekäsitykset ja ohjaamaan opiskelijaa oikeaan suuntaan eriyttävän palautteen avulla.



KUVA 1.1. Lineaarialgebran kolme eri esitystapaa.

Lineaarialgebra voidaan jakaa kolmeen eri esitystapaan: *abstrakti*, *algebrallinen* ja *geometrinen* (kuva 1.1). Abstrakteja käsitteitä ovat muun muassa vektoriavaruus, aliavaruudet, lineaarinen verho ja virittäminen. Algebralliseen joukkoon liitetään matriisit, determinantti ja lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen. Geometriseen esitystapaan kuuluvat esimerkiksi tasojen ja suorien leikkauspisteet, erityisesti avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. [**12**, sivu 150]. Eri esitystavat eivät myöskään ole toisistaan irrallisia. Esimerkiksi vektori voidaan nähdä algebrallisen ajattelun kautta järjestettynä n:n reaaliluvun jonona, geometrisesti vektoreita kuvataan nuolina, joilla on pituus ja suunta, ja abstraktisti ne ovat vektoriavaruuden objekteja, jolla on tietyt ominaisuudet.[**6**, sivut 269–271] Kaikki kolme esitystapaa ovat hyödyllisiä eri tilanteissa ja niiden yhdisteleminen auttaa ymmärtämään lineaarialgebraa paremmin [**13**, sivu 72]. STACK-tehtävissä onkin pyritty yhdistelemään eri esitystapoja mahdollisimman paljon.

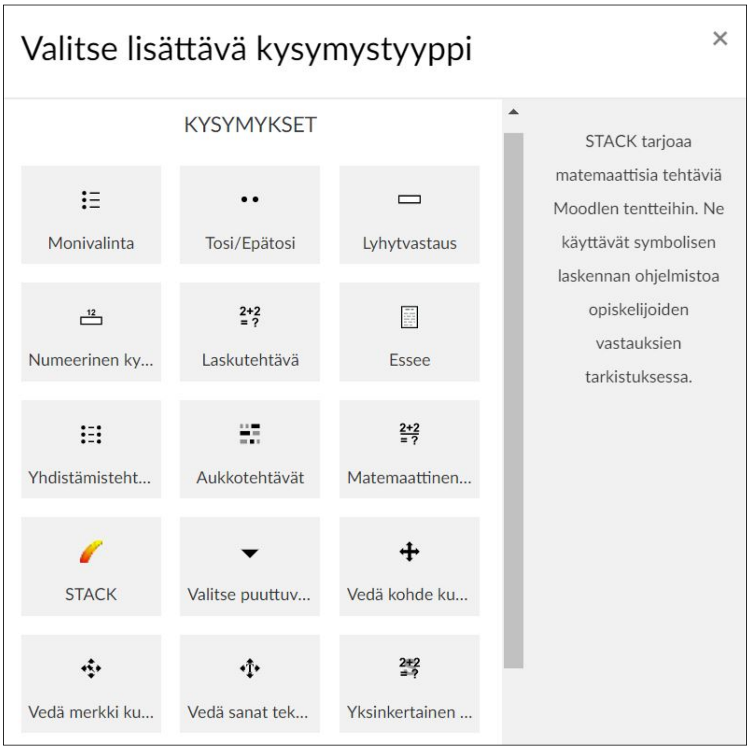
Monelle opiskelijalle esitystavasta toiseen siirtyminen ei kuitenkaan ole luontevaa [**16**, sivu 212]. Nykyajan koulussa matematiikan opetuksessa algebra on abstraktia esitystapaa enemmän esillä [**13**, sivu 73]. Lineaarialgebrassa, esimerkiksi matriisin determinantin laskemisessa itse ratkaisua merkityksellisempää ja kiinnostavampaa on saadun determinantin ominaisuudet. Lisäksi on hyvä ymmärtää myös algoritmi laskutoimitusten taustalla. [**6**, sivu 267] Siirtyminen esitystavasta toiseen ja useamman kuin yhden hallitseminen kerralla nähdään hedelmällisenä oppimisen kannalta ja tässä siirtymisessä esimerkiksi teknologiaa voidaan hyödyntää [**6**, sivu 270]. On selvää, että teknologia on kehittynyt nopeasti ja sen mahdollisuudet osana opetusta ovat laajalti tunnettuja. Erilaisten sovellusten laaja kirjo ja niiden käytöstä osana opetusta ja oppimista tehty vähäinen tutkimus tekevät aiheesta kuitenkin haasteellisen. [**6**, sivut 261–263] Lisäksi monet sovellukset hyödyntävät ohjelmointikieliä, joiden käyttö ei ole opiskelijoille entuudestaan tuttua. [**6**, sivu 267]. Ei ole siis yksiselitteistä, mikä tekee tietystä sovelluksesta tehokkaan juuri tiettyyn opetustilanteeseen tai opetettavaan aiheeseen. [**6**, sivut 261–263] Seuraavassa luvussa pohditaan tarkemmin, miksi juuri STACK-tehtävät soveltuvat ominaisuuksiensa puolesta osaksi lineaarialgebran oppimista ja opetusta.

LUKU 2

Itsetarkistuvat STACK-tehtävät

2.1. STACK-järjestelmä

STACK-tehtäväkokoelma on luotu Jyväskylän yliopiston Moodleen, joka on monella kurssilla käytössä oleva sähköinen oppimisympäristö. Moodlessa voi laatia tehtäviä Cambridgen yliopistossa kehitetyllä STACK-järjestelmällä, joka soveltuu ominaisuuksiltaan erityisesti matemaattisten tehtävien luomiseen. Moodlessa saa yhdelle kurssille rakennettua erilaista opetusmateriaalia erityyppisten kysymysten avulla (kuva 2.1), mutta kaikki tämän tehtäväkokoelman kysymystyypit ovat nimenomaan STACK-tehtäviä ja jokaisen tehtävän laadinnassa on hyödynnetty sen ominaisuuksia.



KUVA 2.1. Lista erilaisista kysymystyypeistä, joita Moodlessa pystytään luomaan.

STACK-järjestelmässä on käytössä HTML- ja MAXIMA-kielet. Kuvia ja graafeja tehtäviin saa lisättyä JSXGraph-kirjaston avulla. Sana STACK on lyhenne englannin kielen sanoista *System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel* ja tarkoittaa siis tietokonealgebrajärjestelmää, joka on luotu opettamisen ja arvioinnin avuksi. STACK-järjestelmän taustalla toimiva MAXIMA on myös tietokonealgebrajärjestelmä, jonka avulla tehtäviin voidaan kirjoittaa matemaattista tekstiä, kuten tämän kurssin kannalta oleellisia vektoreita, matriiseja ja yhtälöryhmiä. Myös opiskelijoiden antamat vastaukset järjestelmä tarkistaa juuri MAXIMAN avulla vertaamalla syötteitä opettajan laatimiin malliratkaisuihin. [**17**, sivu 24] Syötteitä voidaan käyttää myös erilaisiin matemaattisiin operaatioihin. Kuten muiden tietokonealgebrajärjestelmien, myös STACK-tehtävien etuina on, että niihin saadaan luotua vaihtelua ja niiden avulla opiskelijoiden on mahdollista saada yksilöityä palautetta. Haasteellisen niiden käytöstä tekee aika: järjestelmän omaksuminen vaatii työtä niin opettajilta kuin opiskelijoiltakin. [**17**, sivu 8]

Tämä tehtäväkokoelma on laadittu kurssille *Lineaarinen algebra ja geometria 1*, jolle osallistuu vuosittain suuri määrä sekä pääaine- että sivuaineopiskelijoita. Tällöin samantasoisten mutta samalla monipuolisten ja vaihtelua sisältävien sähköisten tehtävien luominen voi olla haasteellista. Esimerkiksi joillakin kursseilla on käytössä iso tehtäväpankki, josta jokaiselle kurssilaiselle arvotaan tietty määrä tehtäviä. Tällöin väistämättä toiset opiskelijat saavat helpompia tehtäviä kuin toiset. Tehtävien tekeminen vaikuttaa usein kurssiarvosanaan, mikä ei tämäntyyppisessä satunnaistamisessa olisi oikeudenmukaista. STACK-järjestelmässä on käytössä ominaisuus, jolla tehtäviin saa luotua satunnaisuutta ilman, että tehtävän sisältö tai vaativuustaso muuttuvat merkittävästi [**17**, sivu 25]. Esimerkiksi tehtävänannoissa esiintyville luvuille voidaan määritellä vaihteluväli. Tällöin on hyvin epätodennäköistä, että kahdella opiskelijalla olisi täysin sama tehtävä ja siten plagioinnin mahdollisuus pienenee. STACK-tehtävät eivät siltikään vähennä yhteistyön merkitystä. Tehtävän voi edelleen ratkaista yhdessä, sillä se on eri vastaajilla jotain satunnaistettua ominaisuutta lukuun ottamatta muuten täysin sama, mutta silti jokainen opiskelija on vastuussa myös omasta vastauksestaan ja oppimisestaan.

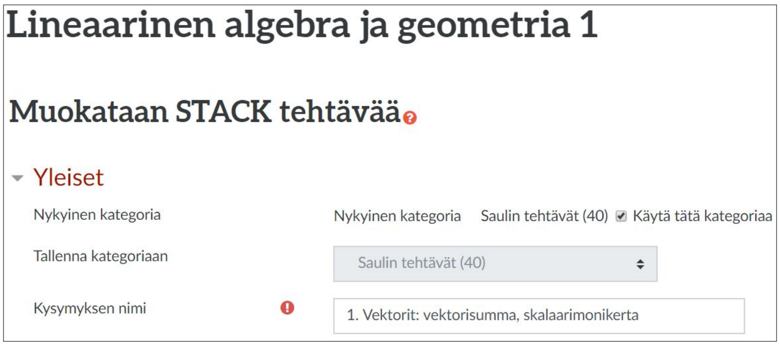
Vaikka STACK-tehtäviä ei ole tarkoitus käydä läpi perinteisissä matematiikan harjoitusryhmissä, opiskelija saa jokaisesta vastauksestaan palautteen ja malliratkaisun. Palautteesta saadaan yksilöityä niin kutsutun vastauspuun avulla, joka on STACK-järjestelmän merkittävimpiä ominaisuuksia. Tehtävän laatija voi ennakoida opiskelijoiden "todennäköisimmät" väärät vastaukset ja yhdistää niihin valmiiksi haluamansa palautteen. Esimerkiksi tässä tehtäväkokoelmassa eriyttävää palautetta on laadittu eri opetusalan tutkimuksien avulla selvitettyjen yleisimpien virhekäsitysten perusteella. Palautteen on tarkoitus olla eteenpäin ohjaavaa ja opiskelija voi palautteen avulla yrittää tehtävää vielä uudelleen. Malliratkaisun opiskelija saa palautettuaan koko tehtävän ja se on kaikille opiskelijoille yhteinen, vastauksista riippumatta. Harjoitustehtävissä, erityisesti niitä läpikäydessä harjoitusryhmissä, yksilöity palaute voi jäädä saamatta ja opiskelijoiden vastauksista mahdollisten virheiden huomaaminen voi olla haastavaa. STACK-järjestelmä tunnistaa myös sieventämättömät vastaukset. Yksi järjestelmän etu on myös se, että myös opettaja saa välittömän palautteen opiskelijoiden suoriutumisesta ja voi itse määritellä, miten haluaa painottaa pisteytystä eri tehtävissä.

Toisin kuin perinteiset harjoitustehtävät, tämä STACK-tehtäväpaketti ei sisällä todistustehtäviä, joiden tekemiseen järjestelmä ei helposti sovellu. Sen sijaan STACK-tehtävät keskittyvät peruskäsitteiden ja määritelmien hallintaan ja mahdollisten virhekäsitysten oikaisemiseen. Jokainen tehtäväkokoelman tehtävä on rakennettu harkiten siten, että tehtävänannot ovat selkeitä ja loogisia ja jokaisessa tehtävässä on malliratkaisun lisäksi mukana myös yksilöityä palautetta. Tehtäväkokoelma sisältää yhteensä 40 tehtävää, eli noin viidestä kymmeneen tehtävää aihealuetta kohti. Yksi tehtävä sisältää lähes aina useamman alakohdan. Kaikki tehtävät on koottu liitteisiin ja niihin viitataan tämän tutkielman tulevissa luvuissa, eli tehtäviä käsiteltäessä niiden kuvia ei ole upotettu tekstin sisälle. Liitteissä tehtävät ovat sellaisina, kuin ne näkyvät opiskelijalle. Lisäksi on tärkeää muistaa, että tähän tutkielmaan valitut kuvat tehtävistä ovat satunnaisten lukujen vuoksi siis vain yksi mahdollinen versio kyseisestä tehtävästä.

2.2. STACK-tehtävän tekeminen

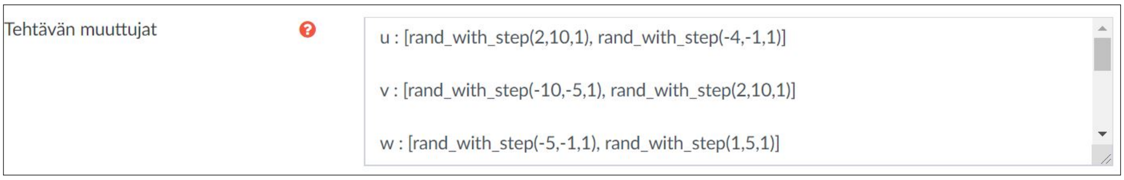
Tässä kappaleessa käydään läpi yhden STACK-tehtävän luominen esimerkin omaisesti. Kappaleessa keskitytään erityisesti järjestelmän ominaisuuksiin ja MAXIMA-kielen käyttöön. Luvuissa 3-7 esitellään tehtävät aihepiireittäin, niihin liittyviä virhekäsityksiä ja matematiikkaa niiden taustalla. Tässä kappaleessa kerrottujen ohjeiden lähteenä on käytetty Jyväskylän yliopiston Moodlen STACK-tehtävä -ympäristöä.

Valitaan esimerkiksi ensimmäinen tehtävä, joka käsittelee vektorisummaa ja skalaarimonikertaa. Tehtävä on näkyvissä kokonaisuudessaan liitteissä. Kun halutuksi tehtävätyypiksi on valittu STACK-tehtävä (kuva 2.1), voi tehtävälle valita nimen ja kategorian, johon se kuuluu (kuva 2.2). Esimerkiksi saman kurssin kaikki tehtävät voi tallentaa samaan kategoriaan, josta niitä voi ottaa käyttöön myös muilla kursseilla.



Kuva 2.2. STACK-tehtävän tekeminen aloitetaan nimen ja kategorian valinnasta.

Seuraavaksi STACK-tehtävään määritellään muuttujat, joihin voidaan viitata tehtävän muissa osissa (kuva 2.3). Tämän tehtävän muuttujissa on määritelty vektorit $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ sekä skalaarit a, b ja c. Lisäksi tehtävän muuttujissa on määritelty opettajan vastaukset, jotka voidaan ilmoittaa jo määriteltyjen muuttujien avulla.



KUVA 2.3. STACK-tehtävän muuttujiin voidaan viitata tehtävän seuraavissa vaiheissa.

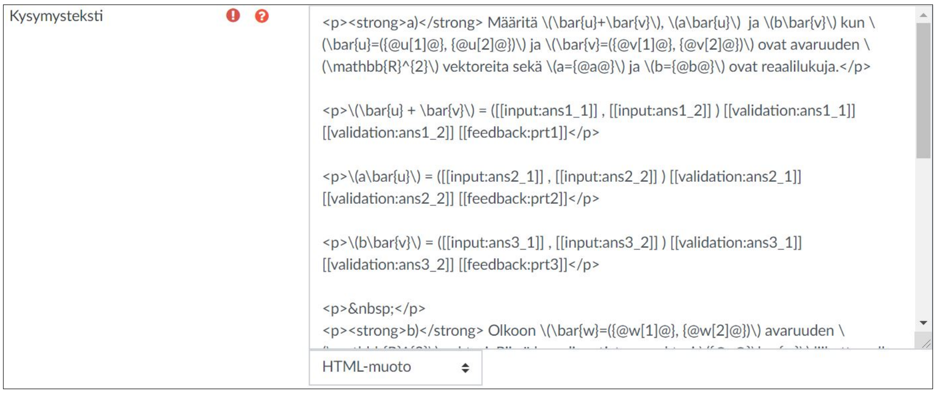
```
u : [rand_with_step(2,10,1), rand_with_step(-4,-1,1)]
v : [rand_with_step(-10,-5,1), rand_with_step(2,10,1)]
w : [rand_with_step(-5,-1,1), rand_with_step(1,5,1)]

a : rand_with_prohib(-5,5,[-1,0,1])
b : rand_with_prohib(-5,5,[-1,0,1,a])
c : rand([-4,-3,-2])

tans1 : u+v
tans2 : a*u
tans3 : b*v
tans4 : c*w
```

Vektoreissa $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ on määritelty ensimmäinen ja toinen komponentti erikseen. Komento ”rand_with_step(2,10,1)” tarkoittaa, että kyseinen komponentti arvotaan lukujen 2 ja 10 väliltä, yhden luvun välein. Mahdollisia lukuja ovat siis 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 10. Komento ”rand_with_prohib(-5,5,[-1,0,1])” tarkoittaa, että skalaari on arvottu lukujen -5 ja 5 väliltä, mutta kiellettyjä lukuja ovat -1, 0 ja 1. Tällöin mahdollisia lukuja ovat siis -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4 ja 5. Jos lukujen määrä ei ole iso, tai ne eivät sijaitse lähellä toisiaan, voidaan ne määritellä komennolla ”rand([-4,-3,-2])”, eli kyseinen skalaari on joko luku -4, -3 tai -2. Ensimmäinen opettajan vastaus ”tans1” määrittelee tehtävän ensimmäisen kohdan vastaukseksi vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ summan. Kun tehtävänannossa on satunnaistettuja elementtejä, ei malliratkaisu voi olla jokin tietty luku vaan sen täytyy riippua satunnaistetuista muuttujista. Lopuksi järjestelmä vertaa opiskelijoiden antamia vastauksia opettajan laatimiin malliratkaisuihin ja siten määrittelee opiskelijan vastauksen joko oikeaksi tai vääräksi.

Seuraavaksi tehtävään kirjoitetaan kysymysteksti (kuva 2.4). Toisin kuin tehtävän muuttujalista, kysymysteksti tulee näkyviin myös opiskelijalle ja se toimii tehtävänantona ja vastauskenttänä. Kysymystekstissä voidaan kuitenkin hyödyntää edellisessä kohdassa määriteltyjä muuttujia viittaamalla niihin komennolla ”{@...@}”, jossa @-merkkien väliin asetetaan haluttu muuttuja. Jos muuttujassa on useampi komponentti, kuten vektoreissa, voidaan niihin viitata termeillä ”[1]” ja ”[2]” vastaavassa järjestyksessä muuttujan perässä.



Kuva 2.4. STACK-tehtävän kysymysteksti, joka tulee näkyviin myös opiskelijalle.

```
\(\bar{u}=({@u[1]@}, {@u[2]@})\)
```

Tehtävänannon lisäksi kysymystekstiin tulee määritellä vastauskentät ja niihin liittyvät syötteen tarkistuksen käsittelyelementit.

```
<p>\(\bar{u} + \bar{v}\) = ([[input:ans1_1]] , [[input:ans1_2]] )
[[validation:ans1_1]][[validation:ans1_2]] [[feedback:prt1]]</p>
```

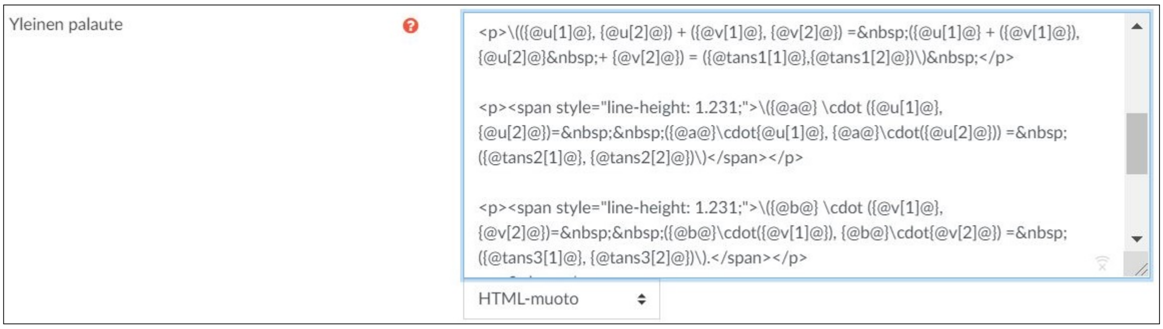
Vastauskenttä annetaan komennolla "[[input:ans1]]", jossa "ans1" viittaa opiskelijan antamaan ensimmäiseen vastaukseen. Jos yhteen vastaukseen liittyy useampi vastauskenttä, merkitään ne alaviivan avulla. Esimerkiksi jos vastaus on vektori, niin molemmille komponenteille voidaan määrittää omat vastauskentät. Komennolla "[[validation:ans1]]" opiskelija voi tarkastella omaa vastaustaan ja komento "[[feedback:prt1]]" vertaa syötettä määriteltyyn malliratkaisuun ja antaa siihen liitetyn palautteen.

Tehtävään voidaan liittää grafiikkaa JSXGraph-kirjaston avulla. Kuvien avulla, erityisesti interaktiivisilla tehtävillä lineaarialgebran geometrista esitystapaa voidaan yhdistää algebralliseen esitystapaan.

```
[[jsxgraph input-ref-ans4='ans4']]
var board = JXG.JSXGraph.initBoard(divid, {boundingbox:
[-10, 10, 10, -10],  axis: true, showCopyright:false, grid: true});
var p1 = board.create('point', [0,0], {size: 2, color:'red',
name:'A', showInfobox:true, snapToGrid:true});
var v1 = board.create('line', [[0,0],p1],{color: 'red',
straightFirst:false, straightLast:false, lastArrow:true});
stack_jxg.bind_point(ans4, p1);
board.update();
[[/jsxgraph]]
```

Tällä koodilla on luotu tehtävään interaktiivinen koordinaatisto, jossa opiskelija pystyy kuvaa muokkaamalla vastaamaan tehtävän neljänteen kohtaan. Koordinaatiston x- ja y-akselit ovat molemmat lukujen -10 ja 10 välillä ja siinä on näkyvissä myös vastaamista helpottava ruudukko. Koordinaatistoon on luotu kaksi muuttujaa ”var p1” ja ”var v1”. Ensimmäinen muuttuja on määritelty pisteeksi, jolle on annettu koordinaatit (origo), koko, väri ja nimi. Lisäksi pistettä liikuttaessa sen koordinaatit tulevat näkyviin ja se tarrautuu lähimpään kokonaislukuun. Toinen muuttuja on määritelty suoraksi, joka kulkee origon ja pisteen p1 kautta. Myös muodostunut suora on punainen. Suora on määritelty siten, että siitä on näkyvissä vain pisteiden väliin jäävä osa, eli jana, jonka toisessa päässä on nuoli. Tällöin suoran avulla koordinaatistoon saadaan luotua vektori. Opiskelijan antama syöte ”ans4” on sidottu pisteeseen p1, jota liikuttelemalla opiskelija voi piirtää koordinaatistoon vektorin, joka on suoraan myös tehtävän vastaus.

Seuraavaksi STACK-tehtävään voi määritellä pisteytyksen - paljonko on kunkin tehtävän oletuspisteet ja kuinka paljon niistä vähennetään jokaisella väärällä vastausyrityksellä. Palautetta tehtävissä on kahdenlaista: yleistä ja eriyttävää palautetta. Molemmissa palautteissa hyödynnetään MAXIMA-kieltä ja esimerkiksi tehtävien muuttujiin viittaaminen on mahdollista. Yleinen palaute tulee opiskelijalle näkyviin tehtävän viimeisen yrittämisen jälkeen, eikä se riipu opiskelijan antamasta vastauksesta. Siihen on hyvä kirjoittaa esimerkiksi tehtävän malliratkaisu ja muita tärkeitä huomioita tehtävästä (kuva 2.5). Sen sijaan eriyttävä palaute tulee näkyviin jokaisen vastausyrityksen jälkeen ja on riippuvainen opiskelijan vastauksesta. Eriyttävä palaute määritellään myöhemmin vastauspuiden yhteydessä.

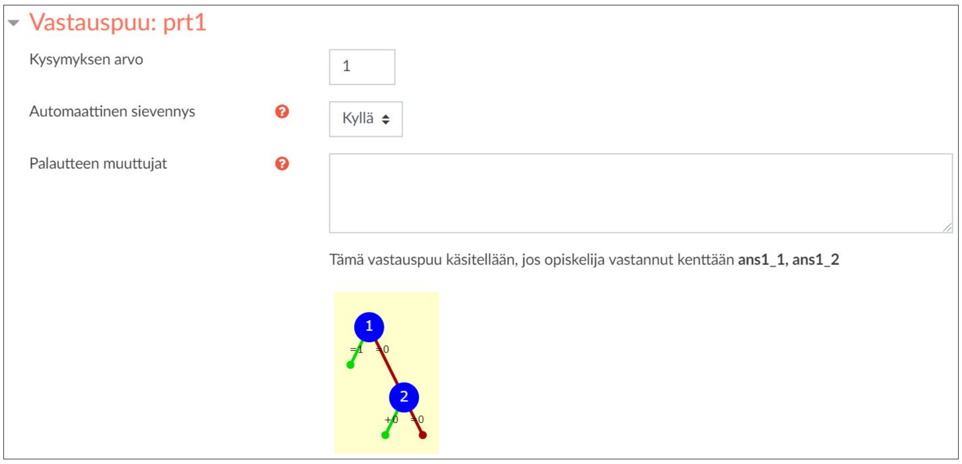


Kuva 2.5. Palautetta pystyy antamaan sekä yleisesti että yksilöidysti.

Alussa tehtävien mallivastaukset määriteltiin muuttujina. Esimerkiksi ”tans1” määriteltiin vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ summaksi. Seuraavaksi nämä muuttujat pitää yhdistää opiskelijan antamiin vastauksiin. Riippuen tehtävästä, vastaus voi olla montaa eri tyyppiä. Tässä tehtäväkokoelmassa käytettyjä vastaustyyppejä ovat *algebrallinen lauseke*, *matriisi*, *oikein/väärin* ja *yksittäinen merkki*. Algebrallinen lauseke on eniten käytetty tehtävätyyppi ja se soveltuu nimensä mukaisesti erilaisten lausekkeiden syöttämiseen. Vastauskenttä voi näyttää myös matriisilta, jolloin opiskelija voi syöttää suoraan omiin ruutuihinsa jokaisen matriisin alkion. STACK-järjestelmällä voi luoda myös oikein/väärin -kysymyksiä, jolloin opiskelija valitsee oikean vaihtoehdon pudotusvalikosta. Yksittäinen merkki soveltuu esimerkiksi sellaisiin tehtäviin, joissa vastaukseksi pitää antaa oikeaa vastausta vastaava numero tai kirjain. Tällöin tehtävän vastaus ei kärsi esimerkiksi ylimääräisistä turhista merkeistä. Tyypistä riippumatta, kaikille vastauksille tulee määritellä useita eri ominaisuuksia, joita ovat muun muassa mallivastaus, johon opiskelijan syötettä verrataan, vastauskentän pituus ja käytettävä syntaksi (kuva 2.6). Muita hyviä ominaisuuksia ovat muun muassa tiettyjen merkkijonojen kieltäminen vastauksissa tai tehtävältä voi vaatia supistettua muotoa.

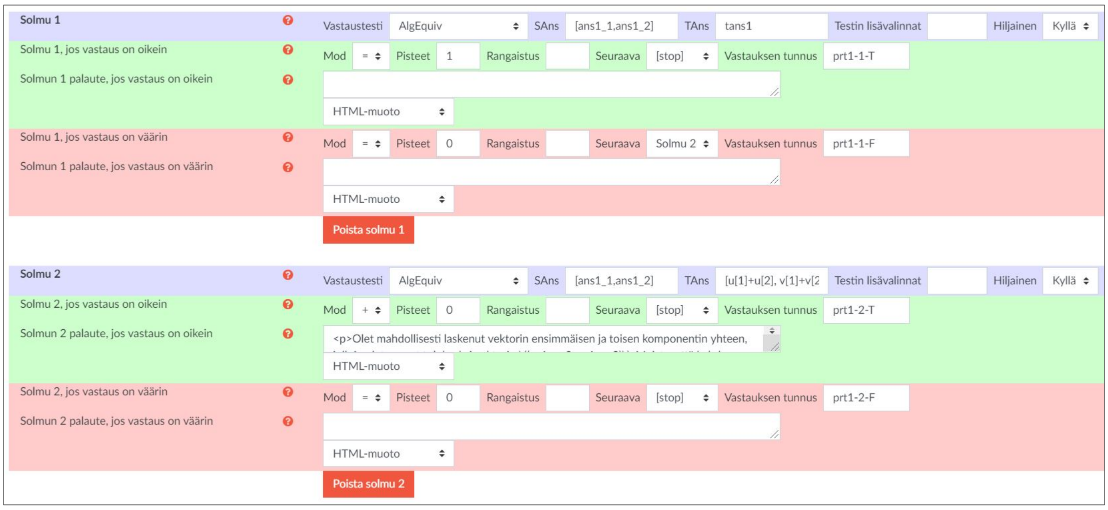
Kuva 2.6. STACK-tehtävien vastauksissa määriteltäviä ominaisuuksia.

Vastauksiin liittyvät myös STACK-tehtävien keskeinen ominaisuus, vastauspuut (kuva 2.7).

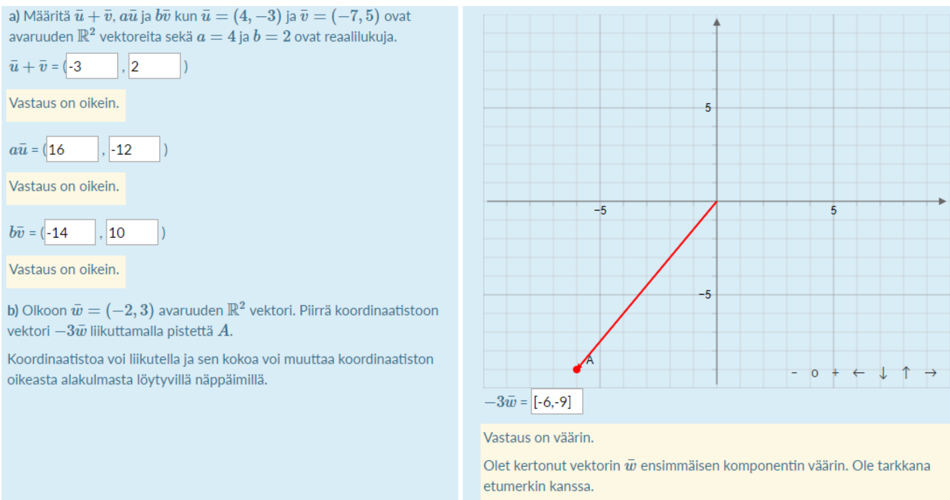


Kuva 2.7. STACK-tehtäviin voidaan luoda eriyttävää palautetta vastauspuun avulla.

Vastauspuiden avulla tehtäviin voidaan luoda opiskelijoiden vastauksista riippuvaa palautetta. Vastauspuissa voidaan käyttää tehtävän laadinnassa jo aikaisemmin käytettyjä muuttujia tai luoda uusia. Esimerkiksi kuvan 2.7 vastauspuu liittyy opiskelijan ensimmäiseen vastaukseen (vektorin molempiin komponentteihin). Vastauspuu luodaan solmujen avulla. Ensimmäiseen vastaukseen liitettävässä vastauspuussa solmuja on kaksi. Ensin opiskelijan vastausta "[ans1_1,ans1_2]" verrataan solmussa yksi määriteltyyn mallivastaukseen, joka on tehtävän oikea ratkaisu. Mikäli nämä vastaukset ovat samat, opiskelija saa yhden pisteen eikä järjestelmä siirry seuraavaan solmuun. Opiskelija saa myös tiedon ja palautteen oikeasta vastauksestaan. Jos taas vastaus ei ole oikein, järjestelmä vertaa sitä seuraavan solmun mallivastaukseen. Tähän kenttään on esimerkiksi kuvassa 2.8 kirjoitettu opiskelijan mahdollisesti tekemä virhe. Mikäli opiskelijan vastaus on ”oletettu” väärä vastaus, opiskelija saa siitä erityisen palautteen, joka lukee kohdassa ”Solmun 2 palaute, jos vastaus on oikein”. (Vastaus ei siis ole tehtävän kannalta oikein, niin kuin solmussa yksi, vaan tämän solmun mallivastauksen kanssa yhtäpitävä vastaus.) Tämä palautekenttä on eriyttämisen kannalta oleellinen. Siihen voi kirjoittaa esimerkiksi vinkkejä ja ohjeita opiskelijalle mahdollisista virheistä ja miten tehtävässä kannattaisi edetä, jos yrityskertoja on jäljellä. Mikäli opiskelijan vastaus ei ole ollut kumpikaan mallivastauksista, ei tehtävän oikea vastaus eikä oletettu väärä vastaus, järjestelmä siirtyy kohtaan ”Solmu 2, jos vastaus on väärin”. Koska kolmatta solmua ei vastauspuussa ole, järjestelmä pysähtyy tähän ja opiskelijan antama vastaus tulkitaan vääräksi. Eriyttävää palautetta tästä väärästä vastauksesta ei anneta, koska sitä ei ole kyseiseen vastaukseen määritelty. Eriyttäviä palautteita erilaisista vastauksista voidaan laatia miten paljon tahansa.



Kuva 2.8. STACK-tehtävien vastauspuut rakennetaan solmujen avulla.



Kuva 2.9. Valmis STACK-tehtävä palautteineen.

Kuvassa 2.9 on esitetty valmis STACK-tehtävä, johon opiskelija on vastannut ja saanut suorituksestaan palautteen. Tehtävän a-kohdan opiskelija on ratkaissut kokonaan oikein ja saanut siten palautteet ”Vastaus on oikein”. Tehtävän b-kohdassa opiskelija on vastannut väärin ja saanut vastauksestaan eriyttävän palautteen. Mikäli opiskelijalla on vastauskertoja jäljellä, hän voi eriyttävän palautteen pohjalta yrittää tehtävää uudelleen. Jos vastaus on väärin, eikä siihen ole liitetty eriyttävää palautetta, järjestelmä ilmoittaa ainoastaan ”Vastaus on väärin”.

Muita, juuri tämän kurssin kannalta oleellisia MAXIMA-kielen ominaisuuksia on listattu alle. Esimerkiksi muuttujien määrittelyyn voi käyttää ohjelmointikielelle ominaisia listoja.

```
list1 : ([A,B,C,D,E])
apu1 : rand(list1)
list2 : delete (apu1, list1);
apu2 : rand(list2)
list3 : delete (apu2, list2);
apu3 : rand(list3)
list4 : delete (apu3, list3);
apu4 : rand(list4)
list5 : delete (apu4, list4);
apu5 : rand(list5)
```

Kyseistä koodia on käytetty esimerkiksi tehtävän 4 c-kohdassa, jossa opiskelijan tulee valita kuvan vektoreista A-E se, joka ei ole yksikkövektori. Kirjaimet ovat muuttujia, jotka on ensin listattu ”list1”. Tämän jälkeen listasta on valittu satunnaisesti yksi kirjain ensimmäiseksi apumuuttujaksi ”apu1”. Tämän apumuuttujan avulla on nimetty tietty vektori, esimerkiksi tehtävän oikea vastaus. Tämän jälkeen loput neljä vektoria nimetään lopuilla kirjaimilla satunnaisesti siten, että on luotu neljä uutta listaa, joista on poistettu jo käytössä olevat kirjaimet. Nyt jokaiselle vastaajalle oikea vastaus on satunnaisesti joko kirjain A, B, C, D tai E ja muut kirjaimet ovat vääriä vaihtoehtoja. Tällöin kaikissa STACK-tehtävissa vastaustyyppien ei tarvitse olla algebrallisia lausekkeita, vaan satunnaisuutta saadaan liitettyä esimerkiksi monivalintatehtäviin tai oikein/väärin -väittämiin. Jälkimmäisessä oikea vastaus voidaan määritellä toisella, hyvin tyypillisellä ohjelmointikielen rakenteella, eli ehtolauseella.

```
tans1 : if t_1=t_2 then true else false
```

Tässä siis väite voi olla joko oikein tai väärin riippuen siitä, mitä ovat tehtävässä käytettyjen muuttujien ”t_1” ja ”t_2” arvot. Kyseinen esimerkki on tehtävän 6 a-kohdasta, jossa tutkitaan suoran vektorimuotoista yhtälöä. Satunnaisuutta saa liitettyä myös tehtävien graafeihin. JSXGraph-kirjaston avulla luoduissa kuvissa voi käyttää tehtävässä määriteltyjä muuttujia. Jos esimerkiksi halutaan satunnaistaa tietty koordinaatiston piste, määritellään se ensin muuttujiin, jonka jälkeen siihen voidaan viitata myös JSXGraph-ympäristössä.

```
piste1 : [rand_with_step(2,10,1), rand_with_step(2,10,1)]
```

```
{#piste1#}
```

Lukujen ja kirjaimien lisäksi STACK-järjestelmän avulla voidaan satunnaistaa myös pidempiä merkkijonoja. Esimerkiksi tehtävässä 18 (lineaarinen riippumattomuus), sekä tehtävän a- että b-kohdassa annettu jälkimmäinen joukko arvotaan kahdesta mahdollisesta vaihtoehdosta, jolloin myös tehtävän vastaus muuttuu. Tehtävässä on luotu ensin apumuuttujiksi kaksi joukkoa, jotka koostuvat eri määrästä annettuja vektoreita. Sen jälkeen tehtävässä käytettävät kaksi joukkoa arvotaan näiden välillä. Joukot voivat olla tehtävän molemmissa kohdissa samat tai erit.

```
apu1 : {u_1,u_2}
apu2 : {u_1,u_2,u_3,u_4}

joukko1 : rand([apu1,apu2])
joukko2 : rand([apu1,apu2])

tans1 : if joukko1=apu2 then false else true
tans2 : if joukko2=apu2 then true else false
```

Tämä esimerkki on tehtävästä, jossa ei tarvitse laskea mitään ja on siten osoitus siitä, että satunnaisuutta saa luotua hyvin eri tyyppisiin tehtäviin. Edelleen juuri tämän kurssin kannalta on oleellista, että muuttujiin voidaan luoda myös matriiseja sekä kysymysteksteihin yhtälöpareja ja -ryhmiä. Kysymysteksteissä voi käyttää Latex-kieltä.

```
matA : matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
<p>\(\begin{cases}<br />x_1 \: + 4x_2 &amp;= 5\\<br />
-x_1 \: + 2x_2 &amp;= -2\\<br />\end{cases}\)</p>
```

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$$

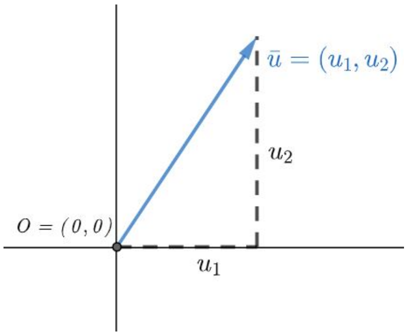
Luvuissa 3-7 käsitellään tarkemmin lineaarisen algebran ja geometrian sisältöjä ja niihin liittyviä virhekäsityksiä. Laadittuja STACK-tehtäviä pohditaan molempien aiheiden kannalta.

LUKU 3

Vektorilaskentaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

3.1. Vektoreiden perusominaisuudet

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $\bar{u}$ voidaan määritellä eri tavoilla. Algebrallisen määritelmän mukaan vektori $\bar{u}$ on kahden reaaliluvun u_1 ja u_2 järjestetty pari $\bar{u} = (u_1, u_2)$, joka vastaa tason $\mathbb{R}^2$ pistettä. Geometrisesti vektori voidaan hahmottaa tämän pisteen ja origon $O = (0, 0)$ välille.



KUVA 3.1. Vektorin geometrinen tulkinta.

Vektorin pituutta ja suunta voidaan tulkita nuolen avulla, kuten kuvassa 3.1. Geometrisesti vektorin pituus vastaa vektorin etäisyyttä origosta. Vektorin suunnan määrittää vektorin ja positiivisen x-akselin välinen kulma. Nollavektorilla $\bar{0}$ ei ole pituutta eikä suuntaa. [**15**, sivut 1–2]. Vektori $\bar{u}$ voidaan määritellä yleisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$ seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 1$, vektori $\bar{u}$ on n reaaliluvun järjestetty joukko $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{u}$ pituus voidaan määrittää algebrallisesti laskemalla

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}.$$

Edelleen kahden avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen etäisyys voidaan määrittää

$$\|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (u_k - v_k)^2}.$$

Keskeisiä vektoreihin liittyviä laskutoimituksia ovat vektorien yhteen- ja vähennyslasku sekä vektorin kertominen reaaliluvulla (skalaarikertolasku).

MÄÄRITELMÄ 3.2. Olkoon $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin summavektori $\bar{u} + \bar{v}$ on määritelty siten, että $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.

MÄÄRITELMÄ 3.3. Olkoon $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori ja t jokin reaaliluku. Tällöin vektori $t\bar{u}$ on määritelty siten, että $t\bar{u} = (tu_1, tu_2, \ldots, tu_n)$.

Sekä vektorisummassa että skalaarilla kertomisessa on tärkeää huomata, että $\bar{u}+\bar{v}$ ja $t\bar{u}$ ovat molemmat vektoreita, eivätkä reaalilukuja. Vektorin ja reaaliluvun välisen eron ja niille määriteltyjen laskutoimitusten tunnistaminen koetaan usein haasteelliseksi. [**1**, sivu 1] Vektoreiden peruslaskutoimituksia harjoitellaan STACK-tehtävissä 1 ja 2. Esimerkiksi negatiivisella reaaliluvulla kertomisessa geometrinen tulkinta auttaa ymmärtämään, mitä vektorin suunnalle tapahtuu [**3**, sivu 3]. Negatiivisella reaaliluvulla kertomista harjoitellaan interaktiivisen koordinaatiston avulla ensimmäisessä STACK-tehtävässä. Tehtävän vastauspuussa on määritelty eriyttävä palaute jokaiselle vastaukselle, jossa vektori on piirretty etumerkkiä lukuun ottamatta oikein (katso kuvan 2.9 esimerkki). Myös kahden vektorin summan geometrinen tulkinta koetaan usein haasteellisemmaksi kuin sen algebrallinen tulkinta, eli itse summaaminen [**19**, sivu 110]. Koordinaatistosta tunnistetaan annettujen vektoreiden summavektori STACK-tehtävässä 3.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ja $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ välinen pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{v}$ on $\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Edellä on määritelty kahden avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen pistetulo. Eräs yleinen virhekäsitys liittyen vektoreiden peruslaskutoimituksiin koskee kahden vektorin välistä pistetuloa: pistetulo saatetaan summavektorin tai skalaarilla kertomisen tavoin ymmärtää operaationa, jonka tuloksena on vektori vaikka todellisuudessa tulos on reaaliluku. [**1**, sivu 6] Jos avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen pistetulo on 0, eli $\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = 0$, vektorit ovat kohtisuorassa. Kohtisuorista avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreista käytetään myös nimitystä *ortogonaaliset* [**15**, sivu 20]. Vektoreiden välistä pistetuloa ja kohtisuoruutta käsitellään STACK-tehtävässä 5.

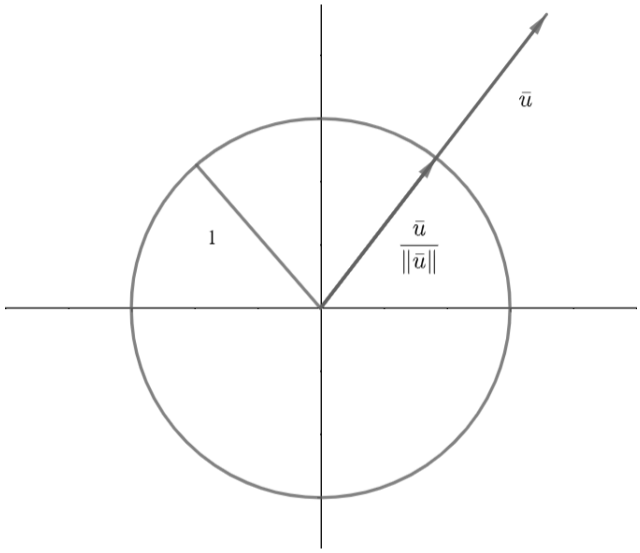
Mikäli avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat toistensa skalaarimonikertoja, vektorit ovat yhdensuuntaiset. [**15**, sivu 3]

MÄÄRITELMÄ 3.5. Jos on olemassa reaaliluku $t \neq 0$ siten, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille $\bar{u}$ ja $\bar{v}$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ ja $\bar{v} \neq \bar{0}$, pätee $\bar{u} = t\bar{v}$, vektorit ovat yhdensuuntaiset.

Yhdensuuntaiset vektorit voivat olla vastakkaissuuntaiset tai samansuuntaiset. Jos vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, ovat ne erisuuntaiset. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vastavektori on $-1(\bar{u}) = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$. Näiden käsitteiden määritelmiä havainnollistetaan STACK-tehtävässä 3.

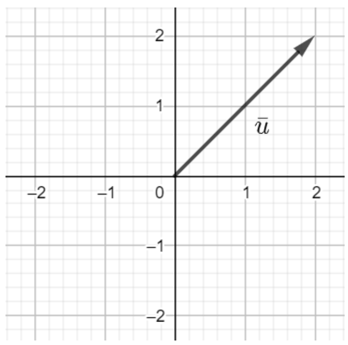
Esitellään kappaleen lopuksi vielä yksikkövektorin määritelmä. Vektoria $\bar{u}$, $\bar{u} \neq \bar{0}$, vastaa samansuuntainen yksikkövektori, joka saadaan kertomalla vektori $\bar{u}$ sen pituuden käänteisluvulla, eli $\frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$, (katso kuva 3.2). [**15**, sivu 3]. Yksikkövektori määritellään pituutensa avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Vektori $\bar{u}$ on yksikkövektori jos sen pituus on yksi, eli $\|\bar{u}\| = 1$.



KUVA 3.2. Vektorin $\bar{u}$ suuntainen yksikkövektori määritetty yksikköympyrän avulla.

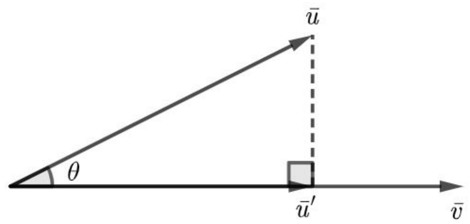
Myös yksikkövektoriin liittyy virhekäsityksiä, vaikka sen määritelmä vaikuttaakin yksinkertaiselta. Kun yksikkövektoria havainnollistetaan geometrisesti, auttaa se määritelmän ymmärtämisessä. Esimerkiksi kuvan 3.3 vektorin $\bar{u}$ suuntainen yksikkövektori tulkitaan helposti vektoriksi $(1, 1)$. Todellisuudessahan tämän vektorin pituus ei ole yksi, vaan $\sqrt{2}$, eli kyseessä ei ole yksikkövektori. Muita virheellisiä tulkintoja vektorin $\bar{u}$ suuntaiselle yksikkövektorille ovat vektorit $(0.5, 0.5)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ ja $\bar{u}$, eli alkuperäinen vektori sellaisenaan. [**3**, sivu 3] STACK-tehtävässä 4 on piirretty koordinaatistoon joukko vektoreita, joista yksi ei ole yksikkövektori. Tehtävässä tarkoituksena on erottaa tämä vektori yksikkövektoreista. Vaihtoehdot on valittu edellä lueteltujen vektoreiden mukaisesti. Jos tehtävässä valitaan vastaukseksi jokin yksikkövektoreista, palautteessa kehotetaan tarkistamaan valitun vektorin pituus. Tehtävän ja siitä saatavan palautteen avulla pyritään korostamaan sitä, että yksikkövektori on määritelty pituutensa avulla, ei koordinaattien.



KUVA 3.3. Tutkimuksessa [**3**] opiskelijoiden tuli määrittää annetun vektorin $\bar{u}$ suuntainen yksikkövektori piirtämällä se koordinaatistoon.

3.2. Suorat ja tasot

Määritellään seuraavaksi vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen kulma θ [**15**, sivu 24].



KUVA 3.4. Vektorin $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen kulma θ.

Kuvasta 3.4 katsottuna kulmalle θ pätee kosinin määritelmän nojalla, että

$$\cos\theta = \frac{\|\bar{u}'\|}{\|\bar{u}\|},$$

jossa $\|\bar{u}'\|$ on vektorin $\bar{u}$ suunnattu pituus, joka saadaan kertomalla vektorin $\bar{v}$ pituus jollain reaaliluvulla t, eli

$$\cos\theta = \frac{t\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|}.$$

Reaaliluku t on valittu siten, että vektori $\bar{u}-\bar{u}'$ (katkoviiva) on kohtisuorassa vektorin $\bar{v}$ kanssa. Tällöin on siis oltava

$$\bar{v}\cdot(\bar{u}-\bar{u}') = 0$$

ja koska $\bar{u}' = t\bar{v}$, saadaan

$$\bar{v}\cdot\bar{u} = t\|\bar{v}\|^2.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä reaaliluku t ja sijoitetaan se yhtälöön $\cos\theta = \frac{t\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|}$. Saadaan

$$\cos\theta = \frac{\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\|\bar{v}\|^2}\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}.$$

MÄÄRITELMÄ 3.7. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$, $\bar{u}\neq\bar{0}$ ja $\bar{v}\neq\bar{0}$, välinen kulma on θ, $0\leq\theta\leq\pi$, jolle pätee

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}.$$

Vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välisen kulman määritelmän avulla voidaan johtaa myös kaava

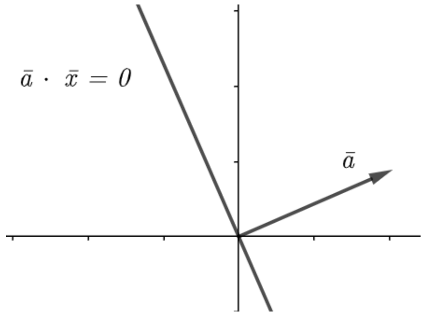
$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta,$$

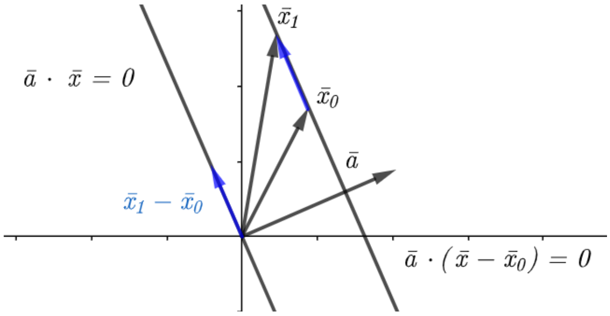
joka toimii geometrisena tulkintana vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ väliselle pistetulolle. Tehtäväkokoelman tehtävässä 8 tulee laskea kahden vektorin välinen kulma radiaaneina, kolmen desimaalin tarkkuudella. Vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välisen kulman selvittämisen lisäksi kiinnostava tieto on, mikä on vektori $\bar{u}'$. Sitä kutsutaan vektorin $\bar{u}$ *projektioksi* vektorille $\bar{v}$ ja se saadaan laskemalla edellä olevien tietojen avulla. [**15**, sivu 22]

$$Proj_{\langle\bar{v}\rangle}(\bar{u}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v}.$$

STACK-tehtävässä 22 lasketaan annetun vektorin projektio toiselle vektorille kuvan avulla. Geometrinen esitystapa auttaa käsitteen ymmärtämisessä ja erityisesti vastauksen hahmottamisessa; myös projektio on vektori, ei reaaliluku.

Vektorin tapaan, myös suora ja taso ovat tuttuja käsitteitä opiskelijoille entuudestaan. Lineaarialgebrassa suoralle voidaan antaa erilaisia määritelmiä. Tarkastellaan ensin origon kautta kulkevaa suoraa $\bar{a} \cdot \bar{x} = 0$. Vektoria $\bar{a}$ kutsutaan suoran normaalivektoriksi. [**15**, sivu 28] Jos suora ei kulje origon vaan pisteen $\bar{x}_0$ kautta, suoran yhtälö on muotoa $\bar{a} \cdot \bar{x} = c$, jossa vakiolla c merkitään pistetuloa $\bar{a} \cdot \bar{x}_0$. Kuvassa 3.5 oikealla on pisteen $\bar{x}_0$ kautta kulkeva suoran yhtälö. Piste $\bar{x}_1$ on eräs suoran piste. Sinisellä vektorilla on merkitty pisteiden $\bar{x}_0$ ja $\bar{x}_1$ erotusta $\bar{x}_1 - \bar{x}_0$. Suora koostuu siis niistä pisteistä $\bar{x}$, joille pätee $(\bar{x} - \bar{x}_0) \perp \bar{a}$. [**15**, sivu 29]





KUVA 3.5. Vasemmalla origon kautta kulkevan suoran yhtälö ja oikealla pisteen $\bar{x}_0$ kautta kulkeva suoran yhtälö.

Edelleen suoran yhtälö voidaan määritellä normaalivektorin lisäksi myös suuntavektorin avulla, jolloin se on muotoa $\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{a}$, $t \in \mathbb{R}$. Nyt suora on niiden pisteiden $\bar{x}$ joukko, jotka ovat vektorin $\bar{a}$ suuntaisia ja kulkevat pisteen $\bar{x}_0$ kautta. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasot voidaan myös määritellä normaalivektorin $\bar{a}$ avulla. [**15**, sivu 31] Nyt normaalivektori on $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja tason yhtälö saadaan muotoon

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = c \iff a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c.$$

STACK-tehtävät 6, 7, 9 ja 10 käsittelevät suoran ja tason määritelmiä. Lähes jokaisessa tehtävässä yhdistyvät algebrallinen ja geometrinen esitystapa. Tehtävissä tarkastellaan sekä normaali- että suuntavektorin avulla määriteltyjä suoria ja tasoja. Suoran yhtälö tulee osata muodostaa annettujen pisteiden avulla (tehtävä 9 ja 10) tai päinvastaisesti tulee määritellä, kulkeeko annettu suora tai taso tietyn pisteen kautta (tehtävät 6 ja 7). Lisäksi tehtävän 10 b-kohdassa testataan, mitä reaaliluku c tarkoittaa normaalivektorin avulla ilmoitetussa suoran yhtälössä. Yleisimmät virhekäsitykset liittyen suoriin ja tasoihin koskevat niiden ratkaisujoukkoja. Nämä STACK-tehtävät keskittyvät kuitenkin vielä määritelmien hyvään hallintaan ja suorien ja tasojen ominaisuuksiin mennään tarkemmin seuraavassa luvussa.

LUKU 4

Lineaarinen yhtälöryhmä ja Gauss-Jordan menetelmä

Tässä luvussa tarkastellaan erilaisia lineaarisia yhtälöryhmiä, miten niitä tulisi tehokkaasti ratkaista ja mitä ominaisuuksia niiden ratkaisujoukoilla on.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Lineaarisessa yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

on n kappaletta muuttujia x_i ja m kappaletta yhtälöitä. Luvut a_{ij} ja b_j ovat reaalilukuja.

Kunkin yhtälön voi kirjoittaa myös edellisestä luvusta tutussa muodossa $a \cdot x = b$. Yhtälöryhmän ratkaisu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on vektori, joka toteuttaa jokaisen yhtälöryhmän yhtälön. Yhtälöryhmän ratkaisemiseksi meillä on käytössä kolme rivioperaatiota. [**15**, sivut 36–37]

(1) Yhtälöiden paikkoja voidaan vaihtaa keskenänsä.
(2) Yhtälön voi kertoa jollain nollasta eroavalla reaaliluvulla.
(3) Yhtälöön voi lisätä toisen yhtälön kerrottuna jollain reaaliluvulla.

Rivioperaatiot säilyttävät yhtälöryhmien ratkaisut. Jotta rivioperaatioiden käyttö ei olisi niin työlästä, yhtälöryhmä voidaan muuntaa laajennetuksi kerroinmatriisiksi. Rivioperaatiot ovat voimassa sekä yhtälöryhmille että niitä vastaaville laajennetuille kerroinmatriiseille. Laajennettuun kerroinmatriisiin kirjoitetaan ainoastaan yhtälöryhmän kertoimet eikä muuttujia. Alle on kirjoitettu määritelmän 4.1 lineaarista yhtälöryhmää vastaava laajennettu kerroinmatriisi [**15**, sivu 41]

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Yhtälöryhmän ratkaisemiseksi sitä vastaava laajennettu kerroinmatriisi muunnetaan *porrasmatriisiksi.* Porrasmatriisissa jokaisella rivillä ensimmäistä nollasta poikkeavaa alkiota kutsutaan johtavaksi alkioksi. Porrasmatriisille pätee seuraavat ominaisuudet.

(1) Jokaisen rivin johtava alkio löytyy edellisen rivin johtavan alkion oikealta puolelta.
(2) Mahdolliset nollarivit ovat matriisissa alimpana.

Porrasmatriisi pyritään muuntamaan edelleen *redusoiduksi porrasmatriisiksi*, jolle pätee edellisten ehtojen lisäksi seuraavat kaksi ehtoa [**15**, sivu 43].

(1) Johtavan alkion yläpuolella sarakkeessa on vain nollia.
(2) Jokainen johtava alkio on 1.

Algoritmia, jolla yhtälöryhmä ratkaistaan rivioperaatioita hyödyntämällä, kutsutaan Gauss-Jordan menetelmäksi. Vaikka rivioperaatioita voi käsitellä monella eri tavalla, jokaisella matriisilla on kuitenkin yksikäsitteinen redusoitu porrasmuoto. Tämän aihealueen STACK-tehtävissä 14 ja 15 pitää ratkaista annettua yhtälöryhmää vastaava redusoitu porrasmatriisi. Lopulliseen vastaukseen tulee antaa juuri redusoitu muoto, joka on jokaiselle vastaajalle tehtävään arvotuista reaaliluvuista huolimatta yksikäsitteinen, joten tehtävänannot ovat hyvin määriteltyjä. Redusoidusta porrasmatriisista voidaan lukea yhtälöryhmän ratkaisut. Ratkaisujoukolle on kolme eri mahdollisuutta.

Mikäli redusoitu porrasmatriisi on saatu muotoon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

yhtälöryhmän ratkaisu on **yksikäsitteinen** ja se on luettavissa suoraan matriisista. Tämän yhtälöryhmän ratkaisu olisi siis

$$\begin{cases} x_1 &= d_1 \\ x_2 &= d_2 \\ & \vdots \\ x_n &= d_n. \end{cases}$$

Yllä olevassa matriisissa nollarivejä ei välttämättä ole alhaalla ollenkaan tai niitä saattaa olla useampia.

Jos jokin redusoidun porrasmatriisin riveistä on muotoa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{array}\right], d \neq 0,$$

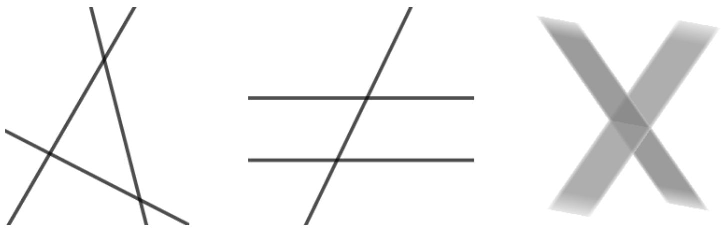
tämä tarkoittaa, että yhtälöryhmässä on epätosi yhtälö **eikä yhtälöryhmällä siten ole ratkaisua**.

Jos ratkaisu on olemassa, eikä se ole yksikäsitteinen, on tällöin niitä automaattisesti **ääretön määrä**. Redusoidussa porrasmatriisissa on tällöin mukana niin kutsuttu vapaa muuttuja. Kyseistä muuttujaa vastaavassa sarakkeessa ei ole ollenkaan johtavaa alkiota. Näitä erilaisia matriiseja ja niiden merkitystä yhtälöryhmän ratkaisun kannalta pohditaan tehtävässä 13. Tehtävässä on annettu neljä eri matriisia, joista yhdessä on vapaa muuttuja, yhdessä on epätosi yhtälö ja vain yksi matriiseista on redusoidussa muodossa. Tehtävässä ei ole siis tarkoituksena ratkaista yhtälöryhmää, vaan tulkita erilaisista matriiseista niiden ominaisuuksia.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen, ratkaisujoukon tulkitseminen ja Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmän algoritmin ymmärtäminen ovat lineaarialgebran keskeisimpiä sisältöjä ja oppimistavoitteita. [**6**, sivut 266–267] Opiskelijan käsitykseen yhtälöryhmästä ja sen ratkaisujoukosta vaikuttaa paljon opiskelijan aikaisempi tieto yhtälönratkaisusta [**13**, sivu 75].

Yhtälöryhmät, joissa on muuttujia yhtä paljon kuin on yhtälöitä, koetaan usein helpoimmiksi ratkaista, erityisesti jos ratkaisu on yksikäsitteinen tai ratkaisua ei ole olemassa [**13**, sivu 75]. Jos yhtälöryhmää ratkaistaessa jokin yhtälöistä saadaan esimerkiksi muotoon $-1 = 4$, tilanne ymmärretään oikeaoppisesti, että yhtälöryhmällä ei olemassa tällöin ratkaisua. Usein kuitenkin muotoa $0 = 0$ olevasta yhtälöstä päädytään virheellisesti samaan johtopäätökseen vaikka todellisuudessa ratkaisuja on tällöin ääretön määrä. [**13**, sivu 72] Tämä virhekäsitys on seurausta siitä, että yhtälöryhmän ratkaisu mielletään yhteisten pisteiden joukoksi, eikä muoto $0 = 0$ suoraan anna tiettyä arvoa muuttujalle x. [**13**, sivu 78].

Myös ratkaisujoukkojen geometriseen tulkintaan liittyy virhekäsityksiä. Kuvassa 4.1 on esitetty suorien ja tasojen leikkauksia. Kahdessa ensimmäisessä kuvassa on kolme suoraa, joilla ei ole yhtään yhteistä leikkauspistettä ja kolmannessa kuvassa on kaksi tasoa, joiden leikkaus on suora.



KUVA 4.1. Suorien ja tasojen leikkauksia.

Yleinen virhekäsitys on, että ensimmäisen kuvan yhtälöryhmällä olisi kolme ratkaisua ja sekä toisen että kolmannen kuvan yhtälöryhmillä ratkaisuja olisi kaksi. Suorien tapauksissa on selkeää, mistä virhekäsitys tulee. Jotta kolmen yhtälön yhtälöryhmällä olisi ratkaisu, tulisi sen toteuttaa kaikki yhtälöt. Nyt kuvissa kahdella suoralla kerrallaan on yksi yhteinen piste, mutta kaikille kolmelle suoralle tällaista pistettä ei ole olemassa kummassakaan kuvassa. Kolmannessa kuvassa tasot saatetaan ymmärtää virheellisesti äärellisinä objekteina ja siten ratkaisujen lukumäärän katsotaan olevan kaksi, yhteisen janan päätepisteet. Vastaavasti suoran voidaan nähdä olevan kahden tason yksikäsitteinen ratkaisu aivan kuten kahden suoran välinen leikkauspiste on yksikäsitteinen ratkaisu. Todellisuudessahan suora koostuu äärettömästä määrästä pisteitä ja siten myös ratkaisuja on äärettömän monta. Tutkimukset, joiden pohjalta edellä luetellut virhekäsitykset on nostettu esiin, osoittavat, että näitä virhekäsityksiä esiintyy matematiikassa vielä yliopistotasolla. [**13**, sivut 79–81]

Tämän aihealueen STACK-tehtävissä 11 ja 12 edellä lueteltuja virhekäsityksiä pyritään oikaisemaan. Tehtävässä 11 on asetettu koordinaatistoon kolme suoraa kuten kuvassa 4.1 vasemmalla. Vastauksesta ”kolme ratkaisua” tehtävä antaa eriyttävän palautteen. Tehtävässä 12 yhtälöparissa on muuttujien x_1 ja x_2 lisäksi vakio t. Tehtävän tarkoituksena on pohtia, miten vakion t arvot vaikuttavat yhtälöparin ratkaisujen määrään. Tehtävässä ei siis riitä, että osaa mekaanisesti ratkaista yhtälöparin.

LUKU 5

Vektoriavaruudet ja niiden virittäminen

5.1. Lineaarinen riippumattomuus ja aliavaruudet

Lineaarialgebran keskeisimpiä käsitteitä on *lineaarikombinaatio* [**15**, sivu 11].

MÄÄRITELMÄ 5.1. Olkoon $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Vektoria

$$\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k$$

kutsutaan vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioksi.

Lineaarikombinaation avulla voidaan määritellä myös vektoreiden *lineaarinen riippumattomuus*.

MÄÄRITELMÄ 5.2. Vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälön

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0$$

ainoa ratkaisu on

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Muissa tapauksissa vektorit ovat lineaarisesti riippuvia, eli yhtälölle on olemassa jokin ratkaisu siten, että $c_i \neq 0$ jollain $i = 1, \ldots, k$.

Tämä on siis yhtäpitävää sen kanssa, että mitään vektoreista $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ ei voida esittää toistensa lineaarikombinaationa. Annetun vektorijoukon voidaan siis todistaa olevan lineaarisesti riippumaton osoittamalla, että oletuksesta $c_1\bar{v}_1+c_2\bar{v}_2+\cdots+c_k\bar{v}_k = 0$ seuraa $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Onkin tärkeää huomata, että $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ on yhtälön $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0$ ratkaisu sekä lineaarisesti riippuvalle että riippumattomalle vektorijoukolle, mutta jälkimmäiselle se on ainoa ratkaisu. [**4**, sivu 11]. Erityisesti avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreiden kohdalla lineaarinen riippumattomuus voi olla helposti pääteltävissä, mutta muuten hyvä työväline sen selvittämiseksi on Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille yhtälö $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0$ voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$c_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + c_k \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix} = 0,$$

ja edelleen

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0.$$

Tästä yhtälöstä ensimmäiseen matriisiin voidaan käyttää Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmää ja selvittää millä vakioiden c_k arvolla yhtälö $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0$ on tosi. [**15**, sivut 145–147]

Lineaarinen riippumattomuus lukeutuu usein sellaisiin lineaarialgebran käsitteisiin, joka on helppo ymmärtää [**16**, sivu 211]. Käsite esiintyy usein juuri sellaisissa tehtävissä, joissa opiskelijat voivat mekaanisesti laskea ja esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreiden lineaarista riippuvuutta voi havainnollistaa geometrisesti. Abstraktilla tasolla (avaruudessa $\mathbb{R}^n$) vektorijoukon lineaarisen riippumattomuuden määritteleminen on kuitenkin haasteellisempaa ja algebralliseen tai geometriseen esitystapaan pohjautuva määritelmä saattaa jäädä puutteelliseksi. [**4**, sivu 4] STACK-tehtävissä 16 ja 17 harjoitellaan lineaarikombinaation ja lineaarisen riippumattomuuden käsitteitä ensin laskemalla ja edelleen abstraktilla tasolla tehtävässä 18. Tehtävissä 16 ja 17 tutkitaan erityisesti yhtälöä $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0$ ja sen ratkaisuja. Tehtävissä kaikki vektorit tunnetaan, joten vastaukset saa selville laskemalla. Sen sijaan tehtävässä 18 vektoreita ei ole tarkasti määritelty ja annettujen tietojen avulla tulee päätellä, onko vektorijoukko lineaarisesti riippuva vai riippumaton. Tehtävä 18 testaa siis käsitteiden syvällisempää hallintaa siinä missä tehtävät 16 ja 17 ovat laskennallisia.

Lineaarialgebran eri esitystapojen vaikutus näkyy myös *aliavaruuden* käsitteessä.

MÄÄRITELMÄ 5.3. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $\mathbb{V}$ on aliavaruus jos se täyttää seuraavat kolme ehtoa.

(1) $\bar{0} \in \mathbb{V}$.
(2) Jos $\bar{v} \in \mathbb{V}$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin myös $c\bar{v} \in \mathbb{V}$.
(3) Jos $\bar{v} \in \mathbb{V}$ ja $\bar{u} \in \mathbb{V}$, niin myös $\bar{v} + \bar{u} \in \mathbb{V}$.

Aliavaruus on siis suljettu joukko sekä skalaarikertolaskun että vektorisumman suhteen, eli molempien laskutoimitusten tulosten tulee kuulua myös kyseiseen aliavaruuteen [**15**, sivu 127]. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $\mathbb{V}$ osoitetaan aliavaruudeksi käymällä jokainen määritelmän kohdista läpi. Jos jokin ehdoista ei toteudu, kyseessä ei ole aliavaruus. Kyseessä ei myöskään ole aliavaruus, jos ehdot 2 ja 3 pätevät vain tietyille vektoreille. Pelkän esimerkin antaminen ei siis riitä osoittamaan joukkoa aliavaruudeksi. Tämä onkin aliavaruuden määritelmään liittyvä yleinen virhekäsitys: ehtojen tulee olla voimassa kaikille vektoreille $\bar{v} \in \mathbb{V}$ ja $\bar{u} \in \mathbb{V}$. [**12**, sivu 158] Tämä virhekäsitys esiintyy myös muissa saman tyyppisissä tehtävissä eikä rajoitu pelkästään lineaarialgebraan. STACK-tehtävässä 20 pitää selvittää, onko annettu avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ osajoukko aliavaruus. Tutkittavia joukkoja ovat muun muassa suorat ja tasot, jotka voivat olla joko sanallisessa muodossa tai piirrettynä koordinaatistoon. Vaikka tehtävässä riittää antaa pelkkä vastaus (tosi tai epätosi), opiskelijan tulee silti käydä läpi määritelmän jokainen kohta, jotta oikeaan tulokseen on mahdollista päästä.

Aliavaruuden käsitteeseen liittyvä, toinen yleinen tehtävätyyppi on, kuuluuko tietty vektori annettuun aliavaruuteen. STACK-tehtävän 19 a-kohdassa tulee ensin selvittää, kuuluuko vektori aliavaruuteen ja b-kohdassa tehtävä on aseteltu päinvastoin - vektori tulee määritellä siten, että se kuuluisi aliavaruuteen.

MÄÄRITELMÄ 5.4. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioiden muodostamaa joukkoa

$$\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \rangle = \{c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k : c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

kutsutaan vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaariseksi verhoksi.

Myös avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarinen verho on aliavaruus, jolloin vektori $\bar{u}$ kuuluu aliavaruuteen $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \rangle$, mikäli

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{u}$$

joillain reaaliluvuilla $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Eli vektori $\bar{u}$ kuuluu annettuun aliavaruuteen, jos se voidaan esittää vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

5.2. Avaruuden kanta ja dimensio

Vektoreita $\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikantavektoreiksi. Standardivektoreille on ominaista se, että ne ovat lineaarisesti riippumattomia, eli yhtälön $c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + \cdots + c_n\bar{e}_n = 0$ ainoa ratkaisu on $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Lisäksi standardivektoreille on ominaista, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori voidaan ilmaista niiden lineaarikombinaationa. Eli jos $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, niin $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n$. Vektorijoukkoa $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikannaksi. [**15**, sivut 149–150] Tämä päättely ei rajoitu ainoastaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikantaan.

MÄÄRITELMÄ 5.5. Vektorijoukko $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden $\mathbb{V}$ kannan, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) Vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.
(2) $\mathbb{V} = \langle \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \rangle$.

Jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudella $\mathbb{V}$ on kanta. Oleellista kannan muodostamisessa on siis vektoreiden lukumäärä: niitä ei saa olla liikaa (ne ovat lineaarisesti riippumattomat) eikä toisaalta liian vähän (ne virittävät avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden $\mathbb{V}$). [**15**, sivu 149] Itse asiassa mikään avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorijoukko, jossa on vähemmän kuin n vektoria, ei riitä virittämään sitä. Toisaalta jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorijoukko, jossa on $n + 1$ vektoria, on lineaarisesti riippuva. Näiden tulosten seurauksena jokaisessa avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannassa tulee olla tasan n vektoria. Nyt voidaan määritellä aliavaruuden *dimensio*. [**15**, sivu 158]

MÄÄRITELMÄ 5.6. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden $\mathbb{V}$ dimensio $\dim V$ on sen kannassa olevien vektoreiden lukumäärä.

Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmää pystyy hyödyntämään sekä aliavaruuden kannan määrittelemisen että dimension laskemisen yhteydessä. STACK- tehtäväkokoelmassa niihin liittyviä harjoituksia ovat 21, 23, 24. Tehtävässä 21 pitää selvittää, muodostavatko annetut vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Tehtävässä on a-, b- ja c-kohdat, mutta vain ensimmäisessä niistä tarvitsee käydä Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmä läpi, jos on ymmärtänyt kannan määritelmän. Tehtävän b-kohdassa on kaksi vektoria ja c-kohdassa vektoreita on neljä, eli ainoastaan tehtävän a-kohdassa kolme vektoria voi muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Kannan ja lineaarisen riippumattomuuden käsitteisiin liittyy paljon erilaisia tuloksia, joiden ymmärtämistä testataan tehtävässä 23. Tehtävässä annetut vektorit ovat tuntemattomia, joten vastaukset vaativat jälleen käsitteiden syvällistä ymmärtämistä. Edelleen tehtävän 24 a-kohdassa tulee ensin laskea annettujen vektoreiden avulla aliavaruuden dimensio Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmää käyttäen ja b-kohdassa vielä tulkita saatua vastausta.

Kun aliavaruuden $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ kanta $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ on tiedossa, jokainen aliavaruuden vektori $\bar{x}$ voidaan siis kirjoittaa yksikäsitteisellä tavalla muodossa

$$\bar{x} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k,$$

jossa kertoimet $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ovat vektorin $\bar{x}$ koordinaatit kyseisessä kannassa. Jos aliavaruuden $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^n$ kanta on ortogonaalinen, koordinaattien laskeminen helpottuu. [**15**, sivu 202]

MÄÄRITELMÄ 5.7. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ muodostama kanta aliavaruudelle $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ on *ortogonaalinen kanta*, jos $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$ aina kun $i \neq j$. Edelleen $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ muodostaa aliavaruuden $\mathbb{V}$ *ortonormaalin kannan*, jos se on ortogonaalinen ja vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ ovat yksikkövektoreita.

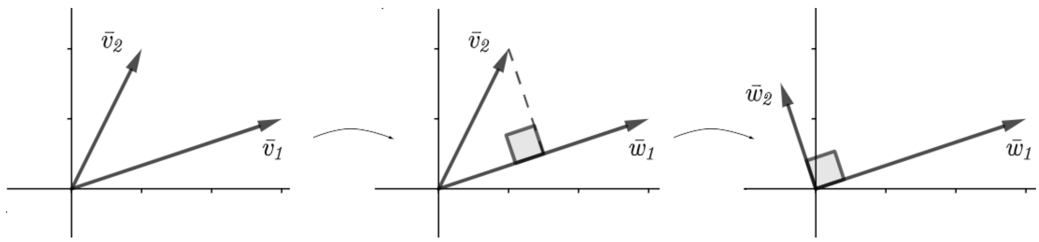
Mikäli vektorijoukko $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ muodostaa aliavaruudelle $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ ortonormaalin kannan, vektorin $\bar{x}$ koordinaatit saadaan pistetulosta

$$\bar{x} = (\bar{x} \cdot \bar{v}_1)\bar{v}_1 + (\bar{x} \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_2 + \cdots + (\bar{x} \cdot \bar{v}_k)\bar{v}_k.$$

Koska ortogonaalisella ja ortonormaalilla kannalla on myös muita hyödyllisiä ominaisuuksia, on hyvä tietää, miten aliavaruuden kanta $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ voidaan muuttaa ortogonaaliseksi ja edelleen ortonormaaliksi kannaksi. Tämä tapahtuu algoritmin avulla, joka on nimetty Gram-Schmidt ortogonalisointimenetelmäksi. [**15**, sivu 203]

Olkoon nyt $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ aliavaruuden $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ jokin kanta. Gram-Schmidt ortogonalisointimenetelmällä kannasta saadaan aliavaruuden ortogonaalinen kanta $\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k\}$ valitsemalla ensin $\bar{v}_1 = \bar{w}_1$. Vektori $\bar{w}_2$ saadaan vähentämällä vektorista $\bar{v}_2$ sen projektio vektorille $\bar{w}_1$, eli

$$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}\bar{w}_1.$$



KUVA 5.1. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreiden ortogonalisointi.

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreiden ortogonalisointi on esitetty kuvassa 5.1. Edelleen vektori $\bar{w}_3$ saadaan vähentämällä vektorista $\bar{v}_3$ sen projektiot vektoreille $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$, eli

$$\bar{w}_3 = \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}\bar{w}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|^2}\bar{w}_2$$

ja näin algoritmia jatkettaisiin myös seuraaville vektoreille

$$\bar{w}_k = \bar{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\bar{v}_k \cdot \bar{w}_i}{\|\bar{w}_i\|^2}\bar{w}_i.$$

Ortogonaalisesta kannasta $\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k\}$ saadaan edelleen ortonormaali kertomalla vektorit pituutensa käänteisluvulla, eli $\{\frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \ldots, \frac{\bar{w}_k}{\|\bar{w}_k\|}\}$. [**15**, sivut 203–204]

Edellä esitellyn algoritmin käyttö soveltuu hyvin STACK-harjoitukseksi (tehtävä 25), sillä lasku on monivaiheinen ja hyvin mekaaninen, mutta silti tärkeä ymmärtää. STACK-järjestelmä tunnistaa automaattisesti mahdolliset laskuvirheet ja tunnistaa myös sieventämättömät vektorin komponentit.

LUKU 6

Matriisit

6.1. Matriisien perusominaisuudet

Matriisin käsite esiteltiin jo luvussa neljä, kun lineaarista yhtälöryhmää merkittiin lyhyemmässä muodossa matriisin avulla. Matriiseilla on kuitenkin myös paljon muita ominaisuuksia.

Matriisi $A = A_{m\times n}$ on m×n reaaliluvun järjestetty kaavio

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

jossa a_{ij} vastaa rivin i ja sarakkeen j alkiota. Matriisissa $A_{m\times n}$ on m riviä ja n saraketta, erityisesti m kappaletta avaruuden $\mathbb{R}^n$ rivivektoreita, eli

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m$$

ja n kappaletta avaruuden $\mathbb{R}^m$ sarakevektoreita, eli

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, n.$$

Matriisia A sanotaan neliömatriisiksi, jos sen rivien ja sarakkeiden lukumäärä on sama. Neliömatriisi on edelleen diagonaalimatriisi, jos kaikki muut kuin diagonaalilla olevat alkiot ovat nollia, eli $a_{ij} = 0$ aina kun $i \neq j$. Jos diagonaalilla olevat alkiot ovat ykkösiä, eli $a_{ij} = 1$ aina kun $i = j$, diagonaalimatriisia sanotaan yksikkömatriisiksi tai identtiseksi matriisiksi. Identtistä $n\times n$-matriisia merkitään I_n. [**15**, sivu 81]

Tarkastellaan seuraavaksi matriisien algebrallisia ominaisuuksia. Kuten vektoreille, myös matriiseille on määritelty skalaarikertolasku ja summa. Olkoon A ja B $m \times n$ -kokoisia matriiseja ja c jokin reaaliluku. Tällöin

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

ja

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Skalaarikertolasku on määritelty kaikille matriiseille A ja reaaliluvuille c, mutta matriisien summassa on oleellista huomata, että se on määritelty vain keskenään samankokoisille matriiseille. Lisäksi matriisien summalle pätee reaaliluvuillekin voimassa oleva laskujärjestys $A + B = B + A$. [**15**, sivu 82] Kahden matriisin välistä tuloa ei kuitenkaan lasketa samalla tavalla kuin kahden reaaliluvun välistä tuloa, aivan kuten kahden vektorin välinen pistetulo (kertolasku) ei anna tuloksi vektoria vaan reaaliluvun. Olkoon nyt matriisi $A = A_{m\times n}$ ja matriisi $B = B_{n\times p}$. Tällöin tulo $AB = (AB)_{m\times p}$ on matriisi. Kahden matriisin välinen tulo AB on määritelty, jos matriisin A sarakkeiden lukumäärä vastaa matriisin B rivien lukumäärää. [**15**, sivu 84] Matriisin AB sarake j saadaan kertomalla matriisi A matriisin B sarakevektorilla j siten, että

$$(AB)_j = \begin{bmatrix} a_{11}b_{1j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + \dots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + \dots + a_{mn}b_{nj} \end{bmatrix}$$

ja tällöin matriisin AB alkio ij saadaan summana

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Vaikka tulo AB olisi määritelty, se ei tarkoita, että tuloa BA voitaisiin määritellä. Näin on itse asiassa mahdollista ainoastaan, kun matriisissa $A_{m\times p}$ sarakkeiden lukumäärä vastaa matriisin $B_{p\times m}$ rivien lukumäärää ja päinvastoin. Toisin kuin kahden matriisin välinen summa, matriisitulo ei ole kommutatiivinen, eli vaikka molemmat tulot AB ja BA olisi määritelty, niin todennäköisesti $AB \neq BA$. [**15**, sivu 85]

Erityisesti matriisituloon liittyy virhekäsityksiä: kahden matriisin välinen tulo ei ole samalla tavalla kertolasku, kuten opiskelijat ovat aikaisemmin kahden reaaliluvun välisen tulon ymmärtäneet. [**5**, sivu 104] Matriisin perusominaisuuksiin ja -laskutoimituksiin liittyvät harjoitukset soveltuvat hyvin STACK-tehtäviksi. STACK-tehtävä 26 käsittelee matriisin määritelmää, erityisesti sitä, milloin summa- ja tulomatriisi on määritelty. Tehtävissä 27, 29 ja 30 lasketaan matriisien summaa ja tuloa. Matriisin tuloon liittyvissä laskuissa on huomioitu eriyttävä palaute niissä vastauksissa, joissa tulomatriisi on laskettu vain kertomalla vastaavat komponentit keskenään. Tehtävässä 29 tutkitaan matriisitulon vaihdannaisuutta: matriisi A tulee määrittää siten, että $AB = BA$. Lisäksi tehtävässä tulee määrittää matriisi C siten, että $CD = 0$, mutta matriisia C ei voi kuitenkaan määrittää nollamatriisiksi. Tehtävässä pyritään korostamaan, että matriiseille tiedosta $CD = 0$ ei voida päätellä, että joko $C = 0$ tai $D = 0$ [**15**, sivu 85].

Neljännessä luvussa n muuttujan ja m yhtälön lineaarista yhtälöryhmää vastasi laajennettu kerroinmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa nyt myös matriisien A, $\bar{x}$ ja $\bar{b}$ yhtälönä

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriisiyhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisut voidaan ilmoittaa matriisiyhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisujen avulla. [**15**, sivu 59] Jos yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ eräs ratkaisu on vektori $\bar{u}_1$, niin yhtälön muut ratkaisut ovat muotoa

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{v},$$

missä $\bar{v}$ on yhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisu. Sijoitetaan muotoa $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{v}$ oleva ratkaisu matriisiyhtälöön $A\bar{x} = \bar{b}$,

$$A\bar{u} = A(\bar{u}_1 + \bar{v}) = A\bar{u}_1 + A\bar{v} = b + 0 = b$$

ja vastaavasti sijoitetaan muotoa $\bar{v} = \bar{u} - \bar{u}_1$ oleva ratkaisu matriisiyhtälöön $A\bar{x} = \bar{0}$

$$A\bar{v} = A(\bar{u} - \bar{u}_1) = A\bar{u} - A\bar{u}_1 = b - b = 0,$$

eli yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisut ovat muotoa $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{v}$ ja yhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisut muotoa $\bar{v} = \bar{u} - \bar{u}_1$. [**15**, sivu 59] Matriisiyhtälöiden ratkaisujen riippuvuutta toisistaan käsitellään STACK-tehtävässä 28. Tehtävässä pitää määritellä, mitä muotoa ovat matriisiyhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisut yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisujen perusteella. Vastausvaihtoehtoja tehtävässä on neljä, joissa jokaisessa vektoreille on annettu eri kertoimia. Tällöin tehtävän ratkaisemiseksi tarvitsee esimerkiksi sijoittaa eri vaihtoehdot yhtälöihin, kuten edellä. Tämä voi kuitenkin tuntua haastavalta, sillä tehtävän vektoreita ei ole tarkasti määritelty.

6.2. Käänteismatriisi ja determinantti

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin $n \times n$ -kokoisia matriiseja. Annetaan ensin määritelmä kääntyvälle matriisille.

MÄÄRITELMÄ 6.1. Matriisi $A_{n\times n}$ on kääntyvä, jos on olemassa matriisi $B_{n\times n}$ siten, että

$$AB = BA = I_n.$$

Matriisia B kutsutaan matriisin A käänteismatriisiksi ja merkitään $B = A^{-1}$.

Nyt jos on olemassa matriisi B siten, että $AB = I$, niin yhtälön $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisu on $\bar{x} = B\bar{b}$, sillä

$$A\bar{x} = AB\bar{b} = I\bar{b} = \bar{b}.$$

Käänteismatriisi voidaan löytää asettamalla

$$\left[\ A \mid I_n\ \right],$$

jossa I_n on identtinen matriisi. Jos soveltamalla Gauss-Jordan menetelmää, laajennettu kerroinmatriisi saadaan muotoon

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right],$$

matriisi A on kääntyvä ja matriisi B on matriisin A käänteismatriisi. [**15**, sivut 104–105] Käänteismatriisiin liittyviä harjoituksia ovat STACK-tehtävät 31 ja 32. Tehtävässä 31 pohditaan ensin, miltä matriisin transpoosi ja käänteismatriisi ylipäätänsä näyttävät verrattuna alkuperäiseen matriisiin ja tehtävässä 32 selvitetään vaihe vaiheelta, onko annettu matriisi kääntyvä.

Tarkastellaan matriisin $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ käänteismatriisia. Gauss-Jordan menetelmällä laajennettu kerroinmatriisi

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

saadaan muotoon

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

eli matriisin A käänteismatriisi on $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ja erityisesti $ad-bc \neq 0$. Jos jälkimmäinen ehto ei päde, matriisi A ei ole kääntyvä. [**15**, sivu 105] Tämä ehto määrittelee suoraan 2×2 -kokoiselle matriisille sen kääntyvyyden: lukua $ad-bc$ kutsutaan matriisin *determinantiksi.* Determinantti on jokaiselle neliömatriisille A määriteltävissä oleva luku det$A$, joka kertoo, onko matriisi kääntyvä. Determinantilla on myös monia muita hyödyllisiä ominaisuuksia, kuten esimerkiksi geometriassa pinta-alojen ja tilavuuksien määritteleminen. [**15**, sivu 239] Determinantti on hyvin keskeinen käsite lineaarialgebrassa, mutta se jää monesti opiskelijoilla ainoastaan algebralliselle tasolle: determinantti ymmärretään luvuksi, joka saadaan matriisista tietyn laskutoimituksen seurauksena. Determinantin määritelmä ja ominaisuudet jäävät usein sen sijaan tiedostamatta, vaikka juuri ne, mekaanisen laskennan sijasta tekevät siitä hyvin monipuolisen ja hyödyllisen käsitteen. [**10**, sivut 130–132] STACK-järjestelmän ominaisuudet soveltuvat hyvin myös determinanttiin liittyviin harjoituksiin. STACK-tehtävien avulla pystytään laskemaan determinantteja, jolloin niiden ominaisuuksien tunnistamiseen ja oppimisen syventämiseen jää enemmän kurssin muuta opetusaikaa.

Matriisin $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determinantti saadaan siis laskemalla $\det A = ad - bc$. Jos $\det A \neq 0$, niin matriisi A on kääntyvä, mikä pätee myös muille neliömatriiseille. Matriisin $A_{n\times n}$, jolle $n > 2$ determinantti saadaan alimatriisien determinanttien avulla. [**15**, sivu 246] Matriisin $A_{3\times 3}$ determinantti saadaan

$$\det A = a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Determinantin laskemiseen liittyvä virhekäsitys on, että kaikkien neliömatriisien determinantti olisi laskettavissa kuten 2×2-matriiseille. [**10**, sivu 136] Determinantin laskemista harjoitellaan STACK-tehtävässä 33. Tehtävän a-kohta antaa eriyttävän palautteen, jos 3×3-matriisin determinantti on ratkaistu samalla tavalla kuin

2×2-matriisin determinantti, eli vähentämällä matriisin diagonaalialkioiden tulo toisistaan. Yleisiä determinanttiin liittyviä virheellisiä päätelmiä ovat myös $\det A = \det B \to A = B$ ja $\det A = k \det B \to A = kB$ [**10**, sivu 132]. STACK-tehtävässä 35 tulee pohtia determinantin ominaisuuksia ja erityisesti sitä, ovatko tehtävänannon tarjoamat tiedot kyseisille päätelmille riittävät.

Matriisin determinantin selvittämiseksi voidaan hyödyntää myös rivioperaatioita. Olkoon matriisi A' neliömatriisia A rivioperaatioilla muokkaamalla saatu matriisi. Tällöin

(1) $\det A' =$ - $\det A$, jos A' on saatu vaihtamalla matriisin A kahden rivin paikat keskenään.
(2) $\det A' = c \det A$, jos A' on saatu kertomalla matriisin A rivi skalaarilla c.
(3) $\det A' = \det A$, jos A' on saatu lisäämällä jokin matriisin A rivi toiseen riviin kerrottuna skalaarilla.

Tämä pätee sekä neliömatriisin riveille että sarakkeille. [**15**, sivu 239] Koska determinantin määrittäminen rivioperaatioiden avulla jää usein vähälle huomiolle, rivioperaatioiden ja determinantin väliseen yhteyteen liittyy myös virhekäsityksiä [**2**, sivu 2990]. Ensimmäisessä kohdassa virheellinen johtopäätös on, että koska $\det A' = -\det A$, niin matriisin A rivien (tai sarakkeiden) paikkojen vaihdon lisäksi myös matriisin etumerkin tulisi vaihtua. Toisessa kohdassa taas riittää, että vain yksi matriisin riveistä (tai sarakkeista) kerrotaan skalaarilla c, jotta saataisiin $\det A' = c \det A$, eikä siis jokaista matriisin riviä (tai saraketta) tarvitse kertoa. [**2**, sivut 2991–2992] Rivioperaatioiden ja determinantin välistä yhteyttä opiskelijat pääsevät harjoittelemaan STACK-tehtävässä 34. Tehtävässä tulee ensin laskea matriisin A determinantti, jonka jälkeen kolmen seuraavan matriisin determinantit tulee ilmaista matriisin A determinantin avulla. Nämä matriisit on saatu muokkaamalla matriisia A eri rivioperaatioilla. Matriisien yhteyttä ei ole kuitenkaan valmiiksi kerrottu, vaan se tulisi havaita tehtävää tehdessä.

LUKU 7

Lineaarikuvaukset

Vektoriavaruuksien välistä funktiota kutsutaan *lineaarikuvaukseksi*, jos sille pätee seuraavat ehdot.

MÄÄRITELMÄ 7.1. Funktio $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *lineaarikuvaus*, jos kaikille vektoreille $\bar{u}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja reaaliluvuille c pätee, että

(1) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ ja
(2) $T(\mathrm{c}\bar{u}) = \mathrm{c}T(\bar{u})$.

Lineaarikuvaus säilyttää sekä skalaarikertolaskun että vektorisumman. Annettu funktio osoitetaan lineaarikuvaukseksi käymällä määritelmän molemmat kohdat läpi kaikille vektoreille $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ sekä reaaliluvuille c. [**15**, sivut 91–92] Opiskelijat pääsevät harjoittelemaan tätä STACK-tehtävässä 36, jossa pitää interaktiivisen koordinaatiston avulla luoda vektorit $T(\mathrm{c}\bar{u}+\mathrm{c}\bar{v})$ ja $\mathrm{c}T(\bar{u}) + \mathrm{c}T(\bar{v})$ sekä pohtia, onko annettu funktio lineaarikuvaus.

Lineaarikuvausten ja matriisien välillä on yhteys: jokaista lineaarikuvausta $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastaa m×n -kokoinen matriisi. Tällöin voidaan merkitä $T(\bar{x}) = A\bar{x}$. Matriisi A voidaan muodostaa tutkimalla, miten lineaarikuvaus kuvaa määrittelyjoukon $\mathbb{R}^n$ standardikannan vektorit $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$. Matriisin sarakkeet muodostuvat kuvavektoreista $a_j = T(\bar{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. [**11**, sivut 178–179] Lineaarikuvauksiin liittyvissä STACK-tehtävissä 37 ja 38 tarkastellaan, mikä on annetun vektorin kuvavektori ja mikä on annettua lineaarikuvausta vastaava matriisi. Matriisi voi olla haastava muodostaa, sillä rivit ja sarakkeet saattavat mennä usein sekaisin. Siksi esimerkiksi tehtävän 38 a-kohdassa vastauskenttä ei anna viitettä siitä, miltä vastauksen tulisi näyttää, vaan se on jätetty tehtävän tekijän itsensä pohdittavaksi. Muissa tehtävien 37 ja 38 kohdissa vastauskentät on annettu oikean muotoisiksi jo valmiiksi tehtävän helpottamiseksi.

Kun tarkastellaan yhtälöiden $A\bar{x} = \bar{0}$ ja $A\bar{x} = \bar{y}$ ratkaisujoukkoja, voidaan määritellä, onko lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *injektio*, *surjektio* tai *bijektio*. Määritellään tätä ennen vielä lineaarikuvauksen T ytimen $\mathrm{Ker}(T)$ ja kuvajoukon $\mathrm{Im}(T)$ käsitteet. [**11**, sivu 175]

MÄÄRITELMÄ 7.2. Olkoon funktio $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus. Lineaarikuvaukselle on määritelty ydin $\mathrm{Ker}(T)$

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = \bar{0}_m\}$$

ja kuvajoukko $\mathrm{Im}(T)$

$$\mathrm{Im(T)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m : \bar{y} = T(\bar{x})\,\text{jollakin}\,\bar{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Lineaarikuvauksen ydin on siis niiden vektoreiden $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ joukko, jotka kuvautuvat nollavektoriksi, eli yhtälön $A\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisut. Jos $\bar{x} = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ on ainoa nollavektoriksi kuvautuva vektori, eli Ker(T)=$\{\bar{0}\}$, lineaarikuvaus on *injektio*. Edelleen lineaarikuvauksen kuvajoukko on niiden vektoreiden $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ joukko, joille yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{y}$ on olemassa ratkaisu. Jos kuvajoukko on koko maaliavaruus, eli $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$, lineaarikuvaus on *surjektio*. [**15**, sivu 226] Edellisessä luvussa määriteltiin, että ainoastaan neliömatriisi $A_{n\times n}$ voi olla kääntyvä. Tällöin matriisia A vastaavalla lineaarikuvauksella $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voi olla käänteiskuvaus ainoastaan, kun matriisi A on kääntyvä. Erityisesti siis pätee, että lineaarikuvaus voi olla bijektio ainoastaan kun $n = m$. Eli toisin kuin yleensä funktioille, lineaarikuvauksille injektiivisyys ja surjektiivisuus ovat seurausta toisistaan, kun $n = m$. STACK-tehtäväkokoelman viimeiset harjoitukset, 39 ja 40, käsittelevät lineaarikuvauksen injektiivisyyttä ja surjektiivisuutta, erityisesti ytimen ja kuvajoukon käsitteitä.

LUKU 8

Tehtäväkokoelman testaaminen

8.1. Kyselyn toteuttaminen

Osana tätä pro gradu -tutkielmaa toteutettiin myös kysely, joka löytyy kokonaisuudessaan liitteestä B. Kysely liittyy STACK-tehtäväkokoelmaan, jota syksyn 2019 kurssin *Lineaarinen algebra ja geometria 1* suorittajat pääsivät testaamaan. Tehtäväkokoelman tekeminen ja kyselyyn vastaaminen oli vapaaehtoista. Tehtäväkokoelma oli vielä testausvaiheessa, joten opiskelijat saivat kokeilla sitä vapaasti ilman, että tehtävissä menestyminen vaikutti esimerkiksi kurssin arvosanaan. Kokeilu toteutettiin kurssin loppupuolella. Tehtäväkokoelma löytyi kurssin Moodle-sivuilta ja kyselyyn pääsi vastaamaan Google Formsissa anonyymisti tehtävien kokeilemisen jälkeen.

Kyselyn avulla opiskelijat saivat antaa mielipiteensä itse tehtäväkokoelmasta ja kertoa siitä löytyvistä mahdollisista virheistä. Kysymykset jaettiin kahteen pääkategoriaan: *tehtävien rakenne ja sisältö* sekä *tehtävien tarkoitus*. Molemmat kategoriat sisälsivät väittämiä, joihin vastattiin Likert-asteikolla (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä).

Tehtävien rakenne ja sisältö:

- Tehtävänannot olivat selkeitä
- Tehtäviin vastaaminen oli teknisesti helppoa
- Tehtävissä esiintyneet kuvat olivat selkeitä
- Tehtävien tekeminen oli miellyttävää
- Tehtävät olivat monipuolisia

Tehtävien tarkoitus:

- Tehtävät testasivat kurssin keskeisiä asiasisältöjä
- Tehtävien malliratkaisut auttoivat tehtävien ymmärtämisessä
- Tehtävistä saatu palaute oli eteenpäin ohjaavaa

Lisäksi kyselyn jälkimmäisessä kategoriassa oli mukana väite tehtävien vaativuustasosta tarkoitukseensa nähden, johon vastattiin asteikolla 1=erittäin korkea, 2=korkea, 3=sopiva, 4=matala, 5=erittäin matala. Kaikkiin väittämiin pystyi valitsemaan ainoastaan yhden vaihtoehdon eikä kohtia voinut jättää myöskään tyhjäksi. Kyselyn lopussa opiskelijoilla oli vielä mahdollisuus täydentää vastauksiaan sanallisesti ja myös tehtävistä mahdollisesti löytyneitä virheitä opiskelijat pystyivät kirjoittamaan kyseiseen vastauskenttään. Tähän kohtaan vastaaminen oli vapaaehtoista.

Kyselyssä haluttiin kiinnittää erityistä huomiota siihen, onko tehtäviin vastaamisen teknisyyden, tekemisen mielekkyyden ja tehtävien vaativuustason välillä riippuvuutta. Hypoteesina ennen kyselyn teetättämistä oli, että jos opiskelija kokee tehtäviin vastaamisen teknisesti hankalaksi, niin tällöin tehtävien tekeminen ei ole myöskään miellyttävää. Vastaavasti jos opiskelija kokee tehtäviin vastaamisen teknisesti hankalaksi, niin tällöin myös niiden vaativuustaso koetaan korkeaksi. Asetetaan siis nollahypoteesit ja vaihtoehtoiset hypoteesit H_1 ja H_2 sekä testataan niitä tämän luvun kolmannessa kappaleessa.

Nollahypoteesi H_{0_1} = tehtäviin vastaamisen teknisyyden ja tekemisen mielekkyyden välillä ei ole riippuvuutta.

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 = jos tehtäviin vastaaminen on teknisesti hankalaa, niin tällöin tehtävien tekeminen ei ole myöskään miellyttävää.

Nollahypoteesi H_{0_2} = tehtäviin vastaamisen teknisyyden ja tehtävien vaativuustason välillä ei ole riippuvuutta.

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_2 = jos tehtäviin vastaaminen on teknisesti hankalaa, niin tällöin myös niiden vaativuustaso on korkea.

8.2. Kyselyn tulokset

Kurssia *Lineaarinen algebra ja geometria 1* suoritti syksyllä 2019 aktiivisesti noin 170 opiskelijaa, joista 91 vastasi kyselyyn ja siten kävivät läpi kaikki tehtäväkokoelman tehtävät. Vastausprosenttia 53,5% voidaan pitää hyvänä. Kyselyn väittämät on taulukoitu ja niihin on selvitetty tulosten *frekvenssi*, *suhteellinen frekvenssi* ja *mediaani*.

Taulukko 1. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman tehtävänannoista (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävänannot olivat selkeitä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	0	0
2	2	2,2
3	3	3,3
4	29	31,9
5	57	62,6
Md=5		

TAULUKKO 2. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelmaan vastaamisen teknisyydestä (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtäviin vastaaminen oli teknisesti helppoa	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	5	5,5
2	16	17,6
3	6	6,6
4	47	51,6
5	17	18,7

Md=4

TAULUKKO 3. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman kuvien selkeydestä (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävissä esiintyneet kuvat olivat selkeitä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	0	0
2	2	2,2
3	5	5,5
4	32	35,2
5	52	57,1

Md=5

TAULUKKO 4. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman tekemisen mielekkyydestä (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävien tekeminen oli miellyttävää	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	8	8,8
2	20	22
3	16	17,6
4	30	32,9
5	17	18,7

Md=4

Taulukko 5. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman tehtävien monipuolisuudesta (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävät olivat monipuolisia	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	1	1,1
2	3	3,3
3	5	5,5
4	41	45,05
5	41	45,05
Md=4		

Taulukko 6. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman sisällöstä (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävät testasivat kurssin keskeisiä asiasisältöjä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	0	0
2	2	2,2
3	4	4,4
4	29	31,9
5	56	61,5
Md=5		

Taulukko 7. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman malliratkaisuista (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Malliratkaisut auttoivat tehtävien ymmärtämisessä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	0	0
2	2	2,2
3	9	9,9
4	37	40,7
5	43	47,2
Md=4		

Taulukko 8. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman antamasta palautteesta (1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3=en osaa sanoa, 4=jokseenkin samaa mieltä, 5=täysin samaa mieltä)

Tehtävistä saatu palaute oli eteenpäin ohjaavaa	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	0	0
2	4	4,4
3	8	8,8
4	37	40,7
5	42	46,1
Md=4		

Taulukko 9. Kyselyyn vastanneiden mielipide STACK-tehtäväkokoelman vaativuustasosta (1=erittäin korkea, 2=korkea, 3=sopiva, 4=matala, 5=erittäin matala)

Tehtävien vaativuustaso tarkoitukseensa nähden oli	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
1	1	1,1
2	18	19,8
3	67	73,6
4	4	4,4
5	1	1,1
Md=3		

8.3. Pohdinta

Kyselyn avulla onnistuttiin keräämään paljon hyvää ja rakentavaa palautetta tehtäväkokoelmasta. Erityisesti jälkimmäisen kategorian väittämien avulla saadun palautteen mukaan tehtävät ovat tarkoituksenmukaisia (taulukot 6, 7 ja 8). Lisäksi tehtävien rakenteeseen ja sisältöön liittyvien väittämien kanssa vastaajat ovat olleet pääsääntöisesti ”jokseenkin samaa mieltä” tai ”täysin samaa mieltä” (taulukot 1, 3 ja 5). Eniten vaihtelua vastauksissa näkyy sen sijaan taulukoissa 2, 4 ja 9. Nollahypoteesin ja vaihtoehtoisten hypoteesien valintaa voidaan pitää siis onnistuneena.

Lasketaan seuraavaksi, voidaanko nollahypoteesi hylätä. Koska kyselyyn on vastattu Likert-asteikolla (vaihtoehdot 1-5), voidaan hyödyntää järjestysasteikolle sopivaa testausmenetelmää [**9**, sivu 122]. Lasketaan SPSS-ohjelman avulla Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin tehtävien teknisyydelle, mielekkyydelle ja vaativuustasolle. Verrataan ensin keskenään tehtävien teknisyyttä ja tekemisen mielekkyyttä.

Taulukko 10. Vastaamisen teknisyyden ja mielekkyyden välinen Spearmanin järjestyskorrelaatio

		Mielekkyys
Teknisyys	Korrelaatiokerroin	.561
	Sig. (2-tailed)	.000
	N	91

Spearmanin korrelaatiokertoimen r_s arvoksi saadaan $r_s = 0.561$, eli tehtävien vastaamisen teknisyyden ja tekemisen mielekkyyden välillä on kohtalaisen vahva korrelaatio [**9**, sivu 123]. Eli mitä helpompaa tehtäviin on vastata teknisesti, sitä miellyttävämpää niiden tekeminen on. Lisäksi p-arvoksi saadaan p(2-tailed)$= 0 < 0.05$, eli tulosta voidaan pitää tilastollisesti merkittävänä. Tämä siis tukee vaihtoehtoista hypoteesia H_1 ja nollahypoteesi voidaan hylätä. Tulos oli siis odotusten mukainen ja siksi on tärkeää ennen STACK-tehtävien ottamista osaksi opetusta harjoitella ohjelman käyttöä yhdessä opiskelijoiden kanssa. Esimerkiksi MAXIMA-kielen hyvä hallinta on hyödyksi myös opintojen myöhemmässä vaiheessa. Lisäksi matematiikan opinnoissa yliopistossa käytetään paljon LaTeX ladontajärjestelmää, jossa käytettävän kielen kanssa on paljon yhtäläisyyksiä STACK-järjestelmän kanssa.

Vastaavasti lasketaan SPSS-ohjelman avulla Spearmanin korrelaatiokerroin tehtävien teknisyydelle ja vaativuustasolle.

Taulukko 11. Vastaamisen teknisyyden ja tehtävien vaativuustason välinen Spearmanin järjestyskorrelaatio

		Vaativuustaso
Teknisyys	Korrelaatiokerroin	.082
	Sig. (2-tailed)	.437
	N	91

Nyt Spearmanin korrelaatiokertoimen r_s arvoksi saadaan $r_s = 0.082$, eli tehtävien vastaamisen teknisyyden ja vaativuustason välillä on erittäin vähäinen korrelaatio (kerroin lähes nolla) [**9**, sivu 123]. Lisäksi p-arvoksi saadaan p(2-tailed)$= 0.437 > 0.05$, eli tulosta ei voida pitää tilastollisesti merkittävänä eikä vaihtoehtoinen hypoteesi H_2 saa tukea. Eli mikäli opiskelija koki tehtäviin vastaamisen teknisesti hankalaksi, se ei vaikuttanut siihen, miten opiskelija koki tehtävien vaativuustason. Usein siis teknisesti hankalaksi koetuissa vastauksissa tehtävien vaativuustaso koettiin silti sopivaksi. Vaikka tulos ei välttämättä ollut odotusten mukainen, on se silti positiivinen: kyselyyn vastaajat ovat siis onnistuneet arvioimaan juuri pyydetyllä tavalla tehtävien vaativuustasoa niiden tarkoitukseensa nähden, irrallisena ominaisuutena teknisyydestä.

Kyselyn loppuun opiskelijat saivat vielä täydentää aikaisempia vastauksiaan avoimeen vastauskenttään ja kertoa esimerkiksi mahdollisesti löytämistään virheistä. Kyselyn täytti yhteensä 91 opiskelijaa, joista 42 vastasi tähän kohtaan, eli noin 46% vastaajista halusi täydentää aikaisempia vastauksiaan. Varsinaisia sisällöllisiä virheitä tehtävistä ei noussut esiin ollenkaan.

STACK-järjestelmän mahdollistama lukujen satunnaisuus koettiin joissain vastauksissa epämiellyttäväksi. Suurin osa näitten sanallisten vastausten antajista oli vastannut olevansa "täysin eri mieltä" tai "jokseenkin eri mieltä" kohdissa "tehtäviin vastaaminen oli teknisesti helppoa" ja "tehtävien tekeminen oli miellyttävää", mikä tukee vielä aikaisemmassa kappaleessa laskettua korrelaatiota. Lukujen satunnaisuus aiheutti erityisesti kahdessa tehtävässä ongelmia: tehtävässä 25, jossa piti Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmää käyttäen muodostaa ortogonaalinen kanta annetulle aliavaruudelle ja tehtävässä 32, jossa tuli selvittää annetun matriisin käänteismatriisi. Kyseiset tehtävät koettiin hankaliksi ja aikaa vieviksi.

"Varsinkin Gram-Schmidt-ortonormalisoinnissa tuli hieman ärsyttävää numeroiden pyörittelyä ja sinne väliin pääsee helposti pieniä laskuvirheitä."

"Hyviä tehtäviä, osaan olisi voinut laittaa hieman pienempiä/selkeämmin laskettavia lukuja ettei vastaukset olis olleet kymmenestuhannesosina tai useiden satojen luokkaa."

"Matriisien lasku oli työlästä, sillä niissä oli paljon vaikeita murtolukuja."

Lukujen satunnaisuus ei aiheuttanut ainoastaan murtolukuihin liittyviä ongelmia, niin kuin seuraavasta opiskelijan vastauksesta käy ilmi.

"Mielestäni oli myös turhauttavaa, että Moodle "arpoi" eri tehtäviä/arvoja eri suorittajille, sillä tämä vaikeutti yhteistyötä paljon. Avun pyytäminen oli vaikeaa, kun jokaisella oli eri arvot/vektorit yms. tehtävissä."

Tämä opiskelijan vastaus on täysin ymmärrettävä: esimerkiksi laskuvirheiden paikallistaminen varmasti helpottuisi, jos toisella opiskelijalla olisi tehtävässään samat lukuarvot. Kuitenkin STACK-tehtävien etuna on, että yhteistyön merkitys tehtävien tekemisessä ei vähene (kuten luvussa 2 todettiin). Muita huomioita tehtiin esimerkiksi liittyen vastauskenttien kokoon ja graafeihin.

"Vastauslaatikot olivat joidenkin tehtävien kohdalla hieman liian ahtaat. Varsinkin jos vastaus oli murtoluku."

"Yhdessä graafissa oli kolme suoraa ja kysyttiin onko niitä vastaavalle yhtälöryhmälle ratkaisua. Suorista 2 erottui selkeästi taustasta minulle (värit punainen ja vihreä), mutta kolmas oli musta ja meinasi jäädä huomaamatta."

Vaikka monessa sanallisessa palautteessa tehtäväkokoelma koettiin toimivaksi, ei se välttämättä tarkoittanut, että tämänkaltaisten tehtävien tekeminen olisi toivottavaa.

"Muuten hyviä tehtäviä mutta paperilla parempi tehdä kun moodle hylkää pienistäkin virheistä muuten oikean vastauksen."

"Tehtävien teko toimii myös näin, vaikka kyllä matematiikka aina on parempaa kynällä ja paperilla."

Eniten positiivisia kommentteja keräsivät tehtävien malliratkaisut ja tehtävistä saatava eriyttävä palaute.

"Systeemi on sopiva melko yksinkertaisten tehtävien ratkomiseen (jollaisia nämä tehtävät mielestäni olivat). Monimutkaisempien tehtävien kanssa saattaisi olla epämiellyttävämpää säätää tietokoneella."

"Erityisen hyvä oli, että sai palautetta ja malliratkaisuja!"

8.4. Kehitysideoita

Näiden palautteiden pohjalta tehtäväkokoelmaan tehtiin seuraavia muutoksia. Tehtävien 25 ja 32, Gram-Schmidt-ortonormalisoinnissa ja käänteismatriisin selvittämisessä, annettujen lukujen vaihteluväliä tehtävänannoissa pienennettiin. Lukujen tarpeettoman suuri vaihteluväli teki tehtävistä työläitä ratkoa ja tämä opiskelijoiden tekemä huomio oli tärkeä tehtävien kehittämisen kannalta. Vastauskenttien kokoa ei tehtävissä laajennettu, sillä yleensä ne koettiin pieniksi juuri niissä tehtävissä, joissa vastauksessa esiintyi paljon merkkejä. Lukujen vaihteluväliä pienentämällä myös vastauksista, erityisesti murtoluvuista tulee vähemmän tilaa vieviä. Myös muutamat kirjoitusvirheet, joita opiskelijat olivat palautteessaan nostaneet esiin, korjattiin.

Palautteissa annettiin huomioita myös syntaksivirheistä. Esimerkiksi vektorit tulee STACK-tehtävissä antaa muodossa $[a, b]$ eikä (a, b). Lisäksi desimaalin erottimena käytetään pistettä eikä pilkkua ja murtoluvut merkitään vinoviivalla. Näiden huomioiden pohjalta tehtävänantoihin ei kuitenkaan lisätty ohjeistusta, sillä syntaksin kirjoittamista olisi tehtäväkokoelman käyttöönoton yhteydessä tarkoitus harjoitella erikseen. Näin tehtiin myös nyt ennen kokeilua, mutta harjoitus jäi hyvin vähäiseksi, joten syntaksiin liittyvä palaute on ymmärrettävää.

Seuraavaksi tehtäväkokoelman laatimisen jälkeen ja siitä saadun palautteen pohjalta olisi hyvä pohtia myös tehtävien pisteytystä. Arviointi ei kuitenkaan ollut osana tätä pro gradu -tutkielmaa ja tehtävien pisteytyksen saakin kurssin vastaava opettaja miettiä itse kuhunkin tilanteeseen sopivaksi. Lisäksi olisi edellä mainittujen muutosten jälkeen mielenkiintoista testata tehtäväkokoelmaa uudestaan ja selvittää niiden vaikutus, esimerkiksi ensi syksynä, kun uudet opiskelijat pääsevät tekemään tehtäviä ja harjoittelemaan järjestelmän käyttöä. Myös nyt syntaksin harjoittelemiseen olisi voinut varata enemmän aikaa, jolloin tehtäväkokoelman testaaminen olisi ollut opiskelijoille mielekkäämpää. Toisaalta tähän ei ollut perusteltua ryhtyä, sillä opiskelijoilla olisi kulunut aikaa sellaisen taidon opettelemiseen, jota ei (ainakaan vielä) ole vaadittu kurssin oppimistavoitteissa.

Kyselyä voi pitää onnistuneena, sillä se osoitti, että tehtäviä on laadittu harkiten ja perustellusti. Toisaalta opiskelijoiden huomiot, erityisesti lukuarvojen vaihteluvälin pienentäminen tietyissä tehtävissä, olivat erittäin tärkeitä tehtäväkokoelman kehittämisen kannalta.

LUKU 9

Lopuksi

Tämän pro gradu -tutkielman tekeminen on ollut minulle työntäyteinen mutta sitäkin opettavaisempi prosessi. Tutkielman teko on vaatinut monipuolisesti eri aihealueiden soveltamista: lineaarisen algebran ja geometrian teorian tuntemista, opetusalan tutkimuksiin perehtymistä sekä tietoteknisten taitojen ja tilastollisten menetelmien käyttöä. Tutkielmassa siis yhdistyy hyvin aikaisemmat yliopisto-opintoni ja kulunut syksy antaa paljon eväitä tulevaa työelämää ja matematiikan opettajan uraa varten.

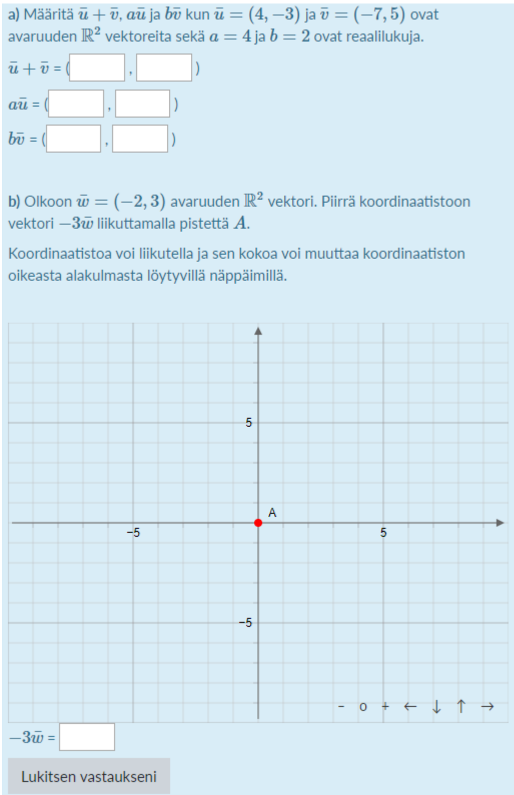
On ollut hienoa päästä mukaan vaikuttamaan Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opetustyöhön ja kehittämään uutta opetusmateriaalia sekä sen käyttöönoton myötä uutta opetustyyliä. Ainakin Helsingin ja Itä-Suomen yliopistossa tehdyt vastaavanlaiset kokeilut, tehostetun kisällioppimisen menetelmä ja ABACUS-projekti, ovat keränneet opiskelijoilta positiivista palautetta. Myös tämän tutkielman yhteydessä toteutetun kyselyn perusteella opiskelijoiden suhtautuminen STACK-tehtäviin oli pääsääntöisesti positiivinen.

Haluan kiittää ohjaajaani Tuomo Äkkistä tiiviistä yhteistyöstä koko syksyn ajalta. Erityisesti tehtävien laadinnassa ja niiden testausvaiheessa ohjauksesta oli suuri apu. Kiitos ennen kaikkea koko tämän graduprojektin mahdollistamisesta.

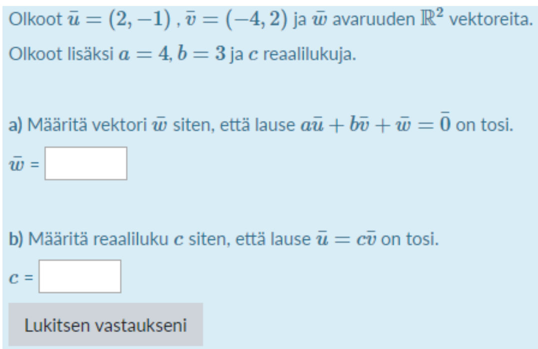
Toivotan kaikille tuleville kurssin *Lineaarinen algebra ja geometria 1* opiskelijoille menestystä kurssin suorittamiseen - toivottavasti STACK-tehtävistä on apua uuden oppimisessa ja oivaltamisessa.

LIITE A

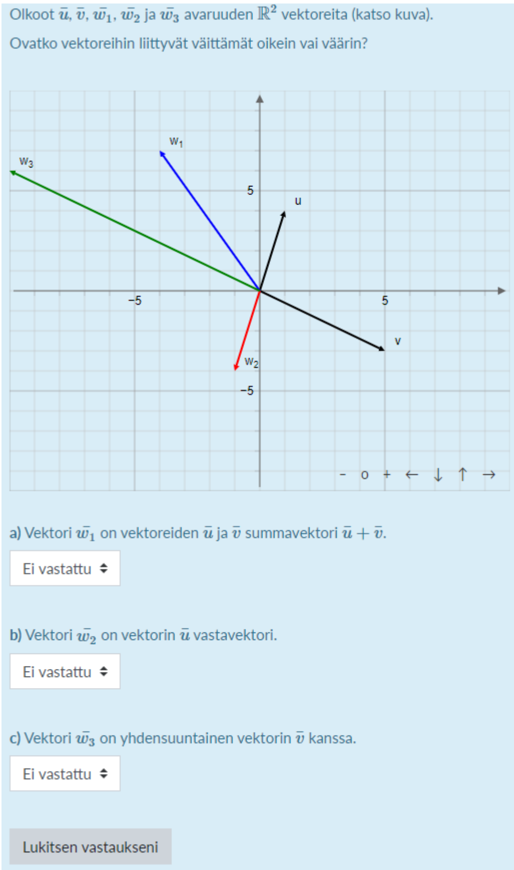
Tehtäväkokoelma



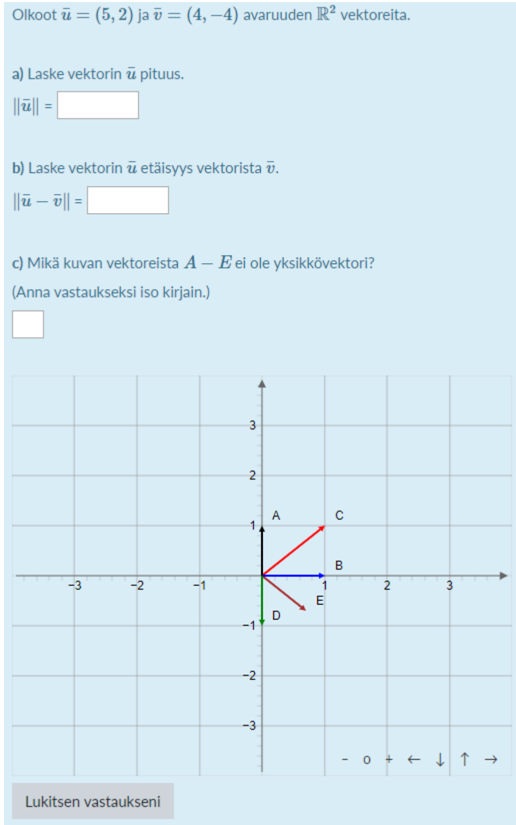
1. Tehtävä: vektorisumma, skalaarimonikerta



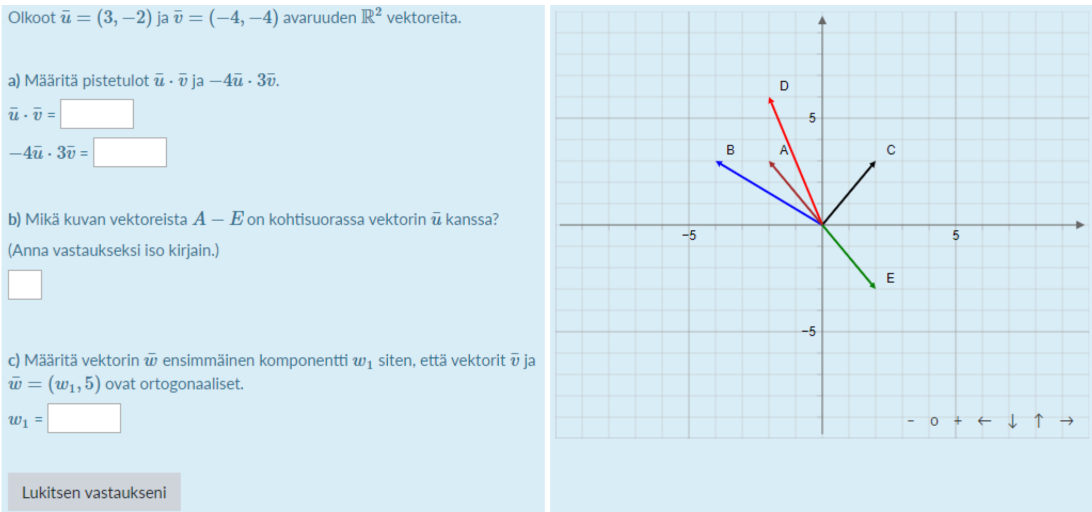
2. Tehtävä: vektoriyhtälön ratkaisu



3. Tehtävä: vastavektori, yhdensuuntaisuus



4. Tehtävä: yksikkövektori, vektorin pituus, vektoreiden välinen etäisyys



5. Tehtävä: pistetulo, kohtisuoruus, ortogonaalisuus

Ovatko seuraavat suoraan $\bar{x} = (-3, 9) + t(3, 4)$ liittyvät väittämät oikein vai väärin?

a) Piste $(-6, 5)$ kuuluu suoralle.

Ei vastattu

b) Suora on vektorin $(-3, 9)$ suuntainen.

Ei vastattu

c) Suora kulkee pisteen $(3, 4)$ kautta.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

6. Tehtävä: suoran vektorimuotoinen yhtälö

Olkoot $(1, 4, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 2$ ja $(-2, -8, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = -4$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasoja.

a) Onko väite tosi vai epätosi?

Taso $(1, 4, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 2$ kulkee pisteen $\bar{p} = (0, -1, 1)$ kautta.

Ei vastattu

b) Mikä alla olevista vaihtoehdoista kuvaa tasojen $(1, 4, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 2$ ja $(-2, -8, 2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = -4$ leikkausta?

1. Suora

2. Tyhjä joukko

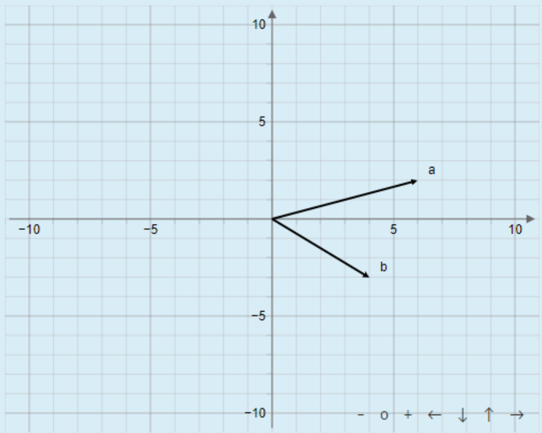
3. Taso

(Anna vastaukseksi leikkausta vastaava numero.)

Lukitsen vastaukseni

7. Tehtävä: tasot

Olkoot $\bar{a} = (6, 2)$ ja $\bar{b} = (4, -3)$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita, jotka määräävät yhdessä origon kanssa kolmion $\triangle\, OAB$.



a) Määritä kolmion kolmannen sivun AB pituus.

$\|AB\|$ =

b) Kuinka suuri on vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma θ?

(Anna vastaus radiaaneina kolmen desimaalin tarkkuudella.)

θ =

Lukitsen vastaukseni

8. Tehtävä: kolmio ja vektorien välinen kulma

a) Mikä kuvan vektoreista $A - E$ on suoran $7x_1 + 9x_2 = -8$ normaalivektori?

(Anna vastaukseksi iso kirjain.)

b) Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $\bar{p} = (1, 2)$ kautta ja jonka normaalivektori on $\bar{a} = (-3, 1)$.

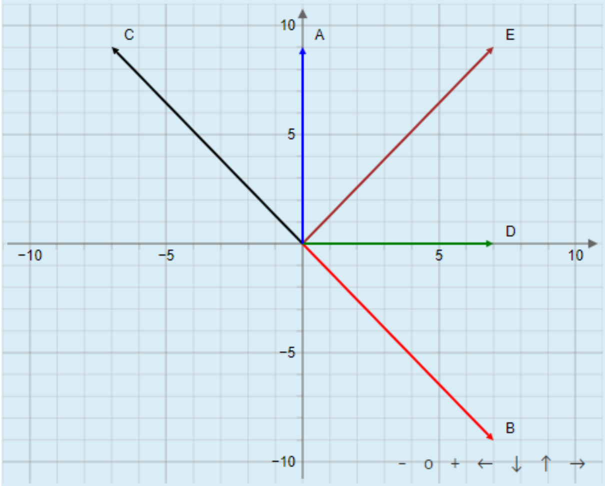
(Anna vastaus ilman sulkeita sievennetyssä muodossa.)

$\square x_1 + \square x_2 = \square$

c) Mikä on suorien $6x_1 + 2x_2 = 10$ ja $-6x_1 + 2x_2 = 6$ leikkauspiste P?

$P = (\square, \square)$

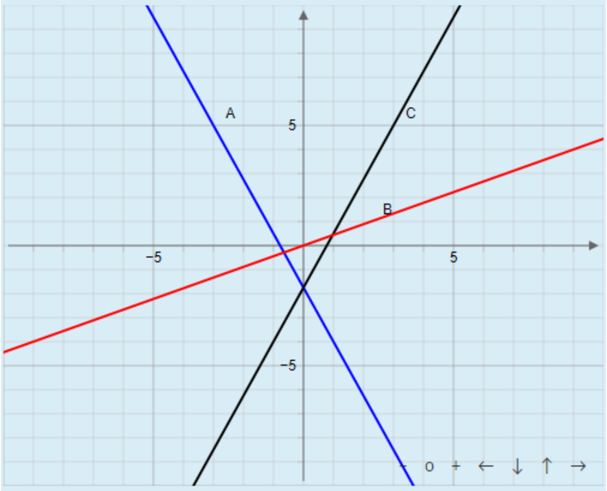
Lukitsen vastaukseni



9. Tehtävä: suoran normaalivektori

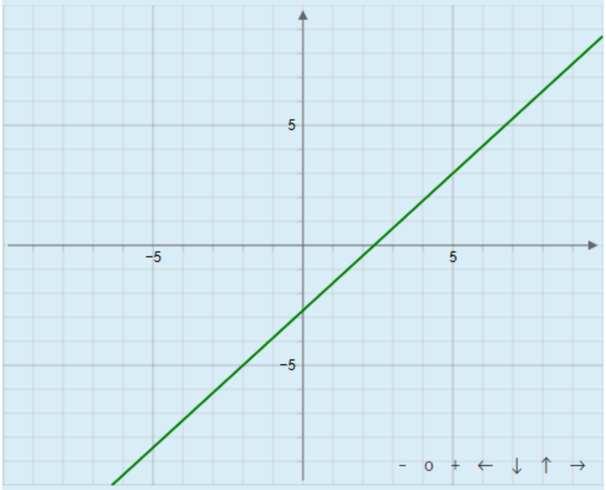
a) Mikä kuvassa olevista suorista $A - C$ vastaa suoran yhtälöä $(\frac{9}{4}, 1) \cdot (x_1, x_2) = -\frac{7}{4}$?

(Anna vastaukseksi iso kirjain.)



b) Määritä reaaliluku c siten, että suoran yhtälö $(1, -\frac{7}{8}) \cdot (x_1, x_2) = c$ vastaa kuvassa olevaa suoraa.

$c = \square$



Lukitsen vastaukseni

10. Tehtävä: suoran yhtälö ja kuvaaja

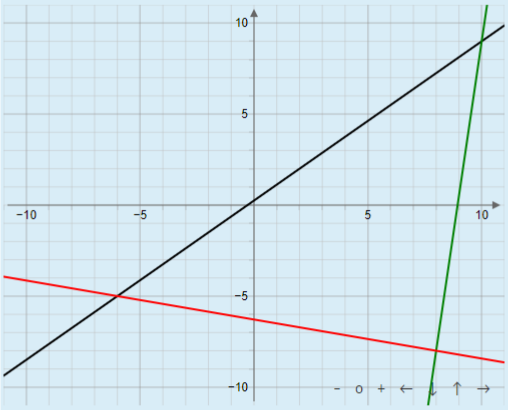
a) Mikä alla olevista yhtälöpareista $1-4$ on lineaarinen?

1) $\begin{cases} 20x_1 - 4x_2 = -5 \\ -2x_1x_2 = -15 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x_1 + 4\sqrt{x_2} = 14 \\ 13x_1 + 19x_2 = -11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^2 = 6 \\ -13x_1 - 7x_2 = 13 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 17 \end{cases}$

(Anna vastaukseksi oikeaa yhtälöparia vastaava numero.)

b) Kuinka monta ratkaisua kuvassa olevalla yhtälöryhmällä on?



Yhtälöryhmällä on ratkaisua.

Lukitsen vastaukseni

11. Tehtävä: lineaarinen yhtälöryhmä

Tarkastellaan alla olevaa yhtälöparia:

$$\begin{cases} (t-1)x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + tx_2 = 6 \end{cases}$$

Ovatko alla olevat väittämät koskien reaalilukua t oikein vai väärin?

a) On olemassa reaaliluku t siten, että yhtälöparilla ei ole yhtään ratkaisua.

Ei vastattu

b) On olemassa reaaliluku t siten, että yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua.

Ei vastattu

c) On olemassa reaaliluku t siten, että yhtälöparin ratkaisu on yksikäsitteinen.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

12. Tehtävä: yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä

Tarkastellaan seuraavia matriiseja:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & 4 & 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Yhdistä matriisia vastaava numero oikeaan väittämään.

Jokaiseen matriisiin sopii vain yksi väittämä ja joukossa on myös yksi ylimääräinen matriisi.

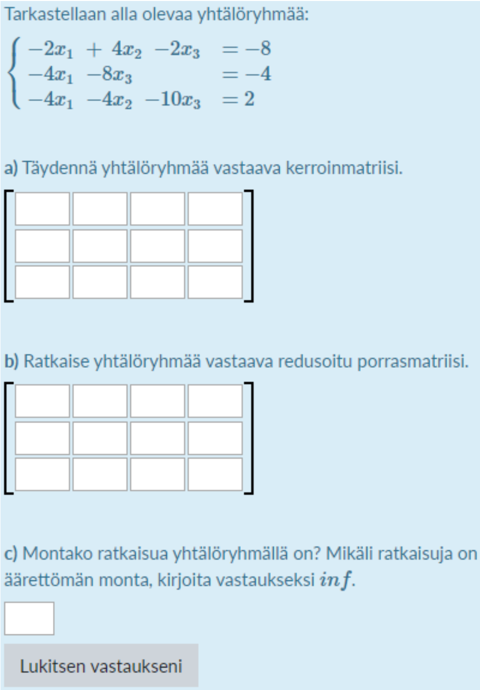
a) Mikä yhtälöryhmistä on redusoidun porrasmatriisin muodossa?

b) Missä yhtälöryhmässä on epätosi yhtälö?

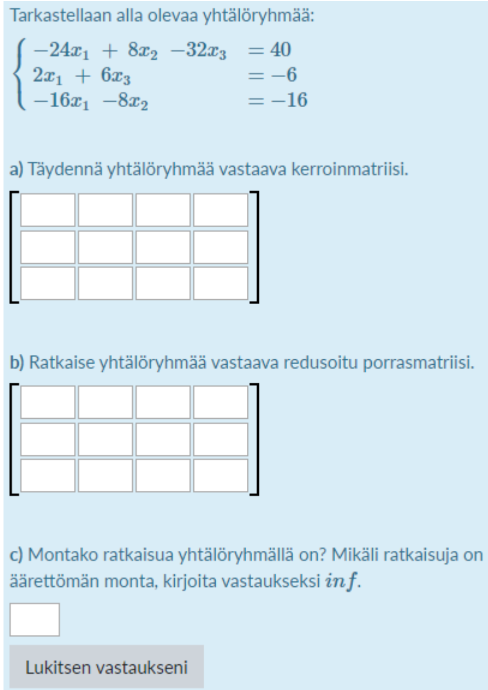
c) Missä yhtälöryhmässä on vapaa muuttuja?

Lukitsen vastaukseni

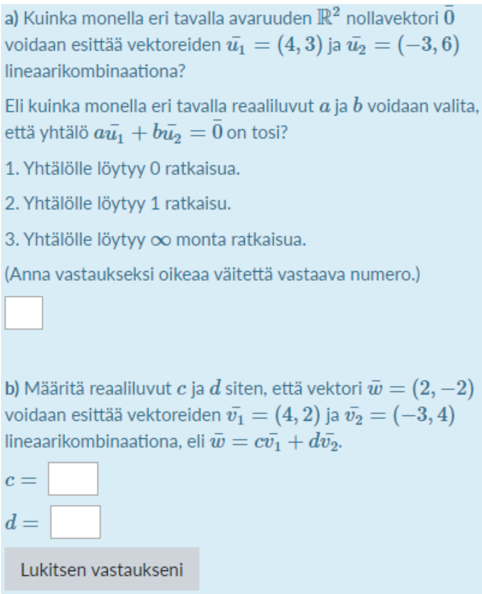
13. Tehtävä: yhtälöryhmä ja matriisi



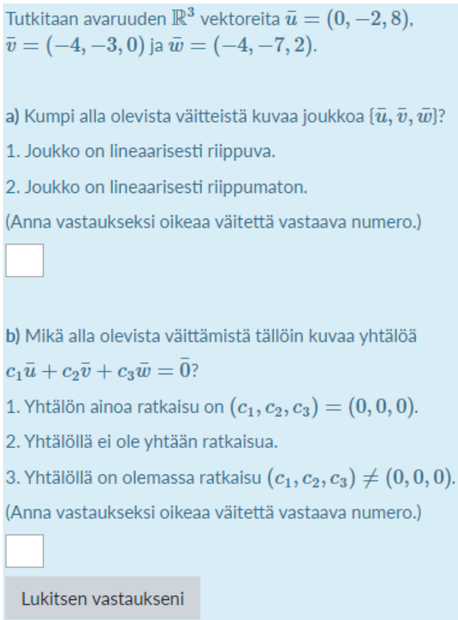
14. Tehtävä: redusoitu porrasmatriisi, ääretön määrä ratkaisuja



15. Tehtävä: redusoitu porrasmatriisi, yksi ratkaisu



16. Tehtävä: lineaarikombinaatiot



17. Tehtävä: lineaarinen riippumattomuus

Olkoot u_1, u_2, u_3 ja u_4 vektoreita avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudessa V.

Ovatko alla olevat väittämät tällöin oikein vai väärin?

a) Jos joukko $\{u_1, u_2, u_3\}$ on lineaarisesti riippumaton, tällöin myös joukko $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Ei vastattu

b) Jos joukko $\{u_1, u_2, u_3\}$ on lineaarisesti riippuva, tällöin myös joukko $\{u_1, u_2\}$ on lineaarisesti riippuva.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

18. Tehtävä: lineaarinen riippumattomuus

a) Olkoot $\bar{u_1} = (3, 8, 9)$ ja $\bar{u_2} = (3, 8, -8)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita.

Olkoon lisäksi $\bar{w_1} = (6, 16, -33)$. Kuuluuko vektori $\bar{w_1}$ aliavaruuteen $\langle \bar{u_1}, \bar{u_2} \rangle$?

1. Kyllä.
2. Ei.

(Anna vastaukseksi oikea väitettä vastaava numero.)

b) Olkoot $\bar{v_1} = (3, 5, 2)$ ja $\bar{v_2} = (-4, 2, 5)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita.

Olkoon lisäksi $\bar{w_2} = (-18, t, 11)$. Määritä reaaliluku t siten, että vektori $\bar{w_2}$ kuuluu aliavaruuteen $\langle \bar{v_1}, \bar{v_2} \rangle$.

$t =$

Lukitsen vastaukseni

19. Tehtävä: aliavaruudet

a) Mitkä alla olevista joukoista ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruuksia?

Valitse kunkin joukon jälkeen tosi, jos kyseessä on aliavaruus ja valitse epätosi, jos kyseessä ei ole aliavaruus.

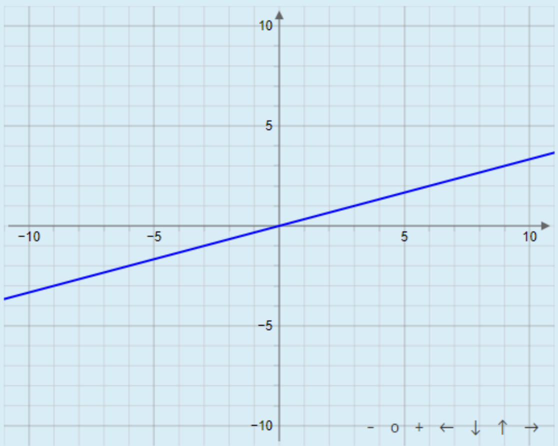
1. $S_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$

Ei vastattu

2. $\{\bar{u}\}$, missä $\bar{u} = (0, 0)$

Ei vastattu

3. Kuvassa oleva suora:



Ei vastattu

b) Mitkä alla olevista joukoista ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia?

Valitse kunkin joukon jälkeen tosi, jos kyseessä on aliavaruus ja valitse epätosi, jos kyseessä ei ole aliavaruus.

4. $S_4 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$

Ei vastattu

5. $\mathbb{R}^2$

Ei vastattu

6. $S_6 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0\}$

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

20. Tehtävä: aliavaruudet

Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita

$\bar{u_1} = (2, 9, 0)$, $\bar{u_2} = (10, 0, -2)$,

$\bar{u_3} = (-8, 0, 0)$, $\bar{u_4} = (-6, 18, 2)$.

Muodostavatko valitut vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan kohdissa $a - c$?

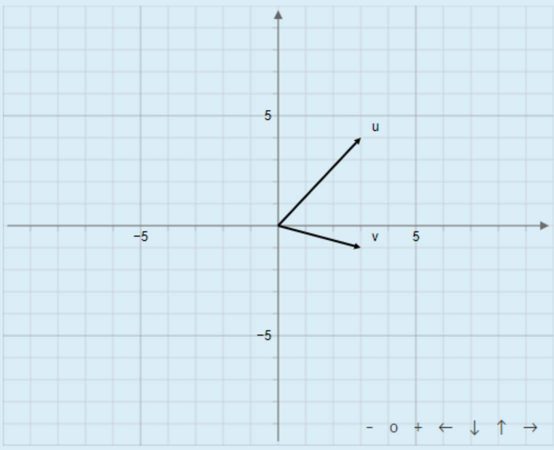
Valitse tosi, jos vektorit muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan ja valitse epätosi, jos vektorit eivät muodosta avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa.

a) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ b) $\bar{u}_1, \bar{u}_3$ c) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$

Ei vastattu Ei vastattu Ei vastattu Lukitsen vastaukseni

21. Tehtävä: kanta

Kuvassa on esitetty vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$.



Määritä vektorin $\bar{u}$ projektio vektorille $\bar{v}$.

$Proj_{\langle\bar{v}\rangle}(\bar{u}) =$

Lukitsen vastaukseni

22. Tehtävä: projektio

a) Olkoon $S_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots, \bar{u}_6\}$ avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektorijoukko.

Onko joukko S_1 tällöin lineaarisesti riippuva vai riippumaton?

1. Joukko S_1 on lineaarisesti riippuva.
2. Joukko S_1 on lineaarisesti riippumaton.
3. Ei voida päätellä annetuilla tiedoilla.

(Anna vastaukseksi oikea numero.)

b) Olkoon $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots, \bar{x}_7\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden V kanta.

Olkoon lisäksi $S_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots, \bar{v}_8\}$ joukko vektoreita.

Voiko myös joukko S_2 olla aliavaruuden V kanta?

1. Joukko S_2 voi olla aliavaruuden V kanta.
2. Joukko S_2 ei voi olla aliavaruuden V kanta.

(Anna vastaukseksi oikea numero.)

c) Olkoot vektorit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in \mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumattomia.

Olkoon lisäksi $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\bar{y} \in \langle \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k \rangle$.

Onko tällöin joukko $S_3 = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{y}\}$ lineaarisesti riippuva vai riippumaton?

1. Joukko S_3 on lineaarisesti riippuva.
2. Joukko S_3 on lineaarisesti riippumaton.
3. Ei voida päätellä annetuilla tiedoilla.

(Anna vastaukseksi oikea numero.)

Lukitsen vastaukseni

23. Tehtävä: johdatus dimensioon

Olkoon $U = \langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus, missä

$\bar{u_1} = (-22, 20, -13)$, $\bar{u_2} = (4, 0, 13)$,

$\bar{u_3} = (5, 0, 0)$, $\bar{u_4} = (9, -10, 0)$.

a) Määritä aliavaruuden U dimensio.

dim$U$ =

b) Mikä alla olevista väittämistä on oikein?

1. $\langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle = \langle \bar{u_1}, \bar{u_2} \rangle$
2. $\langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle = \langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_4} \rangle$
3. $\langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle = \langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3} \rangle$
4. $\langle \bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle = \langle \bar{u_3}, \bar{u_4} \rangle$

(Anna vastaukseksi oikea numero.)

Lukitsen vastaukseni

24. Tehtävä: dimensio

Olkoot $\bar{v_1}$,$\bar{v_2}$ ja $\bar{v_3}$ kolme avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoria siten, että

$\bar{v_1} = (2, 0, -1, -1)$,

$\bar{v_2} = (2, 1, 0, -3)$ ja

$\bar{v_3} = (0, -2, 0, 3)$.

Muodosta ortogonaalinen kanta $\{\bar{w_1}, \bar{w_2}, \bar{w_3}\}$ aliavaruudelle $V = \langle \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{v_3} \rangle$ käyttäen vektoreita $\bar{v_1}$,$\bar{v_2}$ ja $\bar{v_3}$.

Käytä Gram-Schmidt ortogonalisointimenetelmää aloittaen vektorista $\bar{v_1}$ ja etene sitten järjestyksessä vektoreihin $\bar{v_2}$ ja $\bar{v_3}$.

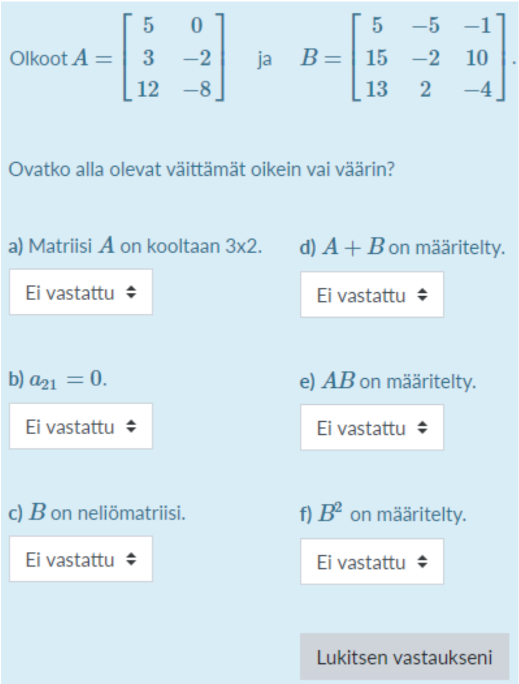
$\bar{w_1}$ = (, , ,)

$\bar{w_2}$ = (, , ,)

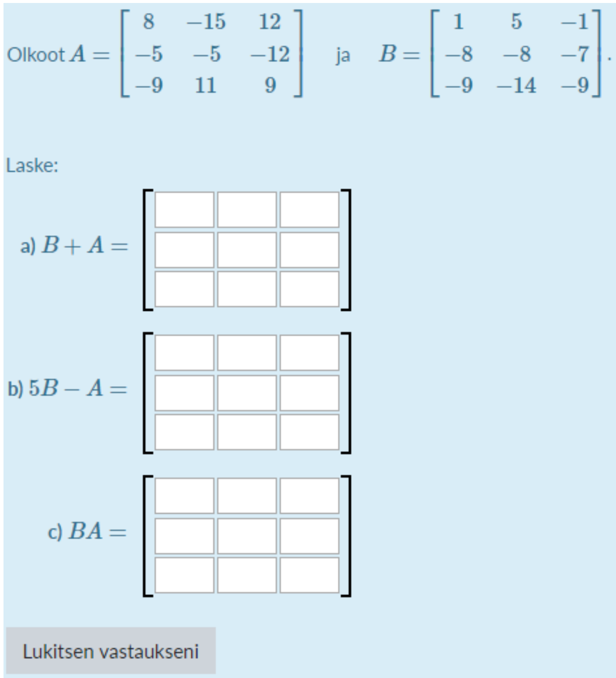
$\bar{w_3}$ = (, , ,)

Lukitsen vastaukseni

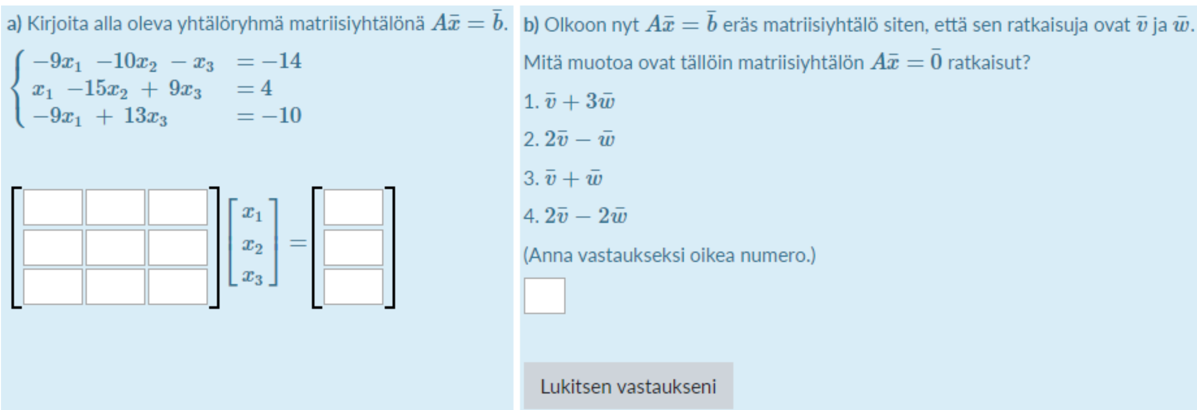
25. Tehtävä: Gram-Schmidt



26. Tehtävä: matriisin määritelmä



27. Tehtävä: summa ja tulo



28. Tehtävä: matriisiyhtälön ratkaisut

a) Olkoot $A = \begin{bmatrix} 2 & -16 \\ 19 & 11 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ x & -\frac{31}{4} \end{bmatrix}$.

Määritä muuttuja x siten, että $AB = BA$.

$x =$ [ ]

b) Olkoot $C = \begin{bmatrix} y & 6 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$ ja $D = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -22 & 30 \end{bmatrix}$.

Määritä muuttuja y siten, että $CD = 0$.

$y =$ [ ]

c) Päteekö nyt $CD = DC$?

Valitse tosi, jos $CD = DC$ ja valitse epätosi, jos $CD \neq DC$.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

29. Tehtävä: matriisien tulo

Tutkitaan matriisijoukkoa M:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 3 \cdot a & c \\ \frac{b}{2} & d & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Olkoot lisäksi $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & -12 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 3 \\ -39 & 0 \end{bmatrix}$ ja $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$.

Tutki, kuuluuko kohdissa $a - c$ annetut matriisit joukkoon M.

Jos matriisi kuuluu joukkoon M, valitse tosi, ja jos ei kuulu, valitse epätosi.

a) Matriisi A. b) Matriisi $2A$. c) Matriisi BC.

Ei vastattu | Ei vastattu | Ei vastattu | Lukitsen vastaukseni

30. Tehtävä: matriisijoukko

a) Olkoot $A = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 8 & -10 \\ 13 & -13 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} -7 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Mikä alla olevista tuloista **1-4** on määritelty.

1) $A^{\mathsf{T}}B$ **2)** $B^{\mathsf{T}}A$ **3)** $A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}$ **4)** AB^{T}

(Anna vastaukseksi oikeaa matriisia vastaava numero.)

b) Olkoon $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Mikä alla olevista matriiseista **1-4** on matriisin C käänteismatriisi C^{-1}.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{76} & \frac{1}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{9}{38} & -\frac{1}{19} & -\frac{6}{19} \\ \frac{3}{76} & \frac{3}{19} & -\frac{1}{19} \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ **4)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{76} & \frac{9}{38} & \frac{3}{76} \\ \frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & \frac{3}{19} \\ \frac{6}{19} & -\frac{6}{19} & -\frac{1}{19} \end{bmatrix}$

(Anna vastaukseksi oikeaa matriisia vastaava numero.)

Lukitsen vastaukseni

31. Tehtävä: transpoosi ja käänteismatriisi

a) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & -13 & 8 \\ -3 & -9 & 7 \\ 15 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ determinantti.

$\det A$ =

b) Määritä reaaliluku x siten, että matriisi $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -8 & x & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ei ole kääntyvä.

x =

Lukitsen vastaukseni

33. Tehtävä: determinantti

Olkoon matriisi $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Selvitä, onko matriisi A kääntyvä ja jos on, anna A^{-1}.

Kirjoita ensin laajennettu kerroinmatriisi $[A|I]$.

Sovella sitten Gaussin ja Jordanin menetelmää muodostamaasi matriisiin.

Onko matriisi A kääntyvä?

1. Kyllä
2. Ei

(Anna vastaukseksi oikea numero.)

Edelleen, jos vastasit edelliseen kohtaan kyllä, anna alle A^{-1}.

Jos vastasit ei, syötä vastauskenttään nollamatriisi (kaikki alkiot nollia).

Lukitsen vastaukseni

32. Tehtävä: käänteismatriisin selvittäminen

a) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ determinantti.

det$A$ = $\square$

b) Olkoot lisäksi $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ja $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Ilmoita jokaisen matriisin B, C ja D determinantti matriisin A determinantin avulla.

det$B$ = $\square$ ·det$A$

det$C$ = $\square$ ·det$A$

det$D$ = $\square$ ·det$A$

Lukitsen vastaukseni

34. Tehtävä: determinantti ja rivioperaatiot

Olkoot A ja B kääntyviä 3x3 -neliömatriiseja siten, että det$A = 6$ ja det$B = -4$.

Mitkä alla olevista kohdista voidaan annettujen tietojen perusteella laskea?

Niihin kohtiin, jotka voidaan laskea, anna vastaukseksi kyseinen determinantti.

Niihin kohtiin, joita ei annettujen tietojen perusteella voida laskea, kirjoita vastaukseksi ***no***.

a) det$(AB) =$ $\square$ c) det$(A^2) =$ $\square$ e) det$(A^\mathsf{T}) \cdot$ det$(A^{-1}) =$ $\square$

b) det$(A + B) =$ $\square$ d) det$(-A) +$ det$(-B) =$ $\square$ f) det$(B^{-1}) +$ det$(B^\mathsf{T}) =$ $\square$

Lukitsen vastaukseni

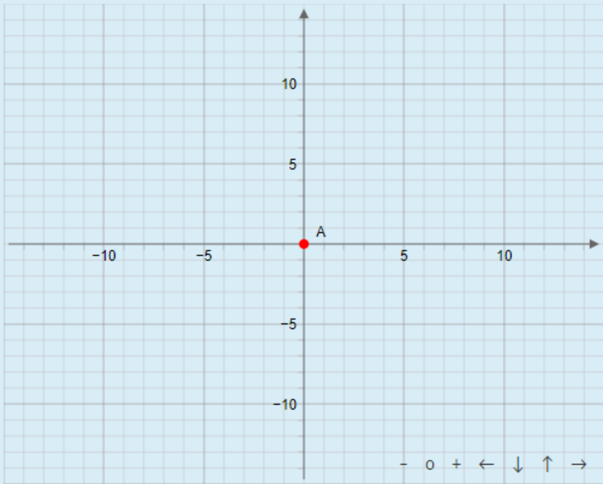
35. Tehtävä: determinantin ominaisuudet

Olkoon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (2x_1, x_2 + 3)$ funktio.

Olkoot lisäksi $\bar{u} = (2, 2)$ ja $\bar{v} = (1, -2)$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita ja $c = 2$ reaaliluku.

a) Piirrä koordinaatistoon vektori $T(c\bar{u} + c\bar{v})$ liikuttamalla punaista pistettä A.

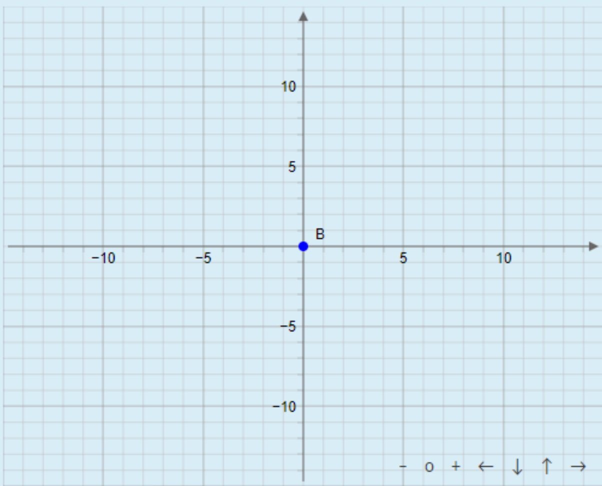
Koordinaatistoa voi liikutella ja sen kokoa voi muuttaa koordinaatiston oikeasta alakulmasta löytyvillä näppäimillä.



$T(c\bar{u} + c\bar{v})$ =

b) Piirrä seuraavaksi koordinaatistoon vektori $cT(\bar{u}) + cT(\bar{v})$ liikuttamalla sinistä pistettä B.

Koordinaatistoa voi liikutella ja sen kokoa voi muuttaa koordinaatiston oikeasta alakulmasta löytyvillä näppäimillä.



$cT(\bar{u}) + cT(\bar{v})$ =

c) Onko funktio T lineaarikuvaus?

Valitse tosi, jos kyseessä on lineaarikuvaus ja valitse epätosi, jos kyseessä ei ole lineaarikuvaus.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

36. Tehtävä: lineaarikuvauksen määritelmä

a) Tutki, ovatko funktiot $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvauksia.

Valitse tosi, jos kyseessä on lineaarikuvaus ja valitse epätosi, jos kyseessä ei ole lineaarikuvaus.

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ei vastattu ⬍

$$S(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \cdot x_2 + x_1 \\ x_2 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Ei vastattu ⬍

b) Olkoon $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus siten, että

$$R(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -13 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad R(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Määritä, mitä on tällöin

$$R(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$$

Lukitsen vastaukseni

37. Tehtävä: lineaarikuvauksen perusominaisuudet

a) Olkoon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(\bar{x}) = A\bar{x}$ lineaarikuvaus, jossa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Määritä, mitä on tällöin

$$T(-3, 2, 0) = \square$$

b) Olkoon nyt funktio $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus siten, että

$S(x_1, x_2) = (3 \cdot x_1 + x_2, x_1 - 3 \cdot x_2, x_2)$.

Määritä kuvausta vastaava matriisi B.

$$B = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Lukitsen vastaukseni

38. Tehtävä: lineaarikuvaus ja matriisi

Olkoon funktio
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 3x_3)$
lineaarikuvaus.

a) Tarkastellaan lineaarikuvauksen T lähtöavaruuden vektoreita

$\bar{a} = (0, 0, 0), \quad \bar{b} = (0, -15, -5), \quad \bar{c} = (1, 1, \frac{1}{3}),$
$\bar{d} = (0, 2, \frac{2}{3}), \quad \bar{e} = (0, -13, \frac{13}{3}), \quad \bar{f} = (0, 17, -17).$

Mikä alla olevista väitteitstä kuvaa lineaarikuvauksen T ydintä Ker(T).

1. Ker(T) = $\{\bar{a}\}$
2. $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\} \subset$ Ker(T)
3. $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}\} \subset$ Ker(T)
4. $\{\bar{a}, \bar{e}\} \subset$ Ker(T)
5. Ker(T) = $\{\bar{c}\}$
6. $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}\} \subset$ Ker(T)

(Anna vastaukseksi oikeaa väitettä vastaava numero.)

b) Onko väite tosi vai epätosi?

On olemassa avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $\bar{y} = (y_1, y_2)$ siten, että $\bar{y} \notin$ Im(T).

(Eli mikään llineaarikuvauksen T lätöjoukon alkio ei kuvaudu vektoriksi $\bar{y}$).

Ei vastattu

c) Onko lineaarikuvaus T injektio, surjektio, molemmat vai ei kumpaakaan?

1. T on injektio.
2. T on surjektio.
3. T on bijektio.
4. T ei ole injektio eikä surjektio.

(Anna vastaukseksi oikeaa väitettä vastaava numero.)

Lukitsen vastaukseni

39. Tehtävä: lineaarikuvauksen ydin ja kuvajoukko

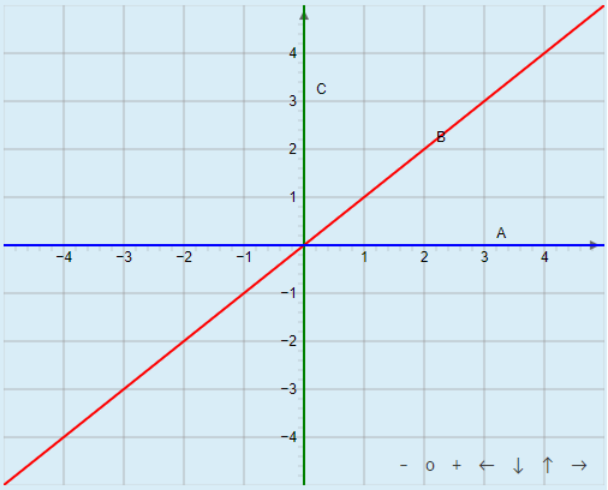
a) Olkoon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (3x_1, 0)$ lineaarikuvaus.

Mikä kuvassa olevista suorista $A - C$ kuvaa lineaarikuvauksen ydintä Ker(T) ja mikä sen kuvajoukkoa Im(T)?

(Anna vastaukseksi iso kirjain.)

Ker(T)=

Im(T)=



b) Olkoon $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ja $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvauksia siten, että S on injektio ja R on surjektio.

Määritä, mitä on tällöin

dim Im(S)=

dim Ker(R)=

c) Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus siten, että sitä vastaa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Onko lineaarikuvaus L tällöin bijektio?

Valitse tosi, jos kyseessä on bijektio ja valitse epätosi, jos kyseessä ei ole bijektio.

Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

40. Tehtävä: lineaarikuvauksen sovelluksia

LIITE B

Kysely

Kysely lineaarialgebran tehtäväkokoelmasta

Kyselyn tarkoituksena on selvittää Jyväskylän yliopistossa syksyllä 2019 luennoidun Lineaarinen algebra ja geometria 1-kurssin suorittajien mielipidettä tehtäväkokoelmasta, joka on tehty osana pro gradu -tutkielmaa.

*Pakollinen

Tehtävien rakenne ja sisältö

Tehtävänannot ja vastauskentät on pyritty tekemään mahdollisimman selkeiksi sekä helpoiksi ja miellyttäviksi käyttää. Tehtävissä on pyritty yhdistämään algebraa ja geometriaa sekä valitsemaan monipuolisesti erilaisia tehtävätyyppejä (avoimet kysymykset, oikein-väärin-väittämät, monivalinnat).

1. **Valitse sopivin vaihtoehto** *

Merkitse vain yksi soikio riviä kohden.

	Täysin eri mieltä	Jokseenkin eri mieltä	En osaa sanoa	Jokseenkin samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Tehtävänannot olivat selkeitä	○	○	○	○	○
Tehtäviin vastaaminen oli teknisesti helppoa	○	○	○	○	○
Tehtävissä esiintyneet kuvat olivat selkeitä	○	○	○	○	○
Tehtävien tekeminen oli miellyttävää	○	○	○	○	○
Tehtävät olivat monipuolisia	○	○	○	○	○

Tehtävien tarkoitus

Tehtävien ja niistä saadun palautteen on tarkoitus edistää lineaarialgebran keskeisimpien sisältöjen oppimista sekä oikaista niihin liittyviä väärinkäsityksiä. Tehtävät on tarkoitus olla perustason tehtäviä, jotka testaavat määritelmien ja lauseiden ymmärrystä.

2. **Valitse sopivin vaihtoehto** *

Merkitse vain yksi soikio riviä kohden.

	Täysin eri mieltä	Jokseenkin eri mieltä	En osaa sanoa	Jokseenkin samaa mieltä	Täysin samaa mieltä
Tehtävät testasivat kurssin keskeisiä asiasisältöjä	○	○	○	○	○
Tehtävien malliratkaisut auttoivat tehtävän ymmärtämisessä	○	○	○	○	○
Tehtävistä saatu palaute oli eteenpäin ohjaavaa	○	○	○	○	○

3. **Tehtävien vaativuustaso tarkoitukseensa nähden oli** *
Merkitse vain yksi soikio.

- erittäin korkea
- korkea
- sopiva
- matala
- erittäin matala

Vapaa sana

Voi tarkentaa alle edellä antamiasi vastauksia tai antaa yleistä palautetta liittyen tehtäväkokoelmaan.

4.

Kirjallisuutta

[1] Appova Aina ja Berezovski Tetyana: *Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations*, Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Volume 2, pp. 8-17, Denver: RUME, 2013.

[2] Aygor Nilgun ja Ozdag Hulya : *Misconceptions in linear algebra: the case of undergraduate students*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 46, 2989 – 2994, 2012.

[3] Barniol Pablo ja Zavala Genaro: *Students' difficulties with Unit Vectors and scalar multiplication of a vector*, AIP Conf. Proc. 1413, 115, 2012.

[4] Celik Derya: *Investigating Students' Modes of Thinking in Linear Algebra: The Case of Linear Independence*, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2015.

[5] Cook John P, Zazkis Dov ja Estrup Adam: *Rationale for Matrix Multiplication in Linear Algebra Textbooks*, Springer International Publishing AG, 2018.

[6] Donevska-Todorova Ana: *Fostering Students' Competrncies in Linear Algebra with Digital Resources*, Springer International Publishing AG, 2018.

[7] Gueudet-Chartier Ghislaine: *Should we teach linear algebra through geometry?*, Linear Algebra and its Applications 379 (2004) 491–501.

[8] Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos: *Opetusohjelma*, syksy 1.8.2019-31.12.2019, viitattu 29.11.2019.
https://opinto-opas.jyu.fi/fi/mltk/maths

[9] Karjalainen Leila: *Tilastotieteen perusteet*, Otavan kirjapaino, 2010.

[10] Kazunga Cathrine ja Bansilal Sarah: *Misconceptions About Determinants*, Springer International Publishing AG, 2018.

[11] Leon Steven J: *Linear algebra with applications*, 9th edition, Pearson Education, 2015.

[12] Mutambara Lillias H.N. ja Bansilal Sarah: *Dealing with the Abstraction of Vector Space Concepts*, Springer International Publishing AG, 2018.

[13] Oktaç Asuman: *Conceptions About System of Linear Equations and Solution*, Springer International Publishing AG, 2018.

[14] Opetushallitus: *Lukion opetussuunnitelman perusteet*, 2015.

[15] Shifrin Theodore ja Adams Malcolm R: *Linear algebra: a geometric approach*, 2nd edition, W.H. Freeman and Company, 2011.

[16] Stewart Sepideh ja Thomas Michael O.J: *Difficulties in the Acquisition of Linear Algebra Concepts*, New Zealand Journal of Mathematics, Volume 32 Supplementary Issue (2003), 207-215.

[17] Tanskanen Henri: *Dynaamista Geometriaa Moodle-ympäristöön*, Pro gradu -tutkielma, Itä-Suomen yliopisto, 2017.

[18] Vikberg Thomas, Oinonen Lotta ja Rämö Johanna: *Tehostettu kisällioppiminen matematiikan yliopisto-opetuksessa*, Yliopistopedagogiikka, 2015(1).

[19] Wutchana Umporn ja Emarat Narumon: *Students' Understanding of Graphical Vector Addition in One and Two Dimensions*, Eurasian Journal of Physics and Chemistry Education, 3(2):102-111, 2011.