Kohti ilmiölähtöistä matematiikan oppimista: Matemaattista ongelmanratkaisua taiteeseen yhdistäen

MARKUS HÄHKIÖNIEMI, MERJA KAUPPINEN & MIRJA TARNANEN

markus.hahkioniemi@jyu.fi
Jyväskylän yliopisto

Tiivistelmä

Ilmiölähtöistä matematiikan oppimista tuetaan ja edistetään sellaisten ongelmanratkaisutehtävien avulla, joissa oppilaat saavat itse suunnitella ratkaisuaan ja tehdä sitä koskevia valintoja. Matemaattista ongelmanratkaisua voidaan tukea eri tavoin, kuten taiteen avulla. Pohdimme tässä artikkelissa ilmiölähtöistä matematiikan oppimista yleisesti sekä erityisesti pohjautuen toteuttamaamme matematiikan pedagogiikan opintojaksoon. Matematiikan pedagogiikan opintojaksolla luokanopettajaopiskelijat perehtyivät itse matemaattiseen ongelmanratkaisuun taiteen viitekehyksessä sekä suunnittelivat ja toteuttivat oppimaansa hyödyntäen kokeilutunnin perusopetuksessa.

Avainsanat: matemaattinen ongelmanratkaisu, taiteen ja matematiikan integrointi, tesselaatiot, oppijalähtöisyys

Matematiikan opetuksen uudistaminen

Matematiikan opetuksen tutkimuksessa on jo pitkään korostettu oppilasta aktivoivia oppimistapoja. Tämä ei kuitenkaan aina näy koulujen opetuskäytänteissä. Tutkimustulosten pohjalta on oltu huolissaan lasten ja nuorten vähäisestä kiinnostuksesta matematiikkaa ja muita matemaattisia aineita kohtaan, sukupuolten välisistä osaamiseroista ja niitä tuottavista rakenteista ja käytänteistä sekä asenteen ja minäpystyvyyden yhteydestä matematiikan oppimistuloksiin (esim. Kupari 2007, Kupari & Nissinen 2015). Parhaimmillaan matematiikan opetus kehittää oppilaiden luottamusta itseensä sekä heidän matemaattis-loogista ajatteluaan, eikä tällöin tuntien sisällöksi riitä pelkkä laskeminen. Matemaattiseen osaamiseen kuuluu useita eri osa-alueita, joita voidaan hahmottaa Kilpatrickin ym. (2001) jaottelun pohjalta seuraavasti:

- käsitteellinen ymmärrys
- menetelmällinen sujuvuus
- ongelmanratkaisutaito
- joustava päättelykyky

- suotuisa näkemys matematiikasta ja itsestä matematiikan oppijana.

Hyvässä opetuksessa oppilaille tarjoutuu mahdollisuus kehittää kaikkia näitä matematiikan osa-alueita. Esimerkiksi ongelmanratkaisua ei voi oppia, jos ratkaisee vain tehtäviä, jotka ovat helposti ja nopeasti ratkaistavissa.

Monipuolista harjaantumista matemaattiseen ajatteluun kehittävät esimerkiksi ongelmanratkaisun kautta opettaminen (Schroeder & Lester 1989, van de Walle 2004), tutkiva matematiikan oppiminen (Artigue & Blomhøj 2013, Hähkiöniemi & Hirvonen 2013) ja avoin ongelmanratkaisu (Hähkiöniemi 2012, Nohda 2000, Pehkonen 1997). Yhteisiä piirteitä näissä lähestymistavoissa ovat oppilaiden aktiivinen rooli, kokemuksellisuus, ongelmanratkaisu ja kognitiivinen haastavuus. Menetelmät eroavat toisistaan muiden muassa yhteistoiminnallisuuden ja keskustelun merkityksen korostamisessa.

Ilmiölähtöisyys voidaan nähdä sateenvarjokäsitteenä tutkivaa otetta ja oppilaan toimintaa painottaville opetuksen suuntauksille. Ilmiölähtöisyys tarkoittaa tässä yhteydessä opetuksen järjestämistä siten, että oppilaat tutkivat jotakin kokemusmaailmaansa liittyvää ilmiötä ja heillä on riittävästi vapauksia suunnitella, lähestyä, rajata ja käsitellä ilmiötä. Käytännössä ilmiölähtöistä matematiikan opetusta voidaan toteuttaa tutkivan matematiikan oppimisen periaatteiden mukaan. Koska matematiikkaa tutkitaan matematiikan tutkimusmenetelmillä ja ongelmanratkaisu on keskeinen tutkimusmenetelmä, korostuu ilmiölähtöisessä matematiikan opetuksessa ongelmanratkaisu. Tutkittavat matematiikan ilmiöt voivat liittyä arkielämän tapahtumiin, kuten kulujen jakamiseen silloin, kun tasajako on epäreilu, jonkin muun tieteen alan ongelmiin, kuten pudotetun kappaleen nopeuden tutkimiseen, tai matematiikan sisäisiin ilmiöihin, kuten suurten lukujen kertolaskumenetelmien keksimiseen.

Vaikka matematiikan opetusta on pitkään pyritty kehittämään ilmiölähtöisyyden periaatteiden suuntaan, on kehitys ollut hidasta ja kouluissa käytetään usein perinteisiä opetusmenetelmiä (Jacobs ym. 2006). Suomalaisessakin matematiikan opetuksessa oppitunti sisältää yhä vielä tyypillisesti seuraavat vaiheet: kertaaminen, kuten kotitehtävien tarkastus, uuden asian opettaminen esimerkein ja esimerkin kaltaisten tehtävien tekeminen oppikirjasta (Savola 2008).

Tässä artikkelissa esittelemme ilmiölähtöistä matematiikan opetusta ja sen käsittelyä toteuttamallamme opettajankoulutuksen matematiikan pedagogiikan opintojaksolla. Lisäksi pyrimme ymmärtämään, mitä opettajiksi opiskelevat ajattelevat ilmiölähtöisestä matematiikan oppimisesta.

Luokanopettajaopiskelijat tutustumassa ilmiölähtöiseen matematiikan oppimiseen

Käsittelemme artikkelissamme matematiikan pedagogiikan opintojaksoa, jonka suoritti 15 luokanopettajaopiskelijaa. Opintojaksolla tutustuttiin ilmiölähtöiseen matematiikan oppimiseen ongelmanratkaisua korostaen. Erityisenä teemana oli yhdistää matemaattinen ongelmanratkaisu taiteeseen. Opintojakson tarkoitus oli yhtäältä tukea luokanopettajaopiskelijoiden omaan ongelmanratkaisuun perustuvaa matematiikan oppimista, toisaalta lisätä heidän valmiuksiaan opettajina suunnitella ja toteuttaa vastaava oppimiskokemus perusopetuksen oppilaille. Ilmiölähtöisen oppimisen (ks. Tarnanen & Kostiainen tässä teoksessa) hengessä opintojakson teemoja olivat yhteistoiminnallinen oppiminen ja ongelmanratkaisu sekä taiteen ja matematiikan integrointi. Opintojakso koostui taulukon 1 mukaisesti seitsemästä 90 minuutin mittaisesta tapaamisesta sekä kouluissa toteutetuista opetuskokeiluista.

Opintojakso alkoi orientoitumisella ilmiölähtöiseen matematiikan oppimiseen, yhteistoiminnalliseen ongelmanratkaisuun sekä taiteen ja matematiikan yhtymäkohtiin. Teemojen havainnollistamiseksi esitettiin esimerkkejä taiteessa ja ylipäänsä kulttuurissa esiintyvästä matematiikasta. Valokuvia näytettiin muiden muassa Escherin taideteoksista ja Helsingin Keskuskadun Penrose-laatoituksesta. Tämän jälkeen toteutettiin kaksi ongelmanratkaisutuokiota, joissa opiskelijat ratkoivat ryhmissä ongelmia. Matematiikan aihepiirinä oli tesselaatiot eli tavat peittää koko ääretön taso tiettyjä kuvioita (laattoja) käyttäen ilman aukkoja tai päällekkäisyyksiä. Tutkijoiden mukaan tämä aihepiiri avaa runsaasti mahdollisuuksia matematiikan oppimiselle (esim. Korkatti 2016). Sen avulla voidaan tutkia esimerkiksi geometrisia muunnoksia (peilaus, kierto ja siirto), säännönmukaisuuksia ja erilaisia monikulmioita. Ensimmäisellä ongelmanratkaisukerralla tesselaatioita laadittiin GeoGebra-ohjelmalla (https://www.geogebra.org/m/hyRZQEmz) ja toisella kerralla suurilla pahvisilla laatoilla. Oppimisprosessin hahmottamisessa ja ryhmän oman ongelmanratkaisun arvioinnissa käytettiin kolmessa vaiheessa reflektiokortteja, jotka auttoivat suuntautumaan tehtävän tekemiseen sekä arvioimaan sen etenemistä ja ryhmässä tehtyä työtä.

Taulukko 1. Opintojakson tapaamiskerrat ja sisällöt.

1. Orientaatio	Luentoa ja keskustelua Ilmiölähtöinen matematiikan oppiminen Matematiikan ja taiteen yhteys Kollaboratiivinen ongelmanratkaisu 90 min
2. ja 3. Ongelmanratkaisu	Yhteisöllinen ongelmanratkaisutehtävä 1: tesselaatioiden suunnittelu GeoGebra-ohjelmaa käyttäen Yhteisöllinen ongelmanratkaisutehtävä 2: suurten tesselaatioiden suunnittelu ja toteuttaminen pahvisilla laatoilla 2 x 90 min
4. Reflektio	Reflektoivat keskustelut mm. skriptikortteja hyödyntäen Pohjan luominen omalle opetuskokeilulle 90 min
5. ja 6. Suunnittelu	Oman opetuskokeilun suunnittelu ryhmissä Ohjattu keskustelu ryhmissä 2 x 90 min
7. Opetuskokeilu	Opetuskokeilujen toteuttaminen ryhmissä 1., 4. ja 6. luokalla
8. Päätöskeskustelu	Opetuskokeilujen esittely Kokemusten reflektointi sekaryhmissä 90 min

Ongelmanratkaisukertojen jälkeen reflektoitiin yhdessä ryhmien omaa ongelmanratkaisua sekä ylipäänsä tämäntyyppisen työskentelyn pedagogisia mahdollisuuksia. Pienryhmiä oivallutettiin kysymysten avulla siitä, mitä ja miten he ryhmässään matemaattisesta ongelmanratkaisusta oppivat. Reflektio suuntautui opettajien valitsemien teemojen mukaisesti, ja teemoista keskusteltiin ensin pienryhmissä ja sitten suurryhmän kesken. Teemoina olivat työskentely ryhmässä, taiteeseen yhdistetyn matemaattisen ongelmanratkaisun mahdollisuudet, reflektiokorttien käyttö sekä avointen ja rajattujen tehtävien vertaileminen.

Reflektointikerran jälkeen siirryttiin suunnittelemaan oppitunnin mittaisia matematiikka–taide-ongelmanratkaisuun perustuvia opetuskokeiluja. Opiskelijat toteuttivat suunnittelemansa oppitunnin ja laativat siitä raportin. Toteutuksista saaduista kokemuksista keskusteltiin opintojakson viimeisellä tapaamiskerralla. Kokonaisuudessaan opintojakso oli suunniteltu siten, että opettajaopiskelijat saivat useita tilaisuuksia tarkastella oppimaansa: sekä sitä, mitä oli opittu, että sitä, miten oppiminen oli tapahtunut. Seuraavassa tarkastelemme ilmiölähtöiseen matematiikan oppimiseen liittyviä teemoja, jotka nousivat opintojaksolla esiin. Teemojen havainnollistamiseksi esitämme otteita videoiduilta ongelmanratkaisu- ja reflektiotapaamiskerroilta.

Ongelmanratkaisu matemaattisen ilmiön tutkimusmenetelmänä

Mitä ongelmanratkaisu tarkoittaa?

Ongelmanratkaisun tarkastelu voidaan aloittaa siitä, mitä tarkoitetaan ongelmalla, sillä mikä tahansa matematiikan tehtävä ei ole ongelma. Usein ongelmalla tarkoitetaan pulmaa, jonka ratkaisija on halukas selvittämään, mutta jonka ratkaisemiseen hänellä ei ole välittömästi käytössään olevia menetelmiä (ks. Leppäaho 2007). Ongelman tulee herättää halu ratkaista se. Tällöin ongelmalla on oltava jotakin merkitystä sen ratkaisijalle. Se, onko parittomien kokonaislukujen summa parillinen vai pariton, ei ole ongelma, jos sillä ei ole mitään merkitystä osallisille. He voivat jatkaa elämäänsä, vaikka vastaus ei ikinä selviäisi. Toinen ongelmaa määrittävä tekijä on se, että ongelmaa ei osata aluksi ratkaista. Tämän seurauksena ongelmanratkaisun harjoittaminen koulussa edellyttää, että oppilaille tarjotaan tehtäviä, joita he eivät osaa aluksi ratkaista eivätkä myöskään tiedä, mitä menetelmää seuraamalla ratkaisu saadaan aikaan. Tämä tiukka kriteeri karsii ongelmia valikoitaessa valtaosan matematiikan oppikirjojen valmiista tehtävistä pois. Huomattavaa matemaattisessa ongelmanratkaisussa on se, että ratkaisun tulee olla oppilaan tavoitettavissa. Ratkaisun muodostamiseksi oppilaan tulee yhdistellä tietojaan uudella tavalla. Kolmanneksi se, mikä koetaan ongelmaksi, riippuu lopulta ratkaisijasta. Parittomien kokonaislukujen summan pohtiminen ei ole ongelma matemaatikolle. Se ei ole myöskään ongelma oppilaalle, jolle on juuri opetettu kyseinen asia. Sen sijaan oppilaalle, jolle asiaa ei vielä ole opetettu, kyseessä on ongelma. Näin ollen myös opetusjärjestelyillä voidaan vaikuttaa siihen, onko tehtävä ongelma vai ei. Sama tehtävä voi olla ongelma tai rutiinitehtävä riippuen siitä, tarjotaanko se ratkaistavaksi ennen vai jälkeen ratkaisumenetelmän opettamisen.

Tarkastelemamme opintojakson suunnittelussa ongelmanratkaisun ajateltiin olevan keskeinen osa ilmiölähtöisyyttä. Siksi tutkittavaksi aihepiiriksi valittiin tesselaatiot, joihin oletuksemme mukaan opettajiksi opiskelevat eivät olleet perehtyneet. Esimerkiksi eräs ryhmä pohti pitkään, kuinka voisi toistaa laatoituksessaan viiden keltaisen laatan muodostamaa kuviota (kuvio 1). Ryhmä huomasi, että laatoitukseen jää aina pieni aukko, jota kuviossa 1 yksi opiskelija osoittaa.

> OPISKELIJA B: Mutta ku jos aattelee että niinku tää sama kuvio niinku siirtyis vaikka tohon kohtaan, nii miltä ne näyttäis?
> OPISKELIJA D: Nii, ei sitä kyllä niin saa, siinä tulee, jos sen tollee haluu tehä niin siinä tulee väliin sellasii pienii välijuttui.

OPISKELIJA C: Ai tulee?
OPISKELIJA B: Joo.

Kuvio 1. Opiskelijat yrittävät toistaa viiden keltaisen laatan muodostamaa suurempaa kuviota laatoituksessaan.

Kun nämä aukot esiintyivät monissa laatoitusyrityksissä, ryhmä nimesi tilanteen ”timantti-ongelmaksi”:

> OPISKELIJA A: Niinpä. Mut hei me ollaan saatu yks hyvä loogisesti jonossa menevä kuvio.
> OPISKELIJA D: ((Naurahdus)) sitte me tarvittaisiin vaan tommosia pieniä timanttimuotoja että me saatais tästä niinku sillai toimiva.
> OPISKELIJA A: [((Naurahtaen)) nii.]
> OPISKELIJA B: Eiks tää nyt oikeasti niinku mitenkään toimi?
> OPISKELIJA D: Ei.
> OPISKELIJA A: Ei, ei se.
> OPISKELIJA D: Ei ku se tarvii semmosia timantteja. Sitte siitä tulis semmonen.
> OPISKELIJA C: Salmiakkeja.
> OPISKELIJA D: Tai niin, salmiakkeja tähän näin nii sitte siitä tulis semmonen.
> OPISKELIJA A: Joo.
> – –
> OPISKELIJA B: Mut sinne tuli sit se-
> OPISKELIJA C: [Mikä se oli se?] Tuliks tääl taas timanttiongelma?
> OPISKELIJA B: [Siihen tuli se] timanttiongelma ((naurahdus)).
> OPISKELIJA C: Joo, niin tuleekin.

Ryhmä huomasi, että timanttiongelman ratkaisemiseksi he tarvitsisivat uuden timantin muotoisen laatan. Tämä tilanne havainnollistaa, kuinka ongelmanratkaisuprosessi on tärkeämpi kuin lopputulos. Vaikka opiskelijat eivät onnistuneet laatimaan haluamaansa laatoitusta, he löysivät itse uuden ongelman.

Ongelmanratkaisusessioiden jälkeen opiskelijat myös reflektoivat ongelmanratkaisun prosessia. He pystyivät tunnistamaan ja nimeämään yhteisöllisen työskentelyn vaiheita, jotka johtivat ratkaisuun ja samalla myös oppimiseen. Toisaalta he reflektoivat myös tapahtumia, joita seurasi jumittuminen, turhautuminen ja joskus myös epäonnistuminen ongelmanratkaisussa:

> ”Niinku siinä rupes miettii että voiks tätä ratkasta, mut sit monesti myös päädyttiin et no ei tätä nyt voi ratkaista. Mut sekin on ihan hyvä oivallus, et jotkut jutut on vaan ehkä [ratkomattomia] jollain tavalla, et kaikki palikat ei käy joka kohtaan.”

Ryhmien oppimiskokemuksista merkittävimpiä oli sen pohtiminen, millaisia etenemisen esteitä avoimessa ongelmanratkaisussa voi olla, mikä merkitys etenemisen jumittumisella voi olla työskentelyn kannalta sekä esteiden ja jumittumisten näkeminen oppimisen resurssina ilmiölähtöisessä opiskelussa.

Myös oppimisen tutkijat ovat pohtineet jumissa olemisen kokemuksen merkitystä ongelmanratkaisulle. Esimerkiksi Masonin ym. (1982) ongelmanratkaisumallissa umpikujassa oleminen on olennainen työskentelyn vaihe. Heidän mukaansa ratkaisijan päästyä sisälle ongelmaan hän tekee hyökkäyksen hedelmälliseltä vaikuttavaan suuntaan. Hyökkäyksen aikana ratkaisija voi kohdata useita jumeja, joutua palaamaan takaisin ja aloittamaan uuden hyökkäyksen tai saada ahaa-elämyksen ja onnistua kiertämään jumin. Useat ongelmanratkaisun tutkijat korostavatkin, että ongelmanratkaisu ei ole suoraviivaisesti etenevä prosessi, vaan se sisältää takaisin palaamista ja syklisiä vaiheita (esim. Hähkiöniemi ym. 2013). Koulussa ilmiölähtöisyys ja ongelmanratkaisun hyödyntäminen vaativat opettajalta uskallusta asettaa oppilaansa haastavaan tilanteeseen, jossa he eivät nopeasti keksikään, kuinka edetä, vaan kohtaavat esteen. Tämä asettaa oikein–väärin-oletuksella oppimiseen orientoituneet oppilaat ja opettajat uuden pedagogisen haasteen ääreen. He pääsevät neuvottelemaan siitä, mitä matemaattinen osaaminen on, millaisia tavoitteita oppimiselle voi asettaa ja miten todeta oppineensa jonkin asian.

Ongelmanratkaisun avoimuus ja opettajan rooli

Matematiikan pedagogiikan opintojaksolle valittu laatoitusongelma kuuluu niin sanottuihin avoimiin ongelmiin. Avoimuus viittaa monien tulkintojen ja valintojen mahdollisuuteen. Pehkosen (1997) mukaan ongelman alku voi olla avoin, jolloin ratkaisija joutuu itse valitsemaan, mitä seikkaa ongelmasta alkaa tutkia. Myös ongelman loppu voi olla avoin, jolloin ongelmaan on useita oikeita vastauksia (Pehkonen 1997). Nohda (2000) lisää, että myös prosessi voi olla avoin, jolloin ongelman voi ratkaista monella olennaisesti erilaisella tavalla. Avoimen ongelmanratkaisun on todettu kehittävän monen tyyppistä ajattelua, muiden muassa edistävän luovuutta matematiikassa (Kwon ym. 2006). Ilmiölähtöisyydessä korostuu erityisesti avoin ongelmanratkaisu, sillä siinä oppilailla on enemmän vapauksia tehdä valintoja siitä, mitä he ilmiöstä tarkemmin tutkivat ja miten he sitä tutkivat.

Opintojakson ongelmissa erityisesti loppu oli avoin, sillä opiskelijoiden tuottamille tesselaatioille ei asetettu erityisiä vaatimuksia. Lisäksi myös alku oli osin avoin, koska opiskelijat saivat itse päättää, millaista tesselaatiota lähtevät tavoittelemaan. Ongelman avoin luonne on havaittavissa ryhmien tuottamissa erilaisissa tesselaatioissa, joita kuvio 2 havainnollistaa.

Kuvio 2. Opiskelijoiden laatimia tesselaatioita.

Ongelmanratkaisun avoimuus kirvoitti opiskelijat miettimään avoimuuden tuomia haasteita:

> ”Sitäki just miettii että mikä on se tehtävän laajuus ja just myös kenelle se on, et sit on taas myös sellasii lapsii joiden on hankala keskittyä johonki tehtävään ja sä jätät niinku kaiken auki, mä en vaan tiiä että ei välttämättä ehkä aina niinku toimi.”

Toisaalta pohdittiin myös mahdollisuuksia suuntaviivojen antamiseen niin, että ongelma kuitenkin säilyy avoimena:

> ”Mä jotenkin ajattelen sitä vielä musiikkikasvattajana, mä sanon lapselle että nyt improvisoidaan, niin mä sanon että käytetään ääniä c ja d ja e. ’Käytä näitä ääniä’, niin silloin hän tuntee vapauden tehdä jotakin omaa niillä äänillä eikä sitä mitä mä näytän.”

Avoimen ongelmanratkaisun todettiin haastavan perinteiset opettajan ja oppilaan väliset roolit, koska oikean vastauksen hakeminen ja tietäminen eivät ohjaa opiskelua. Kuka tahansa ryhmästä voi tuottaa ideoita ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa, ja tehtävän ratkaisu perustuukin ratkaisuvaihtoehtojen testaamiseen ja oikeaksi osoittamiseen. Tällöin opettaja on oppija muiden joukossa, jolloin hänen ammattitaitonsa kohdistuu ryhmässä tuotettujen argumenttien pätevyyden arvioimiseen yhdessä oppilasryhmän kanssa, eikä lopullisen oikean vastuksen tietäminen ole oppimisen keskiössä. Avoimen ongelmanratkaisun myötä matematiikan oppimisen luonne tuntui muuttuvan opiskelijoiden mielessä. Se sai opiskelijat pohtimaan omaa rooliaan opettajina:

> ”Ensinnäkin se oma itsevarmuus ja sitte ihan se tietopohjaki, että miten uskaltaa heittäytyä. - - Se on ihanaa sillai toisaalta, jos on niinku opettaja ja sitten yhdessä joudutaan miettiin. Ja se prosessi siinä kun onnistuu lopulta, että se ei oo vaan enää sen oppilaan onnistuminen jos opettaja on koko ajan tienny vastauksen, vaan se on kaikkien [onnistuminen].”

Opiskelijat totesivat, että avoimet ongelmat toimivat matematiikan oppimisessa, mikäli niihin sosiaalistutaan pikkuhiljaa, koska kyseessä on radikaali oppimiskulttuurin muutos. Jotta avoin ongelmanratkaisu matematiikassa löytää paikkansa ja sitä voidaan käyttää aidosti opiskelussa, sekä oppilaat että opettajat tarvitsevat aikaa ja useita tilaisuuksia harjaantua avoimen ongelmanratkaisun eri vaiheisiin.

Käydessään läpi avoimen ongelman ratkaisua ja verratessaan ryhmän työskentelyprosessia saatuihin tuotoksiin opiskelijoille syntyi käsitys siitä, mitä tällainen matematiikan oppiminen koulussa vaatii. Oman työskentelyn tarkastelu oppimisen ja opiskelun näkökulmasta mahdollisti matematiikan opetuksen pedagogissisällöllisen tiedon kartuttamisen yhdessä vertaisten kanssa. Oman ryhmän ongelmanratkaisuprosessista siirryttiin luontevasti pohtimaan alakoululaisten tarvitsemaa oppimisen tukea, tehtävän rajaamista ja ryhmäprosesseja. Koettu ryhmätyöskentely toimi peilinä, jota vasten opetusratkaisuja oli mahdollista arvioida.

Fyysiset ja digitaaliset työvälineet ilmiön tutkimisessa

Ongelmanratkaisuun valittuja laattoja oli tarjolla sekä pahvisina että digitaalisina GeoGebra-ohjelmassa. Opettajaopiskelijat havaitsivat pahvisilla laatoilla leikittelyn helpottavan yhteisöllisten ratkaisujen tuottamista, sillä laatat tarjosivat konkreettisen väylän käsin tekemiseen ja mallien muunteluun. Konkreettisten kuvioiden havaittiin auttavan symmetristen ratkaisujen tuottamisessa, koska ne helpottivat hahmottamista.

> ”No ainaki tässä siitä seuraava, nii itellä tuntuu että se oli jotenki tosi konkreettista ja helppoa asetella niitä noita tiles [laattoja]. Nii, nii että tavallaan sillä GeoGebralla vähän niinku ois ollu mitä tahansa ideoita nii tuntu et äh, se kaatuu siihen ettei osaa tehä sitä. Että no miten tää nyt heijastuu ja peilaantuu siihen. Et se on ehkä vapaampaa, ei semmost, nii ku sai tehä käsin sen homman. Ja ehkä just et sit kokeillaan GeoGebralla mut tavallaan ettei se tapa ideoita että ku ei osata tehä GeoGebralla tai sillee.”

Opiskelijat rakensivat laatoilla tesselaatioita ja arvioivat niitä sekä yhdessä konkreettisesti kokeillen että GeoGebran avulla. Laatoilla toimiminen auttoi tuottamaan yhteistoiminnallisesti ratkaisuja ja toimi samalla ajattelun apuna peilaamisen, kierron ja siirron ehtoja tarkasteltaessa. Rakenteilla oleva laatoitus oli ongelmanratkaisua koskevan neuvottelun tukena. Sekä fyysiset että digitaaliset laatat toimivat opiskelijoille siis käsitteellisen ajattelun tukena mutta eri ryhmille eri tavoin. Yhdessä rakennettu kuvio saattoi esimerkiksi auttaa jäsentämään ongelmaa, sillä muutamat ryhmät kertoivat hakeneensa selitystä abstrakteille matemaattisille ilmiöille kuvion kautta.

Matematiikan ilmiöt ovat luonteeltaan abstrakteja, mutta niitä voidaan tutkia konkreettisten merkkien ja työvälineiden avulla. Esimerkiksi monikulmio on abstrakti käsite, jolla on matemaattinen määritelmä: itseään leikkaamattoman suljetun murtoviivan muodostama tasokuvio. Monikulmion abstraktiudesta saa hyvän käsityksen tarkastelemalla lapsen näkökulmasta sitä, että tosiasiassa monikulmiota rajaavalla viivalla ei ole paksuutta lainkaan. Tämä voi tuntua järjettömältä, koska silmällä nähdään ja viivoittimella voidaan mitata liidun jättämä jälki kuviosta, jonka opettaja sanoi olevan monikulmio. Mutta piirretty kuvio ei olekaan monikulmio vaan vain väline ajatella monikulmiota.

Matematiikan ilmiöiden tutkimisessa edetään konkreetista kohti abstraktia, mikä on tyypillistä ilmiölähtöiselle oppimiselle (ks. Tarnanen & Kostiainen tässä teoksessa). Aluksi opittavaa asiaa tutkitaan konkreeteilla toiminnallisilla välineillä, sitten kuvioiden avulla ja lopuksi symbolein. Tallin (2013) mukaan matematiikkaa voidaan tutkia syvällisesti kolmessa eri maailmassa aloittaen konkreettisesta havaintomaailmasta, jossa matematiikan ilmiöitä voidaan tutkia tekemällä aistihavaintoja. Esimerkiksi monikulmioita voidaan ensin tutkia etsimällä pöytälevyistä muotoja, joilla on yhteisiä piirteitä (esim. suorakulmio ja ympyrä). Tämän jälkeen tutkitaan piirrettyjä muotoja ja vasta lopuksi päädytään abstraktiin käsitteeseen.

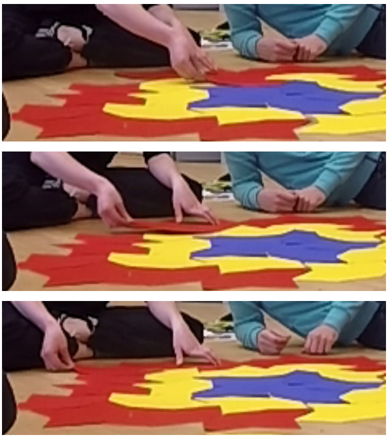
Myös opiskelijat arvostivat konkreettisuutta ja totesivat tämän auttavan lasta ideoimaan sekä hahmottamaan symmetriaa. Myös hahmottamisen mahdolliset vaikeudet lapsilla tulivat esiin omien kokemusten kautta:

> ”On ehkä parempi tehdä konkreettisia asioita lasten kanssa kuin kuvitella, koska meille oli vaikeata, vaikka meillä oli konkreettisia laattoja, joiden kanssa yritimme selvittää, miten toimia. Tarkoitan, että entä sitten lapset ((naurahdus))? Heille voisi olla vaikeaa kuvitella, miten jokin kuvio jatkuisi säännönmukaisesti tästä eteenpäin, joten konkreettiset laatat on hyvä juttu. Ne auttavat ajattelemaan ja prosessoimaan. Ja on helppoa kokeilla, toimiiko jokin vai ei.”

Kokemukset GeoGebran hyödyllisyydestä ongelmanratkaisussa jakoivat opiskelijaryhmiä. Jotkin ryhmät kokivat ohjelman käytön vain jarruttaneen ongelmanratkaisua, sillä ohjelmaa siihen syötettävine arvoineen ei saatu yhdistymään konkreettiseen laattakuvioon ja tämä turhautti opiskelijoita. Toisaalta GeoGebrasta koettiin olevan hyötyäkin, sillä ohjelman avulla voitiin muiden muassa varmistaa laattakuvion sisältävän juuri tietynlaisia yhtenevyyskuvauksia.

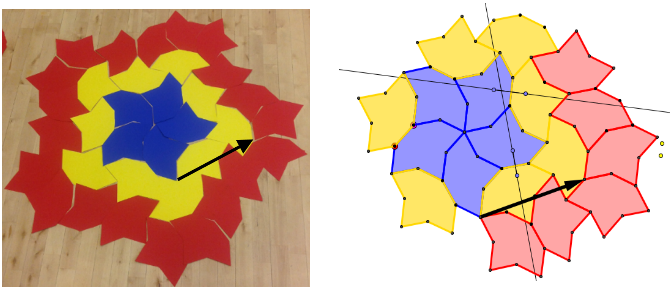
> ”Meillä oli vähän ongelmia olla varmoja, onko matemaattisesti oikein siirtää se keltaisesta osasta, josta nuoli alkaa ja johtaa punaiseen. Sitten käytimme ohjelmaa [GeoGebra] tutkiaksemme sitä.”

Konkreettisilla laatoilla ja GeoGebralla työskentelyn ero matemaattisessa ongelmanratkaisussa näkyi selvästi erään ryhmän työskentelyssä. He pohtivat, miten yhtenevyyskuvaukset ilmenivät pahvisilla laatoilla laaditussa tesselaatiossa. He eivät olleet varmoja, saadaanko kuviossa 3 esitetyllä siirrolla laatta siirtymään uuteen paikkaan.



Kuvio 3. Pahvilaatan siirtäminen.

Ryhmä päätyi lopulta tarkistamaan asian GeoGebralla. He laativat ohjelmalla vastaavan kuvion ja huomasivat, että havaittu siirto oli todella oikea. Kuviossa 4 siirtoa kuvaava vektori (nuoli) on esitetty sekä opiskelijoiden fyysisessä että digitaalisessa tesselaatiossa. Tässä työskentelyssä korostuu, kuinka opiskelijat myös ajattelivat laatoituksen sisältämää matematiikkaa. Samalla he toimivat yhden matemaattisen oivalluksen parissa: havaintoja voi kyllä käyttää ideoiden tuottamisessa, mutta ne eivät välttämättä pidä paikkaansa, vaan asiasta tulisi varmistua.



Kuvio 4. Siirron tarkistaminen GeoGebralla.

Digitaalisten työkalujen käyttö ongelmanratkaisussa määrittyy tilanteen ja tarpeen mukaan. Opintojaksolla käytetty GeoGebra-tehtävä oli suunniteltu aikuisten opettajaopiskelijoiden käyttöön, ja tarkoituksena saada heidät ajattelemaan muiden muassa tarkkoja astelukuja kierroissa. Fyysisillä laatoilla työskennellessä laattoja on helppo siirtää ilman, että huomio kiinnittyy näihin yhtenevyyskuvauksiin. Työvälineen valinnalla voidaan siis ohjata huomion kiinnittymistä. Erityisesti dynaamisen matematiikan ohjelmilla työskennellessään oppilaat voivat muokata kuvioita ja tarkastella reaaliaikaisesti, miten kuvion ominaisuudet muuttuvat ja tutkia niitä (esim. Arzarello ym. 2002). Tällainen työskentelytapa edistää ilmiölähtöisyyttä, sillä oppilaat voivat itse löytää mielenkiintoisia geometrisia ominaisuuksia ja tutkimuskohteita. Myös oppilaiden tausta on huomioitava työvälineiden valinnassa. Esimerkiksi pienten lasten käyttämän GeoGebra-tehtävän tulee olla yksinkertaisempi kuin opintojaksollamme käytetty, sillä alaluokkien oppilaat eivät välttämättä vielä tunne astelukuja.

Taide ja estetiikka osana matematiikan ilmiöitä

Erilaisia laatoituksia esiintyy runsaasti ympäröivässä todellisuudessa, ja usein rakennetun ympäristön laatoitukset on tarkoituksella laadittu esteettisiksi. Myös luokanopettajaopiskelijat yhdistivät tesselaatioiden rakentamiseen esteettisiä tavoitteita, vaikka niiden huomioimista ei erikseen edellytetty (ks. kuvio 2). Laattakuviot toimivat esteettisinä objekteina, joiden muoto- ja väriominaisuudet tuottivat esteettisiä kokemuksia (ks. Kinnunen 2000). Taiteen ja estetiikan koettiin edistäneen oppimista ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa: motivoineen ratkaisemaan tehtävää, toimineen ideoinnin lähteenä, vapauttaneen leikkimään muodoilla ja väreillä, johdattaneen mielikuvien syntymiseen ongelmien ratkaisemiseksi, toimineen oman tekemisen tukena, auttaneen rajaamaan avointa tehtävää sekä tarjonneen välineen matemaattisista ilmiöistä keskustelemiseen.

Opiskelijat katsoivat taiteen motivoineen tarttumaan avoimeen tehtävään, sillä se antoi opiskelulle mielekkyyden kokemuksia. Jotkut opiskelijat nimesivät juuri laatoituksen muodon ja värien suunnittelun tuottavan esteettisyydessään mielihyvää.

> ”Nii se [taide] voi niinku inspiroida aika paljon jos siihen tulee jotai mielekästä. – – Nii, saa niinku jotain kaunista tai jotain silmää miellyttävää, se voi niinku motivoida tosi paljon.”

Estetiikasta ja luovuudesta ajateltiin olevan hyötyä ongelmanratkaisuprosessin alussa ideoinnin lähteenä.

> ”Niin elikkä se estetiikka ja luovuus on kaiken lähtökohta, ja sen jälkeen sitten niinku siihen pääsee jotenki syvemmälle sisälle sit ku rupee sitä tosiaan tarkemmin kattomaan, et symmetriakin on tärkee.”

Laatoituksia arjen taiteena esitettiin opiskelijoille valokuvien muodossa. Tällaiset arjen mallit koettiin tärkeiksi silloin, kun tehtävän ratkaisu oli vasta hahmotteilla. Niistä koettiin saatavan tukea omalle ajattelulle.

> ”Se on hyvä mun mielestä että näytetään esimerkkejä muista töistä, mahollisimman laajalti. Vaikka jos tämmösiä tiilikuvioita, nii näyttäs niitä missä kaikkia näitä näkee, just tiiliseinää ja ihan kaikkee muuta ja vaikeaa kompleksisempaa kuvioo ja simppelimpää. Ja ehkä sit sieltä sais ruveta ite tekemään. Et ois jotai, et vois tarttua johonkin helppoon vaikka minkä osais, tai vähän niinku matkis sitä minkä on nähny, tai sitte joku tekis vähän omasta päästä rupeis kokeileen.”

Toisaalta opiskelijoille tuli kuvataiteen tunneilta mieleen tilanteita, joissa oppilaat puhtaasti jäljensivät opettajan näyttämän mallin. Tämä sai opiskelijat pohtimaan koulun pedagogisia käytänteitä ja niiden toimivuutta ja havaitsemaan, että “voihan sitä johdatella eri tavoin että ei tarvii välttämättä näyttää esimerkkiä”. Ongelmaan johdattelu voi tapahtua myös keskustelun, videoklipin tai synestesian eli eri aistialueiden yhdistelemisen avulla.

Opiskelijat pohtivat myös symmetrioiden ja säännönmukaisuuksien merkitystä ratkaisuissa. Erityisesti kuvioiden sommittelun ja suuntaamisen koettiin helpottuvan niiden avulla.

> ”Mut sitten noi symmetriat ja kuviot, nii ne niinku, vaikka sitte niitä asetteli sinne, nii saatto huomata että nää menee tässä samassa linjassa, et se vaan niinku siirtyy samassa asennossa peräkkäin ja peräkkäin, tästä tonne suuntaan ja tästä tonne. - - Nii autto sitä ku oli ongelmia, et miten, jos joku oli siellä vähän väärinpäin ja sen huomas siitä- - Et se poikkee siitä semmosesta symmetrisestä kuviosta.”

> ”Mut se myös ehkä autto sitte ku me alettii vaik lisää siihen tähteen niitä juttuja, nii sitte tajuttii et ”hei, nää menee kaikki samaan suuntaan, et nää menee tonne päin ja nää menee tonne päin” nii se autto just taas siinä tosi paljon, nopeutti siinä kuviossa.”

Objektin (laatan) esteettiset ominaisuudet tarjosivat myös suuntaa sille, mihin ollaan ongelmanratkaisussa menossa. Opiskelijat pohtivat, miten taideobjektit tarjosivat yhteistoiminnallisessa työskentelyssä välineen konkretisoida ajatuksia ja auttoivat sekä ryhmää että yksilöä hahmottamaan matemaattista ajattelua.

> OPISKELIJA A: ”mehän kaikki oltiin et ’hei tehtäiskö tästä joku tähti’, tai niinku et jos meillä ei ois ollu mitään sellast niinku minkään näköstä mitä me yritetään, niinku ’aletaanko heijastamaan näitä jonkun viivan suhteen’, se ois tosi abstraktia jutella. Siinä et se näyttää joltain, tai et se on- ”
> OPISKELIJA B: ”Kaikki tietää mitä niinku tavotellaan, et se on se tähti, kaikki tietää mitä se niinku on. Kyllä.”
> OPISKELIJA A: ”Tai joku et ’tehäänkö joku et se jatkuu punasina’, no siit on helpompi puhua ehkä.”

Taide lähestymistapana tarjoaa useita mahdollisuuksia oppimiselle (esim. Donahue & Stuart 2010), kuten

- auttaa motivoitumaan ja mallintamaan opiskeltavaa asiaa
- vapauttaa leikin ja leikittelevän mielen ja auttaa näin yksilöä synnyttämään mielikuvia opiskelun kohteena olevasta ilmiöstä tai asiasta
- auttaa ideoimaan, havainnoimaan kohdetta ja ilmaisemaan havaintoja
- taideobjektien analysointi ja objektien piirteiden suhteuttaminen toisiinsa yhteistyössä auttaa tarkastelemaan asiaa tai ilmiötä yhdessä kriittisesti.

Taide tarjoaa näin ollen hyviä lähtökohtia ilmiölähtöiseen matematiikan oppimiseen, sillä taiteesta voi löytää tutkittavia ilmiöitä, jotka voivat olla konkreettisimpia kuin puhtaasti matematiikkaan liittyvät ilmiöt. Lisäksi taidemenetelmien on havaittu tukevan ajattelun kehitystä monella tapaa (esim. Stokrocki 2011). Taiteen tekeminen ja tulkinta vaativat ja samalla kehittävät monipuolisesti kognitiivisia taitoja. Taide auttaa ymmärtämään ilmiöitä suhtauttamisen ja vertailun kautta ja tukee näin erityisesti analogista ja metaforista (mielikuviin ja kokemuksiin perustuvaa, ei-käsitteellistä) ajattelua (Stokrocki 2011). Nämä ovat korkean tason ajattelun taitoja eli sellaisia mentaalisia prosesseja, samoin kuin ohjailu, arviointi ja perustelu, joita tarvitaan ongelmanratkaisussa (ks. Bloom & Anderson 2001). Ne muodostavat perustan kriittiselle ajattelulle ja oppimaan oppimiselle, joita pidetään keskeisinä kansalais- ja tulevaisuudentaitoina. Taide tarjoaa siis yhden tehokkaan väylän oppia näitä elämässä keskeisiä taitoja.

Taideoppiminen perustuu parhaimmillaan paitsi tekemällä oppimiseen myös havainnoimalla oppimiseen sekä abstraktiin oppimiseen symbolien käytön avulla (Dale 1969, Hetland ym. 2007). Opintojaksolla käytetyt työtavat vertautuvat kolmivaiheiseen taidepohjaisen työskentelyn malliin (ks. Hetland ym. 2007, 5), joka auttaa tuomaan esiin taiteen merkitystä ajattelulle sekä saamaan yhteistoiminnallista työskentelyprosessia näkyväksi. Hyödynsimme ensinnäkin demonstroivaa luentoa, jossa esiteltiin taidemalleja käsiteltävästä ilmiöstä, muiden muassa mosaiikkikuviointeja eri kulttuureista. Luennon tavoitteena oli antaa opiskelijoille käsitys työskentelyprosessista ja tuotoksista sekä johdattaa mallien kautta käsitteellistämään toimintaa ja herättää positiivista asennoitumista tehtävään. Tämän jälkeen opiskelijat työskentelivät pienryhmissä osin taideperustaisesti annetun tehtävän mukaisesti. Lopuksi seurasi töiden kriittisen tarkastelun vaihe, jossa opiskelijat yhdessä ohjaajien kanssa havainnoivat ja arvioivat objekteja ja niiden tekemisen prosesseja ohjatusti. Hetland ym. (2007) korostavat erityisesti kriittisen tarkastelun merkitystä taideperustaisessa työskentelyssä uusien näkökulmien avaajana ja visioiden herättelijänä. Tässä on kyse hypoteettisesta ajattelusta (ks. Nevalainen ym. 2004), joka perustuu asioiden välisten suhteiden hahmottamiselle sekä niiden varaan rakentuville oletuksille ilmiöistä ja asiaintiloista. Kognitiivisista toiminnoista hypoteettinen ajattelu edellyttää erityisesti havaintojen nimeämisen, monenlaisten näkökulmien hahmottamisen sekä itsesäätelyn taitoja (Nevalainen ym. 2004).

Jaetun reflektion merkitys ilmiölähtöisyydessä

Ilmiölähtöisessä oppimisessa oppilaat tutkivat ja ratkaisevat ongelmia, ja tässä työskentelyssä keskeinen osa on metakognitiolla sekä oman ja ryhmän toiminnan säätelyllä (esim. Schoenfeld 1992). Kaiken toiminnan tiimellyksessä on hyvä miettiä, mitä ollaan tekemässä ja mihin suuntaan toiminta voisi edetä. Opintojaksollamme oman toiminnan ohjausta tuettiin reflektiokortein. Ongelmanratkaisun alkuvaiheessa, keskellä ja lopussa kukin ryhmä reflektoi ongelmanratkaisunsa edistymistä korteissa olleiden kysymysten avulla. Korteissa kysyttiin muiden muassa tavoitteista, tuntemuksista, haasteista, edistymisestä ja ryhmän työskentelystä. Näykki ym. (2017) ovat käsitelleet kortteja tarkemmin tutkiessaan yhteistoiminnallista oppimista.

Reflektiokortit toimivat ryhmän työskentelyn suuntaajana, eräänlaisena kompassina. Opettajaopiskelijoiden mukaan niiden arvo oli ryhmän toiminnan tavoitteellisuuden ja ryhmähengen löytämisessä.

> ”Joku siinä ryhmässä voi olla vähän pihalla et mikä tää tehtävän tarkotus on, nii sitten ne saa sen päämäärän siinä selville. - - Seki on tosi tärkeää tietää et millä mielellä kaikki on - - et jotenki niinku ymmärretään sit kaikkia ryhmän jäseniä.”

Samalla pohdittiin myös korttien käyttökelpoisuutta alakoulun matematiikan opiskelussa, mikä jakoi mielipiteitä. Samoin ohjeiden antaminen ja niiden yksityiskohtaisuuden tarpeellisuus herättivät ajatuksia.

> ”Varmaan ku miettii alakoulua, niin eihän siinä tarvii olla noin paljon noita ohjeistuksia, et joku stop-merkki tai joku semmonen, niinku kuitenki se että pysähytään ja mietitään.”

> ”Sillä kokemuksella mitä koulusta on, niin mä oon ymmärtäny että vielä joku kuutosluokkalainen niin tuntuu että tarttee niinku todella tarkat [ohjeistukset] - - näin että vähän niinku sinne päin, niin ei se lapsi pääse ollenkaan kärryille.”

Korttien käyttämisen yhdeksi ansioksi katsottiin ääneen ajattelun lisääntyminen yhteisessä tiedonrakentelussa. Opiskelijat kertoivat saaneensa vertaisen ääneen ajattelusta sytykkeen jatkaa ideointia ja keinon päästä ratkaisun tyssäämisestä eteenpäin.

> “Voisin sanoa konjektuurien [otaksumien] muodostamisesta. Me pohdimme, että kun ajattelimme ääneen ryhmässä, niin pystyimme aina korjaamaan toisiamme, jos jokin oli menossa väärin. Ja sitten joku sai idean siitä, mitä joku toinen oli tekemässä. Niin pystyimme jatkamaan ja kehittämään toistemme ideoita.”

Kokemuksia kouluissa toteutetuista opetuskokeiluista

Opettajaopiskelijat tekivät opetuskokeilut perusopetuksen ensimmäisellä, neljännellä ja kuudennella vuosiluokalla. Opetuskokeiluille oli yhteistä se, että niissä opiskeltiin geometriaa taiteen ja yhteistoiminnallisen ongelmanratkaisun kautta ilmiölähtöisesti. Opettajaopiskelijat suunnittelivat ja toteuttivat yhden oppitunnin mittaisen kokeilun pienryhminä

Ensimmäisen luokan tunnille opiskelijat valitsivat aiheeksi peilaamisen, joka ei geometrisena ilmiönä vielä kuulu matematiikan oppimäärään alkuopetuksessa. Tunnin alussa motivointitehtävänä oli puuttuvan palan piirtäminen tuttuihin kuvioihin, kuten sydämeen, tähteen ja nuoleen. Tämä jälkeen peilaamista harjoiteltiin pienryhmissä kinesteettisesti liikkeen kautta ja sitten pareina kymmenen erilaisen pahvisen kuvion, kuten neliöiden ja kolmioiden, kautta. Lopuksi oppilaat valmistivat pienryhmässä erilaisia rakennelmia peilausta hyödyntäen, esimerkiksi linnan. Näin toteutettu matematiikan tunti koettiin totutusta ja tutusta poiketen erilaisena: ”hei miten tää on oikein matikkaa” (oppilaan kommentti).

Opettajaopiskelijoiden kokemuksissa heijastui eri tavoin toteutetun matematiikan tunnin haasteellisuus sekä opettajaopiskelijoille että joillekin oppilaille. Oppilaiden ratkaisut haastoivat opettajaopiskelijoiden matematiikan tiedot ja osaamisen. Ryhmissä tapahtuva ongelmanratkaisu oli puolestaan joillekin oppilaille vaativaa.

> ”olivat tosi innostuneita ja pääasiassa sujui tosi hyvin et siinä hahmottu se peilaaminen et me ei sillai sitä teoriaa korostettu vaan käytännön kautta… tekivät kyllä tosi haastavia et piti ihan lähetettiin liikkeelle yksinkertaisista kuvioista mut sit kun ne rupes ottamaan niitä koko ajan enemmän et sitten piti ihan itekkin miettiä et onko tää peilaamista…kun oli ohjeistettu et tehkää yhdessä ja suunnitelkaa yhdessä mut joillekin jäi päälle se et tekee omaa… sit huomas et niillä on ihan sikahauskaa ja jo ykkösluokkalaisilla on sellanen haah matikkaa…”

Neljännen luokan opetuskokeiluja oli kaksi, joista toisen aiheena olivat tangramkuviot ja toisen superhahmojen rakentaminen geometriaa ja taidetta hyväksi käyttäen. Tangram-aiheisella tunnilla oppilaat kokosivat aluksi Tangram-paloista monikulmioita ja heidän kanssaan keskusteltiin geometrian käsitteistä, kuten peilaamisesta. Tämän jälkeen tehtiin pelkästään suullisesti annetun ohjeen mukaan kuvioita ryhmissä. Lopuksi oppilaat saivat tehdä vielä itse valitsemansa kuvion, esimerkiksi äitienpäivän kunniaksi äidin etunimen kirjaimen, joka liimattiin paperille. Lopuksi itse valitut kuviot koottiin näyttelyksi. Superhahmoja käsittelevällä tunnilla kerrattiin aluksi geometrisia kuvioita ja katsottiin pari videota muuntumisen (Transformers) havainnollistamiseksi. Oppilaat suunnittelivat pahvinpaloista hahmoja, jotka voivat muuntua geometrisiksi kuvioiksi, kun palat järjestetään eri tavoin. Opettajaopiskelijat halusivat tietoisesti pitää tunnin alustuksen lyhyenä, jotta aikaa jäisi oppilaiden omalle työskentelylle.

Taiteen katsottiin yhdistyvän geometriaan hahmojen muodon luomisen ja värien valinnan kautta. Superhahmojen valinta osoittautui opettajaopiskelijoiden mukaan todella motivoivaksi tavaksi toteuttaa matematiikan tunti.

Opettajaopiskelijoiden havaintojen mukaan oppilaiden omalle oivallukselle, ongelmanratkaisulle ja työskentelylle on jätettävä tunnilla riittävästi tilaa.

> ”…geometristen kuvioiden avulla ja ne oppilaat olivat aivan innoissaan et ne ei pysynyt pöksyissään siin aluks, kerrottiin geometrisistä kuvioista ja katottiin parii videoo…siinä tuli konkretisoitua se et miten paloista tulee hahmoja…pidettiin tää alku lyhyenä kun haluttiin jättää oppilaiden omalle työskentelylle kunnolla aikaa…et se taide yhdisty niinku sillai et ne sai luoda sen hahmon…yritettiin olla mahdollisimman vähän ohjailevia ohjaajia ja antaa niille aikaa…jumitilanteissa et kysyttiin et miten tää ratkaistaan…et ne oli niinkun itekkin et me tehtiin tää ja itekkin niinku epäili et onks tässä sitä geometriaa mut oli kyllä…et se niinku motivoi niitä oppilaita et ne sai tehdä niitä hahmoja.”

Kuudennella luokalla aiheena olivat tesselaatiot. Aihepiiriin aktivoitumisessa käytettiin kuvia, jotka olivat motivoineet opettajaopiskelijoita itseään. Tämän jälkeen kartoitettiin oppilaiden omaa tietämystä tesselaatioista ja tesselaatioiden esiintymisestä ympäristössä, esimerkiksi kankaissa ja kengissä. Tämän jälkeen alettiin rakentaa omaa kuviota pareina tai ryhmissä värittäen erilaisille ruutupohjille. Lopuksi oppilaat esittelivät dokumenttikameralla kuvionsa ja selittivät, miten se rakentuu, mikä oli sen rakentamisessa haasteellista ja mikä toimii. Tämän jälkeen vielä katsottiin GeoGebran kautta kuvioiden rakentumista.

> ”sitten kun kysyttiin et mitä ne tietää tesselaatioista...löyty itse asiassa paljon tarttumapintaa...et kankaista löytyy paljon [tesselaatioita]…pisteen suhteen peilaten et millaisia symmetrioita voi syntyä ja…et väreillä voi sitä muokata omanlaiseks ja myös sitä kuviota…tarkoituksena oli kokeilun kautta löytää semmonen kuvio jota voi toistaa ja siitä tehdä sen kokonaisteoksen…alussa ne lähti yksinkertaisista kuvioista ja ne sai tehdä oman valinnan mukaan pareina tai ryhmissä ja sit me kierrettiin ryhmässä ja haastettiin oppilaita tekemään isompia…haasteena oli just rakentaa jatkumo…aina oikeastaan pyrittiin siihen että kun joku oli löytäny jonkin kuvion joka toimii et saisiko vielä jonkin toisen et pääsisi siitä helposta ratkaisusta ja pääsisi kauemmas….et hienoja oli ne ajatteluketjut..tosi mielellään lähtivät mukaan ja ne nostivat esiin kysymyksiä…et se ohjeistus onnistu aika hyvin kun jätettiin sille omalle ajattelulle tilaa.”

Yhteistä kaikille opetuskokeilulle oli se, että eri-ikäiset alakoulun oppilaat innostuivat avoimeen ongelmanratkaisuun perustuvasta tavasta lähestyä geometriaa.

Opettajaopiskelijat olivat puolestaan yllättyneitä oppilaiden taitavuudesta ja pystyvyydestä, kun heille annettiin tilaa työskennellä itsenäisesti ja luovasti. Tärkeänä pidettiin myös sitä, että opetus tarjoaa tarpeeksi haasteita ja haasteellisuus lisääntyy työskentelyn edetessä. Vaihtelevat työtavat saman aihepiirin ympärillä yhden oppitunnin aikana koettiin toimiviksi. Opettajaopiskelijat kiinnittivät huomiota myös ohjeiden toimivuuteen, tilan antamiseen oppilaiden työskentelylle sekä yhteistoiminnallisten työtapojen oppilaita motivoivaan vaikutukseen. Työskentely koettiin osin haasteellisena ohjata, mutta työtapavalintojen katsottiin samalla vaikuttaneen kokeilujen onnistumiseen.

Ilmiölähtöistä matematiikan oppimista kehittämään

Matematiikka–taide-ongelmanratkaisu osoittautui onnistuneeksi valinnaksi opintojaksollamme. Sekä opettajaopiskelijat että opetuskokeilujen oppilaat innostuivat matematiikasta, kun sitä tutkittiin taiteeseen liittyen. Ilmiölähtöisyyttä voi lähteä kehittämään opetuksessa pienillä askelilla, joista tässä artikkelissa on esimerkkejä. Sisältölähtöisen uuden asian opettamisen sijaan (ks. Kauppinen, Aarto-Pesonen & Kostiainen tässä teoksessa) oppilaille voi antaa ratkaistavaksi aiheeseen liittyvän ongelman, jolloin oppilaiden oma toiminta on oppimisen keskiössä. Näin yhdenkin oppitunnin mittaisilla kokeiluilla on merkitystä ilmiölähtöisen oppimisen edistämisessä. Toisaalta voidaan myös toteuttaa laajempia kokonaisuuksia, joissa oppilaat voivat työskennellä saman projektin parissa pidemmän ajanjakson ja käyttää hyväkseen laajasti eri aihepiirien tietouttaan, joka voi pohjautua eri oppiaineisiin tai koulun ulkopuolisiin kiinnostuksen kohteisiin. Keskeistä ilmiölähtöisessä työskentelyssä on kuitenkin se, että oppilaat tekevät yhteisesti päätöksiä etenemissuunnastaan ja saavat myös kohdata sopivia vaikeuksia oppimisprosessin aikana.

Taide voi toimia lähtökohtana matematiikan oppimiselle, sillä taiteesta on löydettävissä ilmiöitä, joita voidaan tutkia matemaattisesti. Taide tuo myös esteettisiä ulottuvuuksia matematiikan oppimiseen, millä voi olla motivoiva vaikutus. Taide ja matematiikka myös sopivat hyvin yhteen, koska molemmissa korostuu laaja-alainen ongelmanratkaisu ja siihen liittyvä luova ajattelu. Taiteessa luovuus voi jopa olla helpommin oppilaan saavutettavissa konkreettisuutensa ja moniaistisuutensa ansiosta (Donahue & Stuart 2010), jolloin taide auttaa havaitsemaan, kuinka samanlaista luovuutta esiintyy matematiikassa, kun ongelman ratkaisemiseksi keksii omaperäisen lähestymistavan.

Opetuksen kehittämisessä ilmiölähtöisyyden suuntaan on kyseessä kulttuurin muutos luokassa (ks. myös Luostarinen & Peltomaa tässä teoksessa). Luokan työskentelykulttuuri ilmenee ääneen lausumattomina käyttäytymisodotuksina eli normeina (esim. Cobb ym. 1992). Yksi normi voi olla esimerkiksi opettajan varmistus siitä, että oppilaat tietävät, kuinka oppimistehtävät ratkaistaan.

Ilmiölähtöisyydessä tämän normin sijaan haluttaisiin, että oppilaat itse muodostavat oman ratkaisutapansa kokeillen ja neuvotellen. Normien muuttamiseksi niistä voidaan keskustella suoraan, ja lisäksi opettaja voi epäsuorasti korostaa uusia normeja luomalla tilanteita, joissa ne ilmenevät (Cobb ym. 1993). Ilmiölähtöinen opiskelu vaatii käynnistyäkseen sekä kokeilun- ja uudistamisen halua että työskentelyä tukevia ja ohjaavia rakenteita.

TIETOLAATIKKO

- Ilmiölähtöisessä matematiikan oppimisessa korostuu avoin ongelmanratkaisu, jossa oppilailla on tilaa tehdä omia valintoja.
- Ilmiölähtöisessä oppimisessa keskiössä on prosessi oikean vastauksen sijaan. Oppilaat kohtaavat myös haastavia tilanteita, joissa eteneminen ei ole selvää.
- Opettajan tehtävänä on prosessien ohjaaminen ja tilan antaminen oppilaiden omalle työskentelylle. Opettajajohtoisuudesta irti päästäminen ja ohjaajan roolin ottaminen voi vaatia tietoista oman toiminnan säätelyä pedagogisen ajattelun muutosvaiheessa.
- Taide tarjoaa yhden mahdollisuuden yhdistää matematiikan tutkiminen eri ilmiöihin, inspiroida ajattelua ja luoda innostuneisuuden ilmapiiriä.

Lähdeluettelo

Artigue, Michèle & Blomhøj, Morten (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* 45, 797–810.

Arzarello, Ferdinando & Olivero, Federica & Paola, Domingo & Robutti, Ornella (2002) A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education* 34:3, 66–72.

Bloom, Benjamin & Anderson, Lorin (2001) *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York: Longman.

Cobb, Paul & Wood, Terry & Yackel, Erna & McNeal, Betsy (1992) Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal* 29:3, 573–604.

Cobb, Paul & Yackel, Erna & Wood, Terry (1993) Chapter 3: Theoretical orientation. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph* 6, 21–122.

Dale, Edgar (1969) *Audiovisual Methods in Teaching*. Third Edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Donahue, David M. & Stuart, Jennifer (2010) Introduction. Teoksessa David M. Donahue & Jennifer Stuart (toim.) *Artful teaching. Integrating the arts for understanding across the curriculum, K–8*. New York: Teachers College Press, 1–16.

Hetland, Lois & Winner, Ellen & Veenema, Shirley & Sheridan, Kimberly M. (2007) *Studio thinking: the real benefits of visual arts education*. New York: Teachers College Press.

Hähkiöniemi, Markus (2012) Suunnikkaan pinta-ala Japanilaisittain. *Dimensio* 2/2012, 40–45. https://www.dimensiolehti.fi/suunnikkaan-pinta-ala-japanilaisittain/ (Luettu 2.10.2019.)

Hähkiöniemi, Markus & Hirvonen, Sami (2013) Ymmärtämisen kasvun rytmittäminen tutkivassa oppimisessa. *Kasvatus* 44:2, 126–137.

Hähkiöniemi, Markus & Leppäaho, Henry & Francisco, John (2013) Teacher-assisted open problem-solving. *Nordic Studies in Mathematics Education* 18:2, 47–69.

Jacobs, Jennifer & Hiebert, James & Givvin, Karen Bogard & Hollingsworth, Hilary & Garnier, Helen & Wearne, Diana (2006) Does eight-grade mathematics teaching in the United States align with the NCTM standards? Results from TIMSS 1995 and 1999 video studies. *Journal for Research in Mathematics Education* 37:1, 5–32.

Kilpatrick, Jeremy & Swafford, Jane & Findell, Bradford (toim.) (2001) *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kinnunen, Aarne (2000) *Estetiikka*. WSOY: Helsinki.

Korkatti, Sirkku (2016) *Geometriaa laatoittamalla? van Hielen teorian mukainen geometrinen ajattelu ja tesselaatioon nojautuva Laatoitusprojekti peruskoulussa*. Acta Universitatis Lapponiensis 323. Rovaniemi: Lapin yliopisto.

Kupari, Pekka (2007) Tuloksia peruskoulunuorten asenteista ja motivaatiosta matematiikkaa kohtaan PISA 2003 -tutkimuksessa. *Kasvatus* 38:4, 316–328.

Kupari, Pekka & Nissinen, Kari (2015) Matematiikan osaamisen taustatekijät. Teoksessa Jouni Välijärvi & Pekka Kupari (toim.) *Millä eväillä uuteen nousuun? PISA 2012 tutkimustuloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6. Helsinki: Opetus- ja kulttuuriministeriö, 10–27.

Kwon, Oh Nam, &Park, Jee Hyun & Park, Jung Sook (2006) Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review* 7:1, 51–61.

Leppäaho, Henry (2007) *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi*. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Mason, John & Burton, Leon & Stacey, Kaye (1982) *Thinking mathematically*. Bristol: Addison–Wesley.

Nevalainen, Vesa & Juvonen-Nihtinen, Maarit & Lappalainen, Ulla (2001) Ajattelu ja ongelmanratkaisu. Teoksessa Timo Ahonen, Tiina Siiskonen & Tuija Aro (toim.) *Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä*. Jyväskylä: PS-kustannus.

Nohda, Nobuhiko (2000) Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa Tadao Nakahara & Masataka Koyama (toim.) *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1). Hiroshima: PME, 39–53.

Näykki, Piia & Isohätälä, Jaana & Järvelä, Sanna & Pöysä-Tarhonen, Johanna & Häkkinen, Päivi (2017) Facilitating socio-cognitive and socio-emotional monitoring in collaborative learning with a regulation macro script - an exploratory study. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning* 12:3, 251–279.

Pehkonen, Erkki (1997) Introduction to the concept ”open-ended problem”. Teoksessa Erkki Pehkonen (toim.) *Use of open-ended problems on mathematics classroom*. Tutkimuksia n:o 176. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto, 7–11.

Savola, Lasse (2008) *Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland*. Julkaisematon väitöskirja. The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University.

Schoenfeld, Alan (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Teoksessa Douglas Grouws (toim.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 334–370.

Schroeder, Thomas & Lester, Frank Jr. (1989) Developing understanding in mathematics via problem solving. Teoksessa Paul Trafton & Albert Shulte (toim.) *New directions for elementary school mathematics*. Reston, VA: NCTM, 31–42.

Stokrocki, Mary (2011). Models of integration in elementary and secondary schools: a short history. Teoksessa Mary Stokrocki (toim.) *Interdisciplinary art education. Building bridges to connect disciplines and cultures*. Reston: The National Art Education Association, 6–16.

Tall, David (2013) *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Van de Walle, John (2004) *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA: Pearson Education.