

**"KUMPI ON SUUREMPI, PUOLET KOLMASOSASTA
VAI KOLMASOSAN PUOLIKAS?" MURTOLUKUKÄ-
SITTEEN OPETTAMINEN KOLMESSA KOLMANNEN
LUOKAN OPPIKIRJASSA**

Nella Mäki ja Elina Vihelä

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Kevätlukukausi 2019
Kokkolan Yliopistokeskus Chydenius
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Mäki, Nella ja Vihelä, Elina. 2019. "Kumpi on suurempi, puolet kolmasosasta vai kolmasosan puolikas?" Murtolukukäsitteen opettaminen kolmannen luokan oppikirjassa. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius. 100 sivua.

Kolmannella luokalla matematiikan opetuksessa uusien käsitteiden ja sisällön määrä kasvaa alkuopetukseen nähden. Murtoluvun käsite on yksi näistä opetettavista asioista. Tämän tutkielman tarkoituksena on vertailla murtolukukäsitteen opetusta kolmessa eri kolmannen luokan matematiikan oppikirjassa. Aineistona käytettiin kolmea matematiikan kolmannen luokan oppikirjaa, joista kaksi on matematiikan opetuksessa yleisesti käytettyjä kirjoja (Kymppi 3 kevät ja Tuhat-taituri 3b) sekä yhtä unkarilaiseen Varga-Neményi -opetusmenetelmään perustuvaa kolmannen luokan matematiikan oppikirjaa (Matematiikkaa 3b).

Tutkielman teoriaosuudessa kuvataan tutkimuksen taustatekijöitä, kuten oppikirjan roolia matematiikan opetuksessa sekä oppimiskäsitystä. Lisäksi teoriassa kuvataan matemaattisten taitojen kehitystä ja käsitteen opettamista. Tutkimusmenetelmänä käytettiin teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä. Tutkimuskysymysten pohjalta syntyi kolme pääkategoriaa ja niitä täydentämään kolme alakategoriaa, jotka kirjattiin taulukoiksi. Syntyneet taulukot tiivistettiin käsitte-luokiksi, jotka kirjoitettiin auki tulososiossa.

Tutkimuksen tuloksina voidaan todeta, että perinteisten oppikirjojen opetustapa on pääosin määritelmälähtöistä. Varga-Neményi -opetusmenetelmään perustuvassa oppikirjassa opetustapa puolestaan oli realistinen ja ongelmalähtöinen. Vaikka matematiikan opetuksessa käytettäisiin tässä tutkielmassa mukana olleita, yleisesti käytössä olevia oppikirjoja, voi opettaja omilla ratkaisuiltaan muuttaa matematiikan opetustapaa realistiseen ja ongelmalähtöiseen suuntaan.

Asiasanat: murtolukukäsite, matematiikka, oppikirjavertailu, opetustapa

SISÄLTÖ

1	JOHDANTO	5
2	TUTKIMUKSEN TAUSTATEKIJÖITÄ	7
	2.1 Matematiikan oppikirjan historiaa.....	8
	2.2 Oppimateriaalin määritelmä.....	11
	2.3 Varga-Neményi-opetusmenetelmä osana suomalaista matematiikan opetusta	13
	2.4 Oppikirjan rooli matematiikan opetuksessa.....	20
	2.4.1 Suomalaisten peruskoululaisten matematiikan osaamisesta kansainvälisten tutkimusten valossa.....	22
	2.4.2 Aiempaa oppikirjatutkimusta.....	24
	2.5 Konstruktivistinen oppimiskäsitys matematiikan tuntien kehyksenä .	25
3	MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITYKSESTÄ	27
	3.1 Matematiikan luonteesta matematiikan oppijan näkökulmasta.....	27
	3.2 Matemaattisten taitojen kehityksestä.....	29
	3.3 Matematiikan opetuksesta kolmannella luokalla.....	32
4	KÄSITTEEN OPETTAMISESTA	35
	4.1 Oppimisprosessin vaiheita ja matematiikan opettamisen tapoja.....	35
	4.2 Käsitteen opettaminen ja osaaminen.....	36
	4.3 Murtoluvun käsite koulumatematiikan kontekstissa.....	41
5	TUTKIMUSTEHTÄVÄ	45
6	TUTKIMUSMENETELMÄ	46
	6.1 Laadullinen tutkimus.....	47
	6.2 Laadullisen sisällönanalyysin eri muodot.....	49

7	AINEISTON ANALYYSI JA TULKINTA.....	51
	7.1 Tutkimusaineiston esittely ja metodin perustelua.....	51
	7.2 Aineiston analyysin prosessin kuvausta.....	54
	7.3 Aineiston analyysin kuvausta.....	56
	7.4 Käsiteluoikkien muodostaminen.....	71
8	TULOKSET.....	74
9	ETIIKKA JA LUOTETTAVUUS.....	83
10	POHDINTA.....	86
	LÄHTEET.....	91

1 JOHDANTO

Tiedätkö, mitä murtokakut ovat? Muistatko omasta kouluajastasi, miten murtolukukäsitettä luokallesi opetettiin? Käytettiinkö opetuksessa toiminta- tai havaintovälineitä vai harjoittelitko murtolukukäsitettä ainoastaan kirjan tehtäviä laskemalla? Osaisitko vastata otsikossa esiintyvään Varga-Neményi -opetusmenetelmän Matematiikkaa 3b oppilaan kirjan sivulla 101 esiintyvään kysymykseen ”Kumpi on suurempi, puolet kolmasosasta vai kolmasosan puolikas?” Tehdesämme oppikirjatutkimusta, ryhdyimme pohtimaan sitä, minkälaiset tehtävät edesauttavat murtolukukäsitteen ymmärrystä. Mielestämme otsikon kaltainen kysymys haastaa oppilasta pohtimaan murtolukukäsitettä tarkemmin.

Matematiikan opiskelu muuttuu abstraktimmaksi jo hyvin varhaisessa vaiheessa, heti alkuopetuksen jälkeen. Kolmannella luokalla opeteltavien uusien käsitteiden määrä lisääntyy ja näihin käsitteisiin kuuluu muun muassa murtoluvun käsite. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 17) oppimiskäsitys perustuu oppilaan aktiiviselle toiminnalle itsenäisesti tai vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 17) korostetaan oppimisen ilon ja myönteisten tunnekokemusten osuutta oppimisessa. Ajattelempa, että saadakseen myönteisiä ja matematiikan opiskeluun motivoivia oppimiskokemuksia, tehtävien tulisi liittyä oppilaan kokemusmaailmaan ja arkielämään. Mielestämme matematiikan opetuksessa oppilaan tulisi saada itse kokea ja kokeilla sekä opetella matematiikan käsitteitä ja proseduureja toiminta- ja apuvälineiden avulla. Oppilaiden tulisi voida kokea matematiikka hyödyllisenä oppiaineena. Aiempien kokemustemme mukaan, oppilaat joko pitävät matematiikan opiskelusta tai inhoavat sitä – välimallia harvoin on. Tulevina luokanopettajina halusimme tutkia, miten murtolukukäsitettä opetetaan kolmannen luokan matematiikan oppikirjoissa ja toteutuvatko Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014, 17) periaatteet?

Matematiikan opiskelussa tärkeintä on matematiikan ymmärtäminen – ei mekaaninen suorittaminen. Näverin (2009, 7) mukaan murtolukujen

peruslaskutoimituksiin liittyvien tehtävien kohdalla oppilaiden osaamistaso on heikentynyt 1980-luvulta, jolloin kaksi kolmesta osasi laskea murtolukujen peruslaskutoimitukset, kun taas 2000-luvulla murtolukujen peruslaskutoimitukset osasi vain enää joka kolmas oppilaista. Näverin (2009, 7) mukaan huolestuttavaa on se, että vain osa oppilaista yltää matematiikan osaamisessa käsitteelliselle tai proseduraaliselle tasolle eli oppilaat eivät ymmärrä oppimaansa, eivätkä osaa käyttää matemaattisia toimintamalleja tarkoituksenmukaisesti eikä joustavasti. Tutkielmamme aihe on hyvin ajankohtainen ja tärkeä, koska uusi korkeakoulujen opiskelijavalintauudistuksen myötä, matematiikan numeron painoarvo jatko-opiskelupaikkojen haussa ja niihin pääsemisessä, tulee korostumaan (Ristola & Jansson 2019). Lisäksi matematiikka on akateeminen oppiaine, joka on yksi tärkeimmistä perusopetuksessa opetettavista aineista. Matematiikassa hyvien pohjataitojen osaaminen auttaa ”matematiikkatalon” rakentumisessa ja pystyssä pysymisessä – jos välistä puuttuu paljon tiiliä, matematiikkatalo huojuu tai pahimmassa tapauksessa kaatuu kokonaan.

Tutkielmassamme perehdyimme murtoluvun käsitteen opettamista koskeviin kysymyksiin kolmessa eri kolmannen luokan matematiikan oppikirjassa. Materiaalivalinnassa kiinnitimme huomiota siihen, että valitsimme mukaan matematiikan opetuksessa yleisesti käytettyä oppimateriaalia sekä oppimateriaalia, jossa matematiikan opetusta lähestytään perinteisestä opetustyylistä poikkeavalla tavalla. Valitsimme tutkimuskohteeksemme matematiikan oppikirjat, koska oppikirjan status matematiikan opetuksessa on ollut merkittävä Perkkilän (2002, 157) mukaan ja on sitä tutkimusten (Lepik, Grevholm & Viholainen 2015, 129; Viholainen, Partanen, Piironen, Asikainen & Hirvonen 2015, 157) mukaan edelleen.

2 TUTKIMUKSEN TAUSTATEKIJÖITÄ

Matematiikan opetuksen tehtävänä on matemaattisen ja loogisen ajattelun kehittäminen ja pohjan luominen ongelman ratkaisulle, tiedon käsittelylle sekä matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle. Keskeistä matematiikan opetuksessa ja opiskelussa tulisi olla toiminnallisuus sekä konkretia. Opetuksen keskeinen tehtävä on oppilaiden myönteisen asenteen luominen matematiikkaa kohtaan sekä antaa oppilaille valmiuksia käyttää ja soveltaa matematiikkaa laajalaisesti. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 234.)

Tutkimuksemme aiheena on, miten murtolukuja pohjustetaan ja opetetaan kolmannen luokan oppikirjoissa. Haapasalon (2012, 202–206) mukaan murtoluvun käsitteenmuodostusprosessiin liittyy monia eri vaiheita, joita ovat muun muassa: orientoituminen käsitteeseen, käsitteen määrittelemine, sen tunnistaminen, tuottaminen ja lujittaminen. Orientoitumisvaiheessa oppilaan tulee hahmottaa murtoluvun käsitteeseen liittyvät relevantit eli asianmukaiset tunnusmerkit. Käsitteen muodostamisvaiheessa oppilas osaa muodostaa murtolukukäsitteen oleelliset tunnusmerkit itsenäisesti. Viimeisissä vaiheissa oppilas oppii tunnistamaan, soveltamaan, hahmottamaan ja käyttämään murtolukuja monipuolisesti. Käsitteenmuodostus prosessin tuloksena oppilaalle on kehittynyt ymmärrys murtoluvun käsitteestä. Opetussuunnitelman perusteissa (2014, 17, 236) mainitaan sisältöalueissa (S2) murtoluvun käsitteen oppiminen ja sen harjoittelu peruslaskutoimituksilla eri tilanteissa. Opetuksessa tulisi käsitellä murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä. Konkretisointi ja helposti saatavilla olevat välineet ovat matematiikan oppimisympäristössä keskeisessä roolissa. Opetuksessa tulisi käyttää monipuolisia ja oppilaita motivoivia työtapoja esimerkiksi erilaisia oppimislejää ja -leikkejä. Kuten perusopetuksen opetussuunnitelman oppimiskäsityksessä mainitaan, niin myös matematiikan opetuksen tulisi tapahtua sekä itsenäisesti että vuorovaikutuksessa yhdessä muiden kanssa.

Matematiikka on osa vallitsevaa kulttuuria. Ihmisten asenteet ja tarpeet muokkaavat kulloinkin vallitsevaa matematiikkakäsitystä. Kuitenkin matematiikka on hyvin koulusidonnainen oppiaine, jonka oppiminen tapahtuu koulukontekstissa. (Törnroos 2004, 44, 48.) Yhteisöllisten työtapojen ja ongelmanratkaisutaitojen opettaminen on konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan opettajan tärkeimpiä tehtäviä. Myös matematiikan opetuksessa ollaan vähitellen siirtymässä opettajajohtoisesta opetuksesta oppilaskeskeisempään opetukseen. Suomalaiset opettajat ovat kansainvälisestikin arvostettuja ammattinsa edustajia, tästä syystä yksittäisen opettajan opetusta ei valvota tiukoilla ohjeistuksilla. (Krzywacki & Portaankorva-Koivisto 2018, 279.) Myös Niemen (2015, 46–47) mukaan suomalaiset opettajat ovat vastuuntuntoisia työssään. He suunnittelevat ja ottavat vastuun laadukkaasta opetuksesta sekä oppilaidensa oppimisesta.

2.1 Matematiikan oppikirjan historiaa

Ensimmäinen suomenkielinen kirja oli Mikael Agricolan vuonna 1543 kirjoittama ABCkirja. Se oli samalla myös oppikirja, jonka tarkoituksena oli lukutaidon oppimisen tukeminen. (Hiidenmaa, Löytönen & Ruuska 2017, 7; Lerkkanen 2017, 17.) Oppikirjat ovat aina olleet erityisen merkittäviä suomalaisessa yhteiskunnassa siksi, että jokainen suomalainen on lukenut ja lukee niitä edelleen eli ne vaikuttavat suureen määrään ihmisiä. Samalla ne ovat vaikuttaneet yhteiskuntamme rakentamiseen satojen vuosien ajan. Vaikutusvaltaisina uuden tiedon eteenpäin viejinä oppikirjat ovat muokanneet arvomaailmaamme sekä käsitystämme oikeasta ja väärästä. Oppikirjalla on tärkeä tehtävä tiedonsiirron lisäksi koulun opetustavoitteiden tukemisessa, mutta oppiainesisältöjen omaksumisessa pyritään kuitenkin kohti tiedonhakua, arviointia ja opitun tiedon soveltamista valmiiden tietopakettien opettelemisen sijaan. Suomessa säädettiin yleinen oppivelvollisuus vuonna 1921. Oppivelvollisuuden voimaan tuleminen merkitsi sitä, että oppikirjojen tarve lisääntyi. Oppikirjoja tarvittiin kansakoulussa, oppikoulussa ja ammatillisessa opetuksessa. (Hiidenmaa ym. 2017, 7–9.)

Suomessa ilmestyivät ensimmäiset suomenkieliset matematiikan oppikirjat jo 1800-luvun puolivälissä (Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen & Merikoski 2017, 217; Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius 2018, 345). Ernst Bonsdorff kirjoitti vuonna 1885 ensimmäisen suomenkielisen varsinaisen matematiikan kirjan, *Alkeis-geometria* (Tossavainen ym. 2017, 228). Suomalaisen koululaitoksen matematiikan opetus on peräisin muun muassa ”Elon laskuopista”. Efraim Elo kirjoitti oppikirjan ”Laskuoppi” vuonna 1912 ja sitä käytettiin Suomen kouluissa aina 1970-luvulle saakka. Vaikka viimeinen painos painettiin vuonna 1965, kansanperinteessä teos tunnetaan vielä pitkään - tai ainakin kirjaan viittaava sanonta ”Elon laskuopin mukaan”. (Hiidenmaa ym. 2017, 7.)

Oppikirjojen merkittävyys on siinä, että niitä lukee jokainen suomalainen jossain elämänsä vaiheessa. 1900-luvun alusta 1970-luvulle oppikirjojen sisältö ja opetussuunnitelmat muuttuivat hitaasti. Oppikirjoja kierrätettiin sukupolvelta toiselle. Pääsääntöisesti kirjalla oli vain yksi tekijä. (Hiidenmaa ym. 2017, 7.) 1800-luvun loppupuolella laskennon opetus kansakoulussa perustui käytännön elämän tarpeisiin. Käytännöllisen hyödyn vuoksi korostettiin sitä, että laskento sellainen oppiaine, jota tarvitaan elämässä aina. Matematiikan oppikirjoja ja opetusta yritettiin uudistaa kansakoulusta peruskouluun siirryttäessä. (Tossavainen ym. 2017, 217,220–221.)

Ensimmäisiä ”opettajan oppaita” oli 1900-luvun alussa suomalaisen kasvatustieteilijän ja kouluasioihin erikoistuneen poliitikon Mikael Soinisen opetusoikeissa osio laskennon opettamisesta. Lisäksi kasvatustieteilijä Nestor Ojala kirjoitti samoihin aikoihin tarkkoja laskennon opettamisen ohjekirjoja opettajille. Kansakoulun laskuopin opetusopin (1927) kirjoittajan Uno Janssonin mukaan laskuopin käytännöllinen tarkoitus oli se, että oppilaat pystyisivät hyödyntämään oppimiaan laskuopin taitoja arkielämässä. Hänen mukaansa käsitteellinen ymmärrys oli laskuopin perusta. Tätä kriteeriä voidaan pitää tärkeänä myös nykypäivän matematiikan kirjoille. (Tossavainen ym. 2017, 222–223.)

Suomi perusti yhdessä muiden Pohjoismaiden kanssa matematiikan opetuksen uudistamiskomitean, Pohjoismaihin jalkautuneen uuden pedagogisen ajattelutavan eli ”uuden matematiikan” johdosta. Kyseisen uuden ajattelutavan

keskeisenä sisältönä oli matematiikan tieteellisyyden korostaminen, minkä vuoksi aiempi matematiikan painopiste ei enää ollut käytännön sovellettavuudessa. Kun rinnakkaiskoulujärjestelmästä peruskoulujärjestelmään siirtyminen Suomessa alkoi 1960-luvulla, opettajaseminaarin käyneitä kansakoulunopettajia koulutettiin kiivaassa tahdissa joukko-opin opettamiseen. (Kahanpää & Kangas 2002, 4; Pehkonen & Rossi 2018, 100–101; Tossavainen ym. 2017, 235–236.) Matematiikan uuden aikakauden myötä opettajat saivat oppikirjoista kehitellyt opettajan oppaat. Ainoat oppaat opettajille tätä ennen olivat peräisin 1920-luvulta. (Tossavainen ym. 2017, 238.)

Joukko-oppi ei kuitenkaan saanut kansalaisten ja matemaatikkojen suosiota ja 1970-luvun puolivälin jälkeen siitä luovuttiin vähitellen. Virallisesti joukko-oppi poistui matematiikan kirjoista vuonna 1983. Tilalle nousi Back to basics -oppijärjestelmä, joka painotti peruslaskutoimitusten opiskelua ja samalla matematiikan kirjat muuttuivat laskennon tehtäväkirjoiksi. (Tossavainen ym. 2017, 238, 240.) Myös Pehkosen ja Rossin (2015, 102) mukaan matematiikan opetuksessa siirryttiin 1980-luvulla niin sanottuun tehtävädidaktiikkaan: tehtävillä eriyttäminen nähtiin käyttökelpoiseksi ratkaisuksi matematiikan opetuksessa. Vaikka oppikirjoissa korostuu nykyäänkin tehtäväkirjamaisuus, niin niissä on enemmän kuvia kuin aiemmin. Nykyisen kuvituksen tarkoituksena on kirjan visuaalisen ilmeen korostaminen, kun aiemmin kuvat ovat liittyneet matemaattisen sisällön tukemiseen. Suuren muutoksen on kokenut myös matematiikan oppimateriaali, sillä oppikirjojen oheen on tullut sähköistä materiaalia, lisämateriaalivihkoja, oppimispeljä ja opetukseen liittyviä havainnollistamisvälineitä. Opetuksen lisämateriaalit helpottavat opettajan työtä ja monipuolistavat matematiikan opetusta. (Tossavainen ym. 2017, 241–242.)

Vuodesta 1899 lähtien oppikirjojen laatimista ja julkaisua ohjasi oppikirjakeskuksen mietintö, joka selvensi oppikirjojen pedagogisia tavoitteita. Tuolloin oppikirjoja laativat yliopistoon ja opettajaseminaareihin kuuluvat henkilöt. Samaan aikaan 1800-luvun loppupuolella aloittivat toimintansa suuret suomalaiset kustantamot, joiden vastuulle siirtyi oppikirjojen tuotanto. (Hiidenmaa ym. 2017, 9.) Vuoteen 1990 asti oppikirjojen käsikirjoitukset piti hyväksyttää

kouluhallituksella. Tällä toimenpiteellä pyrittiin varmistamaan oppikirjojen voimassa olevan opetussuunnitelman noudattamista. Hyväksyttämiskäytännön poistuttua merkittävä vastuu oppikirjojen sisällöstä siirtyi kustantajille. Näin olle-
len kustantajat määrittelevät oppikirjojen sisällön ja niiden etenemisjärjestyksen. (Lepik, Grevholm & Viholainen 2015, 134; Perkkilä ym. 2018, 345.)

Suomessa 1980-luku on ollut muutosten aikaa matematiikan opetuksessa. Suomesta osallistuttiin matematiikan opetuksen kokouksiin Euroopassa ja USA:ssa sekä etsittiin matematiikan opetukseen uusia ratkaisuja tutkimuksen keinoin ja maassamme alkoi vieraila matematiikan opetuksen asiantuntijoita. Lisäksi 1980-luvun loppupuolella toinen kouluun vaikuttava muutos oli uuden konstruktivismiin perustuvan oppimiskäsityksen rantautuminen Suomeen. (Pehkonen & Rossi 2018, 105.) Karvosen, Tainion ja Routarinteen (2017, 11) mukaan oppimateriaaleissa heijastuu aina oman aikakautensa maailmankuva ja oppimiskäsitys, joten oppimateriaaleilla on tärkeä merkitys siihen, mitä ja miten kouluissa opiskellaan.

2.2 Oppimateriaalin määritelmä

Oppimateriaaleista vanhin ja keskeisin on oppikirja, joka pohjautuu aina perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin. Oppikirjan tärkein tehtävä on tiedon ja ymmärryksen välittäminen opittavasta asiasta. (Heinonen 2005, 47.) Rauste-von Wrightin, von Wrightin ja Soinin (2003, 142, 200) mukaan joissakin oppikirjoissamme painottuu edelleen viime vuosisadalla hallitsevana olleet empiristiset (oppija on passiivinen tiedon vastaanottaja) oppimisen teorit, joissa korostuu muun muassa John Locken (1632-1704) näkemykset. Locke korosti harjoittelun, jäljittelyn sekä palkinnon saamisen merkitystä oppimisessa. Tämä johtuu mukaan osittain siitä syystä, että konstruktivistinen oppimiskäsitys on vielä suhteellisen nuori oppimiskäsitysten historiassa verrattuna esimerkiksi behavioristiseen oppimiskäsitykseen. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen läpimurto tapahtui vasta 1960-luvulla kognitiivisen psykologian myötä.

Heinosen (2005, 48) mukaan oppimateriaali voi olla oppikirja, oppi-/tehtäväkirja, tehtäväkirja, opettajan materiaali tai muu oheismateriaali (esimerkiksi verkkopohjaiset oppimisympäristöt). Hiidenmaan ym. (2017, 12, 14) mukaan oppimateriaalina voidaan pitää myös opettajan ja oppilaiden eri lähteistä yhteiselle oppimisalustalle kokoamaa aineistoa. Tällaisella yhteisellä oppimisalustalla mahdollistuu myös yksilöllinen eriyttäminen. Kaikki oppimateriaalit on tehty opetustarkoituksiin ja ne sisältävät opetettavaa ainesta (Heinonen 2005, 48). Paitsi, että oppikirja on myös opettajan ja oppilaan työskentelyn keskeinen työkalu, sillä on myös roolinsa oppilaiden vanhempien tiedottamisessa eri oppiaineiden sisällöistä. Niin matematiikan kuin muidenkin oppiaineiden opiskelussa käytetään rinnakkain painettuja kirjoja sekä sähköistä oppimateriaalia. Tärkeintä opetuksen kannalta on kuitenkin opetuksen tavoite ja päämäärä oppimateriaalista riippumatta.

Matematiikan opettamiseen ja opiskeluun vaikuttavat merkittävästi oppikirjojen sisältö- ja rakenneratkaisut (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 138; Viholainen, Partanen, Piironen, Asikainen & Hirvonen 2015, 157). Joutsenlahden ja Vainionpään (2010, 138–139) sekä Perkkilän, Joutsenlahden ja Sareniuksen (2018, 346) tutkimuksien mukaan matematiikan opetuksessa keskeisessä asemassa on erityisesti painettu oppimateriaali ja perusopetuksen matematiikan oppitunnin rakennetta ohjaa pääsääntöisesti oppikirjan struktuuri. Heidän mukaansa tätä rakennetta ohjaa ”aukeama tunnissa” -ajattelu, jossa edetään oppitunnin aikana yleensä yhden aukeaman verran. Samaan lopputulokseen tutkimuksissaan ovat tulleet myös Lepik, Grevholm ja Viholainen (2015, 136). Perinteisesti suomalaisen matematiikan oppitunnin rakenne on Tikkasen (2008, 50–51) mukaan seuraavanlainen: Oppitunti alkaa kotitehtävien tarkastamisella, seuraavaksi opettaja opettaa uuden asian, jota oppilaat harjoittelevat yksilöllisesti omasta oppikirjastaan. Tunti päättyy kotitehtävien antamiseen.

Ylöspäin eriyttäminen tapahtuu oppikirjasta löytyvien lisätehtävien avulla (vrt. Pehkonen & Rossi 2015), kun oppitunnille suunniteltu aukeama on tehty. Ne oppilaat, jotka eivät toistuvasti ehdi tehdä oppitunniksi suunnitellun aukeaman tehtäviä, puhumattakaan lisätehtävistä, saattavat kokea itsensä heikoiksi

matematiikan osaajiksi. (Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139.) Aunolan ja Nurmen (2018, 62–63) mukaan yksilöiden välisten tasoerojen tai onnistumisen kokemusten puute voivat vaikuttaa matemaattisten taitojen kehitykseen kielteisesti. Oppilaan kirjoissa teoriaosiot ovat usein suppeita ja tästä johtuen luokanopettajalle jää vastuu muun muassa käsitteiden sisältöjen avaamisesta oppilaille (Joutsenlahti & Vainionpää 2008, 547–558).

Joutsenlahden ja Vainionpään (2007, 184–191) ”Matematiikan Oppimateriaalin Tutkimus” -projektin (MOT-projekti) mukaan Suomessa matematiikan oppikirjoja vaivaa kaavamaisuus. Kirjojen kaavamaisuus toistuu samanlaisena eri kustantajilla. Kaavamaisuus näkyy esimerkiksi sisältöjen jaksottamisessa, tuntirakenteissa ja työtavoissa. Oppikirjojen kaavamainen struktuuri voi oppilaan perspektiivistä katsottuna tuntua pelkältä oppikirjan täyttämiseltä, jossa painotuu suorittaminen ja laskeminen. Tällöin opittavan asian ymmärtäminen ja uteliaisuus matematiikkaa kohtaan saattaa jäädä taka-alalle. Kaavamaisuus saattaa kuitenkin helpottaa opettajan työtä. Joutsenlahden ja Vainionpään (2007, 184–191) mukaan edellä kuvattu on saattanut edistää suomalaisten oppilaiden menestymistä arkipäivän laskutaitoa korostavissa PISA-tutkimuksissa (Joutsenlahti & Vainionpää 2007, 184–191; Joutsenlahti & Vainionpää 2008, 547–558.) Opettajan työssä ollessamme olemme itsekin havainneet eri oppikirjasarjoissa kaavamaisuuden toistumisen.

2.3 Varga-Neményi-opetusmenetelmä osana suomalaista matematiikan opetusta

Avaamme tässä luvussa unkarilaista Varga-Neményi -opetusmenetelmää, koska se on monille vielä tuntematon, vaikka sitä käytetään suomalaisessa matematiikan opetuksessa. Menetelmässä on metodologiset peruseriaatteet, jotka pitää tuntea, ennen kuin Varga-Neményi-opetusmenetelmää voidaan käyttää opetuksessa. Varga-Neményi -opetusmenetelmä ei ole mikään uusi menetelmä, sillä syksyllä 2019 vietetään Unkarin pääkaupungissa Budapestissä Tamás Vargan 100-vuotisjuhlavuotta (Varga 100).

Unkarilaisen Tamás Vargan kehittämästä opetusmenetelmästä käytetään Suomessa nimitystä Varga-Neményi -opetusmenetelmä tai VaNe-opetusmenetelmä. Varga kehitti yhdessä oppilaansa Eszter C. Neményin kanssa opetusmenetelmää. Vargan kuoleman jälkeen Neményi jatkoi menetelmän kehittämistä. Varga-Neményi -nimellä halutaan kunnioittaa heidän elämäntyötään matematiikan opetuksen kehittämisessä. Varga ja Neményi ovat kehittäneet matematiikan opetusta 1960-luvulta alkaen luodakseen matematiikan oppimiseen, opettamiseen konkreettisen ja toiminnallisen opetusmenetelmän. Uudistusta tarvittiin, koska oli huomattu, että oppilaiden matemaattinen ajattelu oli joustamatonta ja yksipuolista, vaikka oppilaat suorittivat laskutoimituksia mekaanisesti oikein. Uudistusta tarvittiin myös sen vuoksi, että epäonnistumisen kokemukset olivat osa oppimista, mikä johti puolestaan siihen, että oppilaat eivät pitäneet matematiikan opiskelusta. Suomessa ja muuallakin Euroopassa uudistettiin 1970-luvulla matematiikan opetusta, joten tuolloin vielä kehitteillä oleva VaNe-opetusmenetelmä irtautui ns. uuden matematiikan pedagogisesta ajattelutavasta (ks. 2.1 Matematiikan oppikirjan historiaa; Tikkanen & Lampinen 2005, 78–79; ks. myös Tosavainen ym. 2017, 234.) Alkuperäisen menetelmän merkittävin periaate on yhtenäisen ja kattavan perustan luominen jokaisen oppilaan matematiikan oppimiselle (Oravec & Kivovics 2005, 26).

VaNe-opetusmenetelmän suomalaistettu, ensimmäisen luokan, oppimateriaali valmistui lukuvuodeksi 2008–2009. Anni Lampinen yhteistyössä Eszter C. Neményin ja Márta Sz. Oraveczin kanssa on vastannut unkarilaisen VaNe-oppimateriaalin suomalaistamisesta. (Lampinen 2009, 25.) Tällä hetkellä VaNe-opetusmenetelmään perustuvia matematiikan opetusmateriaaleja on mahdollista käyttää ensimmäisellä, toisella ja kolmannella luokalla. VaNe-opetusmenetelmän oppimateriaaleissa on huomioitu Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukanaan tuomat muutokset. Alkuopetuksen uudet oppimateriaalipainokset on otettu käyttöön 2015, joten VaNe-opetusmenetelmän mukainen opetus on perusopetuksen opetussuunnitelman mukaista. (Varga-Neményi -menetelmä 2015.) Alkuperäisessä unkarilaisessa menetelmässä oppimateriaalia on viidelle viikkotunnille, kun taas Suomessa matematiikan opetusta on viikossa

3–4 tuntia. Suomessa vähäisempi vuosiviikkotuntien määrä on aiheuttanut hankaluuksia materiaalin soveltamisessa. Periaatteina ovat olleet materiaaleihin tehtävät mahdollisimman vähäiset muutokset sekä sisältöjen ja niiden rakenteiden säilyttäminen että materiaalin sopivuus erityisopetukseen. Lisäksi oppimisen keskeiset tavoitteet painottuvat suomalaistetussa oppimateriaalissa, jotta matematiikan opetuksessa ja oppimisessa vältetään kiireen tunnulta. (Lampinen 2009, 25–26.)

VaNe-opetusmenetelmässä korostetaan seuraavia metodologisia perusperiaatteita.

- induktiivinen tiedonhankinta ja omakohtaiset kokemukset
- toimintavälineet
- myönteinen opiskeluilmapiiiri; lupa erehtyä ja väitellä
- innostunut ja luova opettaja
- laaja matemaattisten käsitteiden pohjustus
- abstraktion tie. (mukaeltu Kahanpää & Kangas 2002, 5; Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 12 - 15; Tikkanen & Lampinen 2005, 79 pohjalta).

Huomionarvoista on, että vaikka edellä mainitut periaatteet on lueteltu erillisinä, niin todellisuudessa ne nivoutuvat tiiviisti toisiinsa muodostaen yhtenäisen kokonaisuuden (Tikkanen & Lampinen 2005, 79).

Induktiivisellä tiedonhankinnalla ja omakohtaisilla kokemuksilla tarkoitetaan todellisuuden ja omaan elämänpäiriin liittyvien kokemusten hankkimista ja niiden käyttämistä matematiikan opetuksessa. Kuuden vuoden iästä kymmenen vuoden ikään saakka lasten maailmankuva ja ajattelu ovat konkreettisella tasolla. Näin ollen lapset hahmottavat maailmaa konkreettisten havaintojen kautta. Lapsen matemaattinen ajattelu kehittyy oman kokemuksen ja toiminnallisuuden avulla sekä käyttämällä matematiikkaa monipuolisesti erilaisissa konteksteissa. Toiminnallisia kokemuksia oppilas saa, kun hän itse konkreettisesti opettelee matematiikkaa tekemällä: mittaa, rakentaa, astuu, koskettaa, laskee ja kokoaa.

Tämän lisäksi oppilaat ohjataan huomaamaan, että matematiikkaa on kaikkialla ympäristössä. (Kahanpää & Kangas 2002, 5; Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 12; Oravec & Kivovics 2005, 22–24.) Lisäksi toiminnallisessa matematiikan opiskelussa varmistuu oppilaan kokemusten hankkiminen myös aistihavaintojen avulla: visuaalisesti, auditiivisesti ja taktiilisesti. Visuaalisia aistihavaintoja ovat esimerkiksi ympäristön, tilan ja esineiden katsominen. Kuuloon perustuvia eli auditiivisia kokemuksia oppilas havainnoi parhaiten sulkemalla silmänsä eli sammuttamalla visuaalisen havainnoinnin, koska visuaalinen aisti on useimmiten ihmisellä vahvin. (Oravec & Kivovics 2005, 23; Varga-Neményi –menetelmä 2015.)

VaNe-opetusmenetelmän mukaan tärkeimpiä ovat *oppijan omat kokemukset*, joita hän työstää vuorovaikutuksessa toisten kanssa. Näistä kokemuksista syntyy ymmärtävää osaamista. (Varga-Neményi –menetelmä 2015; ks. Vygotsky 1978.) Osaamisella tarkoitetaan kokemusten kautta saatua tietoa ja taitoa, joka syvenee ja tallentuu pitkäkestoiseen muistiin harjoittelun ja toistojen avulla. Oppilaan kokemukset omakohtaiset kokemukset voivat olla välittömiä tai välillisiä. Kokemukset ovat välittömiä silloin, kun oppilas toimii itse. Välittömissä kokemuksissa tiedonhankinta on induktiivista eli se etenee yksittäisistä esimerkkitoimintoista laajempien kokonaisuuksien ymmärtämiseen ja matemaattisten käsitteiden yleistämiseen. Oppimistilanteissa oppilaat käyttävät hyväkseen eri aistikanavien tuottamia kokemuksia. VaNe-opetusmenetelmässä vuorovaikutuksellinen puhe on erittäin tärkeässä roolissa. Oppilas saa välillisiä kokemuksia havainnoissaan toisten toimintaa. (Varga-Neményi –menetelmä 2015.)

Toiminta- eli apuvälineiden monipuolinen käyttäminen on oleellinen osa matematiikan opetusta VaNe-opetusmenetelmässä. Toimintavälineillä havainnollistetaan edellisessä vaiheessa (ks. induktiivinen tiedonhankinta ja omakohtaiset kokemukset) mainittuja kokemuksia. Toiminnassa voidaan käyttää varsinaisia käsitteiden ja operaatioiden oppimista varten suunniteltuja toimintavälineitä tai mitä tahansa arjessa käytettäviä esineitä ja välineitä esimerkiksi erivärisiä nappeja. Samoja toimintamateriaaleja käytetään eri sisältöalueiden havainnollistamiseksi. Lasten tulisi oppia huomaamaan, että samoja välineitä voidaan käyttää

eri sisältöalueiden konkretisoimisessa. Toimintavälineiden avulla halutaan tarjota lapsille ajattelun elementtejä, jotka mahdollistavat loogis-matemaattisten kokemusten saavuttamisen. Konkreettisista toimintavälineistä on tarkoitus luopua matemaattisten taitojen karttuessa. (Ikäheimo & Risku 2004, 231; Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 15; Oravec & Kivovics 2005, 24.)

Oppijan kehitystason huomioiminen on VaNe-opetusmenetelmän yksi pedagoginen periaate. Opettajalla tulee olla oppilaan tuntemusta fyysistä- ja psyykkisistä kyvyistä, tietotasosta, sanavarannosta, keskittymiskyvystä ja persoonallisuudesta, koska jokaisen oppilaan oppimista edistetään hänen omalla tasollaan. Tästä johtuen VaNe-opetusmenetelmän päämenetelmänä on toiminnallisuus eli opetuksessa hyödynnetään moniaistisuutta, pedagogisesti perusteltuja pelejä ja leikkejä. (Oravec & Kivovics 2005, 26.) Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 234) korostetaan sitä, että matematiikan opetuksen ja opiskelun tulisi olla konkreettista ja toiminnallista.

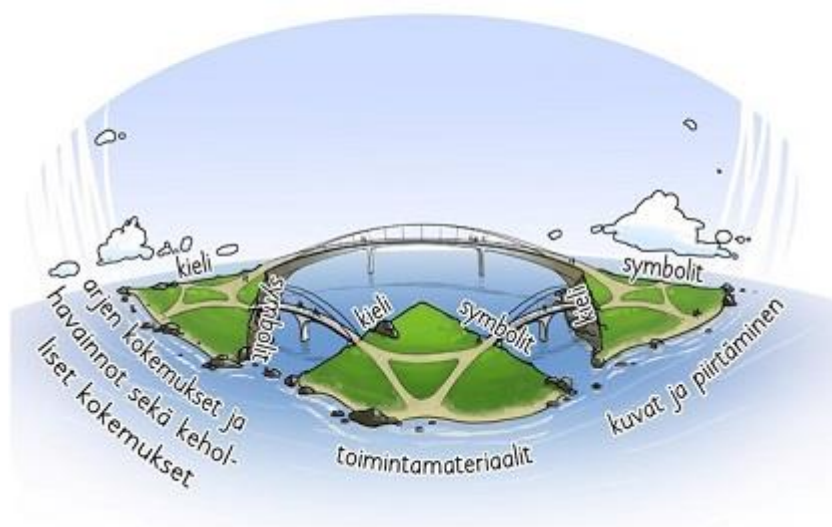
Myönteinen opiskeluilmapiiri; lupa erehtyä ja väitellä on tärkeä, koko matematiikan opetuksen ajan mukana oleva, periaate. Periaatteen mukaisesti erehtyminen on hyväksyttyä ja jopa toivottavaa, koska erehtyminen tuottaa yhdessä pohtimista, minkä seurauksena omat virheelliset käsitykset muuttuvat. Erotuksena suomalaiseen opetusmenetelmään, VaNe-opetusmenetelmää käyttävä opettaja ei korjaa oppilaan virhettä suoraan, vaan oppilas ohjataan ymmärtämään ja korjaamaan erehdyksensä itse. (Ikäheimo & Risku 2004, 234; Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 12; Oravec & Kivovics 2005, 27.)

Innostunut ja luova opettaja VaNe-opetusmenetelmän keskiössä. Koska VaNe-opetusmenetelmä ei ole yleisesti käytössä kouluissamme, vaaditaan opettajalta aluksi perehtymistä menetelmään ja kouluttautumista sekä materiaalin keräämistä ja valmistamista. Kokemuksen karttuessa opettaja oppii käyttämään monipuolisia materiaaleja hyödykseen ja iloa tuo oppilaiden edistymisen sekä innostuneisuuden näkeminen. Myös epäonnistumiset kuuluvat opettajan ammatilliseen kasvuun ja niistä voi oppia. (Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 13.)

Laaja matemaattisten käsitteiden pohjustus aloitetaan VaNe-opetusmenetelmässä jo ensimmäisinä kouluvuosina (Kahanpää & Kangas 2002, 5). Käsitteiden

pohjustamisessa on erityisen tärkeää, että käsitettä ei rajata liian tiukasti tai siitä ei muodostu lapselle väärää kuvaa. Näin ollen käsitettä tutkitaan ensin konkreettisissa tilanteissa ja vasta myöhemmin sitä sovelletaan. (Tikkanen 2008, 80 Vargan & C. Neményin 2002; 2003abc mukaan.) VaNe-opetusmenetelmän periaatteena on opettaa matematiikkaa - ei ainoastaan aritmetiikkaa, koska kehittääkseen ajatteluaan oppilas tarvitsee matematiikkaa kokonaisuudessaan (Oravec & Kivovics 2005, 26). Koska työskentelyn laatu on oppikirjaa tärkeämmässä roolissa, ”kirja otetaan esille siinä vaiheessa, kun asia jo osataan” (Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 16; Varga-Neményi -menetelmä 2015). Matematiikan oppikirja näyttäisi toimivan tässä menetelmässä opitun asian tai käsitteen harjoittelun ja kertauksen välineenä.

Abstraktion tie on vertauskuva opettamisen ja opiskelun eri vaiheiden kuvaamiseen, jossa edetään konkreettisesta toiminnasta kohti abstraktia ilmaisua ja ajattelua.



Kuvio 1 Abstraktion tie (Varga-Neményi -menetelmä, esittelydiat 2016)

Abstraktion tiehen sisältyy neljä eri vaihetta, jotka esitetään kuviossa 1. Ensimmäisenä lähdetään etenemään oppilaiden kokemuksista ja arjen tilanteiden matematisoinnista (esimerkiksi oppilaiden jako kahteen yhtä suureen ryhmään tai parijonon muodostaminen). Aloitusvaiheessa käytetään paljon erilaisia ohjattuja pelejä ja leikkejä sekä hyödynnetään lasten kehollisia kokemuksia. Eri tapahtumien kielentäminen kuuluu abstraktion ensimmäiseen vaiheeseen. (Lampinen, Neményi & Oravecz 2011, 15; Varga-Neményi –menetelmä 2015.) Toisessa vaiheessa toimintamateriaaleilla havainnollistetaan ensimmäisen vaiheen kokemuksia (ks. VaNe-opetusmenetelmän edellä esitetyt toiminnalliset peruseriaatteen kohdasta toiminta- eli apuvälineet). Seuraavaksi tarkastellaan ja tunnustetaan kuvia sekä piirretään pelkistettyjä kuvia, joissa mallinnetaan edellisen vaiheen kokemuksia. Ne oppilaat, jotka pyrkivät viimeistelyyn tai monimutkaiseen kuvalliseen ilmaisuun, pyritään ohjaamaan matematiikan kannalta olennaisiin asioihin ja yksinkertaistettuun piirtämiseen. Viimeisessä vaiheessa loogismatemaattiset kokemukset muuttuvat oppilaille muistinvaraisiksi, rikkaiksi mielikuviksi, joita voidaan palauttaa mieleen ja esittää ne ”matematiikan kielellä”. Abstraktion tie on kaksisuuntainen. Aluksi lähdetään etenemään lapsen omista kokemuksista, toimintamateriaalityöskentelystä ja kuvien avulla kohti abstraktia ajattelua (induktiivisesta deduktiiviseen) kuitenkin huomioiden lapsen lähtötaso. Kaksisuuntaisuus tarkoittaa sitä, että liikkeelle voidaan lähteä myös abstraktista ajattelusta kohti konkretiaa (deduktiivisesta induktiiviseen). Abstraktion tiellä liikuttaessa noudatetaan spiraaliperiaatetta, jossa palataan samoihin aiemmin opittuihin teemoihin monia kertoja, jolloin oppilaille mahdollistuu oman matemaattisen ajattelun kehittäminen. Oppilaille on mahdollisuus palata esimerkiksi toimintavälineiden avulla konkretiaan niin monta kertaa, kunnes oppilas on saanut itselleen käsitteestä ja mielikuvasta käyttökelpoisen sisällön. (Lampinen, Neményi & Oravecz 2011, 15–16; Oravecz & Kivovics 2005, 25; Varga-Neményi –menetelmä 2015.)

VaNe-opetusmenetelmässä oppituntien rakenne vaihtelee. Joskus abstraktion tie ehditään käydä läpi kokonaisuudessaan yhden oppitunnin aikana, toisinaan edetään hitaammin ja paneudutaan abstraktion tiellä sen vaiheisiin

syvällisemmin. Tunneilla pidetään yllä mielenkiintoa matematiikan oppimiseen monipuolisilla ja erilaisilla tehtävillä sekä tehtävätyyppien vaihtamisella - oppitunnit voivat sisältää useita peräkkäisiä yhteisiä kokemuksia. Opetuksessa hyödynnetään ennustamista, kokeilemista ja salaisuuksien huomaamista ja niiden säilyttämistä. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että nopeasti oivaltavat oppilaat opetetaan pitämään ajatuksensa salaisuutena, niin että jokaiselle oppilaalle jää mahdollisuus löytää ratkaisu itsenäisesti. Muiden vielä pohtiessa oikeaa ratkaisua, nopeimmat voivat käydä kuiskaamassa salaisuuden opettajalle. Olennaista on, että jokaisella oppilaalla on omat toimintavälineet. Matematiikan oppimisen kokemuksia voidaan hankkia niin, että välillä osa oppilaista tekee tehtävän ja muut seuraavat aktiivisesti, tai opettaja havainnollistaa tehtävän oppilaiden seuratussa. Kaiken toiminnan pohjana on yhdessä tekeminen eikä yksin uurastaminen. (Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 17–18.)

2.4 Oppikirjan rooli matematiikan opetuksessa

Tutkimusten perusteella voidaan todeta, että oppikirjalla on erittäin tärkeä merkitys matematiikan opettamisessa ja oppimisessa (Holmlund 2013, 14; Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 3; Kryzwacki, Pehkonen & Laine 2015, 130). Oppikirja on tärkeä työkalu niin oppilaille kuin opettajille, jotka perustavat suuren osan opetuksesta oppikirjojen sisältöön. Oppikirjan rooli on muuttunut suhteellisen vähän viime vuosikymmeninä. (Lepik ym. 2015, 129; Viholainen ym. 2015, 157.) Viholaisen ym. (2015, 158) tutkimuksesta käy ilmi, että opettajat poimivat opetuksessa käyttämänsä esimerkit ja tehtävät pääosin oppikirjoista. Lisäksi opettajat perustavat matematiikassa opetettavat oppisisällöt ja matemaattiset säännöt yleensä oppikirjan pohjalle (Holmlund 2013, 29; Johansson 2006, 124). Suomalaiselle opetuskulttuurille on ollut ominaista oppikirjakeskeisyys ja se on usein ainut ja ensisijainen tiedonlähde opiskeltavan sisällön opiskeluun (Lepik ym. 2015, 131–132; Mikkilä-Erdman, Olkinuora & Mattila 1999, 2; Törnroos 2004, 35). Samaa tulokseen on tullut myös Holmlund (2013, 29–30) vertaillen suomalaisen ja ruotsalaisten matematiikan opettajien oppikirjan käyttöä opetuksessa.

Joutsenlahden ja Perkkilän (2019, 5) mukaan oppikirjojen valinnasta Suomessa vastaavat opettajat, mutta opettajalla on kuitenkin mahdollisuus olla käyttämättä kirjoja oppitunneilla.

Perkkilän (2002, 157) mukaan matematiikan oppikirjan ja opettajan oppaan status on merkittävä matematiikan oppitunneilla. Joutsenlahden ja Vainionpään (2010, 138) tutkimuksen opettajakyselystä (n = 363) käy ilmi, että 97% opettajista piti oppikirjaa erittäin tai melko tärkeänä matematiikan opetuksessa. Samasta kyselystä ilmeni että, 88% opettajista piti opettajan opasta melko tai erittäin tärkeänä. Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, 137) toteavat, että oppikirjojen ja opettajan oppaiden sisältö- ja rakenneratkaisut vaikuttavat keskeisesti matematiikan opettamiseen. Tutkimusten mukaan opetusmateriaalilla on usein merkittävämpi rooli matematiikan opetuksessa kuin opetussuunnitelmalla (Mikkilä-Erdman ym. 1999; Niemi & Metsämuuronen 2010, 9; Viholainen ym. 2015, 164). Lepikin ym. (2015, 132) tutkimuksesta käy ilmi, että matematiikan oppikirjat vaikuttavat vahvasti opetuksen sisältöön - sen opettamiseen ja oppimiseen. Opettajat käyttävät oppikirjoja oppituntien suunnitteluun ja valmisteluun sekä apuna ohjeiden antamisessa. Oppikirjat ohjaavat myös opettajien pedagogisia ratkaisuja. (Joutsenlahti & Vainionpää 2008, 547–558; Lepik ym. 2015, 132.) Holmlund (2013, 33) toteaa tutkimuksessaan, että yksi tärkeimmistä syistä oppikirjan keskeiseen rooliin opetuksessa, on ajan säästäminen. Lisäksi Holmlund (2013, 14) viittaa Englundin (1999) todetessaan, että opettajat luottavat siihen, että opiskelijat saavuttavat oppikirjaa seuraamalla oppimistavoitteet. Oppikirjalla on myös kurinpidollinen rooli, koska oppikirjaa täyttämällä oppilaat pysyvät työn touhussa. (Holmlund 2013, 14 Englundin 1999 mukaan.)

Karvosen, Tainion ja Routarinteen (2017, 13) tutkimuksesta kuitenkin ilmenee, että oppimateriaalin käyttämisestä opetuksen suunnittelussa on vähän tutkimustietoa. Lepikin ym. (2015, 134–135) ja Viholaisen ym. (2015, 174) mukaan opettajat luottavat siihen, että oppikirjojen pedagogiset ratkaisut, oppisisällöt ja harjoitukset pohjautuvat opetussuunnitelmaan ja näin ollen he luottavat oppituntien suunnittelussa oppikirjojen materiaaliin. Voidaankin todeta, että matematiikan opetuksen toteutumisesta suuri vastuu on oppimateriaalin tekijöillä

(Joutsenlahti & Vainionpää 2008, 547–558). 1800-luvulta aina 1980-luvulle saakka oppikirjojen kirjoittamisesta on vastannut yksittäiset kirjoittajat esimerkiksi opettajien kouluttajat. Sen jälkeen matematiikan kirjojen kirjoittamisesta on vastannut useampi henkilö ja niissä on otettu huomioon ainedidaktinen tutkimus. (Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen 2017, 3.) Holmlund (2013, 33) pohtii tutkimuksessaan, pitäisikö sekä Suomessa että Ruotsissa ottaa uudelleen käyttöön oppikirjojen tarkastaminen, jotta voitaisiin turvata yhtenäinen matematiikan opetus kaikille oppilaille, opettajasta riippumatta.

VaNe-opetusmenetelmän peruseriaatteiden mukaan oppikirja on pieni osa opetusmenetelmän pohjana olevaa abstraktion tietä. Matematiikkaan liittyvät oppimiskokemukset otetaan todellisesta maailmasta, jonka jälkeen oppilas piirtää tai kirjoittaa matematiikkaan liittyvät kokemukset näkyväksi. Oppikirjaa tarvitaan myös oppilaan omien piirrosten tuottamiseen matematiikan konkretisoimiseksi. Oppilaan omia kokemuksia, opettajaa sekä yhdessä työskentelyä ei voi VaNe-opetusmenetelmässä korvata kirjan tai kirjallisten tehtävien avulla. Oppilaan ei ole tarkoitus tehdä oppikirjan tehtäviä pitkiä aikoja hiljaa itsekseen, vaan tehtävätyypit ovat vaihtelevia ja suurin osa tehtävistä tehdään pareittain tai ryhmissä. Oikeita ratkaisuja varten ei ole olemassa vastauskirjaa, josta oppilaat tarkistaisivat oikeat vastaukset, vaan niitä pohditaan joko pareittain tai kaikki yhdessä. VaNe-opetusmenetelmän oppikirjoissa on vähän tekstiä ja paljon kuvia. Oppikirjoissa on tehtäviä, jotka voidaan ratkaista konkreettisesti, suullisesti tai ratkaisemalla tehtävät oppikirjaan. Vihkoja ei tarvita oppikirjan tehtävien tekemiseen, koska kirjoissa on tehtävien tekemiselle varattua tilaa. (Lampinen, Neményi & Oravecz 2011, 16, 18, 21; Varga-Neményi -menetelmä 2015.) Lampinen, Neményin ja Oraveczin (2011, 16) mukaan ”työskentelyn laatu on tärkeämpää kuin oppikirjan pinnallinen ja mekaaninen täyttäminen”.

2.4.1 Suomalaisten peruskoululaisten matematiikan osaamisesta kansainvälisten tutkimusten valossa

Kansainvälinen TIMSS-tutkimus, joka on koulutuksen arvioinnin tutkimusohjelma, arvioi neljän vuoden välein oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden

osaamista peruskoulun neljäs- ja kahdeksasluokkalaisilla oppilailta (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro 2016, 5). TIMSS-tutkimuksista on käynyt ilmi, että suomalaiset luokanopettajat sekä matematiikan opettajat kuuluvat maailman pätevimpien opettajien joukkoon (Kupari & Hiltunen 2018, 50; Krzywacki & Portaankorva-Koivisto 2018, 279). Lisäksi TIMSS-tutkimuksista on tullut ilmi myös, että Pohjoismaissa ja Baltiassa opettajat tukeutuvat oppikirjoihin enemmän kuin muualla maailmassa. Suomessa on tarjolla useita erilaisia kirjasarjoja matematiikan opetukseen. Opettajat päättävät yleensä sen, mitä oppikirjasarjaa opetuksessa käytetään. (Lepik ym. 2015, 134, 135, ks. myös Kryzwacki, Pehkonen & Laine 2015, 130.) 2000-luvun TIMSS- ja PISA-tutkimuksissa tulee selkeästi esille se, että suomalaiset peruskoululaiset osaavat matematiikkaa kansainvälisesti verraten erittäin hyvin (Kupari & Hiltunen 2018, 47).

Kansainvälinen PISA-tutkimus arvioi suomalaisten nuorten osaamista matematiikassa, luonnontieteessä ja lukutaidossa (Kupari & Hiltunen 2018, 22). PISA-tutkimusten tulokset ovat herättäneet kiinnostusta globaalisti suomalaista koulujärjestelmää ja opetusta kohtaan, koska erot heikkojen ja hyvin menestyvien välillä ovat olleet vähäisiä. Toisin sanoen matematiikan osaamisen vaihtelu on Suomessa melko pientä ja heikkojenkin osaajien tulokset ovat kansainvälisissä vertailuissa erittäin hyvät. Suomesta löytyy myös erinomaisesti menestyneitä oppilaita matematiikan PISA-tutkimuksissa. (Björn, Aro & Koponen 2018, 193; Kupari & Hiltunen 2018, 37–40, 48.) Siitä huolimatta, että suomalaisten PISA-tulokset ovat olleet erittäin hyviä, niin samalla ne myös herättävät huolta. Vaikka matematiikan tuntikehykseen on 2000-luvun alussa lisätty yksi tunti, niin viimeisen kymmenen vuoden aikana huippuosaajien määrä on vähentynyt ja heikosti matematiikkaa osaavien oppilaiden määrä on kasvanut. Lisäksi oppilaiden asenne matematiikkaa kohtaan on heikentynyt ja oppilaat eivät pidä matematiikasta eivätkä sitoudu oppimiseen. Tästä syystä yhdeksi matematiikan opetuksen kehittämistehtäväksi tulevaisuudessa olisikin oppilaiden motivaation sekä oppimista tukevien ja rikastuttavien strategioiden kasvattaminen. Matematiikan osaamisessa on tärkeää myös opittujen taitojen soveltaminen. (Kupari & Hiltunen 2018, 48–49.)

2.4.2 Aiempaa oppikirjatutkimusta

Matematiikan oppikirjoja on tutkittu varsin vähän (Joutsenlahti, Perkkilä & Tosavainen 2017, 2). Oppikirja tutkimusta ovat aiemmin tehneet muun muassa Joutsenlahti ja Perkkilä (2019) sekä Törnroos (2004). Oppikirjatutkimuksessa on yleensä keskitytty oppikirjojen tekstisisältöön ja kuvitukseen. Matematiikan oppikirjojen kohdalla on luontevampaa tarkastella niitä harjoitustehtävien kautta, koska tekstin osuus matematiikan oppikirjoissa on pieni. Tutkimuksissa on todettu, että matematiikan oppikirjoissa harjoitustehtävät muodostuvat mekaanisista peruslaskutoimitustehtävistä. Oppikirja-analyysissa on keskitytty siis siihen, mitä matematiikan sisältöjä oppikirjoissa käsitellään. Myös kansainvälisissä TIMMS-tutkimuksissa on kartoitettu oppimateriaalien käyttöä. (Törnroos 2004, 34–43.)

Oppimateriaalitutkimuksissa on nostettu pääsääntöisesti esiin oppimateriaalien heikkouksia ja puutteita liittyen oppimateriaalien pedagogisiin ominaisuuksiin ja niiden välittämään arvomaailmaan. Oppimateriaalitutkimus ei kuitenkaan ole kattanut kaikkia keskeisiä alueita. (Karvonen ym. 2017, 13.) Esimerkiksi oppimateriaalin valintaprosessista ei ole juurikaan tehty tutkimuksia, mutta asiaa ovat tutkineet Tainio, Karvonen ja Routarinne (2015). Heidän tutkimuksestaan ilmenee, että oppimateriaalisarjan valinnassa vaikuttavat opettajien aiemmat kokemukset ja taloudelliset tekijät. (Tainio ym. 2015, 197.) Oppimateriaalin roolista opetuksen suunnittelussa ja opettajan oppaista on myös vähän tutkimustietoa, koska tutkimuksissa on keskitytty oppilaiden oppimateriaalin sisältöihin (ks. myös Törnroos 2004, 37). Oppimateriaalisarjojen eroista (ks. Tainio & Teräs 2001) ei ole juurikaan tutkimustietoa (Karvonen ym. 2017, 13). Törnroosin (2004, 37) mukaan oppikirja-analyysien kohteena ovat pääsääntöisesti olleet oppikirjojen esitystapa tai olemus sekä tekstisisältö ja kuvitus. Oppikirjatutkimuksessa on analysoitu myös erityisesti konstruktivistisen oppimiskäsityksen suhdetta oppikirjoihin. Karvosen ym. (2017, 13–14) mukaan oppikirjatutkimuksen resursseja voitaisiin hyödyntää kehittämään opettajankoulutusta siten, että valmistuvilla opettajilla olisi enemmän valmiuksia käyttää oppimateriaaleja niin, että ne hyödyttäisivät ja edistäisivät oppilaiden oppimista.

2.5 Konstruktivistinen oppimiskäsitys matematiikan tuntien kehyksenä

Aktiivista, osallistavaa ja sosiaalista vuorovaikutusta korostavaa oppimista voidaan kutsua konstruktivistiseksi oppimiskäsitykseksi (Tynjälä 1999, 38–39). Oppimisessa on sosiaalisella vuorovaikutuksella merkittävä rooli (Rauste-von Wright, von Wright & Soini 2003, 179; Tynjälä 1999, 132). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 17) todetaan, että konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen oppimisen tulisi tapahtua vuorovaikutuksessa toisten oppilaiden, opettajien ja muiden aikuisten sekä eri yhteisöjen ja oppimisympäristöjen kanssa. Lisäksi oppiminen on tiedon rakentamista ja ajattelutaitojen oppimista (Järvinen 2011, 60; Tynjälä 1999, 37). Tynjälän (1999, 37–38) mukaan tieto ei ole koskaan passiivista vastaanottamista, tietäjästä riippumatonta ja objektiivista, vaan se on aina yksilön tai yhteisön rakentamaa ja sitä rakennetaan aktiivisesti aiempien kokemusten ja tietojen päälle. Lapsi omaksuu myös erilaisia matemaattisia taitoja ollessaan sosiaalisessa vuorovaikutuksessa toisten kanssa (Vygotsky, 1978; ks. myös Tall 2013, 403). Konstruktivistisessa tiedonmuodostuksessa korostuu se yhteisö ja sen yhteisöllisyys, johon yksilö on sidoksissa (Tynjälä 1999, 56; Vygotsky, 1978). Vuorovaikutteisessa oppimisessa painottuvat myös yhteisen kielen ja kontekstin merkitys. (Rauste-von Wright ym. 2003, 162, 166, 167, 169; Tynjälä 1999, 56–58). Oppiminen on aina sidoksissa kontekstiin ja oppimistilanteeseen (Järvinen 2011, 92; Tynjälä 1999, 19, 148–149). Leinon (2004, 28) mukaan konstruktivistisen opetuksen tulee olla aina kasvattavaa, ajattelua laajentavaa ja syventävää.

Hiidenmaan ym. (2017, 13) mukaan koulupedagogiikassa työtävät ovat muuttuneet yksilötyöstä ryhmä- ja yhteistyöksi viimeisten vuosikymmenten aikana. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 234) määriteltyjen matematiikan opetuksen tehtävien mukaan opetuksen tavoitteena on, että oppilas pystyy ratkaisemaan ongelmia itsenäisesti ja ratkaisemaan ongelmia muiden kanssa yhdessä sekä refleктоimaan omaa oppimistaan. Oppiminen on elinikäinen prosessi. Oleellisia asioita oppimisen ja ajattelun kannalta ovat eri aistien käyttö, kehollisuus ja kieli. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden

(2014, 17) oppimiskäsityksen mukaan oppimista edistävät oppilaan myönteiset tunnekokemukset, oppimisen ilo ja uutta luova toiminta. Tämän lisäksi oppilas on aktiivinen toimija oppimisprosessissa. (Hellström, Johnson, Leppilampi & Sahlberg 2015, 90; Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 179; Tynjälä 1999, 38). Oppilaskeskeisyys, myönteinen oppimisilmapiiri, vuorovaikutuksellisuus oppimisessa ja toiminnallisuus kuuluvat VaNe-opetusmenetelmän mukaiseen matematiikan opetukseen, jonka pohjana on myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (Korpinen 2005, 159–162).

Oppilaan ongelmanratkaisutaidot, luova ja kriittinen ajattelu kehittyvät oppimalla yhdessä toisten kanssa. Yhdessä oppiminen edistää myös oppilaan kompetenssia ymmärtää erilaisia näkökulmia. Olennaista on oppia liittämään opittavat asiat ja uudet käsitteet aiemmin opittuihin asioihin. Näin oppilas voi syventää ymmärrystään jo opitusta ja oppia uusia käsitteitä. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 17; Rauste-von Wright ym. 2003, 162–163.) Perkkilän (1998, 12, 130–131) tutkimuksessa tulee esille, että matematiikan opetuksessa itsenäinen työskentely mekaanisten laskutehtävien parissa eli ”hiljainen laskeminen” on ollut erittäin yleistä, vaikka konstruktivistisen oppimiskäsityksen oppilas on aktiivinen ja oman tiedon rakentaja. Hänen mukaansa huolenaiheena on oppikirjojen tapa siirtyä nopeasti käsitteiden määritelmiin, vaikka olisi hyvä ensin lisätä käsitteenmuodostukseen liittyviä tehtäviä - kiirehtimättä standarditehtävien tekemiseen. Jos oppikirjat ovat matematiikan opetuksen keskiössä, niin silloin tunnit näyttävät noudattavan perinteistä matematiikan opetusta. Myös uudenpien tutkimusten, kuten Joutsenlahden ja Vainionpään (2010, 138–139) sekä Lepikin, Grevholmin ja Viholaisen (2015, 136) mukaan oppitunnin rakennetta ohjaa oppikirjan struktuuri, jossa painottuu ”aukeama tunnissa” -ajattelu. Opettajan asenteesta riippuu konstruktivistisen oppimiskäsityksen toteutuminen tai toteutumattomuus opetuksessa. Perkkilän (1998, 131–132) mukaan oppikirja voi toimia vain eräänlaisena tehtävälisikoimana, jota opettaja voi käyttää hyödyksi luodessaan konstruktivistisen oppimisympäristön matematiikan opetukseen.

3 MATEMAATTISTEN TAITOJEN KEHITYKSESTÄ

Matemaattisten taitojen kehitys on aina yksilöllistä. Matematiikan oppiminen vaatii aina hyvät pohjataidot. Oppikirjan käyttäminen oppilaalle on helpompaa, kun hänen matemaattiset pohjataitonsa ovat kunnossa. Jos opetuksessa edetään ”aukeama kerrallaan”, on oletuksena, että oppilaat osaavat kaikki edellä opetetut asiat. Opettajan tehtävänä on varmistaa oppilaiden matemaattisten taitojen taso. Muun muassa lukujonotaitojen merkityksen on todettu olevan yksi keskeisimmistä tekijöistä myöhemmälle matematiikan osaamiselle (Aunola & Nurmi 2018, 58). Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001, 137–138) mukaan matemaattiset taidot kehittyvät eri osa-alueista, jotka ovat riippuvaisia toisistaan. Nämä ovat käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja yritteliäisyys. Käsitteet avataan tarkemmin luvussa 4, Käsitteen opettamisesta.

3.1 Matematiikan luonteesta matematiikan oppijan näkökulmasta

Tutkimusten mukaan matemaattiset taidot kehittyvät hierarkkisesti. Matemaattisten taitojen oppiminen vaatii aikaisemmin opittujen taitojen hyvää osaamista, koska uuden oppiminen rakentuu aiemmin opitun päälle eli voidaan puhua ”lumipalloefektistä” (Aunola & Nurmi 2018, 57). Niinpä lasta ei pidä kuvata ”tabularasaksi” eli tyhjäksi tauluksi, joka on John Locken 1600-luvulla esittämä näkemys oppijasta passiivisena tiedon vastaanottajana, jossa ei huomioida oppijan aikaisempia kokemuksia opeteltavasta asiasta. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppija ajatellaan tauluksi, jossa aikaisemmin piirtyneiden jälkien päälle piirtyy uusia kuvioita (Rauste-von Wright ym. 2003, 162–163; Tynjälä 2000, 19, 29.) Matematiikka on oppiaineena erityinen siihen liittyvän Matteus-efektin vuoksi, jossa yksilöiden väliset tasoerot kasaantuvat ja näkyvät selkeästi. Matteus-efektillä tarkoitetaan huonommuuden tunteen kasautumista oppilaille,

jotka kokevat itsensä heikoiksi matematiikan opiskelijoiksi. Tästä syystä myös motivaatio ja suhtautuminen matematiikan opiskelua kohtaan saattavat heikentyä, jos oppilaalta puuttuu onnistumisen kokemukset matematiikan opiskelussa. (Aunola & Nurmi 2018, 62; Hannula & Holm 2018, 140.) Onnistumisen kokemukset matematiikan oppimisessa puolestaan vaikuttavat positiivisesti oppilaan matematiikkakuvan syntymiseen. Onnistuminen lisää oppilaan uskoa omaan kykyihin, innostaa uuden oppimista ja lisää menestymisen halua. Matematiikan oppimiseen on tärkeä luoda positiivinen ja kannustava ilmapiiri, koska tunteet ovat merkittävässä roolissa oppilaan matematiikkakuvan muodostumisessa. Lisäksi matematiikan tunteilla oppilailla tulisi olla mahdollisuus onnistumisen elämyksen kokemiseen. (Hannula & Holm 2018, 140–141, ks. myös Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, 154; Kupari & Hiltunen 2018, 49–50.)

Nykyajan yhteiskunnassa vaaditaan lapsilta paljon laskemiseen ja numeroihin liittyviä taitoja, kuten aritmeettiset laskutavat, joita ovat esimerkiksi luvusta lainaaminen ja allekkain laskeminen. Muita matematiikkaan liittyviä taitoja ovat lisäksi muun muassa peruslaskutoimitusten (yhteen-, vähennys- kerto- ja jakolasku) oppiminen ja lukusanojen ääneen lausuminen. Edellä mainittuja numeroihin liittyviä taitoja tarvitaan erilaisissa arkielämän tilanteissa, kuten käsiteltäessä rahaa erilaisissa tilanteissa, oikean sivun löytämiseen kirjasta sekä aikaan ja päivämäärään liittyvissä konteksteissa. (Nurmi, Ahonen, Lyytinen, Lyytinen, Pulkkinen & Ruoppila 2015, 108.) Kognitiivisilla tekijöillä on merkitystä matemaattisten taitojen kehityksessä kouluiässä. Tutkimuksista on tullut selvää näyttöä siitä, että varhainen lukujonotaitojen hallitseminen ennustaa matemaattisten taitojen kehitystä kouluiässä, jopa paremmin kuin kielelliset valmiudet tai tarkkaavaisuus. (Aunola & Nurmi 2018, 58–59.) Toisaalta löytyy myös tutkijoita, jotka ovat sitä mieltä, että numeroiden ja laskutaidon oppimisessa ei tarvita erityisiä kognitiivisia taitoja, vaan ne kehittyvät muiden tärkeiden perusprosessien kehittymisen ohella. Näitä perusprosesseja ovat esimerkiksi työmuistin ja kielellisten taitojen kehitys. (Nurmi ym. 2015, 108–109.)

Muita matemaattisten taitojen kehittymiseen vaikuttavia tekijöitä ovat lapsen kiinnostus ja oppimismotivaatio matematiikkaa kohtaan (Aunola & Nurmi

2018, 61–62). Oppimismotivaatioon vaikuttavat oppimisympäristö ja sosiaalinen vuorovaikutus (Tynjälä 1999, 108). Näiden lisäksi lapsen oma aktiivinen toiminta ja ajattelu ovat keskeisessä roolissa matemaattisten taitojen oppimisessa. Mielenkiintoisia havaintoja on tehty siitä, että jo kolmivuotiailla lapsilla on eroja ympäristöön kohdistuvassa havainnoinnissa. Kiinnittävätkö lapset huomionsa lukumääriin vai joihinkin toisiin ympäristössä näkyviin ominaisuuksiin esimerkiksi muotoihin tai väreihin (Nurmi ym. 2015, 109.) Aunolan, Nurmen, Lerkkasen ja Rasku-Puttosen (2003, 16) sekä Hirvosen, Tolvasen, Aunolan ja Nurmen (2012, 20–22) tutkimusten mukaan lasten tehtäväsuuntautuneisuus ensimmäisenä kouluvuotena ennustaa matemaattisten taitojen nopeaa kehitystä ensimmäisinä kouluvuosina. Toisaalta tutkimuksissa on tullut esille ristiriitaisia tuloksia matematiikan ja motivaation yhteydestä: Joissakin kansainvälisissä matematiikan oppimiseen liittyvän motivaation on todettu ennustavan oppilaan tulevaa taitotasoa, kun taas toisissa tutkimuksissa taitotason ennustavan motivaatiota. Lisäksi opettajalla on erittäin suuri vaikutus motivaatioon matematiikan opiskelussa. Tutkimusten mukaan matematiikan opiskelussa motivaation merkitys on suurempi kuin lukemaan oppimisessa (Aunola & Nurmi 2018, 61–62.) Kuparin ja Nissisen (2013, 13–15) mukaan matematiikan osaaminen on yhteydessä luottamukseen omaa oppimista sekä asennoitumista matematiikan opiskelua kohtaan.

3.2 Matemaattisten taitojen kehityksestä

Käsitettä “matemaattinen ajattelu” käytetään paljon matematiikan opetusta käsittelevissä tutkimuksissa ja opetussuunnitelmassa. Termin merkityksestä ei kuitenkaan ole aivan yhtenäistä käsitystä. Osa tutkijoista on sitä mieltä, että matemaattinen ajattelu on ajattelua matematiikasta ja osa ajattelee sen olevan ajattelua matematiikan avulla. Matemaattinen ajattelu koostuu monesta osatekijästä, jotka sisältävät sekä luovaa että loogista ajattelua. (Pehkonen & Rossi 2018, 58–59.) Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001, 38) mukaan matematiikan opiskelussa on erittäin tärkeää matematiikan ymmärtäminen. (ks. myös Järvinen 2011, 62). Myös Rauste-von Wright ym. (2003, 165–166) painottavat ymmärtämisen

merkitystä oppimisessa. Lisäksi opettajan pitää ymmärtää oppijan kontekstuaaliset lähtökohdat.

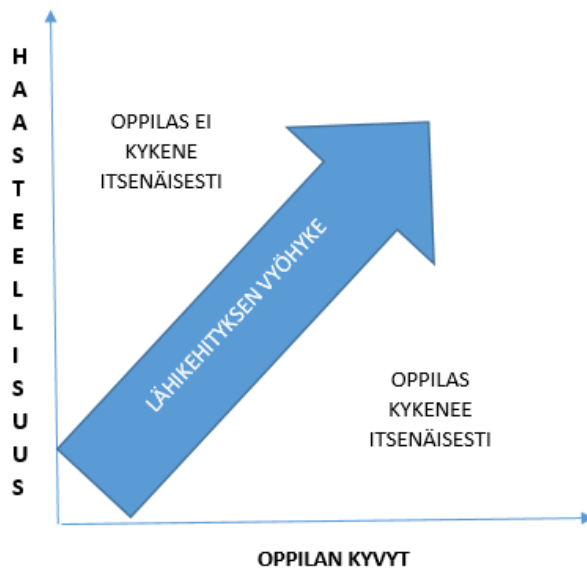
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 234–235) yhtenä olennaisena tavoitteena matematiikan opetuksessa on matemaattisen ajattelun kehittäminen. Tavoitteen saavuttamiseksi ei kuitenkaan ole annettu erityisiä menettelytapoja, vaan päätöksenteko on jätetty opettajien omaan suunnitteluun. Hyviä keinoja kehittää matemaattista ajattelua on ainakin ongelmanratkaisutehtävien käyttäminen (esim. Schoenfeld 1985) sekä ajatuskartan tekeminen ja sen käyttäminen opetusvälineenä (ks. Buzan 1989) (Pehkonen & Rossi 2018, 63). Joutsenlahden (2003) mukaan matemaattisen käsitteen konstruointiprosessiin kuuluu kielentäminen. Oppilas joutuu pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä selittäessään käsitteen sisältöä muille ja samalla hän selventää matemaattista ajatteluaan. Konstruktivistiseen oppimiseen liittyy oppilaiden oma pohdinta ja tiedonrakentelu, joten matematiikan oppimisessa ja opetuksessa opettajan on tärkeää kuulla ja kuunnella oppilaan käsityksiä ja matemaattista ajattelua. Näin ollen keskustelu ja vuorovaikutteinen kommunikaatio luokassa on äärettömän tärkeää. (Joutsenlahti 2003; Pehkonen & Rossi 2018, 63.) Joutsenlahden ja Perkkilän (2019, 6) tutkimuksesta ilmeni, että jos sekä oppikirjat että oppitunnit painottuvat pelkästään laskemiseen, oppilailla ei ole mahdollisuutta ilmaista omaa ajatteluaan kielen avulla eli kielentämällä matemaattista ajatteluaan.

Yleensä ennen kouluikää, kun lapsi ei tukeudu päättelyssään enää pelkkään näköhavaintoon, hänelle kehittyy lukumäärän pysyvyyden ymmärtäminen. Lukumäärän pysyvyyden ymmärtäminen ilmenee esimerkiksi tilanteessa, jossa lapsen eteen on laitettu kaksi jonoa, joissa on yhtä paljon kolikoita: Lapsi havaitsee, että kolikoita on yhtä paljon. Kun toista jonoa venytetään pidemmäksi, ymmärtää lapsi sen, että kolikoita on edelleen jonoissa sama määrä eli hänen lukumäärän pysyvyyden ymmärtäminen on kehittynyt. Keskilapsuudessa eli noin 6 - 12 vuoden iässä lapsen kyky ymmärtää kolmiulotteista maailmaa kehittyy nopeasti. Tässä iässä kehittyy myös lapsen kyky ymmärtää myös erilaisia malleja ja symboleja eli lapsi oivaltaa sen, että merkki tai kuvio voi tarkoittaa jotain olemassa olevaa esinettä tai asiaa. Samaan aikaan lapsella herää kiinnostus

esineiden tai asioiden luokitteluun, niiden yhteisten ominaisuuksien tai eroavaisuuksien avulla. (Beilin 2016, 123–124; Nurmi ym. 2015, 77, 89–90.) Alakouluikäisten lasten lukualuetta luonnollisilla luvuilla laajennetaan tuhanteen ja eteenpäin, jonka jälkeen siirrytään toimimiseen rationaaliluvuilla. Muun muassa murtoluvut ovat rationaalilukuja, joiden ymmärtäminen on haastavaa monille lapsille. (Mononen, Aunio, Väisänen, Korhonen & Tapola 2017, 31.)

Piaget'n mukaan keskilapsuuden alkuvaiheessa lapsille kehittyy myös kyky loogisten johtopäätösten tekemiseen tietoja yhdistelemällä. Lapsen päässä-laskutaidot, tieto- ja käsitevarastot sekä kuvioden kääntäminen mielessä nopeutuvat ja automatisoituvat keskilapsuuden aikana. Lisäksi lapsilla tapahtuu selkeää muutosta muististrategioissa eli he alkavat käyttää erilaisia strategioita muistaakseen paremmin. (Nurmi ym. 2015, 90, 92–93.) Kuitenkaan ei voida olettaa, että tietyn ikäisen lapsen matemaattinen ajattelu kehittyisi koulumatematiikassa käytettyjen perinteisten opetuskäytäntöjen järjestyksessä (Leino 2004, 26). Perkkilän (2002, 158) tutkimuksen mukaan opettajan oppaiden alussa saattaa opetettavat asiat olla kuukauden tarkkuudella. Opettajat eivät kyseenalaista matematiikan oppikirjojen tarkkaa aikatauluttamista ja asiasisältöjä, mutta kokevat valmiit oppisisällöt sitovana. Lisäksi he kokevat, että matematiikan oppikirjan aikataulutuksen seuraaminen aiheuttaa kiireen tuntua opetukseen.

Vygotskyn (1978, 10, 84) mukaan kaikki oppiminen alkaa jo ennen varsinaisen koulun alkua. Hänen mukaansa lapsilla on matemaattista kokemusta jo ennen kouluopintojen alkua. He ovat käsitelleet esimerkiksi jakamista, vähentämistä, lisäämistä ja koon määrittämistä eli ovat kohdanneet aritmetiikkaa arjessa. Kuten Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissakin (2014) korostetaan oppimista vuorovaikutuksessa toisten kanssa, niin myös Vygotsky (1978) on painottanut yhteisöllistä, vuorovaikutuksessa tapahtuvaa oppimista. Lapsi voi osata ratkaista matemaattisia ongelmia yhdessä vertaisten kanssa tai aikuisen ohjauksessa, joita hän ei kykenisi ratkaisemaan yksin. Kysymys on aktuaalisen ja potentiaalisen kehityksen välisestä etäisyydestä (Kuvio 2).



Kuvio 2 Lähikehityksen vyöhyke eli ZPD (Mukaeltu Haapasalo 2012, 88)

Edellä kuvattua prosessia Vygotsky (1978) kutsuu nimellä lähikehityksen vyöhyke eli zone of proximal development. Lähikehityksen vyöhykkeellä lapsi voi yhteistyössä muiden kanssa saavuttaa niitä taitoja, jotka ovat vasta kypsymässä. "Se, mitä voi tehdä tänään toisten avustuksella, on mahdollista tehdä itsenäisesti huomenna." (Vygotsky 1978, 86–87.) Vygotsky (1978) korostaa ohjauksen merkitystä oppimisessa. Hänen mukaansa oppilaat tarvitsevat oikeantasoisia tehtäviä: ei liian vaikeita, mutta haastettakin pitää olla, jotta oppimista tapahtuu ja taidot kehittyvät.

3.3 Matematiikan opetuksesta kolmannella luokalla

Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden luovaa ja loogista matemaattista ajattelua. Opetuksessa keskeisenä asiana ovat konkretia ja oppilaita motivoiva toiminnallisuus - pelillisyyt sekä leikki. Pyrkimyksenä on oppilaiden taitojen kehittäminen niin, että oppilaat pystyvät tuomaan esille matemaattista ajatteluaan ja ratkaisujaan eri välineillä ja tavoilla. Välineiden käytön tulisi olla keskeisessä asemassa opetuksessa ja niiden tulisi olla saatavilla helposti. Matematiikan opetuksessa painottuvat ongelmien ratkaisu sekä ryhmässä että

itsenäisesti. Kolmannella luokalla matematiikan sisältöalueissa tulee uutena asiana murtoluvun käsite. Sen oppimista harjoitellaan laskemalla peruslaskutoimituksia murtoluvuilla eri tilanteissa. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 234–236.)

Kolmannella luokalla matematiikan asiasisältö ja opetettavien asioiden määrä lisääntyvät. Murtoluvun käsitteeseen käsitellään jo peruskoulun toisella luokalla, mutta varsinaisesti murtoluvun opetus alkaa kolmannella luokalla. Tutkielmassamme käytettävissä oppikirjasarjoissa (Kymppi 3 kevät, Tuhattataituri 3b ja Matematiikkaa 3b) murtoluvun käsitteeseen tutustutaan toisen luokan aikana. Kaikissa analysoitavissa kirjasarjoissa murtolukuun tutustutaan kolmannen luokan kevään kirjoissa. Joutsenlahden ja Perkkilän (2019, 12) mukaan oppilaan hyvät matematiikan pohjataidot ovat tärkeitä siirryttäessä alkuopetuksesta kolmannelle luokalle. Oppikirjoissa ja opetuksessa tulisi korostaa murtolukukäsitteen syvää ymmärrystä ennen kuin oppilaat aloittavat mekaanisen laskemisen murtoluvuilla. Oppimateriaalin tulisi yhdistää luonnollinen kuvallinen kieli matemaattiseen symbolikieleen ja käsitteisiin. Käsitteen opettamisessa ja oppimisessa on tärkeää käyttää samanaikaisesti puhuttua kieltä (kielentäminen), kvaalista kieltä sekä matematiikan symbolikieltä. Tasajaon käsitteen on murtolukukäsitteen ymmärtämisen perusedellytys. Oppilaiden on erityisen vaikea sisäistää murtolukujen symbolimuoto, koska murtolukumerkintä on ristiriitainen aiemmin opiskeltujen luonnollisten lukujen (positiivisten kokonaislukujen) kanssa. Kolmasluokkalaisen on vaikea ymmärtää murtolukujen suuruusjärjestystä, miksi $\frac{1}{3}$ on pienempi kuin $\frac{1}{2}$, koska hän on aikaisemmin oppinut, että 3 on suurempi kuin 2. Olisikin tärkeää opettaa murtoluvun käsitettä systemaattisesti ja harjoittaa oppilaiden matemaattista ajattelua, koska se vahvistaisi murtolukukäsitteiden oppimista ja merkitysten ymmärtämistä (mm. osa-kokonainen, suhde ja osamäärä). (Hihnala 2005, 43 Strangin 1990 mukaan.)

Kolmasluokkalaiset oppilaat ovat vielä Piaget'n mukaan ns. konkreettisten operaatioiden kaudella (Beilin 2016, 123). Oppilaiden ajattelun kehitys on vielä hyvin konkreettisella tasolla, joten pelkkä oppikirjasidonnaisuus opetuksessa ei tue oppilaan matemaattisen ajattelun ja taitojen kehittymistä. Oppilaiden ajattelu

on tässä vaiheessa vielä hyvin kontekstisidonnaista eli he eivät kykene irtautumaan sen hetkisestä tilanteesta (Kuusinen ja Korhonen 1999, 108 Piaget'n mukaan). Näin ollen myös matematiikan opetuksessa tulisi käyttää konkreettisia opetus- ja havainnollistamisvälineitä, koska oppilaiden ajattelu ei ole tässä vaiheessa vielä abstraktilla tasolla. Liian varhaista symbolien käyttöä ja pelkillä numeroilla laskemista tulisi välttää, koska symbolien ymmärtäminen kehittyy vasta sen jälkeen, kun oppilas ymmärtää symbolien merkityksen (Haapasalo 2012, 84–86; Perkkilä 2002, 41).

4 KÄSITTEEN OPETTAMISESTA

Matemaattinen käsite sisältää sekä tehtävän laskemiseen tarvittavia menetelmällisiä tietoja että käsitteiden ominaisuuksia (Yrjönsuuri 2004, 112). Käsitetieto on matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien oppimista sekä tietorakenteiden kehittymistä. Matemaattisten käsitteiden oppimiseen liittyy myös menetelmätiedon oppiminen, joka viittaa toimintojen ja taitojen oppimiseen. Matemaattiseen ymmärrykseen tarvitaan molempia osatekijöitä. Oppilaat voivat luulla ymmärtävänsä matematiikkaa, mutta eivät kuitenkaan kykene ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Näin tapahtuu silloin, jos oppilaiden käsitteellinen ymmärrys ja algoritminen suoritustaso (mekaaninen laskutaito) ovat epätasapainossa. (Silfverberg 1999, 65; ks. Kilpatrick ym. 2001, 137–138.) Mekaaninen laskutaito on opittavissa osittain myös ilman käsitteellistä ymmärtämistä. Käsitetieto koostuu jonkin tiedonalueen kannalta olennaisista käsitteistä ja niiden välisistä yhteyksistä. (Silfverberg 1999, 66.) Käsitteen ydin sisältää ne elementit, jotka selittävät käsitteen suhdetta muihin käsitteisiin sekä ajatteluun (Osherson & Smith 1981, 23).

4.1 Oppimisprosessin vaiheita ja matematiikan opettamisen tapoja

Perkkilän, Joutsenlahden ja Sareniuksen (2019, 349–351) mukaan oppilaille tulisi antaa mahdollisuus tutustua matemaattisiin käsitteisiin monikanavaisesti ja yhdessä muiden kanssa. He määrittelevät rinnakkaiset osa-alueet *toiminnalliseksi, ikoniseksi ja symboliseksi* tasoiksi. Toiminnallisella tasolla matematiikkaa opetetaan konkreettisten kokemusten eli oikean tekemisen avulla sekä omaa toimintaa kielentämällä. Toimintavälineiden avulla muodostetaan mielikuvia, jonka jälkeen siirrytään ikoniselle tasolle. Ikonisella tasolla syvennetään toiminnallisella tasolla muodostuneita mielikuvia. Oppimisen kohteena olevaa sisältöä hahmotetaan piirtämällä, kuvia tulkitsemalla, kirjottamalla ja kielentämällä. Ikonisella tasolla toimintavälineet toivat oppimisen tukena. Symbolisella tasolla opittua

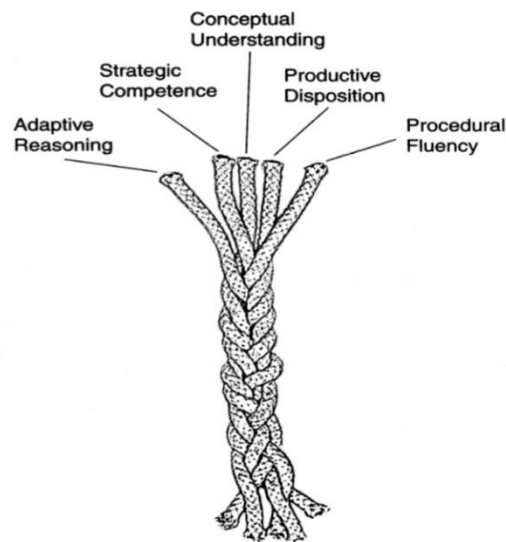
käsitettä voidaan soveltaa arjen ilmiöihin ja etsitään sellaisia ilmiöitä, joihin opittua sisältöä voidaan soveltaa.

Nykyaikaisissa matematiikan oppikirjoissa käytetään kolmea eri matematiikan opettamisen tapaa. Nämä ovat: *määritelmälähtöinen*, *realistinen* ja *ongelmalähtöinen tapa*. Määritelmälähtöisissä oppikirjoissa teoria opetetaan ensin, jonka jälkeen käsitettä harjoitellaan mekaanisesti annettua esimerkkiä noudattaen. Mekaanisen harjoittelun jälkeen asiaa voidaan soveltaa sanallisiin tehtäviin. Määritelmälähtöisen tavan perustana toimii symbolinen taso. (Perkkilä ym. 2019, 352.) Realistisessa tavassa opetettavaa asiaa käsitellään oppilaiden kokemusmaailmasta löytyvien esimerkkien kautta. Realistisessa tavassa lähtökohtana on toiminnallinen taso, lisäksi ikoninen ja symbolinen taso otetaan opettamisessa käyttöön matemaattisen ymmärryksen lisääntyessä. Tavoitteena on, että oppilas kykenee soveltamaan opittua asiaa arkielämässä. (Perkkilä ym. 2019, 352, van den Heuvel-Panhuizenin 2003 ja Freudenthalin 1973 mukaan.) Haapasalon (2011) mukaan ongelmalähtöisessä tavassa matematiikan opetus lähtee liikkeelle uuden tiedon tuottamista vaativien ongelmatehtävien ratkaisemisella. Samoin kuin realistisessa tavassa tavoitteena on oppilaan kyky käyttää sekä soveltaa oppimaansa arjen tilanteissa. Ongelmalähtöisessä lähestymistavassa matematiikan oppiminen tapahtuu konkreettisen ja abstraktin tason vuoropuheluna; toisin sanoen liikutaan edestakaisin sekä symbolisella että toiminnallisella tasolla.

4.2 Käsitteen opettaminen ja osaaminen

Kilpatrickin ym. (2001, 137–138) mukaan matemaattinen osaaminen (mathematical proficiency) voidaan kuvata (Kuvio 3) viidestä eri yhteen kietoutuneesta osa-alueesta koostuvasta kokonaisuudesta, jossa osa-alueet eli matemaattisen osaamisen ”säikeet” ovat riippuvaisia toisistaan. Kaikkia osa-alueita tulisi harjoittaa ja kehittää tasaisesti, eikä keskittyä vain yhteen tai kahteen ”säikeeseen” (Kilpatrick ym. 2001, 140). Matematiikan osaaminen kehittyy ajan myötä ja uutta opitaan aina vanhan tiedon päälle. Oppilaat tarvitsevat riittävästi aikaa harjoitella jokaista matemaattista aihepiiriä, jotta taidot kehittyvät. Lisäksi matemaattisten

taitojen harjoittelu vaatii oppilailta useita toistokertoja saman käsitteen osalta tulakseen taitaviksi matematiikan osaajiksi. Taitava matematiikan osaaja pystyy ongelmanratkaisuun, perustelemaan ratkaisunsa, kehittämään matemaattista ymmärrystään ja osaa yhdistää aiemmin opitun tiedon uuteen tietoon. (Kilpatrick ym. 2001, 156; ks. myös Yrjönsuuri 2004, 112.)



Kuvio 3 Matemaattisen osaamisen viisi osa-alueetta (Kilpatrick ym. 2001, 138)

Matematiikan osaamisen osa-alueet ovat:

- Käsitteellinen ymmärtäminen (*conceptual understanding*) eli oppilas ymmärtää, missä tilanteessa käsitettä voi käyttää, miten eri käsitteet liittyvät toisiinsa ja miksi ne ovat tärkeitä.
- Proseduraalinen sujuvuus (*procedural fluency*) eli oppilas osaa käyttää matemaattisia toimintamalleja joustavasti, täsmällisesti ja tarkoituksenmukaisesti.
- Strateginen kompetenssi (*strategic competence*) eli oppilas osaa kuvata ja ratkaista matemaattisia ongelmia.

- Mukautuva päättely (*adaptive reasoning*) eli oppilas osaa ajatella loogisesti, reflektoida ja perustella ratkaisunsa.
- Yritteliäisyys (*productive disposition*) eli oppilas näkee matematiikan merkityksellisenä, käyttökelpoisena ja itselleen hyödyllisenä. Lisäksi hän uskoo sinnikkyyteen ja omiin kykyihinsä.

(Kilpatrick ym. 2001, 137–154, ks. myös Joutsenlahti 2005, 96–99.)

Käsitteellinen ymmärtäminen auttaa oppilasta järjestämään matemaattisen tiedon johdonmukaiseksi kokonaisuudeksi, auttaa uuden ja vanhan tiedon yhdistämisessä sekä sen mieleen palauttamista ja antaa oppilaille työkalut käsitteiden ja toimintamallien yhdistämiseen. Lisäksi käsitteellinen ymmärtäminen helpottaa oppimista, koska se auttaa oppilaita tunnistamaan yhtäläisyydet erilaisissa ongelmanratkaisutilanteissa. Mitä paremmin oppilaat ymmärtävät matematiikan käsitteitä sitä mielekkäämmäksi matematiikan opiskelu ja oppiminen koetaan. (Kilpatrick ym. 2001, 152.) Lisäksi oppilaille pitää olla sama ymmärrys käsitteen merkityksestä eri tilanteissa (Yrjönsuuri 2004, 112).

Jotta oppilas osaisi käyttää matemaattisia toimintamalleja joustavasti, täsmällisesti ja tarkoituksenmukaisesti, on hänellä oltava käsitteellistä ymmärrystä asiasta. Toimintamallien sujuvuus tukee myös laskumenetelmien samankaltaisuuksien ja erojen analysointia ja huomaamista. Proseduraalinen sujuvuus kertoo esimerkiksi siitä, kuinka oppilas ratkaisee johonkin arkipäivän tilanteeseen liittyvän laskutoimituksen; laskeeko hän päässään vai käyttäen kynää ja paperia tai kenties laskinta. Kun oppilas opiskelee algoritmeja (säännönmukaisuuksia tai mekaanisia laskumenetelmiä) yleisinä menettelytapoina, hän ymmärtää, että matematiikka on hyvin struktutoitua ja ennalta arvattavaa. Näin ollen hän oppii käyttämään rutiinitehtävien suorittamiseen näitä menettelytapoja (algoritmeja). Opettajan tehtävänä on varmistaa, että oppilaat käyttävät ymmärtäen ”oikeita” laskumenetelmiä, jotka johtavat toivottuun tulokseen. Tarkkuutta ja tehokkuutta laskutoimituksissa voidaan parantaa ja pitää yllä harjoittelulla. Oppilaiden tulee myös harjoitella laskutoimitusten soveltamista. (Kilpatrick ym. 2001, 143–144.)

Kilpatrickin ym. (2001, 144) mukaan ymmärtäminen ja menetelmällinen osaaminen asetetaan koulussa usein vastakkain ja ne kilpailevat huomiosta. Tällainen kahtiajako ei kuitenkaan ole toivottavaa, sillä nämä osaamisen alueet pitäisi olla yhteen kietoutuneita kuten palmikkokuvion kohdalla todettiin. Ymmärtäminen helpottaa taitojen oppimista, vähentää virheitä ja unohtamista. Toisaalta taas tietty proseduraalinen taitotaso (ongelmien ratkaisu) edellyttää monien matemaattisten käsitteiden oppimista (ymmärryksen syventäminen) pysyvästi ja näiden menetelmien käyttö vahvistaa ja kehittää ymmärrystä. Näin ollen näitä osaamisalueita ei voi erottaa, sillä ne ovat riippuvaisia toisistaan. (Kilpatrick ym. 2001, 144; ks. myös Tall 2013, 402–403.) Näveri (2009, 52) on tiivistänyt käsitteellisen tiedon (ymmärtäminen) ja proseduraalisen sujuvuuden eli menettelytapoja koskevan tiedon eron englanninkielisillä sanoilla: “knowing what” ja “knowing how”.

Strateginen kompetenssi tarkoittaa sitä, että oppilas osaa laatia, kuvata ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Tämä lettikuvion säie edustaa siis ongelmanratkaisukykyä. Oppilaan tulee löytää ensin ongelma, muokata se ratkaistavaan muotoon ja ratkaista ongelma. Tällöin oppilas osaa myös valita parhaan mahdollisen menetelmän, vaikka tehtävän alussa se ei olisikaan hänelle vielä selvää. Näin ollen oppilas tunnistaa ongelman kannalta ne ominaisuudet, jotka ovat avainasemassa ongelman ratkaisussa. Strategisen kompetenssin puute näkyy joskus siinä, että oppilas osaa ratkaista koulussa erilaisia ongelmatehtäviä, mutta vastaavat tehtävät arkielämässä jäävät ratkaisematta. Tämä johtuu paljolti siitä, että koulussa ratkaistavat matemaattiset ongelmat ovat niin selkeästi määriteltyjä joko oppikirjan tai opettajan taholta, että ne eivät tuota vaikeuksia. Toisin sanoen ongelmien muotoilu ja laatiminen jäävät kouluoppimisesta usein puuttumaan juuri valmiiksi laadittujen tehtävien vuoksi. Arkielämän ongelmat voivat olla monimutkaisempia ja niiden ratkaisemiseen tarvitaan juuri strategista kompetenssia, jolloin ongelma täytyy ensin määritellä ja tunnistaa sitten menetelmä, jota käyttää. Tämä vaatii siis oppilaalta taitojen ja tietojen soveltamista, matemaattisten ongelmien suunnittelukykyä sekä ratkaisustrategioiden asianmukaista käyttöä ja rutiinista poikkeamista. Ratkaisustrategiat pitävät sisällään

myös edellä mainitut matemaattiset käsitteet ja menetelmät. (Kilpatrick ym. 2001, 146–148.)

Mukautuva päättely tarkoittaa sitä, että oppilas osaa ajatella loogisesti, reflektoida ja perustella ratkaisunsa matemaattisissa tehtävissä. Mukautuva päättely on matematiikan prosessien kaiken kasassa pitävä liima. Mukautuva päättely toteutuu siinä tapauksessa, että oppilas osaa harkita kaikkia mahdollisia vaihtoehtoja ja osaa perustella omat päätelmänsä. Mukautuva päättely ilmenee hyvin ongelmanratkaisutehtävissä, kun oppilas joutuu käyttämään sekä strategista kompetenssia, että käsitteellistä tietoa ja hän perustelee ratkaisunsa (Kuvio 3). Näiden lisäksi oppilaalla pitää olla proseduraalista sujuvuutta, jotta hän osaa valita oikean menetelmän. Jos oppilas on epävarma vastauksestaan, hänen ei välttämättä tarvitse tarkistaa vastaustaan opettajalta tai luokkakaverilta, vaan hän voi palata tehtävässä taaksepäin ja tarkistaa, ovatko hänen päätelmänsä oikeita. Oppilailta olisi tärkeää pyytää perusteluja tekemistään ratkaisuista. Silloin kun oppilas perustelee ja hioo päättelytaitojaan, hän parantaa samalla omaa käsitteellistä ymmärrystään. Kaikki nämä taidot kehittyvät pitkällä aikavälillä, joten kertaluontoinen selittäminen ja perustelu eivät kehitä kenenkään matemaattista kompetenssia. Uusia käsitteitä ja menetelmiä sekä perustelemista ja selittämistä on käytettävä jonkin aikaa, jotta ne ymmärretään. Lisäksi ne on opittava liittämään aiemmin opittuun tietoon. (Kilpatrick ym. 2001, 151–152.)

Yritteliäisyys matematiikan opiskelussa nähdään oppilaan pyrkimyksenä kokea matematiikka mielekkäänä, hyödyllisenä ja käyttökelpoisena oppiaineena. Oppilas myös uskoo, että ahkera matematiikan opiskelu tekee hänestä hyvän matematiikan osaajan. Jotta oppilaat voivat kehittää käsitteellistä ymmärrystä, strategista kompetenssia, proseduraalista sujuvuutta sekä mukautuvaa päättelyä, heillä täytyy uskoa myös siihen, että he ymmärtävät matematiikkaa, kykenevät oppimaan sitä ja heille on siitä hyötyä. Jotta yritteliäisyys kehittyisi, oppilaan on saatava kokemuksia matematiikan ymmärtämisestä ja käyttökelpoisuudesta. Lisäksi tunne siitä, että pitkäjänteisyys kannattaa, kehittää yritteliäisyyttä. Luottamus omiin kykyihin ja matematiikan osaamiseen kehittyy jo alkuopetuksessa. Jos oppilaalla on käsitys, että hän ei osaa eikä opi, käsitystä on hankalaa

muuttaa myöhemminkään. Opettajan tehtävä on luoda positiivisia mielikuvia ja asenteita matematiikan opiskelua kohtaan - asenteet ja mielikuvat siirtyvät myös oppilaisiin. Opettajan rohkaiseva asenne vaikuttaa myös positiivisesti matematiikan oppimiskokemukseen ja siihen, millaiseksi matematiikan oppijaksi oppilas kokee itsensä. Positiivinen ja keskusteleva ilmapiiri luokassa auttaa oppilaita suhtautumaan matematiikkaan positiivisesti. (Kilpatrick ym. 2001, 153–154.) Myös Tallin (2013, 403) mukaan opettajien tulisi olla tietoisia oppilaita eteenpäin kannustavista sekä oppilaille ongelmia aiheuttavista näkökohdista, jotka vaikuttavat heidän matemaattisen osaamisensa kehittymiseen tulevaisuudessa.

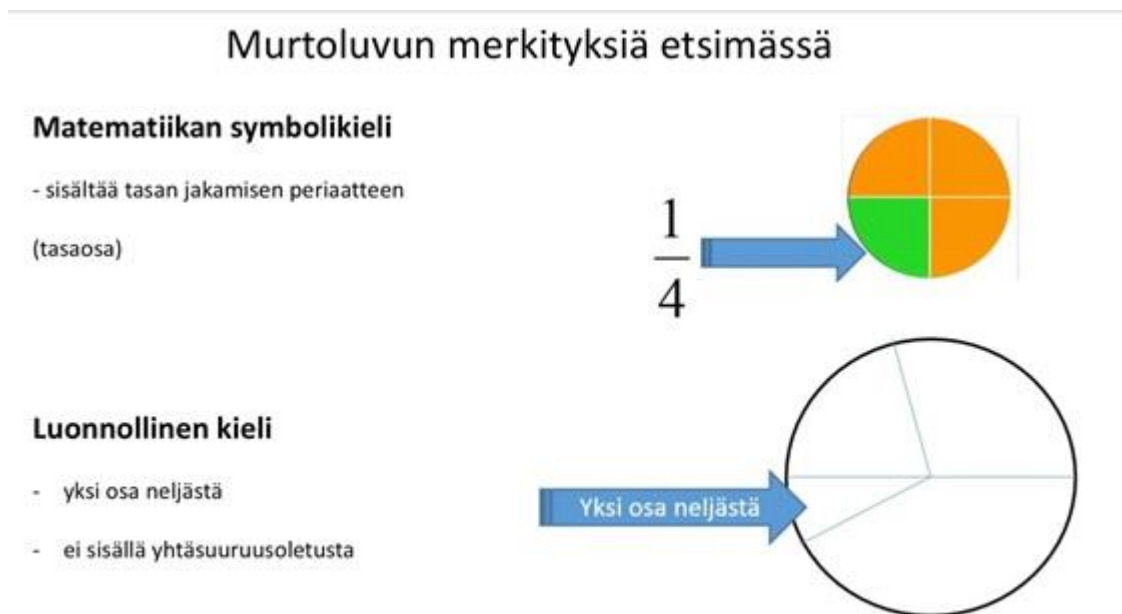
4.3 Murtoluvun käsite koulumatematiikan kontekstissa

Murtoluku tarkoittaa sitä, kuinka suuri jokin osa on kokonaisesta. Tämän vuoksi oppilaiden on erittäin tärkeää ymmärtää, mitä kokonainen tarkoittaa. (Bernoulli, Ketola & Tuominen 2010, 64.) Tutkimuksen mukaan koulumatematiikan haastavin opetettava asia on murtoluvut. Erityisesti vaikeuksia tuottaa siirtyminen luonnollisista luvuista murtolukumerkintöihin eli rationaalilukumerkintöihin. (Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 2.) Joutsenlahti, Perkkilä ja Tossavainen (2017) ovat tutkineet murtoluvun käsitteen opettamista suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa eri aikakausina. Murtoluvun määrittelyssä löytyy oppikirjoissa eroja sekä kirjoittajien että eri vuosikymmenten välillä. Murtolukua on määritelty samallakin aikakaudella eri tavoin. Kuitenkin viime vuosien oppikirjoissa murtoluvun käsitettä tarkastellaan melko yhdenmukaisesti. Suurimmat erot näkyvät kuvituksen käyttämisessä laskutoimitusten havainnollistamisessa. Eri aikakausien oppikirjoista löytyy yksi yhteinen tekijä: proseduraalisen ajattelun korostuminen murtoluvun käsitteen opettamisessa. (Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen 2017, 4, 10.) Proseduraalisella ajattelulla matematiikassa tarkoitetaan matemaattisten toimintamallien käyttämistä joustavasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti sekä matemaattisten operaatioiden käyttämistä ongelmien ratkaisemisessa (Kilpatrick ym. 2001, 143–144; Perkkilä 2019).

Keskitymme tässä tutkielmassa uuden ajan oppikirjoihin eli viimeisimmän opetussuunnitelman (2014) mukaisiin oppikirjoihin, jotka on tehty 1980-luvulta eteenpäin ja niissä on ollut useampi kirjan tekijä sekä niissä on huomioitu ainedidaktinen tutkimus. Uuden ajan oppikirjoissa yhdistävänä tekijänä esiintyy konseptuaalinen käsitekuva murtoluvusta. (Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen 2017, 3, 10.) Konseptuaalisella eli käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan matemaattisten käsitteiden ja niiden välillisten yhteyksien oppimista sekä tietorakenteiden kehittymistä aiemmin opitun päälle (Kilpatrick ym. 2001, 137–138; Perkkilä 2019.) Joutsenlahden, Perkkilän ja Tossavaisen (2017, 10) oppikirjoja vertailevasta tutkimuksesta ilmenee, että murtoluvut opetetaan edelleen laskemisen kautta uusissakin oppikirjoissa. Heidän mukaansa murtolukujen opetuksessa olisi tärkeää tuoda esiin lukujen välisen suhteen ilmoittamista ja monipuolisemman algebrallisen rakenteen kehittymistä. Eroavaisuudet näkyvät selvimmin oppikirjojen välillä laskutoimitusten havainnollistamiseen tarkoitettujen kuvituksen määrässä. Vaikka tutkituissa oppikirjoissa korostuikin proseduraalinen ajattelu, on murtolukuja kuitenkin käsitelty melko monipuolisesti.

Tallin (1994) mukaan murtoluvun käsite voidaan ilmaista eri tavoilla käyttämällä ilmaisusta käsiteluokkia. Esimerkiksi luvun $\frac{1}{2}$ objektiivinen käsite voidaan ilmaista verbaalisena ”puoli”, kuvallisena tai symbolisena. Operaatiokäsite $\frac{1}{2}$ on ”puolet jostakin”. $\frac{1}{2}$ suhdekäsite voidaan ilmoittaa lukujen 1 ja 2 suhteen tai jakolaskuna 1:2. Suhdeajattelun opettamiseen ja oppimiseen tulisi panostaa paljon enemmän kuin nykyään, koska se on avainkäsite matematiikan opetuksessa alakoulusta lähtien. Murtolukukäsitteen oppimista voidaan tukea, jos opetuksessa tuodaan samanaikaisesti esille murtoluvun eri käsiteluokat. Koska murtolukukäsitteen ymmärtäminen vaatii monien eri merkitysten automatisoitunutta prosessointia, näin ollen murtolukujen oppiminen saattaa olla haastavaa. (ks. myös Näveri 2009, 64–65.) Jos oppilaalla on hyvät aritmeettiset pohjataidot, murtoluvuilla operointi on hänelle helpompaa (Tall 2013, 97). Matematiikan symbolikielen ja luonnollisen kielen ristiriitaa selvitetään Kuviossa 4 luonnollisen kielen ja symbolisen kielen ilmaisut voivat olla ristiriitaisia. Esimerkiksi neljään osaan jakaminen luonnollisella kielellä ei välttämättä tarkoita yhtä suuriin osiin

jakamista toisin kuin symbolikielellä merkintä edellyttää yhtä suuriin osiin jakamista. (Joutsenlahti & Perkkilä 2019.)



Kuvio 4 Matematiikan symbolikielen ja luonnollisen kielen ristiriita (Joutsenlahti & Perkkilä 2019)

Joutsenlahden ja Perkkilän (2019) mukaan murtoluvun käsitteellä on monenlaisia merkityksiä. Kokonainen voidaan jakaa osiin eri suuruisina osina (Kuvio 4). Matematiikan symbolikielellä murtoluvuista puhuttaessa, jaetaan kokonainen aina tasan yhtä suuriin osiin. Kun taas puhekielessä osiin jakaminen ei sisällä yhtäsuuruusoletusta. Edelleen oppikirjoissa murtoluvut ja niiden laskutoimitukset annetaan valmiina malleina, joita oppilaat laskevat mekaanisesti jäljitellen. Tästä syystä oppilaiden omalle ymmärrykselle ei jää murtolukujen opiskelussa juurikaan mahdollisuutta. Heidän mukaansa huomionarvoista on se, että murtolukujen opettamisessa ei kiinnitetä tarpeeksi huomiota kokonaiseen, koska kokonainen voi ilmetä erilaisena matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä. Kokonaisen määrittelemisen ei ole yksiselitteistä, sillä se voi olla esimerkiksi omena, luokan kaikki 20 oppilasta, pizza tai piirakkakuvio. Kokonaisen käsitteen opettamisen vajavuus johtuu usein siitä, että oppikirjoissa

siirrytään murtolukumerkintään hyvin nopeasti. Murtolukumerkintä on aina kontekstisidonnainen. Merkintä $\frac{2}{3}$ voi tarkoittaa esimerkiksi kahta kolmasosaa jostakin kokonaisesta, kaksi kolmesta, kahden suhde kolmeen tai kahta jaettuna kolmella. Oppikirjoissa mennään murtolukumerkintöihin yleensä yhden käsitteen kautta, vaikka sillä on monia eri merkityksiä.

5 TUTKIMUSTEHTÄVÄ

Tutkimustehtävä

Murtoluvun käsitteen opettaminen ja oppiminen on haasteellista, koska murtolukujen yhteydessä siirrytään luonnollisista luvuista rationaalilukuihin (Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 2). Lisäksi murtoluku linkittyy suhteen ilmoittamiseen, desimaalilukuihin sekä jakolaskuun. Tulevina luokanopettajina meitä kiinnostaa selvittää, miten murtoluvun käsitettä opetetaan eri matematiikan oppikirjoissa, mikä on murtolukukäsitteen opetuksen ajankohta ja miten sitä pohjustetaan. Lisäksi haluamme saada selville, miten kokonaisen käsite otetaan huomioon opettaessa murtolukukäsitettä. Tutkimuksessamme tarkastellemme kolmea eri kolmannen luokan matematiikan oppimateriaalia murtolukujen opettamisen näkökulmasta. Tutkimuksemme tutkimuskysymyksiksi on valittu murtolukujen opettamiseen liittyviä aiheita. Tutkimusmenetelmänä käytämme laadullista teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä. Tutkielmassamme tutkitaan oppikirjamateriaaleista seuraavia asioita:

1. Mikä on murtolukujen opetuksen ajankohta eri kolmannen luokan matematiikan oppikirjoissa?
2. Miten murtoluvun käsitettä pohjustetaan?
3. Miten murtolukujen opetus etenee?
4. Miten kokonaisen käsite tulee esille oppikirjoissa?
5. Millaiseen toimintaan opettajan oppaat opettajia ohjaavat?

6 TUTKIMUSMENETELMÄ

Valitsimme tutkimukseemme tutkimusmenetelmäksi teoriaohjaavan sisällönanalyysin, koska tutkimuksemme koskee oppikirjamateriaalivertailua. Sisällönanalyysi on tutkimusmetodi, jonka avulla tutkittavasta aineistosta voidaan tuottaa koodeja ja kategorioita (Margolis & Zunjarwad 2018, 620). Toisin sanoen sisällönanalyysi on merkitysten kuvaamista järjestelmällisesti määrittelemällä tutkittava aineisto eri koodausluokkiin, jotka luovat kehyksen analyysille. Tämä kehys kattaa kaikki aineiston kuvauksessa ja tulkinnessa esiintyvät merkitykset. (Schreier 2012, 1.) Laadullisella sisällönanalyysillä pyrimme tutkimusaineistomme selkeyttämiseen ja uuden tiedon tuottamiseen. Tarkoituksenamme on muodostaa tiivistetty, totuudenmukainen ja mielekäs kuvaus tutkittavasta aineistosta. (Eskola ja Suoranta 2005, 137; Salo 2015, 170.) Filteri eli näkökulma määrittää sen, mitä aineistosta etsitään ja mitä siitä löydetään (Kananen 2017, 141). Kvantitatiivinen sisällönanalyysi on systemaattista, joustavaa ja uutta tietoa tuottavaa. Sisällönanalyysi voi olla joko määrällistä tai laadullista analyysia. (Schreier 2012, 5, 16.)

Sisällönanalyysissa analysoidaan tekstiä, samoin kuin diskurssianalyysissä. Erona näiden kahden menetelmän välillä on se, että sisällönanalyysissä etsitään tekstin merkityksiä, kun taas diskurssianalyysi keskittyy tutkimaan sitä, miten näitä merkityksiä tuotetaan tekstissä. Sisällönanalyysissä kuvataan tai dokumentoidaan aineistoa sanallisesti. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 117, 119.) Sisällönanalyysi on mahdollista tehdä aineistolähtöisesti, teorialähtöisesti tai teoriaohjaavasti. Kahden ensimmäisen välinen ero on analyysin ja luokittelun pohjautuminen joko aineistoon tai teoriaan. Teoriaohjaavassa analyysissä aineiston analyysi ei pohjautu teoriaan, vaan teoreettinen viitekehys toimii luokittelun ja analyysin tukena. Lisäksi analysoitavat yksiköt nousevat aineistosta. Aineistolähtöisessä ja teoriaohjaavassa analyysissä tutkittavan ilmiön käsitteen määrittely on vapaampaa kuin teorialähtöisessä, jossa teoreettinen tausta ohjaa aineiston hankintaa sekä tutkittavan ilmiön määrittelyä. (KvaliMOTV 7.3.2, Tuomi & Sarajärvi 2018,

108–112.) Tutkimuksemme on rakennettu teoriaohjaavan analyysin varaan, koska se soveltuu hyvin oppikirjavertailuun.

6.1 Laadullinen tutkimus

Laadullinen tutkimus on ymmärrykseen ja selittämiseen pyrkivää tutkimusta. Siinä viitataan muihin saman aihepiirin tutkimuksiin sekä teoreettiseen viitekehukseen. Laadullisissa tutkimuksissa aineisto pelkistetään havaintojen pohjalta olennaisiksi luokiksi eli kategorioiksi. "Analyysimahdollisuuksiltaan laajaa aineistoa, kuten tekstimassaa, tarkastellaan vain tietyistä, teoreettis-metodologisesti määritellyistä näkökulmista." (Alasuutari 2011, 51.) Tutkielman tarkoituksena on paljastaa uusia näkökulmia tutkittavasta asiasta. Toisin sanoen laadullisessa tutkimuksessa käytetään induktiivista analyysia, jossa lähtökohtana on aineiston tarkastelu ei niinkään teorian tai hypoteesien testaaminen. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997, 165.) Laadullisessa tutkimuksessa pyritään löytämään koko aineiston kattavia säännönmukaisuuksia (Alasuutari 2011, 41).

Prosessi

Laadullinen eli kvalitatiivinen tutkimus voidaan määritellä prosessiksi. Ensiksi laadullisessa tutkimuksessa yhtenä tekijänä on aina inhimillisyys, koska aineiston kerääjänä ja analyysin tekijänä toimii tutkija itse. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa aineistoon liittyvät näkökulmat ja tulkinnat kehittyvät tutkimusprosessin edetessä ja samalla sitä voidaankin luonnehtia oppimisprosessiksi. Toiseksi tutkimuksen eri vaiheet eivät ole välttämättä rakennettavissa selkeiksi vaiheiksi etukäteen, koska tutkimuksen edetessä voivat aineistonkeruuta tai tutkimustehtävää koskevat ratkaisut muuttua. Laadullisen tutkimuksen ominaispiirre onkin sekä tutkittavaan tapaukseen liittyvien asioiden paljastuminen vähitellen että samanaikaisesti tutkimusmenetelmällisten ratkaisujen täydentyminen. Tällä tarkoitetaan sitä, että laadullisessa tutkimuksessa sen eri elementit, esimerkiksi tutkimustehtävä, teorian muodostus, aineiston keruu ja -analyysi kehittyvät ja muotoutuvat joustavasti, toisiinsa kietoutuen, tutkimuksen edetessä. (Kiviniemi 2018, 73). Saman asian ovat myös todenneet Eskola ja Suoranta (2005, 16, 51).

Heidän mukaansa tulkintaa tapahtuu koko tutkimusprosessin ajan ja tutkimusprosessin järjestäminen toisiaan seuraaviin vaiheisiin ole aina mahdollista. Aineistonkeruun aikana voidaan joutua muuttamaan tutkimussuunnitelmaa tai tutkimusongelman asettelua. Lisäksi tutkielman kirjoittamisen aikana voidaan joutua palaamaan alkuperäiseen aineistoon. He korostavat sitä, että aineiston keruu, analyysi, tulkinta ja raportointi kietoutuvat laadullisessa tutkimuksessa toisiinsa. Laadullinen tutkimus antaa tilaa aineistolle eli tutkijan on mahdollista palata analysoinnin aikana tarkentamaan asettamiaan tutkimuskysymyksiä huolimatta siitä, että tutkija on valinnut tietynlaisen näkökulman ja teoriapohjan. Keskeistä laadullisessa tutkimuksessa on se, että sen avulla saadaan tutkimuksen kohteena olevasta ilmiöstä ymmärrettävä ja järkevä tulkinta. (Puusa & Juuti 2011, 49.) Pyrimme saamaan selkeän kuvan oppimateriaalivertailusta teoriaohjaavan laadullisen sisällönanalyysitutkimuksen avulla.

Rajaaminen

Laadullisessa tutkimuksessa tutkimusasetelmien rajaaminen on tärkeää, koska tutkija ei voi hyödyntää tutkimuksessaan kaikkea sitä mielenkiintoista aineistoa, joka tutkimuksen aikana nousee aineistosta esille. Huomioitavaa on, että rajaaminen on aina lähtöisin tutkijan omista intresseistä ja niistä näkökulmista, joita tutkija haluaa korostaa eli rajaamisessa on aina kyse tulkinnallisesta rajauksesta. Rajatessaan aineistoa, tutkija nostaa esille aineistosta nousevan ydinsanomansiiis ne asiat, jotka tutkija haluaa tulkintansa kautta nostaa aineistosta esille. Kun aineistosta nousee esille merkittäviä kohtia, tulee tutkijan kerätä niistä lisää materiaalia (Kiviniemi 2018, 76, 81.) Kysymyksenasettelusta ja siihen liittyvästä teoreettisesta viitekehystä tarkastellaan aineistoa vain niiden kannalta olennaisista näkökulmista. Näkökulmaa vaihtamalla aineistosta voidaan löytää erilaisia tulkintoja samasta aineistosta. (Alasuutari 2011, 40.) Rajasimme tutkimuksemme koskemaan kolmannen luokan matematiikan oppikirjojen murtolukujaksoa.

Joustavuus

Laadullinen tutkimusprosessi etenee hermeneuttisen kehän mukaisesti, mikä selittää sen joustavuutta. Prosessissa tutkijan esiymmärrys tutkittavasta aiheesta

syventyy kirjallisuuden avulla ja se saattaa muuttua, näin ollen tutkija voi muuttaa alkuperäistä käsitystään asiasta. Tutkija saattaa tarkastella tutkimuskysymyksiä ja tutkimuksen tavoitteita uudelleen eli hän palaa tutkimuksen alkuasetelmaan. Toisin sanoen tutkimusprosessi elää ja muovautuu koko ajan, kunnes tutkijalle on mahdollista johtopäätösten tekeminen aineiston pohjalta ja arvioimaan työtään kriittisesti. (Eskola & Suoranta 2005, 51.) Tutkimusprosessi muovautui analyysin edetessä. Jouduimme palaamaan ja muuttamaan aineistosta nousseita käsitteitä useaan kertaan, kunnes ne kattoivat koko aineiston.

Hypoteesittomuus ja objektiivisuus

Hypoteesittomuus tarkoittaa laadullisessa tutkimuksessa sitä, että tutkijalla ei ole tutkittavasta asiasta, eli tutkimuskohteesta tai tuloksista, ennakko-oletuksia. Tutkijan tulisikin oppia tutkimuksen aikana uutta ja jopa yllättyä tutkimuksen tuottamista tuloksista. (Eskola & Suoranta 1998, 19–20.) Omassa analyysissämme pyrimme katsomaan aineistoja objektiivisesti ja avoimin silmin ilman ennakko-oletuksia tutkimuksen luotettavuuden parantamiseksi.

6.2 Laadullisen sisällönanalyysin eri muodot

Silloin kun laadullisessa tutkimuksessa lähdetään liikkeelle ilman ennakko-oletuksia tai määritelmiä, puhutaan aineistolähtöisestä sisällönanalyysistä. Yksinkertaisimmillaan se voi tarkoittaa teorian rakentumista empiirisestä aineistosta käsin. Aineistolähtöistä analyysia voidaan käyttää tietyn ilmiön perustiedon tai perusolemuksen selvittämiseksi. (Eskola 2018, 212; Eskola & Suoranta 2005, 19.) Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä aineisto luokitellaan sen mukaan, mitä sieltä löydetään (Kananen 2017, 141). Aineistolähtöinen laadullinen eli induktiivinen, sisällönanalyysi voidaan kuvata prosessina (Kuvio 5), jossa on karkeasti kolme eri vaihetta:

1. pelkistäminen eli aineiston redusointi, jossa aineistosta karsitaan pois kaikki epäolennainen
2. ryhmittely eli aineiston klusterointi, jossa aineistosta etsitään käsitteitä, jotka ovat samankaltaisia ja/tai toisistaan eroavia

3. teoreettisten käsitteiden luominen eli abstrahointi, jossa olennainen tieto erotetaan ja sen perusteella muodostetaan teoreettisia käsitteitä. (Tuomi & Sarajärvi 2018, 122–125.)

Tutkimuksemme teoriaohjaava sisällönanalyysi on rakentunut edellä mainitulla tavalla kolmen vaiheen kautta.

Induktiivisella tutkimusotteella tarkoitetaan teorian ja käytännön suhdetta, jossa edetään käytännöstä teoriaan. Kun taas deduktiivinen tutkimusote tarkoittaa etenemistä teoriasta käytäntöön. (Kananen 2017, 41.) Teoriapohjaisessa sisällönanalyysissä (deduktiivisessa) luokittelussa käytetään pohjana teoriaa, jonka avulla aineistoa tutkitaan (Kananen 2017, 141–142). Tässä menetelmässä aineiston analyysin luokittelussa käytetään aikaisempia käsitejärjestelmiä esimerkiksi teorioita tai malleja eli teoria kytketään todellisuuteen. (Metsämuuronen 2008, 25; Tuomi & Sarajärvi 2018, 127). Teoriaohjaava sisällönanalyysi (abduktiivinen päättely) on aineistolähtöinen, melko harvinainen metodi, jossa abstrahointi vaiheessa empiirinen aineisto yhdistetään teoreettisiin käsitteisiin eli aineiston analyysissä löytyy yhteys teoriaan (KvaliMOTV 2.3.2.3 Tuomi & Sarajärven mukaan 2002, 98; Tuomi & Sarajärvi 2018, 121, 133). Analyysissämme yhdistyy teoriapohjassa esiin tulleet käsitteet aineistosta nousseiden käsitteiden kanssa.

7 AINEISTON ANALYYSI JA TULKINTA

Sisällönanalyysi on systemaattinen metodi, jolla kuvataan laadullisen materiaalin sisältöä luokittelemalla materiaali koodausluokkiin (Schreier 2012, 1). Sisällönanalyysi voi olla sekä aineistolähtöistä tai teorialähtöistä. Käytimme tutkielmassamme aineistolähtöistä analyysiä, jossa huomioimme tutkielmamme teoriataustan. Seitamaa-Hakkaraisen (2019) mukaan usein luokittelurunko syntyy sekä aineiston että teoreettisen käsitteellistämisen yhteistyönä. Sisällönanalyysissä kuvataan kirjoitettua ja puhuttua kielen muotoa ja sisältöä sekä korostetaan tekstin sisällöllisiä ja laadullisia merkityksiä. Sellaisissa tutkimuksissa, joissa pyritään kuvaamaan tutkimuksen aineistoa esimerkiksi sanallisesti (käsitteellisesti) tai tilastollisesti, voidaan käyttää sisällönanalyysiä. Myös Schreierin (2012, 3) mukaan kvalitatiivista sisällönanalyysia voidaan käyttää, kun aineisto kootaan toisista lähteistä esimerkiksi dokumenteista.

7.1 Tutkimusaineiston esittely ja metodin perustelua

Tutkielmassamme vertailemme kolmea eri kolmannen luokan matematiikan opetuksen oppimateriaalia, jotka olemme valinneet kouluissa yleisesti käytössä olevista kahdesta oppikirjasta sekä yhden harvemmin käytetystä unkarilaista Varga-Neményi -opetusmenetelmää edustavan oppikirjan. Päädyimme valitsemaan tähän tutkimukseemme yleisesti käytössä olevista oppikirjoista Kympin ja Tuhattaiturin sekä unkarilaisen Varga-Neményi -opetusmenetelmän Matematiikka -oppikirjan. Kaikissa oppimateriaaleissa on erikseen oppikirjat ja opettajan oppaat sekä syys- että kevätlukukaudelle. Oppikirjojen kuvitus on toteutettu värikuvina. Jokaisesta kirjasarjasta saimme analysoitavaksi oppilaan kirjat. Opettajan oppaiden kohdalla Tuhattaiturin opettajan materiaali on sähköisessä muodossa, Kympin ja VaNe-opetusmenetelmän mukaiset opettajan oppaat ovat kirjoina.

Kymppi 3 kevät

Kymppi-materiaalissa kevätlukukausi muodostuu viidestä eri jaksosta, joista ensimmäisessä käsitellään murtoluvun käsitettä. Murtolukukäsitteen jaksossa on kahdeksan eri lukua, jotka koostuvat kahdesta peräkkäisestä aukeamasta. Jos luvussa on uutta opeteltavaa asiaa, ensimmäinen aukeama alkaa opetusruudulla. Ensimmäisen aukeaman tehtävät ovat helposti sovellettavia perusharjoituksia, jotka kaikkien oppilaiden tulisi ehtiä tehdä. Vihkotehtävät on merkitty ensimmäisen aukeaman alaosaan. Toisella aukeamalla jatketaan ensimmäisen aukeaman harjoittelua. Aukeaman toisella puolella on sivun yläosassa vaativampia tehtäviä ylöspäin eriyttämiseen ja alaosassa perusharjoitteluun sopivia kotitehtäviä. Oppilaankirjan yhteydessä on liitteenä pahviset murtokakut.

Opettajan oppaassa eli Open Kymmissä seurataan oppilaan kirjan aukeamia vastauksineen. Luvun ensimmäisellä aukeamalla on sivun yläosassa lyhyt yksittäinen tarina, jonka lopussa on kirjasarjassa esiintyvään perheeseen liittyvä matematiikan kysymys. Toiselta aukeamalta löytyvät luvun tavoitteet, toiminnallisia sekä suullisia harjoituksia, päässälaskuja ja pohdintatehtäviä. Toiminnallisissa tehtävissä harjoitustyypit toistuvat ja niihin liittyy aina myös keskustelu. Opettajan valittavaksi jää, mitä harjoituksia hän käyttää. Jälkimmäiseltä aukeamalta löytyy viittaus monisteisiin, pikatesteihin ja kokeisiin. Lisäksi opettajan on mahdollista käyttää digiopetusmateriaalia (vaatii lisenssin).

Tuhattaituri 3b

Tuhattaiturin materiaaleissa tässä tutkielmassa on käytössä ainoastaan sähköinen opettajan opas. Tuhattaituri-materiaalin kevätlukukausi koostuu neljästä jaksosta, joista murtolukuja käsitellään toisessa jaksossa. Murtolukujaksossa on kymmenen eri lukua, jotka koostuvat kahdesta peräkkäisestä aukeamasta. Ensimmäisellä aukeamalla on perustehtävät ja toisella aukeamalla niin sanotut ”taituritehtävät”. Vasemmanpuoleisella sivulla olevat taituritehtävät ovat perustehtävien kaltaisia lisäharjoituksia. Oikeanpuoleisella sivulla olevat tehtävät ovat hieman haastavampia ja vaativat soveltamaan opittua ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Murtolukujaksoson toiseksi viimeinen luku on

”toimintatunti”, jossa kerrataan ja harjoitellaan opittuja asioita pelien tai leikkien avulla. Viimeisenä on luku ”tähtipysäkkiaukeama”, jossa myös kerrataan jakson keskeisiä sisältöalueita. ”Tähtipysäkin” ensimmäistä aukeamaa voi käyttää formatiivisena kokeena ja se päättyy itsearviointiin. Lisäksi opettaja voi arvioida oppilaan työskentelyä lyhyesti. Opettajan ohjeiden ja oppilaan itsearvioinnin pohjalta oppilas valitsee seuraavista sivuista joko yhden, kahden tai kolmen tähden Tähtitehtävät. Tähtitehtävien jälkeen on Tiivistelmä, josta oppilas voi kerrata jakson asioita. Jakson lopussa on vielä Taitorastit, jossa myös kerrataan jakson asioita. Liitteenä oppilaan kirjan välissä on pahviset murtokakut.

Tuhattaiturin tuntikokonaisuudet alkavat opetusruudun tarkastelusta, jossa opetetaan uusi asia. Jokaiselle tuntikokonaisuudelle on erilaisia toimintaehdotuksia, jotka sisältävät leikkiä, laskutarinoita ja konkreettisten välineiden käyttöä matematiikan oppimisessa. Lisäksi toimintaehdotuksista löytyy vinkkejä matematiikan integroimiseen muihin oppiaineisiin. Lisämateriaaleista löytyy erityisiä lisätehtäviä. Opettajan materiaali sisältää myös digiopetusaineiston. Opettajan oppaassa on näkyvillä oppilaan kirjan aukeamat oikeine vastauksineen. Lisäksi sivuilla on viittaukset liitteisiin ja monisteisiin, joita kyseisessä luvussa voidaan käyttää.

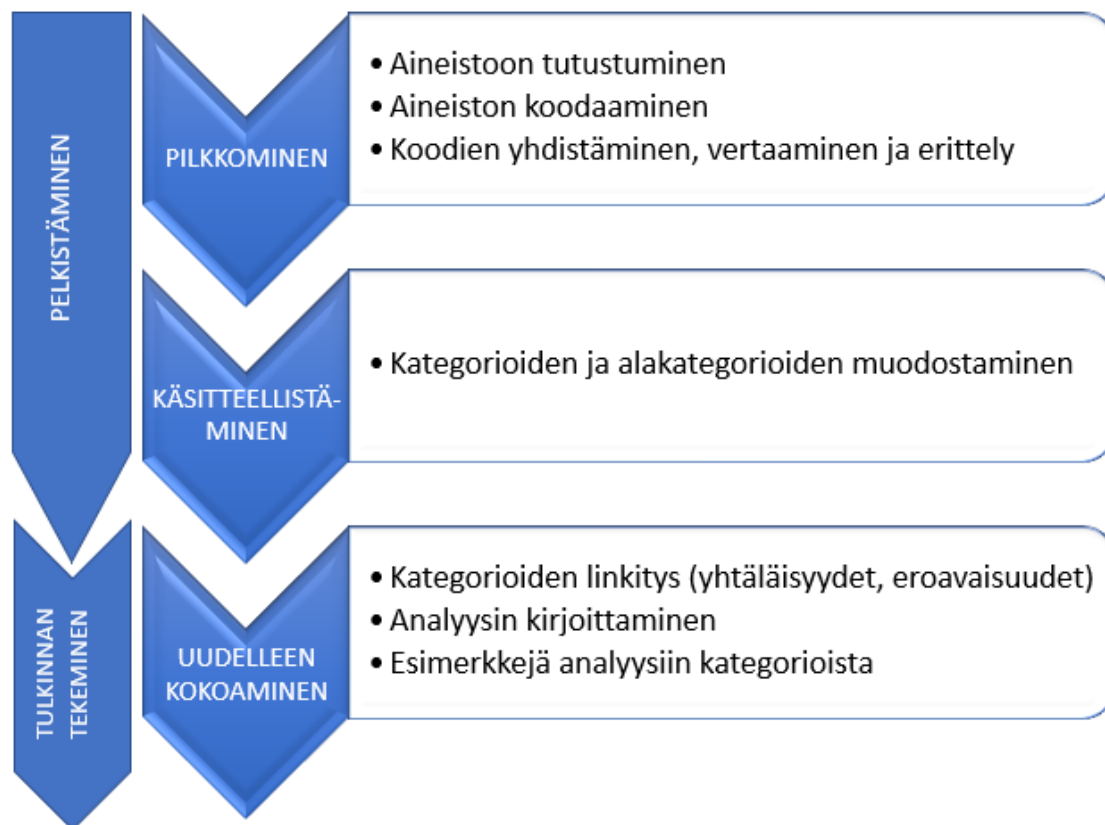
Matematiikkaa 3b

Kevätlukukausi sisältää kuusi erillistä jaksoa, joista murtolukuja käsitellään viidennessä jaksossa. Oppilaan kirjasta ei yksin käytettynä selviä, miten tehtävät tulisi tehdä, koska tehtävät aloitetaan yhdessä, opettajan johdolla ja toiminnallisesti. Oppilaan kirjan tehtävät tehdään siis pääsääntöisesti toimintavälineiden avulla pareittain tai ryhmissä. Oppilaan kirjaa käytetään yhdessä opettajan oppaan kanssa. Opettajan oppaassa eli Opettajan Tienviitassa ensimmäisellä aukeamalla nimetään ne välineet, joita oppilaat tarvitsevat matematiikan oppitunneilla. Lisäksi aukeamalla on pitkä lista erilaisista opetuksessa käytettävistä havaintovälineistä. Samalla aukeamalla kerrotaan, miten murtolukuihin on tutustuttu alkuopetuksessa sekä mitä murtoluvun opetus pitää sisällään kolmannella luokalla. Opettajan Tienviitassa on kuvattu oppilaan kirjan aukeamat

vastauksineen. VaNe-opetusmenetelmän Opettajan Tienviitta ohjaa opettajaa lähestymään opetettavaa asiaa konkreettisten välineiden ja toiminnallisuuden kautta.

7.2 Aineiston analyysin prosessin kuvausta

Aineistolähtöinen sisällönanalyysi noudattaa kvalitatiivisen tutkimuksen logiikkaa, jossa aineiston analysointi tapahtuu syklisesti vuorovaikutuksessa aineiston keräämisen ja analysoinnin kanssa. (Seitamaa-Hakkarainen 2019.)



KUVIO 5 Sisällönanalyysin vaiheet (mukailtu Alasuutarin 2011, 38–48; Kopan, laadullisen tutkimuksen mukaan)

Laadullisessa sisällönanalyysissä aineistoa tarkastellaan pääsääntöisesti kokonaisuutena. Alasuutarin (2011, 39–40, 44) mukaan laadullinen analyysi voidaan

jakaa kahteen eri vaiheeseen, jotka nivoutuvat toisiinsa. Nämä vaiheet ovat havaintojen pelkistäminen ja arvoituksen ratkaiseminen. Analyysin ensimmäinen vaihe eli havaintojen pelkistäminen jaetaan kahteen osaan, jotka ovat pilkkominen ja käsitteellistäminen. Aineiston tarkastelussa kiinnitetään huomio kysymyksen asettelun kannalta olennaisiin asioihin, jolloin aineistosta löytyy erilaisia "raakahavaintoja". Aineistosta pelkistetään ilmiöitä kuvaavia löydöksiä, joilla on yhteisiä ominaisuuksia. Seuraavassa vaiheessa suoritetaan havaintomäärän karsimista yhdistelemällä havaintoja, jossa raakahavaintoja yhdistetään pienemmäksi joukoksi etsimällä niistä yhteisiä piirteitä. Yhdistämisen lähtökohtana on löytää samaa tarkoittavat asiat saman kategorian alle. Analyysin viimeisestä vaiheesta voidaan käyttää nimitystä arvoituksen ratkaiseminen. Laadullisessa tutkimuksessa se tarkoittaa tulkinnan tekemistä tutkimuksesta esiinnoitusten merkitysten pohjalta. Toisin sanoen aineistosta nousseita havaintoja selitetään ja yritetään tehdä lukijalle selvemäksi. Lisäksi havaintoja suhteutetaan teoreettiseen viitekehykseen ja niitä verrataan aiempiin tutkimuksiin.

Aloitimme tutkittavan aineiston analysoinnin. Aluksi kävimme aineistoa läpi yhdessä sekä erikseen useita kertoja löytääksemme yhteisymmärryksen aineistosta tutkimuskysymysten pohjalta esille tulevista havainnoista. Seuraavassa vaiheessa luokittelemme aineiston pohjalta kirjaamiamme havaintoja tutkimuskysymysten alle. Vertailimme ja etsimme aineistosta yhtäläisyyksiä, joita koodasimme kategorioiksi. Tämän vaiheen toteutimme tutkijatriangulaationa eli molemmat tutkijat tekivät kategoriat ensin itsenäisesti, jonka jälkeen vertailimme löydöksiä. Toimimme näin, koska tällä toimenpiteellä lisäsimme tutkimuksemme luotettavuutta. Muodostimme molempien havaintojen pohjalta yhteisen näkemyksen kategorioista ja alakategorioista. Analyysin viimeisessä vaiheessa palasimme tarkastelemaan teorian ja analyysistä nousseiden käsiteluoikkien yhteneväisyyksiä sekä eroavaisuuksia. Tämän pohjalta avaamme tutkimustulokset sekä kirjoitamme tutkielmamme pohdinnan, jossa peilaamme saatuja tuloksia teoriaan.

7.3 Aineiston analyysin kuvausta

Tässä luvussa kerromme ja kuvaamme, miten olemme toteuttaneet analyysin sekä soveltaneet kvalitatiivista sisällönanalyysiä tutkielmassamme sekä sen kolme eri vaihetta: koodaamista, käsiteluokkien muodostamista ja tulkintojen tekemistä (Kuvio 5). Yläkategorioiksi valitsimme tutkimuskysymyksemme, jotka ovat: 1. Murtolukukäsitteen opettamisen ajankohta, 2. Murtolukukäsitteen pohjustaminen, 3. Murtolukukäsitteen opetuksen eteneminen kolmannella luokalla, 4. Miten kokonaisen käsite avataan murtolukukäsitteen opettamisen yhteydessä ja 5. Millaiseen toimintaan opettajan oppaat opettajia ohjaavat. Ensimmäisessä vaiheessa tutustuimme analysoitavaan materiaaliin, jonka kävimme läpi kolmeen kertaan löytääksemme sieltä tutkielmallemme oleellisia käsitteitä ja merkityksiä. Samalla karsimme aineistosta pois merkityksettömät käsitteet ja kirjoitimme merkitykselliset käsitteet liimalapuille, jotka sijoitimme isolle fläppipaperille. Koodaamisen tuloksena aineistosta nousi selkeästi esille kolme alakategoriaa, jotka ovat *Opetusruutu*, *Oppilaan tehtävät ja Oppilaan työtavat*. Opetusruudulla tarkoitamme jokaisen aukeaman alussa oppilaan kirjassa olevaa rajattua aluetta, jossa uusia asia opetetaan malliesimerkeillä. Tätä opettamisen lähtökohdtaa voidaan kutsua *määritelmälähtöiseksi* opettamisen tavaksi (ks. Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius 2018, 352). Oppilaan tehtävä -koodiin kuuluvat aukeaman tehtävyyppien kuvailu ja Oppilaan työtavat -koodi kertoo, mitä oppilas tekee aukeaman tehtävissä.

Matematiikkaa 3b kohdalla, joka perustuu VaNe-opetusmenetelmään, jouduimme miettimään erilaisia ratkaisuja koodausvaiheeseen, koska oppilaan kirjojen rakenne oli erilainen verrattuna Kymppi 3 kevään ja Tuhattaituri 3 b:n kirjoihin. Rajataksemme aineistoa, päätimme analysoida Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3 b kirjasarjoista vain peruslaskuaukeamat, jotka yleensä jokainen oppilas tekee. Matematiikkaa 3 kirjan kohdalla opettamisen struktuuri poikkesi Kymppi- ja Tuhattaituri -materiaaleista, koska uuden asian opettaminen pohjautuu aina ennen kirjan tehtävien tekemistä konkretiaan (ks. luku 2.4). Päätimme analysoida Matematiikka 3 oppilaan kirjan aukeama kerrallaan, vaikka murtoluvun

opettamisen jaksoa ei ole jaettu erillisiin kappaleisiin (tunti/aukeama -tyyppi-sesti). Päädyimme tähän ratkaisuun selkeyttääksemme koodausta, koska oppilaan kirjoissa Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa on selkeästi perusaukeamat sekä niihin liittyvät lisätehtävät. Koodaustaulukoiden (1, 2 ja 3) lisäksi päätimme lisätä kuvat jokaisen analysoitavan kirjan ensimmäisestä murtolukua käsittelevästä aukeamasta (Kuviot 6, 7 ja 8) selkiyttääksemme koodauspolkumme käsitteiden muodostamista. Analyysissä vertailimme pääosin oppilaan kirjoja, mutta viimeisen tutkimuskysymyksen pohjalta tarkastelimme myös opettajan oppaita.

Kymppi 3 kevät koodaaminen

Kerromme tässä kappaleessa esimerkkinä analyysiprosessistamme Kymppi 3 kevät -kirjan koodausvaiheet. Ensimmäisenä otimme tarkastelun kohteeksi kolmannen luokan Kymppi-materiaalin. Laitoimme kirjat avoimena pöydälle ja lähdimme tutkimaan oppilaan kirjoja sekä opettajan oppaita murtoluvun kohdalta aukeama kerrallaan. Yläkategoriat muodostuivat tutkimuskysymyksistämme. Löysimme oppimateriaalista erilaisia merkityksiä, joista muodostimme taulukon alakategorioita (Tauluko 1.). Alakategorioiksi nousi kolme eri, kaikille oppikirjoille yhteistä tarkasteltavaa kohdetta: opetusruutu, oppilaan tehtävät ja oppilaan työtavat. Jätimme taulukosta pois ensimmäisen tutkimuskysymyksemme eli murtolukukäsitteen opettamisen ajankohdan, koska sen liittäminen kategorioiden alle olisi ongelmallista. Vastasimme kuitenkin tähän tutkimuskysymykseen tulososiossa luvussa 8. Jätimme taulukosta pois myös viimeisen tutkimuskysymyksen eli ”Millaiseen toimintaan opettajan oppaat ohjaavat?” ja päätimme tehdä yhteisen taulukon kaikista analysoitavista oppaista (Open Kymppi, Tuhattaiturin opettajan opas ja Opettajan tienviitta). Näihin tutkimuskysymyksiin vastasimme kuitenkin tulososiossa luvussa 8.

Aloimme etsiä vastauksia ensimmäiseen tutkimuskysymykseen eli murtolukukäsitteen opettamisen ajankohtaan. Tässä kohdassa tutkimustamme haasteeksi nousi murtolukukäsitteen ajankohdan määrittäminen, koska kaikissa analysoitavissa kirjasarjoissa murtoluvun käsitteeseen tutustutaan jo toisella

luokalla. Kymppi-kirjasarjassa murtoluvun käsite tulee ensimmäisen kerran esiin jakolaskuun tutustumisen yhteydessä toisen luokan syksyllä (Kymppi 2a), tässä vaiheessa oppilaan kirjassa ei kuitenkaan puhuta vielä murtoluvun käsitteestä. Kymppi 2a -kirjassa lähdetään pohjustamaan murtolukua jakamalla kuvioita yhtä suuriin osiin. Lisäksi harjoitellaan käsitteitä puolet eli $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$ tasokuvioiden avulla ja niitä värittämällä. Koodasimme liimalapuille aloitusajankohdan sekä pääkohdat murtolukukäsitteen pohjustamisesta. Koska tutkimme kolmannen luokan oppimateriaalia, emme käyttäneet enempää aikaa toisen luokan oppimateriaalin analysointiin.

Kolmannen luokan oppimateriaaleissa murtoluvun opetuksen pohjustus sijoittuu kevään ensimmäiseen jaksoon. Silloin kerrataan toisella luokalla jakolaskun yhteydessä tulleet käsitteet: puolet eli $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$. Koodasimme liimalapuille kirjan tehtävissä käytettyjen kuvioiden ja asioiden käsitteitä, joita käytettiin murtoluvun pohjustukseen. Esimerkkeinä oli tasokuvioiden jakaminen kahteen, kolmeen tai neljään yhtä suureen osaan. Tasokuvioilla tarkoitamme erimuotoisia kuvioita, esimerkiksi, ympyröitä (ns. piirakkamalli), sydämiä, nuolia tai erilaisia monikulmioita. Tehtävissä käytettiin myös geometrinen kappaleiden kuvia, joista oppilaan piti värittää puolet eli $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ja $\frac{1}{4}$. Tämän jälkeen koodasimme opetuksen etenemiseen liittyvät käsitteet eli Kymppi-kirjan aukeaman nimien mukaan. Näitä olivat *Kerrataan puolet, kolmasosa ja neljäsosa, Murtoluvun merkittäminen, Yksi kokonainen ja puoli murtolukuna, Verrataan murtolukujen suuruutta, Sekaluvut, Samannimisten murtolukujen yhteenlaskua, Samannimisten murtolukujen vähennyslaskua ja Testataan ja toimitaan*. Jätämme käsitteenmuodostamisvaiheessa pois kappaleen ”Testataan ja toimitaan”, koska se ei kuulu niin sanottuihin perusaukeamiin. Jatkoimme analysointia tekemällä taulukon Excel-ohjelmalla, johon siirsimme liimalapuille koodatut kategoriat. Taulukossa 1 on esitelty tekemämme aineiston pilkkominen ja koodaus Kymppi 3 kevät oppilaan materiaalista. Teimme samanlaisen analyysipolun myös Tuhattaiturin 3b ja Matematiikkaa 3b kirjoille.

Taulukko 1 Kymppin koodaus

KYMPPI 3. lk	KAPPALEIDEN NIMET	OPETUSRUUTU	OPPILAAN TEHTÄVÄT	OPPILAAN TYÖTAVAT
2. Murtolukukäsitteen pohjustaminen	Kerrataan puolet, kolmasosa ja neljäsosa, kpl 1	Opetusruutu, tasokuviona suorakaide	Tasokuvio: erilaisia kuvioita, palikkamallit	Osien värittäminen
3. Opetuksen eteneminen	Murtoluvun merkitseminen, kpl 2	Opetusruutu, tasokuviona suorakaide	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, monikulmiot, muut kuviot	Murtolukumerkintä, osien värittäminen
	Yksi kokonainen ja puoli murtolukuna, kpl 3 (ks. kokonaisen käsite)			
	Verrataan murtolukujen suuruutta, kpl 4		Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, monikulmiot	Murtolukumerkintä, $</>$ -merkintä, osien värittäminen
	Sekaluvut kpl 5	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, kokonaisosa ja murto-osa	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot	Murtolukumerkintä
	Samannimisten murtolukujen yhteenlaskua, kpl 6	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, samannimiset nimittäjät	Tasokuvio: piirakkamalli, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, laskeminen
	Samannimisten murtolukujen vähennyslaskua	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli	Tasokuvio: piirakkamalli, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, laskeminen
4. Kokonaisen käsite	3. aukeama	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, osoittaja ja nimittäjä	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, monikulmiot, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, laskeminen

Taulukon 1 vasemmassa reunassa näkyy yläkategoriat eli murtolukukäsitteen pohjustaminen, opetuksen eteneminen ja kokonaisen käsite. Vihreässä sarakkeessa on mainittu Kymppi-kirjan murtoluvun opetukseen liittyvien kappaleiden nimet etenemisjärjestyksessä. Taulukon 1 ylälaidassa keltaisella pohjalla ovat alakategoriat (opetusruutu, oppilaan tehtävät ja oppilaan työtavat) ja niihin liittyvät merkitykset. Murtolukumerkinnällä tarkoitetaan oppilaan tehtävissä murtoluvun kirjoittamista murtolukusymbolilla eli numeromerkinnällä. Osien värittäminen tarkoittaa sitä, että oppikirjan tehtävässä oppilaan on tarkoitus värittää esimerkiksi murtolukusymbolilla ilmoitettu osuus kuviosta. Sanallisissa tehtävissä tehtävä on annettu oppilaalle kirjoitetussa muodossa ja siihen vastataan joko tekemällä laskutoimitus tai pelkällä vastauksella. Esimerkki (Kuvio 6) Kymppi 3 kevät -kirjan aukeamasta, jossa pohjustetaan murtoluvun käsitettä ensimmäisen kerran kolmannella luokalla.

1 Kerrataan puolet, kolmasosa ja neljäsosa

Piirakasta on syöty **puolet** eli **yksi kahdesosa**.

Piirakasta on syöty **yksi kolmasosa**.

Piirakasta on syöty **yksi neljäsosa**.

1. Jaa kuvio **kahteen yhtä suureen** osaan. Väritä **puolet**.

2. Jaa kuvio **neljään yhtä suureen** osaan. Väritä **yksi neljäsosa**.

3. Jaa kuvio **kolmeen yhtä suureen** osaan. Väritä **yksi kolmasosa**.

4. Väritä ja merkitse, kuinka monta palikkaa värität.

Väritä **puolet** palikoiden määrästä.

Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa.

Väritä **yksi neljäsosa** palikoiden määrästä.

Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa.

Väritä **yksi kolmasosa** palikoiden määrästä.

Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa. Väritin ___ palikkaa.

1.	2.
3.	4.

Kuvio 6 Kymppi 3 kevät -kirjan (2018, 4–5) murtolukukäsitteen pohjustus.

Vasemmassa yläreunassa, keltaisella reunustettu alue on *opetusruutu*. Opetusruudussa mainittu tasokuvio on suorakulmion muotoinen piirakka. Ensimmäisen sivun muista tasokuvioista käytämme nimitystä "erilaiset kuviot" (muun muassa sydän ja nuoli). Toisella sivulla näkyistä käytämme "palikkamallit" –

nimitystä. ”Oppilaan tehtävänä” on pääasiallisesti murto-osien värittäminen kuvista.

Tuhattaituri 3b:n koodaaminen

Samoin kuin Kymppi-kirjasarjassakin myös Tuhattaituri-kirjasarjassa murtolukujen opiskelua pohjustetaan jo toisen luokan syksyllä. Tuhattaituri 2a -kirjassa lähdetään liikkeelle tutustumalla tasajakoon konkreettisen toiminnan avulla. Tämän jälkeen tasajakoa harjoitellaan kirjan tehtävien avulla. Pohjustamista jatketaan tekemällä toiminnallisia tehtäviä ja kirjan tehtäviä murtokakkujen avulla. Seuraavaksi tutustutaan kokonaisen käsitteeseen, jossa kokonaista jaetaan yhtä suuriin osiin. Lopuksi on vielä kertaustehtävät.

Tuhattaituri 3b -kirjassa murtolukukäsitettä opiskellaan keväällä toisessa jaksossa. Taulukossa 2 on avattu Tuhattaituri 3b -kirjan koodausvaiheet. Koodasimme Tuhattaiturin oppilaan kirjan perusaukeamat samalla tavalla kuin Kymppi-kirjan perusaukeamat. Tuhattaiturin taulukosta tuli hieman laajempi, koska kirjassa oli useampia murtoluvun käsitteeseen liittyviä aukeamia. Jätimme taulukosta kuitenkin pois kolmen eri tasoiset tähtitehtävät, koska ne eivät olleet perusaukeamia ja oppilas voi itse tai opettajan ohjauksella valita, minkä tason tehtävät hän tekee. Opetuksen eteneminen koodattiin kappaleiden nimillä, kuten Kymppi 3 kevät oppilaan kirjan kohdalla (Taulukko 2). Tuhattaiturin kappaleet ovat: *Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin, Murtoluku, Yksi kokonainen, Suuruusvertailua, Harjoittelen, Murtolukujen yhteenlasku, Murtolukujen vähennyslasku, Harjoittelen, Toimintatunti ja Tähtipysäkki*. Kuten edellä mainitsimme, jätämme käsitteiluokkien muodostamisesta pois Toimintatunnin ja Tähtipysäkin, koska ne eivät ole niin sanottuja perusaukeamia.

Taulukko 2 Tuhattaiturin koodaus.


TUHATAITURI 3. lk	KAPPALEIDEN NIMET	OPETUSRUUTU	OPPILAAN TEHTÄVÄT	OPPILAAN TYÖTAVAT
2. Murtolukukäsitteen pohjustaminen	Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin, jakso 2 kpl 14 (ks. kokonaisen käsite)			
3. Opetuksen eteneminen	Murtoluku, kpl 15	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, osoittaja ja nimittäjä	Tasokuvio: piirakkamalli	Murtolukumerkintä, osien värittäminen, yhdistä viivalla
	Yksi kokonainen, kpl 16 (ks. kokonaisen käsite)			
	Suuruusvertailua kpl 17	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, lukusuora ja samannimiset nimittäjät	Tasokuvio: nelikulmiot, lukusuora, päätelytehtävä	Murtolukumerkintä, $</>$ -merkintä ja osien värittäminen
	Harjoittelen kpl 18		Tasokuvio: piirakkamalli, lukusuora	Murtolukumerkintä, $</>$ -merkintä, osien värittäminen, yhdistä viivalla
	Murtolukujen yhteenlasku kpl 19	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, lukusuora	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, lukusuora, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, laskeminen
	Murtolukujen vähennyslasku kpl 20	Opetusruutu, tasokuviona piirakkamalli, lukusuora	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, lukusuora, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, laskeminen
	Harjoittelen kpl 21		Tasokuvio: piirakkamalli, lukusuora, sanalliset tehtävät	Murtolukumerkintä, osien värittäminen, laskeminen, yhdistä viivalla
	Toimintatunti kpl 22		Tasokuvio: piirakkamalli	Pelaaminen, värittäminen

Taulukko 2 jatkuu

TUHATAITURI 3. lk	KAPPALEI- DEN NIMET	OPETUS- RUUTU	OPPILAAN TEHTÄVÄT	OPPILAAN TYÖ- TAVAT
	Tähtipysäkki kpl 23		Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot, lukusuora, sa- nalliset tehtä- vät	Murtolukumer- kintä, laskeminen, itsearviointi
4. Kokonaisen kä- site	1. aukeama (kpl 14)	Opetus- ruutu, taso- kuviona pii- rakkamalli	Tasokuvio: piirakkamalli, nelikulmiot	Murtolukumer- kintä, osien värittä- minen, kirjoitettu vastaus
	3. aukeama (kpl 16)	Opetus- ruutu, taso- kuviona pii- rakkamalli, lukusuora, osoittaja ja nimittäjä	Tasokuvio: piirakkamalli, lukusuora	Murtolukumer- kintä $</>$ -mer- kintä

Taulukossa 2 ”kirjoitettu vastaus” tarkoittaa, että oppilaan kirjassa vastaus tulee kirjoittaa sanallisesti. Koodi ”lukusuora” tarkoittaa sitä, että kirjassa murtoluku-merkinnät on merkitty lukusuoralle tai oppilaan tehtävänä on sijoittaa oikea murtomerkintä lukusuoralle. Esimerkki (Kuvio 7) Tuhattaituri 3b -kirjan aukeamasta, jossa pohjustetaan murtoluvun käsitettä ensimmäisen kerran kolmanella luokalla.

14. Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin



kokonainen yksi kahdesosa eli puolet
yksi kolmasosa yksi neljäsosa

1. Jaa kuvio

a. kahteen yhtä suureen osaan ja värity puolet.

b. kolmeen yhtä suureen osaan ja värity yksi kolmasosa.

c. neljään yhtä suureen osaan ja värity yksi neljäsosa.

2. Kuinka moneen yhtä suureen osaan kuvio on jaettu?

a. b. c. d.

3. Kuinka monta yhtä suurta osaa kuviosta on väritetty?

a. b. c. d.

4. Ratkaise.

Merkitse viivan alapuolella olevaan ruutuun, kuinka moneen yhtä suureen osaan kuvio on jaettu. Merkitse viivan yläpuolella olevaan ruutuun, kuinka monta yhtä suurta osaa on väritetty.


a. b. c. d.

e. f. g. h.

Ratkaise, mitä lukuja kuvat tarkoittavat.

★ - ▲ = 10 ★ : ▲ = 3

★ = ▲ =



Kuvio 7 Tuhattaituri 3b -kirjan (2015, 62–63) murtolukukäsitteen pohjustus.

Aukeaman vasemmassa yläreunassa on punaisella pohjalla *opetusruutu*. Siinä tarkastellaan ”piirakkamallin” avulla kokonaisen jakamista yhtä suuriin osiin. Opetusruudun alapuolella on tasokuvioina ”piirakkamallit” sekä ”nelikulmiot”. Oikean puoleisella sivulla toistuu ”piirakkamallit” ja ”nelikulmiot”. ”Oppilaan tehtävänä” on kuvioiden jakaminen osiin ja niiden värittäminen. Lisäksi oppilas merkitsee osien määrän sekä sivun toisessa tehtävässä ”murtomerkin”. Sivun alalaidassa on päättelytehtävä.

Matematiikkaa 3b koodaaminen

Matematiikkaa 3b -kirjan koodaamisessa haasteeksi muodostui kirjan erilainen struktuuri, verrattuna Kymppi 3 kevät -oppikirjaan ja Tuhattaituri 3b -oppikirjaan. Tämä johtui siitä, että Matematiikkaa 3b kirjassa, joka on VaNe-opetusmenetelmän mukainen kirja, tehtäviin siirrytään vasta, kun uuteen asiaan on ensin perehdytty konkreettisesti (Lampisen, Neményin ja Oraveczin 2011, 16). Näin ollen jouduimme jättämään taulukosta pois murtoluvun opettamiseen liittyvät perusaukeamat ja kappaleiden nimet, koska niitä ei Matematiikkaa 3b kirjoissa ole.

Oppilaan kirja ja opettajan opas kulkevat ”käsi kädessä”. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilaan kirjan opetusruutujen asiat toteutetaan konkreettisilla välineillä esimerkiksi hedelmillä tai murtokakuilla eikä kirjaan tehdä alkuvaiheessa vielä merkintöjä.

Kuten Kymppi- ja Tuhattaituri -kirjasarjassa myös Matematiikkaa 2b -kirjassa pohjustetaan murtoluvun käsitettä toiminnallisten ja konkreettisten tehtävien kautta. Havainnollistaminen tapahtuu jakamalla kirjan kuvien mukaisesti esimerkiksi suklaata, omena tai juusto yhtä suuriin osiin. Se, mitä kokonaisuudella eli yksiköllä tarkoitetaan, on aina nimettävä; se voi olla vaikkapa neljä palaa suklaata, yksi omena tai juustokimpale. Lisäksi jakamista harjoitellaan värisauvoilla ja muilla konkreettisilla välineillä. Oppilaan kirjan murtolukujakson loppupuolella harjoitellaan värittämällä erilaisia tasokuvioita eri kokoihin osiin ja tutustutaan kuvioiden avulla myös erilaisiin kokonaisen käsitteisiin; esimerkiksi kokonainen voi puoliympyrä, josta puolet on ympyrän yhden neljäsosan kokoinen.

Olemme käyttäneet koodaamisessa uuden asian opettamisesta nimitystä ”opetusruutu”, mutta Matematiikkaa 3b -kirjan kohdalla opetusruutu perustuu konkreettiseen toiminnan mallintamiseen. Yhteneväisyyden vuoksi jätimme opetusruutu-nimityksen myös matematiikkaa 3b koodaustaulukkoon. Kymppi 3 kevät -kirjassa ja Tuhattaituri 3b -kirjassa murtolukujen mallinnukseen käytettiin tasokuvioita (kaksiulotteisia, säännöllisiä kappaleita), mutta Matematiikkaa 3b -kirjan murtolukujen mallinnukseen käytetyt kuvat ovat pääosin arkielämään liittyviä, kuten esimerkiksi hedelmiä, piirakoita, kelloja, veneitä, juomapulloja tai suklaata, joten niistä ei voi käyttää nimitystä ”tasokuvio”.

Taulukko 3 Matematiikkaa 3b koodaus

MATEMATIIKKA 3B	AUKEAMAT	OPETUSRUUTU	OPPILAAN TEHTÄVÄT	OPPILAAN TYÖTAVAT
2. Murtolukukäsitteen pohjustaminen	Aukeama 1, kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin, 6. jakso (ks. kokonaisen käsite)	Tarina, hedelmien pilkkominen, hedelmien kuvat, tasajaon periaate	Tasokuvio: piirakkamalli, sanalliset tehtävät	Opetusvälineillä toimiminen, laskeminen
3. Opetuksen eteneminen	Aukeama 2, kolmasosa, kuudesosa		Kuvio: suklaalevy, tasokuvio: nelikulmiot, sanalliset tehtävät	Päätteleminen, laskeminen, kirjoitettu vastaus, värittäminen, jakosuhteen merkitseminen (/)
	Aukeama 3, kokonaisen jakaminen erisuuruisiin osiin (ks. kokonaisen käsite)		Tasokuvio: nelikulmio, piirakkamalli, muut kuviot	Värittäminen, kirjoitettu vastaus, laskeminen
	Aukeama 4, kokonaisen jakaminen osiin (ks. kokonaisen käsite)		Tasokuvio: nelikulmiot, piirakkamalli, muut kuviot	Värittäminen, kirjoitettu vastaus
	Aukeama 5, kokonaisen jakaminen osiin (ks. kokonaisen käsite)		Tasokuvio: nelikulmiot, kolmiot, vesillä liikkumiseen ja ruokaan liittyvät kuviot	Piirtäminen, värittäminen, jakosuhteen merkitseminen (/), laskeminen
	Aukeama 6, kokonaisen jakaminen osiin (ks. kokonaisen käsite)		Tasokuvio: suorakulmiot, jana, värisauvat	Kielentäminen, kirjoitettu vastaus, arvioiminen, tutkiminen, päättelyn tarkastaminen välineillä
	Aukeama 7, pitiuden ja tilavuuden yksiköitä	Opetusruutu, metri ja metrin osat, litran osat	Metrin osien nimeäminen, erisuuruisten astioiden jakaminen osiin	Mittanauhan taiteilu, tuloksen merkintä, tutkiminen, laskeminen, kirjoitettu vastaus
	Aukeama 8, massan ja ajan yksiköitä	Opetusruutu, kilogramman jakaminen osiin ja tunnin jakaminen osiin	Vaakakuvat, joissa punnittavat tuotteet, kellon kuva, vuosikello, kellonkuvatehtävät jatkuvat seuraavalla sivulla	Tutkiminen, laskeminen

Taulukko 3 jatkuu

MATEMATIIK- KAA 3B	AUKEAMAT	OPETUS- RUUTU	OPPILAAN TEHTÄVÄT	OPPILAAN TYÖTAVAT
	Aukeama 9, vain oikeanpuoleinen sivu: useampi yhtä suuri osa		Tasokuvio: suklaapalat, piirakkamalli, sanalliset tehtävät	Päätely, laskeminen
	Aukeama 10, Murtolukumerkintä	Opetusruutu: juuston jakaminen, murto-merkinnän kirjoittaminen	Sanalliset tehtävät, kuvat, tasokuvio: piirakkamalli	Murtolukumerkintä, värittäminen
	Aukeama 11, kokonaisen jakamista, murto-osia		Tasokuvio: nelikulmio, muut kuviot	Murtolukumerkintä, värittäminen
	Aukeama 12, tutkimusaukeama		Tasokuvio: värisauvakuviot	Värittäminen, kirjoitettu vastaus
	Aukeama 13, juodaan virvoitusjuomia	Opetusruutu, litran jakamista erisuuruisiin lasseihin	Juomapullojen ja maitotölkin kuva, sanallinen vihkotehtävä	Tutkiminen, laskeminen, kirjoitettu vastaus
	Aukeama 14, pinta-alojen vertailua		Tasokuvio: paljon erilaisia kuvioita	Murtolukumerkintä, vertailu, kirjoitettu vastaus, värittäminen
	Aukeama 15, kokonaisen jakamista osiin		Piirakka- ja kellokuvat	Päätely, värittäminen, piirtäminen (viisarit)
	Aukeama 16, kokonaisen jakamista osiin		Tasokuvio: suorakulmio, sanalliset tehtävät	Värittäminen, murtolukumerkintä, kirjoitettu vastaus
4. Kokonaisen käsite	Kaikki aukeamat liittyvät kokonaisen käsitteeseen			

Murtolukujakso sijoittuu Matematiikkaa 3b -kirjassa kevään toiseksi viimeiseen eli kuudenteen jaksoon. Kävimme Matematiikkaa 3b -kirjan aukeamat lävitse samalla tavalla kuin Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b - kirjojen perusaukeamat. Ongelmaksi muodostui se, että Matematiikkaa 3b -kirjan aukeamia ei ole määritelty niin sanotuiksi perustehtävä- tai lisätehtäväaukeamiksi, kuten kahdessa muussa analysoidussa oppilaan kirjassa. Näin ollen kävimme läpi jokaisen jaksoon liittyvän aukeaman. Matematiikkaa 3b -kirjassa (Taulukko 3) murtolukujakson aukeamia on nimetty vain muutama, mutta niitä ei ole numeroitu, joten

koodausta varten nimesimme jokaisen aukeaman niissä käsiteltävien asioiden perusteella. Murtolukujakso on nimetty otsikolla ”Murtoluvut.” Murtolukuja on käsitelty myös pituuden, tilavuuden, massan ja ajan yksiköiden kautta. Matematiikkaa 3 b -kirja oli ainoa kirja, jossa käsiteltiin murtolukua myös mittaamisen kautta.

Esimerkki (Kuvio 8) Matematiikkaa 3b -kirjan aukeamasta, jossa pohjustetaan murtoluvun käsitettä ensimmäisen kerran kolmannella luokalla.

Murtoluvut

Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin

Äiti oli varannut aamiaiseksi appelsiinin ja omenan. Hän pyysi Teemua jakamaan appelsiinin tasapuolisesti perheen lasten kesken.

Siiri



Väinö



Helmi



Teemu



Äiti: Teemu, appelsiinin jakaminen ei onnistunut tasapuolisesti. Sinulle jäi vähemmän kuin muille.

Siiri: Minä tiedän, miten appelsiinin voi jakaa tasapuolisesti. Jokaisen pitää saada appelsiinista neljäsosa. Silloin saamme saman verran.

Väinö: Eivätkö nämä ole neljäsosia?

Siiri: Eivät! Ei riitä, että jakaa appelsiinin neljään osaan. Osien täytyy olla yhtä suuria.

Helmi: Siiri, jaa meille omena niin, että kaikki saavat tasan saman verran.

Siiri: Selvä! Ensin omena leikataan tarkasti puoliksi. Sitten vielä puolikkaat leikataan tarkasti puoliksi.



Helmi: Mikä olisi yhden osan nimi, jos omena leikattaisiin tarkasti kolmeen yhtä suureen osaan?

Siiri: Kolmasosa.

Väinö: Entä viiteen yhtä suureen osaan leikattuna?

Teemu: Viidesosa.

Siiri: Mutta vain, jos omena on leikattu tarkasti viiteen yhtä suureen osaan.

Sanoja puolikas tai kahdesosa, kolmasosa, neljäsosa, viidesosa ja kuudesosa voidaan käyttää vain silloin, kun kokonainen on jaettu täsmälleen kahteen, kolmeen, neljään, viiteen tai kuuteen yhtä suureen osaan.

98

Pitsa jaettiin kolmeen yhtä suureen osaan.



Yhden osan nimi on kolmasosa.



Pitsa leikattiin kuuteen yhtä suureen osaan. Yksi viipale pitsasta on 1 kuudesosa. Yksi kokonainen on 6 kuudesosaa.



Pitsa leikattiin kymmeneen yhtä suureen osaan. Yksi viipale kakusta on 1 kymmenesosa. Yksi kokonainen on 10 kymmenesosaa.



Pitsa leikattiin kuuteentoista yhtä suureen osaan. Yksi viipale kakusta on 1 kuudestoistaosa. Yksi kokonainen on 16 kuudestoistaosaa.



1. Isä ja Leena leipoivat pitsan. Se jaettiin tasan isän, Leenan, Laurin ja Leevin kesken. Jaa pitsa. Kuinka suuren osan jokainen sai pitsasta?



Vastaus: _____

99

Kuvio 8 Matematiikkaa 3b -kirjan (2016, 98–99) murtolukukäsitteen pohjustus.

Aukeamasta koodasimme alakategorioiden alle samoja asioita kuin Kympeistä ja Tuhattaituristakin. Ensimmäisellä sivulla on käytetty hedelmien pilkkomista murtolukujen mallintamiseen. Kuten kuvasta selviää, oppilaan kirjan aukeamalla ei ole väritys- eikä laskemistehtäviä. Sadaksemme selville, mitä oppilaan on aukeamalla tarkoitus tehdä, tarkistamme asian opettajan oppaasta. Opettajan Tienviitta -oppaan mukaan tehtävä tehdään käyttämällä oikeita hedelmiä tai muovailuvahaa. Oppilaiden tehtävänä on leikata ryhmissä omenat yhtä suuriin

paloihin. Aukeaman oikean puoleisella sivulla ”piirakkamalli, tasokuvio”-tehtävät toteutetaan murtokakkujen eli toiminnallisten välineiden avulla. Sivun alalaidassa on sanallinen tehtävä, johon oppilas vastaa kirjoittamalla sanallisen vastauksen.

Opettajan oppaiden koodaus

Yhtenä tutkimuskysymyksenämme on: Millaiseen toimintaan opettajan oppaat opettajia ohjaavat. Aineistoon tutustuessamme huomasimme, että Matematiikka 3b oppilaan kirjan tueksi tarvitaan lähes aina opettajan opasta, joten kirjan toimintamalli poikkeaa Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoista. Parantaaksemme tutkielmamme luotettavuutta ja objektiivisuutta, päätimme molemmat tutkijat erikseen analysoida opettajan oppaiden materiaalit löytääksemme aineistosta merkitykselliset käsitteet. Tätä menettelyä kutsutaan tutkijatriangulaatioksi, jossa molemmat tutkijat analysoivat aineiston itsekseen ja lopuksi kootaan yhteinen näkemys merkityksistä. Tutkielmassamme tämä tarkoitti sitä, että kävimme molemmat opettajan oppaiden aineistot läpi ja etsimme mielestämme tärkeimmät opetusta ohjaavat tekijät. Tämän jälkeen kävimme molempien kirjaimat merkitykset ja yhdistimme ne kymmeneksi kohdaksi (ks. Taulukko 4).

Taulukon 4 perusteella voi saada käsityksen, että kaikki opettajan oppaat ovat sisällöltään samanlaisia. Vaikka nämä kaikki merkitykset löytyivät kaikista oppaista, ne näyttäytyivät kuitenkin eri tavoin. *Tarinallisuus* sekä *Open Kymppi*ssä että *Tuhattaiturin* opettajan oppaassa liittyivät jokaiseen aukeamaan. *Tarinat* liittyivät oppilaan kirjan aukeaman kuvaan sekä aukeamalla opeteltavaan asiaan. Näissä materiaaleissa tarinan lukemisesta päättää opettaja, toisin kuin *Opettajan tienviitassa 3b* tarina on oppilaan kirjassa niin sanotussa *opetusruudussa* osana opeteltavaa asiaa ja se toimii tehtävän tekemisen ohjeena.

Taulukko 4 Opettajan oppaiden koodaus.

	TUHATATAITURI	KYMPPI	MATEMATIIKKA
TARINALLISUUS	X	X	X
TAVOITTEET JA SISÄLLÖT	X	X	X
VUOROVAIKUTUKSELLISUUS	X	X	X
TOIMINNALLISUUS	X	X	X
VÄLINEIDEN KÄYTTÖ	X	X	X
POHDINTAA, PÄÄTTELYÄ, PÄÄSSÄLASKUA	X	X	X
ERITYTTÄMISEEN OHJAAMINEN	X	X	X
KIELENTÄMINEN	X	X	X
AIKATAULUTUS	X	X	X

Open Kymmissä *tavoitteet* kerrotaan joka kappaleelle erikseen ja jakson keskeiset asiat on mainittu myös Open Kympin alussa ennen varsinaisten jaksojen alkamista. Tuhattaiturissa jokaiselle kappaleelle on määritelty keskeiset *sisällöt*, joiden avulla tavoitteet pyritään saavuttamaan. Opettajan Tienviitassa tavoitteet määritellään murtolukujakson alussa, jossa kerrotaan lisäksi alkuopetuksen murtolukujakson sisällöistä sekä kolmannen luokan tavoitteista ja sisällöistä. *Vuorovaikutuksellisuusteen* ohjataan kaikissa opettajan oppaissa. Open Kympin ja Tuhattaiturin opettajan oppaan vuorovaikutuksellisia tehtäviä tehdään opettajan harkinnan mukaan, mutta Opettajan tienviitassa ohjeistetaan tekemään lähes kaikki tehtävät vuorovaikutuksessa toisten kanssa.

Myös *toiminnallisuuteen ohjaavia* tehtäviä on jokaisessa opettajan oppaassa. Opettajan tienviitassa lähdetään aina liikkeelle oppilaan omasta kokemuksesta ja toiminnasta, jonka jälkeen vasta sovelletaan opittua kirjan tehtäviin. Oppilaan kirjan tehtäviä ei voida toteuttaa ilman opettajan oppaan toimintaohjeita. Open Kymmissä ja Tuhattaiturin opettajan oppaassa opettajalla on mahdollisuus valita toiminnallisia harjoituksia, mutta ne eivät ole sidoksissa oppilaan kirjaan, joten opettajan päätettäväksi jää, käytetäänkö toiminnallisia harjoituksia. *Välineiden käyttö*: Kymmissä ja Tuhattaiturissa, esimerkiksi murtokakut tulevat kirjan mukana, ja opettajan on mahdollista käyttää välineitä opetuksessa, oppaissa annettujen esimerkkien avulla. Opettajan tienviitta ohjaa opettajia opettamaan havainnovälineiden avulla. Kaikissa opettajan oppaissa ohjataan käyttämään murtokakkuja tai muita havainnollistamisvälineitä.

Pohdintaan, päättelyyn ja päässälaskuun ohjeistetaan jokaisessa opettajan oppaassa. Tuhattaiturin opettajan oppaassa ja Open Kymmissä on jokaisessa kappaleessa päässälaskut, mutta Opettajan tienviitassa ei ole. Pohdintaa ja päättelyä on jokaisessa kirjassa; Open Kymppin ja Tuhattaiturin opettajan oppaan ehdottamista pulma- ja pohdintatehtävien toteuttamisesta päättää opettaja. Tuhattaiturissa pulmatehtäviä on lisäksi myös oppilaan kirjassa. Opettajan tienviitassa ohjataan opettajaa toteuttamaan tunnit niin, että ne perustuvat ongelmanratkaisuun. Opettajan tienviitassa *ohjataan eriyttämiseen* tähdellä merkittyjen tehtävien kautta. Open Kymmissä kerrotaan oppaan alussa eriyttämiskäytännöistä. Ylöspäin eriyttäviä tehtäviä löytyy oppilaan kirjan toisen aukeaman oikeanpuoleisen sivulta. Opettaja voi tarvittaessa toteuttaa eriyttämistä myös muokattavien kokeiden ja monisteiden avulla. Samoin Tuhattaiturin opettajan oppaassa mainitaan, että oppilaan kirjan toisen aukeaman tehtävät ovat ylöspäin eriyttäviä, sillä ne tarjoavat matemaattisia haasteita taitaville oppilaille. *Kielentämiseen* (ks. kpl 3.2) eli matematiikan auki puhumiseen arkikielelle sekä matematiikan ymmärryksen sanoittamiseen löytyy tehtäviä Open Kymmissä toiminnallisista harjoituksista. Opettaja Tienviitassa on valmiita kysymyksiä, joita voidaan eri tehtävien edetessä käyttää. Kysymyksiä on useampien tehtävien yhteydessä. *Aikataulutus: Murtoluvunkäsite* tulee Open Kymmissä kevään ensimmäisessä jaksossa ja oppaassa ohjeistetaan käsittelemään yksi luku yhdellä oppitunnilla. Lukuja on yhteensä kahdeksan. Tuhattaiturin opettajan oppaassa murtoluvun käsite tulee kevään toisessa jaksossa helmikuun puolesta välistä maaliskuun puoleen väliin ja se sisältää kymmenen kappaletta. Opettajan tienviitassa *aikataulutus* murtolukukäsitteen kohdalla ajoittuu huhtikuun puolesta välistä toukokuun puoleen väliin 16 tunnin ajan. Opettajan Tienviitassa ei ole selkeitä kappalejakoja, vaan murtolukujakso on yhtenäinen kokonaisuus.

7.4 Käsiteluokkien muodostaminen

Tarkastellessamme aineistoamme koodauksessa saatua dataa, päätimme muodostaa käsiteluokat eri opettamisen tapojen pohjalta teoriapohjaamme peilaten.

Näitä tapoja ovat *määritelmälähtöinen*, *realistinen* ja *ongelmälähtöinen* tapa. Nämä opettamisen tavat on avattu luvussa 4.1. Teimme taulukon, johon kirjasimme opetustavat sekä tutkimuskysymyksemme. Kirjasarjat koodattiin taulukkaan omilla väreillään. Ongelmaksi muodostui käsiteluokkien muodostamisessa se, että Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoja pystyy käyttämään ilman opettajan opasta, mutta Matematiikkaa 3b -kirjan kohdalla se on mahdotonta. Tämän vuoksi taulukkoa täydentäessämme, käytimme oppilaan kirjan rinnalla Opettajan Tienviittaa 3b -kirjaa. Seuraavaksi etsimme murtoluvun opettamisen etene- miseen yhdistäviä tekijöitä, joita löytyi jokaisesta kirjasarjasta. Jätimme taulu- kosta pois sellaisia oppikirjojen kappaleita, joista ei löytynyt yhdistäviä tekijöitä kaikkien kirjojen kanssa. Tulossiossa analysoimme kaikkein kolmen opetusma- teriaalin taulukot ja etsimme niiden yhtäläisyydet ja eroavaisuudet sekä muodos- tamme niiden pohjalta tulkintoja.

Taulukko 5 Käsiteluokat

	MÄÄRITELMÄLÄHTÖINEN TAPA			REALISTINEN TAPA			ONGELMALÄHTÖINEN TAPA		
	Kymppi kappaleet 1-7	Tuhattaituri kappaleet 14-20	Matematiikkaa	Kymppi	Tuhattaituri	Matematiikkaa	Kymppi	Tuhattaituri	Matematiikkaa
Murtolukukäsitteen pohjustaminen	X	X				X			X
Opetuksen eteneminen									
Opetusruutu	kpl 1, 2, 3, 5, 6 ja 7	kpl 14, 15, 16, 17, 19 ja 20	kpl 7 ja 8			kpl 1, 10 ja 13			
Murtolukumerkintä	kpl 2	kpl 14				kpl 10 ja 12			kpl 10
Murtolukujen suuruusvertailu	kpl 4	kpl 17	kpl 4			kpl 14			
Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku	kpl 6 ja 7	kpl 19 ja 20							
Kokonaisten käsite	kpl 3 ja 5	kpl 14 ja 16	kpl 3, 4, 9 ja 11			kpl 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 ja 13			kpl 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ja 12

Taulukkoon 5 on koottu tutkimuskysymysten lisäksi aineistosta nousseet yhteiset käsitteet. Tutkimuskysymykset näkyvät taulukossa tummennettuina. Opetuksen etenemisen alle saimme vielä kolme uutta käsitettä, jotka ovat *murtolukumerkintä*, *murtolukujen suuruusvertailu ja murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku*. Taulukosta näkyy eri kirjojen opetustavan painottuminen. Murtolukukäsitteen pohjustamisen kuvaukseen on käytetty X-merkintää, koska ymmärryksemme mukaan kirjojen ensimmäinen aukeama johdatteli aiheeseen ja koski näin murtolukukäsitteen pohjustamista. Opetuksen etenemisessä sekä kokonaisen käsitteen ilmenemisessä käytimme kirjojen aukeamien numerointia ja merkitsimme taulukkoon ne aukeamat, joilla käsite esiintyy.

8 TULOKSET

Tuloksissa avaamme tarkemmin taulukkoa 5. Tulosten auki kirjoittamisessa käytimme oppikirjojen aukeamia selventääksemme sitä, mistä muodostimme taulukon käsiteluoikat. Taulukosta 5 tulee selkeästi esille se, että Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3 b -kirjoissa painottuu matematiikan opetuksessa määritelmälähtöinen opetustapa. Matematiikka 3b -kirjassa opetustapa on enemmänkin realistinen ja ongelmalähtöinen. Kokonaisen käsitteen merkitys korostuu eri tavoin eri oppikirjoissa. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa kokonaisen käsitettä opiskellaan määritelmälähtöisesti kahdella aukeamalla. Matematiikkaa 3b -kirjassa murtoluvun opettaminen perustuu kokonaisen käsitteeseen ja siitä lähdetään opetuksessa liikkeelle toteuttamalla realistisen ja ongelmalähtöistä opetustapaa. Selkeyttääksemme taulukkoon 5 muodostuneita käsitteitä, kuvaamme tuloksissa pääpiirteittäin kirjasarjojen joitakin aukeamia.

Erot näissä kirjasarjoissa johtuvat siitä, että VaNe-opetusmenetelmä perustuu oppilaan omiin kokemuksiin ja toiminalliseen opetukseen välineiden tai oikeiden materiaalien (esimerkiksi omena) kanssa ennen kirjan harjoitustehtävien tekemistä (ks. luku 2.3). Lisäksi oppilaan kirja vaatii aina Opettajan tienviitta 3 kirjan, jossa on pedagogiset ohjeet opettajalle oppilaan kirjassa toteutettaviin tehtäviin. Kymppi 3 kevään ja Tuhattaituri 3b -kirjojen opettajanoppaissa on annettu esimerkkejä realistisesta ja ongelmalähtöisestä opettamistavasta murtolukukäsitteen pohjustamisessa, joita opettaja voi halutessaan käyttää. Oppilaan kirjan käyttö ei kuitenkaan edellytä opettajan oppaiden käyttämistä.

Murtolukukäsitteen opettamisenajankohta

Murtolukukäsitteeseen tutustutaan kaikissa kirjasarjoissa toisen luokan aikana, mutta varsinaisesti sen opetus aloitetaan kolmannella luokalla. Murtolukukäsite tulee kaikissa kirjasarjoissa kolmannen luokan keväällä. Ainoastaan eroavaisuuksia on siinä, missä vaiheessa kevättä murtolukukäsitettä opetetaan. Kymppi 3 kevät -kirjassa murtoluvun käsitteen opettaminen sijoittuu kevään ensimmäiseen jaksoon. Tuhattaituri 3b -kirjassa vastaava jakso on keväällä toisessa

jaksossa ja Matematiikkaa 3b -kirjassa edellisistä kirjoista poiketen, murtolukujakso on keväällä toiseksi viimeisessä eli kuudennessa jaksossa.

Murtolukukäsitteen pohjustaminen

Kymppi 3 kevät -kirjassa murtolukukäsitteen pohjustaminen aloitetaan kertamalla toisella luokalla harjoiteltuja käsitteitä (puolet, kolmasosa ja neljäsosa). Pohjustaminen tapahtuu määritelmälähtöisellä tavalla eli aukeaman alussa opetetaan teoria ja sen pohjalta tehdään mekaanisia harjoituksia. Tuhattaituri 3b -kirjassa murtolukukäsitettä pohjustetaan määritelmälähtöisesti, harjoittelemalla kokonaisen jakamista yhtä suuriin osiin jakamalla ja värittämällä kuviot yhtä suuriin osiin. Teoria esitellään opetusruudulla ja tehtävät tehdään sen pohjalta mallin mukaan. Poiketen muista kirjasarjoista pohjustusaukeamalla harjoitellaan myös murtolukumerkintää. Matematiikkaa 3b -kirjassa murtolukua pohjustetaan realistisen ja ongelmalähtöisen tavan mukaisesti. Murtolukukäsitteen opettaminen aloitetaan jakamalla omenoita ja muovailuvahaa pienryhmissä erisuuruisiin osiin. Lisäksi murtolukukäsitteen opetuksessa käytetään murtokakkuja.

Murtolukukäsitteen opetuksen eteneminen kolmannella luokalla

Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa pääsääntöisesti jokaisen oppitunnin opetus alkaa *opetusruudun* avulla, johon on koottu tunnilla käsiteltävä teoria. Opetusruudun esimerkkien pohjalta oppilas harjoittelee aukeamalla vastaavia tehtäviä. Matematiikkaa 3b -kirjassa on opetusruutuja vähemmän kuin kahdessa muussa oppikirjassa. Tässä kirjassa on kaksi määritelmälähtöistä ja kolme realistiseen opetustapaan pohjautuvaa opetusruutua. Realistisessa opetusruudussa teoriaa harjoitellaan käytännön tehtävillä. *Murtolukumerkintä* tulee Kymppi 3 kevät -kirjassa esiin toisella aukeamalla ja sitä harjoitellaan opetusruudun teorian pohjalta, määritelmälähtöisesti, kirjan aukeamalla. Tuhattaituri 3b -kirjassa murtolukumerkintä opetetaan ensimmäisellä murtolukuaukeamalla määritelmälähtöisesti opetusruudun avulla. Murtolukumerkinnän merkitsemiseen ohjataan kirjoitetun kielen avulla. Tämän jälkeen oppilaat harjoittelevat murtolukumerkintää kuten Kymppi 3 kevät -kirjassa. Matematiikkaa 3b -kirjassa murtolukumerkintä esiintyy ensimmäisen kerran kappaleessa 10 ja sitä

harjoitellaan realistisen opetustavan mukaan. Murtolukumerkinnän kirjoittamista opetellaan yhdessä tarinan pohjalta ja ymmärtävän kirjoittamisen (murtomerkintä tehdään vasta, kun asia on ymmärretty) kautta. Kolmannella luokalla VaNe-opetusmenetelmän mukaisissa oppikirjoissa murtolukumerkintä aloitetaan piirtämällä ensin murtoviiva, jonka jälkeen merkitään viivan alapuolelle kokonaisen osat ja yläpuolelle ne osat, jotka esimerkissä on käytetty. Tuhattaituri 3b -kirjassa opastetaan murtolukumerkintään samalla tavalla. Matematiikkaa 3b murtolukumerkintää harjoitellaan myös ongelmatehtävän avulla murtoakkuja käyttäen.

Kymppi 3 kevät -kirjassa murtolukujen suuruusvertailu opiskellaan muista aukeamista poiketen ilman opetusruudussa olevaa teoriaosuutta kappaleessa 4. Murtolukujen suuruuden vertailua havainnollistetaan piiraskuvien avulla realistisen opetustavan pohjalta sekä määritelmälähtöisesti. Tämän lisäksi oppilas harjoittelee suuruusvertailua värittämällä kuvioita sekä merkitsemällä niiden suhdetta toisiinsa suurempi kuin - ja pienempi kuin -merkintöjen avulla. Tuhattaituri 3b -kirjassa, kappaleessa 17, suuruusvertailua ohjeistetaan opetusruudussa, jonka jälkeen oppilas harjoittelee murtolukujen suuruusvertailua samoin kuin Kymppi 3 kevät -kirjassa. Aukeaman lopussa on yksi päättelytehtävä, joka voidaan tulkita ongelmälähtöiseksi opetustavaksi. Kirjan opetustapa on määritelmälähtöinen. Matematiikkaa 3b -kirjassa suuruusvertailua opetellaan realistisen opetustavan kautta esimerkiksi taittelemalla paperia. Toisin kuin kahdessa muussa oppikirjassa, suuruusvertailua opetellaan pinta-alakuvioiden avulla, pohdimalla kuinka suuri osa jokin kuvio on toisesta kuvioista tai kuinka moninkertainen se toiseen kuvioon verrattuna. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua ei ole käsitelty Matematiikkaa 3b -kirjassa kolmannella luokalla ollenkaan. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun opetteleminen perustuu määritelmälähtöiseen opetustapaan. Molemmissa kirjoissa opetusruudulla esitetään teoria piirakkamallin avulla, jonka jälkeen oppilaat laskevat aukeaman laskuja. Laskutehtävissä on myös realistiseen ja ongelmälähtöiseen opetustapaan perustuvia oppilaiden tehtäviä.

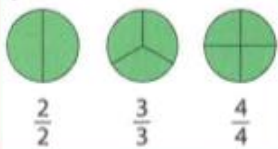
Miten kokonaisen käsite avataan murtolukukäsitteen opettamisen yhteydessä?

VaNe-opetusmenetelmän mukaisessa Matematiikkaa 3b -oppikirjassa kokonaisen käsitettä käsitellään ensimmäisestä aukeamasta lähtien lähes kaikissa kirjan kappaleissa. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa kokonaisen käsite tulee esille kahdessa eri kappaleessa. Kymppi 3 kevät -kirjassa kokonaisen käsitettä opetetaan kappaleissa 3 ja 5. Tuhattaituri 3b -kirjassa kokonaisen käsitteeseen tutustutaan murtolukukäsitteen opettamisen aloituskappaleessa 14 sekä kappaleessa 16. Opetus perustuu määritelmälähtöisyyteen. Aukeaman toisella sivulla on yksi tehtävä, jonka voidaan ajatella kuukuvan ongelmalähtöiseen opetustapaan, koska oppilaan tulee päätellä, miten murtoluku tulee täydentää, jotta saadaan yksi kokonainen. Kokonaisen käsite esitellään opetusruudussa myös Kymppi kevät 3 -kirjassa määritelmälähtöisesti. Kuitenkin osa oppilaan harjoitustehtävistä voidaan luokitella realistiseen opetustapaan kuuluviksi, koska niissä jaetaan pitsoja eri suuruisiin osiin. Esittelemme seuraavaksi analysoimistamme kirjoista kokonaisen käsitteen opettamistapoja selventääksemme sitä kuvallisesti. Kuviossa 6 on Kymppi 3 kevät -kirjan, kuviossa 7 Tuhattaituri 3b -kirjan ja kuviossa 8 Matematiikkaa 3b -kirjan sivu.

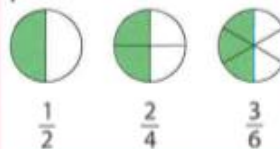
3 Yksi kokonainen ja puoli murtolukuna

$\frac{1}{2}$ ← Osoittaja kertoo valittujen osien määrän.
 $\frac{1}{2}$ ← Nimittäjä kertoo osien kokonaismäärän.

yksi kokonainen



puoli



1. Merkitse **murtolukuna**, kuinka suuri osa ympyrästä on väritetty.



Mitä huomaat? Täydennä.

Yksi kokonainen on murtoluku, jossa osoittaja ja nimittäjä ovat _____ lukuja.

2. Merkitse **murtolukuna**, kuinka suuri osa kuviosta on väritetty.



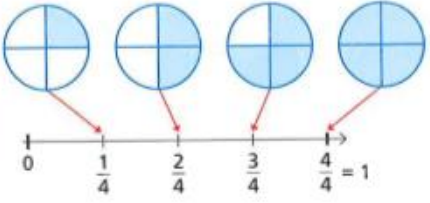
Mitä huomaat? Täydennä.

Puoli on murtoluku, jossa osoittaja on _____ nimittäjästä.

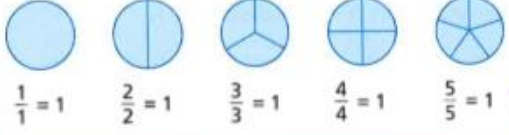
Kuvio 9 Kokonaisen käsite Kymppi 3 kevät -kirjassa

Kuviossa 9 on Kymppi 3 kevät -kirjan määritelmälähtöinen opetustapa, joka perustuu opetusruudussa olevaan piirakkamalliin. Opetusruudussa on aukeamaan liittyvä teoria, jonka alla on oppilaan tehtävät.


16. Yksi kokonainen







Kun murtoluvun osoittaja ja nimittäjä ovat yhtä suuret, murtoluvun suuruus on yksi kokonainen.









$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{2}{2} = 1$ $\frac{3}{3} = 1$ $\frac{4}{4} = 1$ $\frac{5}{5} = 1$











1. Merkitse yksi kokonainen murtolukuna.

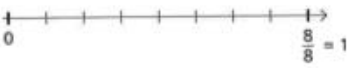

a.  $1 = \square$ b.  $1 = \square$ c.  $1 = \square$ d.  $1 = \square$

2. Yhdistä murtoluku lukusuoraan.

a.    b.   

c.    d.   

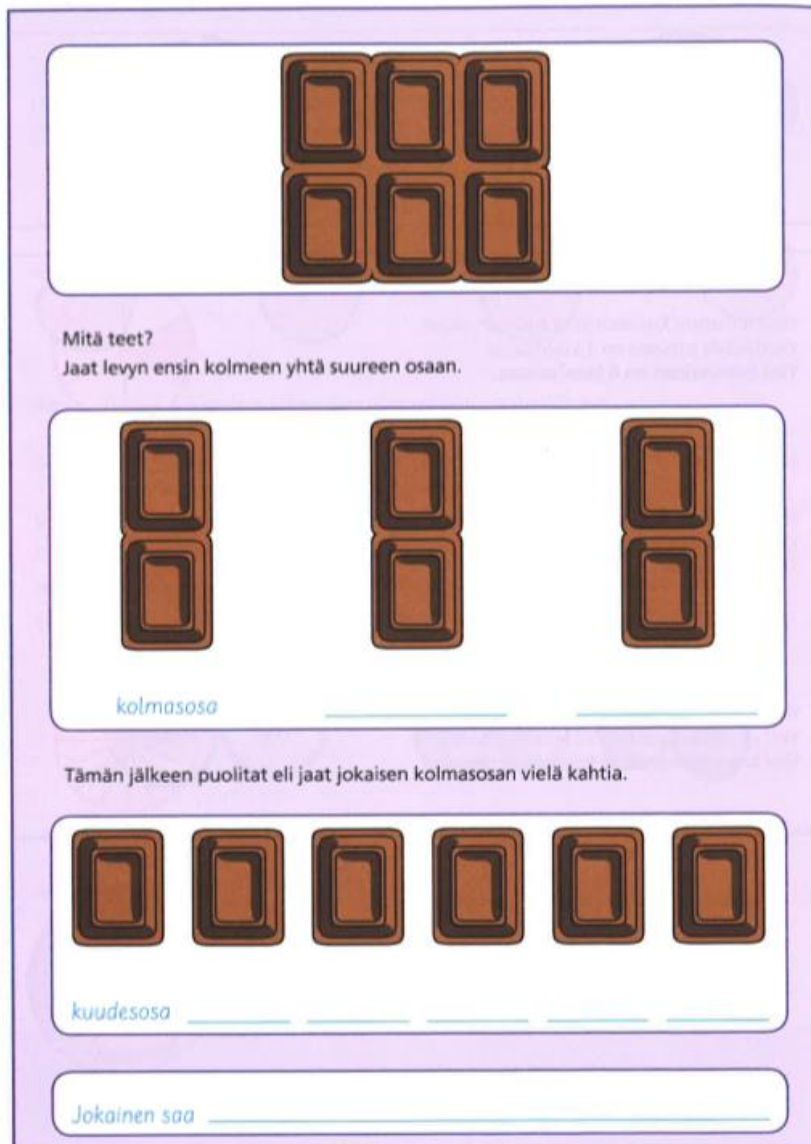



70

Kuvio 10 Kokonaisen käsite Tuhattaituri 3b -kirjassa

Kuviossa 10 on Tuhattaituri 3b -kirjan esimerkkisivu kokonaisen opettamisesta. Opetustapa on määritelmälähtöinen, jossa opetusruudussa esitetään aukeamaan liittyvä teoria tasokuvioiden avulla. Sen alapuolelta alkavat oppilaan tehtävät. Tuhattaituri 3b -kirjassa opetukseen on liitetty myös lukusuora murtolukujen suuruusjärjestyksen havainnollistamiseksi.

2. Sinulla on pieni suklaalevy. Haluat jakaa sen kuuteen yhtä suureen osaan viiden kaverisi kanssa. Kuinka suuren osan levystä jokainen saa? Täydennä.



Mitä teet?
Jaat levyn ensin kolmeen yhtä suureen osaan.

kolmasosa _____

Tämän jälkeen puolitat eli jaat jokaisen kolmasosan vielä kahtia.

kuudesosa _____

Jokainen saa _____

100

Kuvio 11 Kokonaisen käsite Matematiikkaa 3b -kirjassa

Kuviossa 11 on Matematiikkaa 3b -kirjan sivun kuva oppilaan kirjasta, jossa kokonaista kuvaa pieni suklaalevy. Oppilaan kirjan sivua ei täytetä mekaanisesti. Aluksi kokonaisen käsitteen teoriaan tutustutaan oikeiden, pahvisten suklaalevyjen tai rakentelukuutioista tehtyjen eri kokoisten suklaalevyjen avulla pilkkomalla niitä eri suuruisiin yhtä suuriin osiin. Tutkimuksellisen osuuden jälkeen oppilaat tekevät oppilaan kirjan tehtävät käyttämällä apunaan edellä mainittuja havaintovälineitä.

Millaiseen toimintaan opettajan oppaat opettajia ohjaavat?

Kuten taulukosta 4 käy ilmi jokaisesta opettajan oppaasta löytyivät ne merkitykset, joiden pohjalta lähdimme opettajan oppaita tarkastelemaan. Tarkempi kuvaus löytyy taulukon 4 jälkeen. Yhteenvedona voimme todeta, että opettajan oppaiden merkitys oppilaan kirjojen käyttämiselle on erilainen. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -oppilaan kirjoja voidaan käyttää ilman opettajan opasta. Matematiikkaa 3b -kirjan käyttö vaatii aina Opettajan tienviitta -oppaan käyttämistä, koska VaNe-opetusmenetelmän mukaisessa Matematiikkaa 3 b -kirjassa opeteltavia asioita realistisen ja ongelmalähtöisen opetustavan kautta. Toiminnallisten harjoitusten jälkeen siirrytään oppilaan kirjan tehtäviin, joissa myös tarvitaan opettajan oppaan didaktista ohjausta. Tässä opettajan oppaassa annetaan myös esimerkkejä siitä, miten opettajan tulee asia esitellä oppilaille tai millaisten kysymysten avulla opetus etenee. Open Kymppi 3 ja Tuhattaiturin opettajan oppaassa opettajalla on mahdollisuus valita sekä realistiseen että ongelmalähtöiseen opettamistapaan perustuvia opetustapoja, mutta oppilaan kirjojen käyttö ei edellytä oppaiden käyttöä. Näissä opettajan oppaissa annetaan opettajalle toiminnallisia opetusvihjeitä sekä harjoituksia, päässä laskuesimerkkejä ja pohdinta- tai pulmatehtäviä.

Huomioita ja eroavaisuuksia kirjasarjojen välillä

Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjat painottavat määritelmälähtöistä opetustapaa, toisin kuin Matematiikkaa 3b -kirja, jossa opetustapa painottuu realistiseen ja ongelmalähtöiseen opetustapaan (ks. taulukko 5). Toinen suuri eroavaisuus näiden kirjojen välillä on kokonaisen käsitteen opettamisessa. Joutsenlahden ja Perkkilän (2019) mukaan murtolukujen opettamisessa pitäisi kiinnittää enemmän huomiota kokonaisen käsitteeseen, koska kokonainen voi ilmetä erilaisena matematiikan symbolikielellä, luonnollisella kielellä tai kuviokielellä. Näin ollen sen määrittelemisen ei ole yksiselitteistä; kokonainen voi olla esimerkiksi omena, luokan kaikki 20 oppilasta, pizza tai piirakkakuvio. Matematiikkaa 3b -kirjassa kokonaisen käsitettä lähestytään realistisesti pilkkomalla esimerkiksi omenoita yhtä suuriin osiin. Kokonaisen käsite näyttäytyy eri kokoisina ja eri

muotoisina asioina tai esineinä. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa kokonaista käsitellään molemmissa kahdessa kappaleessa yleensä ympyränmuotoisena tai muina tasokuviona. Tuhattaituri 3b -kirja oli ainoa, jossa murtolukuja ja niiden suuruutta havainnollistettiin lukusuoralla. Esimerkiksi murtoluvut $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$ sijoitettiin lukusuoralle, josta voitiin päätellä lukujen suuruusjärjestys.

Sekalukujen opettaminen kolmannen luokan murtolukujaksossa tuli esiin ainoastaan Kymppi 3 kevät -kirjassa, viidennellä aukeamalla. Sekaluvulla tarkoitetaan murtolukua, jossa on kokonaisosa ja murto-osa. Ainoastaan Matematiikka 3b -kirjassa murtolukujaksoon on sisällytetty murtolukujen yhteys mittamiseen (pituus, massa, tilavuus ja ajan yksiköt). Matematiikka 3b -kirjassa ei käsitellä murtolukujen yhteen- tai vähennyslaskua, mutta yhteys jakolaskuun tulee esiin osiin jakamiseen liittyvissä tehtävissä. Kahdessa muussa kirjassa yhteyttä jakolaskuun ei ole. Kirjasarjojen välillä näkyy eroavaisuutena myös se, että Matematiikka 3b -kirjassa murtoluvun käsitettä lähestytään monipuolisesti sekä konkreettisesti toimimalla, oppilaiden arkielämää ja kokemuksia hyödyntäen. Kirjan tehtäviin siirrytään vasta, kun asioita on harjoiteltu käytännössä toimintavälineitä tai konkreettisia asioita (esimerkiksi kannu ja vesilasit, omenat ym.) soveltaen. Kokonaisen käsite saa merkityksiä eri konteksteissa ja erilaisilla välineillä; esimerkiksi yksi metri, yksi litra mehua tai kuusi palaa suklaata. Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa murtolukujakso sijoittuu kolmannen luokan kevään alkupuolelle; Kymmissä kevään ensimmäinen jakso ja Tuhattaiturissa kevään toinen jakso. Matematiikka 3b -kirjassa sen sijaan murtoluvun opetus sijoittuu toiseksi viimeiseen eli kuudenteen jaksoon.

9 ETIIKKA JA LUOTETTAVUUS

Sisällönanalyysia voidaan pitää subjektiivinen tutkimusmenetelmä, koska tutkijan henkilökohtaisilla ratkaisuilla on suuri merkitys. Tutkijan mahdollinen subjektiivisuus voi vaikuttaa tutkimusprosessiin ja tuloksiin, sillä hän valitsee teemat tai asiasisällöt, joita tutkimuksessa tutkitaan. Parantaakseen tutkimuksen luotettavuutta, tutkijan tulee tiedostaa oma roolinsa ja mahdollinen vaikuttavuus tutkimukseen sen aikana. Lisäksi tutkijan tulee kuvailla mahdollisimman tarkasti, miten tulokset ovat aineiston pohjalta syntyneet sekä miten tulokset on tutkimuksessa esitelty. Tutkielmassamme olemme pyrkineet avaamaan aineiston analyysin sekä sen, miten tulokset ovat syntyneet aineiston pohjalta, mahdollisimman tarkasti tutkielman luotettavuuden parantamiseksi luvussa 7 Selventääksemme analyysin kulkua, olemme tehneet taulukoita, joista voidaan selvittää käsiteluoikkien koodaaminen ja tulosten yhteenveto. Kiviniemi (2018, 85) toteaa, että tutkimuksen luotettavuutta lisää tutkimusprosessin avaaminen sekä tutkimuksessa esiin nousseiden käsitteiden tai ilmiöiden perustelevinen. Laadullisessa tutkimuksessa ”tutkija on paljon vartija”, koska hän päättää aineistosta ja sen analysoinnista. Luotettavuutta lisää tutkimuksen riittävä dokumentointi. Toisin sanoen dokumentaation avulla tutkija esittää valintojaan ja ratkaisujaan sekä niiden perusteluita. (Kananen 2017, 176.)

Tutkijan tulee pyrkiä objektiivisuuteen (ks. Eskola ja Suoranta 1998, 17). Hänen on mahdollista tehdä tutkimusmenetelmien yhteiskäyttöön liittyvä tutkijatriangulaatio, jolloin saman ilmiön aineiston keräämiseen, tulosten luokitteluun sekä analysointiin ja tulkitsemiseen osallistuu useampi tutkija (Eskola & Suoranta 1998, 69; Hirsjärvi 2016, 233; KvaliMOTV; Perkkilä 2018). Objektiivisuutta olemme näin ollen pyrkineet parantamaan muun muassa tutkijatriangulaation avulla. Teimme tutkijatriangulaation opettajan oppaiden aineiston keruun ja luokittelun yhteydessä. Tutustuimme opettajan oppaiden aineistoihin omilla tahoillamme ja kirjasimme oppaista esiin nousseita käsitteitä. Tämän jälkeen keskustelimme yhdessä molempien havainnoista ja kirjaamistamme aineistosta esiin nousseista käsitteistä. Olimme poimineet aineistosta samoja käsitteitä,

mutta eri sanoin. Esimerkiksi toinen meistä oli kirjannut käsitteen vuorovaikutuksellisuus sanalla vuorovaikutustaidot ja toinen vuorovaikutuksellisuus matematiikan opetuksessa. Keskusteltuamme ja pohdittuamme oikeaa käsitettä, päädyimme yhdessä käsitteeseen vuorovaikutuksellisuus. Toimimme samalla tavalla niiden käsitteiden kohdalla, joissa olimme kuvanneet aineistosta nousutta käsitettä eri sanoin.

“Tieteellinen tutkimus voi olla eettisesti hyväksyttävää ja luotettavaa ja sen tulokset uskottavia vain, jos tutkimus on suoritettu hyvän tieteellisen käytännön edellyttämällä tavalla.” (Tutkimuseettinen neuvottelukunta 2012, 8). Tutkimuksen luotettavuuden ja eettisyyden arviointi on osa hyvää tutkimuskäytäntöä. Laadukas tutkimus edellyttää luotettavuutta ja luotettavia tuloksia, siksi luotettavuus on tieteenharjoittamisen merkittävä tekijä. (Tutkimuseettinen neuvottelukunta 2012, 8; Aaltio & Puusa 2011, 153). Tieteellisyyden ihanteeseen kuuluu myös objektiivisuuden ihanne, millä tarkoitetaan sitä, että tutkimuksen kulkuun eivät vaikuta tutkijan omat oletukset ja toimenpiteet (Puusa & Kuittinen 2011, 167). Aaltion ja Puusan (2011,153) mukaan tutkimuksessa tulee esitellä perustelut luotettavuuden takaamiseksi. Lisäksi luotettavuudessa tulee huomioida, etteivät satunnaiset tai epäoleelliset tekijät vaikuta tutkimuksen tuloksiin. Luotettavuuden arviointia kvalitatiivisessa tutkimuksessa ei voida ilmaista objektiivisten tai määrällisten mittareiden arvioiden mukaisina tuloksina. Kuten kvantitatiivisessa tutkimuksessa.

Tutkielmassamme eettisyys ja luotettavuus pohjautuvat tutkijoiden mahdollisimman hyvään objektiivisuuteen aineistojen analyysissä. Pyrimme analysoimaan aineistoa niin, että meidän omat ennakko-oletuksemme eivät vaikuttaneet tutkimustuloksiin. Pyörälä, Aaltion ja Puusan (2011,153) mukaan toteaa, että vaikka objektiivisuus on keskeinen osa tieteen hyvää käytäntöä, monien tutkijoiden mielestä täydelliseen objektiivisuuteen pääseminen tutkimuksessa on mahdotonta. Subjektiivisuus on läsnä jossain määrin kaikissa tutkimuksissa, koska tutkimuksessa tehdyt ratkaisut perustuvat tutkijan omiin, subjektiivisiin valintoihin. Toisin sanoen Puusan ja Kuittisen (2011, 167) mukaan arvovapaata tutkimusta ei ole olemassa. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa objektiivisuuteen pyritään

tunnistamalla oma subjektiivisuus (Eskola & Suoranta 1998, 17). Pyrimme toimimaan hyvän tieteellisen käytännön mukaisesti eli noudatimme rehellisyyden vaatimusta, olimme tarkkoja ja huolellisia tutkielmamme tulosten tallentamisessa ja esittämisessä, kuten Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (2012, 8) ohjeissa ohjeistetaan.

Laadullisessa tutkimuksessa ovat läsnä tutkijan tekemät ratkaisut, totuuden tavoittelun luonne päämääränä vakuuttaa lukija tutkijan vilpittömästä tiedonhankinnasta ja tulkintojen tekemisestä. (Aaltio & Puusa 2011, 154). Schreierin (2012, 176–177) mukaan laadullisen sisällönanalyysin liittyy aina tulkintaa. Laadullisessa tutkimuksessa aineisto voi olla latenttia eli piilevää, jolloin siihen vaikuttaa tutkijan oma tulkinta. Tutkielmassa jouduimme tekemään analyysivaiheessa ratkaisun opettajan oppaan käyttämisestä Matematiikkaa 3b -oppilaan kirjan rinnalla, koska analyysin tekeminen ei olisi ollut tasavertaista kahden muun analysoimamme kirjan kanssa. Meidän oli huomioitava tutkielmassamme oppikirjojen vertailussa myös se, että Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -oppilaan kirjojen käyttäminen ei edellyttänyt opettajan oppaan käyttämistä. Tästä olemme maininneet aineiston analyysi- sekä tulosten kirjoittamisen vaiheissa.

Päädymme analysoimaan kaikkia kolmea oppilaan kirjaa aukeama kerrallaan, koska Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjat etenevät aukeama oppitunnissa -periaatteella. Toisin kuin Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa aukeamat olivat nimetty niissä opetettavien asioiden mukaan, Matematiikkaa 3b -kirjassa jakso alkoi otsikolla "Murtoluvut". Seuraava selkeä otsikointi oli aukeamalla 10 "Murtolukumerkintä", joka sisälsi myös useamman aukeaman kuten edellinenkin jakso. VaNe-opetusmenetelmän sekä Matematiikkaa 3b -kirjan käyttäminen edellyttää kouluttautumisen kautta perehtyneisyyden opetusmenetelmän käyttämiseksi. Emme ole saaneet VaNe-opetusmenetelmän mukaista koulutusta, joten emme tiedä kuinka Matematiikkaa 3b -kirjassa edetään. Näin ollen teimme analyysin ja johtopäätökset perustuen siihen, millaisena Matematiikkaa 3b -oppilaan kirja ja Opettajan tienviitta 3b meille näyttäytyivät sekä samaa periaatetta noudattaen kuin kahdessa muussakin analysoitavassa kirjassa eli aukeama kerrallaan.

10 POHDINTA

Pro gradu -tutkielmamme tutkimustehtävänä oli vertailla kolmannen luokan matematiikan oppikirjojen murtolukujen opettamista oppilaankirjoissa. Analyysin tekemisen ja tulosten tarkastelun jälkeen meille nousi monia asioita, joita päätimme pohtia ja tuoda esille tässä kappaleessa. Koska olemme juuri valmistumassa olevia luokanopettajia, meitä kiinnostaa tutkimiemme kirjojen ja opetussuunnitelman yhteys. Miten opetussuunnitelman perusteet ja konstruktivistinen oppimisenäkökulma huomioidaan analysoimissamme oppikirjoissa? Miten matematiikan opetus etenee kokonaisen käsitteestä murtolukumerkintään ja miten sitä toteutetaan? Kuinka analysoimamme aineistot eroavat toisistaan? Miten lapsen kehitystaso sekä lähikehityksen vyöhyke huomioidaan? Ja mitkä voisivat olla hyvän matematiikan opetuksen ja kirjan pääpiirteitä?

Tutkielman tuloksista voidaan päätellä, että kaksi kirjaa toteuttavat opetusta tavalla, johon kouluissamme on totuttu eli Kymppi 3 kevään ja Tuhattaituri 3b - kirjoissa murtolukujen opetuksessa on selkeä tuntijako ja struktuuri. Meille ei tullut yllätyksenä se, että perinteisesti matematiikan opetuksessa käytettävät kirjat ohjaavat opetukseen, joka toteutuu "aukeama tunnissa" periaatteelle. Asiaa ovat tutkineet muun muassa Joutsenlahti, Perkkilä ja Sarenius (2018, 346) sekä Joutsenlahti ja Vainionpää (2010, 138–139). Heidän mukaansa painettu oppimateriaali on matematiikan opetuksessa keskeisessä roolissa eli oppikirjan struktuuri toimii opetuksen jäsentäjänä. Tämä periaate on helppo ja selkeä opettajalle, eikä se vaadi ylimääräistä suunnittelua tai etukäteisjärjestelyitä. Meille tuli yllätyksenä VaNe-opetusmenetelmän erilaiset lähtökohdat verrattuna kahteen muuhun oppilaan kirjaan ja "aukeama tunnissa" struktuurin puuttuminen. Tulimme siihen tulokseen, että tiukan struktuurin puuttuminen antaa enemmän aikaa oppilaan matemaattisen ymmärryksen kehittymiselle ja matemaattisten taitojen harjoittelulle. Tosin VaNe-opetusmenetelmän mukainen matematiikan opetus vaatii opettajalta sitoutumista koulutukseen sekä aitoa innostusta sekä kiinnostusta tämän opetusmenetelmän käyttämiseen matematiikan opetuksessa.

Alussa opetusmenetelmän käyttöön ottaminen tuottaa ylimääräistä työtä, koska opettajan pitää hankkia ja valmistaa opetuksessa tarvittavat materiaalit.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 236–237) korostetaan konkretian, toiminnallisuuden ja helposti saatavilla olevien välineiden merkitystä matematiikan opetuksessa sekä vaihtelevia työtapoja. Opetuksen lähtökohtana tulisi huomioida oppilaan omat kiinnostuksen aiheet ja oppilaita kiinnostavat ongelmat, vuorovaikutustaitojen kehittäminen ja matemaattisten ongelmien sekä ratkaisujen pohtiminen yhdessä. Lisäksi matematiikan opetuksen tavoitteissa mainitaan oppilaan matemaattisten ratkaisujen perustelemisen harjoittelu. Pohdimme sitä, että kuinka perusopetussuunnitelman perusteissa (2014, 234) mainitut matematiikan oppiaineen tehtävät, matemaattisen ajattelun kehittäminen sekä pohjan luominen ongelman ratkaisulle, tiedon käsittelylle ja matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle, voivat toteutua, jos matematiikkaa opetetaan ”aukeama kerrallaan”? Olemmeko opettajina siinä uskossa, että asia on opittu, kun aukeama on käyty tunnilla läpi. Tosin emme voi tietää, kuinka paljon opettajat käyttävät Open Kymppi 3 kevät ja Tuhattaiturin opettajan oppaan toiminnallisia ja matemaattista ajattelua kehittäviä tehtäviä matematiikan opetuksessa. VaNe-opetusmenetelmän mukaisessa, Matematiikkaa 3b -oppilaan kirjassa, ei ollut selkeää ”aukeama tunnissa” struktuuria – tai me emme ainakaan tiedä sitä. Murtolukujen opettaminen oli kokonainen paketti, joka lähti liikkeelle toiminnallisesta, konkreettisesta oppilaan omakohtaisesta kokemuksesta.

Huomasimme, että Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -oppilaan kirjoissa ei ole viittauksia toiminnallisiin tehtäviin, vaan ne löytyvät ainoastaan opettajan oppaista. Niinpä, opettajasta riippuen, tunti voidaan toteuttaa pelkistetysti opetusruutua tutkimalla ja tehtäviä mekaanisesti tekemällä. Tutkiessamme Open Kymppiä ja Tuhattaiturin opettajan opasta, huomasimme, että niissä oli monipuolisia ja konkreettisia toiminnallisia tehtäviä. Siitä syystä toivomme, että opettajat hyödyntävät niitä opetuksessaan, jotta matematiikan oppimisen eri osa-alueet tulevat huomioiduksi (ks. Kilpatrick ym. 2001). Perkkilän (2002, 158) tutkimuksen mukaan opettajat saattavat kokea opettajan oppaassa annetun

aikataulutuksen sitovana, mutta noudattavat siitä huolimatta kirjan struktuuria tunnollisesti. Tässä olisikin hyvä jatkotutkimusaihe, jossa selvitettäisiin opettajien opettajan oppaiden hyödyntämistä toiminnallisissa ja päättelyä harjoittavissa tehtävissä. Toinen jatkotutkimuksen aihe voisi olla havainnointitutkimus siitä, toteuttavatko opettajat matematiikan opetusta pelkästään oppikirjan struktuurin mukaan?

Perinteisesti matematiikan opetuksessa opettaja kertoo ja näyttää teorian oppilaille opetusruudun avulla ja sen jälkeen oppilaat saavat tehdä aukeamalla olevia laskutoimituksia kirjaan (vrt. Tikkanen 2008, 50–51). Tutkielmamme perusteella voimme todeta, että Kymppi 3 kevät – ja Tuhattaituri 3b –kirjat painottavat määritelmälähtöistä opetustapaa. Oppilaan kirjoissa ei ollut yhtään toiminnallista tehtävää. Matematiikkaa 3b –kirjasta puuttuivat pääsääntöisesti selkeät teorian *opetusruudut*, toisin kuin kahdessa muussa tutkielmamme analysoitavassa oppilaan kirjassa. VaNe-opetusmenetelmässä painotetaan metodologisia peruseriaatteita (ks. luku 2.3), jotka nivoutuvat toisiinsa muodostaen yhtenäisen kokonaisuuden ja opetus perustuu realistiseen ja ongelmalähtöiseen opetustapaan. Erityisen tärkeää tässä opetusmenetelmässä on laaja matemaattisten käsitteiden pohjustaminen (Kahanpää & Kangas 2002, 5). Matematiikan 3b –kirjan opetuksessa painottuvat toiminnallisuus ja yhdessä tekeminen ja se mikä erottaa sen perinteisestä oppikirjan strukturiin perustuvasta opetuksesta on, että VaNe-opetusmenetelmässä oppilaan kirjan tehtäviin mennään vasta sen jälkeen, kun asia ensin opeteltu ja ymmärretty. Kilpatrickin ym. (2001, 156) mukaan matemaattisten taitojen oppiminen vaatii oppilaalta useita toistokertoja saman käsitteen osalta, jotta oppilas voisi tulla taitavaksi matematiikan osaajaksi. Taitava matematiikan osaaja pystyy ongelmanratkaisuun, perustelemaan ratkaisunsa, kehittämään matemaattista ymmärrystään ja hän osaa yhdistää aiemmin opitun tiedon uuteen opeteltavaan tietoon. Onko aukeama tunnissa –periaate omiaan tukemaan oppilaan oikeaa ja syvää ymmärtämystä?

Kolmannella luokalla matematiikan opetuksessa käsitteiden ja opetettavien asioiden määrä lisääntyy alkuopetukseen nähden. Opetuksessa tulisi huomioida lapsen kehitystaso, joka on vielä tässä vaiheessa konkreettisella tasolla Piaget'n

mukaan (Beilin 2016, 123). Oppikirjasidonnaisuus opetuksessa ei tue oppilaan matemaattisten taitojen kehitystä ja tästä syystä matematiikan opetuksessa tulisikin käyttää konkreettisia opetus- ja havainnointivälineitä (vrt. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014). Murtolukukäsitteen opettamisen yhteydessä olisikin erityisen tärkeää se, että murtolukukäsitteen opettamisessa korostettaisiin käsitteen ymmärtämistä ennen oppikirjan mekaanisiin laskutehtäviin siirtymistä (Joutsenlahti & Perkkilä 2019, 12). Edellisen lisäksi tulisi opettaa kokonaisen käsitettä eri konteksteissa, jotta oppilaille muodostuisi ymmärrys siitä, että kokonainen ei aina tarkoita piirakkamallin mukaista ympyrää tai suorakaitteen muotoista aluetta. Sen lisäksi, että oppilas oppii kokonaisen käsitteen, hänen tulisi ymmärtää myös murtolukuihin liittyvä tasajaon periaate. Näitä edellä mainittuja, murtolukukäsitteen opettamiseen ja oppimiseen liittyviä tärkeitä asioita, ei opettaja voi korostaa opetuksessaan liikaa. Kokonaisen käsite jää useimmiten vajavaiseksi, koska oppikirjoissa siirrytään murtolukumerkinnän harjoitteluun liian pian. (Joutsenlahti & Perkkilä 2019.) Havaitsimme tämän saman ilmiön Kymppi 3 kevät - ja Tuhattaituri 3b -kirjoissa. Tuhattaituri 3b -kirjassa murtolukumerkintä opetettiin heti ensimmäisellä aukeamalla ja Kymppi 3 kevät -kirjassa toisella aukeamalla. Matematiikkaa 3b -kirjassa murtomerkintää harjoitellaan yhdessä kirjoittamalla aukeamalla 10.

Matematiikan oppiminen tapahtuu hierarkkisesti eli uusi asia opitaan aina vanhan tiedon päälle - voidaankin puhua niin sanotusta lumipalloefektistä (ks. Aunola & Nurmi 2018, 57). Toisaalta lumipalloefekti toimii myös toisin päin; jos oppilaalta jää jokin matematiikan käsite ymmärtämättä ja oppimatta, se vaikeuttaa uusien asioiden oppimista. Kilpatrickin ym. (2001) mukaan matemaattiset taidot kehittyvät toisistaan riippuvaisista osa-alueista. Siksi mielestämme matematiikan opetuksessa tulisikin huomioida toiminnallisuus ja monipuolisuus. Haluamme korostaa vuorovaikutuksen ja yhdessä oppimisen tärkeyttä matematiikan oppimisessa. Vuorovaikutuksessa toisten kanssa lapsi voi oppia sellaisia asioita, joita hänen ei olisi mahdollista oppia yksin. Tätä Vygotsky (1978) kutsuu lähikehityksen vyöhykkeeksi.

Toisella meistä oli kouluajoilta jäänyt ikäviä kokemuksia ja muistoja matematiikan tunteista. Yliopisto-opintojen myötä matematiikan opiskelu konkreettisten välineiden avulla ja hyvän ilmapiirin vallitessa, muutti täysin käsityksiä matematiikan opiskelusta. Uskomme ja toivomme, että nykyajan opettajat osaavat ottaa huomioon tämän hetkisen Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) konstruktivistisen oppimiskäsityksen ja lähikehityksen vyöhykkeellä toimimisen. (ks. kpl 3.2). Opiskeluaikanaamme olemme saaneet tietoa myös matematiikan kielentämisen tärkeydestä matematiikan yliopistonlehtoriltamme. Selittäessään matemaattista ajatteluaan opettajalle tai toisille oppilaille, oppilas joutuu pohtimaan opeteltavan käsitteen keskeisiä piirteitä. Näin toimimalla toteutuu myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukainen oppilaan oma pohdinta ja uuden tiedon rakentelu. Oppilaan kertoessa matemaattisista ratkaisuksistaan, toteutuu myös Perusopetuksen opetussuunnitelman mukainen vuorovaikutuksellinen oppiminen. (ks. Joutsenlahti 2003; Pehkonen & Rossi 2018, 63.) Tämän lisäksi opettajalla on mahdollisuus ymmärtää ja arvioida oppilaan matemaattista ajattelua. Tulevina opettajina haluammekin kuulla matematiikan tunteilla puheen sorinaa hiljaisen itsenäisen työskentelyn sijaan. Haluamme tarjota tuleville oppilaillemme mukavia kokemuksia ja ahaa-elämyksiä matematiikan oppitunneilla: Miten ratkaiset parisi kanssa tutkielman otsikossa olevan ongelman ”Kumpi on suurempi, puolet kolmasosasta vai kolmasosan puolikas?”. Emme halua, että kukaan oppilaistamme kokisi matematiikan vaikeiksi tai ahdistaviksi. Meitä ohjaavat luokanopettajina matematiikan opetuksessa kolme periaatetta: 1. realistinen ja ongelmalähtöinen opetustapa 2. myönteinen opiskeluilmapiiri sekä 3. kuten Perkkilä ym. (2018, 362) ovat todenneet: kirja on huono isäntä, mutta hyvä renki!

LÄHTEET

- Aaltio, I. & Puusa, A. 2011. Laadullisen tutkimuksen luotettavuus. Teoksessa A. Puusa & P. Juuti (toim.) Menetelmäviidakon raivaajat. Helsinki: Johtamistaidon opisto. 153–166.
- Alasuutari, P. 2011. Laadullinen tutkimus 2.0. 4. uudistettu painos. Tampere: Vastapaino.
- Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2018. Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 54–68.
- Aunola, K, Nurmi, J.-E., Lerkkanen, M.-K. & Rasku-Puttonen, H. 2003. The roles of achievement-related behaviours and parental beliefs in children's mathematical performance. *Educational Psychology*, 23 (4), 1–23. Saatavilla: <http://urn.fi/URN:NBN:fi:juu-201607213653> Luettu 26.3.2019.
- Beilin, H. 2016. Piaget'n teoria. Teoksessa R. Vasta (toim.) Kuusi teoriaa lapsen kehityksestä. EU: United Press.
- Bernoulli, L., Ketola, E. & Tuominen, A. 2010. Matematiikan tietokirja. Alakoulun oppimäärä ja didaktiikka. Helsinki: Tammi.
- Björn, P., Aro, M. & Koponen T. 2018. Matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimusperustainen tuki. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 184–201.
- Eskola, J. 2018. Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat: Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. 5. uudistettu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus, 209–231.
- Eskola, J. & Suoranta, J. 2005. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. 7. painos. Tampere: Vastapaino.
- Gray, E.M. & Tall, D.O. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. Saatavilla: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf> Luettu 30.4.2019.
- Hannula, M. S. & Holm, M. E. 2018. Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg &

- P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 132–155.
- Haapasalo, L. 2012. Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu. Kahdeksas päivitetty painos. Joensuu: MEDUSA-Software.
- Heinonen, J.-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit. Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 257. Saatavilla: <http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/kay/sovel/vk/heinonen/opetussu.pdf> Luettu 12.3.2019.
- Hellström, M., Johnson, P., Leppilampi, A. & Sahlberg, P. 2015. Yhdessä oppiminen: yhteistoiminnallisuuden käytäntö ja periaatteet. Helsinki: Into.
- Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 278. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/13329/9513922790.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Luettu 30.4.2019.
- Hiidenmaa, P., Löytynen, M. & Ruuska, H. 2017. Suomalaisen oppikirjallisuuden pitkät perinteet. Teoksessa P. Hiidenmaa, M. Löytönen & H. Ruuska (toim.) Oppikirja Suomea rakentamassa. Helsinki: Suomen Tietokirjailijat, 7–16.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 1997. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2016. Tutki ja kirjoita. 21. painos. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Hirvonen, R., Tolvanen, A., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2012. The developmental dynamics of task-avoidant behavior and math performance in kindergarten and elementary school. *Learning and Individual Differences* 22 (6), 1-41. Saatavilla: DOI 10.1016/j.lindif.2012.05.014 Luettu 26.3.2019.
- Holmlund, A. 2013. Lärobokens betydelse vid lektionsplanering. En intervjustudie med åtta finska och åtta svenska matematiklärare. Göteborgs universitet. Examenarbete, Lärarprogrammet, LAU395. Saatavilla: <http://ncm.gu.se/media/luma/GE-2013/holmlund.pdf> Luettu 24.4.2019.
- Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Niilo Mäki instituutti, 222–240.
- Johansson, M. 2006. Teaching Mathematics with Textbooks. A Classroom and Curricular Perspective. Luleå University of Technology Department of

- Mathematics. Doctoral Thesis 2006:23. Saatavilla: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:998959/FULLTEXT01.pdf> Luettu 27.3.2019.
- Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, 188–196. Saatavilla: https://www.researchgate.net/publication/257067181_Kielentaminen_matematiikan_opiskelussa Luettu 2.4.2019
- Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Saatavilla: <https://tam-pub.uta.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1> Luettu 3.4.2019
- Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. 2019. Sustainability Development in Mathematics Education – A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical Symbol “ $\frac{2}{3}$ ”? Sustainability 11. Saatavilla: <https://doi.org/10.3390/su11020457> Luettu 18.4.2019
- Joutsenlahti, J. Perkkilä, P. & Tossavainen, T. 2017. Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. FMSERA Journal, 1(1), 99–109. Saatavilla: <https://journal.fi/fmsera/article/view/60904/27045> Luettu 18.4.2019
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2007. Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.) Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet: Ainedidaktinen symposiumi 9.2.2007. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 77, 184–191.
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2008. Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1-6 matematiikan oppimateriaalin tarkastelua MOT-projektissa. Teoksessa: A. Kallioniemi (toim.) Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktiikan symposiumi 8.2.2008. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos 299, 547–558.
- Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, 137–148.

- Saatavilla:https://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf Luettu 14.3.2019
- Järvinen, M-L. 2011. Konstruktivistinen oppimiskäsitys opettajan pedagogisena työvälineenä alkuopetuksessa. Näkökulmia muutokseen. Tampereen yliopisto. Acta Electronica Universitatis Tamperensis 1053. Saatavilla: <http://urn.fi/urn:isbn:978-951-44-8380-6> Luettu 26.3.2019.
- Kahanpää, L. & Kangas, O. 2002. Taustakuvia. Matematiikkaa alkuopettajille. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 39.
- Kananen, J. 2017. Laadullinen tutkimus pro graduna ja opinnäytetyönä. Jyväskylä: Jyväskylän ammattikorkeakoulu.
- Karvonen, U., Tainio, L. & Routarinne, S. 2017. Oppia kirjoista. Systemaattinen katsaus suomalaisten perusopetuksen oppimateriaalien tutkimukseen. Kasvatus ja Aika 11 (4), 1–19. Saatavilla: <https://journal.fi/kasvatusjajika/article/view/68764> Luettu 16.4.2019
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press. Saatavilla: https://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2016/09/Adding-It-Up_NAP.pdf Luettu 4.3.2019
- Kiviniemi, K. 2018. Laadullinen tutkimus prosessina. Teoksessa R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. 5. uudistettu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus. 73–87.
- Koppa. 2014. Laadullisesta sisällönanalyysistä. Jyväskylän yliopisto. Saatavilla: <https://koppa.jyu.fi/> Luettu: 14.3.2019.
- Korpinen, E. 2005. Oppilaan minäkäsityksen ja itsetunnon kehittäminen pedagogiikan haasteena: Miten ”unkarilainen matematiikka” -Varga-metodi vastaa haasteeseen? Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Tutkiva opettaja 2, 152–165.
- Krzywacki, H., Pehkonen, L., & Laine, A. 2015. Promoting mathematical thinking in Finnish Mathematics Education. Teoksessa H. Niemi, A. Kallioniemi & A. Toom (toim.) Miracle of education: The principles and practices of teaching and learning in Finnish schools, 123–138. Saatavilla: DOI: 10.1007/978-94-6091-811-7 Luettu 28.3.2019
- Krzywacki, H. & Portaankorva-Koivisto, P. 2018. Suomalainen matematiikan opettaja. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 278–293.

- Kupari, P. & Hiltunen J. 2018. Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 16–53.
- Kupari, P & Nissinen, K. 2013. Background factors behind mathematics achievement in Finnish education context: Explanatory models based on TIMSS 1999 and TIMSS 2011 data. In 5th IEA International Research Conference (IRC). International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Saatavilla:https://www.iea.nl/fileadmin/user_upload/IRC/IRC_2013/Papers/IRC-2013_Kupari_Nissinen.pdf
- Luettu 27.3. 2019
- Kuusinen, J. & Korkiakangas, M. 1999. Ihmisen kehitys elämänkaaren näkökulmasta. Teoksessa J. Kuusinen (toim.) Kasvatuspsykologia. Helsinki: WSOY, 95–138.
- KvaliMOTV - 2.3.2.3 Aineisto- ja teorialähtöisyys. Saatavilla: https://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2_3_2_3.html Luettu 15.5.2019.
- KvaliMOTV - 2.3.2.4 Triangulaatio. Saatavilla: https://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2_3_2_4.html Luettu: 21.5.2019.
- KvaliMOTV - 7.3.2 Sisällönanalyysi. Saatavilla: https://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L7_3_2.html Luettu 15.5.2019.
- Lampinen, A. 2009. Varga-Neményi-menetelmän suomalaistetut materiaalit. Teoksessa P. Tikkanen (toim.) Oppikirja opetussuunnitelman todellistajana. Varga-Neményi -kesäseminaari 2008. Espoo: Varga-Neményi -yhdistys, 23–32. Saatavilla: <https://docplayer.fi/17687666-Oppikirja-opetussuunnitelman-todellistajana-varga-nemenyi-kesaseminaari-2008.html>
- Luettu 15.4.2019
- Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2011. Opettajan tienviitta 1 a. 3. suomalaistettu alkuperäisteoksesta laajennettu ja uudistettu painos. Espoo: Varga-Neményi -yhdistys.
- Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Niilo Mäki instituutti, 20–31.
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. 2015. Using textbooks in the mathematics classroom - the teachers' view. Nordic Studies in Mathematics Education, 20 (3–4), 129–156.

- Lerkkanen, M.-K. 2017. Aapinen ja lukutaidon opetus. Teoksessa P. Hiidenmaa, M. Löytönen & H. Ruuska (toim.) Oppikirja Suomea rakentamassa. Helsinki: Suomen Tietokirjailijat, 17–38.
- Margolis, E. & Zunjarwad, R. 2018. Visual Research. Teoksessa N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (toim.) The Sage Handbook of Qualitative Research. Fifth edition. California: SAGE Publications, Inc. 600–626.
- Metsämuuronen, J. 2008. Laadullisen tutkimuksen perusteet. Metodologia-sarja 4. Helsinki: International Methelp.
- Metsämuuronen, J. 2013. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. J. Metsämuuronen (toim.). Saatavilla: https://www.oph.fi/download/150841_Perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_2005.pdf
Luettu: 17.6.2019.
- Mikkilä-Erdman, M., Olkinuora, E. & Mattila, E. 1999. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta - haaste oppikirjoille. Kasvatus 30 (5), 436–449. Saatavilla: <http://elektra.helsinki.fi/se/k/0022-927-x/30/5/muuttune.pdf> Luettu 11.3.2019.
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. 2017. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Niemi, E. K. & Metsämuuronen, J. 2010. (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Saatavilla: https://www.oph.fi/julkaisut/2010/miten_matematiikan_taidot_kehittyvat Luettu 14.3.2019.
- Niemi, H. 2015. The societal factors contributing to education and schooling in Finland. Teoksessa H. Niemi, A. Kallioniemi & A. Toom (toim.) Miracle of education: The principles and practices of teaching and learning in Finnish schools, 30–49. Saatavilla: DOI: 10.1007/978-94-6091-811-7 Luettu 28.3.2019.
- Nurmi, J.-E., Ahonen, T., Lyytinen, H., Lyytinen, P., Pulkkinen, L. & Ruoppila, I. 2015. Ihmisen psykologinen kehitys. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Näveri, L. 2009. Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 309. Saatavilla: <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-10-5759-5> Luettu 25.4.2019.
- Oravec, M. & Kiviovcis, Á. 2005. Matematiikan opetus Varga-menetelmällä Unkarissa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: Tutkiva opettaja 2, 22–31.

- Osherson, D.N. & Smith, E.E. 1981. On the adequacy of prototype theory of concepts. *Cognition* 9 (1), 1–24. Saatavilla: [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(81\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0010-0277(81)90013-5) Luettu 4.3.2019.
- Pehkonen, E. & Rossi, M. 2018. Hyvää matematiikan opetusta etsimässä. Helsinki: MFKA-Kustannus.
- Perkkilä, P. 1998. Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirja -sarjan didaktinen analyysi. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Lisensiaatin tutkimus.
- Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195. Saatavilla: https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/42025/1/978-951-39-5338-6_2002.pdf Luettu 12.3.2019.
- Perkkilä, P. 2018. Tutkimusmenetelmäopinnot. Kvalitatiivinen analyysi ja tulkinta. Luennot 2018. Kokkolan yliopistokeskus Chydenius.
- Perkkilä, P. 2019. Näkökulmia matematiikan osaamiseen, rakentumiseen ja oppikirjoihin. Oulun yliopisto. Opetusvideo. KOVAT-hanke. Saatavilla: <https://vimeopro.com/user11333845/videopit2/video/297938839> Luettu 18.4.2019.
- Perkkilä, P. & Joutsenlahti, J. 2019. Taustaa ja näkökulmia koulumatematiikkaan - Murtolukujen kuvauksia alakoulun oppimateriaaleissa. Tampereen yliopisto. Lumatikka -koulutus. Luettu 1.5.2019.
- Perkkilä, P., Joutsenlahti, J. & Sarenius, V-M. 2018. Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 344–365.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla: https://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf Luettu 6.3.2019.
- Puusa, A. & Juuti, P. 2011. Mitä laadullinen tutkimus on? Teoksessa A. Puusa & P. Juuti (toim.) *Menetelmäviidakon raivaajat*. Perusteita laadulliseen tutkimuslähestymistavan valintaan. Johtamistaidon opisto, 47–57.
- Puusa, A. & Kuittinen, M. 2011. Laadullisen tutkimuksen luotettavuus- ja arviointikysymyksiä. A. Puusa & P. Juuti (toim.) *Menetelmäviidakon raivaajat*. Helsinki: Johtamistaidon opisto, 167–180.
- Rauste-von Wright, M.L., von Wright, J. & Soini, T. 2003. *Oppiminen ja koulutus*. Helsinki: WSOY.

- Ristola, P. & Jansson, K. 2019. Syökö pitkän matematiikan suosio yleissivistystä? Yle kysyi rehtoreilta – ”Opiskelijoiden jaksaminen on heikentynyt ja taitosekä taideaineiden opiskelu on vähentynyt”. Saatavilla: <https://yle.fi/uutiset/3-10826054> Luettu: 17.6.2019.
- Salo, U-M. Simsalabim, sisällönanalyysi ja koodaamisen haasteet. Saatavilla: [https://tuhat.helsinki.fi/portal/fi/publications/simsalabim-sisalloe\(2ebd2589-af67-4793-88c3-151890723cd7\).html](https://tuhat.helsinki.fi/portal/fi/publications/simsalabim-sisalloe(2ebd2589-af67-4793-88c3-151890723cd7).html) Luettu 11.6.2019.
- Schreier, M. 2012. Qualitative Content Analysis in Practice. London: SAGE.
- Seitamaa-Hakkarainen, P. 2019. Kvalitatiivinen sisällönanalyysi. Saatavilla: <https://metodix.fi/2014/05/19/seitamaa-hakkarainen-kvalitatiivinen-sisallon-analyysi/> Luettu 2.5.2019.
- Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Acta Electronica Universitatis Tampereensis 6. Saatavilla: <http://urn.fi/urn:isbn:951-44-4718-2> Luettu: 18.4.2019.
- Tainio, L., Karvonen, U. & Routarinne, S. 2015. Käsiykset oppimateriaalin käytöstä äidinkielen opettajaidentiteetin rakentumisen välineenä. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktinen symposium 13.–14.2.2014 Jyväskylän yliopisto. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 8, 192–210. Saatavilla: <https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/153212/Rajatontulevaisuus8.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Luettu 16.4.2019
- Tainio, L. & Teräs, T. 2010. Sukupuolijäsennys perusopetuksen oppikirjoissa. Opetushallitus. Raportit ja selvitykset 2010:8. Saatavilla: https://www.oph.fi/download/126079_Sukupuolijasennys_perusopetuksen_oppikirjoissa.pdf Luettu 16.4.2019
- Tall, D. 2013. How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the Three Worlds of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tikkanen, P. & Lampinen, A. 2005. Unkarilainen Varga-Neményin matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Tutkiva opettaja 2, 74–88.
- Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin”. Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylän yliopisto. Tutkimuksia 337. Saatavilla: <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/18042/9789513932473.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Luettu 11.3.2019.

- Tossavainen, T., Joutsenlahti, J., Lehtinen, M. & Merikoski, J. 2017. Suomalaisen oppikirjallisuuden pitkät perinteet. Teoksessa P. Hiidenmaa, M. Löytönen & H. Ruuska (toim.) Oppikirja Suomea rakentamassa. Helsinki: Suomen Tietokirjailijat, 217–246.
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2018. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Uudistettu laitos. Helsinki: Tammi.
- Tutkimuseettinen neuvottelukunta. 2012. Saatavilla: https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf Luettu: 16.5.2019.
- Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.
- Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset - seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13. Saatavilla: <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3226-8> Luettu 25.3.2019.
- Varga 100, 2019. Connecting Tamás Varga's legacy and current research in mathematics education. Hungarian Academy of Sciences. Saatavilla: <https://varga100.sciencesconf.org/> Luettu 1.5.2019.
- Varga-Némenyi-menetelmä 2015. "Matematiikka kuuluu kaikille." Saatavilla: <https://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/varga-nemenyi-menetelma> Luettu 11.3.2019.
- Vettenranta, J. Hiltunen, J. Nissinen, K. Puhakka, E. & Rautopuro, J. 2016. Lap-suudesta eväät oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMMS-tutkimus Suomessa. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Saatavilla: <https://ktl.jyu.fi/fi/julkaisut/julkaisuluettelo-1/julkaisujen-sivut/2016/KTL-D117.pdf> Luettu 14.3.2019
- Viholainen, A., Partanen, M., Piironen, J., Asikainen, M. A. & Hirvonen, P. E. 2015. The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. Nordic Studies in Mathematics Education, 20 (3–4), 157–178.
- Vygotsky, L.S. 1978. Mind in society: The development of higher psychological processes. Toim. M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & Souberman. Alkuperäisteos vuodelta 1938. Cambridge: Harvard University Press.
- Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toinen uudistettu painos. Niilo Mäki instituutti, 123–137.

AINEISTOLÄHTEET

- Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. 2016. 2. painos. Tuhattaituri 2 a. Helsinki: Otava.
- Kiviluoma, P. Nyrhinen, K. Perälä, P. Rokka, P. Salminen, M. & Tapiainen, T. 2015. Tuhattaituri 3b. 1.-7. painos. Helsinki: Otava.
- Kiviluoma, P. Nyrhinen, K. Perälä, P. Rokka, P. Salminen, M. & Tapiainen, T. 2015. Tuhattaituri 3b opettajan opas, digiopetusaineisto. 2. painos. Saatavilla: Otavan opepalvelu.
- Lampinen, A. Neményi, E.C. Wéber, A. & Peltola, P. 2016. Opettajan tienviitta 3b. 2. painos. Espoo: Varga-Neményi -yhdistys.
- Neményi, E.C., Oravec, M. Sz. & Lampinen, A. 2017. Matematiikkaa 2b. 5. painos. Varga-Neményi.
- Neményi, E.C., Wéber, A. Lampinen, A. Paavola, S. Peltola, P. & Puumalainen, K. 2016. Matematiikkaa 3b. 2. painos. Varga-Neményi.
- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. 2018. Open Kymppi 3 (kevät). 3.-4. painos. Helsinki: Sanoma Pro.
- Rinne, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T. & Uus-Leponiemi, M. 2017. Kymppi 2 (syksy). 7.-9.painos. Helsinki: Sanoma Pro.
- Rinne, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T. & Uus-Leponiemi, M. 2018. Kymppi 3 (kevät). 6.-8. painos. Helsinki: Sanoma Pro.