

ETENEVÄN PALORINTAMAN DYNAMIIKKA

OTTO IKÄHEIMONEN
8. ELOKUUTA 2019



Jyväskylän yliopisto
Fysiikan laitos

PRO GRADU -TUTKIELMA

Ohjaajat:
Juha Merikoski
Jussi Maunuksela

Tiivistelmä

Ikäheimonen, Otto
Etenevän palorintaman dynamiikka
Pro gradu -tutkielma
Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2019, 32 sivua

Tässä työssä jatkettiin aikaisemmin Jyväskylän yliopistossa tehtyä kansainvälistäkin tunnustusta saanutta tutkimusta hitaasti paperissa etenevän $1 + 1$ -ulotteisen palorintaman dynamiikasta ja sen yhteydestä KPZ-universaalisuusluokkaan. Poiketen aikaisemmista tutkimuksista työssä on tutkittu aikaisempaa pidempiä polttoja, joiden avulla on parannettu palorintaman stationaarisen alueen statistiikkaa, ja yleisesti vähälle huomiolle jääneitä rajapintojen reunailmiöitä. Molemmissa tapauksissa tutkittuina suureina ovat korrelaatiofunktiosta saadut skaalauseksponentit β ja χ sekä korkeusfluktuaatiojakauma ja sitä kuvaavat tunnusluvut vinous ja huipukkuus. Työssä käytiin läpi etenevien rajapintojen perusteoriaa eli Family–Vicsek-skaalauslaki, EW-yhtälö sekä yksinkertaisin eteneviä rajapintoja kuvaava KPZ-yhtälö. Myös kokeellinen laitteisto ja poltto-koedatan analysointiin käytetyt algoritmit käytiin läpi.

Koko poltoille tarkastellut korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakauma osoittivat, että tarkasteltu paperinpolttodata ei vastaa KPZ-yhtälön ennustetta kasvueksponenttia β lukuunottamatta. Kasvueksponentin käyttäytyminen ja aikaisemmin tehdyt tutkimukset kuitenkin viittaavat siihen, että eksponentin χ ja korkeusfluktuaatiojakaumien huono käyttäytyminen johtuvat statistiikan puutteesta.

Reunailmiöitä tarkasteltiin kahdelle eri leveyksiselle reunalle ja niiden tarkastelussa suurin huomio kiinnittyy korkeusfluktuaatiojakaumien käyttäytymiseen, sillä paperin vastakkaisten reunojen korkeusfluktuaatiojakaumien käyttäytyminen oli hyvin samankaltaista koko poltoille saadun korkeusfluktuaatiojakauman kanssa vaikka reunojen ja koko polttojen korrelaatiofunktioiden välillä oli merkittävä ero. Tämä yllättävä havainto tarjoaa motivaation reunailmiöiden jatkotutkimukselle.

Avainsanat: etenevä palorintama, reunailmiöt, Family-Vicsek skaalauslaki, Edwards-Wilkinson-yhtälö, KPZ-yhtälö

Abstract

Ikäheimonen, Otto

The Dynamics of The Propagating Combustion Front

Master's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2019, 32 pages

In this thesis the work with the dynamics of the propagating 1+1-dimensional slow combustion fronts and its connection to KPZ universality class, which has been done previously in University of Jyväskylä, were continued. The studies in this thesis differ from previous studies with longer measurements of the combustion front which helped to get more statistics from the stationary part of the dynamics, and the studies with widely ignored edge phenomena of the interfaces. In both cases scaling exponents β and χ , which are obtained from the correlation function, and the height fluctuation distribution and its skewness and kurtosis were studied. In the thesis the basic theory of the propagating interfaces were explained, i.e. Family-Vicsek scaling law, EW equation and KPZ equation, which is the simplest equation to describe propagation of the interface, were gone through. The experimental set-up and algorithms used to analyse the data were described.

The results for the bulk of the combustion fronts where correlation function and height fluctuation distribution were studied are that exponent β is the only characteristics which match with the KPZ equation's prediction. The behaviour of the growth exponent β and the previous studies still implies that the behaviour of the exponent χ and the height fluctuation distribution can be explained with lack of statistics.

Edge phenomena were studied with two different sizes of edges and the unexpected result was that the behaviour of the height fluctuation distribution at the edges were really close to the behaviour of the height fluctuation distribution in the bulk. This behaviour was there although the behaviour of the correlation functions differed significantly when edges and bulk were compared. This surprising observation generates the motivation for the future studies of edge phenomena of the propagating interfaces.

Keywords: propagating combustion front, edge phenomena,
Family-Vicsek scaling, Edwards-Wilkinson-equation, KPZ-equation

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Etenevien rajapintojen teoriaa	3
2.1	Family–Vicsek-skaalauslaki	3
2.2	Lineaarinen teoria	4
2.3	Kardar–Parisi–Zhang (KPZ)-yhtälö	7
3	Koelaitteisto ja kokeet	13
4	Data-analyysi	14
4.1	Palorintaman tunnistaminen kuvista	14
4.2	Palorintamadatan esikäsittely	14
4.3	Stationaarisen alueen selvittäminen	17
4.4	Korrelaatiofunktioiden $G(r)$ ja $C(t)$ laskeminen	17
4.5	Korkeusflukтуаatiojakauman laskeminen	19
5	Tuloksia ja pohdintaa	20
5.1	Rintaman leveys ja stationaarinen alue	20
5.2	Yksittäisten polttojen korrelaatiofunktiot ja korkeusflukтуаatiojakaumat	21
5.3	Keskiarvoistetut korrelaatiofunktiot ja korkeusflukтуаatiojakauma .	23
5.4	Reunailmiöt	26
6	Johtopäätökset	29

1 Johdanto

Rajapintoja esiintyy luonnossa kaikkialla ja tästä syystä ne ovat fysiikassa hyvin yleisesti tarkastelun kohteena. Kun puhutaan rajapinnoista niin kuin useimmat asian käsittävät, eli paikallaan pysyvistä rajapinnoista, ovat ne yleensä kaksiulotteisia pintoja. Tyypillinen aloittelevan fyysikon eteen tuleva esimerkki on lasin ja ilman välinen rajapinta. Tämän työn kannalta kiinnostus keskittyy kuitenkin liikkuviin rajapintoihin, kuten etenevän metsäpalon palorintama ja bakteerikasvuston tai syöpäsolukon reunan kasvu. Nämä erityyppiset etenevät rajapinnat näyttävät samankaltaisilta, joten on suorastaan fyysikon velvollisuus ajatella, voitaisiinko etenevien rajapintojen fysiikkaa kuvata jonkin yleisen mallin avulla.

Tällaisia malleja ovat esimerkiksi *Family–Vicsek-skaalautuslaki* [1], joka kuvaa rajapinnan leveyden skaalautumista ajan ja systeemin koon funktiona, *Edwards–Wilkinson-yhtälö* [2], joka on lineaarinen malli rajapinnan korkeuden aikakehitykselle, sekä Edwards–Wilkinson-yhtälöä yleistävä epälineaarinen *KPZ-yhtälö*, jonka esittivät Kardar, Parisi ja Zhang vuonna 1986 [3]. KPZ-yhtälö on yksinkertaisin teoria, joka kuvaa rajapinnan etenemistä epäjärjestäytyneessä materiaalissa. Tästä syystä varsinkin sen $1 + 1$ -ulotteista (yksi spatiaalinen ulottuvuus ja aika) tapausta on tutkittu paljon.

Esimerkiksi KPZ-yhtälön toimivuus $1 + 1$ -ulotteisessa tapauksessa on osoitettu useilla eri kokeilla [4–7]. KPZ-yhtälön epälineaarisuuden vuoksi on sen eksakti ratkaisu vaikeaa ja vasta vuonna 2010 ratkaisu löytyi [8]. Myös Jyväskylän yliopiston fysiikan laitoksella on tehty kansainvälisesti tunnustettua työtä etenevien rajapintojen tutkimisessa. Esimerkiksi Jussi Maunuksela, Markko Myllys, Juha Merikoski, Jussi Timonen ynnä muut [4, 5, 9] ovat osoittaneet rintaman korkeuden korrelaatioita analysoimalla, että paperissa hitaasti etenevä palorintama käyttäytyy KPZ-yhtälön mukaisesti, sekä Lasse Miettinen ynnä muut [10] ovat tutkineet etenevän palorintaman korkeusfluktuaatiojakauman käyttäytymistä. Muuta palorintaman etenemiseen liittyvää tutkimusta on tehty julkaisuissa [11–14].

Tässä työssä jatketaan Jyväskylässä aiemmin tehdyn tutkimuksen viitoittamalla tiellä, eli tutkitaan paperissa etenevän palorintaman yhteneväisyyttä KPZ-dynamiikan kanssa. Työssä tarkastellaan mittauksia, joiden tarkoituksena oli saada aikaan aikaisempaa pidempiä polttoja, jotta KPZ-yhtälön mukainen käyttäytyminen saataisiin paremmin esille. Työssä tutkitaan myös etenevien rajapintojen tutkimuksessa vähälle huomiolle jääneitä systeemin reunailmiöitä eli tässä tapauksessa paperin reunoilla tapahtuvaa fysiikkaa. Siis verrattuna aikaisempiin tutkimuksiin uutta tässä työssä ovat pidemmät poltot, mahdollistaen paremman statistiikan stationarisessa alueessa, sekä reunailmiöiden karakterisointi. Tietävästi reunailmiöitä ei ole tutkittu vastaaville systeemeille aiemmin. Reunailmiöitä tutkiessa sopivan vertailukohdan saamiseksi on oleellista tutkia samoja suureita samoista poltoista myös kaukana paperin reunoista.

Työn alkuosassa tutustutaan etenevien rajapintojen teoriaan, Family–Vicsek skaalautuslakiin, lineaariseen Edwards–Wilkinson-yhtälöön sekä itse KPZ-yhtälöön. Lisäksi

esitellään tapoja, joiden avulla voidaan selvittää käyttäytykö jokin fysikaalinen systeemi KPZ-yhtälön mukaisesti. Tämän jälkeen esitellään kokeelliset menetelmät sekä kokeista saadun datan analysointiin käytetyt menetelmät. Lopuksi selvitetään käyttäytykö paperissa etenevä palorintama KPZ-dynamiikan mukaisesti paperin keskiosassa sekä reunoilla.

2 Etenevien rajapintojen teoriaa

Teoriaosassa käydään läpi etenevän rajapinnan perusteoriaa mukaillen Barabàsin ja Stanley'n sekä Takeuchin teoksia [15, 16]. Kyseiset teokset kuvaavat erittäin hyvin eteneviä rajapintoja ilmiönä ja sen perusteoriaa, ja ovat siten hyvää luettavaa polkunsa alkutaipaleella olevalle etenevien rajapintojen asiantuntijalle. Tarkastelun kohteena on ideaalisesta sileän kaareutumattoman rajapinnan alkutilasta lähtevä dynamiikka, joka etenee kohti äärellisessä ajassa saavutettavaa stationaarista tilaa.

2.1 Family–Vicsek-skaalauslaki

Määritellään rajapinnan pystysuuntaiseksi sijainniksi eli korkeudeksi suure $h(x, t)$, joka on yksiarvoinen funktio eli rajapinta ei voi kääntyä itsensä alle ja se riippuu rajapinnan poikittaissuuntaisesta paikasta x ja ajasta t . Tämän suureen avulla voidaan määritellä etenevän rintaman keskikorkeus

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L h(x', t) dx', \quad (2.1)$$

missä L on rajapinnan x -suuntainen pituus ja $h(x', t)$ on rintaman korkeus eli sijainti y -suunnassa paikassa x' ajanhetkellä t . Rajapinnan leveys on $w(L, t)$, joka riippuu tarkasteltavan systeemin leveydestä L ja ajasta t . Rajapinnan leveys kuvaa rajapinnan karheutta eli sitä kuinka paljon yksittäisen rajapinnan pisteen korkeus eroaa sen keskikorkeudesta. Rajapinnan leveys on määritelty sen korkeuden fluktuaatioiden neliöllisenä keskiarvona,

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L [h(x', t) - \bar{h}(t)]^2 dx'}. \quad (2.2)$$

Rajapinnan leveydelle on monissa kokeissa ja simulaatioissa [15, 17] näytetty, että se käyttäytyy seuraavien potenssilakien mukaisesti, joita yhdistettynä kutsutaan Family–Vicsek-skaalauslaiksi [1]

$$w(L, t) \sim L^\chi f\left(\frac{t}{L^z}\right) \sim \begin{cases} t^\beta & , t \ll t_\times \\ L^\chi & , t \gg t_\times \end{cases}, \quad (2.3)$$

missä $f\left(\frac{t}{L^z}\right)$ on skaalausfunktio, jota tutkimalla saadaan Family–Vicsek-skaaluslain mukaiset asymptoottiset käyttäytymiset. Yhtälö näyttää, että rajapinnan leveyden käyttäytymisestä löytyy kaksi eri aluetta, joita erottaa saturoitumisaika t_\times . Paljon ennen saturoitumisaikaa rajapinnan leveys käyttäytyy potenssilain $w(L, t) \sim t^\beta$ mukaisesti, missä kriittistä eksponenttia β kutsutaan kasvueksponentiksi. Saturoitumisajan jälkeen w asettuu L :stä riippuvaan vakioarvoon $w_{sat}(L) \sim L^\chi$, missä kriittistä eksponenttia χ kutsutaan karheuseksponentiksi.

Kun tarkastellaan saturoitumisaikaa t_\times systeemin leveyden funktiona, saadaan yhtälöstä (2.3) riippuvuus

$$t_\times \sim L^z, \quad (2.4)$$

missä eksponenttia z kutsutaan dynaamiseksi eksponentiksi. Tähän päädytään tarkastelemalla rajapinnan leveyden käyttäytymistä saturoitumisajan läheisyydessä. Eksponentit χ , β ja z eivät ole riippumattomia. Tämä voidaan perustella lähestymällä saturoitumisaikaa vasemmalta puolelta, jolloin käyttäytyminen on verrannollinen funktioon $w(t_\times) \sim t_\times^\beta$. Jos lähestyminen tehdään oikealta käyttäytyminen on funktion $w(t_\times) \sim L^\chi$ mukaista. Näistä kahdesta käyttäytymisestä saadaan, että $t_\times^\beta \sim L^\chi$, josta yhtälön (2.4) avulla saadaan eksponenteille relaatio

$$z = \frac{\chi}{\beta}. \quad (2.5)$$

On huomattava, että yhtälö (2.5) pätee kaikille systeemeille, jotka noudattavat Family–Vicsek-skaalauslakia (2.3).

2.2 Lineaarinen teoria

Aloitetaan rajapinnan kasvun teorian kuvailu muodostamalla tasapainotilassa ($t \gg t_\times$) olevaa rajapintaa kuvaava mahdollisimman yksinkertainen differentiaaliyhtälö tarkastelemalla sen asympotoottista käyttäytymistä ja käyttämällä systeemin symmetriaehtoja. Tätä varten rajapinta, jonka korkeus, samaan tapaan kuin luvussa 2.1, on $h(\mathbf{x}, t)$, missä \mathbf{x} on paikkavektori, jonka ansiosta useampiulotteiset tapaukset ovat myös sallittuja. Rajapinnan korkeus on siis yksiarvoinen funktio ja siinä ei näin ollen saa olla kohtia, jossa rintama on kääntynyt itsensä päälle. Rajapinnan korkeuden avulla ilmaistuna oletetaan rajapinnan etenemistä kuvaavan yhtälön eli kasvuyhtälön olevan muotoa

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = G(h, \mathbf{x}, t) + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

missä $G(h, \mathbf{x}, t)$ on funktio, joka riippuu rajapinnan korkeudesta, paikasta ja ajasta, ja $\eta(\mathbf{x}, t)$ on kohinatermi. Etsitään funktion $G(h, \mathbf{x}, t)$ muotoa ongelmasta löytyvien symmetriaehtojen avulla [15]:

- (i) *Aika-translaatioinvarianssi.* Kasvuyhtälön pitää olla riippumaton siitä miten ajan nollakohta on määritelty, eli systeemin pitää olla invariantti muunnoksessa $t \rightarrow t + \delta t$. Tästä syystä funktiossa G ei voi olla eksplisiittistä aikariippuvuutta.
- (ii) *Translaatioinvarianssi rajapinnan kasvusuunnassa.* Rajapinnan kasvun ei pidä riippua siitä mihin $h = 0$ on määritelty eli kasvuyhtälön tulee olla invariantti muunnoksessa $h \rightarrow \delta h$. Tästä syystä G ei voi riippua suoraan h :sta, joten G muodostuu jostain kombinaatiosta h :n derivaattoja ($\nabla h, \nabla^2 h, \dots \nabla^n h$).
- (iii) *Translaatioinvarianssi kohtisuoraan rajapinnan kasvusuuntaa vasten.* Yhtälössä ja näin ollen funktiossa G ei saa olla suoraa riippuvuutta paikkavektorista \mathbf{x} eli systeemin pitää olla invariantti muunnoksessa $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$.

- (iv) *Pyörähdys- ja peilaussymmetria suhteessa kasvusuuntaan \mathbf{n} .* Tämä symmetria johtaa siihen, ettei G :ssä voi olla parittomia korkeuden derivaattoja, kuten esimerkiksi ∇h ja $\nabla(\nabla^2 h)$.
- (v) *Ylös-alas-symmetria h :lle.* Tästä syystä rajapinnan fluktuaatiot ovat samankaltaisia rintaman korkeuden keskiarvon suhteen riippumatta fluktuaatioiden suunnasta, eli $h \rightarrow -h$. Siten funktio G ei voi riippua ∇h :n parillisista potensseista kuten $(\nabla h)^2$ tai $(\nabla h)^4$. On myös hyvä huomata, että ylös-alas-symmetria liittyy vahvasti tasapainotilaan, jossa h fluktuoii tietyn keskiarvon ympärillä ja on hyvin oletettavaa, ettei ko. symmetria päde tasapainotilasta poikkeutetulle systeemille.

Näitä symmetriaehtoja käyttämällä saadaan differentiaaliyhtälölle muoto

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = & (\nabla^2 h) + (\nabla^4 h) + \dots + (\nabla^{2n} h) + (\nabla^2 h)(\nabla h)^2 + \dots \\ & + (\nabla^{2k} h)(\nabla h)^{2j} + \eta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

missä n, k ja j ovat positiivisia kokonaislukuja.

Koska kiinnostuksena on systeemin stationaarinen tila, voidaan tarkastella sen asympotoottista käyttäytymistä eli rajoja $t \rightarrow \infty$ ja $x \rightarrow \infty$, jolloin pystytään yhtälöä sieventämään. Tällä hydrodynaamisella rajalla, jolla systeemin skaalausominaisuudet korostuvat, pienemmän asteen derivaatat ovat tärkeämmässä asemassa kuin korkean asteen derivaatat. Tästä syystä tätä tarkastelua vasten kaikki paitsi pienimmän asteen derivaatta voidaan jättää yhtälöstä pois. Näin saamme aikaan Edwards–Wilkinson-yhtälön (EW-yhtälö) [2]

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.8)$$

mikä näyttää muusta yhteydestä tutulta diffuusioyhtälöltä, johon on lisätty kohina η . Vakiota ν kutsutaan *pintajännitykseksi*, koska yleensä diffuusiotermin $\nabla^2 h$ tasoittaa h :n vaihteluita, kuten kuvista 1a ja 1b käy ilmi. Yhtälön (2.8) viimeinen termi eli kohinatermi $\eta(\mathbf{x}, t)$ kuvaa sattumanvaraisia fluktuaatiota. Palorintaman tapauksessa kohinatermi kuvaa epäjärjestäytyneitä materiaa, jossa rajapinta etenee. Yleensä η valitaan niin, että kohinan korrelaatiot ovat delta-piikittyneitä ja sen keskiarvo on

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Korrelaatiot parametrisoidaan seuraavasti:

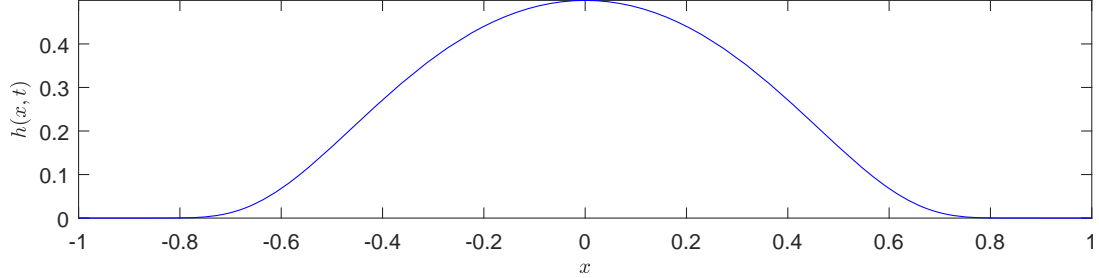
$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'), \quad (2.10)$$

missä D on vakio, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ja $\delta(t - t')$ Diracin delta-funktioita ja d rajapinnan ulottuvuus. EW-yhtälön (2.8) mukaisen rajapinnan keskinopeus on nolla:

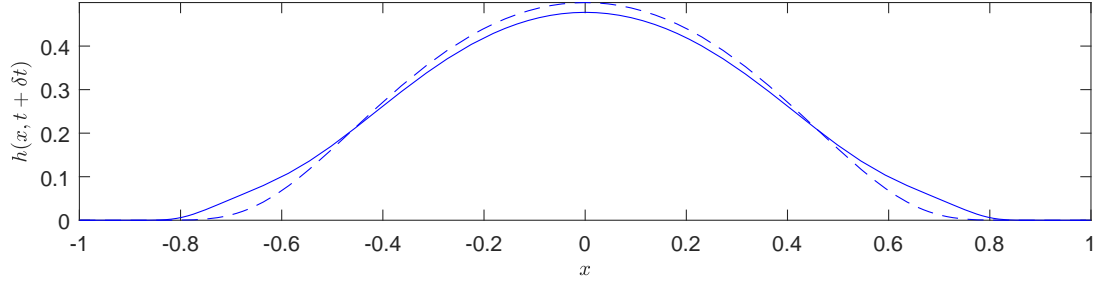
$$v = \int \left\langle \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle d^d \mathbf{x} = 0. \quad (2.11)$$

Keskimäärin tasaisesti etenevä rintama saadaan aikaan lisäämällä EW-yhtälöön vakionopeustermi v , jolloin saadaan

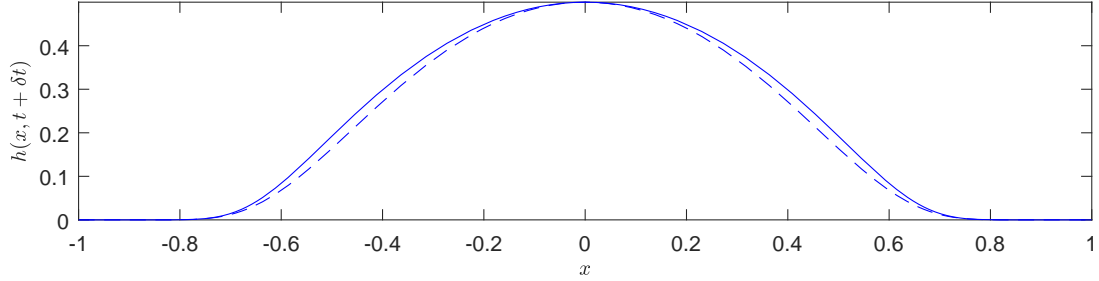
$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v + \nu \nabla^2 h + \eta(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$



(a) Rajapinnan korkeus ajanhetkellä $t = t_0$



(b) Lineaarisen termin aiheuttama aikakehitys eli $h(x, t + \delta t) = h(x, t) + \nu \nabla^2 h \delta t$. Kuvassa katkoviiva on rintaman korkeus alkuhetkellä eli $h(x, t)$ ja yhtenäinen viiva $h(x, t + \delta t)$, mistä nähdään, että lineaarinen termi tasoittaa rajapinnan korkeusfluktuaatiota.



(c) Epälineaarisen termin aiheuttama aikakehitys eli $h(x, t + \delta t) = h(x, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 \delta t$. Kuvassa katkoviiva on rintaman korkeus alkuhetkellä eli $h(x, t)$ ja yhtenäinen viiva $h(x, t + \delta t)$, mistä nähdään, että epälineaarinen termi aiheuttaa rajapintaan sen lateraalisuuntaisen kasvun.

Kuva 1. Havainnollistus KPZ-yhtälön lineaarisen ja epälineaarisen termin vaikutuksesta rajapinnan etenemiseen.

Koska EW-yhtälö on lineaarinen, onnistuu sen eksakti ratkaiseminen ja kriittisten eksponenttien arvojen löytäminen tekemällä yhtälöön (2.8) Fourier-muunnos liikemäärävaruuteen, jolloin saadaan

$$h(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\eta(\mathbf{k}, \omega)}{\nu k^2 - i\omega}, \quad (2.13)$$

missä $\eta(\mathbf{k}, \omega)$ on kohinatermin $\eta(\mathbf{x}, t)$ Fourier-muunnos. Muunnetulle kohinalle pätee

$$\langle \eta(\mathbf{k}, \omega) \rangle = 0. \quad (2.14)$$

ja

$$\langle \eta(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}', \omega') \rangle = 2D \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \quad (2.15)$$

Yhtälöstä (2.13) saadaan rintaman korkeuden korrelaatiofunktioiksi

$$\langle h(\mathbf{k}, \omega) h(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{\langle \eta(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}', \omega') \rangle}{(\nu k^2 - i\omega)(\nu k'^2 - i\omega')}, \quad (2.16)$$

josta jonkinmoisen laskemisen [18] ja takaisinmuunnoksen jälkeen paikka-avaruuteen saadaan

$$\langle h(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}', t') \rangle = \frac{D}{2\nu} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{2-d} f\left(\frac{\nu |t - t'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}\right), \quad (2.17)$$

missä $f(u)$ on laskuista saatu skaalausfunktio, jolle pätee $f(u) \rightarrow \text{vakio}$, kun $u \rightarrow \infty$ ja $f(u) \rightarrow u^{(2-d)/2}$, kun $u \rightarrow 0$. Vertaamalla yhtälöä (2.17) Family–Vicsek-skaalausrelaatioon (2.3) saadaan EW-yhtälölle skaalauseksponenttien arvoksi

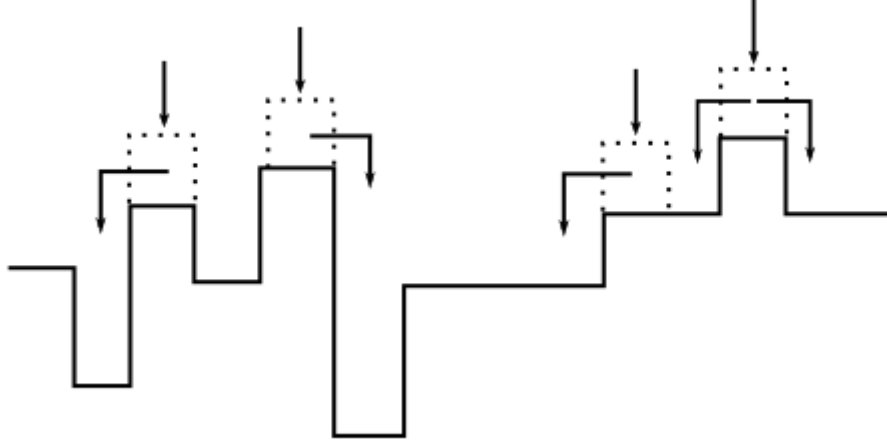
$$\chi = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4} \quad \text{ja} \quad z = 2. \quad (2.18)$$

Yksiulotteisessa tapauksessa skaalauseksponentit saavat EW-yhtälölle arvot $\chi = 1/2$, $\beta = 1/4$ ja $z = 2$. On myös hyvä huomata, että vakionopeuden v lisääminen ei muuta korkeuden h korrelaatioita eikä siksi muuta skaalauseksponenttien arvoja, vaikka se rikkookin ylös-alas-symmetrian.

Havainnollisuuden vuoksi tarkastellaan seuraavaksi diskreettiä RD-mallia (Random Deposit -malli), johon on sallittu rajapinnan relaksoituminen ja joka käyttäytyy asympotoottisesti EW-yhtälön mukaan. RD-mallia on havainnollistettu kuvassa 2. Satunnaisesti pudotetut partikkelit putoavat yhtä saraketta pitkin kunnes ne osuvat rajapintaan ja näin ollen kasvattavat rajapinnan korkeutta kyseisessä kohdassa. Rajapinnan relaksoituminen tuodaan malliin siten, että pudonneen partikkelin annetaan diffusioitua rajapintaa pitkin, kunnes se on päässyt korkeuden lokaalin minimiin. Kyseinen prosessi aiheuttaa korrelaatioita vierekkäisten rajapinnan korkeuksien välille, minkä johdosta koko rajapinta on korreloitunut. Kun systeemin annetaan kehittyä ajassa tarpeeksi kauan, korrelaatiot aiheuttavat rajapinnan saturoitumisen samaan tapaan kuin Family–Vicsek-skaalauslain yhteydessä.

2.3 Kardar–Parisi–Zhang (KPZ)-yhtälö

Lineaarisen luonteensa vuoksi edellisen luvun EW-yhtälö (2.8) on liian yksinkertainen kuvaamaan yleisesti rajapinnan etenemisen ilmiöitä. Tämä johtuu siitä, että



Kuva 2. Edwards–Wilkinson-yhtälön mukaisesti käyttäytyvä RD-malli rajapinnan relaxoitumisella. Mallissa satunnaisesti pudotetut partikkelit matkustavat pudottuaan rajapinnan mukana kunnes löytävät lokaalin minimin.

EW-yhtälön mukainen rintama pyrkii etenemään suoraan rintaman korkeuden suuntaisesti, eli h -akselin suuntaan, huolimatta diffuusion ja kohinatermin aiheuttamasta häirinnästä. Yleisesti fysikaaliset rajapinnat pyrkivät etenemään ennemmin rajapinnan lokaalin normaalin \mathbf{n} suunnassa kuin h -akselin suuntaan. Lisäksi etenevät rajapinnat eivät tavallisesti vastaa tasapainotilaa, joten luvun 2.2 ehto (v) ei ole voimassa. Tästä syystä EW-yhtälöä on yleistettävä.

Otetaan yleistyksen lähtökohdaksi edellinen huomio siitä, että fysikaaliset rajapinnat yleensä etenevät lokaalin rajapinnan normaalin suuntaan. Tällöin rajapinnan korkeuden kasvulle δh h -akselin suuntaan saadaan yhden aika-askelen δt aikana Pythagoraan lauseella (kuva 3)

$$\delta h = [(v\delta t)^2 + (v\delta t\nabla h)^2]^{1/2} = v\delta t [1 + (\nabla h)^2]^{1/2}. \quad (2.19)$$

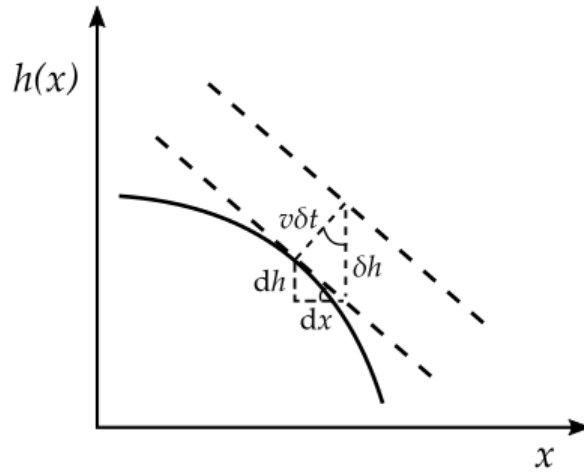
Jos $|\nabla h| \ll 1$, kehittämällä edellinen yhtälö (2.19) ∇h :n suhteen saadaan

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v + \frac{v}{2}(\nabla h)^2 + \dots \quad (2.20)$$

Tarkastelu viittaisi siihen, että lisäämällä epälineaarinen $(\nabla h)^2$ termi EW-yhtälöön saadaan kuvattua rajapintoja, jossa kasvu tapahtuu lokaalin pinnan normaalin suuntaan. Tästä rohkaistuneena lisätään edellä oleva termi EW-yhtälöön, jolloin saadaan stokastinen epälineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.21)$$

missä λ on vakio. Tämä yhtälö tunnetaan KPZ-yhtälönä [3] kehittäjiensä Kardarin, Parisin ja Zhangin mukaan. KPZ-yhtälö on yksinkertaisin yhtälö kuvaamaan



Kuva 3. Lokaalin normaalin suuntainen rintaman kasvu 1 + 1-ulotteisessa tilanteessa, josta saadaan KPZ-yhtälön epälineaarinen termi.

rajapinnan etenemistä epäjärjestyneessä materiaalissa. Useat kokeelliset tulokset osoittavat KPZ- yhtälön toimivuuden [4–7]. Yhtälön ensimmäinen ja viimeinen termi ovat diffuusio ja kohinatermi kuten luvussa 2.2. Kohinatermi käyttäytyy yhtälöiden (2.9) ja (2.10) mukaisesti. Juuri lisätty epälineaarinen termi on ns. kasvutermi, joka on verrannollinen $\lambda:n$. Epälineaarinen termi kuvaa rintaman kasvua pinnan lokaalin normaalin suuntaan, kuten edellä olevista perusteluista käy ilmi. Kuvien 1a ja 1c avulla on havainnollistettu epälineaarisen termin vaikutusta rajapinnan etenemiseen. Voidaan myös havaita, että KPZ-yhtälölle pätevät samat symmetriaehdot kuin EW-yhtälölle lukuun ottamatta viimeistä eli viidettä ehtoa (luku: 2.2). Toisin sanoen epälineaarisen termin lisääminen aiheutti *ylös-alas-symmetrian* rikkoutumisen, eli KPZ-yhtälö ei ole invariantti muunnoksessa $h \rightarrow -h$. On myös hyvä huomata, että EW-yhtälöstä poiketen KPZ-yhtälön antama rajapinnan keskimääräinen nopeus on epälineaarisen termin ansioista nolasta poikkeava eli

$$v = \frac{\lambda}{2} \int_0^L d^d \mathbf{x} \langle (\nabla h)^2 \rangle. \quad (2.22)$$

Näin ollen KPZ-yhtälön mukainen rajapinta etenee ilman ulkopuolista ajavaa voimaa, joka EW-yhtälön (2.12) tapauksessa on vakionopeus v .

KPZ-yhtälön mukaiset skaalausekspONENTIT saadaan 1 + 1-ulotteiselle systeemille Fokker–Planck-yhtälön ja flukтуаatio-dissipaatio-teoreeman avulla. Otetaan aluksi tarkasteluun yksinkertainen Langevin-yhtälö muotoa [19]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = G(h) + \eta(t), \quad (2.23)$$

missä kohinan korrelaatiot ovat $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$. Yllä olevalle Langevin-yhtälölle saadaan Fokker–Planck-yhtälö määrittelemällä todennäköisyys Π sille, että

systemin rajapinnan korkeus on h ajanhetkellä t :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial h} [G(h)\Pi] + D \frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}. \quad (2.24)$$

Tähän erikoistapaukseen verrattuna KPZ-yhtälön tarkastelu on monimutkaisempaa, koska korkeus h riippuu paikkavektorista \mathbf{x} . Tästä syystä Fokker–Planck-yhtälö sisältää jatkuvia muuttujia, jotka on parametrisoitu \mathbf{x} :llä. Näin ollen joudumme integroimaan Fokker–Planck-yhtälön näiden muuttujien yli [19]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\int d^d \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial h} [G(h)\Pi] + D \int d^d \mathbf{x} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}. \quad (2.25)$$

Kun $G(h)$ korvataan KPZ-yhtälöä (2.21) vastaavalla muodolla, saadaan

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\int d^d \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial h} \left[\left(\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 \right) \Pi \right] + D \int d^d \mathbf{x} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial h^2}. \quad (2.26)$$

Tässä vaiheessa ei ole selvää onko yhtälöllä (2.26) stationaarista ratkaisua, mutta 1 + 1-ulotteisessa tilanteessa eli kun $d = 1$ voidaan todeta helpohkosti, että todennäköisyysjakauma

$$\Pi = \exp \left(-\int dx \left[\frac{\nu}{2D} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \right) \quad (2.27)$$

on stationaarinen ratkaisu yhtälölle (2.26). Tämä onnistuu vain, kun $d = 1$. KPZ-yhtälön mukainen karheusekspONENTTI χ saadaan huomaamalla, että yhtälö (2.27) on myös ratkaisu EW-yhtälölle (2.8). Koska kummankin yhtälön mukaisilla rajapinnoilla on sama stationaarinen todennäköisyysjakauma, on niillä myös oltava sama karheusekspONENTTI. Siis 1 + 1-ulotteiselle KPZ-yhtälölle

$$\chi = \frac{1}{2}. \quad (2.28)$$

Eksponentti z saadaan skaalaamalla KPZ-yhtälöä korkeuden ($h \rightarrow b^\chi h$) ja ajan ($t \rightarrow b^z t$) suhteen sekä kohinaisen Burgers-yhtälön avulla saadusta tiedosta, että KPZ-yhtälön epälineaarinen osa on invariantti tietyissä skaalamuunnoksissa [15]. Näistä saadaan skaalausrelaatio

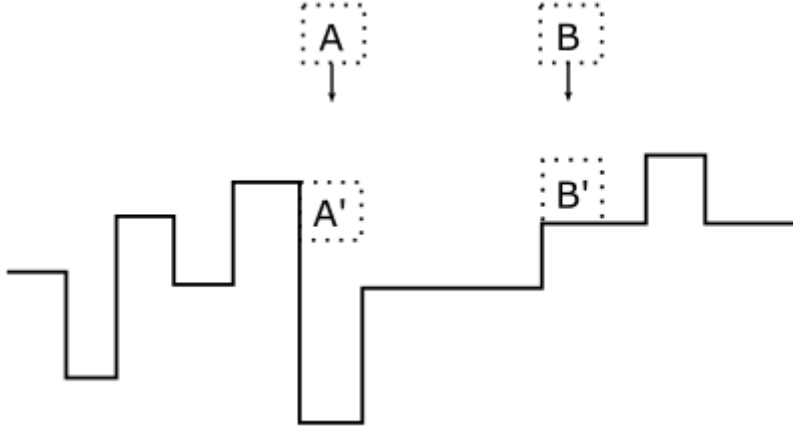
$$\chi + z = 2, \quad (2.29)$$

joten 1 + 1-ulotteiselle KPZ-yhtälölle

$$z = \frac{3}{2}. \quad (2.30)$$

Lopuksi näistä saadaan yhtälön (2.5) avulla kasvUEKSPONENTIKSI

$$\beta = \frac{1}{3}. \quad (2.31)$$



Kuva 4. KPZ-yhtälön mukainen BD-malli, jossa lähimmät naapurit tarttuvat toisiinsa. Mallissa satunnaisesti pudotetut partikkelit tarttuvat joko alla olevaan tai ensimmäiseen viereiseen partikkeliin.

Luvussa 2.2 käytiin havainnollisuuden vuoksi läpi EW-yhtälön mukaisesti käyttäytyvä RD-malli. Käydään nyt läpi KPZ-yhtälön mukainen BD-malli (Ballistic Deposition-malli). RD-mallista poiketen BD-mallissa satunnaisesti pudotetut partikkelit tarttuvat joko alla olevaan tai ensimmäiseen viereiseen partikkeliin (kuva 4). Tarttumisehdon johdosta tapahtuu rajapinnan etenemistä myös sivusuunnassa, mikä vastaa hydrodynaamisella rajalla KPZ-yhtälön $(\nabla h)^2$ -termiä.

Rajapinnan etenemisen universaalisuusluokkaa (esim. EW- tai KPZ-universaalisuusluokat) kuvaavat kriittiset eksponentit saadaan myös tarkastelemalla rajapinnan korkeuden korrelaatioita määrittelemällä korrelaatiofunktio

$$C_q(r, t) = \overline{\langle [\delta h(x', t') - \delta h(x' + r, t' + t)]^q \rangle_{x', t'}}, \quad (2.32)$$

missä $\delta h(x, t) \equiv h(x, t) - \bar{h}(t)$ on rajapinnan korkeuden fluktuaatio, $\langle * \rangle$ rintaman korkeuden keskiarvo systeemin leveyden yli ja \bar{h} on keskiarvo yli kaikkien konfiguraatioiden. Lisäksi $q \in \mathbb{N}$. Kun korrelaatiofunktioita (2.32) tarkastellaan erikseen paikan ja ajan suhteen, voidaan löytää Family–Vicsek-skaalauslakia vastaavat potenssilain mukaiset käyttäytymiset (eri skaalausfunktion avulla) [20, 21]

$$C_q(r, 0) = \overline{\langle [\delta h(x') - \delta h(x' + r)]^q \rangle_{x'}} \sim r^{q\chi} \quad (2.33)$$

ja

$$C_q(0, t) = \overline{\langle [\delta h(t') - \delta h(t' + t)]^q \rangle_{t'}} \sim t^{q\beta}, \quad (2.34)$$

missä KPZ-yhtälön mukaisesti käyttäytyvälle systeemille eksponentit χ ja β ovat kuten yhtälöissä (2.28) ja (2.31). Yhtälöiden (2.33) ja (2.34) avulla voidaan selvittää

KPZ-yhtälön mukaista käyttäytymistä fysikaalisesta systeemistä usein tarkemmin kuin tarkastelemalla rajapinnan leveyttä w .

Korrelaatioiden luonnetta voidaan tutkia myös korkeusflukтуаatiojakauman

$$P\left(\frac{h(x, t_2) - h(x, t_1) - (t_2 - t_1)\bar{v}}{(t_2 - t_1)^{1/3}A_q}\right) = F_q \quad (2.35)$$

avulla, missä \bar{v} on rajapinnan keskinopeus ja A_q on systeemistä riippuva vakio. F_q on jakaumafunktio, jonka muoto riippuu systeemin globaalista geometriasta ja systeemin alkutilasta. Korkeusflukтуаatiojakauma saadaan tarkastelemalla tiettyjen satunnaismatriisiensamblejen suurimpia ominaisarvoja. KPZ-dynamiikan mukaisille systeemeille korkeusflukтуаatiojakauman ratkaisu löytyy julkaisusta [22]. Kyseisessä julkaisussa jakauma F_q on laskettu kolmelle eri systeemin alkutilalle. Jos systeemin rajapinta on kaareutunut, korkeusflukтуаatiojakauma F_2 on GUE (Gaussian unitary ensemble). Tasaiselle rajapinnalle korkeusflukтуаatiojakauma F_1 on muotoa GOE (Gaussian orthogonal ensemble) ja viimeisenä systeemin stationarisessa tilassa korkeusflukтуаatiojakauma F_0 on Baik-Rains-jakauma. Koska tässä työssä kiinnostuksena on palorintaman käyttäytyminen stationarisessa alueessa, on tarkastelun kohteena F_0 -jakauma. Taulukosta 1 löytyy kaikkien kolmen ratkaisun antamat tunnusluvut vinous ja huipukkuus. Yhtälö (2.35) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$P\left(\frac{h(x, t + \delta t) - h(x, t) - \delta t \bar{v}}{A_q(\delta t)^{1/3}}\right) = P\left(\frac{\delta h(x, \delta t) - \delta t \bar{v}}{A_q(\delta t)^{1/3}}\right) \equiv P(\delta h), \quad (2.36)$$

missä $\delta h(x, \delta t) = h(x, t + \delta t) - h(x, t)$ on rajapinnan korkeuden muutos paikassa x aikavälillä δt .

Taulukko 1. Teoriasta saadut korkeusflukтуаatiojakauman tunnusluvut KPZ-yhtälön mukaisesti käyttäytyvälle systeemille

	Kaareutunut (F_2)	Suora (F_1)	Stationaarinen (F_0)
vinous	0,22	0,29	0,36
huipukkuus	0,09	0,17	0,29

3 Koelaitteisto ja kokeet

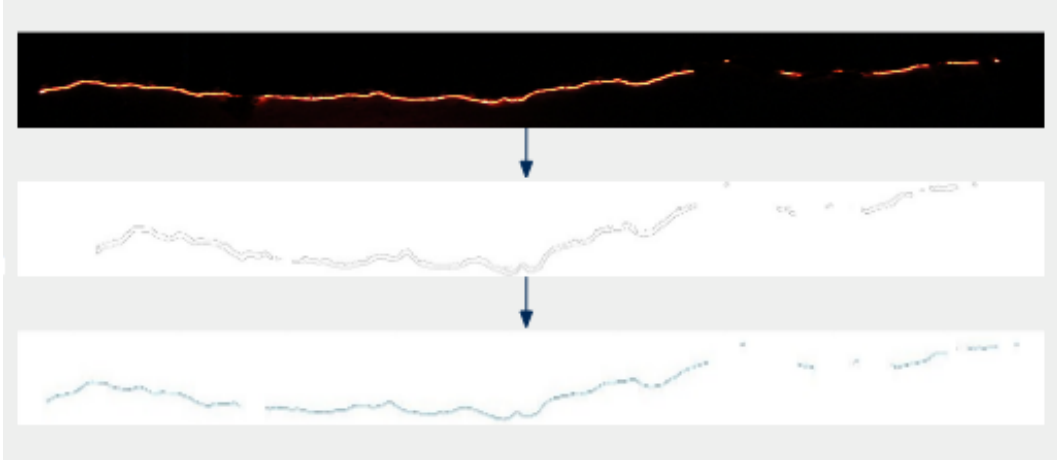
Verrattuna aikaisemmin tehtyihin polttokokeisiin [4, 5] tällä kertaa haluttiin saada enemmän dataa palorintaman stationaarisesta vaiheesta. Tästä syystä julkaisussa [5] kuvattua koejärjestelmää, eli ympäristöstä eristettyä polttokammiota, jossa pystyttiin kontrolloimaan sisään ja ulos menevää ilmavirtaa, oli kehitettävä niin, että paperia pystyttiin syöttämään laitteistoon ajan kuluessa. Ongelma ratkaistiin asentamalla polttokammioon tulostimen paperinkuljetuslaitteisto, jonka avulla paperia pystyttiin syöttämään. Lisäksi poltettavat paperiarkit vaihdettiin paperirulliin, jotta paperiarkin pituus ei olisi rajoittavana tekijänä.

Kokeet suoritettiin käsittelemällä paperi kaliumnitraatilla (KNO_3), jotta paperin palamisen aikainen hapensaanti rajoittuu niin, että palorintama etenee kytemällä. Kaliumnitraatin käytön haasteista kerrotaan julkaisussa [5]. Syöttölaitteeseen asetettu paperi sytytettiin hehkulangan avulla ja syöttölaitteiston avulla paperia syötettiin kammioon siten, että palava rintama pysyi suurinpiirtein paikoillaan. Paperin polton ajan palorintamasta otettiin kuvia järjestelmäkameralla viiden sekunnin välein.

Näin toteutetut kokeet suoritettiin 16 kertaa. Näiden polttojen pituudet vaihtelivat 101:stä kuvasta 795 kuvaan, eli 505 sekunnista 3975:n sekuntiin. Polttojen pituuden rajoittavaksi tekijäksi osoittautui syöttölaitteiston epävarmuus, sillä jonkin ajan kuluttua syöttölaitteisto syötti paperia vinosti ja poltto jouduttiin lopettamaan aiemmin kuin oli tarkoitus.

4 Data-analyysi

4.1 Palorintaman tunnistaminen kuvista



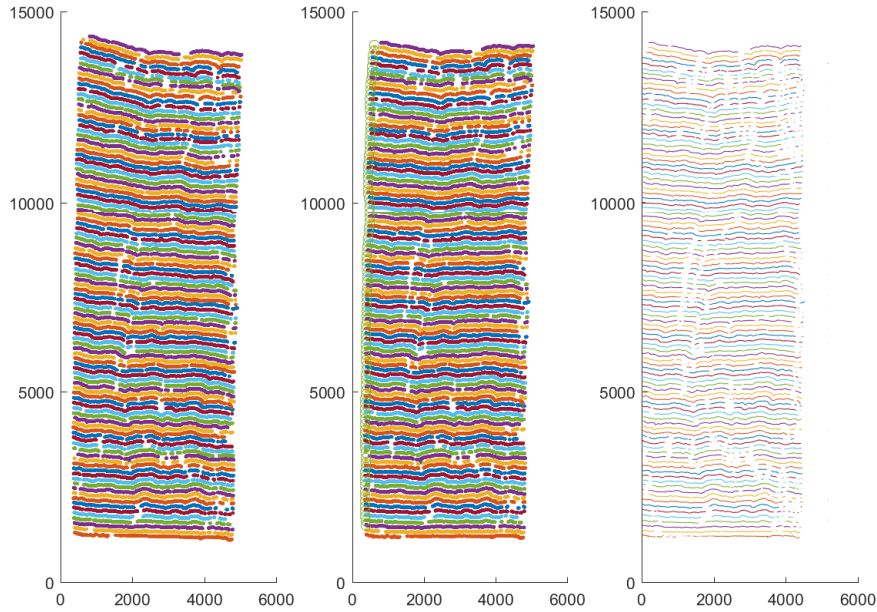
Kuva 5. Ylimpänä rajattu osuus palorintamasta otetusta kuvasta. Keskellä *Canny*-algoritmillä tunnistetut rintaman reunat ja alimpana saatujen rintaman korkeusarvojen avulla piirretty kuvaaja. Ylimmässä kuvassa palorintamassa näkyvät mustat alueet ovat kohtia, joissa palamisesta aiheutunut tuhka on kääntynyt rintaman päälle.

Mitatusta datasta palorintamat tunnistettiin Haskellilla tehdyn ohjelman avulla, jossa reunojen tunnistus perustui *Canny*-algoritmiin [23]. Ennen varsinaista tunnistusta tehtiin rintamille niin sanottu karkea tunnistus, jossa kuvat muutettiin harmaasävykuviksi, poistaen samalla kohinaa kontrastin alarajan avulla, ja rajattiin niin, että niistä löytyi vain palorintaman kannalta olennainen data, kuten kuvasta 5 voidaan huomata. Tällä tavoin poistettiin mahdollisia virhelähteitä, joita saattoi esiintyä kuvan reuna-alueilla. Lisäksi kyseinen toimenpide nopeutti varsinaista rintamantunnistusta.

Karkean esitunnistuksen ja *Canny*-algoritmillä tehdyn tunnistuksen jälkeen löydettyistä rintaman reunoista kerättiin palorintaman alareunan korkeuskoordinaatit vektoriin, joka näin ollen sisälsi yhden kuvan palorintaman korkeuden koordinaatit kuvan alareunan suhteen kuvan jokaiselle x -suuntaiselle pikselille. Yhden kuvan tunnistuksessa tapahtuvia asioita havainnollistaa kuva 5. Samaan tapaan tunnistettiin kaikki muutkin polttoon kuuluvat kuvat, jolloin saaduista vektoreista syntyy $n_t \times n_x$ matriisi P' , missä n_t on poltosta otettujen kuvien määrä ja n_x on kuvan x -suuntainen resoluutio eli pikselien lukumäärä. Matriisi P' alkio $p_{i,j}$ sisältää palorintaman korkeuden arvon kyseisen kuvan alareunan suhteen paikassa x_j .

4.2 Palorintamadatan esikäsittely

Edellisessä luvussa tunnistetut palorintaman korkeusmatriisit P' sisältävät palorintaman suhteelliset korkeudet eli rintaman korkeuden kuvan alareunasta laskien.



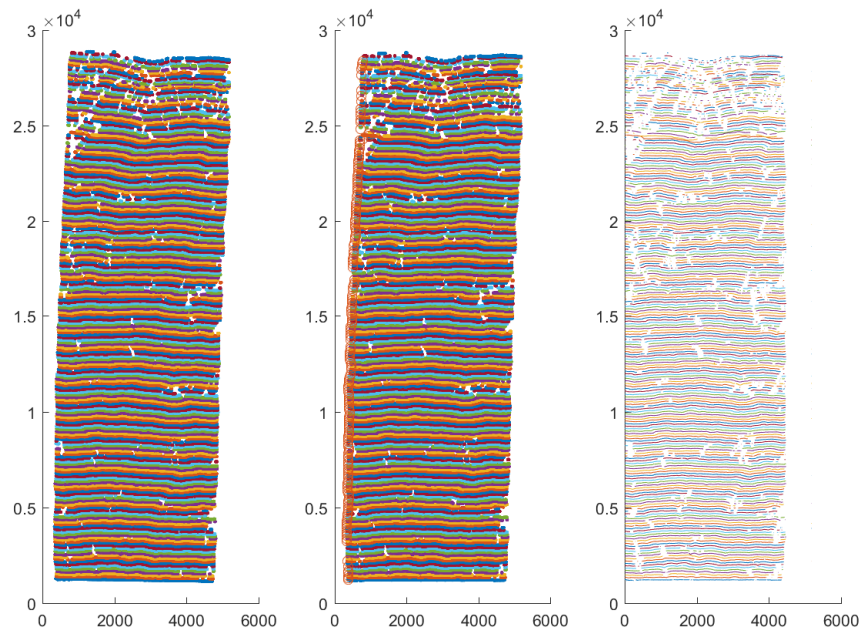
Kuva 6. Toisen polton rintamat. Vasemmalla kuvista tunnistettu rintaman raakadata. Keskellä rintama, josta on poistettu y-suuntainen vinous ja oikealla rintama, josta on poistettu vinous sekä sivusuuntainen ajautuminen

Rintamien absoluuttiset korkeudet saadaan paperissa olevien kalibraatiopisteiden avulla, jotka kohdistamalla saadaan selville rintaman etenemismatka kahden kuvan aikana. Kutsutaan näin saatua matriisia P :ksi, joka on $n_t \times n_x$ matriisiin, missä n_t on poltosta otettujen kuvien määrä ja n_x on kuvan x -suuntainen resoluutio eli pikselien lukumäärä. Matriisin alkio $p_{(x,t)}$ pitää sisällään palorintaman absoluuttisen korkeuden arvon pikselille x ajanhetkellä t .

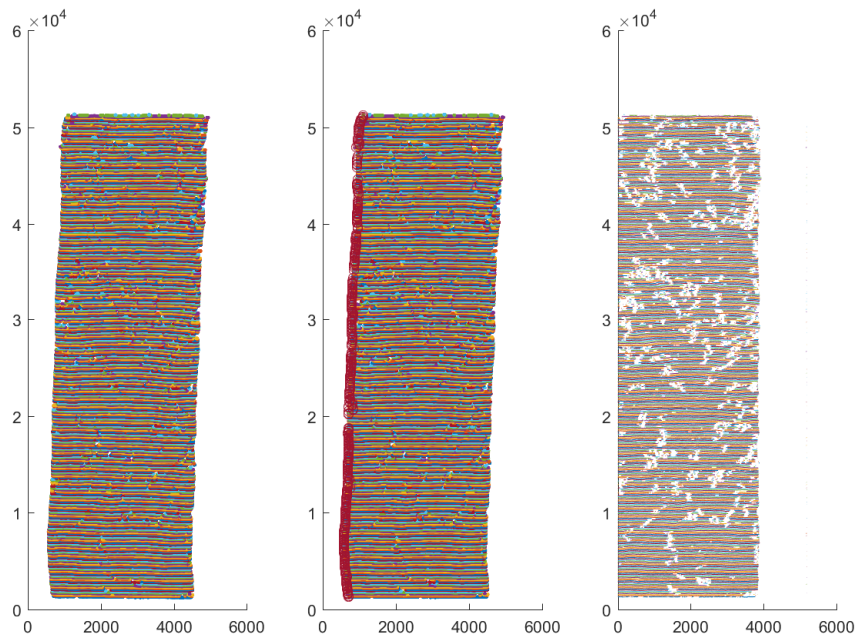
Tunnistetuissa palorintamissa voidaan huomata monenkaltaisia ongelmia. Poltojen rintamat eivät ole suoria, vaan ne ovat vinoutuneet ja poltoissa on myös sivusuuntaista ajautumista. Lisäksi rintamista löytyy paljon tunnistamattomia kohtia. Nämä asiat voidaan huomata kuvan 6 oikeasta reunasta.

Palorintamien vinous johtuu kahdesta seikasta: mahdollisesta paperin sytytyksen epätarkkuudesta johtuvasta lähtöasetelmistä muokkaavasta vinoudesta, jonka oletetaan pysyvän vakiona koko polton ajan, tai paperin syötössä tapahtuvasta virheestä, minkä johdosta palorintaman vinous muuttuu ajan kuluessa. Paperin syötön epävarmuudesta johtuu myös rintamien sivusuuntainen ajautuminen, sillä samalla kun syötön virheet vinouttavat rintamaa ne myös ajavat paperia sivusuunnassa.

Pääasiassa palorintaman tunnistamattomat kohdat johtuvat polton tuotteena syntyvän tuhkan kääntymisestä palavan palorintaman ja kameran väliin, jolloin otettu kuva jää siltä kohdalta tummaksi eikä rintaman tunnistaminen onnistu.



(a) Kolmannen polton rintamat.



(b) Kahdeksannen polton rintamat.

Kuva 7. Kolmannen ja kahdeksannen polton rintamat. Vasemmalla kuvista tunnistettu rintaman raakadata. Keskellä rintama, josta on poistettu y-suuntainen vinous ja oikealla rintama, josta on poistettu vinous sekä sivusuuntainen ajautuminen

Tunnistamattomat kohdat voitaisiin poistaa datasta interpoloimalla, mutta tämä on jätetty tekemättä, koska interpoloiduilla kohdilla saattaisi olla vääristävä vaikutus rintaman käyttäytymiseen. Interpoloinnin sijaan tunnistamattomat kohdat on jätetty kokonaan laskujen ulkopuolelle.

Palorintaman vinous poistetaan sovittamalla suora jokaiseen palorintamaan eli jokaiseen matriisiin P riville. Sovitetusta suorasta vähennetään rintaman x -suuntaisen keskikohdan korkeus, jolloin saadaan rivin jokaiselle pikselille siirtymä, jonka vähentäminen alkuperäisestä rintamasta poistaa siinä olleen vinouden. Tässä oletetaan, että rintaman x -suuntainen keskikohdan korkeus pysyy lähimpänä oikeaa rintaman korkeuden arvoa kullakin ajanhetkellä t (kuvat 6, 7a, 7b ja 8).

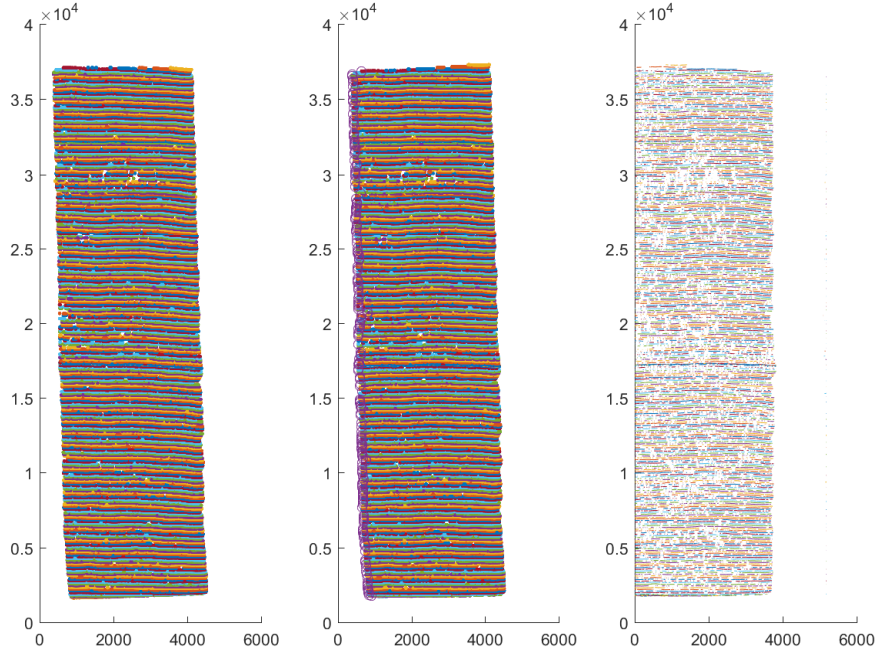
Sivusuuntainen ajautuminen poistetaan etsimällä rintaman vasen reuna. Tämä tehdään etsimällä palorintamadatasta eli matriisin P jokaiselta riviltä vasemmasta reunasta lähtien rivin ensimmäinen sarake, joka sisältää numeerisen arvon. Näin saadaan vektori d , joka pitää sisällään rintaman vasemman reunan x -indeksien arvot. Kuten kuvan 7a keskimmäisen kuvan vasemmasta reunasta voidaan huomata, vektorista d löytyy paikka paikoin rintaman sisään työntyviä piikkejä, eli kohtia joissa paperin tunnistettu reuna on paljon sisempänä verrattuna ympäröivään reunaan. Nämä piikit johtuvat tilanteista, joissa palorintaman reunalla tuhkan palanen on kääntynyt rintaman päälle ja näin ollen estää näköyhteyden palavaan rintamaan, jolloin rintaman reuna on jäänyt tunnistamatta. Nämä piikit poistetaan Matlabin funktiolla *medfilt1*. Tämän jälkeen jokaista matriisin P riviä permutoidaan vastapäivään vektorin d verran, jolloin palorintamien sivusuuntainen ajautuminen häviää (kuvat 6,7a,7b ja 8). Palorintamien oikaisun johdosta tapahtuneen virheen takia polton vasemmasta reunasta menetetään muutaman kymmenen pikselin verran dataa, lisäksi muutamia matriisin P :n rivejä permutoidaan liikaa, koska kaikkia rintaman reunassa olevia piikkejä ei saada poistettua *medfilt1*-funktiolla.

4.3 Stationaarisen alueen selvittäminen

Mitattujen palorintamien mukainen stationaarinen alue saadaan selville laskemalla yhtälön (2.2) avulla rintamien leveyden aikakehitys matriiseille P . Yksittäisten polttojen rintaman leveys käyttäytyy niin kohinaisesti, että järkeviä tuloksia sille saadaan vasta, kun rintaman leveys keskiarvoistetaan kaikkien polttojen yli. Saadusta kuvaajasta (kuva 9) voidaan määrittää palorintaman etenemisen stationaarisen tilan alkukohta t_x . Rintaman leveyden skaalautumisen avulla voitaisiin myös määrittää eksponentit χ ja β . Tämä ei kuitenkaan ole mielekästä datan kohinaisuuden vuoksi, joten rintaman leveydestä tarkastellaan vain stationaarisen tilan alkamisen ajankoh-
taa.

4.4 Korrelaatiofunktioiden $G(r)$ ja $C(t)$ laskeminen

Mitatusta palorintamadatasta halutaan laskea yhtälöiden (2.33) ja (2.34) mukaiset korrelaatiot. Korrelaatiofunktioiden laskua yksinkertaistetaan kiinnittämällä yhtälöiden parametri $q = 2$. Tämä voidaan tehdä, koska korrelaatiofunktioit käyt-



Kuva 8. Neljäntoista polton rintamat. Vasemmalla kuvista tunnistettu rintaman raakadata. Keskellä rintama, josta on poistettu y-suuntainen vinous ja oikealla rintama, josta poistettu vinous sekä sivusuuntainen ajautuminen

täytyvät asymptoottisesti kuten $r^{q\chi}$ ja $t^{q\beta}$, joten eksponenttien χ ja β arvojen määrittämiseen riittää yksi q :n arvo. Paperin palorintaman käyttäytyminen kertoimen q eri arvoilla on näytetty julkaisuissa [5, 24]. Tällöin saadaan yhtälöt (2.33) ja (2.34) muotoon

$$G(r) \equiv C_2(r, 0) = \overline{\langle [\delta h(x') - \delta h(x' + r)]^2 \rangle_{x'}} \sim r^{2\chi} \quad (4.1)$$

ja

$$C(t) \equiv C_2(0, t) = \overline{\langle [\delta h(t') - \delta h(t' + t)]^2 \rangle_{t'}} \sim t^{2\beta}, \quad (4.2)$$

missä $\delta h(x, t) \equiv h(x, t) - \bar{h}(t)$ on rajapinnan korkeuden fluktuatiot kohdassa x ajan hetkellä t , $\langle * \rangle$ rintaman korkeuden keskiarvo systeemin leveyden yli ja $\bar{*}$ on keskiarvo yli kaikkien konfiguraatioiden. Korrelaatiolaskuille yhteisiä tietoja ovat palorintaman korkeusdata eli matriisi P (ks. luku 4.2), suhdeluku sille kuinka paljon kokonaisaikaskaalasta otetaan käyttöön ja saturoituneen alueen alun määrittävä ajanhetki T_0 .

Yhtälön (4.1) mukaisia paikkakorrelaatioita kuvaavaa $G(r)$:ää laskettaessa korrelaatiot lasketaan vain kymmenen pikselin välein. Näin saadaan vähennettyä laskentaan tarvittavaa aikaa. Saturoitunut alue selvitetään ennen korrelaatioiden laskemista

rintamanleveyden avulla luvussa 4.3 esitetyllä tavalla. Yhtälön (4.2) mukaisia aikakorrelaatioita $C(t)$ laskettaessa korrelaatiot lasketaan kaikilla Δt :n arvoilla. Kaikki korrelaatiot lasketaan saturoituneessa alueessa, koska aiemmissa julkaisuissa on käsitelty transientti dynamiikka ja tässä työssä on pidennetty nimenomaan stationaarista vaihetta.

4.5 Korkeusfluktuaatiojakauman laskeminen

Yhtälön (2.35) mukaisen korkeusfluktuaatiojakauman laskemiseen tarvitaan yhtälön (2.1) mukainen rintaman keskikorkeus \bar{h} , saturoituneen alueen alkuaika eli t_\times , korien (engl. bins), joihin saadut korkeusfluktuaatioiden arvot laitetaan, lukumäärä, sekä tarkasteltavien rintamien reunoilta poistettavan osion prosentuaalinen osuus p_e . Korkeusfluktuaatiojakauman laskennassa tarkastelun kohteena olevasta palorintaman korkeusdatasta eli matriisista P valitaan vain saturoitu alue (luku 4.3), poistetaan parametrin p_e mukaiset reunat sekä valitaan datasta joka kymmenennen pikselin rintaman korkeuden arvo.

Parametrina annetuista rintaman keskikorkeuksista lasketaan rintaman keskimääräinen etenemisnopeus eli

$$\bar{v} = \langle \bar{h}_{t+1} - \bar{h}_t \rangle, \quad (4.3)$$

missä \bar{h}_t on rintaman keskikorkeus ajanhetkellä t . Tämän lisäksi määritellään sallitut ajan muutokset Δt . Suurin tarkasteltu ajan muutos $\Delta t_{max} = 0.5 n_t$, missä n_t on luvussa 4.2 määritelty polton kuvien lukumäärä. Näistä lähtökohdista voidaan laskea palorintaman korkeusfluktuaation $P_{\delta h}$ arvot yhtälön (2.36) mukaisesti jokaiselle Δt . Näin saadut korkeusfluktuaation arvot jaetaan ennaltamäärätyn suuruisiin koreihin, jotta saadaan todennäköisyysjakauma korkeusfluktuaatiolle. Korien suuruus saadaan jakamalla parametrina annettu korien lukumäärä polton leveydellä. Lopuksi saatu jakauma normitetaan, jolloin saadaan

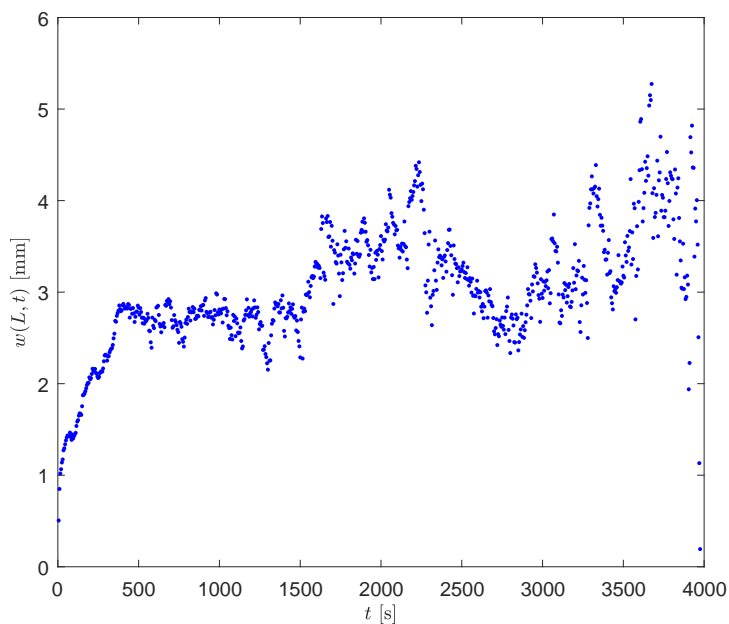
$$P \left(\frac{h(t_2) - h(t_1) - \bar{v}(t_2 - t_1)}{A_q(t_2 - t_1)^{1/3}} \right) = \frac{P'}{\sum l_{bin_i} P'_i}, \quad (4.4)$$

missä P' on normittamaton korkeusfluktuaatiojakauma, t_1 ja t_2 ovat jotkin ajanhetket sekä l_{bin_i} on yhden korin leveys.

5 Tuloksia ja pohdintaa

5.1 Rintaman leveys ja stationaarinen alue

Luvun 4.3 mukaisesti laskettu kaikkien polttojen yli keskiarvoistettu rintaman leveys w on esitetty kuvassa 9. Kuvasta havaitaan, että palorintaman stationaarinen vaihe alkaen noin 450 sekunnin kohdalla eli $t_{\times} = 450$ s. Parametrin t_{\times} määrittäminen on vaikeaa sikäli, että jos mielivaltaisen pitkien polttojen mittaaminen olisi mahdollista, aina nähtäisiin suurempia ja suurempia hetkellisiä \bar{w} :n fluktuaatioita. Tässä valittu t_{\times} :n arvo vastaa selkeää kvantitatiivista muutosta $\bar{w}(t)$:ssä. Saatu kuvaaja rintaman leveydestä on hyvin kohinainen. Tästä syystä eksponenttien χ ja β määrittäminen rintaman leveydestä Family–Vicsek-skaalauslain avulla ei ole mielekästä. Tämän työn tarkoituksiin onneksi riittää stationaarisen alueen alkuajankohdan t_{\times} selvittäminen. Kun rintaman leveyden käyttäytymistä verrataan aikaisemmassa kokeessa [4] esiintyvään kuvaajaan rintaman leveydestä, rintaman leveyden käyttäytyminen on hyvin samankaltaista. Toisaalta julkaisun [4] kuvaajassa rintaman leveys näyttää saturoiduvan 100 sekunnin kohdalla toisin kun uusissa mittauksissa, vaikka mitattujen rintamien leveydet ovatkin suurin piirtein samat. Ero saattaa osittain johtua poltettujen papereiden kaliumnitraatikonentraation eroista, sillä KNO_3 :lla on suora vaikutus palorintaman hapen saantiin ja näin ollen rintaman etenemisnopeuteen ja rintaman leveyteen.



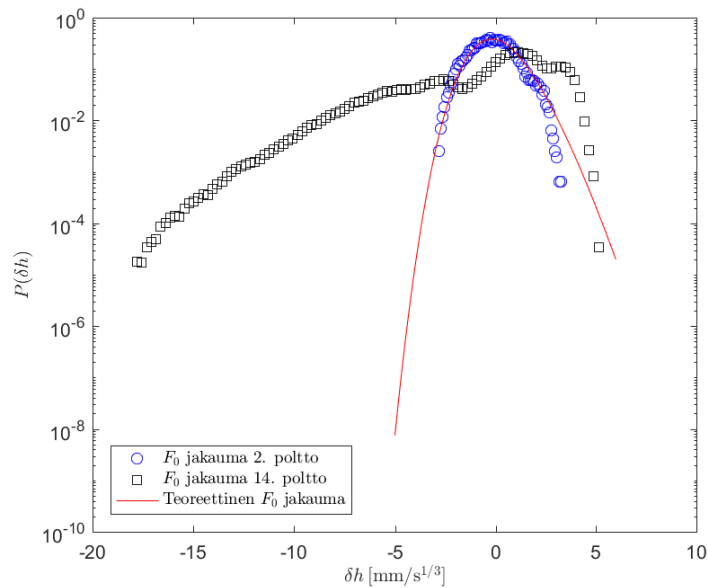
Kuva 9. Kaikkien polttojen yli keskiarvoistettu rajapinnan leveys w .

5.2 Yksittäisten polttojen korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakaumat

Työssä tarkasteltiin palorintaman etenemisen korkeuskorrelaatioita stationarisessa alueessa, eli etsittiin yhtälöiden (2.33) ja (2.34) mukaista käyttäytymistä, kun $\chi = \frac{1}{2}$ ja $\beta = \frac{1}{3}$. Lisäksi tutkittiin yhtälön (4.4) mukaisia korkeusfluktuaatiojakaumia niin ikään stationarisessa alueessa. Korkeusfluktuaatiojakaumista tarkasteltiin niiden vinoutta ja huipukkuutta.

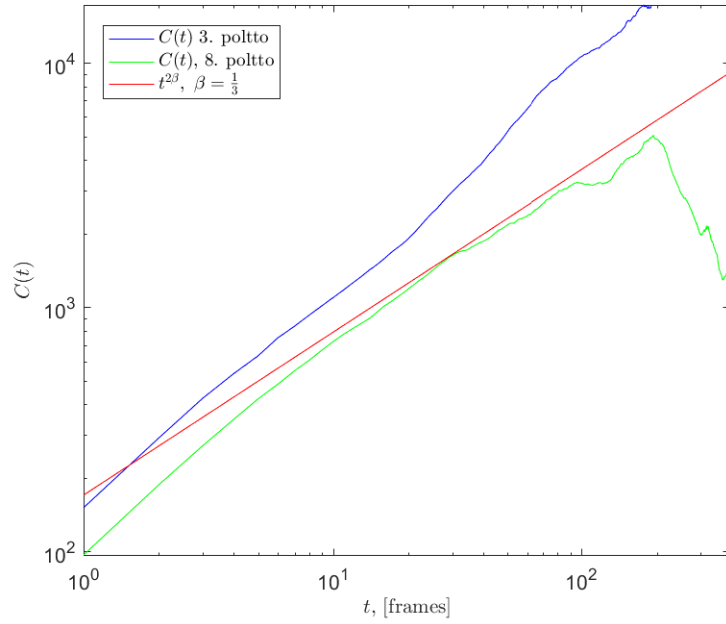
Korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakaumat laskettiin jokaiselle poltolle erikseen, jotta nähtäisiin kuinka paljon poltot eroavat toisistaan ja voiko jo yksittäisestä poltosta löytää KPZ-yhtälön mukaiseen käyttäytymiseen viittaavia tunnuslukuja. Tässä tarkastelussa huomattiin, että poltot ovat hyvin yksilöllisiä. Tarkastellaan esimerkinomaisesti huonoiten ja parhaiten käyttäytyviä polttoja katsottaessa paikka- ja aikakorrelaatioita sekä korkeusfluktuaatiojakaumia. Tunnistetut rintamat näille poltoille löytyvät kuvista 6, 7a, 7b ja 8.

Korrelaatioiden osalta (yhtälöt (2.34) ja (2.33)) parhaiten yksittäisistä mittauksista käyttäytyy kahdeksas poltto ja huonoiten kolmas poltto, kuten kuvista 11a ja 11b voidaan havaita.

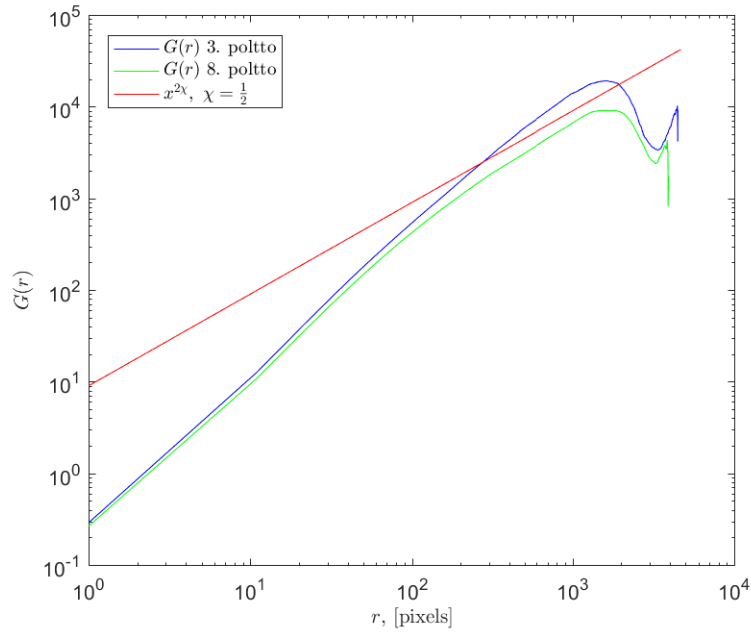


Kuva 10. Toisen ja 14. polton korkeusfluktuaatiojakaumat. Toinen poltto on korkeusfluktuaatiojakaumaa katsottaessa paras ja 14. poltto huonoin.

Yksittäisille poltoille lasketut paikkakorrelaatiot (yhtälö (2.33)) ovat kaikille poltoille muodoltaan hyvin samankaltaisia. Suurimmat erot polttojen välillä tulevat suurilla korrelaatiopituuksilla, joilla käyrien jyrkkyys eroaa eniten. Mikään yksittäinen poltto ei käyttäydy kovin hyvin teorian osoittaman karheusekponentin $\chi = \frac{1}{2}$ mukaan.



(a) Kolmannen ja viidennen polton aikakorrelaatiofunktiot ($C(t)$). Kolmas poltto on korrelaatioita katsottaessa huonoin, kahdeksas poltto paras.



(b) Kolmannen ja viidennen polton paikkakorrelaatiofunktiot ($G(r)$). Kolmas poltto on korrelaatioita katsottaessa huonoin, kahdeksas poltto paras.

Kuva 11. Kolmannen ja viidennen polton aika- ja paikkakorrelaatiot.

Parhaiten ja huonoiten teorian mukaan käyttäytyvän polton välisen eron voi nähdä kuvasta 11b. Aikakorrelaatioita katsottaessa kahdeksannen polton korrelaatiofunktio on hyvin lähellä KPZ-yhtälön mukaista kasvueksponentin arvoa $\beta = \frac{1}{3}$. On hyvä huomata, että aikakorrelaatiota katsottaessa useampikin poltto on lähellä KPZ-yhtälön mukaista käyttäytymistä. Kolmannen polton aikakorrelaatiofunktio eroaa eniten kasvueksponentin mukaisesta ennusteesta.

Korrelaatiofunktioiden käyttäytymisestä poiketen yksittäisten polttojen korkeusfluktuaatiojakaumia (yhtälö (2.35)) tarkasteltaessa huomataan, että parhaiten teorian mukaista f_0 jakaumaa noudattaa toiselle poltolle laskettu korkeusfluktuaatiojakauma ja huonoiten 14. polton korkeusfluktuaatiojakauma. Kuten kuvasta 10 nähdään, 14. polton jakauman olevan todella kaukana teoreettisesta f_0 käyrästä, mutta toisen polton jakauma näyttää noudattavan teoreettista jakaumaa 10^{-2} :sta suuremmilla todennäköisyyksillä. Toisen polton jakauman huipulle ($P(\delta h) > 5 * 10^{-3}$) saadaan huipukkuudeksi 1,50 ja vinoudeksi 0,24, missä saatu vinouden arvo on tutkimuksen aikana saaduista arvoista lähimpänä teorian mukaista arvoa 0,36.

Kolmannen polton huonoja korrelaatiofunktion arvoja, varsinkin aikakorrelaatioita, voi selittää kuvasta 7a havaittava palorintaman keskikohdan jälkeen jääminen polton loppuvaiheilla. Toisaalta samankaltainen ilmiö on havaittavissa toisessa poltossa (kuva 6), joka antaa parhaimman korkeusfluktuaatiojakauman yksittäisille poltoille. Neljännentoista polton palorintamissa on paljon tunnistamattomia kohtia (kuva 8). Tämä statistiikan repaleisuus osaltaan selittää miksi kyseisen polton korkeusfluktuaatiojakauma on huonoiten yhteensopiva teorian kanssa.

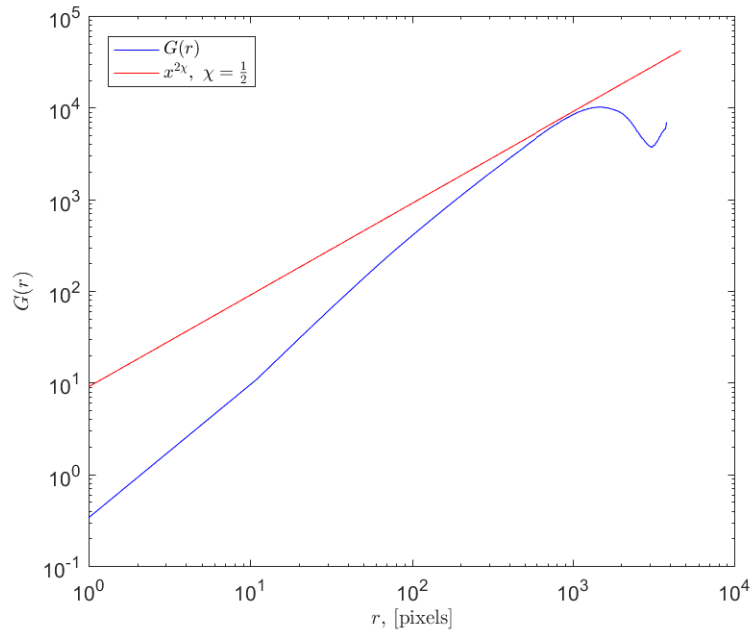
5.3 Keskiarvoistetut korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakauma

Todellisemman kuvan palorintaman etenemisen kuuluvuudesta KPZ-universaalisuusluokkaan antavat polttojen yli keskiarvoistetut korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakaumat. Tarkastellaan ensiksi keskiarvoistettuja korrelaatiofunktioita.

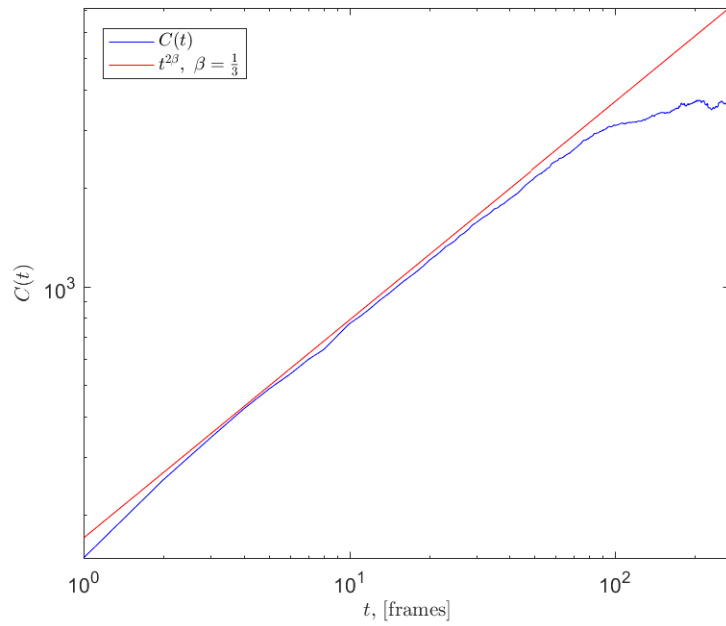
Keskiarvoistettuja korrelaatiofunktioita laskettaessa keskiarvoistus tehtiin kaikkien polttojen yli, joissa on yli 250 kuvaa. Tämä rajoitus tehtiin, koska haluttiin tarkastella vain stationaarista aluetta ja, kuten luvussa 5.1 todettiin, stationaarinen alue alkaa vasta noin 90 kuvan jälkeen. Tästä syystä 250 kuvan ja siitä lyhemmissä poltoissa stationaarisen alueen statistiikka jää todella vähäiseksi.

Näin keskiarvoistetulle paikkakorrelaatiolle (2.33) voidaan kuvasta 12a huomata, että keskiarvoistuksenkaan jälkeen paikkakorrelaatiofunktioit eivät käyttäydy teorian mukaisen karheuseksponentin $\chi = \frac{1}{2}$ mukaisesti. Tämä on kohtalaisen odotettu tulos, kun tarkastellaan kuvan 11b parhaimman ja huonoimman polton $G(r)$:n välistä eroavaisuutta, mikä on suhteellisen pieni. Keskiarvoistetun aikakorrelaatiofunktion (2.34) osalta KPZ-yhtälön mukainen käyttäytyminen $\beta = \frac{1}{3}$ on ilmeistä (kuva 12b).

Aikaisempiin kokeisiin [4, 5] verrattuna saadut tulokset ovat paikkakorrelaatioiden osalta huonompia, sillä aikaisemmat kokeet antavat vahvaa näyttöä sille, että etenevän palorintaman paikkakorrelaatiot käyttäytyvät KPZ-yhtälön mukaisen karheuseksponentin $\chi = 1/2$ mukaan. Tässä työssä KPZ-yhtälön mukaista käyttäytymistä paikka-



(a) Keskiarvoistettu paikkakorrelaatiofunktio $G(r)$.

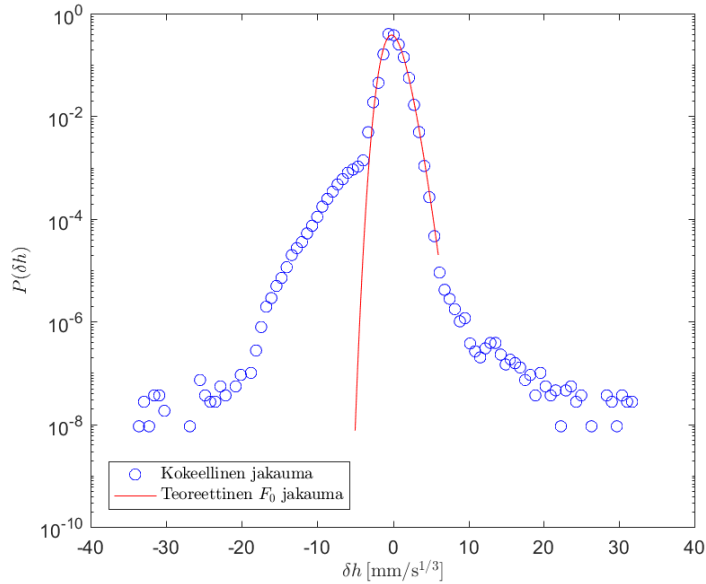


(b) Keskiarvoistettu aikakorrelaatiofunktio $C(t)$.

Kuva 12. Polttojen, joissa on yli 250 kuvaa, yli keskiarvoistetut paikka- ja aikakorrelaatiofunktiot.

korrelaatioille ei saatu esille. Aikakorrelaatioiden osalta palorintaman käyttäytyminen on nyt hyvin samankaltaista kuin aikaisemmissa kokeissa, mikä osaltaan vahvistaa paperissa etenevän palorintaman kuulumista KPZ-universaalisuusluokkaan. Juuri eksponentti β erottaa KPZ-yhtälön EW-yhtälöstä, kun taas χ on niille molemmille sama.

Korkeusfluktuaatiojakaumaa laskettaessa keskiarvoistus tehtiin kaikkien 16 polton yli. Näin saatiin kuvan 13 mukainen korkeusfluktuaatiojakauma. Jakauma näyttää seuraavaan hyvin teoreettista F_0 jakaumaa kun fluktuaatioiden todennäköisyys on yli 10^{-3} eli pystysuunnassa lähes kolme dekadia. Kun tarkastellaan jakaumasta laskettavia tunnuslukuja vinoutta ja huipukkuutta, huomataan kuitenkin, että y-akselin logaritminen asteikko hieman kaunistelee tuloksia. Korkeusfluktuaatiojakauman huipusta eli alueesta, jossa $P(\delta h) > 10^{-3}$, lasketut arvot vinoudelle ja huipukkuudelle löytyvät taulukosta 2. Näistä arvoista voidaan huomata, että vaikka kuvaaja näyttääkin noudattavan F_0 jakaumaa, tunnusluvut vinous ja huipukkuus eivät vastaa F_0 jakaumasta saatuja arvoja. Tämä tulos on ristiriidassa aikaisemmin tehdyn tutkimuksen [10] kanssa, jossa jakauman vinoudelle saatiin arvo 0,32, mikä on paljon lähempänä teoreettista F_0 -jakauman arvoa 0,36. Lisäksi tässä työssä saadun korkeusfluktuaatiojakauman hännät ulottuvat paljon leveämmälle kuin aikaisemmassa tutkimuksessa. Tämä johtunee yksinkertaisesti siitä, että tässä työssä analysoidut mittaukset olivat pidempiä, minkä seurauksena suurien fluktuaatioiden esiintyminen tulee todennäköisemmäksi. Toinen ero työhön [10] nähden on siinä tehty vyöryjen (avalanche) poisto datasta.



Kuva 13. Keskiarvoistettu korkeusfluktuaatiojakauma. Keskiarvoistukseen on käytetty kaikkia polttoja.

Taulukko 2. Kaikkien polttojen yli keskiarvoistettujen korkeusfluktuaatioiden huippua ($P(\delta h) > 5 \cdot 10^{-3}$) ja stationaarista aluetta vastaavan teoreettisen F_0 jakauman tunnusluvut.

	keskiarvo	F_0
vinous	0,60	0,36
huipukkuus	1,87	0,29

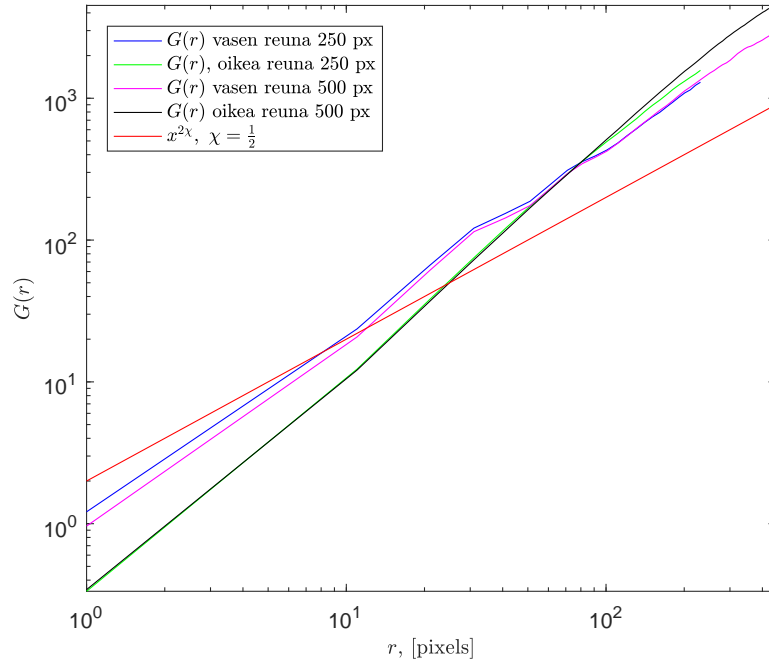
5.4 Reunailmiöt

Reunailmiöitä tarkasteltiin korrelaatiofunktioiden ja korkeusfluktuaatiojakauman avulla. Näiden suureiden tarkastelu tehtiin 250 pikselin ja 500 pikselin kokoisille raunakaistaleille. Koska kuvissa palorintaman leveys on noin 4500 pikseliä, on pienempi reuna noin 1/18 rintaman leveydestä ja suurempi reuna 1/9 rintaman koko leveydestä.

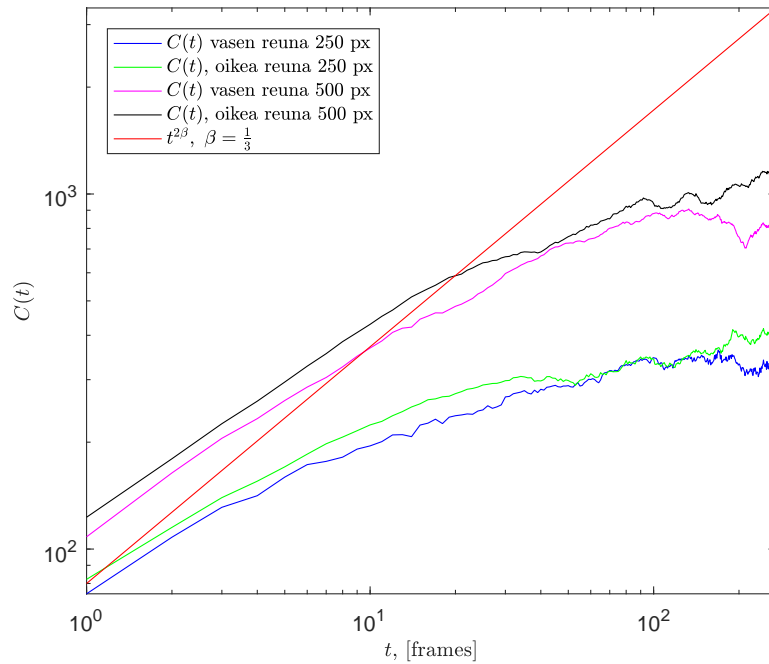
Reunoilla palorintama ei etene KPZ-yhtälön mukaisesti, vaikka parhaassa tapauksessa systeemissä voisi esiintyä nimenomaan KPZ-yhtälölle tyypillisiä reunailmiöitä. Tämän voi todeta korrelaatiofunktioiden osalta kuvista 14a ja 14b, joissa on paikka- ja aikakorrelaatiofunktioiden käyttäytyminen keskiarvoistettuna kaikkien polttojen yli joiden pituus on yli 250 kuvaa kummallekin palorintaman reunalle, reunojen ollessa 250 pikseliä ja 500 pikseliä. Paikkakorrelaatioille $G(r)$ voidaan huomata, että reunan koon muuttaminen ei juurikaan vaikuta korrelaatiofunktion muotoon. Sen sijaan erikokoisten reunojen korrelaatiofunktioiden väliset erot havaitaan vastakkaisten reunojen välillä. Reunojen väliset erot voivat osaltaan selittyä rintamien sivusuuntaisen ajautumisen poistossa tapahtuvasta palorintaman reunapikselien tunnistuksen virheestä, minkä johdosta vasemmasta reunasta leikkautuu pahimmillaan muutamia kymmeniä pikseleitä pois.

Aikakorrelaatioita $C(t)$ tarkasteltaessa huomataan myös pieni ero vasemman ja oikean reunan välillä mutta suurempi ero syntyy nyt erikokoisten reunojen korrelaatiofunktioiden välille. Kuvasta 14b voidaan huomata, että kapeampi reuna (250 pikseliä) käyttäytyy hieman huonommin verrattuna KPZ-yhtälön mukaiseen käyttäytymiseen kuin leveämpi reuna (500 pikseliä). Tämä selittyy sillä, että leveämpi reuna sisältää jo niin paljon KPZ-yhtälön mukaisesti käyttäytyvää, niin sanottua normaalia rintamaa, että reunailmiöiden vaikutus alkaa kadota keskiarvoistuksessa näkyvistä.

Korkeusfluktuaatiojakaumien tarkastelu reunoille paljastaa, että paperin eri reunit käyttäytyvät hyvin samankaltaisesti. Samaan tapaan myös reunan koon muuttaminen ei juurikaan vaikuta jakaumaan. Eroa löytyy vain jakauman hännissä, joissa suuremmalla reunalla on pidemmät hännät. Hämmästyttävien asiain reunojen korkeusfluktuaatioiden käyttäytymisessä on se miten lähellä jakaumat näyttävät olevan teoreettista F_0 -jakaumaa ja samalla myös koko poltolle laskettua korkeusfluktuaatiojakaumaa. Tunnuslukujen tarkastelu (taulukko 3) kuitenkin paljastaa, että reunit eivät käyttäydy teorian antaman F_0 jakauman mukaisesti. Kuitenkin reunoille lasketut jakauman vinouden arvot ovat hyvin lähellä koko poltoille laskettua vinoutta (taulukko 2). Huipukkuuden osalta reunojen käytös eroaa hieman enemmän koko polton käyttäytymisestä mutta arvot ovat siltikin kohtalaisen lähellä toisiaan.



(a) Keskiarvoistettu paikkakorrelaatiofunktio $G(r)$ laskettuna palorintaman reunoille. Kuvassa on esitetty kaksi eri reunan leveyttä: 250 pikseliä (sininen ja vihreä) sekä 500 pikseliä (violetti ja musta).



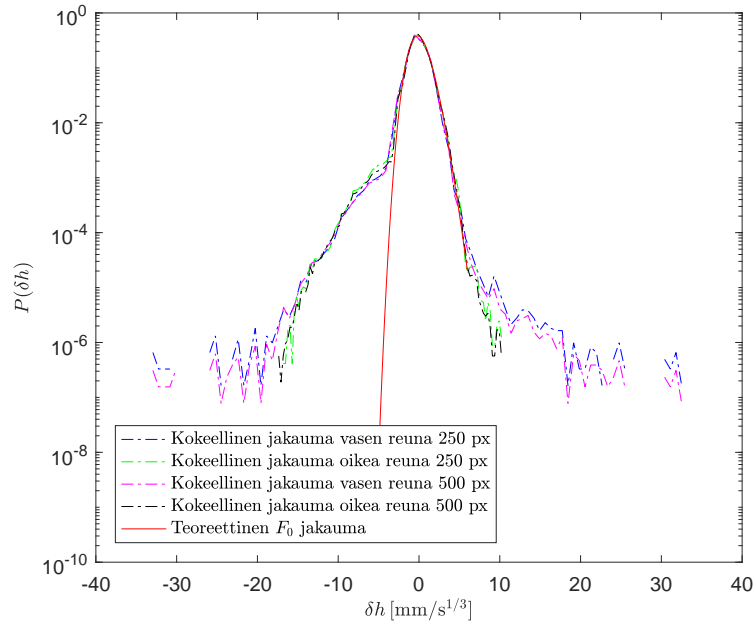
(b) Keskiarvoistettu aikakorrelaatiofunktio $C(t)$ laskettuna palorintaman reunoille.

Kuva 14. Kuvissa on esitetty korrelaatiofunktioiden käyttäytyminen kahdelle eri reunan leveydelle: 250 pikseliä (sininen ja vihreä) sekä 500 pikseliä (violetti ja musta).

Reunojen ja koko polttojen korkeusfluktuaatiojakaumien samankaltaisuus on mielenkiintoinen tulos myös siinä mielessä, että korkeusfluktuaatiojakauma kytkeytyy aikakorrelaatiofunktioon ja aikakorrelaatioita tarkasteltaessa huomattiin suuri ero reuna-alueen ja koko polton välillä.

Taulukko 3. Kaikkien polttojen reunojen yli keskiarvoistettujen korkeusfluktuaatioiden huippua ($P(\delta h) > 4 \cdot 10^{-3}$) ja stationaarista aluetta vastaavan teoreettisen F_0 jakauman tunnusluvut.

	250 pikseliä		500 pikseliä		F_0
	vasen reuna	oikea reuna	vasen reuna	oikea reuna	
vinous	0.66	0.64	0.66	0.66	0,36
huipukkuus	2.07	2.04	2.05	1.98	0,29



Kuva 15. Keskiarvoistettu korkeusfluktuaatiojakaumat 250 pikselin (sininen ja virheä) ja 500 (violetti ja musta) pikselin reunoille. Keskiarvoistukseen on käytetty kaikkia polttoja.

6 Johtopäätökset

Koko poltoille tarkastellut korrelaatiofunktiot ja korkeusfluktuaatiojakauma osoittavat, että työssä tarkasteltu paperinpolttodata ei vastaa KPZ-yhtälön ennusteita, kasvueskponenttia β lukuun ottamatta (kuvat 12a, 12b ja 13). Kasvueskponentin käyttäytyminen ja paperin poltolle aikaisemmin tehdyt tutkimukset [4, 5, 10] kuitenkin viittaavat siihen, että kasvueskponentin χ ja korkeusfluktuaatiojakauman käyttäytyminen johtuu ongelmista mittausdatan laadusta ja sitä kautta statistiikan puutteesta. Yksittäisten kokeellisten polttojen ongelmia olivat rintaman päälle kääntyneen tuhkan aiheuttamat tunnistamattomat kohdat, palorintamissa oleva globaali vinous sekä polton aikana tapahtuva sivusuuntainen ajautuminen. Näistä vinous ja sivusuuntainen ajautuminen saadaan poistettua, mutta tunnistamattomat palorintaman kohdat huonontavat huomattavasti statistiikkaa.

Reunailmiöitä tarkasteltiin 250 pikselin ja 500 pikselin reunoille. Näissä tarkasteluissa korrelaatiofunktioiden $G(r)$ ja $C(t)$ käyttäytyminen oli kauempana KPZ-yhtälön mukaisesta käyttäytymisestä kuin koko polttojen tapauksessa. Huomion saaduissa tuloksissa herätti se, että suurimmat erot $G(r)$ -funktion käyttäytymisessä löytyivät paperin vasemman ja oikean reunan väliltä sen sijaan, että eroa olisi ollut eri kokoisissa reunoissa. Aikakorrelaatiofunktion tapauksessa ero löytyi erikokoisten reunojen väliltä oikean ja vasemman reunan käyttäytymisen ollessa hyvin samankaltaisia. Reunailmiöiden tarkastelussa mielenkiintoisin ilmiö kuitenkin löytyi korkeusfluktuaatiojakaumien käyttäytymisestä, sillä niiden käyttäytyminen vasemmalle ja oikealle reunalle sekä erikokoisilla reunoilla oli hyvin samankaltaista kuin koko poltoille lasketulle korkeusfluktuaatiojakaumalle (vertaa taulukko 2 ja 3). Tämä yllättävä havainto tarjoaa motivaation reunailmiöiden jatkotutkimukselle.

Jatkotutkimuksessa voitaisiin tarkastella tarkemmin korrelaatioiden ja korkeusfluktuaatioiden muutosta reunan leveyden muuttuessa. Lisäksi olisi hyvä selvittää, miten pitkälle paperin sisään reunailmiöt ulottuvat ja riippuuko tämä alue polton leveydestä. Jos tällaisiin tutkimuksiin ryhdytään, olisi hyvä kehittää koelaitteistoa ainakin siten, että sivusuuntainen ajautuminen saataisiin poistettua jo mittausvaiheessa, ja tämän jälkeen tehdä lisämittauksia statistiikan parantamiseksi. Aiemmissa tutkimuksissa [10] havaittujen vyöryjen, joita KPZ-yhtälö ei sisällä, poistamiseksi voitaisiin kehittää tekoälyyn perustuva tunnistus, kun aiemmin ilmeisimmät vyöryt on poistettu datasta silmämääräisesti. Muuten data-analyysia voisi kehittää etsimällä kriteeri, jolla poltoista saataisiin karsittua pahimmat alueet, missä rintamissa esiintyy tunnistamattomia kohtia. Jos koejärjestelmää kehittämällä ei pystytä poistamaan kokonaan sivusuuntaista ajautumista olisi sen poistamista dataa analysoitaessa hyvä jatkokehittää, sillä nykyinen tapa aiheuttaa pientä vääristymää vasempaan reunaan siirtämällä joitakin rintamia liikaa ja joitakin liian vähän. Tämä voi aiheuttaa ongelmia pienempien reunakaistaleiden analysoinnissa.

Viitteet

- [1] F Family ja T Vicsek. “Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 18.2 (1985), s. L75–L81. DOI: 10.1088/0305-4470/18/2/005. URL: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/18/2/005>.
- [2] S. F. Edwards ja D. R. Wilkinson. “The Surface Statistics of a Granular Aggregate”. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 381.1780 (1982), s. 17–31. DOI: 10.1098/rspa.1982.0056.
- [3] M. Kardar, G. Parisi ja Y.-C. Zhang. “Dynamic Scaling of Growing Interfaces”. *Phys. Rev. Lett.* 56 (9 1986), s. 889–892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.889. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.889>.
- [4] J. Maunuksela et al. “Kinetic Roughening in Slow Combustion of Paper”. *Phys. Rev. Lett.* 79 (8 1997), s. 1515–1518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.1515. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1515>.
- [5] M. Myllys et al. “Kinetic roughening in slow combustion of paper”. *Phys. Rev. E* 64 (3 2001), s. 036101. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.036101. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.036101>.
- [6] K. A. Takeuchi ja M. Sano. “Universal Fluctuations of Growing Interfaces: Evidence in Turbulent Liquid Crystals”. *Phys. Rev. Lett.* 104 (23 2010), s. 230601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.230601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.230601>.
- [7] K. A. Takeuchi ja M. Sano. “Evidence for Geometry-Dependent Universal Fluctuations of the Kardar-Parisi-Zhang Interfaces in Liquid-Crystal Turbulence”. *Journal of Statistical Physics* 147.5 (2012), s. 853–890. ISSN: 1572-9613. DOI: 10.1007/s10955-012-0503-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0503-0>.
- [8] T. Sasamoto ja H. Spohn. “One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality”. *Phys. Rev. Lett.* 104 (23 2010), s. 230602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.230602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.230602>.
- [9] J Maunuksela et al. “Kardar–Parisi–Zhang scaling in kinetic roughening of fire fronts”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 266.1 (1999), s. 372–376. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(98\)00619-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00619-0). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437198006190>.
- [10] L. Miettinen et al. “Experimental determination of KPZ height-fluctuation distributions”. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 46.1 (2005), s. 55–60. ISSN: 1434-6036. DOI: 10.1140/epjb/e2005-00235-y. URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2005-00235-y>.

- [11] J. Merikoski et al. “Temporal and Spatial Persistence of Combustion Fronts in Paper”. *Phys. Rev. Lett.* 90 (2 2003), s. 024501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.024501. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.024501>.
- [12] J. Maunuksela et al. “Determination of the stochastic evolution equation from noisy experimental data”. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 33.2 (2003), s. 193–202. ISSN: 1434-6036. DOI: 10.1140/epjb/e2003-00156-9. URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2003-00156-9>.
- [13] M. Myllys et al. “KPZ equation with realistic short-range-correlated noise”. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 36.4 (2003), s. 619–626. ISSN: 1434-6036. DOI: 10.1140/epjb/e2004-00016-2. URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2004-00016-2>.
- [14] M. Myllys et al. “Effect of a columnar defect on the shape of slow-combustion fronts”. *Phys. Rev. E* 68 (5 2003), s. 051103. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.051103. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.051103>.
- [15] A. Barabási ja H. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, 1995.
- [16] K. A. Takeuchi. “An appetizer to modern developments on the Kardar–Parisi–Zhang universality class”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 504 (2018). Lecture Notes of the 14th International Summer School on Fundamental Problems in Statistical Physics, s. 77 –105. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.03.009>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437118303170>.
- [17] T. Halpin-Healy ja Y.-C. Zhang. “Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics”. *Physics Reports* 254.4 (1995), s. 215 –414. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00087-J](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00087-J). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739400087J>.
- [18] T. Nattermann ja L.-H. Tang. “Kinetic surface roughening. I. The Kardar–Parisi–Zhang equation in the weak-coupling regime”. *Phys. Rev. A* 45 (10 1992), s. 7156–7161. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.7156. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.7156>.
- [19] C. W. Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*. Vol. 3. springer Berlin, 1985.
- [20] E. Medina et al. “Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth”. *Phys. Rev. A* 39 (6 1989), s. 3053–3075. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.3053. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.39.3053>.

- [21] T. Hwa ja E. Frey. “Exact scaling function of interface growth dynamics”. *Phys. Rev. A* 44 (12 1991), R7873–R7876. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.R7873. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.R7873>.
- [22] M. Prähofer ja H. Spohn. “Universal Distributions for Growth Processes in 1 + 1 Dimensions and Random Matrices”. *Phys. Rev. Lett.* 84 (21 2000), s. 4882–4885. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.4882. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4882>.
- [23] R. Javaux. *Vision.Detector.Edge*. 2016. URL: <http://hackage.haskell.org/package/friday-0.2.3.1/docs/Vision-Detector-Edge.html> (viitattu 19.07.2019).
- [24] M. Myllys et al. “Scaling and Noise in Slow Combustion of Paper”. *Phys. Rev. Lett.* 84 (9 2000), s. 1946–1949. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1946. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.1946>.