

Konformisia ja lokaalisti konformisia kuvauksia

Pasi Jäntti

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2019

Tiivistelmä: Pasi Jäntti, *Konformisia ja lokaalisti konformisia kuvauksia* (engl. *Conformal and locally conformal mappings*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 46 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2019.

Tässä tutkielmassa perehdytään konformikuvauksiin liittyvään teoriaan. Erityisesti tarkastellaan konformikuvauksia eri kompleksitason alueiden välillä. Tutkielman yhtenä päätuloksena todistetaan Riemannin kuvauslause, jonka mukaan jokaisen kahden yhdesti yhtenäisen alueen välillä on olemassa konformikuvaus.

Konformikuvaukset ovat funktioita, jotka säilyttävät kulmien suuruudet ja suunnat. Konformisuus linkittyy vahvasti yhteen funktion kompleksisen derivaatan käytökseen. Tutkielmassa osoitetaan, että holomorfit injektiot tai holomorfit funktiot, joiden derivaatta ei häviä, ovat konformikuvauksia.

Möbius-kuvaukset ovat tärkeä konformikuvausten alaluokka. Möbius-kuvaukset koostuvat siirroista, skaalauksista, kierroista ja inversiosta. Jotta inversiokuvaus olisi hyvin määritelty kaikissa kompleksitason pisteissä, tutkielmassa esitellään laajennetun kompleksitason käsite. Laajennetun kompleksitason ja yksikköpallon reunan välillä osoitetaan olevan homeomorfinen kuvaus, jolloin äärettömyyspisteet ovat hyvin määriteltyjä.

Riemannin kuvauslause on olemassaolotulos, joka ei kerro miten konformikuvauksen voi käytännössä konstruoida. Tutkielmassa käydään läpi monia esimerkkejä, miten eri alueiden välille voidaan löytää konformikuvaus. Esimerkeissä konkretisoituvat konformikuvausten geometriset ominaisuudet, joissa havaitaan erityisesti Möbiuskuvausten hyödyllisyys.

Riemannin kuvauslauseen nojalla tiedetään, että on olemassa konformikuvaus ylemmältä puolitasolta itseään leikkaamattoman n -monikulmion sisukseksi. Tutkielmassa johdetaan intuitiivisesti miten tämän kuvauksen voi konstruoida sekä annetaan kuvaukselle tarkka kaava, joka tunnetaan yleisemmin nimellä Schwarz-Christoffelin kaava. Schwarz-Christoffelin kaava on monimutkainen ja sen käyttöön liittyy rajoituksia, joita pyritään avaamaan yksinkertaisten esimerkkien kautta.

Tiedetään, että mikäli alue ei ole yhdesti yhtenäinen, niin tällöin ei ole olemassa surjektiivista konformikuvausta yksikkökielelle. Osoittautuu kuitenkin, että tietyllä tavalla konstruoitu alue voidaan kuvata 3-valentisti ja lokaalisti konformisesti yksikkökieleksi. Tämän tuloksen ovat todistaneet Victor V. Starkov ja Piotr Liczberski. Tutkielman yhtenä päätuloksena mukaillaan kyseisestä tuloksesta erikoistapaus ja annetaan sille todistus.

Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Esitiedot	2
1.1. Kompleksiluvuista	2
1.2. Joukko-oppia	6
1.3. Kompleksinen differentioituvuus	8
1.4. Polkuintegraali	10
1.5. Syklit ja Cauchyn-lause	13
1.6. Jonoperheet	15
Luku 2. Konformikuvaukset	18
Luku 3. Konformisia ja lokaalisti konformisia kuvauksia	30
3.1. Schwarz-Christoffel kuvaukset	32
3.2. Lokaalisti konformisia kuvauksia	39
Kirjallisuutta	46

Johdanto

Tämän tutkielman päätavoitteena on käsitellä konformikuvauksia eri alueiden välillä. Georg Bernhard Riemannin (1826-1866) mukaan nimetyn Riemannin kuvauslauseen nojalla tiedetään jokaisen kahden yhdesti yhtenäisen alueen välillä olevan konformikuvaus. Kuitenkaan Riemannin kuvauslause ei kerro mitään siitä, miten kuvauksen voi muodostaa. Tutkielmassa esitellään työkaluja ja esimerkkejä, miten yhdesti yhtenäisten alueiden välille voidaan muodostaa konformikuvaus. Lopuksi tarkastellaan pintapuolisesti lokaalisti konformisia kuvauksia.

Tutkielman ensimmäisessä ja toisessa kappaleessa käsitellään tiivistetysti tarvittava kompleksianalyysin teoria Riemannin kuvauslauseen todistusta varten, minkä vuoksi monia tuloksia ei todisteta. Käsiteltävästä teoriasta painoarvo annetaan holomorfinisuudelle, konformisuudelle sekä Möbius-kuvauksille. Lähestymistyyli kohti Riemannin kuvauslausetta noudattaa suurimmaksi osaksi Bruce P. Palkan teoksen [13] rakennetta, mitä on täydennetty lähteillä [6], [12] ja [15].

Tutkielman kolmannessa kappaleessa johdetaan intuitiivisesti Schwarz-Christoffel kaavana tunnettu tulos, mikä antaa kaavan sille funktiolle, joka kuvaa ylemmän puolitason konformisesti itseään leikkaamattoman n -monikulmion sisukseksi. Päälähteenä kaavan johtamisessa on käytetty teoksia [3] ja [2]. Lisäksi tutustutaan Schwarz-Christoffel kuvausten ominaisuuksiin sekä S-C kaavan käyttöön esimerkkien avulla.

Tutkielman kolmannen kappaleen lopussa käsitellään konformikuvauksia tapauksessa, jossa alue ei ole yhdesti yhtenäinen. Erityisesti osoitetaan, että tietyllä tavalla konstruoitu alue voidaan kuvata 3-valentisti ja lokaalisti konformisesti yksikkökiekoksi. Tämä annettava tulos perustuu Piotr Liczberskin ja Victor V. Starkovin maattiseen julkaisuun [8].

Tutkielmassa käytetyt kuvat ovat kirjoittajan tekemiä. Todistuksissa ja esimerkeissä on lähdeviitteet, mikäli ne eivät ole kirjoittajan täysin itse tekemiä.

LUKU 1

Esitiedot

1.1. Kompleksiluvuista

Kompleksianalyysin kehitys sai alkunsa, kun haluttiin saada ratkaisut yleiselle toisen asteen yhtälölle

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$ myös tapauksessa, jossa diskriminantti

$$D = b^2 - 4ac$$

on negatiivinen. Toisin sanoen tavoitteena oli määrittää negatiivinen neliöjuuri. Tilanteen ratkaisemiseksi määritellään $i^2 = -1$, missä symbolia i kutsutaan imaginaariyksiköksi. Diskriminantin ollessa negatiivinen toisen asteen yhtälöiden ratkaisut sisältävät reaali-osan lisäksi imaginaariosan.

Aloitetaan määrittelemällä kompleksianalyysissa tarvittavat peruskäsitteet liittyen kompleksilukuihin, joukkoihin sekä funktioihin. Tavoitteena on rakentaa tiivistetyksi tarvittavat perusteet Riemannin kuvauslauseen todistusta varten, minkä takia kaikkia välituloksia ei todisteta. Pääkiinnostuksen aiheina ovat Riemannin kuvauslauseen seuraukset ja konformikuvaukset eri alueiden välillä.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Luku $z = x + iy$ on kompleksiluku, jos x ja y ovat reaalilukuja ja i on imaginaariyksikkö.

Reaalilukua $\operatorname{Re}(z) := x$ kutsutaan kompleksiluvun $z = x + iy$ reaali-osaksi ja reaalilukua $\operatorname{Im}(z) := y$ kutsutaan kompleksiluvun $z = x + iy$ imaginaariosaksi. Termi kompleksiluku on hieman harhaanjohtava, koska kompleksiluvut ovat kaksiulotteisia vektoreita, eikä lukuja reaalilukujen mielessä. Kompleksilukujen peruslaskutoimitukset pohjautuvat reaalilukujen ominaisuuksiin. Kompleksilukujen peruslaskutoimitukset määritellään seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoot $z_1 = a_1 + ib_1$ ja $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleksilukuja. Tällöin määritellään summa, erotus ja kertolasku seuraavasti:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \\z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2).\end{aligned}$$

Jos $a_2 \neq 0$ tai $b_2 \neq 0$, niin määritellään jakolasku

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Kompleksilukujen joukko määrää tason, jota merkitään symbolilla \mathbb{C} ja kutsutaan kompleksitasoksi. Algebran termein sanottuna kompleksilukujen joukko on järjestämätön kunta, mistä seuraa vaihdanta- ja liitäntälait, osittelulait sekä käänteisalkion,

vastaluvun ja tulon neutraalialkion olemassaolo. Järjestämätön kunta tarkoittaa, että kompleksilukuja ei voi laittaa järjestykseen. Kompleksilukujen algebrallisia ominaisuuksia ei käsitellä tarkemmin, oletetaan ne lukijalle tunnetuksi.

Kompleksilukuja tarkastellessa on usein hyödyllistä tarkastella kompleksitason geometriaa:

MÄÄRITELMÄ 1.3. Kompleksiluvun $z = x + iy$ kompleksikonjugaatti on $\bar{z} := z - iy$.

Kompleksiluvun kompleksikonjugaatti vastaa kompleksitasossa sitä vektoria, joka on peilattu reaaliakselin suhteen. Jotta voimme tehdä vertailua kompleksilukujen välillä, tarvitsemme jonkinlaisen mittarin kompleksiluvuille. Kompleksiluvun pituus määritellään kuten euklidinen normi:

MÄÄRITELMÄ 1.4. Kompleksiluvun $z = x + iy$ *moduli* on reaalityyppinen luku

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksiluvun moduli palautuu reaalityyppisten lukujen mielessä tuttuun itseisarvon käsitteeseen ja antaa siis mahdollisuuden etäisyyksien vertailuun, mitä analyysin peruskäsitteet, kuten jatkuvuuden määritelmä tarvitsee. Kompleksiluvun moduli tarkoittaa kyseisen vektorin pituutta kompleksitasossa, jolloin moduli on ei-negatiivinen reaalityyppinen luku. Usein kompleksiluvun modulia kutsutaan itseisarvoksi tai kompleksiluvun pituudeksi.

Kompleksitasossa on hyödyllistä ilmaista kompleksiluvut napakoordinaattien avulla, mikä antaa työkalun kompleksilukujen kerto- ja jakolaskulle.

LAUSE 1.5. *Jokainen kompleksiluku $z = x + iy$ voidaan esittää muodossa*

$$z = |z| [\cos(\theta) + i\sin(\theta)],$$

missä $|z| = r \geq 0$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Mikäli $\theta \in (-\pi, \pi]$, niin esitys on yksikäsitteinen.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [17, s. 9].

Lauseessa 1.5 esiintyvää kulmaa θ kutsutaan kompleksiluvun z argumentiksi ja merkitään $\text{Arg}(z) = \theta$. Mikäli kulma $\theta \in (-\pi, \pi]$, niin argumenttia θ kutsutaan argumentin päähaaraksi.

Napakoordinaattiesitysten avulla saadaan määriteltyä työkalu kompleksilukujen kertolaskulle, mikä kertoo, että kertominen kompleksiluvulla skaalaa ja kiertää annettua kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$:

LAUSE 1.6. *Olkoon*

$$z_1 = r_1 [\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)] \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 [\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)]$$

kompleksilukujen z_1 ja z_2 napakoordinaattiesitykset. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ja jos $z_2 \neq 0$, niin

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [17, s. 11–12]. □

ESIMERKKI 1.7. Olkoot kompleksiluvut $z_1 = x + iy$ ja $z_2 = i$. Tällöin niiden napakoordinaattiesitykset ovat

$$z_1 = |z| [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \quad \text{ja} \quad z_2 = 1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Kompleksilukujen z_1 ja z_2 tulo ja osamäärä on lauseen 1.6 nojalla

$$z_1 z_2 = |z| \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad \text{ja} \quad \frac{z_1}{z_2} = |z| \left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Näin ollen kompleksiluvulla $z = i$ kertominen vastaa kiertoa kulman $\frac{\pi}{2}$ verran vastapäivään ja kompleksiluvulla i jakaminen vastaa kulman $\frac{\pi}{2}$ kiertoa myötäpäivään.

Napakoordinaattiesitysten avulla voidaan johtaa De Moivren kaavan nimellä tunnettu tulos:

LAUSE 1.8. (*De Moivren kaava*). Olkoot $\theta \in \mathbb{R}$ ja $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Tällöin pätee

$$[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

kaikilla kokonaislukupotensseilla $n \in \mathbb{Z}$.

TODISTUS. Todistus on suoraviivainen induktiotodistus hyödyntäen trigonometrisiä laskusääntöjä, ks. [17, s. 13]. \square

De Moivren kaavasta voidaan helposti johtaa tulos, joka kertoo kompleksisten juurien käyttäytymisestä:

LAUSE 1.9. Olkoot $w = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)] \neq 0$ kompleksiluku ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin yhtälöllä

$$z^n = w$$

on täsmälleen n erillistä juurta, jotka ovat muotoa

$$\sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

missä $k = 0, 1, \dots, n-1$.

TODISTUS. Kirjoitetaan napakoordinaattien avulla $z = \rho[\cos(\gamma) + i \sin(\gamma)]$. Tällöin yhtälö $z^n = w$ voidaan lausua De Moivren kaavan 1.8 avulla muodossa

$$[\rho(\cos(\gamma) + i \sin(\gamma))]^n = \rho^n [\cos(n\gamma) + i \sin(n\gamma)] = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)].$$

Tämä on yhtäpitävää yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ \cos(n\gamma) + i \sin(n\gamma) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{cases}$$

kanssa. Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että $\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|w|}$. Toinen yhtälö voidaan lausua yhtäpitävästi muodossa $n\gamma = \theta + 2k\pi$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Toisin sanoen

$$\gamma = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Todetaan lopuksi, että kaikki erilliset juuret saavutetaan jo tapauksissa $k = 0, \dots, n-1$, mikä perustuu kokonaislukujen jakoyhtälöön. \square

Edellisen lauseen 1.9 seuraus on, että yhtälön $z^n = w$ juuret ovat jakautuneet tasaisesti origokeskisen ja $\sqrt[n]{|w|}$ -säteisen ympyrän kehälle.

Esitellään seuraavaksi lause, johon on koottu kompleksilukujen hyödyllisiä laskennallisia ominaisuuksia:

LAUSE 1.10. *Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Tällöin pätee*

- (1) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- (2) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- (3) $z\bar{z} = |z|^2$
- (4) $e^z e^w = e^{z+w}$
- (5) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- (6) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- (7) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (kolmioepäyhtälö)
- (8) $|z+w| \geq ||z| - |w||$ (käänteinen kolmioepäyhtälö)
- (9) $e^z = e^w$ jos ja vain jos $w = z + 2k\pi$, missä $k \in \mathbb{Z}$.

TODISTUS. Ei todisteta, sillä ominaisuudet (1-9) ovat yleisesti tunnettuja ja niiden todistukset ovat suoraviivaisia laskuja, ks. [17] ja [13]. \square

Viimeiseksi käydään läpi logaritmin määrittelyyn liittyviä huomioita tarkastellen kompleksisia eksponenttifunktioita. Osoittautuu, että yhtälöllä

$$(1.1) \quad e^w = z,$$

missä $z, w \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta ratkaisua. Esimerkkinä olkoon yhtälö

$$e^w = 1,$$

jonka ratkaisut ovat muotoa $w = 2k\pi i$ kaikilla $k = 0, \pm 1, \dots$. Toisin sanoen jokainen w on luvun 1 kompleksinen logaritmi. Jotta eksponenttiyhtälön ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen, niin määritellään, että yhtälön

$$e^w = z$$

ratkaisu on

$$(1.2) \quad w = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Muotoa (1.2) olevaa logaritmia kutsutaan logaritmin päähaaraksi ja merkitään $\operatorname{Log}(z)$. Todetaan vielä, että edellä määritelty $\operatorname{Log}(z)$ todella on eksponenttiyhtälön (1.1) ratkaisu. Lauseen 1.10 kohdan (4) avulla ja napakoordinaattiesitysten avulla saadaan

$$e^w = e^{\ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln|z|} e^{i \operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)} = z.$$

Koska logaritmin päähaara w toteuttaa yhtälön $e^w = z = e^{\operatorname{Log}(z)}$, niin lauseen 1.10 kohdan (9) nojalla w on muotoa

$$(1.3) \quad w = \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i = \ln |z| + i[\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi],$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Näin ollen jokainen muotoa (1.3) oleva kompleksiluku w on yhtälön (1.1) ratkaisu. Tapauksessa $k = 0$ kompleksiluku w on logaritmin päähaara ja kun $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, niin sanotaan, että w on logaritmin haara tai jokin logaritmin haaroista, joita on äärettömän monta. Mikäli logaritmin haaraa ei spesifioida, niin merkitään $w = \log(z)$.

1.2. Joukko-oppia

Määritellään seuraavaksi merkinnät, joita kompleksianalyysin kirjallisuudessa usein käytetään. Tässä työssä käytettävät merkinnät samaistetaan lähteessä [1] olevien merkintöjen kanssa. Oletetaan, että $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 < r < \infty$. Tällöin seuraavia joukkoja kutsutaan nimillä :

$$\begin{aligned}\Delta(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| < r\} && \text{avoin kiekko,} \\ \overline{\Delta}(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| \leq r\} && \text{suljettu kiekko,} \\ \delta(z_0, r) &= \{z : 0 < |z - z_0| < r\} = \Delta(z_0, r) \setminus \{z_0\} && \text{punkteerattu kiekko,} \\ K(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| = r\} && r\text{-säteinen ja } z_0\text{-keskinen ympyrä.}\end{aligned}$$

Kompleksitasossa määritellään peruskäsitteet vastaamaan euklidista tasoa. Näihin käsitteisiin kuuluu esimerkiksi joukkojen ominaisuudet, kuten kompaktius, yhtenäisyys sekä avoin ja suljettu joukko. Raja-arvon käsite ja jonojen suppeneminen samaistetaan myös euklidiseen tasoon. Tärkeimmät määritelmät ja tulokset koskien kompleksianalyysia ja Riemannin kuvauslausetta käydään kertauksen vuoksi läpi.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoot $U \subset \mathbb{C}$ ja $z \in U$. Piste z on joukon U sisäpiste, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $\Delta(z, r) \subset U$.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, mikäli kaikki joukon U pisteet ovat sisäpisteitä.

LAUSE 1.13. *Funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$ alkukuva $f^{-1}(V) = \{z \in U : f(z) \in V\}$ on avoin joukossa U .*

TODISTUS. Ei todisteta, sillä tulos on yleisesti tunnettu, ks. [14, s. 26]. □

MÄÄRITELMÄ 1.14. Piste z_0 on joukon U kasautumispiste, jos kaikilla $\epsilon > 0$ pätee, että $\Delta(z_0, \epsilon) \cap U \neq \emptyset$.

Ennen seuraavien lauseiden esittämistä, otetaan käyttöön seuraava lyhenne koskien äärettömiä jonoja:

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv (z_n).$$

Kasautumispisteet linkittyvät joukon alkioista muodostettujen jonojen käyttäytymiseen sekä siihen, miten suljettu joukko voidaan karakterisoida, kuten seuraavat kaksi tulosta osoittavat:

LAUSE 1.15. *Jonolla (z_n) on kasautumispiste $z_0 \in \mathbb{C}$ jos ja vain jos jonolla (z_n) on olemassa osajono (z_{n_k}) siten, että $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_{n_k}) = z_0$.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 39]. □

LAUSE 1.16. *Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on suljettu jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [14, s. 21]. □

MÄÄRITELMÄ 1.17. Jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että

$$|z_m - z_n| < \epsilon \quad \text{kaikilla } m, n \geq N.$$

Seuraavaksi todetaan, että metrinen avaruus (\mathbb{C}, d) , missä d on euklidinen metriikka, on täydellinen metrinen avaruus. Tämä kertoo sen, että kaikki Cauchy-jonot ovat suppenevia jonoja kompleksitasossa.

LAUSE 1.18. *Jos jono $(z_n) \subset \mathbb{C}$ on Cauchy-jono, niin se suppenee avaruudessa \mathbb{C} , t.s. on olemassa $z \in \mathbb{C}$ siten, että*

$$z_n \rightarrow z.$$

TODISTUS. Olkoon $z_n \in \mathbb{C}$ Cauchy-jono, $z_n = x_n + iy_n$. Koska jono z_n on Cauchy-jono, niin tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N = N(\epsilon)$ siten, että $|z_n - z_m| < \epsilon$ kaikilla $m, n \geq N$. Arviomalla nähdään, että

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \sqrt{(x_n - x_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} = |z_n - z_m| < \epsilon, \\ |y_n - y_m| &= \sqrt{(y_n - y_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} = |z_n - z_m| < \epsilon, \end{aligned}$$

jolloin jonot x_n, y_n ovat Cauchy-jonoja. Koska pari (\mathbb{R}, d) on täydellinen metrinen avaruus, niin reaali- ja imaginaarijonot x_n ja y_n ovat suppenevia jonoja. Näin ollen on olemassa reaaliluvut x_0, y_0 , joille $x_n \rightarrow x_0$ ja $y_n \rightarrow y_0$. Tällöin seuraa, että $z_n \rightarrow x_0 + iy_0$, mikä todistaa väitteen. □

Kompaktit joukot näyttävät merkittävää roolia kompleksianalyysissä. Myöhemmin määritetään funktiojonoille normaali suppeneminen, jossa kompaktiuden tärkeys tulee ilmi.

LAUSE 1.19. *(Heinen ja Borelin lause). Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [14, s. 55.] □

HUOMAUTUS 1.20. Kompaktiuden yleinen karakterisaatio topologian mielessä ei ole edellä mainittu, mutta koska kompleksitasossa etäisyydet määritetään euklidisen normin avulla, niin edellä mainittu tulos on ekvivalentti yleisen kompaktiuden määritelmän kanssa.

Kompleksianalyysissä käsitellään usein joukkoja, jotka ovat avoimia sekä yhtenäisiä. Yhtenäinen joukko määritellään epäyhtenäisyyden avulla. Epäyhtenäisyyden määritelmiä on useita, joista käytämme seuraavaa:

MÄÄRITELMÄ 1.21. Kompleksitason osajoukko A on epäyhtenäinen, mikäli on olemassa avoimet joukot U ja V siten, että

- (1) $A \cap U \cap V = \emptyset$,
- (2) $A \cap U \neq \emptyset$,
- (3) $A \cap V \neq \emptyset$,
- (4) $A \subset U \cup V$.

MÄÄRITELMÄ 1.22. Kompleksitason osajoukko U on yhtenäinen, mikäli se ei ole epäyhtenäinen.

Edellisten määritelmien avulla voidaan nyt määritellä kompleksianalyysin yksi tärkeimmistä joukkotyypeistä:

MÄÄRITELMÄ 1.23. Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on alue, jos joukko U on avoin ja yhtenäinen.

HUOMAUTUS 1.24. Englanninkielisessä kompleksianalyysin kirjallisuudessa kutsutaan alueita sanalla *domain*. Tätä ei kuitenkaan pidä sekoittaa funktion määrittelyjoukkoon, vaikka myös sitä kutsutaan usein nimellä *domain* kirjallisuudessa. Kompleksianalyysin kirjallisuudessa on usein tapana tehdä erottelu: *domain set of a function*, mikäli tarkoitetaan funktion määrittelyjoukkoa.

Todetaan seuraavaksi, että jatkuvat funktiot säilyttävät kompaktiuden ja yhtenäisyyden:

LAUSE 1.25. *Olkoon $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja olkoon $C \subset D$ yhtenäinen joukko. Tällöin kuvajoukko $f(C)$ on yhtenäinen.*

TODISTUS. Oletetaan, että $f(C)$ ei ole yhtenäinen. Tällöin on olemassa avoimet, epätyhjät ja pistevieraat joukot A, B siten, että $f(C) \subset A \cup B$. Joukkojen A ja B avoimuudesta seuraa, että on olemassa avoimet joukot U, V siten, että

$$A = f(C) \cap U \quad \text{ja} \quad B = f(C) \cap V.$$

Tällöin $f(C) \subset U \cup V$, jolloin $C \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Koska joukot U, V ovat avoimia ja pistevieraita, niin funktion f jatkuvuudesta seuraa lauseen 1.13 nojalla, että joukot $f^{-1}(U)$ ja $f^{-1}(V)$ ovat avoimia joukon C suhteen. Oletuksen nojalla joukko C on yhtenäinen, joten täytyy toisen joukoista $f^{-1}(U)$ ja $f^{-1}(V)$ olla tyhjä joukko. Olkoon tällöin $f^{-1}(U) = \emptyset$. Koska $A \subset f^{-1}(U)$, niin myös $f^{-1}(A) = \emptyset$, mikä on ristiriita. \square

LAUSE 1.26. *Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja olkoon $C \subset A$ kompakti. Tällöin $f(C)$ on kompakti.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [14, s. 54] \square

1.3. Kompleksinen differentioituvuus

Seuraavaksi määritellään kompleksimuuttujan funktioille differentioituvuuden käsite. Kompleksinen differentioituvuus tai derivoituvuus on kompleksianalyysin kiehtovimpia ja parhaiten tunnettuja ominaisuuksia, sillä kompleksisesti derivoituvien funktioiden käyttäytyminen on hyvin ennustettavissa, kuten tutkielman myöhemmät tulokset tulevat osoittamaan.

MÄÄRITELMÄ 1.27. Olkoot U avoin joukko ja $z_0 \in U$. Funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 , jos raja-arvo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

on olemassa. Jos edellinen raja-arvo on olemassa, niin merkitään funktion f kompleksista derivaattaa pisteessä z tavanomaisella tavalla $f'(z)$. Mikäli funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksisesti differentioituva kaikilla $z \in U$, niin tällöin sanotaan, että f on *holomorfinen* joukossa U .

On tärkeää havaita, että kompleksisen differentioituvuuden määritelmässä vaaditaan, että raja-arvon täytyy olla sama lähestyttäessä mistä tason suunnasta tahansa. Näin ollen raja-arvon olemassaolo ei rajoitu vain tietyn suuntaisille käyrille tai suorille, mikä rajoittaa kompleksisesti differentioituvien funktioiden määrää.

Useissa kompleksianalyysin kirjoissa, kuten [13], holomorfit funktiot samais-tetaan analyttisten funktioiden kanssa. Analyttisellä funktiolla tarkoitetaan funk-tiota $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, jolla on suppeneva potenssisarjaesitys kaikilla $z \in U$, missä U on avoin joukko. Osoittautuu, että jos funktio on holomorfinen avoimessa joukossa U , niin se on yhtäpitävää analyttisyyden kanssa [7]. Kuitenkin määritelmällisesti ana-lyttisyys ja holomorfituus ovat eri asiat, joten käytännön näkökulmasta on tärkeää pitää käsitteet erillisinä.

Yksi käyttökelpoisimmista tavoista tutkia funktioiden holomorfituutta on Cauchy-Riemann-yhtälöt:

LAUSE 1.28. (*Cauchy-Riemann-yhtälöt*). Olkoot U avoin joukko, funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0 \in U$ ja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin osittaisderivaatat $\partial_x(u) = u_x$, $\partial_y(u) = u_y$, $\partial_x(v) = v_x$ ja $\partial_y(v) = v_y$ ovat olemassa pisteessä $z_0 = (x_0, y_0)$ ja

$$\begin{aligned}u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\u_y(z_0) &= -v_x(z_0).\end{aligned}$$

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [5, s. 31]. □

Ennen seuraavaa tulosta otetaan käyttöön merkinnät koskien funktion suuntais-derivaattoja:

MÄÄRITELMÄ 1.29. Olkoot $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ funktio, U avoin joukko ja $z_0 \in U$. Tällöin erotusosamäärä lähestyttäessä pistettä z_0 reaaliakselin suuntaisesti on

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\&= f_x(z_0).\end{aligned}$$

Vastaavasti jos pistettä z_0 lähestytään imaginaariakselin suuntaisesti, niin saadaan

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) = -if_y(z_0),$$

missä

$$f_y(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0).$$

LAUSE 1.30. Olkoon U avoin joukko. Oletetaan, että funktiolla $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u + iv$ on olemassa osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y joukossa U . Jos kaikki osit-taisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä $z_0 \in U$ ja jos Cauchy-Riemann-yhtälöt pätevät pisteessä z_0 , niin f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0).$$

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 70–72] □

Pelkästään Cauchy-Riemann-yhtälöiden avulla ei voi päätellä, onko annettu funk-tio kompleksisesti derivoituva. Selvennetään tilannetta esimerkillä:

ESIMERKKI 1.31. Onko funktio

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

kompleksisesti differentioituva origossa $(0, 0)$? Aluksi havaitaan, että funktio $f(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa $f(z) = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2}$. Tällöin funktion f reaali- ja imaginaariosat ovat $u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}$ ja $v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$, kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Nyt raja-arvo tarkastelulla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3} = 1. \end{aligned}$$

Näin ollen $u_x(0, 0) = v_y(0, 0)$ ja $u_y(0, 0) = -v_x(0, 0)$, joten Cauchy-Riemann-yhtälöt pätevät origossa. Toisaalta jos valitaan $z = re^{i\theta}$, missä $r > 0$ ja $\theta \in (-\pi, \pi]$, niin

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \frac{r^2 e^{-2i\theta}}{r^2 e^{2i\theta}} = e^{-4i\theta}.$$

Huomataan, että erotusosamäärä lähestyy origossa kohti arvoa -1 , kun $\theta = \pi/4$ ja kohti arvoa 1 , kun $\theta = 0$. Näin ollen funktio $f(z)$ ei ole kompleksisesti differentioituva origossa.

1.4. Polkuintegraali

Esitellään seuraavaksi määritelmät liittyen tieintegraalien ja polkujen käsitteisiin, sekä tarvittavat tulokset edetessämme kohti Riemannin kuvauslausetta.

- MÄÄRITELMÄ 1.32. (1) Jatkuva kuvaus $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on polku, missä piste $\gamma(a)$ on polun alkupiste ja $\gamma(b)$ polun loppupiste. Kuvajoukkoa merkitään $\gamma([a, b]) = |\gamma|$ ja kutsutaan polun jäljeksi.
- (2) Polku $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, missä $t \in [a, b]$, on jatkuvasti differentioituva, jos derivaatta $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ on olemassa kaikilla $t \in [a, b]$, ja jos γ' on jatkuva välillä $[a, b]$.
- (3) Polku $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva, jos on olemassa jako $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ siten, että γ on jokaisella välillä $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq k \leq n$, jatkuvasti differentioituva.
- (4) Polku $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on suljettu, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Määritellään seuraavaksi kompleksitasoon funktion f primitiivi. Määritelmä on vastaava reaalisen vastineensa kanssa:

MÄÄRITELMÄ 1.33. Olkoot U avoin joukko ja $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ funktio, missä $U \subset D$. Funktio $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ on funktion f primitiivi joukossa U , jos F on holomorfinen U :ssa ja $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in U$.

Seuraava lause kertoo, että jos kompleksimuuttujan funktiolla on primitiivi avoimessa joukossa U , niin polkuintegraalin arvo riippuu vain polun päätepisteistä. Mikäli polku on suljettu, niin polkuintegraalin arvo on nolla.

LAUSE 1.34. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva avoimessa joukossa U ja, että funktio F on f :n primitiivi joukossa U . Jos polku $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva, niin*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti jos γ on suljettu, niin $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 126]. □

Seuraavaksi annetaan määritelmä kierrosluvulle. Kierrosluku $n(\gamma, z)$ on kokonaisluku, joka kertoo monta kertaa paloittain jatkuvasti differentioituva polku γ kiertää annetun pisteen z ympäri. Mikäli kierrosluvun arvo on positiivinen, niin polku kiertää vastapäivää annetun pisteen ympäri. Vastaavasti kierrosluvun arvo on negatiivinen, mikäli polku kiertää myötäpäivää annetun pisteen ympäri.

MÄÄRITELMÄ 1.35. Olkoon γ suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva polku ja olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Tällöin γ :n kierrosluku pisteen z ympäri on

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nyt voidaan esitellä ns. lokaali versio Cauchyn integraalikaavasta, joka antaa keinoon esittää holomorfinen funktio polkuintegraalin avulla:

LAUSE 1.36. *(Cauchyn integraalikaava - lokaali versio). Oletetaan, että funktio f on holomorfinen avoimessa kiekossa Δ , ja että polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva kiekossa Δ . Tällöin*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

kaikilla $z \in \Delta \setminus |\gamma|$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 161–162]. □

Ennen Cauchyn integraalikaavan seurausta otetaan käyttöön merkintä:

MÄÄRITELMÄ 1.37. Olkoon U avoin joukko. Funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ kuuluu luokkaan $C^k(U)$, jos kaikki mahdolliset osittaisderivaatat $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, \dots, f_{kx}, \dots$ ovat olemassa lukuun k asti ja ovat jatkuvia funktioita joukossa U .

Lokaalin Cauchyn integraalin kaavan seurauksena funktion holomorfinisuudesta seuraa uskomaton tulos, joka korostaa kompleksisen ja reaalisen differentioituvuuden eroja:

SEURAUUS 1.38. *Olkoot U avoin joukko ja funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfinen. Tällöin derivaatta f' on holomorfinen joukossa U ja f kuuluu joukkoon $C^1(U)$.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 164]. □

Edellinen seuraus kertoo sen, että holomorfinen funktioiden derivaatat ovat myös holomorfinen. Induktiolla voidaan osoittaa, että jos U on avoin ja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, niin f kuuluu joukkoon $\mathcal{C}^\infty(U)$. Näin ollen holomorfinen funktiot ovat äärettömästi kompleksisesti derivoituvia funktioita, mikä on erittäin vahva ominaisuus.

Seuraava yleisesti tunnettu tulos esitellään lemmalla, jotta saadaan tulos holomorfinen funktioiden derivaattojen arvioimiseen:

LEMMA 1.39. *Oletetaan, että funktio f on holomorfinen avoimessa kiekossa Δ , $k \in \mathbb{N}$, ja että polku γ on suljettu ja paloittain jatkuvasti differentioituva kiekossa Δ . Tällöin*

$$n(\gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

kaikilla $z \in \Delta \setminus |\gamma|$, missä k on derivaatan kertaluku.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks [13, s. 166]. □

Edellisen lemmän avulla saadaan nyt Cauchyn estimaattina tunnettu tulos, mikä antaa työkalun funktion kompleksisten derivaattojen arvioimiseen:

LAUSE 1.40. *(Cauchyn estimaatti). Oletetaan, että funktio f on holomorfinen avoimessa kiekossa $\Delta = \Delta(z_0, r)$, ja että arvio $|f(z)| \leq m$ pätee kaikilla $z \in \Delta$, missä $m > 0$. Tällöin*

$$|f^k(z)| \leq \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $z \in \Delta$. Erityisesti vielä

$$|f^k(z_0)| \leq \frac{k!m}{r^k}.$$

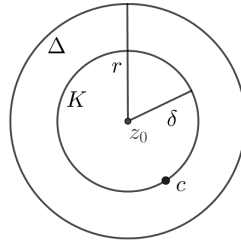
TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [13, s. 167]. Olkoon $z \in \Delta$. Valitaan $s > 0$ siten, että $|z - z_0| < s < r$. Jos piste c on ympyrällä $K = K(z_0, r)$, niin käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla saadaan

$$(1.4) \quad |c - z - 0| = |c - z_0 + z_0 - z| \geq |c - z_0| - |z - z_0| = s - |z - z_0|.$$

Tällöin lemmän 1.39 nojalla

$$\begin{aligned} |f^k(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|c-z_0|=s} \frac{f(\zeta)}{(c-z)^{k+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|c-z_0|=s} \frac{|f(\zeta)|}{|c-z|^{k+1}} d\zeta \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|c-z_0|=s} \frac{m}{(s - |z - z_0|)^{k+1}} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi s \cdot m}{(s - |z - z_0|)^{k+1}} \xrightarrow{s \rightarrow r} \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}, \end{aligned}$$

missä toisessa arviossa on käytetty epäyhtälöä (1.4). Jälkimmäinen väitteen osa seuraa sijoittamalla edellä saatuun arvioon piste $z = z_0$. □



KUVA 1.1. Cauchyn estimaatin todistukseen liittyvä apukuva.

1.5. Syklit ja Cauchyn-lause

Ennen siirtymistä Cauchyn-lauseena tunnettuun tulokseen, täytyy määritellä syklin käsite. Syklillä tarkoitetaan äärellisen monen paloittain jatkuvasti derivoituvan ja suljetun polun yhdistettä:

MÄÄRITELMÄ 1.41. $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ on sykli, jos polut $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ovat suljettuja ja paloittain jatkuvasti differentioituvia.

Huomaa, että syklin määritelmä ei kerro mitään siitä, miten polkuintegraali tai kierrosluku on määritelty syklille σ . Näin ollen määritellään seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.42. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva funktio ja $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ sykli joukossa A .

(1) Tällöin määritellään, että polkuintegraali yli syklin σ on

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

(2) Nyt jos $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$, niin voidaan määritellä syklin σ kierrosluku pisteen z suhteen

$$n(\sigma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

(3) Erityisesti jos $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$, niin $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma_n|$ jokaiselle polulle γ_n . Näin ollen syklin kierrosluvulle pätee

$$n(\sigma, z) = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + \dots + n(\gamma_n, z).$$

Annetaan seuraavaksi määritelmä syklin nollahomologisuudelle:

MÄÄRITELMÄ 1.43. Olkoon U avoin joukko. Sykli σ on nollahomologinen joukossa U , jos $n(\sigma, z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Nyt voidaan esittää kirjallisuudessa Cauchyn lauseena tunnettu tulos:

LAUSE 1.44. (Cauchyn lause). Olkoon σ sykli avoimessa joukossa U . Tällöin

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 0$$

kaikille holomorfisille funktioille $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ jos ja vain jos σ on nollahomologinen joukossa U .

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 188–191].

□

Myöhemmin tässä tutkielmassa esiintyvä Riemannin kuvauslause käsittelee yhdesti yhtenäisiä alueita. Syklin ja nollahomologisuuden määritelmien avulla saadaan ensimmäinen karakterisaatio yhdesti yhtenäiselle alueelle:

MÄÄRITELMÄ 1.45. Alue D on yhdesti yhtenäinen, jos kaikki syklit ovat nollohologisia alueessa D .

Seuraavaksi esitellään kaksi tulosta, joista ensimmäinen antaa yhteyden holomorfinisuuden, tieintegraalin ja logaritmin haaran olemassaolon välillä. Jälkimmäinen tulos antaa karakterisaation logaritmin haaran ja yhdesti yhtenäisyyden välille, mitä tarvitaan Riemannin kuvauslauseen todistukseen.

LEMMA 1.46. *Oletetaan, että funktio f on holomorfinen alueessa D ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin on olemassa logaritmin haara alueessa D jos ja vain jos*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

jokaiselle suljetulle ja paloittain jatkuvasti differentioituvalle polulle γ alueessa D . Ja jos funktio g on logaritmin haara alueessa D , niin kaikki logaritmin haarat ovat muotoa $g + 2\pi ik$, missä $k \in \mathbb{K}$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 176–177]. □

LAUSE 1.47. *Olkoon D alue. Oletetaan, että funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on holomorfinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin alue D on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos on olemassa logaritmin haara alueessa D .*

TODISTUS. Todistus seuraa lähdeettä [13, s. 196–197]. Oletetaan, että alue D on yhdesti yhtenäinen. Oletuksen nojalla funktio f on holomorfinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin Cauchyn lauseen 1.44 nojalla

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} = 0$$

kaikilla suljetuilla ja paloittain jatkuvasti differentioituville poluilla γ alueessa D . Tällöin lemmän 1.46 nojalla on olemassa logaritmin haara alueessa D . Tämä todistaa väitteen ensimmäisen suunnan.

Todistetaan väitteen toinen suunta. Olkoon piste $z \in \mathbb{C} \setminus D$ ja funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että $f(\zeta) = \zeta - z$. Koska funktio f on holomorfinen ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$, niin oletuksen nojalla on olemassa logaritmin haara alueessa D . Valitaan yksi logaritmin haaroista ja olkoon se funktio $g(\zeta) = \log(\zeta - z)$. Tällöin $g'(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$, jolloin lemmän 1.39 nojalla

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g'(\zeta) d\zeta = 0$$

kaikille suljetuille ja jatkuvasti differentioituville poluille γ alueessa D . Koska piste $z \in \mathbb{C} \setminus D$ on mielivaltainen, niin jokainen sykli on nollahomologinen alueessa D , jolloin alue D on yhdesti yhtenäinen. □

1.6. Jonoperheet

Tässä kappaleessa käsitellään lyhyesti Riemannin kuvauslauseen todistukseen tarvittavat jonoperheitä koskevat tulokset. Esiteltävistä tuloksista Arzela-Ascolin lause, Montelin lause, Rouchen lause ja Hurwitzin lause ovat hyvin tunnettuja tuloksia kompleksianalyysistä ja topologiasta. Aloitetaan määrittelemällä normaaliperheen ja yhtäjatkuvuuden (engl. *Equicontinuous*) käsitteet:

- MÄÄRITELMÄ 1.48.** (1) Olkoon F perhe jatkuvia funktioita joukossa U . Perhe F on normaali, jos sen jokaisella jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}) , joka supenee tasaisesti joukon U kompakteissa osajoukoissa.
- (2) Perhe $F = \{f \in F : f: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ on yhtäjatkuva pisteessä $z_0 \in U$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kaikilla $f \in F$, kun $|z - z_0| < \delta$. Perhe F on yhtäjatkuva joukossa U , jos se on yhtäjatkuva jokaisessa joukon U pisteessä.

Seuraavaa aputulosta tarvitaan Montelin lauseena tunnetun tuloksen todistuksessa, mitä hyödynnetään myöhemmin Riemannin kuvauslauseen todistuksessa.

LEMMA 1.49. (*Arzela-Ascolin lause*). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin joukko ja olkoon F jatkuva funktioperhe joukossa U . Perhe F on normaali joukossa U jos ja vain jos se on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu joukossa U .*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 282–284]. □

LAUSE 1.50. (*Montelin lause*). *Olkoon F perhe holomorfisista funktioita avoimessa joukossa U . Oletetaan, että F on lokaalisti rajoitettu U :ssa. Tällöin perhe F on normaali joukossa U .*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [13, s. 285]. Oletuksen nojalla perhe F on lokaalisti rajoitettu joukossa U , joten se on myös pisteittäin rajoitettu. Arzela-Ascolin lauseen 1.49 nojalla riittää osoittaa, että perhe F on yhtäjatkuva joukossa U . Olkoon piste $z_0 \in U$. Valitaan $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $k = \bar{\Delta}(z_0, 2r)$ kuuluu joukkoon U . Oletuksen nojalla perhe F on lokaalisti rajoitettu joukossa U , joten on olemassa $m = m(k) > 0$ siten, että $|f(\zeta)| \leq m$ kaikilla $\zeta \in K$ ja kaikilla $f \in F$. Kun $z \in \Delta = \Delta(z_0, r)$, niin Cauchyn integraalikaavan 1.36 nojalla jokaiselle $f \in F$ pätee

$$\begin{aligned}
 |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{f(\zeta)(z-z_0)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)} d\zeta \right| \\
 &= \frac{|z-z_0|}{2\pi} \left| \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)} d\zeta \right| \\
 &\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z||\zeta-z_0|} d\zeta \\
 &= \frac{|z-z_0|}{4\pi r} \int_{|\zeta-z_0|=2r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|} d\zeta \\
 &\leq \frac{|z-z_0|}{4\pi r} \cdot \frac{4\pi r \cdot m}{2r-|z-z_0|} = \frac{m|z-z_0|}{2r-|z-z_0|} \leq \frac{m|z-z_0|}{2r-r} = \frac{m|z-z_0|}{r}.
 \end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\delta = \min \left\{ r, \frac{r\epsilon}{m} \right\}$. Jos $r < \frac{r\epsilon}{m}$, niin saadaan arvio

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{m|z - z_0|}{r} < \frac{mr}{r} = m < \epsilon.$$

Jos taas $\frac{r\epsilon}{m} < r$, niin

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{m|z - z_0|}{r} < \frac{m}{r} \cdot \frac{r\epsilon}{m} = \epsilon.$$

Tällöin kaikille $f \in F$ pätee $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, kun $|z - z_0| < \delta$. Näin ollen perhe F on yhtäjatkuva joukossa U , sillä $z_0 \in U$ on mielivaltainen piste. Tällöin Arzela-Ascolin lauseen 1.49 nojalla perhe F on normaali joukossa U . \square

Jatketaan antamalla määritelmät homeomorfismille ja Jordan-alueelle:

MÄÄRITELMÄ 1.51. Funktio f on homeomorfisimi, jos se on jatkuva bijektio ja käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 1.52. Alue D on Jordan-alue, jos sen reuna on homeomorfinen yksikköympyrän kehän kanssa.

Seuraavaa kahta tärkeää tulosta, Rouchen lausetta ja Hurwitzin lausetta tarvitaan, jotta saadaan tietoa holomorfinen funktiojonojen käyttäytymisestä kompakteissa osajoukoissa.

LAUSE 1.53. (*Rouchen lause*). Olkoon D Jordan-alue ja $J = \partial D$. Jos funktiot f, g ovat holomorfinen avoimessa joukossa U , jolle $D \subset U$ ja epäyhtälö

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

pätee kaikilla $z \in \partial D$, niin funktiolla f ja g on yhtä monta nollakohtaa joukossa D , kun huomioidaan myös nollakohtien kertaluvut.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 341–342]. \square

Hurwitzin lausetta varten tarvitaan kuitenkin vielä seuraava aputulokset:

LEMMA 1.54. Olkoot U avoin joukko ja $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfinen funktioita. Jos funktiojono (f_n) suppenee joukon U kompakteissa osajoukoissa kohti funktiota f , niin f on holomorfinen joukossa U .

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [15, s. 22–23]. \square

LAUSE 1.55. (*Hurwitzin lause*). Oletetaan, että funktiojono (f_n) on holomorfinen ja $(f_n) \neq 0$ alueessa D kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että $(f_n) \rightarrow f$ tasaisesti alueen D kompakteissa osajoukoissa. Tällöin joko $f \neq 0$ tai $f \equiv 0$ alueessa D .

TODISTUS. Todistus seuraa lähdettä [13, s. 348–349]. Lauseen 1.54 nojalla tiedetään, että funktio f on holomorfinen alueessa D . Oletetaan, että $f(z_0) = 0$ jollain $z_0 \in D$ ja osoitetaan, että tällöin $f(z) = 0$ kaikilla $z \in D$. Oletetaan seuraavaksi, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D \setminus \{z_0\}$ ja näytetään sen johtavan ristiriitaan. Tällöin siis pisteen z_0 on oltava funktion f eristetty piste, jolle $f(z_0) = 0$.

Olkoon nyt $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(z_0, r) \subset D$ ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in K = K(z_0, r)$. Koska funktio f on jatkuva kompaktissa joukossa $\bar{\Delta}$, niin

on olemassa $\inf\{|f(z)| : z \in K\} = \epsilon > 0$. Oletuksen nojalla tiedetään, että $(f_n) \rightarrow f$ tasaisesti joukossa K , jolloin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)|$$

kaikilla $z \in K$. Tällöin Rouchen lauseesta 1.53 seuraa, että funktioilla f_n ja f on yhtä monta nollakohtaa kiekossa $\Delta(z_0, r)$. Näin ollen funktiolla f_n on ainakin yksi nollakohta, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Tällöin $f \equiv 0$ alueessa D . \square

LAUSE 1.56. *Oletetaan, että funktiojonon (f_n) funktiot f_n ovat holomorfnisia ja injektioita alueessa $D \subset \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että $(f_n) \rightarrow f$ tasaisesti joukon D kompakteissa osajoukoissa. Tällöin funktio f on injektio tai vakiofunktio alueessa D .*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [13, s. 349]. Oletuksesta seuraa, että funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on holomorfninen lauseen 1.54 nojalla. Oletetaan, että f ei ole vakio alueessa D . Olkoon $z_0 \in D$. Osoitetaan, että $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$. Määritellään funktiojono (g_n) alueeseen $D_0 = D \setminus \{z_0\}$ siten, että $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Oletuksen nojalla funktiojono (f_n) on injektio alueessa D , joten funktiojonolla (g_n) ei ole nollakohtia alueessa D_0 . Funktiojonon (g_n) määrittelystä seuraa myös, että $g_n \rightarrow g$ tasaisesti alueen D_0 kompakteissa osajoukoissa, missä $g(z) = f(z) - f(z_0)$.

Toisaalta aiemman oletuksen nojalla f ei ole vakio alueessa D , joten funktiolla g ei ole nollakohtia alueessa D_0 . Tällöin Hurwitzin lauseen 1.55 nojalla $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D_0$. Näin ollen pätee $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \neq z_0$. Koska piste $z_0 \in D$ on mielivaltainen, niin funktio f on injektio alueessa D . \square

Seuraava tulos kertoo, että holomorfniset funktiot, jotka eivät ole vakiofunktioita, säilyttävät alueellisuuden.

LAUSE 1.57. *(Avoimen kuvauksen lause). Olkoon $D \subset \mathbb{C}$. Jos funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on holomorfninen ja ei-vakio alueessa D , niin kuvajoukko $f(D)$ on alue.*

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [13, s. 359–360]. \square

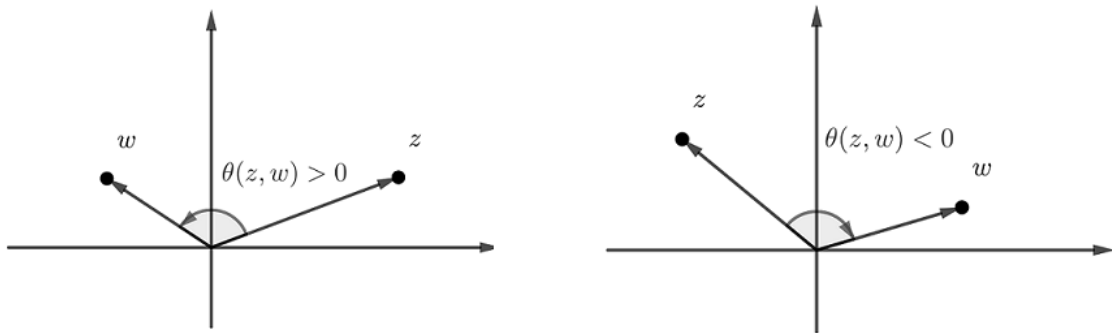
LUKU 2

Konformikuvaukset

Kompleksianalyysin yksi tärkeimmistä sovelluksista on konformikuvaukset. Oletetaan, että meillä on fysikaalinen ongelma alueessa $D \in \mathbb{C}$, jossa sen ratkaiseminen on mahdotonta tai approksimatiivisesti liian epätarkkaa. Onko silti mahdollista löytää ratkaisu haluttuun ongelmaan ilman, että tilanteen fysikaalisesti ominaisuudet, kuten vektorien ja käyrien väliset kulmat muuttuvat? Osoittautuu, että jos alue D on yhdesti yhtenäinen alue, niin konformikuvaukset ovat yksi vaihtoehto ongelman ratkaisuun.

Tässä luvussa konformikuvauksia lähestytään lähteiden [13], [12] ja [15] pohjalta. Konformikuvauksilta halutaan, että ne säilyttävät kulmat sekä kulmien suunnat. Seuraavaksi määritellään konformikuvaukset kahdella eri lähestymistavalla. Aloitetaan suoran määritelmän kautta, jota varten on tarve määritellä suunnatun kulman käsite:

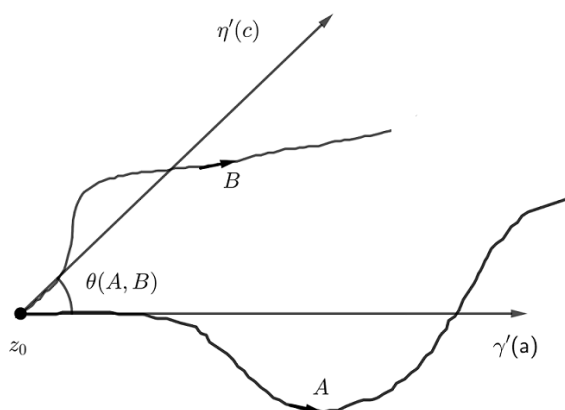
MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoot pisteet $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin $\theta(z, w) = \text{Arg}\left(\frac{w}{z}\right)$ on suunnattu kulma pisteestä z pisteeseen w . Geometrisesti $\theta(z, w)$ tarkoittaa kulmaa väliltä $(-\pi, \pi]$ siten, että vektoreiden z ja w väliltä valitaan pienempi muodostuneista kahdesta kulmasta. Erityisesti jos $\theta(z, w) > 0$, niin siirrytään vektorista z vektoriin w vastapäivään, ks. kuva 2.1. Vastaavasti jos $\theta(z, w) < 0$, niin siirtymä on myötäpäivään.



KUVA 2.1. Suunnatut kulmat vektoreiden z ja w välillä.

Edellinen määritelmä koskee vain kompleksitason vektoreiden tai janojen välisiä kulmia. Tarvitaan vielä tapa, jolla voidaan määrittää suunnattu kulma kahden derivoituvan polun leikkauspisteessä, ks. kuva 2.2.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoot polut $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ja $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ ei-suljettuja ja paloittain jatkuvasti derivoituvia polkuja, joille $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$ ja $\eta'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [c, d]$. Lisäksi oletetaan, että poluilla γ, η on yksi yhteinen päätepiste z_0 ,



KUVA 2.2. Suunnattu kulma polkujen γ ja η päätepisteessä z_0 .

mutta muuten ovat erillisiä. Tällöin määritellään

$$\theta(A, B) = \theta[\gamma'(a), \eta'(c)],$$

missä $A = |\gamma|$ ja $B = |\eta|$.

Nyt voidaan antaa ensimmäinen määritelmä konformisuudelle:

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoot U avoin joukko, $U \neq \emptyset$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ funktio ja $z_0 \in U$. Tällöin funktio f on konforminen pisteessä z_0 , jos pätee

$$\theta(A, B) = \theta[f(A), f(B)]$$

aina kun A ja B ovat määritelmän 2.2 mukaisia polkujen kuvia.

Konformisuuden määritelmän avulla voidaan osoittaa, että holomorfinen funktio on konforminen pisteissä, joissa sen derivaatta ei häviä:

LAUSE 2.4. *Olkoot U avoin joukko, $U \neq \emptyset$ ja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfinen funktio. Tällöin funktio f on konforminen pisteessä $z_0 \in U$, jos $f'(z_0) \neq 0$.*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [12, s. 149–150]. Olkoon α suunnattu kulma polkujen γ ja η välillä pisteessä z_0 . Osoitetaan, että suunnattu kulma α säilyy kuvauksessa f . Valitaan seuraavaksi pisteet $z_1 \in |\gamma|$ ja $z_2 \in |\eta|$ siten, että

$$z_1 - z_0 = re^{i\psi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 - z_0 = re^{i\psi_2}.$$

Toisin sanoen pisteet z_1 ja z_2 ovat etäisyyden r päässä pisteestä z_0 joillakin napakulmilla ψ_1, ψ_2 . Edellisistä napakoordinaattiesityksistä saadaan

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{\psi_2 - \psi_1},$$

mistä nähdään, että suunnatulle kulmalle pätee $\theta([z_1, z_0], [z_2, z_0]) = \psi_2 - \psi_1$. Erityisesti jos $r \rightarrow 0$, niin $\theta([z_1, z_0], [z_2, z_0]) \rightarrow \alpha$. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$(2.1) \quad \alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Arg} \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right).$$

Merkitään seuraavaksi $f(z_1) = w_1$ ja $f(z_2) = w_2$. Tällöin polkujen γ ja η kuvat leikkaavat pisteessä $w_0 = f(z_0)$, jonka suunnattu kulma on yhtälön (2.1) nojalla

$$(2.2) \quad \beta = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \left(\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \right).$$

Muokkaamalla yhtälöä (2.2) saadaan

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \left[\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \left[\frac{\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0}}{\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}} \cdot \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nyt jos $r \rightarrow 0$, niin pisteet z_1 ja z_2 lähestyvät kohti pistettä z_0 . Näin ollen saadaan

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = f'(z_0),$$

sillä oletuksen nojalla funktio f on holomorfinen pisteessä z_0 . Nyt koska oletettiin, että $f'(z_0) \neq 0$, niin

$$\beta = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \alpha,$$

jolloin suunnattu kulma α säilyy kuvauksessa f .

□

Toinen lähestymistapa konformisuudelle on etsiä yhtäpitäviä ehtoja konformisuuden kanssa. Tämä on usein käytännöllisempi tapa lähestyä konformikuvauksia todistusten ja esimerkkien kannalta. Seuraavaa lausetta varten tarvitsemme Jacobin determinantin ja diffeomorfismin käsitteet.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoot U avoin joukko ja funktio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ on muotoa $f = u + iv$. Oletetaan lisäksi, että f kuuluu joukkoon $C^1(U)$. Tällöin funktion f Jacobin determinantti J_f on

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{vmatrix} = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z).$$

Erityisesti jos funktio f on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0 \in U$, niin Cauchy-Riemannin yhtälöiden 1.28 nojalla

$$J_f(z_0) = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z) = u_x(z_0)^2 + u_y(z_0)^2 = |f'(z_0)|^2.$$

Nyt voidaan määritellä diffeomorfismin käsite:

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on diffeomorfismi, jos se on injektio ja kuuluu luokkaan $C^1(D)$ sekä Jacobin determinantille pätee $J_f \neq 0$ kaikilla $z \in D$.

Diffeomorfismin määritelmästä seuraa suoraan, että jos $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on diffeomorfismi, niin joko $J_f > 0$ tai $J_f < 0$ kaikilla $z \in D$. Tämä johtuu siitä, että $J_f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja $J_f \neq 0$ kaikilla $z \in D$, jolloin jatkuvuuden nojalla kuvajoukko $J_f(D)$ on yhtenäinen ja $J_f \neq 0$ alueessa D .

Edellisten määritelmien avulla saadaan lause, joka on yksi parhaimmista konformisuuden karakterisaatioista, mikä linkittää yhteen funktion differentioituvuuden sekä Jacobin determinantin konformisten funktioiden käyttäytymiseen.

LAUSE 2.7. Olkoot $D \subset \mathbb{C}$ alue ja funktio $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ diffeomorfismi. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja pisteessä $z_0 \in D$:

- (1) Funktio f on kompleksisesti differentioituva pisteessä z_0 ,
- (2) Funktio f on kulman säilyttävä kuvaus pisteessä z_0 ja $J_f > 0$,
- (3) Funktio f on konforminen pisteessä z_0 .

TODISTUS. Ei todisteta. ks. [13, s. 380–382]. □

Edellisen lauseen 2.7 tärkein seuraus tämän tutkielman kannalta on, että funktio on konforminen, mikäli se on holomorfinen ja injektio. Tämä seuraa ehdoista (1) ja (3) ja siitä, että diffeomorfismit ovat määritelmällisesti injektioita. Usein kirjallisuudessa konformikuvauksia kutsutaankin holomorfisiksi injektioiksi.

Tärkeä seuraus myös lauseesta 2.7 on, että jos f ja g ovat konformikuvauksia, niin yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on konformikuvaus. Lisäksi jos $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ on konformikuvaus, niin lauseen 2.4 nojalla $f'(z) \neq 0$, jolloin $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(z)} \neq 0$. Tästä seuraa, että myös konformikuvauksen f käänteiskuvaus f^{-1} on konforminen, mikä tekee konformikuvauksista erityisen hyödyllisiä käytännön ongelmien kannalta.

Seuraavaksi esitellään Möbius-kuvaukset, jotka ovat alueiden kuvautumisten ja geometrinen ominaisuuksiensa takia tärkeitä. Möbius-kuvauksia varten on tarve määrittellä äärettömyyspiste ∞ . Lisäämällä kompleksitasoon äärettömyyspiste ∞ saadaan laajennettu kompleksitaso, jonka tavanomainen merkintä on $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Laajennettuun kompleksitasoon sovitaan, että $\frac{z}{0} = \infty$, kun $z \neq 0$ ja $\frac{z}{\infty} = 0$, kun $z \in \mathbb{C}$.

Laajennetun kompleksitason hyödyt tulevat parhaiten esille, kun esitellään käsite Riemannin pallo [13, s. 350–352.]. Osoittautuu, että laajennettu kompleksitaso $\hat{\mathbb{C}}$ ja yksikköpallon reuna euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^3 ovat topologisesti ekvivalentteja: Olkoon joukko $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ja ajatellaan kompleksitason pisteen olevan muotoa $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Asetetaan, että $P_0 = (0, 0, 1)$ ja määritellään funktio $\pi: S \setminus \{P_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ seuraavasti: Jokaiselle $P \in S$, $P \neq P_0$, $\pi(P)$ on se kompleksitason piste, jossa pisteiden P_0 ja P kautta kulkeva suora leikkaa kompleksitasoa.

Funktioita π kutsutaan steografiseksi projektioksi joukolta $S \setminus \{P_0\}$ kompleksitasoon \mathbb{C} . Määritetään seuraavaksi tarkka lauseke kuvaukselle $\pi(P)$. Määritelmällisesti kuvaus $\pi(P)$ on muotoa $\pi(P) = P_0 + t(P - P_0)$, missä $t > 0$ ja $P \neq P_0$. Asettamalla $P = (x_1, x_2, x_3)$ saadaan

$$\pi(P) = P_0 + t(P - P_0) = (0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)),$$

missä $t = \frac{1}{1-x_3} > 0$. Tällöin jokaisella $P \in S \setminus \{P_0\}$ kuvaus $\pi(P)$ on muotoa

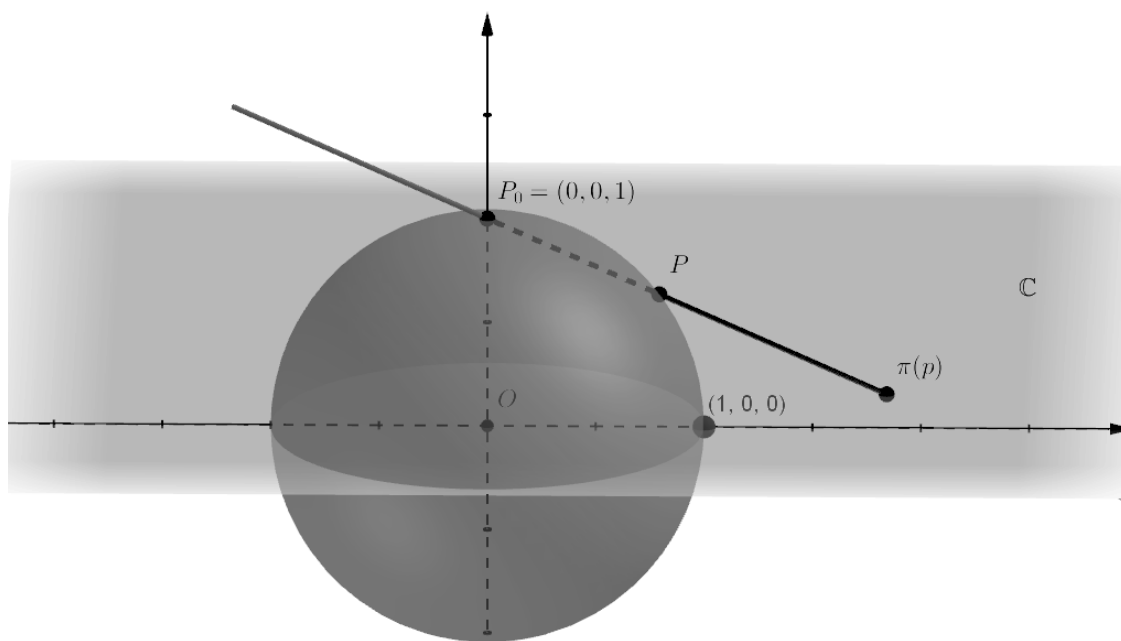
$$\pi(P) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right).$$

Annetulle kompleksiluvulle $z = x + iy$ saadaan laskemalla, että $z = \pi(P)$, missä

$$P = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Tällöin steografisella projektiolla π on käänteisfunktio $\pi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{P_0\}$, jonka lauseke on

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$



KUVA 2.3. Riemannin pallo ja stereografinen projektio $\pi(p)$.

Kuvauksista π ja π^{-1} huomataan, että ne ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Havaitaan myös, että $|\pi(P)| \rightarrow \infty$, kun $P \rightarrow P_0$. Määrittelemällä $\pi(P_0) = \infty$ saadaan homeomorfinen kuvaus $\pi: S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Riemannin pallon hienous piilee siinä, että laajennettu kompleksitaso voidaan ajatella yksikköpallon reunana, sillä homeomorfismit säilyttävät joukkojen topologiset ominaisuudet. Myös äärettömyyspiste on laskujen kannalta hyvin määritelty, sillä kompleksitason äärettömyyspiste kuvautuu yksikköpallon pohjoisnavalle. Tieto, että funktion äärettömyyspisteet ovat hyvin määriteltyjä on erityisen hyödyllinen Möbius-kuvasten yhteydessä.

Määritellään seuraavaksi Möbius-kuvaukset:

MÄÄRITELMÄ 2.8. Funktio $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, joka on muotoa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ja $ad - bc \neq 0$, kutsutaan Möbius-kuvaukseksi.

Möbius-kuvaukset voidaan jakaa neljään eri kategoriaan:

- (1) $f(z) = z + b$, missä $b \in \mathbb{C}$ (siirto)
- (2) $f(z) = az$, missä $a > 0$ (skaalaus)
- (3) $f(z) = az$, missä $|a| = 1$ (kierto)
- (4) $f(z) = \frac{1}{z}$ (inversio).

Tapauksissa 1 – 3 oletetaan, että funktio f ei ole identtinen kuvaus, sillä se myös toteuttaa tapaukset 1 – 3. Edellisistä määrittelyistä ehkä mielenkiintoisin on inversio, sillä se vaihtaa origon ja äärettömyyspisteen paikat toisikseen. Kuitenkaan tämä ei ole ongelma Riemannin pallon ansiosta.

Laajenettussa kompleksitasossa konformikuvausten määritelmää täytyy laajentaa, sillä holomorfinisuus ei ole määritelty pisteille, joissa funktion arvot lähestyvät ääretöntä. Tätä varten esitellään eristetyn erikoispisteen käsite ja karakterisaatio napapisteelle:

MÄÄRITELMÄ 2.9. Funktiolla f on eristetty erikoispiste $z_0 \in \mathbb{C}$, jos on olemassa $r > 0$ siten, että funktio f on holomorfinen punkteeratussa kiekossa $\delta(z_0, r)$, mutta ei ole holomorfinen kiekossa $\Delta(z_0, r)$.

LAUSE 2.10. *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0 . Erikoispiste z_0 on napa jos ja vain jos $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.*

TODISTUS. Ei todisteta, ks [15, s. 40]. \square

MÄÄRITELMÄ 2.11. Olkoon $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ alue. Funktio $f: D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ on konforminen, jos se on injektio ja holomorfinen kaikissa pisteissä paitsi napapisteissä.

Huomaa, että määritelmän 2.11 injektiivisyyden nojalla on olemassa korkeintaan yksi piste $z_0 \in D$ siten, että $f(z_0) = \infty$, jolloin konformikuvauksella f on korkeintaan yksi napapiste alueessa D .

SEURAUUS 2.12. *Möbius-kuvaukset ovat konformikuvauksia, koska:*

(1) *Möbius-kuvaukset ovat kahden holomorfisen funktion osamääränä holomorfinen laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}}$ paitsi napapisteissä, ja lisäksi pätee*

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$ oletuksen $ad - bc \neq 0$ nojalla.

(2) *Möbius-kuvaukset ovat injektioita, sillä pisteille $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ pätee*

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) \\ \iff \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ \iff (az_1 + b)(cz_2 + d) &= (cz_1 + d)(az_2 + b) \\ \iff adz_1 - bcz_1 + bcz_2 - adz_2 &= 0 \\ \iff (z_1 - z_2)(ad - bc) &= 0, \end{aligned}$$

jolloin oletuksen $ad - bc \neq 0$ nojalla $z_1 = z_2$.

Tutkitaan seuraavaksi, miten Möbius-kuvaukset kuvaavat ympyrät ja suorat kompleksitasossa. Tätä tietoa tullaan käyttämään tutkielman viimeisessä kappaleessa.

LEMMA 2.13. *Olkoon joukko S suora tai ympyrä kompleksitasossa \mathbb{C} ja kuvaus $f(z) = \frac{1}{z}$. Tällön $f(S) \cap \mathbb{C}$ on suora tai ympyrä.*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [1, s. 153–155]. Olkoon joukko $S = K(a, r)$ a -keskinen ja r -säteinen ympyrä sekä merkitään kuvajoukkoa $f(S) = \{w = \frac{1}{z} : z \in S\}$. Ympyrän S yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= r^2 \\ \iff (z - a)(z - \bar{a}) &= r^2 \\ \iff z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z &= r^2 - |a|^2. \end{aligned}$$

Muuttujan w avulla sanottuna ympyrän S yhtälö on

$$(2.3) \quad \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{a}{\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} = r^2 - |a|^2.$$

Tapauksessa $|a| = r$ yhtälö (2.3) on muotoa

$$\begin{aligned} 1 - aw - \bar{a}\bar{w} &= 0 \\ \iff \operatorname{Re}(aw) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Asettamalla $a = x + iy$ ja $w = u + iv$, niin muuttujan w saadaan muotoon

$$ux - vy = \frac{1}{2},$$

jolloin kuvajoukko $f(S)$ on suora.

Jos $r \neq |a|$, niin yhtälö (2.3) voidaan kirjoittaa muodossa

$$w\bar{w} - \left(\frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}\right)\bar{w} - \left(\frac{a}{|a|^2 - r^2}\right)w = \frac{-1}{|a|^2 - r^2}.$$

Merkitsemällä $\beta = \frac{\bar{a}}{|a|^2 - r^2}$ edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$w\bar{w} - \beta\bar{w} - \bar{\beta}w + |\beta|^2 = \frac{r^2}{(|a|^2 - r^2)^2},$$

jolloin

$$|w - \beta|^2 = \left(\frac{r^2}{|a|^2 - r^2}\right)^2.$$

Näin ollen $f(S)$ on β -keskinen ja r -säteinen ympyrä, missä $r = \left|\frac{r}{|a|^2 - r^2}\right|$. Viimeiseksi käydään läpi tapaus, jossa joukko S on suora. Jos S on suora, niin on olemassa $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $z = x + iy \in S$ siten, että

$$(2.4) \quad ax + by = c.$$

Merkitsemällä $\alpha = a - bi$ yhtälön edellisen suoran yhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha z) &= c \\ \iff \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} &= 2c. \end{aligned}$$

Tällöin yhtälö palautuu ympyrän tapaukseen, jolloin aiemman osoituksen nojalla kuvajoukko $f(S)$ on joko ympyrä tai suora. \square

LAUSE 2.14. *Olkoot funktio f Möbius-kuvaus ja joukko S ympyrä tai suora. Tällöin $f(S) \cap \mathbb{C}$ on ympyrä tai suora.*

TODISTUS. Möbius-kuvaus on muotoa $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $ad - bc \neq 0$. Jos $c = 0$, niin f on yhdistelmä siirtoja, skaalauksia ja kiertoja, jolloin väite seuraa. Jos $c \neq 0$, niin funktio f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \left(\frac{acz + ad - ad + bc}{cz + d} \right) = \frac{1}{c} \left[a - \left(\frac{ad - bc}{cz + d} \right) \right].$$

Tällöin funktio f on yhdistetty kuvaus muotoa $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, missä

$$\begin{aligned} f_1(z) &= cz + d, \\ f_2(z) &= \frac{1}{z}, \\ f_3(z) &= \frac{a}{c} - \left(\frac{ad - bc}{c} \right) z. \end{aligned}$$

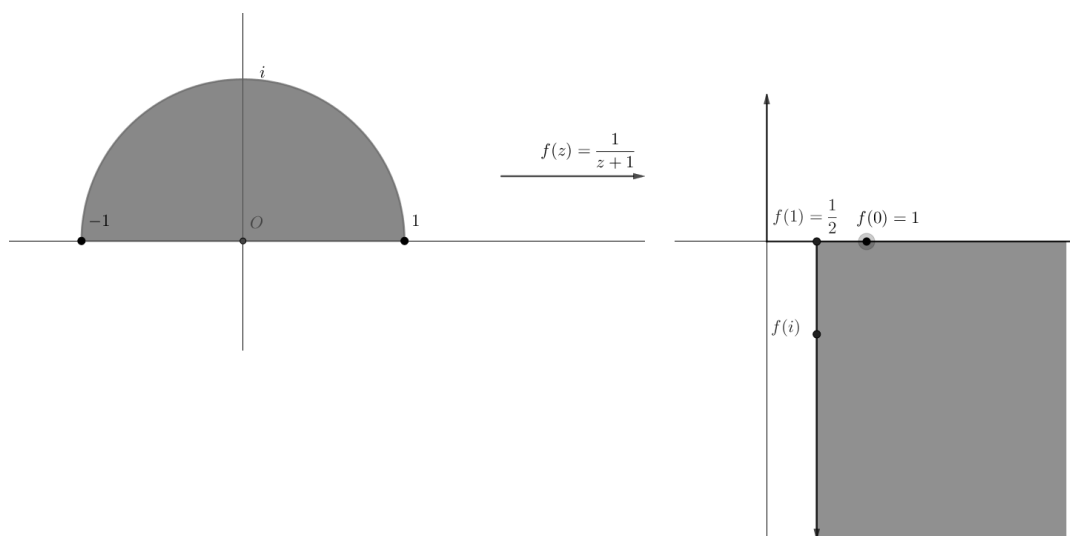
Funktiot f_1 ja f_3 ovat skaalauksia, kiertoja tai siirtoja, jolloin ne kuvaavat ympyrät ja suorat ympyröiksi ja suoriksi. Inversiokuvaus $f_2 = \frac{1}{z}$ kuvaa ympyrät ja suorat ympyröiksi ja suoriksi lemmän 2.13 nojalla. Tällöin seuraa, että yhdistetyllä funktiolla $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ edellä mainittu ominaisuus. \square

Käydään nyt läpi kaksi esimerkkiä, joilla halutaan painottaa Möbius-kuvausten geometrisia ominaisuuksia. Ensimmäisessä esimerkissä konstruoidaan haluttu funktio, ja toisessa esimerkissä näytetään annetun funktion toimivuus.

ESIMERKKI 2.15. [1, s. 155–156]. Etsitään se konformikuvaus f , joka kuvaa puolikieken $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ylempään puolitasoon $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Tarkastellaan konformikuvausta $f(z) = \frac{1}{z+1}$. Funktiolla f on napapiste pisteessä $z_0 = -1$ ja se kuvaa janan $[-1, 1]$ ja puoliympyrän $K = \{z \in K(0, 1) : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ äärettömiksi säteiksi. Funktion f konformisuuden nojalla näiden säteiden täytyy leikata pisteessä $f(1) = \frac{1}{2}$ ortogonaalisesti, ks. kuva 2.4. Sijoittamalla useita pisteitä funktion f lausekkeeseen nähdään, että puolikieken Δ sisäpisteet kuvautuvat alueeksi, joita nämä äärettömät säteet rajoittavat. Nyt kuvaus

$$g(z) = [i(f(z) - 1/2)]^2 = \frac{-(z-1)^2}{4(z+1)^2}$$

kuvaa puolikieken Δ ylempään puolitasoon Π^+ . Miksi? Ajatellaan tilannetta vaiheittain. Möbius-kuvaus $g_1(z) = z - \frac{1}{2}$ siirtää kuvajoukon äärettömät suorat leikkaamaan origossa ja Möbius-kuvaus $g_2(z) = iz$ kiertää kuvajoukkoa kulman $\theta = \frac{\pi}{2}$ verran eli kiertää kuvajoukon kompleksitasoon ensimmäiseen neljännekseen. Viimeiseksi kuvaus $g_3(z) = z^2$ on konforminen ensimmäisessä neljänneksessä ja se kuvaa ensimmäisen neljänneksen koko ylempään puolitasoon Π^+ , mikä seuraa helposti napakoordinaattiesityksistä. Toisin sanoen funktio g on yhdistetty kuvaus muotoa $g(z) = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$. Kuvaus g on konformikuvausten yhdistettynä funktiona konforminen.



KUVA 2.4. Esimerkin 2.15 puolikiekkon Δ kuvautuminen kuvauksella $f(z) = \frac{1}{z+1}$.

ESIMERKKI 2.16. Etsitään se konformikuvaus, joka kuvaa ylemmän puolitason Π^+ avoimeksi yksikkökiekoksi $\Delta = \Delta(0, 1)$. Osoitetaan, että Möbius-kuvaus $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ on haluttu kuvaus. Olkoon $z = x + iy$, jolloin $f(z) = \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}$. Koska $z \in \Pi^+$, niin $y > 0$, jolloin pätee arvio $(y-1)^2 < (y+1)^2$. Tällöin edellisen arvion avulla saadaan

$$x^2 + (y-1)^2 = |z-i|^2 < x^2 + (y+1)^2 = |z+i|^2,$$

mistä seuraa $|z-i| < |z+i|$. Nyt koska funktiolle f pätee

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} \leq \frac{|z-i|}{|z+i|} < \frac{|z+i|}{|z+i|} = 1,$$

niin kuvaus f kuvaa ylemmän puolitason Π^+ yksikkökiekoksi Δ .

Riemannin kuvauslausetta ja seuraavaa aputulosta varten tarvitsemme tuloksen, joka kertoo mitä muotoa ovat konformikuvaukset, jotka kuvaavat yksikkökiekkon konformisesti yksikkökiekoksi:

LAUSE 2.17. *Funktio $f: \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, joka kuvaa yksikkökiekkon $\Delta(0, 1)$ konformisesti itselleen, on muotoa*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{c+z}{1+\bar{c}z},$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$, siten, että $|c| < 1$.

TODISTUS. Ei todisteta, ks. [15, s. 54–55] tai [13, s. 388–389]. \square

Seuraavaksi esiteltävä aputulos on tärkeä osa Riemannin kuvauslauseen todistusta:

LEMMA 2.18. *Oletetaan, että $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen alue. Olkoon $z_0 \in D$ ja $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konformikuvaus, jolle pätee $f(D) \subset \Delta = \Delta(0, 1)$, $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$. Oletetaan lisäksi, että $f(D) \neq \Delta$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $g: D \rightarrow \mathbb{C}$, jolle $g(D) \subset \Delta$, $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) > f'(z_0)$.*

TODISTUS. Todistus seuraa lähdeettä [13, s. 418–419]. Merkitään aluksi $D_0 = f(D)$. Todistuksen idea on löytää sopivat apufunktiot g_3, g_2, g_1 , joiden avulla haluttu funktio g voidaan ilmaista yhdistettynä funktiona $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$. Aloitetaan apufunktioiden konstruointi. Olkoon piste $b \in \Delta \setminus D_0$. Koska $f(z_0) = 0 \in D_0$, niin tällöin $b \neq 0$. Tällöin lauseen 2.17 nojalla funktio

$$g_1(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

on kuvaus, joka kuvaa yksikkökierokkon konformisesti itselleen. Näin ollen funktio g_1 kuvaa yhdesti yhtenäisen joukon $D_0 \subset \Delta$ toiseksi yhdesti yhtenäiseksi joukoksi $D_1 = g_1(D_0) \subset \Delta$. Origo $(0, 0) = g_1(b) \notin D_1$, koska $b \notin D_0$. Lisäksi havaitaan, että $-b = g_1(0) \in D_1$. Nyt suoraan laskemalla nähdään, että

$$g_1(z) = \frac{1 - \bar{b}z + \bar{b}z - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2} = \frac{1 - |b|^2}{(1 - \bar{b}z)^2},$$

jolloin $g_1'(0) = 1 - |b|^2$. Lauseen 1.47 nojalla tiedetään, että on olemassa logaritmin haara joukossa D_1 . Valitaan yksi ja merkitään sitä kirjaimella L . Tällöin erityisesti funktio $g_2 = \exp[L(z)/2]$ on määritelty joukossa D_1 . Funktiolle g_2 pätee $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$ kaikille $z \in D_1$ ja funktio $g_2(z)$ on injektio, sillä jos $g_2(z) = g_2(w)$, niin $z = [g_2(z)]^2 = [g_2(w)]^2 = w$. Tästä seuraa, että funktio $g_2: D_1 \rightarrow D_2$ on konformikuvaus yhdesti yhtenäiseen joukkoon $D_2 = g_2(D_1) \subset \Delta$, $D_2 \neq \Delta$. Merkitään $c = g_2(-b) \in D_2$. Lyhyellä laskulla nähdään, että

$$g_2'(-b) = \frac{1}{2g_2(-b)} = \frac{1}{2c}.$$

Viimeisenä määritellään Möbius-kuvaus $g_3: D_2 \rightarrow D_3$ siten, että

$$g_3(z) = \frac{u(z - c)}{1 - \bar{c}z},$$

missä $u = \exp[i \cdot \text{Arg}(c)]$. Tällöin kuvajoukko $D_3 = g_3(D_2) \subset \Delta$, missä $D_3 \neq \Delta$ ja piste $g_3(c) \in D_3$. Lisäksi saadaan, että

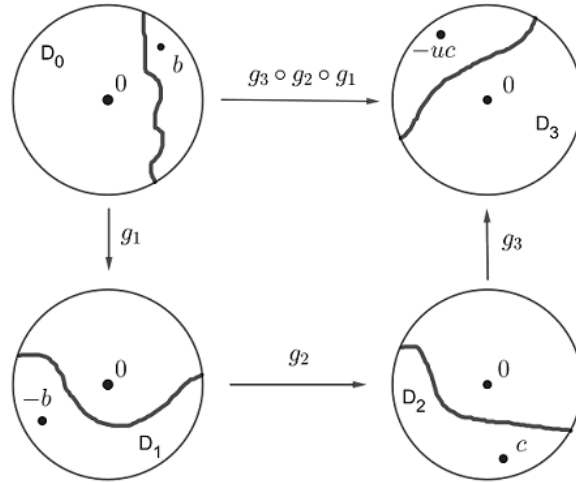
$$g_3'(z) = \frac{u(1 - \bar{c}z) + u\bar{c}(z - c)}{(1 - \bar{c}z)^2} = \frac{u(1 - |c|^2)}{(1 - \bar{c}z)^2},$$

jolloin

$$g_3'(c) = \frac{u(1 - |c|^2)}{(1 - |c|^2)^2} = \frac{u}{(1 - |c|^2)}.$$

Nyt yhdistetty kuvaus $g: D \rightarrow D_3$, $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ on konformikuvausten yhdistettynä funktiona konformikuvaus ja lisäksi $g(z_0) = f(z_0) = 0$. Osoitetaan vielä, että funktiolle g pätee haluttu ehto $g'(z_0) > f'(z_0)$. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= g_3'(c)g_2'(-b)g_1'(0)f'(z_0) = \frac{u}{1 - |c|^2} \cdot \frac{1}{2c} \cdot (1 - |b|^2) \cdot f'(z_0) \\ &= \frac{1 + |c|^2}{2|c|} \cdot f'(z_0) > f'(z_0), \end{aligned}$$



KUVA 2.5. Lemman 2.18 todistuksessa konstruoidut kuvaukset g_1 , g_2 ja g_3 .

missä on käytetty yhtälöitä $|c|^2 = |g_2(-b)|^2 = |b|$, $\frac{u}{c} = \frac{1}{|c|}$ ja arviota $1 + |c|^2 > 2|c|$. Näin ollen funktio g toteuttaa väitteen halutut ominaisuudet. \square

Edellinen lemma viimeistelee tarvittavat tulokset Riemannin kuvauslauseen todistusta varten, mikä on tämän tutkielman yksi päätuloksista:

LAUSE 2.19 (Riemannin kuvauslause). *Oletetaan, että D on yhdesti yhtenäisen alue kompleksitasossa, $D \neq \mathbb{C}$ ja $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen surjektiivinen konformikuvaus $f: D \rightarrow \Delta(0, 1)$ siten, että $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

TODISTUS. Todistus seuraa lähdeettä [13, s. 420–421]. Osoitetaan ensin kuvauksen olemassaolo. Määritellään funktioperhe F siten, että

$$F = \{f: D \rightarrow \Delta(0, 1) : f \text{ on konformikuvaus, } f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0\}.$$

Todistetaan lemmän 2.18 nojalla avulla, että F ei ole tyhjä joukko. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$ siten, että $\Delta(z_0, r) \subset D$. Tällöin Cauchyn estimaatin 1.40 nojalla kaikille $f \in F$ pätee

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}.$$

Tästä seuraa, että joukko $\{f'(z_0) : f \in F\}$ on rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa pienin mahdollinen yläraja $\sup\{f'(z_0) : f \in F\} = L$. Näin ollen jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita funktio $f_n \in F$ siten, että

$$L - \frac{1}{n} \leq f'_n(z_0) \leq L.$$

Koska funktioperhe F on lokaalisti rajoitettu joukossa D , niin Montelin lauseen 1.50 nojalla F on normaaliperhe. Tällöin jokaisella jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}) , joka suppenee D :n kompakteissa osajoukoissa kohti rajafunktiota f . Näin ollen

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(z_0) = L,$$

jolloin funktio f ei ole vakio joukossa D . Koska funktio f on holomorfinen ja ei-vakio joukossa D , niin lauseen 1.56 nojalla f on injektio joukossa D . Lisäksi koska $f_n \in F$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f(D) \subset \overline{\Delta}$. Avoimen kuvauslauseen 1.57 nojalla kuvajoukko $f(D)$ on avoin, joten $f(D) \subset \Delta(0, 1)$, eli tällöin $f \in F$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $f(D) = \Delta(0, 1)$. Jos $f(D) \neq \Delta(0, 1)$, niin lemmän 2.18 nojalla on olemassa konformikuvaus $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ siten, että $g'(z_0) > f'(z_0) = L$ ja $g(z_0) = 0$. Tämä on mahdotonta, sillä L on joukon $\{f'(z_0) : f \in F\}$ yläraja. Näin ollen $f(D) = \Delta(0, 1)$, joten halutun konformikuvauksen $f: D \rightarrow \Delta(0, 1)$ olemassaolo on todistettu.

Lopuksi täytyy vielä osoittaa kuvauksen yksikäsitteisyys. Olkoon $h: D \rightarrow \Delta(0, 1)$ toinen konformikuvaus, jolle myös pätee ominaisuudet $h(z_0)$ ja $h'(z_0) > 0$. Tarkastellaan funktiota $\psi: \Delta(0, 1) \rightarrow \Delta(0, 1)$, $\psi = h \circ f^{-1}$. Tällöin funktio ψ kuvaa yksikkökierokkeen Δ konformisesti itselleen ja

$$\psi(0) = h \circ f^{-1}(0) = h(z_0) = 0.$$

Derivaatan laskusääntöjen nojalla

$$\psi'(z) = h'[f^{-1}(z)](f^{-1})'(z) = \frac{h'[f^{-1}(z)]}{f'(z)},$$

jolloin

$$(2.5) \quad \psi'(0) = \frac{h'(z_0)}{f'(0)} > 0.$$

Lauseesta 2.17 seuraa tällöin, että funktio ψ on muotoa $\psi(z) = e^{i\theta} \frac{c+z}{1+\bar{c}z}$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja luvulle $c \in \mathbb{C}$ pätee $|c| < 1$. Koska $\psi(0) = 0$, niin $e^{i\theta} \cdot c = 0$, jolloin $c = 0$. Näin ollen funktio ψ on muotoa $\psi(z) = e^{i\theta} \cdot z$. Lisäksi arvion (2.5) nojalla $\psi'(0) > 0$, jolloin $e^{i\theta} = 1$, joten funktion ψ on oltava identtinen kuvaus $\psi(z) = z$. Tällöin kaikilla $z \in D$ pätee $h(z) = \psi[f(z)] = f(z)$, mikä todistaa yksikäsitteisyyden. \square

Riemannin kuvauslauseesta 2.19 seuraa välittömästi, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue voidaan kuvata yhdesti yhtenäiselle alueelle. Miksi? Jos f on konformikuvaus yhdesti yhtenäiseltä alueelta D avoimelle yksikkökierokkeelle $\Delta = \Delta(0, 1)$ ja kuvaus g on konformikuvaus yhdesti yhtenäiseltä alueelta D' kierokkeelle Δ , niin yhdistetty kuvaus $f \circ g^{-1}$ kuvaa konformisesti yhdesti yhtenäisen alueen D yhdesti yhtenäiselle alueelle D' .

On huomattavaa, että Riemannin kuvauslause 2.19 on olemassaolotulos, joka ei kerro mitään siitä, miten osoitetun konformikuvauksen voi käytännössä konstruoida. Riemannin kuvauslause ei myöskään kerro mitään siitä, mitä yhdesti yhtenäisten alueiden reunalla tapahtuu, ts. miten yhdesti yhtenäisen alueen D reuna kuvautuu löydetyllä konformikuvauksella f .

Konformisia ja lokaalisti konformisia kuvauksia

Riemannin kuvauslauseen 2.19 nojalla tiedetään, että jokainen yhdesti yhtenäisen alue voidaan kuvata konformisesti avoimeksi yksikkökiekoksi $\Delta = \Delta(0, 1)$. Esimerkin 2.16 nojalla tiedetään, että ylempi puolitaso Π^+ voidaan kuvata konformisesti kiekkoon Δ kuvauksella $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$, t.s. ylempi puolitaso Π^+ ja avoin yksikkökiekko Δ ovat konformisesti ekvivalentteja. Näin ollen jos halutaan löytää surjektiivinen konformikuvaus yksikkökiekolle, niin riittää osoittaa, että löydetään surjektiivinen konformikuvaus ylempään puolitasoon Π^+ . Aloitetaan esimerkillä, jossa tutkitaan sinifunktion kuvautumista [6, s. 224-226]:

ESIMERKKI 3.1. Osoitetaan, että funktio $f(z) = \sin(z)$ kuvaa joukon $D = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$ ylemmäksi puolitasoksi Π^+ . Funktio $f(z) = \sin(z)$ määritellään seuraavasti:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

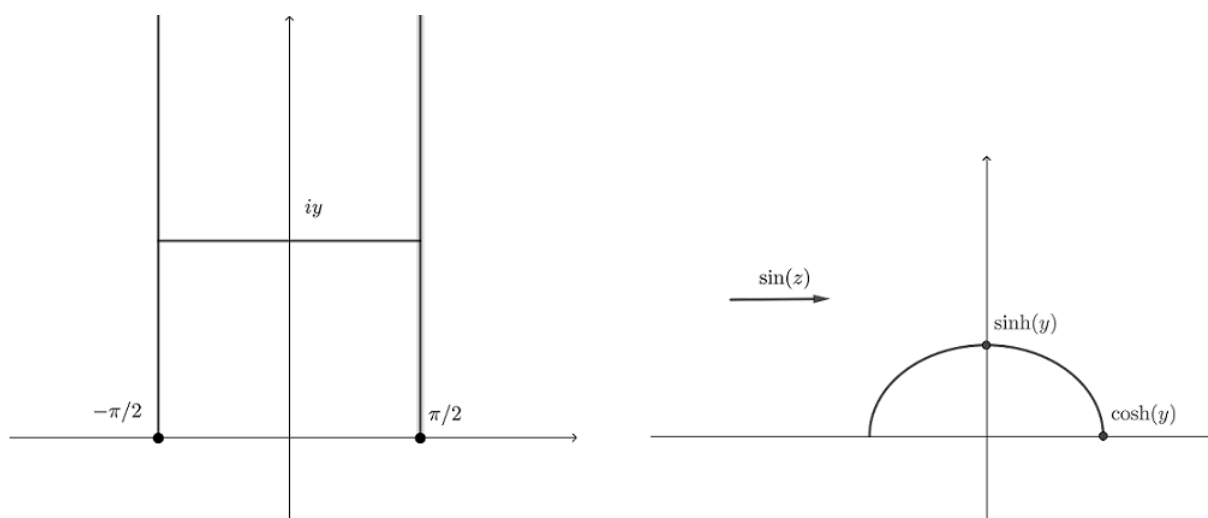
jolloin kuvaus $\sin(z)$ on konforminen joukossa D , sillä se on holomorfinen ja injektio joukossa D . Reaalifunktioiden ominaisuuksista tiedetään, että funktio $f(z) = \sin(z)$ kuvaa janan $[-\pi/2, \pi/2]$ janaksi $[-1, 1]$. Tarkastellaan seuraavaksi, miten funktio f kuvaa joukon D oikeanpuoleisen pystysuoran eli pisteet, jotka ovat muotoa $\pi/2 + it$, missä $t \geq 0$. Tällöin kuvapistet ovat muotoa

$$\begin{aligned} \sin(\pi/2 + it) &= \frac{e^{i\pi/2} \cdot e^{iit} - e^{-i\pi/2} \cdot e^{-iit}}{2i} \\ &= \frac{i \cdot e^{-t} - (-i) \cdot e^t}{2i} \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

Edellä olevasta muodosta nähdään, että kun parametrin t arvot ovat välillä $[0, \infty[$, niin $\sin(\pi/2 + it) \in [1, \infty[$. Tästä seuraa, että funktio f kuvaa joukon D oikeanpuoleisen pystysuoran pisteen $z = (1, 0)$ oikeanpuoleiseksi reaaliakseliksi. Vastaavalla tarkastelulla voidaan osoittaa, että joukon D vasemmanpuoleinen pystysuora eli pisteet, jotka ovat muotoa $-\pi/2 + it$, missä $t \geq 0$ kuvautuu pisteen $z = (-1, 0)$ vasemmanpuoleiseksi reaaliakseliksi.

Aikaisemmin näytettiin, että joukon D reuna kuvautuu reaaliakseliksi \mathbb{R} . Tutkitaan seuraavaksi joukon D pisteiden kuvautumista. Olkoon piste $z \in D$, jolloin se on muotoa $z = x + iy$, missä $-\pi/2 < x < \pi/2$ ja $y > 0$. Merkitsemällä $w = \sin(z) = u + iv$ saadaan sinin määritelmästä

$$u = \sin(x) \cdot \cosh(y) \quad \text{ja} \quad v = \cos(x) \cdot \sinh(y), \quad \text{missä}$$



KUVA 3.1. Esimerkin 3.1 joukon D vaakasuoran janan kuvautuminen kuvauksella $f(z) = \sin(z)$.

$$\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{ja} \quad \sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Edellisten yhtälöiden avulla saadaan muoto

$$(3.1) \quad \frac{u^2}{\cosh^2(y)} + \frac{v^2}{\sinh^2(y)} = 1.$$

Seuraavaksi kiinnitetään muuttuja $y > 0$. Tällöin yhtälö (3.1) on ellipsin yhtälö. Näin ollen vaakasuorat janat joukossa D eli pisteet $z = x + iy$, missä $-\pi/2 < x < \pi/2$ ja $y > 0$ on kiinnitetty, kuvautuvat puoliellipseiksi kuvan 3.1 mukaisesti. Kun muuttuja y kulkee läpi arvot $[0, \infty]$, niin yhtälön (3.1) nojalla puoliellipsit laajenevat täyttäen koko ylemmän puolitason Π^+ .

Toinen vaihtoehto olisi ollut tarkastella joukon D pystyjanojen kuvautumista ja havaita niiden kuvautuvan hyperbeleiksi, jotka täyttävät koko ylemmän puolitason Π^+ . Näiden hyperbelien täytyy funktion f konformisuuden nojalla leikata ellipsien kaaria kohtisuorasti niissä pisteissä, missä joukon D vaaka- ja pystyjangat leikkaavat toisiaan.

HUOMAUTUS 3.2. Edellisen esimerkin 3.1 valossa saattaa aluksi vaikuttaa, että joukko $D = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$ on niitä harvoja joukkoja, johon funktiota $f(z) = \sin(z)$ voidaan soveltaa, sillä funktio f ei ole konforminen koko kompleksitasossa \mathbb{C} . Kuitenkin jokainen toisesta päästä kiinnitetty, ääretön ja avoin suorakaiteen muotoinen suikale engl. *semi-infinite strip* voidaan sopivilla Möbius-kuvauksilla, kuten siirroilla, kierroilla ja skaalauksilla kuvata konformisesti joukoksi D . Näin ollen funktiolla $f(z) = \sin(z)$ on huomattavasti enemmän käyttömahdollisuuksia. Erityisesti konformikuvausten osalta on hyvä tiedostaa ainakin muutama perusesimerkki, sillä Möbius-kuvausten avulla voidaan joukot tietyissä tapauksissa kuvata soveltamaan näitä esimerkkejä.

3.1. Schwarz-Christoffel kuvaukset

Tässä kappaleessa tullaan intuitiivisesti johtamaan Schwarz-Christoffelin kaavana tunnettu tulos lähteiden [3] ja [2] pohjalta. Välivaiheiden ja argumenttien perusteluja ei tehdä tarkasti, sillä päämääränä on saada kuva siitä, miksi Schwarz-Christoffel kaava toimii. Kappaleen lopussa käydään läpi Schwarz-Christoffel kuvausten ominaisuuksia ja esimerkkitaapauksia.

Tiedetään, että funktio f on konforminen, mikäli f on holomorfinen ja pätee $f'(z) \neq 0$ koko funktion f määrittelyalueessa. Mitä tapahtuu tilanteessa, jossa konformisuus tulee häviämään tietyissä yksittäisissä pisteissä? Tutkitaan funktiota f , jonka kompleksinen derivaatta on muotoa

$$(3.2) \quad f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1} \cdot (z - x_2)^{\alpha_2} \dots (z - x_n)^{\alpha_n},$$

missä $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ja $-1 < \alpha_i < 1$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$ sekä reaaliluvuille x_i pätee

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Oletetaan lisäksi, että $\text{Arg}(z - x_i) \in]-\pi/, \pi[$ kaikilla i . Miten kuvaus f , jonka kompleksinen derivaatta on muotoa (3.2) kuvaa reaaliakselin? Napakoordinaattiesitysten nojalla voidaan lausua

$$\text{Arg}[f'(z)] = \text{Arg}(A) + \alpha_1 \text{Arg}(z - x_1) + \dots + \alpha_n \text{Arg}(z - x_n).$$

Nyt jos $z \in \mathbb{R}$, niin pätee

$$\text{Arg}(z - x_k) = \begin{cases} 0, & z > x_k \\ \pi, & z < x_k. \end{cases}$$

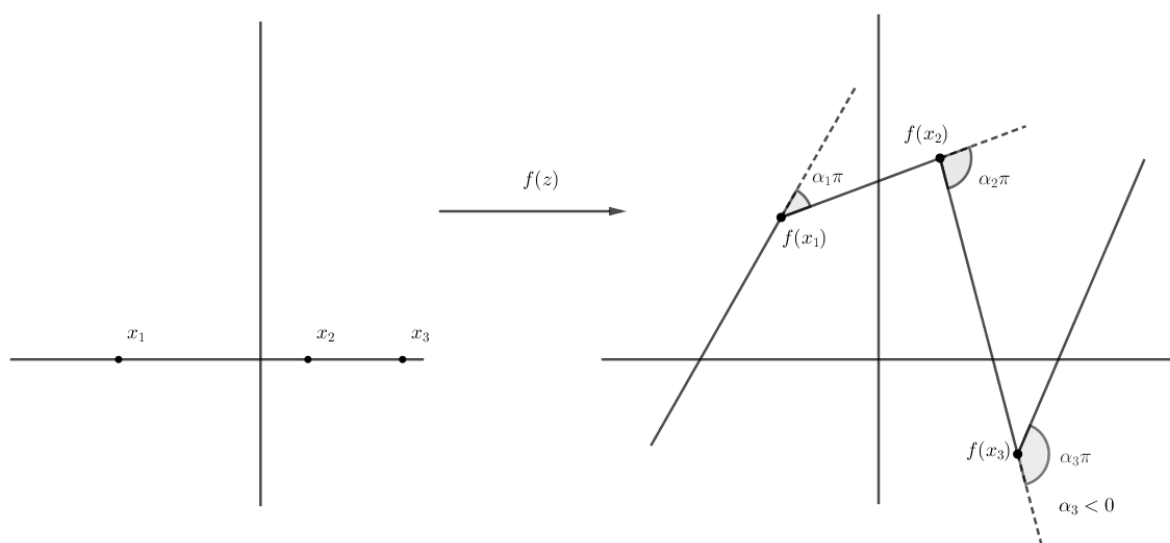
Edelliset tiedot yhdistäen saadaan, että

$$\text{Arg}[f'(z)] = \begin{cases} \text{Arg}(A), & z > x_k \\ \text{Arg}(A) + \alpha_n \pi, & x_{k-1} < z < x_k \\ \vdots & \\ \text{Arg}(A) + \alpha_2 \pi + \dots + \alpha_n \pi, & x_1 < z < x_2 \\ \text{Arg}(A) + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi + \dots + \alpha_n \pi, & -\infty < z < x_1. \end{cases}$$

Näin ollen kun muuttuja z kulkee reaaliakselia vasemmalta oikealla, niin funktio $f(z)$ luo yhdisteen janapolkuja, jotka tekevät pisteissä x_i kulman $\alpha_i \pi$ suuruisen käännöksen suhteessa edellisen janan tangenttiin nähden, ks. kuva 3.2. Miksi? Jos $\gamma(t)$ on jatkuvasti paloittain derivoituva polku, niin polun suunta pisteessä $z_0 = \gamma(t_0)$ on tangenttivektorin $\gamma'(t_0)$ suunta. Jos $w = f(z)$ on konformikuvaus, niin kuvapolun $w(t) = f[\gamma(t)]$ suunta pisteessä $w_0 = f(z_0)$ on $w'(t) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$. Näin ollen kuvaus w kiertää polun suuntaa pisteessä w_0 vastapäivään argumentin $\text{Arg}[f'(z_0)]$ verran. Koska $\text{Arg}[f'(z)]$ on vakio jokaisella $]x_{k-1}, x_k[$, niin kuvaus f , jonka kompleksinen derivaatta on muotoa (3.2), luo yhdisteen janapolkuja.

Mikäli $\alpha_i > 0$, niin jana kiertää myötäpäivään ja vastaavasti kun $\alpha_i < 0$, niin jana kiertää vastapäivään. Yksinkertaisesta geometriasta seuraa, että pisteissä x_i janan käännöskulman tai sisäkulman μ suuruus on $\mu = \pi - \alpha_i \pi = \pi(1 - \alpha_i)$.

Mikäli funktion f kompleksinen derivaatta on muotoa (3.2), niin se on konforminen kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{x_i\}$, sillä se on holomorfinen koko kompleksitasossa ja $f'(z) = 0$ vain



KUVA 3.2. Esimerkki reaaliakselin kuvautumisesta kuvauksella $f(z)$ tapauksessa $n = 3$.

pisteissä x_i . Erityisesti funktio f on konforminen ylemmässä puolitasossa Π^+ . Näin ollen jokaiselle $z \in \Pi^+$ voidaan kirjoittaa

$$g(z) = \int_0^z f'(\zeta) d\zeta,$$

jolloin funktio f on muotoa $f(z) = g(z) + B$, missä $B \in \mathbb{C}$ on vakio. Tällöin saadaan, että

$$(3.3) \quad f(z) = B + A \int_0^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1} (\zeta - x_2)^{\alpha_2} \dots (\zeta - x_n)^{\alpha_n} d\zeta,$$

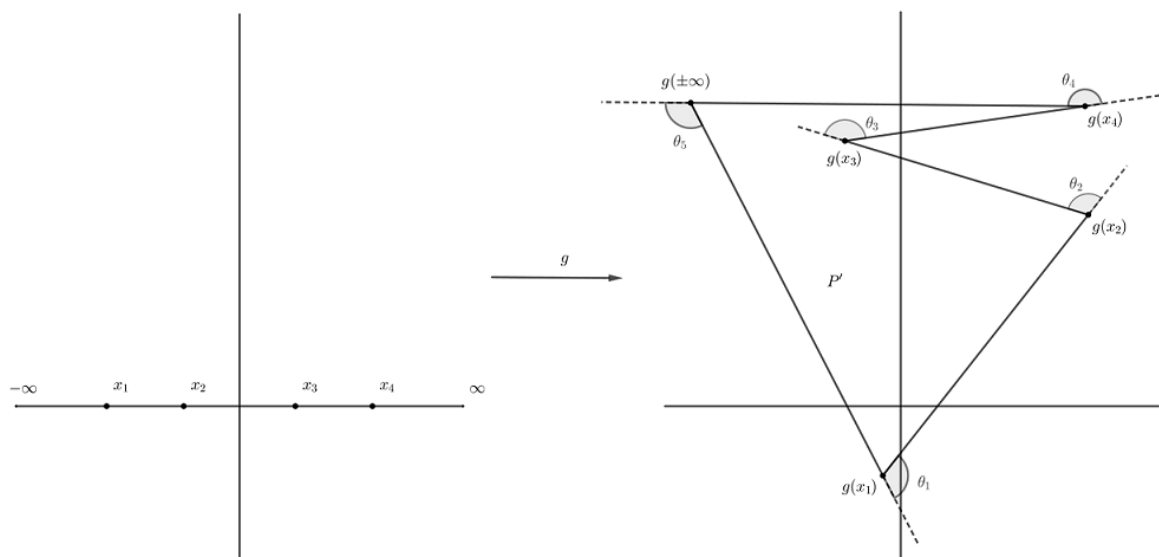
missä $A, B \in \mathbb{C}$ ovat vakioita. Funktiota, joka on muotoa (3.3) kutsutaan Schwarz-Christoffel muunnokseksi.

Riemannin kuvauslauseen 2.19 nojalla tiedetään, että on olemassa konformikuvaus ylemmältä puolitasolta Π^+ itseään leikkaamattomaan n -monikulmion sisukseksi, sillä n -monikulmion sisus on ja ylempi puolitaso Π^+ ovat yhdesti yhtenäisiä alueita. Miten kuvauksen voi käytännössä konstruoida ja onko se aina eksplisiittisesti olemassa? Lähdetään seuraavaksi tutkimaan, miten kuvauksen konstruointi onnistuu muokkamalla Schwarz-Christoffel muunnosta (3.3).

Olkoon P itseään leikkaamaton suljettu n -monikulmio, jonka kärjet ovat vastapäivään järjestettynä jonona w_1, w_2, \dots, w_n . Jokaisen kärjen w_i kohdalla tehdään käänös θ_i suhteessa n -monikulmion P kärjen w_i yhdistävän sivun tangentin suhteen. Tällöin $\theta_i \in (-\pi, \pi)$ ja jälleen positiivinen kulman α_i arvo tarkoittaa käänöstä myötäpäivään ja vastaavasti käänös on vastapäivään, mikäli $\theta_i < 0$. Kokonaiskierto yli monikulmion P täytyy kiertosuunnan huomioon ottaen olla

$$(3.4) \quad \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = -2\pi.$$

Jotta reaaliakseli voidaan kuvata monikulmioksi P Schwarz-Christoffel muunnoksella $w = g(z)$, valitaan aluksi, että pisteet x_1, \dots, x_{n-1} ovat kärkien w_1, \dots, w_{n-1} alkukuvia.



KUVA 3.3. Esimerkki reaaliakselin kuvautumista suljetuksi viisikulmioksi P' .

Lisäksi oletetaan, että äärettömyyspisteet $x = \pm\infty$ ovat kulman w_n alkukuvia. Tällöin aiemman johdattelun nojalla funktio

$$(3.5) \quad g(z) = \int_0^z (\zeta - x_1)^{\theta_1/\pi} (\zeta - x_2)^{\theta_2/\pi} \dots (\zeta - x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi} d\zeta$$

kuvaava reaaliakselin joksikin monikulmioksi P' , ks. kuva 3.3. On huomattavaa, että nyt ei välttämättä päde $P = P'$. Kuitenkin käännökset $\alpha_i\pi = \theta_i$ ovat samat kärjille $g(x_i)$, missä $n = 1, 2, \dots, n-1$. Lisäksi koska monikulmion ensimmäinen ja viimeinen sivu leikkaavat pisteissä $g(\pm\infty)$, täytyy käännöksen suuruus kärjessä w_n olla kulman θ_n suuruinen, mikä seuraa yhtälöstä (3.4).

Näin ollen monikulmioilla P ja P' on samat kulmat. Miten saadaan monikulmioista P ja P' yhtenevät?

Yhtälöstä (3.5) havaitaan, että reaaliakselin pisteet x_i määräävät kärkien w_i sijainnit. Sopivasti valitsemalla pisteet x_i saadaan siis muutettua monikulmion P' sivujen pituuksia, jolloin voidaan konstruoida monikulmion P kanssa yhdenmuotoinen monikulmio P' . Tämän jälkeen tarvitsee enää vain kiittää, skaalata ja/tai siirtää, jotta kaavan (3.5) antama monikulmio P' on täsmälleen sama kuin P . Yhteenvetona voitaisiin siis uskoa, että funktio

$$(3.6) \quad f(z) = Ag(z) + B = A \int_0^z (\zeta - x_1)^{\theta_1/\pi} (\zeta - x_2)^{\theta_2/\pi} \dots (\zeta - x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi} d\zeta + B,$$

missä $A, B \in \mathbb{C}$ ovat vakioita, kuvaava ylemmän puolitason Π^+ n -monikulmion sisukseksi. Huomaa, että vakio A voidaan valita siten, että se skaalaa sekä kiittää integraalin $g(z)$ antamaa monikulmiota P' ja vakion B avulla saadaan haluttu siirto

aikaiseksi. Nyt edellä saatu funktio $f(z)$ on täsmälleen Schwarz-Christoffel kuvausten mukaista muotoa. Annetaan vielä tämä tulos kirjallisuudessa yleisemmin esiintyvässä muodossaan:

LAUSE 3.3. (*Schwarz-Christoffel kuvaus*). Olkoon I itseään leikkaamattoman n -monikulmion P sisus, missä monikulmion P kärjet w_1, \dots, w_n ja sisäkulmat $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ ovat järjestyksessä kiertäen vastapäivään. Olkoon funktio $f: \Pi^+ \rightarrow I$ surjektiivinen konformikuvaus siten, että $f(\pm\infty) = w_n$. Tällöin f on muotoa

$$(3.7) \quad f(z) = A \int^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - x_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + B,$$

missä $A, B \in \mathbb{C}$ ovat vakioita, $w_k = f(x_k)$ ja $x_{k-1} < x_k$ kaikilla $k = 1, \dots, n-1$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, sillä todistuksen vaiheiden tarkka perusteleminen vaatisi useita tuloksia, jotka eivät ole tämän työn kannalta oleellisia. Kuitenkin mielenkiinnon vuoksi listataan tärkeimmät todistuksen vaiheet, joita myös Schwarz-Christoffel kaavan johtamisessa tarvittiin:

- (1) Kuvaus f on hyvin määritelty.
- (2) Raja-arvo $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(z)$ on olemassa.
- (3) Kuvaus f voidaan jatkaa jatkuvasti ylemmän puolitason Π^+ sulkeumaan.
- (4) Kuvaus f on bijektio.

Todistuksen voi lukea kokonaisuudessaan esimerkiksi lähteistä [13, s. 459–460] tai [2, s. 35–37]. \square

HUOMAUTUS 3.4. Listataan seuraavaksi huomioita Schwarz-Christoffel kuvauksesta 3.7:

- (1) Yleisesti kirjallisuudessa esitetty Schwarz-Christoffel kuvauksen muoto (3.7) ilmaistaan monikulmion P sisäkulmien avulla sanottuna. Kuitenkin aikaisemmin johdettu muoto S-C kuvaukselle (3.6) on täsmälleen sama, sillä lauseen 3.7 oletuksessa sisäkulmat ovat muotoa $\alpha_i\pi$ ja sisäkulmalle pätee $\alpha_i = \theta_i - \pi$, missä θ_i on monikulmion P sivun tangentin suhteen mitattu käännöskulma.
- (2) S-C kuvauksessa (3.7) integraalin alarajaa ei tarvitse spesifioida, sillä sen voi sisällyttää vakioon B . Näin ollen kirjallisuudessa integraalin alaraja jätetään yleensä kirjoittamatta.
- (3) Miksi Schwarz-Christoffel kuvauksen antama kaava funktiolle f ylipäättään toimii? Kuten S-C kaavan johtamisessa havaittiin, kuvauksen f konstruointi perustui siihen, että reaaliakseli pystyttiin kuvaamaan monikulmioksi P . Samalla todettiin, että tämä kuvaus on konforminen koko ylemmässä puolitasossa Π^+ . Koska konformikuvaukset ovat homeomorfismeja, ja reaaliakselin ollessa ylemmän puolitason Π^+ reuna, niin homeomorfisuudesta seuraa, että kuvaus f vie ylemmän puolitason Π^+ monikulmion P sisukseksi.

- (4) Jotta Schwarz-Christoffel kaavan antama kuvaus (3.7) voidaan konstruoida, täytyy ensin kiinnittää kärkien w_k alkukuvat reaaliakselilla sekä vakioiden $A, B \in \mathbb{C}$ arvot. Tarkastelemalla Möbius-kuvauksia yksikkökielelle voidaan itse asiassa osoittaa, että on vapaus valita vain kolme pistettä joukosta $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kuvautuvan monikulmion P kärjiksi siten, että valittujen pisteiden järjestys säilyy [2]. Näin ollen sanotaan, että S-C kuvauksen vapausasteiden lukumäärä on kolme. Toisin sanoen, jos monikulmiossa P kulmia on neljä tai enemmän, niin S-C kuvausta ei voida eksplisiittisesti muodostaa.
- (5) Tapauksessa $n \leq 3$ tiedetään, että S-C kuvaus on eksplisiittisesti olemassa. Kuitenkin tämä edellyttää, että funktion (3.7) mukainen integraali pitäisi pystyä laskemaan. Osoittautuu, että tämä ei ole aina mahdollista, sillä integrandi ei aina ole esitettävissä alkeisfunktioiden avulla.

Käydään nyt läpi kolme esimerkkiä liittyen Schwarz-Christoffel kuvauksiin. Aloitetaan tapauksella, jossa ylempi puolitaso kuvataan konformisesti tasakylkisen kolmion sisukseksi:

ESIMERKKI 3.5. Olkoon P kompleksitason kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 1)$ ja $w_3 = (0, 0)$ kuvan 3.4 mukaisesti. Konstruoidaan surjektiivinen konformikuvaus f ylemmältä puolitasolta kolmion P sisukseen. Kolmion P käänöskulmat ovat nyt $\theta_1 = \theta_2 = -3\pi/4$ ja $\theta_3 = -\pi/2$. Valitaan, että $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Tällöin kaavan (3.6) nojalla kuvaus f on muotoa

$$\begin{aligned} f(z) &= A \int_0^z (\zeta + 1)^{-3/4} (\zeta - 1)^{-3/4} d\zeta + B \\ &= A \int_0^z (\zeta^2 - 1)^{-3/4} d\zeta + B. \end{aligned}$$

Määritetään seuraavaksi vakioiden A ja B arvot. Nyt siis kuvaukselle f pätee

$$1 = f(x_1) = f(-1) = A \int_0^{-1} (\zeta^2 - 1)^{-3/4} d\zeta + B = A\gamma + B$$

ja

$$i = f(x_2) = f(1) = A \int_0^1 (\zeta^2 - 1)^{-3/4} d\zeta + B = -A\gamma + B,$$

missä $\gamma = \int_0^{-1} (\zeta^2 - 1)^{-3/4} d\zeta$. Edelliset tiedot yhdistämällä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A\gamma + B &= 1 \\ -A\gamma + B &= i, \end{cases}$$

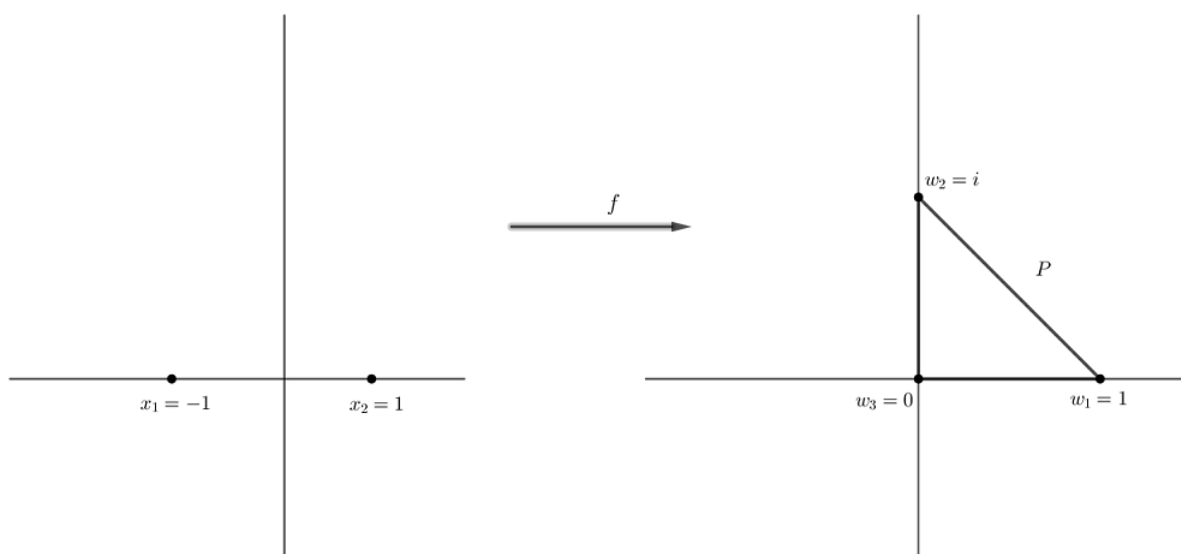
jolloin

$$A = \frac{1-i}{2\gamma} \quad \text{ja} \quad B = \frac{1+i}{2}.$$

Näin ollen etsitty konformikuvaus f on

$$f(z) = \frac{1-i}{2\gamma} \int_0^z (\zeta^2 - 1)^{-3/4} dz + \frac{1+i}{2},$$

missä $\gamma = \int_0^{-1} (\zeta^2 - 1)^{-3/4} d\zeta$. Huomaa, että integraalilla γ ei ole tarkkaa ratkaisua, approksimatiivisesti voidaan kuitenkin arvioida $\gamma \approx 1,8541(1+i)$.



KUVA 3.4. Esimerkin 3.5 mukainen S-C kuvaus f kolmioksi P .

S-C kuvauksen (3.7) antamaa kaavaa konformikuvaukselle f voi soveltaa muihinkin alueisiin kuin suljettujen monikulmioiden sisuksiin, minkä osoittaa seuraava esimerkki:

ESIMERKKI 3.6. Olkoon $U = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |\operatorname{Re}(z)| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ alue. Konstruoidaan surjektiivinen konformikuvaus $f: \Pi^+ \rightarrow U$. Nimetään kärjet $w_1 = -1$ ja $w_2 = 1$ vastapäivään joukon U reunaan kiertäen, kuten kuvassa 3.5. Tällöin käänköskulmat ovat $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Valitaan jälleen $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$, jolloin Schwarz-Christoffel kaavan (3.6) nojalla

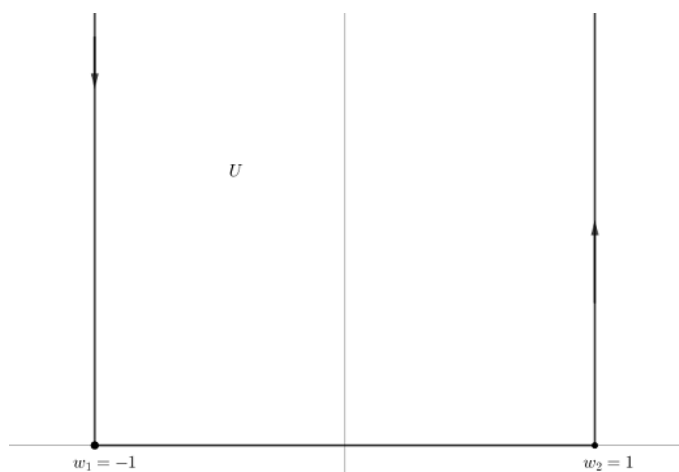
$$\begin{aligned}
 f(z) &= A \int_0^z (\zeta + 1)^{-1/2} (\zeta - 1)^{-1/2} d\zeta + B \\
 &= A \int_0^z (\zeta^2 - 1)^{-1/2} d\zeta + B \\
 &= A \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + B \\
 &= \frac{A}{i} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} + B \\
 &= \frac{A}{i} \sin^{-1}(z) + B.
 \end{aligned}$$

Alkuehtojen $f(-1) = w_1 = -1$ ja $f(1) = w_2 = 1$ nojalla päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} -iA \sin^{-1}(-1) + B = -1 \\ -iA \sin^{-1}(1) + B = 1, \end{cases}$$

mistä seuraa, että $B = 0$ ja $A = \frac{2i}{\pi}$. Näin ollen surjektiivinen konformikuvaus $f: \Pi^+ \rightarrow U$ on muotoa

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(z).$$

KUVA 3.5. Esimerkin 3.6 mukainen joukko U .

Miksi S-C kaava toimi tässä esimerkissä? Tilanteen voi ajatella siten, että joukon U reuna koostuu kolmiosta, jonka kärjet ovat $w_1 = -1$, $w_2 = 1$ ja kolmas kärki on muotoa $w_3 = x + iy$, missä $|x| < 1$ ja $y \in (0, \infty)$. Kun y lähestyy ääretöntä, niin käänköskulma θ_3 lähestyy arvoa nolla.

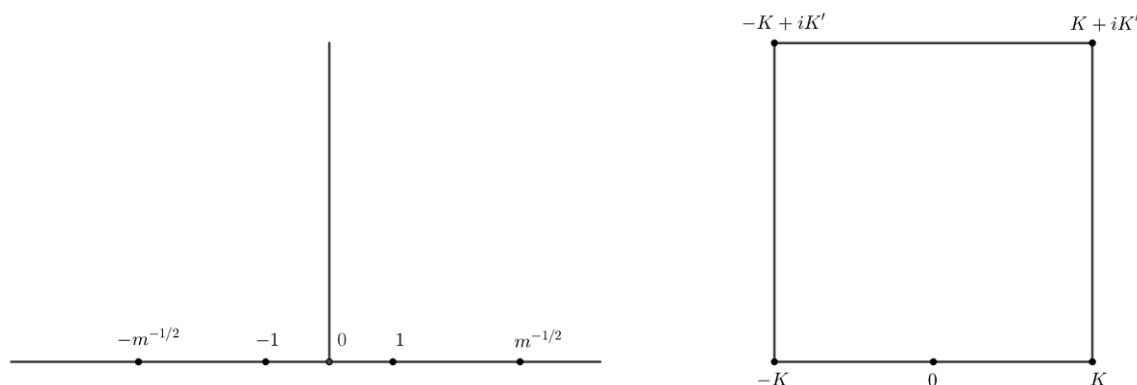
Huomautuksessa 3.4 mainittiin, että S-C kuvausta ei voida eksplisiittisesti muodostaa, mikäli monikulmiossa P on neljä tai enemmän kulmia. Kuitenkin suorakaiteen tapauksessa symmetria antaa meille mahdollisuuden kuvauksen muodostamiseen. Seuraavaksi esiteltävä esimerkki on vain mielenkiinnon vuoksi, sillä S-C kuvauksesta tulee muodostumaan elliptinen integraali, jonka käsittelyyn tarvittavia tietoja ei käsitellä tässä tutkielmassa:

ESIMERKKI 3.7. Tämän esimerkin tarkemmat yksityiskohdat voi lukea lähteestä [3, s. 18–20]. Olkoon P mielivaltainen suorakaide kompleksitasossa. Sopivilla Möbius-kuvauksilla suorakaide P voidaan siirtää ja kiertää siten, että sen kärjet ovat muotoa $w_1 = -K + iK'$, $w_2 = -K$, $w_3 = K$ ja $w_4 = K + iK'$, missä $K, K' \in \mathbb{R}$, ks. kuva 3.6. Symmetrian nojalla voidaan valita $x_1 = -m^{-1/2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ ja $x_4 = m^{-1/2}$, missä m on parametri, joka esittää vapausasteiden määrää alkukuvissa x_i . Näin ollen lauseen 3.7 nojalla kuvaus f on muotoa

$$\begin{aligned} f(z) &= A \int^z \prod_{k=1}^4 (\zeta - x_k)^{-1/2} d\zeta \\ &= A \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - m^{-1})(\zeta^2 - 1)}}, \end{aligned}$$

mikä on elliptinen integraali.

Osoittautuu, että edellisen integraalin parametri m on yhteydessä suorakaiteen P sivujen väliseen suhteeseen. Huomaa, että suorakaiteen sivujen välisiä suhteita ei voi muuttaa Möbius-kuvauksilla. Näin ollen suorakaiteen P kärkien sijainnit määräytyvät vain alkukuvien x_i valinnoista. Kuitenkin riippuen suorakaiteen sivujen suhteista, t.s.



KUVA 3.6. Esimerkin 3.7 alkukuvat x_i ja suorakaide P .

arvojen K ja K' yhteydestä parametriin m , voidaan elliptisten integraalien teorian avulla saada muodostettua kuvaus f .

Lopuksi mainittakoon vielä Schwarz-Christoffel kuvausten tärkeydestä. Ei ole ongelma, vaikka S-C kuvauksille ei löydetä aina tarkkaa esitysmuotoa, sillä nykyään on olemassa tehokkaita algoritmeja ja laskentaohjelmistoja S-C kuvausten numeeriseen ratkaisemiseen. S-C kuvausten numeeriseen ratkaisemiseen olevia algoritmeja ovat esimerkiksi engl. *Geodesic algorithm* ja *Circle-packing* [11].

S-C kuvauksilla on geometrinen ominaisuutensa vuoksi valtavasti käyttökohteita käytännön ongelmissa, erityisesti fysiikassa. Yksi yleisimmistä S-C kuvausten käyttökohteista on virtausmekaniikka, jossa S-C kuvauksia voidaan esimerkiksi käyttää tutkiessa ilmavirtalähteiden synnyttämiä ilmavirtauksia erilaisissa kolmiulotteisissa rakenteissa, kuten pistemäisen lähteen synnyttämää ilmavirtausta ontossa putkessa.

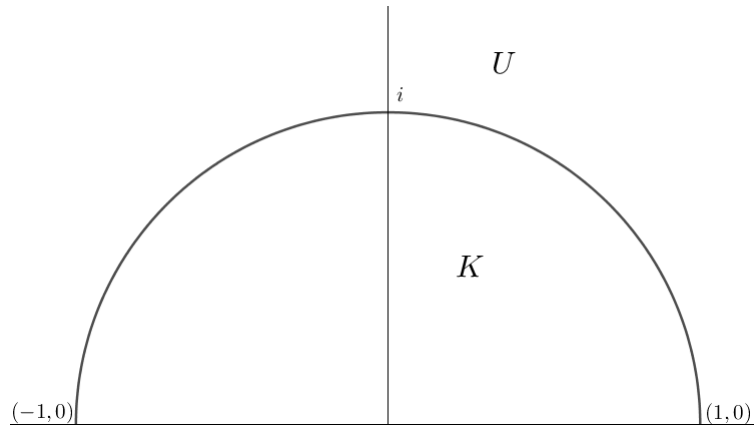
3.2. Lokaalisti konformisia kuvauksia

Riemannin kuvauslauseen 2.19 nojalla tiedetään, että jokainen yhdesti yhtenäisen alue voidaan kuvata konformisesti avoimeksi yksikkökiekoksi Δ . Onko kuitenkin mahdollista kuvata alue D yksikkökiekoksi Δ holomorfishesti tai konformisesti jollain tarkkuudella? Tähän kysymykseen tullaan vastaamaan tässä kappaleessa.

Johdantona tarkastellaan kahta esimerkkiä, joissa konformisesti kuvattava alue on rajattu erilaisten joukkojen väliin. Aloitetaan esimerkillä, jossa halutaan kuvata konformisesti ylempi puolitaso, missä on ympyräkaaren muotoinen reikä ylemmäksi puolitasoksi Π^+ [6, s. 224]:

ESIMERKKI 3.8. Olkoot joukko $K = \{z \in \Delta(0, 1) : \text{Im}(z) > 0\}$ ja $\Pi^+ \setminus K = U$ avoin joukko, ks. kuva 3.8. Etsitään se konformikuvaus f , joka kuvaa joukon U ylemmäksi puolitasoksi Π^+ . Osoitetaan, että kuvaus $f(z) = z + \frac{1}{z}$ on haluttu kuvaus. Merkitään $w = z + \frac{1}{z}$, jolloin asettamalla $z = x + iy$ voidaan muuttuja w kirjoittaa muodossa

$$w = x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

KUVA 3.7. Esimerkin 3.8 mukaiset joukot K ja U .

Kun $z \in U$, niin $|z| > 1$. Yllä olevan yhtälön nojalla myös pätee $\text{Im}(w) > 0$ ja $w \in \Pi^+$, jolloin f kuvaa joukon U ylemmäksi puolitasoksi Π^+ . Kuvaus $f(z) = z + \frac{1}{z}$ on selvästi holomorfinen joukossa U .

Täytyy vielä osoittaa, että kuvaus f on injektio. Kuvauksen f käänteiskuvaus on $f^{-1}(z) = z^2 - zw + 1$. Toisen asteen yhtälöllä

$$(3.8) \quad z^2 - zw + 1 = 0$$

on kaksi erillistä juurta kaikilla $w \in \Pi^+ \setminus \{-2, 2\}$. Jokaisella $w \in \Pi^+$ toisen asteen yhtälön (3.8) juurelle $z = x + iy$ pätee $y > 0$ ja $x^2 + y^2 > 1$ tai $y < 0$ ja $x^2 + y^2 < 1$. Yhtälön (3.8) nojalla jokaisen kahden juuren tulo on 1, jolloin myös juurien itseisarvojen tulo on 1. Tällöin seuraa, että kummankin juuren itseisarvo ei voi olla yli luvun 1 eikä myöskään alle luvun 1. Näin ollen on oltava, että toinen juurista sijaitsee joukossa U , jolloin kuvaus f on injektio.

Jatketaan seuraavalla esimerkillä:

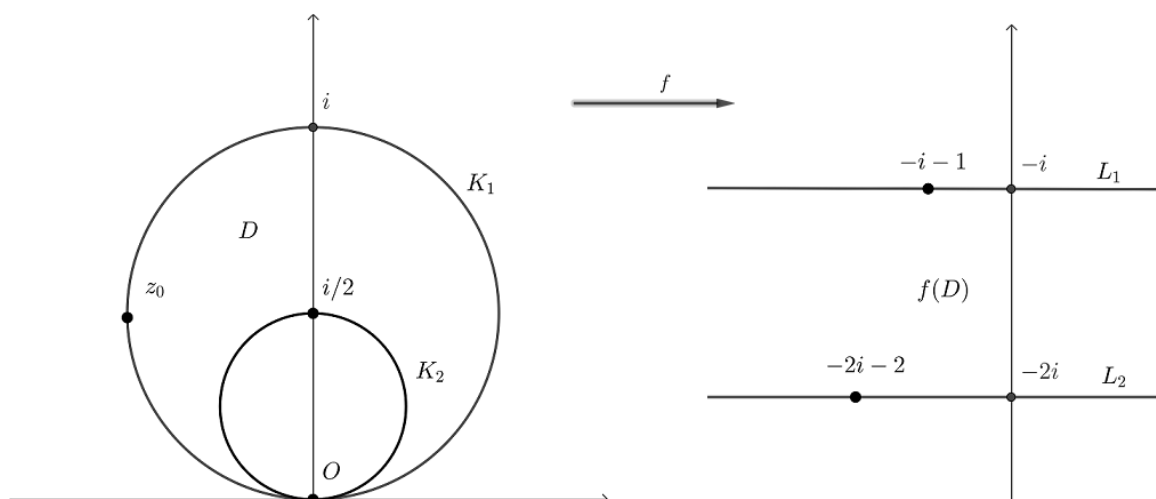
ESIMERKKI 3.9. Etsitään se surjektiivinen konformikuvaus, joka kuvaa ympyröiden $K_1(\frac{i}{2}, \frac{1}{2})$ ja $K_2(\frac{i}{4}, \frac{1}{4})$ väliin jäävän alueen D avoimeen yksikkökiekkoon $\Delta = \Delta(0, 1)$. Toisin sanoen kuvattava alue D on muotoa $D = \overline{\Delta}(\frac{i}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \overline{\Delta}(\frac{i}{4}, \frac{1}{4})$, ks. kuva 3.8.

Olkoon funktio $f(z) = \frac{1}{z}$ Möbius-kuvaus. Tällöin ympyrän K_1 pisteet $(0, i)$, $z_0 = \frac{i-1}{2}$ ja origo kuvautuvat pisteiksi $f(i) = -i$, $f(z_0) = -i - 1$ ja $f(0) = \infty$. Näin ollen ympyrän K_1 kuvajoukko on $f(K_1) = L_1 \cup \infty$, missä L_1 on pisteiden $-i$ ja $-i - 1$ kautta kulkeva vaakasuora. Vastaavasti ympyrän K_2 kuvajoukko on $f(K_2) = L_2 \cup \infty$, missä L_2 on pisteiden $-2i$ ja $-2i - 2$ kautta kulkeva vaakasuora.

Koska funktio $f(z)$ on Möbius-kuvauksena konforminen, täytyy joukon D kuvautua suorien L_1 ja L_2 rajoittamaan suorakaiteen muotoiseen alueeseen, toisin sanoen kuvajoukko $f(D)$ on muotoa

$$f(D) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : z = x + iy, -1 < y < -2\}.$$

Nyt kuvaus $g: f(D) \rightarrow \Pi^+$, $g(z) = e^{\pi z}$ on kuvaus, joka on konforminen ja surjektio. Miksi? Selvästi $g(z) = e^{\pi z}$ on holomorfinen alueessa $f(D)$, mutta se on myös bijektio.



KUVA 3.8. Esimerkin 3.9 joukon D kuvautuminen Möbius-kuvauksella $f(z) = \frac{1}{z}$.

Koska jos $z = x + iy$, missä $-1 < y < -2$, niin

$$g(z) = e^{\pi z} = e^{\pi x} \cdot e^{i\pi y},$$

jolloin $-2\pi < \text{Arg}(z) < -\pi$ eli $0 < \text{Arg}(z) < \pi$. Lisäksi pätee

$$|g(z)| = |e^{\pi z}| = |e^{\pi x}| > 0$$

kaikilla $z \in f(D)$. Näin ollen kuvaus $g: f(D) \rightarrow \Pi^+$ on surjektiivinen konformikuvaus. Enää tarvitsee vain muodostaa yhdistetty funktio $\Phi: D \rightarrow \Delta(0, 1)$ käyttäen kahta aikaisemmin esiintynyttä kuvausta f ja g sekä kuvausta $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$, joka kuvaa konformisesti ylemmän puolitason yksikkökierokseksi Δ . Näin ollen haluttu surjektiivinen konformikuvaus $\Phi: D \rightarrow \Delta(0, 1)$ on

$$\Phi(z) = \frac{e^{\pi(z+\frac{1}{z})} - i}{e^{\pi(z+\frac{1}{z})} + i}.$$

Lokaalisti konformisia kuvauksia varten täytyy määritellä seuraavat käsitteet:

MÄÄRITELMÄ 3.10. Funktio $f: D \rightarrow D'$ on n -valentti, missä $n \in \mathbb{N}$, jos jokaisella $w \in D'$ joukko $f^{-1}(w)$ on epätyhjä ja sisältää korkeintaan n pistettä.

Valenttius kertoo kuvauksen tarkkuudesta: mitä isompi luku n on, sitä epätarkemmin voidaan tietää, mikä lähtöjoukon alkio kuvautuu halutuksi kuvajoukon pisteeksi, millä on merkitystä käytännön ongelmien kannalta. Tapauksessa $n = 1$ kuvaus f on bijektio.

MÄÄRITELMÄ 3.11. Funktio $f: D \rightarrow D'$ on lokaalisti biholomorfinen, jos jokaiselle $z \in D$ on olemassa $r > 0$ siten, että f on holomorfinen ja injektio kaikilla $y \in B(z, r) \setminus z$.

Termi lokaalisti biholomorfinen on usein käytetty matemaattisissa julkaisuissa. Määritelmästä seuraa, että jokaisen pisteen ympäristössä funktion f injektiviisyys takaa, että kompleksinen derivaatta f' ei häviä, jolloin voidaan myös sanoa, että f on lokaalisti konforminen.

E. Ligocka todisti julkaisussa [10], että jokainen avoin Riemannin pinta voidaan kuvata lokaalisti biholomorfisesti kompleksitasolle \mathbb{C} . Tämän tutkielman kannalta kuitenkin mielenkiinto suuntautuu Ligockan antamaan tulokseen:

LAUSE 3.12. *Olkoon $D \subset \Delta(0, 1)$ alue. Oletetaan, että on olemassa $z_0 \in \partial\Delta(0, 1)$ ja $r > 0$ siten, että*

$$D \cap B(z_0, r) = \Delta(0, 1) \cap B(z_0, r).$$

Tällöin on olemassa surjektiivinen m -valentti biholomorfinen kuvaus $f: D \rightarrow \Delta(0, 1)$, missä $m \leq 24$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [10]. □

Edellinen lause kertoo, että tietyllä tavalla konstruoitu alue $D \subset \Delta(0, 1)$ voidaan biholomorfisesti kuvata yksikkökielelle Δ m -valentisti, missä $m \leq 24$. On huomattavaa, että edellisen lauseen oletuksissa alueen $D \subset \Delta$ valinta on rajoittava ja kuvaus on pahimmillaan todella epätarkka, sillä $m \leq 24$. Onko mahdollista valita alue D eri tavalla ja onko mahdollista löytää tarkempi kuvaus? Näihin kysymyksiin ovat vastanneet Piotr Liczberski ja Victor V. Starkov määrittelemällä eristetyn reunaosan käsitteen:

MÄÄRITELMÄ 3.13. Alueella $D \subset \mathbb{C}$ on eristetty reunaosa (engl. *isolated boundary fragment*), mikäli vähintään yksi seuraavista ehdoista on voimassa:

- (1) On olemassa suljettu ja yhtenäinen joukko K , joka sisältää enemmän kuin yhden pisteen ja avoin joukko U siten, että $K \subset U$ ja $(\partial D \setminus K) \cap U = \emptyset$.
- (2) On olemassa Jordan-käyrä $I \subset \partial D$ erillisillä päätepisteillä a, b ja avoin pallo B siten, että $a, b \in \partial B$, $I \setminus \{a, b\} \subset B$ ja $(\partial D \setminus I) \cap B = \emptyset$.
- (3) On olemassa piste $z_0 \in \partial D$ ja $r > 0$ siten, että $(B(z_0, r) \setminus z_0) \cap \partial D = \emptyset$.

Lisäksi ylläolevia ehtoja kutsutaan alueen D tyyppin (1), (2) tai (3) eristetyiksi reunaosiksi, mikäli vain yksi ehdoista on voimassa.

V. Starkov ja P. Liczberski todistivat julkaisussa [9], että mikäli $D \subset \mathbb{C}$ on alue, jolla on tyyppin (1) tai tyyppin (2) eristetty reunaosa, niin tällöin on olemassa surjektiivinen 5-valentti lokaalisti biholomorfinen kuvaus $f: D \rightarrow \Delta(0, 1)$. Neljä vuotta myöhemmin he onnistuivat tarkentamaan kuvauksen 3-valentiksi, mikäli alueella D on tyyppin (1) tai (2) eristetty reunaosa [8]. Tavoitteena on todistaa kyseinen Starkovin ja Liczberskin antama tulos tämän tutkielman tiedoilla. Valitettavasti ei voida todistaa tulosta koko sen yleisyydessä, sillä tulos vaatii hyvin syvällistä matematiikkaa, joka karkaa yli tämän tutkielman esitiedoista ja tuloksista. Sen sijaan todistetaan vain erikoistapaus alueesta D , jolla on tyyppin (1) eristetty reunaosa. Todistus on silloinkin hankala, ja sitä varten tarvitaan kaksi aputulosta, joita ei todisteta niiden vaativuuden vuoksi:

LEMMA 3.14. *Olkoon $f: \Pi_*^+ \rightarrow \Delta$ surjektiivinen konformikuvaus, missä*

$$\Pi_*^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \setminus \left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right] \cup \left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \right]$$

ja olkoon joukko $B_r^+ = \{z \in \Pi^+ : |z| < r\}$, missä $r \in \left(0, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$ on kiinnitetty. Tällöin kuvaus f voidaan jatkaa homeomorfisesti joukolta $\Pi_^+ \cup [-r, r]$ joukolle $\Delta \cup S$, missä*

$S \subset \partial\Delta$ on Jordan-käyrä siten, että

$$\zeta = 1 \in S = g([-r, r]) \quad \text{ja} \quad 1 \neq g(-r) \neq g(r).$$

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [4, §3]. \square

LEMMA 3.15. *Olko joukko*

$$\Omega = \left\{ z \in \Pi^+ : |z| > \sqrt[4]{3} \right\} \cup \left\{ \sqrt[4]{3}e^{it} : t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right) \right\}$$

ja funktio $f(z) = \frac{z^3 - 3z}{z^2 - 1}$. Tällöin $f(\Omega) = \Pi^+$, missä $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

TODISTUS. Tulosta ei todisteta, ks. [9, s. 142-143]. \square

Nyt voidaan esitellä mukailtu versio Starkovin ja Liczberskin antamasta tuloksesta:

LAUSE 3.16. *Olko $\Delta = \Delta(0, 1)$ ja $D_0 \subset \Delta$ kompakti joukko siten, että $\Delta \setminus D_0 = D$ on alue. Tällöin on olemassa surjektiivinen 3-valentti ja lokaalisti biholomorfinen kuvaus $f: D \rightarrow \Delta$.*

TODISTUS. Todistus mukailee lähdettä [8]. Oletuksen nojalla tiedetään, että $D_0 \not\subset \partial\Delta$. Näin ollen on olemassa $r' > 0$ siten, että $B' = B(-1, r') \cap D_0 = \emptyset$. Merkitään $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ ja $\Pi_*^+ = \Pi^+ \setminus V$, missä

$$V = \left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3}{4}\pi} \right] \cup \left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \right],$$

ks. kuva 3.9. Tällöin joukko Π_*^+ on yhdesti yhtenäinen, koska ylempi puolitaso Π^+ on yhdesti yhtenäinen, jolloin erotus suunnatuista janoista V säilyttää yhdenäisyyden. Nyt Riemannin kuvauslauseen 2.19 nojalla on olemassa surjektiivinen konformikuvaus $g: \Pi_*^+ \rightarrow \Delta$.

Merkitään seuraavaksi $E = g(B_r^+)$, missä $B_r^+ = \{z \in \Pi^+ : |z| < r\}$ ja $r \in \left(0, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$ on kiinnitetty. Lemman 3.14 nojalla kuvaus g voidaan jatkaa homeomorfismiksi joukolta $\Pi_*^+ \cup [-r, r]$ joukolle $\Delta \cup S$, missä $S \subset \partial\Delta$ on Jordan-käyrä siten, että

$$\zeta = 1 \in S = g([-r, r]) \quad \text{ja} \quad 1 \neq g(-r) \neq g(r).$$

Merkitään myös edellistä jatkettua kuvasta kirjaimella g . Oletetaan, että on olemassa $r'' > 0$ siten, että $B'' = B(1, r'') \cap \Delta \subset E$. Jos näin ei ole, niin on olemassa ääretön jono $(\zeta_n) \subset \Delta \setminus E$, joka suppenee pisteeseen $\zeta = 1$. Tällöin jono $(z_n) = g^{-1}(\zeta_n)$, $n \in \mathbb{N}$ suppenee pisteeseen $z_0 = g^{-1}(1) \in (-r, r)$. Toisaalta tiedetään, että $(z_n) \in \Pi_*^+ \setminus B_r^+$, sillä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ $(z_n) \in \Pi_*^+$ pätee $(z_n) \in \Pi_*^+$ ja $(z_n) \notin B_r^+$. Näin ollen $z_0 \in \Pi_*^+ \setminus B_r^+$, mikä on ristiriita, sillä $\Pi_*^+ \setminus B_r^+ \cap (-r, r) = \emptyset$.

Osoitetaan seuraavaksi, että Möbius-kuvaus

$$\theta(z) = \frac{z + a}{1 + az}, \quad z \in \Delta,$$

missä $a \in (-1, 1)$ kuvaa alueen $\Delta \setminus \overline{B'}$ alueeksi $\Delta \cap B''$.

Ideana on näyttää, että kun $a \in (-1, 1)$ on tarpeeksi lähellä arvoa 1, niin erotusjoukosta $\Delta \setminus \overline{B'}$ jäävä yksikkökieken sisus voidaan kuvata haluttuun palloympäristöön toisen yksikkökieken sisälle tai tarkemmin joukkoon $\Delta \cap B''$. Tämä onnistuu, sillä Möbius-kuvauksissa sisäpisteet säilyvät sisäpisteinä ja ulkopisteet ulkopisteinä,

koska Möbius-kuvaukset ovat konformisina kuvauksina homeomorfisia. Näin ollen, jos pystytään viemään ympyrä $K(-1, r')$ reaaliakselin suhteen symmetrisesti mielivaltaisen lähelle pistettä $(1, 0)$, on väite näytetty. Osoitetaan seuraavaksi, että näin voidaan todella tehdä.

Funktio $\theta(z)$ on hyvin määritelty kaikilla $z \in \Delta$ ja lisäksi se on lauseen 2.17 mukaista muotoa. Näin ollen $\theta(z)$ kuvaa konformisesti yksikkökiekon yksikkökiekoksi ja Möbius-kuvauksena lauseen nojalla 2.14 se kuvaa tässä tapauksessa ympyrän $K(-1, r')$ ympyräksi, sillä suoraksi kuvautuminen ei selvästi ole mahdollista. Merkitään ympyrän $K(-1, r')$ origoa lähinnä olevaa pistettä $s = -1 + t$, missä $t = r'$. Havaitaan, että

$$\overline{\theta(z)} = \overline{\left(\frac{z+a}{1-az} \right)} = \frac{\bar{z}+a}{1+a\bar{z}} = \theta(\bar{z}),$$

joten kuvaus θ on symmetrinen reaaliakselin suhteen. Koska pisteet $(0, 0)$, $(-1, 0)$ ja $(-1+t, 0)$ ovat reaaliakselilla, täytyy niiden kuvapisteen sijaita myös reaaliakselilla. Tästä seuraa, että kuvaympyrän $\theta[K(-1, r')]$ keskipiste on reaaliakselilla ja kuvaympyrän muut pisteet ovat symmetrisia reaaliakselin suhteen, erityisesti pisteet $\theta(-1+t)$ ja $\theta(-1-t)$ sijaitsevat reaaliakselilla.

Nyt raja-arvotarkastelulla saadaan, että

$$\lim_{a \rightarrow 1} \theta(-1+t) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{-1+t+a}{1-a+at} = \frac{t}{t} = 1.$$

Näin ollen jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikille $a \in (1-\delta, 1)$ pätee $|a-1| < \epsilon$. Koska $B'' = B(1, r'')$ on avoin, niin on olemassa r_ϵ siten, että $B(1, r_\epsilon) \cap B'' = \emptyset$. Tällöin kun luvulle a pätee, että $|a-1| < |r_\epsilon - 1|$, niin kuvaus $\theta(z)$ kuvaa alueen $\Delta \setminus \bar{B}'$ alueeksi $\Delta \cap B''$. Tällöin yhdistetty kuvaus $g^{-1} \circ \theta$ kuvaa alueen D konformisesti alueeksi D_1 siten, että $\partial D_1 \setminus \partial \Pi_*^+ \subset B_r^+$.

Viimeiseksi tarkastellaan kuvausta

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z}{z^2 - 1}.$$

Osoitetaan, että kuvaus $f(z)$ on korkeintaan 3-valentti ylemmässä puolitasossa Π^+ . Yksi tapa näyttää 3-valenttius on kirjoittaa osamurtokehityksen avulla funktio f muotoon

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z}{z^2 - 1} = z + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}.$$

Tällöin esimerkiksi reaali- ja imaginaariluvut kuvautuvat kolme kertaa itselleen, ts. jokaiselle $b \in \mathbb{R}$ on olemassa $t, u, v \in \mathbb{R}$ siten, että $f(t) = f(u) = f(v) = b$. Näin ollen kuvaus $f(z)$ on 3-valentti.

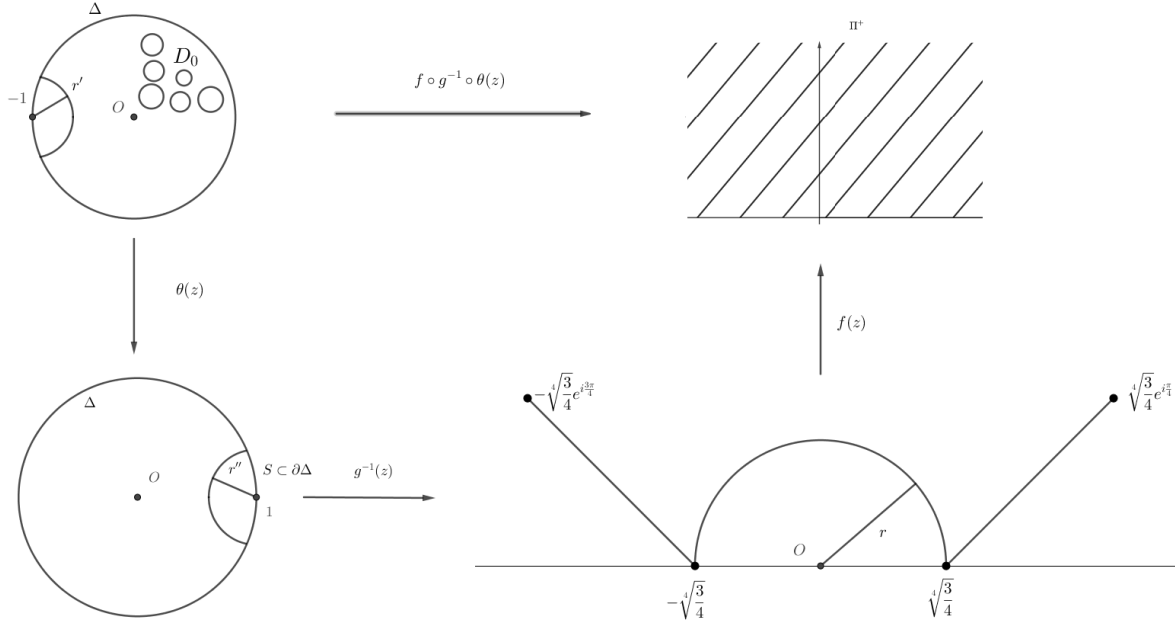
Funktion f kompleksinen derivaatta on

$$f'(z) = \frac{z^4 + 3}{(z^2 - 1)^2},$$

jonka nollakohdat ovat ylemmässä puolitasossa lauseen 1.9 nojalla $z_1 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$ tai $z_2 = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Funktio f on holomorfinen ylemmässä puolitasossa Π^+ ja $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Pi^+ \setminus \{z_1, z_2\}$. Tästä seuraa, että funktio f on lokaalisti konforminen ylemmässä puolitasossa Π^+ . Lemman 3.15 nojalla tiedetään, että $f(\omega) = \Pi^+$, missä

$$\Omega = \{z \in \Pi^+ : |z| > \sqrt[4]{3}\} \cup \{\sqrt[4]{3}e^{it} : t \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \pi)\} \subset D_1.$$

Koska $f(\Omega) = \Pi^+$, niin Riemannin kuvauslauseen 2.19 nojalla on olemassa surjektiiivinen konformikuvaus $\phi: \Pi^+ \rightarrow \Delta$. N4in ollen yhdistetty kuvaus $\phi \circ f \circ g^{-1} \circ \theta$ on 3-valentti ja lokaalisti konforminen kuvaus, joka kuvaa alueen D yksikkökiekoksi Δ .



KUVA 3.9. Lauseen 3.16 todistuksessa konstruoidut funktiot f, g ja θ .

□

Kirjallisuutta

- [1] JOSEPH BAK, DONALD J. NEWMAN: *Complex Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag 1982.
- [2] PHILIP P. BERGONIO: *Schwarz-Christoffel Transformations*, Master Thesis, Georgia Southwestern State University 2003.
- [3] TOBIN A. DRISCOLL, LLOYD N. TREFETHEN: *Schwarz-Christoffel Mapping, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press 2002.
- [4] G.M. GOLUZIN: *Geometric Theory of Functions of a Complex variable*, Amer. Math. Soc. 1969.
- [5] TERO KILPELÄINEN: *Kompleksianalyysi, luentomoniste*, Jyväskylän yliopisto, kevät, 2006.
- [6] SERGE LANG: *Complex Analysis, Fourth Edition*, Springer 2003.
- [7] ARI LEHTONEN: *Kompleksianalyysi 2, luentomateriaali*, Jyväskylän yliopisto, kevät, 2019.
- [8] PIOTR LICZBERSKI, VICTOR V. STARKOV: *On locally biholomorphic finitely valent mappings from multi-connected domains onto the open disc*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009) 85-87.
- [9] PIOTR LICZBERSKI, VICTOR V. STARKOV: *On locally biholomorphic mappings from multi-connected onto simply connected domains* Ann. Polon. Math. 85 (2005) 135-143.
- [10] E. LIGOCKA: *On locally biholomorphic surjective mappings*, Ann. Polon. Math 82 (2003) 127-135.
- [11] BJORNAR STEINNES LUTEBERGET: *Numerical Approximation of Conformal Mappings*, Master Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, 2010.
- [12] ZEEV NEHARI: *Conformal mapping*, McGraw-Hill Book Company, 1975.
- [13] BRUCE P. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer, 1991.
- [14] JOUNI PARKKONEN: *Metriset avaruudet ja Topologia, luentomoniste*, Jyväskylän yliopisto, syksy, 2018.
- [15] SIRPA PATTERI: *Riemannin kuvauslause, Pro-Gradu työ*, Jyväskylän yliopisto, 2011.
- [16] VICTOR V. STARKOV: *Locally biholomorphic mappings of multiconnected domains*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 48, No. 4, pp. 733-739, 2007.
- [17] ANTTI VÄHÄKANGAS: *Kompleksilaskenta, luentomoniste*. Jyväskylän yliopisto, kevät, 2017.