

**This is a self-archived version of an original article. This version may differ from the original in pagination and typographic details.**

**Author(s):** Aunola, Kaisa; Nurmi, Jari-Erik

**Title:** Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä

**Year:** 2018

**Version:** Accepted version (Final draft)

**Copyright:** © Kirjoittajat & Niilo Mäki Instituutti, 2018.

**Rights:** In Copyright

**Rights url:** <http://rightsstatements.org/page/InC/1.0/?language=en>

**Please cite the original version:**

Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. In J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Eds.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (pp. 54-69). Niilo Mäki Instituutti.

## Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä

Kaisa Aunola & Jari-Erik Nurmi

*Matemaattisten taitojen kehitys on luonteeltaan kasaantuvaa: aikaisempi osaaminen helpottaa uuden oppimista ja tasoerot matematiikan taidoissa lasten välillä kasvavat koulunkäynnin edetessä. Matematiikan osalta alkuopetus näyttäisikin hyödyttävän eniten taidoiltaan edistyneimpiä lapsia – taitotasoltaan heikommat lapset jäävät samalla jälkeen. Kehityskulkuun vaikuttavat monet erilaiset tekijät, joista yksi keskeisimmistä on lukujen luettelon sujuvuus ennen kouluikää. Myös motivaatiolla on oma merkityksensä matemaattisten taitojen oppimisessa. Tässä luvussa käsitellään matemaattisten taitojen kehitystä esiopetus- ja kouluvuosien aikana sekä kognitiivisia ja motivaatioon liittyviä asioita, jotka ennakoivat matemaattisten taitojen kehitystä.*

### **TIETOLAATIKKO:**

- Matematiikan taidot kumuloituvat: paremmat alkuvälmiudet johtavat nopeampaan oppimiseen.
- Varhaiset lukujonotaidot ovat tärkein matematiikan taitojen ennusmerkki.
- Motivaation merkitys on erityisen suuri matematiikan oppimisessa.
- Vaikka tytöt ja pojat eivät juurikaan eroa toisistaan matematiikan taidoiltaan, tytöillä on poikia enemmän matematiikkaan liittyvää ahdistusta ja myös heikompi minäkuva itsestään matematiikan taitajina.
- Opettajalla on merkitystä matematiikkaan liittyvän motivaation kehityksessä.

## **Johdanto**

Matemaattiset taidot koostuvat useasta eri osatekijästä: numeerisesta tiedosta (numeroiden tunteminen ja kyky asettaa lukuja järjestykseen), aritmeettisten yhdistelmien muistamisesta (esim. lisääminen, vähentäminen, kertominen, jakaminen), matemaattisten käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämisestä, proseduraalisesta eli menetelmätietoudesta ja -taidoista (tieto siitä, kuinka ja millä tavoin voidaan laskea, ja taito soveltaa näitä laskustrategioita joustavasti) sekä ongelmanratkaisutaidoista (esim. kyky tunnistaa matemaattinen ongelma ja tehdä suunnitelma ongelman ratkaisemiseksi; Dowker, 1998).

Matemaattisten taitojen kehitys etenee hierarkkisesti: peruskäsitteiden ja taitojen oppiminen tarjoaa pohjan monimutkaisempien taitojen ja tehtäväsarjojen hallinnalle. Onkin ehdotettu, että matemaattisten taitojen oppiminen edellyttää runsaasti toistoihin perustuvaa harjoitusta, ”raakaa työtä”. Jotta menetelmätietoutta ja laskustrategioita pystyttäisiin joustavasti hyödyntämään tyypiltään erilaisissa matemaattisissa tehtävissä, tulee näitä menettelytapoja harjoitella. Kun peruskäsitteet ja -toiminnot riittävän harjoittelun myötä automatisoituvat, niiden käyttö matemaattisessa ongelmanratkaisussa ei enää vie tarkkaavaisuuden ja työmuistin resursseja, vaan resurssit vapautuvat ongelmanratkaisun monimutkaisempiin prosesseihin. Harjoituksen kautta saavutettu peruslaskutoimitusten hyvä hallinta ja automatisoituminen mahdollistavat näin vaativamman matemaattisen ongelmanratkaisun. (Delazer ym., 2004; Geary, 2011; Siegler, 1986.)

Osa matemaattisten taitojen kehitystä koskevasta tutkimuksesta on keskittynyt oppimisvaikeuksiin. Mielenkiinnon kohteena on ollut, ovatko matematiikkaan liittyvät oppimisvaikeudet pysyviä, vuodesta toiseen jatkuvia vaikeuksia. Missä määrin ja miten matematiikan oppimisvaikeuksia kohdanneet lapset voivat kouluvuosien edetessä päästä vaikeuksistaan ja saavuttaa taitavampia ikätovereitaan? Matematiikan opetuksen näkökulmasta kysymys on olennainen: tasaako kouluopetus yksilöiden välisiä taitoeroja matematiikassa ja hyötyvätkö kouluopetuksesta hyvin vai heikosti menestyvät?

## **Erot matemaattisissa taidoissa kasvavat ensimmäisinä kouluvuosina**

Jordanin, Kaplanin ja Hanichin (2002) tutkimuksessa seurattiin lasten etenemistä matemaattisissa taidoissa toisen ja kolmannen kouluvuoden aikana. Tutkimuksessa lapset, joilla oli ainoastaan matematiikan oppimisvaikeuksia, kehittivät matemaattisissa taidoissaan nopeammin kuin lapset, joilla oli sekä lukemisen että matematiikan oppimisvaikeuksia tai jotka alkuaan suoriutuivat normaalitasoisesti. Tulostensa pohjalta Jordan ja kollegat päättelivät, että matematiikkaan liittyvät

oppimisen vaikeudet eivät välttämättä ole laadultaan pysyviä. Tutkimuksen tulosten tulkintaa rajoittaa kuitenkin se, että matemaattisten taitojen arviointiin käytetty mittari ei optimaalisesti mahdollistanut taitojen edistymisen seuranta: arvioinnissa käytetyt tehtävät olivat liian helppoja, jotta matemaattiselta osaamiseltaan taitavien lasten todellista taitotasoa olisi pystynyt arvioimaan.

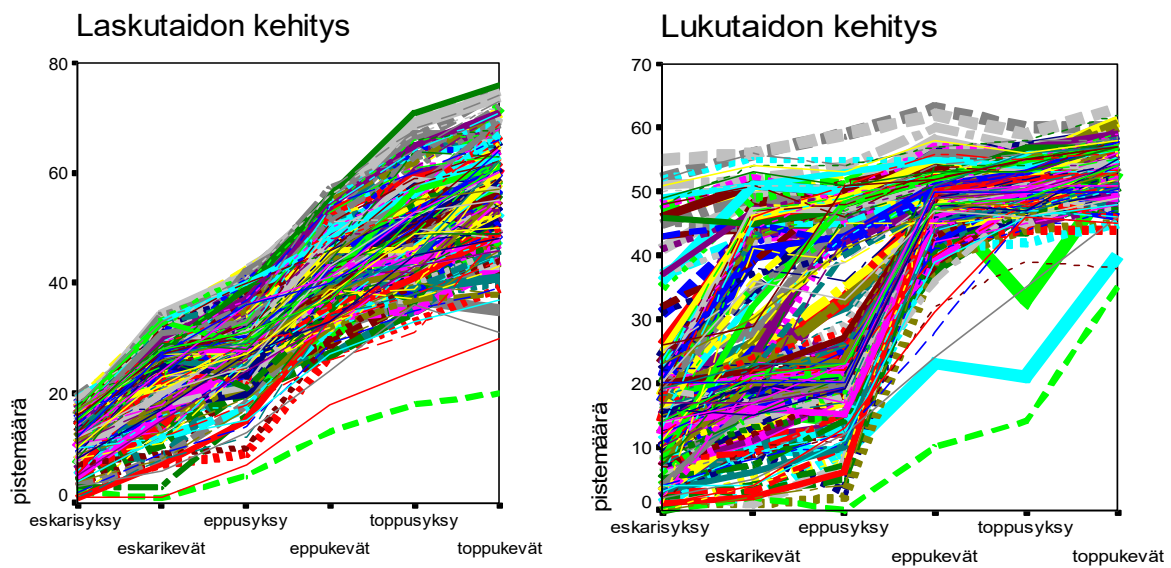
Muissa vastaavanlaisia asetelmia hyödyntäneissä tutkimuksissa onkin päädytty toisenlaisiin johtopäätöksiin. Esimerkiksi Andersson (2010) havaitsi, että vastoin Jordanin ja muiden tutkimustuloksia lapset, joilla oli matemaattisia oppimisvaikeuksia, eivät saavuttaneet normaalisti suoriutuvia ikätovereitaan kolmannelta kuudennelle luokalle edettäessä. Morganin, Farkasin ja Wun (2009) tutkimuksessa päädyttiin samantapaisiin johtopäätöksiin seurattaessa lasten matemaattisten taitojen kehitystä ensimmäisestä viidenteen luokkaan: lapset, joilla oli esikouluikässä ollut puutteita matemaattisissa taidoissa, eivät saavuttaneet normaalisti suoriutuvia ikätovereitaan kouluvuosien edetessä vaan pikemminkin jäivät heistä jälkeen entisestään.

Myös koko ikäluokkaa koskevien tutkimusten tulokset ovat osoittaneet, että koulunkäynnin edetessä lasten erot matemaattisissa taidoissa eivät ainoastaan säily ennallaan vaan jopa kasvavat. Sekä suomalaisissa että kansainvälisissä tutkimuksissa on havaittu, että lasten väliset erot matematiikan taidoissa ovat hyvin pysyviä aina esiopetusvuoden alusta myöhempiin kouluvuosiin asti ja että nämä erot myös kasvavat luokalta toiselle edettäessä. Esimerkiksi suomalaisessa JEPS-tutkimuksessa (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004) lapset, joilla oli hyvät matemaattiset valmiudet esiopetusvuoden alussa, kehittyivät taidoissaan myöhemmin selvästi nopeammin kuin heikommin lähtövalmiuksin varustetut lapset. Tämä näkyi siinä, että mitä parempi matemaattisten taitojen lähtötaso lapsella oli, sitä nopeampaa oli kehitys aritmetiikan taidoissa esiopetuksen alusta toisen luokan loppuun.

Samoin Williamsonin ryhmän (1991) tutkimuksessa havaittiin, että oppilaiden matemaattisten taitojen taso suhteessa ikätovereihin säilyi hyvin samankaltaisena kahdeksan ensimmäisen kouluvuoden ajan ja taitojen lähtötaso koulunkäyntiä aloitettaessa ennusti voimakkaasti taitojen myöhempää kehitystä: mitä parempi lähtötaso oppilaalla oli, sitä nopeampaa oli matemaattisten taitojen kehitys myöhemmin. Samanlaisia tuloksia saivat myös Muthén ja Khoo (1998) seurattessaan yläkouluikäisten nuorten matemaattisten taitojen kehitystä seitsemänneltä luokalta eteenpäin.

Lasten matemaattinen osaaminen esiopetus- ja kouluikässä näyttäisikin näiden tutkimusten valossa muistuttavan nk. lumipalloefektiä: aikaisempi osaaminen kiihdyttää uuden oppimista. Tulosten pohjalta voidaan pohtia, hyödyttääkö matematiikan alkuopetus eniten taidoiltaan edistyneimpiä lapsia – tällöin taitotasoltaan heikoimmat lapset jäisivät jälkeen. Tältä osin matemaattisten taitojen kehitys eroaa selvästi lukutaidon oppimisesta, jossa lasten välisten taitoerojen – niin teknisessä lukutaidossa kuin luetun ymmärtämisessäkin – on havaittu pikemminkin vähenevän kuin kasvavan ensimmäisten kouluvuosien aikana (Aunola, Leskinen, Onatsu-Arviolommi & Nurmi, 2002; Leppänen, Aunola, Niemi & Nurmi, 2004; Parrila, Aunola, Leskinen, Nurmi & Kirby, 2005). Tulokset tukevat ajatusta siitä, että matemaattisten taitojen kehitys on hierarkkista: uusien koulussa opeteltavien taitojen oppiminen edellyttää aiempien taitojen hyvää hallintaa.

Kuviossa 1 on esitetty suomalaiseseen JEPS-tutkimukseen osallistuneiden lasten yksilölliset kehityskäyrät matemaattisten taitojen (erityisesti aritmetiikan) ja teknisen lukutaidon osalta esiopetusvuoden alusta toisen luokan loppuun. Kukin yksittäinen käyrä kuvastaa aina yhden lapsen kehitystä kyseisessä taidossa.



Kuvio 1. Matemaattisten taitojen ja teknisen lukutaidon yksilölliset kehityskäyrät esikoulun alusta toisen luokan loppuun JEPS-tutkimuksessa (N = 207)

Kuviosta 1 voidaan nähdä, että lasten matemaattisten taitojen erot kasvavat ajan kuluessa (ts. yksilöiden välinen vaihtelu testipistemäärässä lisääntyy; Aunola ym., 2004), kun taas teknisen lukutaidon taitoerot pienenevät (Leppänen ym., 2004). Matemaattisten taitojen kohdalla tapahtuvasta ilmiöstä on kirjallisuudessa käytetty termiä Matteus-efekti (Stanovich, 1986). Tämä viittaa Matteuksen evankeliumissa olevaan vertauskuvaan: ”Sillä jokaiselle, jolla on, annetaan, ja hänellä on oleva yltäkyllin; mutta jolla ei ole, siltä otetaan pois sekin, mikä hänellä on.” (Matt. 22:25.) Lukutaidossa tapahtuvaa päinvastaista ilmiötä on kuvattu ”kompensatoriseksi kehitykseksi” (Leppänen ym., 2004) tai ”viivästyneeksi oppimiseksi” (Morgan ym., 2009), joka kuvastaa kouluopetuksen taidon heikkoa lähtötasoa kompensoivaa vaikutusta.

### **Matemaattisten taitojen kehitystä ennakoivat kognitiiviset tekijät**

Matemaattisia taitoja ja niiden kehitystä kouluiässä on selitetty lukuisilla kognitiivisilla tekijöillä. Tutkimuksen kohteena ovat olleet yhtäältä spesifisti matematiikkaan liittyvät valmiudet kuten lukujonotaidot, lukumäärien vertailuun liittyvät taidot ja numerosymbolien hallinta sekä toisaalta yleisemmät, opittavasta sisällöstä riippumattomat oppimisen valmiudet kuten prosessointinopeus, työmuisti ja tarkkaavaisuus. Koska vaikeudet matematiikan oppimisessa näyttävät usein olevan päällekkäisiä lukemiseen liittyvien vaikeuksien kanssa (Koponen, Aunola, Ahonen, & Nurmi, 2007; Korhonen, Linnanmäki & Aunio, 2012; Korpipää ym., 2017), on matemaattisten taitojen kehityksessä nostettu esiin myös kielellisten valmiuksien kuten fonologisen prosessoinnin tai käsitteen muodostuksen rooli.

Tutkimuksissa yhdeksi keskeisimmistä matemaattisten taitojen kehitystä ennustavaksi tekijäksi ovat osoittautuneet varhaiset lukujonotaidot eli lapsen tietämys lukujen välisestä keskinäisestä järjestyksestä ja taito laskea luettelemalla. Matematiikan oppimisvaikeuksia käsittelevissä tutkimuksissa on havaittu, että oppimisvaikeuksiin liittyy tyypillisesti vakavia puutteita lukujonotaidoissa. Lukujonotaitojen merkitys matemaattisten taitojen oppimisessa ja kehityksessä on osoitettu myös koko ikäluokkaa koskevissa aineistoissa. Esimerkiksi JEPS-tutkimuksessa esiopetusvuoden alun lukujonotaidot selittivät 54 % matemaattisten taitojen tasosta ensimmäisen luokan alussa ja 38 % taitojen tasosta toisen luokan lopussa (Nurmi & Aunola, 1999-2009). Varhaiset lukujonotaidot selittivät lisäksi 19 % aritmeettisten taitojen taitojen *kehityksestä* ensimmäisten kouluvuosien aikana: mitä paremmin lapsi osasi luetella lukuja annetuista luvuista eteen- ja taaksepäin esiopetusvuoden alussa, sitä *nopeammin* hänen aritmetiikan taitonsa kehittyivät suhteessa ikätovereihin (Aunola ym., 2004).

Myös Zhang ja muut (2014) havaitsivat esiopetusvuoden lukujonotaitojen olevan selvästi paras laskutaidon kehityksen ennusmerkki tutkimuksessa, jossa seurattiin suomalaisia lapsia esiopetuksen alusta neljännen luokan kevääseen. Tutkimuksessa tarkasteltiin aritmeettisten taitojen kehitystä ennustavina tekijöinä lukujonotaitojen lisäksi visuospatiaalisia taitoja, kielellisistä valmiuksista äännetietoisuutta, kirjaintuntemusta ja sanavarastoa sekä vanhempien koulutustaustaa.

Esiopetusvuoden lukujonotaidot säilyttävät merkityksensä matemaattisten taitojen selittäjänä myös myöhemmin yläkouluiässä. Esimerkiksi JEPS-tutkimuksessa esiopetusvuoden alun lukujonotaidot selittivät peräti 29 % peruskouluun päättävien matemaattisesta osaamisesta 9. luokan keväällä (Nurmi & Aunola, 1999–2009). Varhaiset lukujonotaidot ennustivat myöhempää matemaattista osaamista paremmin kuin tarkkaavaisuus, metakognitiivinen tietous tai kielelliset valmiudet (kirjaintuntemus, äännetietoisuus, kuullun ymmärtäminen).

Miksi matemaattisten taitojen kehitys on niin voimakkaasti yhteydessä varhaisiin lukujonotaitoihin? Kirjallisuudessa on tarjottu monia selityksiä. Yksi on, että lukujonotaitojen hyvä hallinta johtaa matematiikkaan liittyvän informaation automatisoituneeseen käyttöön ja tämän vuoksi vapauttaa tarkkaavaisuuden resursseja vaativampaan ongelmanratkaisuun ja proseduurien seurantaan (Gersten & Chard, 1999).

Siegler (1986) menee päätelmissään pidemmälle ehdottaessaan, että lukujen luettelu toimii nk. backup-strategiana aritmeettisen tiedon hankinnassa: hyvä lukujen luettelu taito ei vaikuta vain matemaattisen tiedon mieleen palauttamisen automatisoitumiseen vaan myös tämän tiedon mieleen palauttamisen *tarkkuuteen*. Kun lapsi toistuvasti päätyy oikeaan ratkaisuun lukuja luettelemalla, vastaus alkaa myöhemmin samankaltaisen tehtävän yhteydessä automaattisesti aktivoitua mielessä muita ratkaisuja voimakkaammin. Tämän seurauksena lapsi alkaa ajan myötä kasvavassa määrin luottaa siihen, että hän pystyy käyttämään laskemisen sijaan laskustrategiana mieleen palauttamista. Jos taas lapsi jatkuvasti tekee virheitä lukuja luettellessaan ja luettelemalla laskiessaan, nämä virheet yhdistyvät tiettyyn matemaattiseen tehtävään tai ongelmaan ja näin vaikeuttavat siirtymistä mieleen palauttamisen käyttöön laskustrategina.

Lukujonotaitojen lisäksi tärkeinä asioina matemaattisten taitojen kehityksessä on pidetty myös työmuistia, tarkkaavaisuutta, prosessointinopeutta ja kielen kehitykseen liittyviä tekijöitä (Geary ym., 2007, Geary, 2011; Zhang ym., 2017). Esimerkiksi niin tarkkaavaisuuden kuin hyvän

työmuistinkin tiedetään edesauttavan oppimista taitoalueesta riippumatta. Työmuistin merkitys korostuu matemaattisessa ongelmanratkaisussa, joka vaatii usein samanaikaisesti aiemman, ratkaisun osaprosesseihin liittyvän tiedon ylläpitoa ja uuden tiedon prosessointia (Raghubar, Barnes & Hecht, 2010). Työmuistin osa-alueista erityisesti visuospatiaalinen työmuisti on yhteydessä matematiikan oppimiseen. Yhteys on kuitenkin monimutkainen ja riippuu monista muista tekijöistä (esim. iästä, taitotasosta, kielestä, tavasta jolla matemaattiset tehtävät esitetään, osataidosta ja siitä, missä vaiheessa taidon opettelussa ollaan; Raghubar ym., 2010). Myös työmuistiin liittyvä prosessointinopeus on vahva aritmeettisten taitojen ennustaja (katsaus, Fletcher, Lyon, Fuchs & Barnes, 2007; Geary ym., 2007). Tätä on selitetty sillä, että nopea prosessointi vapauttaa kognitiivisia resursseja ja johtaa työmuistin tehokkaampaan käyttöön (Fletcher ym., 2007).

Matemaattisten taitojen oppimisessa myös kielellisillä taidoilla on merkityksensä. Ne esimerkiksi mahdollistavat laskemiseen liittyvien symbolien ja lukusanojen oppimisen. Kielellisillä taidoilla on merkitystä erityisesti ratkottaessa matematiikan sanallisia tehtäviä (Björn, Aunola & Nurmi, 2016). Matemaattisten taitojen kehityksen kannalta heikoimmassa asemassa ovat tutkimusten mukaan lapset, joilla on sekä matematiikkaan että lukemiseen liittyviä vaikeuksia (ks. esim. Jordan ym., 2002).

Mielenkiintoista on, että monet näistä yleisten oppimisvalmiuksien piirteistä vaikuttavat matemaattisten taitojen kehitykseen lukujonotaitojen kautta. Esimerkiksi Zhangin ja kollegoiden (2014) tutkimuksessa lasten visuospatiaaliset taidot ja hyvä kirjainten tuntemus esikouluiässä olivat yhteydessä lukujonotaitojen sujuvuuteen, joka edelleen ennusti nopeaa matemaattisten taitojen kehitystä kouluiässä (ks. myös Krajewski & Schneider, 2009). Näyttäisi siltä, että varhaiset kielelliset valmiudet ja visuospatiaalinen hahmottaminen auttavat lasta lukujonotaitojen oppimisessa, lukujen mieleen painamisessa ja näiden taitojen automatisoimisessa, mikä edelleen edesauttaa lapsen matemaattisten taitojen kehitystä.

### **Matemaattiset taidot ja motivaatio**

Kognitiivisten tekijöiden lisäksi myös oppimismotivaatio on yhteydessä matemaattisten taitojen kehitykseen. Oppimismotivaatiolla tarkoitetaan yhtäältä lapselle ominaista yleistä suhtautumistapaa oppimistilanteisiin (tehtävää välttelevä vs. tehtäväsuuntautunut työskentelytapa) ja toisaalta tiettyyn oppiaineeseen kuten matematiikkaan liittyvää kiinnostusta tai ahdistuneisuutta. Mielenkiinnon kohteena on ollut muun muassa, ennustaako motivaatio myöhempää taitojen kehitystä matematiikassa vai onko niin, että onnistuminen matemaattisissa tehtävissä lisää kiinnostusta



matematiikkaan. Aunolan ryhmän (2003) tulokset osoittivat, että ensimmäisen kouluvuoden aikana lasten tehtäväsuuntautuneisuus heijastui heidän matematiikan oppimiseensa pikemminkin kuin päinvastoin: lasten tehtäväsuuntautuneisuus ennusti matemaattisten taitojen nopeaa kehitystä niin ensimmäisen luokan syksyllä kuin keväälläkin, kun taas tehtävää välttelevä toimintatapa ennusti hitaampaa taitojen kehitystä. Myös Hirvosen ja muiden (2012) tutkimuksessa tehtäväsuuntautuneisuus ensimmäisen luokan alussa oli yhteydessä matematiikan taitojen nopeaan kehitykseen ensimmäisten kouluvuosien aika. Tehtäväsuuntautuneisuuden merkityksestä matemaattisten taitojen kehityksessä on saatu samansuuntaisia tuloksia myös muissa suomalaisissa tutkimuksissa (esim. Björn, Räikkönen, Aunola & Kyttälä, 2017; Onatsu-Arviolommi, Nurmi & Aunola, 2002). Tehtäväsuuntautuneisuus on tutkimuksesta riippuen selittänyt 6–19 prosenttia myöhemmästä matematiikan taidosta aiemman matematiikan taidon tason kontrolloinnin jälkeen.

Myös lapsen kiinnostus matematiikkaan liittyviin tehtäviin ennustaa lasten matemaattisten taitojen kehitystä, joskaan ei yhtä voimakkaasti kuin edellä kuvattu yleisempi tehtävääorientoitio. JEPS-tutkimuksessa (Aunola, Leskinen & Nurmi, 2006) havaittiin, että lasten kiinnostus matematiikkaa kohtaan ei ollut vielä kovin pysyvää ensimmäisen kouluvuoden aikana. Ensimmäisen kouluvuoden aikana matemaattisten taitojen taso vaikutti myöhempään motivaatioon: hyvät aritmeettiset taidot lisäsivät kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Siirryttäessä toiselle luokalle motivaatio matematiikkaa kohtaan muuttui pysyvämmäksi ja kiinnostus laskutehtäviin alkoi heijastua myönteisesti aritmeettisten taitojen kehitykseen. Yläkouluiässä motivaation merkitys matematiikan taitojen kehityksessä voimistui entisestään. Tässä ikävaiheessa kiinnostus matematiikkaa kohtaan selitti 10 prosenttia matemaattisten taitojen kehityksestä (Nurmi & Aunola, 1999–2009).

Kansainväliset tulokset matematiikkaan liittyvän motivaation ja matemaattisten taitojen keskinäisestä dynamiikasta ovat olleet osin ristiriitaisia: toisissa tutkimuksissa matematiikkaan liittyvän motivaation on havaittu ennustavan myöhempää taitotasoa, toisissa taas taitotason ennustavan myöhempää motivaatiota. Joissakin tutkimuksissa näiden väliltä on löydetty vastavuoroinen suhde (ks. katsaus, Viljaranta, 2010). Viljarannan ym. (2009) ja Fisherin ym. (2012) tutkimuksissa matematiikkaan liittyvän motivaation ja matemaattisten taitojen kehityksen väliltä löydettiin vastavuoroinen suhde jo esiopetusvuoden aikana: hyvät matemaattiset taidot esiopetusvuoden alussa lisäsivät kiinnostusta matematiikkaa kohtaan esiopetusvuoden aikana ja päinvastoin.

Tutkimusten mukaan opettajalla on keskeinen merkitys matematiikkaan liittyvän motivaation kehityksessä. Suomalaisessa tutkimuksessa lasten motivaatio tehdä laskutehtäviä lisääntyi ensimmäisten kouluvuosien aikana niissä luokissa, joissa opettajan keskeisenä tavoitteena oli oppilaiden motivaation tai minäkuvan tukeminen (Aunola ym., 2006). Luokissa, joissa opettajalla ei ollut tällaista tavoitetta, lasten matematiikkaan liittyvässä motivaatiossa ei tapahtunut vastaavaa myönteistä kehitystä. Vaikka tulos ei kerro sitä, miten opettajan tavoitteet konkreettisesti näkyvät opetuskäytännöissä, voidaan tulosta pitää positiivisena: opettajalla on mahdollisuus vaikuttaa myönteisesti oppilaidensa matematiikkaan liittyvään motivaatioon ja tätä kautta myös oppilaidensa matemaattisten taitojen kehitykseen koulussa.

Myös Lerkkänen kollegoineen (2012) havaitsi, että opettajalla on merkitystä matematiikkaan liittyvän motivaation kehityksessä: luokissa, joissa opettajan opetuskäytännöt olivat lapsilähtöisiä (esim. opettaja otti lasten yksilölliset tarpeet ja kiinnostuksen kohteet huomioon opetuksessa ja jakoi vastuuta), lasten kiinnostus matematiikkaan oli korkea, mikä taas heijastui hyviin oppimistuloksiin. Pakarisen ja muiden (2011) tutkimuksessa taas esiopetusryhmissä, joissa opettajan ohjauksellinen tuki oli korkealaatuista, lapsilla ilmeni vähemmän välttämisorientaatiota ja lasten matemaattiset valmiudet kehittyivät enemmän kuin heikomman ohjauksellisen tuen ryhmissä. Opettajan tarjoama korkealaatuinen ohjauksellinen tuki näkyi esimerkiksi oppilaiden päättelyn tukemisena, keskustelun lapsilähtöisyytenä ja oppilaille annettun palautteen tarkkuutena.

Verrattaessa tutkimuksia, joissa on selvitetty motivaation vaikutusta matematiikan taitoihin ja toisaalta äidinkielen ja lukemaan oppimisen taitoihin, on käynyt selväksi, että motivaatiolla – niin työskentelytavoilla kuin oppiainekohtaisella kiinnostuksellakin – on enemmän merkitystä matematiikan taitojen kuin lukutaidon kehityksessä. Miksi motivaatio on juuri matematiikkaan niin tiiviisti sidoksissa? Mikä tekee matematiikasta oppiaineena näin erityisen? Yksi selitys on, että matemaattisten taitojen Matteus-vaikutus näkyy myös oppilaiden taidon hallintaan liittyvänä ahdistuksena: yksilöiden välisten tasoerojen näkyminen voi lisätä kokemuksia omasta huonommuudesta. Onnistumiskokemusten puute voi paitsi heikentää motivaatiota myös johtaa ahdistuneisuuteen ja heijastua edelleen kielteisesti matematiikan taitojen oppimiseen. Voi myös olla, että motivaatio-ongelmien kietoutuminen matematiikan heikkoon taitamiseen kiihdyttää omalta osaltaan esiopetus- ja kouluiässä taitoerojen lisääntymistä.

## **Sukupuolen merkitys**

Tulokset sukupuolieroista matemaattisten taitojen kehityksessä ovat osin ristiriitaisia (ks. katsaukset Lindberg ym., 2010; Rosselli ym., 2009; Zhu, 2007). Useissa tutkimuksissa matemaattisten taitojen tasossa ei ole havaittu olevan eroja tyttöjen ja poikien välillä etenkin alakouluvuosina. Sen sijaan näyttöä on siitä, että kehityskulku matemaattisissa taidoissa olisi pojilla jo koulun alkuvuosista lähtien nopeampaa kuin tytöillä ja että kouluvuosien lopulla pojat jo suoriutuisivat tyttöjä paremmin matematiikassa. Näitä sukupuolieroja näyttäisi esiintyvän erityisesti matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden keskuudessa. Suomalaisen JEPS-tutkimuksen tulokset (Aunola ym., 2004) ovat yhdenmukaisia näiden kansainvälisten havaintojen kanssa: vaikka tyttöjen ja poikien suoriutumisessa ei ollut eroja esi- ja alkuopetuksessa, poikien matematiikan taidot kehittyivät alkuopetusvuosina nopeammin kuin tyttöjen taidot. Tämä näkyi etenkin niiden lasten kohdalla, jotka olivat taidoiltaan hyviä: lahjakkaat pojat kehittyivät matemaattisissa taidoissaan nopeammin kuin lahjakkaat tytöt.

Vaikka JEPS-tutkimuksessa tyttöjen ja poikien väliltä ei löydetty matemaattisten taitojen tasoeroja, toisessa suomalaisessa tutkimuksessa niitä löytyi: Zhangin ja muiden (2014) tutkimuksessa pojat suoriutuivat ensimmäisen luokan keväällä aritmeettisista laskutoimituksista tyttöjä paremmin. Tämän sukupuolieron havaittiin johtuvan siitä, että poikien lukujonotaidot olivat esiopetusiässä tyttöjen vastaavia taitoja paremmat: lukujonotaidot selittivät keskeisesti myöhempiä aritmeettisiä taitoja.

Yksi selitys matemaattisten taitojen kehityksessä havaituille sukupuolieroille on tyttöjen ja poikien erot matematiikkaan liittyvässä motivaatiossa ja minäkuvassa. Useissa kansainvälisissä tutkimuksissa on havaittu, että jossain vaiheessa koulu-uraa poikien motivaatio matematiikkaa kohtaan ja heidän käsityksensä itsestään matematiikan taitajina muuttuu tyttöjen vastaavaa motivaatiota ja minäkuvaa positiivisemmaksi (esim. Hill ym., 2016; Vermeer, Boekaerts & Seegers, 2000). Matematiikkaan liittyvän ahdistuksen on myös havaittu olevan tytöille poikia tyypillisempää (Hill ym., 2016; Kupari ym., 2013).

Suomalaisessa tutkimuksessa havaitsimme, että aloittaessaan ensimmäistä kouluvuottaan tytöt ja pojat eivät eronneet toisistaan sen suhteen, kuinka kiinnostuneita he olivat matematiikasta. Kuitenkin jo toiselle luokalle siirryttäessä sukupuolierot matematiikkaan liittyvässä kiinnostuksessa alkoivat näkyä: tyttöjen motivaatio matematiikkaa kohtaan heikkeni ja poikien motivaatio säilyi korkeana. Tämä siitä huolimatta, että matematiikan taidoissa ei ollut sukupuolten välillä eroa. Samana ajankohtana tyttöjen näkemys itsestään matematiikan taitajina muuttui keskimäärin poikien

näkemyksiä kielteisemmäksi: tytöt alkoivat uskoa, etteivät he ole matematiikassa hyviä. (Aunola, 2002; Nurmi & Aunola, 1999-2009).

Jo alle kouluikäisillä havaitut sukupuolierot lukujonotaidoissa (Zhang ym., 2014) antavat viitteitä siitä, että tyttöjen ja poikien väliset erot matemaattisissa taidoissa saattavat alkaa kehittyä jo hyvinkin varhaisessa vaiheessa. Vielä ei tiedetä, onko sukupuolieroissa lopulta kyse varhaisista biologisista eroista kiinnostusten kohteissa ja taipumuksissa, vanhempien tavassa rohkaista ja kannustaa tyttöjä ja poikia eri osaamisen alueilla vai neurokognitiivisista eroista eri sukupuolten välillä.

### **Pohdintaa**

Matemaattisten taitojen oppiminen eroaa lukemaan oppimisesta monessakin mielessä. Se, että suomen kielen äänteet ja kirjaimet vastaavat toisiaan melko täydellisesti, mahdollistaa lukutaidon opettelussa vauhdikkaan etenemisen lapsen oivallettua kirjain-äänne-vastaavuuden periaatteen. Nopea oppiminen tarjoaa onnistumiskokemuksia. Matemaattisten taitojen oppiminen ei tapahdu samalla vauhdilla vaan vaatii paljon harjoitusta: eteneminen tapahtuu askelittain yksinkertaisemman osataidon oppimisesta kohti monimutkaisempia taitoja. Siinä missä alkuopetus Suomessa tasoittaa lasten välisiä taitoeroja lukutaidossa antamalla kotitaukua ja lähtötasoltaan erilaisten oppilaiden päästä jotakuinkin samaan tahtiin, matematiikan kohdalla asia on toisin. Kouluopetuksen tarkoituksen ei tietenkään tule olla lahjakkaiden etenemisen hidastaminen. Opetukseen huomiota kiinnittämällä voitaisiin kuitenkin taata, etteivät vanhempien ammattiasemaan ja koulutukseen tai perheiden ohjauskäytänteisiin liittyvät tekijät automaattisesti johtaisi pysyvästi heikkoon suoriutumiseen matematiikassa.

Matemaattisten taitojen kumulatiivisen kehityksen takia tulisi lasten matemaattisten taitojen kehitykseen kiinnittää aiempaa enemmän huomiota jo ihan ensimmäiseltä luokalta lähtien tai jopa jo paljon varhemmin (ks. myös Minna Hannulan kirjoittama luku tässä kirjassa). Varhaisen luvuilla leikkittelyn ja lukujen luettelon sujuvoittamisen voidaan ajatella edesauttavan aritmeettisten taitojen myöhempää oppimista koulussa. Lukemisessa opetuksen aikaistamisella on tuskin myönteistä vaikutusta myöhempään kehitykseen, mutta matemaattisissa taidoissa asia voi olla toisin.

Tärkeää on muistaa myös motivaation merkitys matemaattisten taitojen oppimisessa. Matematiikan opetuksen tulisikin pikemminkin tukea kuin latistaa oppilaiden motivaatiota matematiikkaa ja oppimista kohtaan. Tehtävä on haastava. Kuinka tarjota onnistumiskokemuksia ja ylläpitää

motivaatiota toistoja ja runsasta harjoitusta edellyttävällä oppimisen alueella? Kuinka ylläpitää heikompien laskijoiden motivaatiota, kun erot hyviin laskijoihin kasvavat koko ajan? Opetuksen eriyttäminen on yksi mahdollisuus, mutta siinäkin on ”akilleen kantapäänsä”: lapset aika nopeasti huomaavat, miksi eri ryhmät on koottu. Koska motivaatio alkaa vaikuttaa matemaattisten taitojen kehitykseen jo ennen kouluikää, matematiikkaan liittyvän kiinnostuksen herättäminen jo varhaiskasvatuksessa voi olla yksi keino ennaltaehkäistä matematiikkaan liittyvien vaikeuksien kasaantumista.

Yksi tulevaisuuden haaste on tyttöjen matematiikkaan liittyvän kiinnostuksen ylläpitäminen, eritoten kun isompia eroja tyttöjen ja poikien taitojen tasossa ei ole. Tähän tarvitaan tutkimustietoon pohjaavia uusia toimintamalleja. Yksi tekijä, jonka tutkimuksissa on havaittu vaikuttavan myönteisesti motivaatioon, on vanhempien ja opettajien luottamus lapsen kykyihin oppia ja menestyä matematiikassa. Olisikin tärkeää, että opettajat ja vanhemmat luottaisivat myös tyttöjen kykyyn pärjätä ja menestyä matematiikassa. Toinen keino voisi olla uusien roolimallien luominen – mitä jos taitava matemaatikko voisikin olla myös erinomainen tanssija?

## LÄHTEET

Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102, 115–134.

Aunola, K. (2002). Motivaation kehitys ja merkitys kouluikässä. Teoksessa K. Salmela-Aro & J. -E. Nurmi (Toim.), *Mikä meitä liikuttaa? Modernin motivaatiopsykologian perusteet*, 105–126. Jyväskylä: PS-kustannus.

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699–713.

Aunola, K., Leskinen, E. & Nurmi, J.-E. (2006). Developmental dynamics between mathematical performance, task-motivation, and teachers' goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 21–40.

Aunola, K., Leskinen, E., Onatsu-Arviolommi, T. & Nurmi, J.-E. (2002). Three methods for studying developmental change: A case of reading skills and self-concept. *British Journal of Educational Psychology*, 72, 343–364.

Aunola, K., Nurmi, J. -E., Lerkkanen, M.-K. & Rasku-Puttonen, H. (2003). The role of achievement-related behaviors and parental beliefs in children's mathematical performance. *Educational Psychology*, 23(4), 403–421.

Björn, P. M., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2016). Primary school text comprehension predicts mathematical word problem-solving skills in secondary school. *Educational Psychology*, 36, 362–377.

Björn, P. M., Räikkönen, E., Aunola, K. & Kytälä, M. (2017). Dynamics between student vs. teacher perceptions of mathematics task-orientation and mathematics performance among adolescents. *Learning and Individual Differences*, 55, 21–28.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Locky, A. & Trieb, T. (2004). The acquisition of arithmetic knowledge – an fMRI study. *Cortex*, 40, 166–167.

Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessa C. Donland (toim.), *The development of mathematical skills*, 275–302. East Sussex: Psychological Press.

Fisher, P. H., Dobbs-Oates, J., Doctoroff, G. L. & Arnold, D. H. (2012). Early math interest and the development of math skills. *Journal of Educational Psychology*, 104, 673–681.

Fletcher, J. M., Lyon, G. R., Fuchs, L. S. & Barnes, M. A. (2007). *Learning disabilities – From identification to intervention*. The Guilford Press.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanism underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78, 1343–1359.

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, 47, 1539–1552.

Gersten, R. & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *Journal of Special Education*, 33, 18-28.

Hill, F., Mammarella, I. C., Devine, A., Caviola, S., Passolunghi, M. C. & Szűcs, D. (2016). Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity. *Learning and Individual Differences*, 48, 45–53.

Hirvonen, R., Tolvanen, A., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2012). The developmental dynamics of task-avoidant behavior and math performance in kindergarten and elementary school. *Learning and Individual Differences*, 22, 715–723.

Jordan, N. C., Kaplan, D. & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 586–597.

Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97, 220–241.

Korhonen, J., Linnanmäki, K. & Aunio, P. (2012) Language and mathematical performance: A comparison of lower secondary school students with different level of mathematical skills. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 56, 333–344.

Korpiää, H., Koponen, T., Aro, M., Tolvanen, A., Aunola, K., Poikkeus, A.-M., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2017). Covariation between reading and arithmetic skills from grade 1 to grade 7. *Contemporary Educational Psychology*, 51, 131–140.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual-spatial working memory, and preschool quantity-number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 516–531.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. & Vettenranta, J. (2013). PISA12. Ensituloksia. (Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisu No. 20). Opetus- ja kulttuuriministeriö & Koulutuksen tutkimuslaitos.

Leppänen, U., Niemi, P., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2004). Development of reading skills among preschool and primary school pupils. *Reading Research Quarterly*, 39, 72–93.

Lerkkanen, M.-K., Kiuru, N., Pakarinen, E., Viljaranta, J., Poikkeus, A.-M., Rasku-Puttonen, H., Siekkinen, M. & Nurmi, J.-E. (2012). The Role of Teaching Practices in the Development of Children's Interest in Reading and Mathematics in Kindergarten. *Contemporary Educational Psychology*, 37, 266–279.

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L. & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: A Meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 136, 1123–1135.

Morgan, P. L., Farkas, G. & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 42, 306–321.

Muthèn, B. O. & Khoo, S. T. (1998). Longitudinal studies of achievement growth using latent variable modeling. *Learning and Individual Differences*, 10, 73–101.

Nurmi, J.-E. & Aunola, K. (1999–2009). *Jyväskylä Entrance into Primary School –Study (JEPS)*. Tutkimusaineisto. Jyväskylän yliopisto.

Onatsu-Arvilommi, T., Nurmi, J.-E. & Aunola, K. (2002). The development of achievement strategies and academic skills during the first year of primary school. *Learning and Instruction*, 12, 509–527.

Pakarinen, E., Kiuru, N., Lerkkanen, M.-K., Poikkeus, A.-M., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2011). Instructional support predicts children's task avoidance in kindergarten. *Early Childhood Research Quarterly*, 26, 376–386.

Parrila, R., Aunola, K., Leskinen, E., Nurmi, J.-E. & Kirby, J. R. (2005). Development of Individual Differences in Reading: Results from longitudinal studies in English and Finnish. *Journal of Educational Psychology*, 97, 299–319.

Raghubar, K. P., Barnes, M. A. & Hecht, S. A. (2010). Working memory and mathematics: A review of developmental, individual difference, and cognitive approaches. *Learning and Individual Differences*, 20, 110–122.

Rosselli, M., Ardila, A., Matute, E. & Inozemtseva, O. (2009). Gender differences and cognitive correlates of mathematical skills in school-aged children. *Child Neuropsychology: A Journal on Normal and Abnormal Development in Childhood and Adolescence*, 15, 216–231.

Siegler, R. S. (1986). Unities across domains in children's strategy choices. Teoksessa M. Perlmutter (toim.), *Minnesota Symposium on Child Psychology: Vol. 19. Perspectives on intellectual development*, 1–48. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stanovich, K. E. (1986). Matthew effects in reading: Some consequences of individual differences in the acquisition of literacy. *Reading Research Quarterly*, 21, 360–406.

Vermeer, H. J., Boekaerts, M. & Seegers, G. (2000). Motivational and gender differences: Sixth-grade students' mathematical problem-solving behavior. *Journal of Educational Psychology*, 92, 308–315.

Viljaranta, J. (2010). The development and role of task motivation and task values during different phases of the school career. *Jyväskylän yliopisto: Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research*, 401.

Viljaranta, J., Lerkkanen, M.-K., Poikkeus, A.-M., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2009). Cross-lagged relations between task motivation and performance in arithmetic and literacy in kindergarten. *Learning and Instruction*, 19, 335–344.

Williamson, G. L., Appelbaum, M. & Epanchin, A. (1991). Longitudinal analyses of academic achievement. *Journal of Educational Measurement*, 28, 61–76.

Zhang, X., Koponen, T., Räsänen, P., Aunola, K., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2014). Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge. *Child Development*, 85, 1091–1107.

Zhang, X., Räsänen, P., Koponen, T., Aunola, K., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2017). Knowing, applying, and reasoning about arithmetic: Roles of domain-general and numerical skills in multiple domains of arithmetic learning. *Developmental Psychology*, 53, 2304–2318.



Zhu, Z. (2007). Gender differences in mathematical problem solving patterns: A review of literature. *International Educational Journal*, 8, 187–203.