Mostow'n rigiditeettilause

Antti Leppänen

Matematiikan Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2018

Tiivistelmä: Antti Leppänen, *Mostow'n rigiditeettilause* (engl. *Mostow rigidity theorem*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2018.

Mostow'n rigiditeettilauseen mukaan kaksi vähintään 3-ulotteista kompaktia hyperbolista monistoa ovat isometriset, jos ne ovat diffeomorfiset. Hyperbolinen monisto on monisto, jolla on hyperbolisen avaruuden avointen joukkojen kanssa isometrisistä avoimista joukoista koostuva peite. George Mostow todisti lauseen vuonna 1968.

Täydellinen hyperbolinen monisto voidaan samaistaa hyperbolisen avaruuden isometrioiden ryhmän eli konformikuvausten Möbius-ryhmän aliryhmän kanssa. Tämä aliryhmä on isomorfinen moniston perusryhmän kanssa. Monisto saadaan tällöin tekijäavaruutena tämän aliryhmän toiminnassa hyperbolisella avaruudella. Lause todistetaan osoittamalla, että jos monistoja vastaavat aliryhmät ovat kvasikonformikuvauksen konjugoimia, niin tämä kvasikonformikuvaus onkin konformikuvaus.

Möbius-ryhmä osoitetaan hyperbolisen avaruuden isometrioiden ryhmäksi käyttäen apuna sen isomorfisuutta ryhmän $O(1, n+1)$ kanssa. Osoitetaan myös, että hyperbolinen avaruus on jokaisen hyperbolisen moniston isometrinen peite. Kuoren eli yleistetyn annuluksen konformikapasiteetin jatkuvuus todistetaan aiempien aputulosten avulla.

Topologisen ryhmän operaatiossa invarianttia Haarin mittaa käyttäen todistetaan eräs päälauseen todistuksessa tarvittava apulause. Päälause todistetaan käyttäen lisäksi konformikapasiteetin jatkuvuutta, polaarihajotelmaa, kvasikonformikuvauksen jatkumista pallon reunalle ja sitä, että 1-kvasikonformikuvaus on konformikuvaus.

Sisältö

1. Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella Mostow'n rigiditeettilauseen todistusta. Lauseen todisti yhdysvaltalainen George Daniel Mostow (1923–2017) vuonna 1968. *Hyperbolinen monisto* on monisto, jolla on hyperbolisen avaruuden avointen joukkojen kanssa isometrisistä avoimista joukoista koostuva peite. Lauseen mukaan kaksi vähintään 3-ulotteista kompaktia hyperbolista monistoa ovat isometriset, jos ne ovat diffeomorfiset. Mostow'n lause laajennettiin äärellistilavuuksisille monistoille 1970-luvulla. Lause ei päde hyperbolisille pinnoille eikä euklidisille monistoille missään ulottuvuudessa.

Täydellinen hyperbolinen monisto voidaan samaistaa hyperbolisen avaruuden isometrioiden ryhmän eli konformikuvausten Möbius-ryhmän aliryhmän kanssa. Tämä aliryhmä on isomorfinen moniston perusryhmän kanssa. Monisto saadaan tällöin tekijäavaruutena tämän aliryhmän toiminnassa hyperbolisella avaruudella. Lause todistetaan osoittamalla, että jos monistoja vastaavat aliryhmät ovat kvasikonformikuvauksen konjugoimia, niin tämä kvasikonformikuvaus onkin konformikuvaus.

Tämän tutkielman lähdeaineistona on käytetty pääasiallisesti G. D. Mostow'n artikkelia *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*. Muut lähdeteokset on mainittu erikseen asianomaisessa kohdassa. Ensimmäisessä luvussa esitetään muun muassa Möbius-ryhmän ominaisuuksia ja osoitetaan, että hyperbolinen avaruus on jokaisen hyperbolisen moniston isometrinen peite. Toisessa luvussa todistetaan erityisesti kuoren eli yleistetyn annuluksen konformikapasiteetin jatkuvuus. Kolmannessa luvussa käsitellään kvasikonformikuvauksia. Neljännessä luvussa määritellään invariantti Haarin mitta Möbius-ryhmälle ja invariantti tekijämitta sen aliryhmän sivuluokkien avaruudelle. Näiden avulla todistetaan päälauseen todistuksessa käytettävä apulause. Viidennessä luvussa todistetaan päälause käyttäen muun muassa konformikapasiteetin jatkuvuutta, polaarihajotelmaa, kvasikonformikuvauksen jatkumista pallon reunalle ja sitä, että 1-kvasikonformikuvaus on konformikuvaus. Tässä tutkielmassa oletetaan esitietoina yleisen topologian, algebrallisen topologian ja mittateorian perusteet.

2. Esitietoja ja määritelmiä

Olkoon S hyperpallopinta $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2+(\xi_{n+1}-1/2)^2 = 1/2$ ja olkoon $\mathbb{R}^n$ taso $\xi_{n+1} = 0$ ja olkoon $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ piste joukossa S ja olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n, 0) =$

$\pi(\xi)$, missä π tarkoittaa stereograafista projektiota pohjoisnavalta p_∞ hypertasolle $\mathbb{R}^n$. Tällöin kolmioiden yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$\frac{\xi_i}{x_i} = \frac{1-\xi_{n+1}}{1}.$$

Käytetään pallon navat yhdistävän akselin ja pisteet p_∞ ja x yhdistävän janan väliselle kulmalle merkintää θ. Koska Thaleen lauseen perusteella $\mathrm{d}(p_\infty, \xi) = \cos(\theta)$ saadaan käyttäen Pythagoraan lausetta

$$\frac{1-\xi_{n+1}}{1} = \frac{\cos(\theta)}{(1+|x|^2)^{1/2}} = \frac{\frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}}{(1+|x|^2)^{1/2}} = \frac{1}{1+|x|^2}.$$

Täten π kuvaa seuraavasti

$$x_i = \frac{\xi_i}{1-\xi_{n+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ja π^{-1}

$$\xi_i = \frac{x_i}{1+|x|^2}, \qquad \xi_{n+1} = \frac{|x|^2}{1+|x|^2}.$$

Stereograafinen projektio yksikköpallolta $S^n = \{\sum_{i=1}^{n+1} \eta_i^2 = 1\}$ tasolle $\xi_{n+1} = 0$ saadaan samalla kaavalla:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \eta_i/2, \\ \xi_{n+1} &= \frac{\eta_{n+1}+1}{2}, \\ x_i = \frac{\xi_i}{1-\xi_{n+1}} = \frac{\eta_i/2}{1-\frac{\eta_{n+1}+1}{2}} &= \frac{\eta_i}{1-\eta_{n+1}}. \end{aligned}$$

Mutta kuvaukselle π^{-1} pätee:

$$\begin{aligned} \eta_i = 2\xi_i &= \frac{2x_i}{1+|x|^2} \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \eta_{n+1} = 2\eta_{n+1} - 1 &= \frac{2|x|^2}{1+|x|^2} - 1 = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}. \end{aligned}$$

Monistojen välistä kuvausta sanotaan *konformaaliseksi*, jos sen differentiaali saadaan ortogonaalisen ryhmän alkiosta vakiolla kertomalla.

LAUSE 2.1. *Stereograafinen projektio on konformaalinen.*

TODISTUS. Olkoon L ja L' pisteen $x \in F$ kautta kulkevia suoria, missä F on vektorin p_∞ ortogonaalikomplementti. Olkoon N ja N' pisteen p_∞ ja suoran L tai L' määräämät tasot, vastaavasti. Tasot N ja N' leikkaavat yksikköpallon ympyröissä C ja C', jotka sisältävät pisteet p_∞ ja $\pi^{-1}(x)$. Koska suorien L ja L' suuntavektorin komponentti $n+1$ on nolla, ovat C ja C' kohtisuorassa pisteiden x ja p_∞ välisen suoran suhteen molemmissa pisteissä. Täten ympyröiden C ja C' välinen kulma on sama pisteissä p_∞ ja $\pi^{-1}(x)$. Toisaalta ympyröiden välinen kulma pisteessä p_∞ on sama kuin suorien L ja L' välinen kulma, sillä pisteen p_∞ tangenttitaso on yhdensuuntainen tason F kanssa. Täten suorien L ja L' välinen kulma on sama kuin ympyröiden C ja C' välinen kulma. $\square$

Avaruutta $\mathbb{R}^n$, johon on lisätty piste ∞ kutsutaa *Möbius-n-avaruudeksi.*

MÄÄRITELMÄ 2.2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Möbius-ryhmä, jolle käytetään merkintää $GM(n)$, on avaruuden $\mathbb{R}^n$ peilausten $(n-1)$-ulotteisten pallokuorien ja tasojen suhteen virittämä ryhmä.

Yhdistämällä peilaus $\sigma_\lambda\colon p \mapsto \frac{\lambda^2 p}{|p|^2}$ kuvaukseen σ_1 saadaan

$$p \mapsto \frac{\lambda^2 p}{|p|^2} \mapsto \frac{\lambda^2 p}{|p|^2}\left|\frac{\lambda^2 p}{|p|^2}\right|^{-2} = \lambda^{-2}p$$

Täten venytykset kuuluvat Möbius-ryhmään.

Olkoon P_1 ja P_2 rinnakkaisia tasoja etäisyydellä d toisistaan. Olkoon x piste etäisyydellä d' tasosta P_1 eri puolella tasoa P_1 kuin P_2. Olkoon lisäksi e tasolta P_1 pisteestä x_0 pisteen x suuntaan lähtevä normaalivektori. Peilaus tason P_1 suhteen kuvaa pisteen x pisteeksi $x_0 - d'e$. Tämän pisteen etäisyys tasosta P_2 on $|d-d'|$, joten peilaus tason P_2 suhteen kuvaa sen pisteeksi $x_0 - (2d-d')e$. Yhdistetty kuvaus siis siirsi pistettä x tasojen normaalin suuntaan, joten se on siirto. Koska d ja tasojen normaali voidaan valita vapaasti, kuuluvat siirrot Möbius-ryhmään.

Olkoon g peilaus $(n-1)$-pallokuoren S suhteen avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Joukko S voidaan siirroilla ja venytyksillä, joiden yhdiste on h, kuvata origokeskiseksi yksikköpalloksi. Täten $g = h^{-1}\sigma_1 h$. Koska $(n-1)$-taso voidaan peilauksella kuvata pallokuoreksi, niin σ_1 yhdessä siirtojen ja venytysten kanssa virittää Möbius ryhmän.

LAUSE 2.3. *Olkoon R peilaus hyperpallopinnan $S^{n-1}(p_0, r_0)$ suhteen ja olkoot $S = S^{n-1}(p_1, r_1)$ ja $\mathrm{d}(p_0, p_1) \neq r_1$. Tällöin $R(S)$ on hyperpallopinta $S^{n-1}(R(p_1), r_0^2 r_1/(\mathrm{d}(p_0,p_1)(\mathrm{d}(p_0,p_1)+r_1))$.*

TODISTUS. Olkoon $p \in S$ ja olkoon q pisteiden p_0 ja p välisen suoran toinen leikkauspiste joukon S kanssa. Olkoon p_1' pisteestä $R(p)$ lähtevä pisteiden q ja p_1 välisen suoran kanssa yhdensuuntaisen suoran leikkauspiste pisteiden p_0 ja p_1 välisen suoran kanssa. Olkoon α kulma pp_0p_1. Tällöin pisteiden p ja q sijainti pisteeseen p_0 nähden saadaan seuraavan yhtälön ratkaisuista:

$$\begin{aligned}(x\cos(\alpha) - \mathrm{d}(p_0,p_1)^2 + (x\sin(\alpha))^2 = r_1^2 x &= \mathrm{d}(p_0,p_1)\cos(\alpha)\\ &\pm \sqrt{\mathrm{d}(p_0,p_1)^2\cos^2(\alpha) + r_1^2 - \mathrm{d}(p_0,p_1)^2}.\end{aligned}$$

Täten $\mathrm{d}(p_0,p)\,\mathrm{d}(p_0,q) = |\mathrm{d}(p_0,p_1)^2 - r_1^2|$, vaikka p ja q sijaitsisivat eri puolilla pistettä p_0. Erityisesti tulo ei riipu kulmasta α eikä siten pisteestä p. Koska myös tulo $\mathrm{d}(p_0,p)\,\mathrm{d}(p_0,R(p))$ on vakio, on myös osamäärä $\mathrm{d}(p_0,R(p))/\,\mathrm{d}(p_0,q)$ vakio. Riippumatta siitä ovatko pisteet p ja q samalla puolella pistettä p_0, kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella osamäärät $\mathrm{d}(p_0,p_1)/\,\mathrm{d}(p_0,p_1')$, $\mathrm{d}(p_1,q)/\,\mathrm{d}(p_1',R(p))$ ja $\mathrm{d}(p_0,R(p))/\,\mathrm{d}(p_0,q)$ ovat yhtä suuret. Täten piste p_1' ei riipu pisteestä p ja pisteen $R(p)$ etäisyys pisteeseen p_1' on vakio.

Olkoon pisteet p^+ ja p^- pisteiden p_0 ja p_1 välisen suoran ja joukon S leikkauspisteet. Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}(R(p_1),R(p^+))}{\mathrm{d}(p_1,p^+)} = \frac{|r_0^2/\,\mathrm{d}(p_0,p_1) - r_0^2/\,\mathrm{d}(p_0,p^+)|}{\mathrm{d}(p_0,p^+) - \mathrm{d}(p_0,p_1)} = r_0^2/(\mathrm{d}(p_0,p_1)\,\mathrm{d}(p_0,p^+)).$$

Riippuen siitä ovatko pisteet p_1 ja p^- samalla vai eri puolella pistettä p_0 pisteelle p^- pätee joko samat yhtälöt tai sitten keskimmäisessä lausekkeessa on erotusten tilalla summa, mutta lopputulos on kuitenkin sama. Täten pätee $p_1' = R(p_1)$ ja väite on todistettu. □

Ryhmä $O(1, n+1)$ on neliömuodon $y_0^2 - y_1^2 -, \dots, -y_{n+1}^2$ ortogonaalinen ryhmä $(n+2) \times (n+2)$-matriiseja, eli jos $T \in O(1, n+1)$, niin $y_0^2 - y_1^2 -, \dots, -y_{n+1}^2 = T_0(y)^2 - T_1(y)^2 -, \dots, -T_{n+1}(y)^2$ kaikilla $y \in \mathbb{R}^{n+2}$.

Lause 2.4. *$GM(n)$ on isomorfinen ryhmän $O(1, n+1)/\pm I$ kanssa*

Todistus. Määritellään kuvaus $\Phi \colon O(1, n+1) \to GM(n)$ lausekkeella

$$\Phi(g) \colon y_{1,\dots,n+1} \mapsto g_{1,\dots,n+1}((1, y_{1,\dots,n+1}))/g_0((1, y_{1,\dots,n+1})),$$

missä siirrytään homogeenisiin koordinaatteihin ja $y_{1,\dots,n+1} \in S^{n+1}$. Osoitetaan ensin, että Φ on surjektio. Olkoon $h \in O(n+1)$ ja olkoon $h' \colon (y_0, y_{1,\dots,n+1}) \mapsto (y_0, h(y_{1,\dots,n+1}))$, jolloin $\Phi(h') = h$. Vastaavasti kuvauksen Φ kuvajoukko sisältää peilauksen $y_1 \mapsto -y_1$. Riittää siis osoittaa, että $\Phi(O(1, n+1))$ sisältää avaruuden $\mathbb{R}^n$ venytysten aliryhmän.

Määritellään lineaarikuvaus T seuraavasti:

$$\begin{aligned} e_0 + e_{n+1} &\mapsto \lambda(y_0 + y_{n+1}), \\ e_0 - e_{n+1} &\mapsto \lambda^{-1}(y_0 - y_{n+1}), \\ e_i &\mapsto e_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Seuraavassa käytetään kannanvaihtona 45 asteen kiertoa vastapäivään vektoreiden e_0 ja e_{n+1} virittämässä tasossa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda^{-1}/2 + \lambda/2 - (-\lambda^{-1}/2 + \lambda/2))y_0 + (-\lambda^{-1}/2 + \lambda/2 - (\lambda^{-1}/2 + \lambda/2))y_{n+1}$$
$$= \lambda^{-1}(y_0 - y_{n+1})$$

Täten $T_0(y) - T_{n+1}(y) = \lambda^{-1}(y_0 - y_{n+1})$.

Projisoimalla stereograafisella projektiolla ϕ pisteestä e_{n+1} tasolle $\eta_{n+1} = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} \phi_i(\Phi(T)(\eta)) &= \frac{\Phi(T)_i(\eta)}{1 - \Phi(T)_{n+1}(\eta)} = \frac{T_i(y)/T_0(y)}{T_0(y)/T_0(y) - T_{n+1}(y)/T_0 y} \\ &= \frac{T_i(y)}{T_0(y) - T_{n+1}(y)} = \lambda \frac{y_i}{y_0 - y_{n+1}} = \lambda \phi_i(\eta). \end{aligned}$$

Lopuksi osoitetaan, että $\Phi(T)$ on Möbius-kuvaus kaikilla $T \in O(1, n+1)$. Olkoon $T \in O(1, n+1)$. Olkoon p' piste pallolla S^n ja olkoot q_1' ja q_2' pisteet siten, että $\mathrm{d}(q_1', p') = \mathrm{d}(q_2', p')$ ja siten, että geodeesijanat pisteestä p pisteisiin q_1' ja q_2' ovat yhtä pitkät. Merkitään $q_i^{t'} = (1-t)p + tq_i'$, $p = (1, p')$ ja $q_i^t = (1, q_i^{t'})$. Koska T säilyttää neliömuodon, pätee

$$1 - \langle p', q_i^{t'} \rangle = \langle p, q_i^t \rangle_{(1,n+1)} = \langle T(p), T(q_i^t) \rangle = |T(p)||T(q_i^t)| - \langle T_{1,n+1}(p), T_{1,n+1}(q_i^t) \rangle.$$

Täten vektoreiden $T_{1,n+1}(p)$ ja $T_{1,n+1}(q_i^t)$ välisen kulman kosinille pätee:

$$\cos(\alpha_i^t) = \frac{|T(p)||T(q_i^t)| - 1 + \langle p', q_i^{t'} \rangle}{|T(p)||T(q_i^t)|}.$$

Käyttämällä L'Hopitalin sääntöä saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\alpha_i^t}{\arccos(\langle p', q_i^{t'} \rangle)} &= \frac{1 - \left(\frac{|T(p)||T(q_i^t)| - 1 + \langle p', q_i^{t'} \rangle}{|T(p)||T(q_i^t)|}\right)^2}{1 - (\langle p', q_i^{t'} \rangle)^2} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{|T(p)||T(q_i^t)| - z}{|T(p)||T(q_i^t)|}\right)^2}{1 - (1-z)^2} = \frac{-\frac{z^2}{(|T(p)||T(q_i^t)|)^2} + \frac{2z}{|T(p)||T(q_i^t)|}}{z^2 - 2z} \\
&= \frac{1}{|T(p)|^2}.
\end{aligned}$$

Koska tulos ei riipu indeksistä i, kuvauksen $\Phi(T)$ differentiaali kuvaa jokaisen yhtä pitkän vektoriparin yhtä pitkäksi vektoripariksi. Täten $\Phi(T)$ on konforminen ja siten Möbius-kuvaus. □

LAUSE 2.5. *Ryhmän $GM(n)$ aliryhmä G', joka kiinnittää pallonpuoliskon $\eta_{n+1} < 0$, on isomorfinen ryhmän $GM(n-1)$ kanssa, missä isomorfismi on rajoitushomomorfismi päiväntasaajalle.*

TODISTUS. Olkoon g ryhmän $O(1, n+1)$ alkio, joka kiinnittää puoliavaruuden $y_{n+1} < 0$. Tällöin $g_i(y_{n+1}) = 0$, kun $i = 1, \ldots, n$, sillä g kiinnittää hypertason $y_{n+1} = 0$ ja myös liömuodon. Tästä seuraa, että $g_0(y_{n+1}) = 0$, sillä g säilyttää neliömuodon. Täten $g(y_{n+1}) = y_{n+1}$, sillä g edelleen säilyttää neliömuodon. Täten g säilyttää myös neliömuodon $x_0y_0 - x_1y_1, \ldots, x_ny_n$, ja siten kuvauksen g rajoittuma voidaan ajatella olevan ryhmän $O(1, n)$ alkio. Olkoon Ψ_O kuvaus $g \mapsto g_{|\{y_{n+1}=0\}}$ ja Ψ_{GM} kuvaus $g \mapsto g_{|\{\eta_{n+1}=0\}}$. On helppo nähdä, että $\Psi_{GM} \circ \Phi_n(g) = \Psi_O \circ \Phi_{n-1}(g)$, joten väite on todistettu. □

LAUSE 2.6. *G' säilyttää positiivisesti definiitin differentiaalimuodon $\mathrm{d}\, y_0^2 - \mathrm{d}\, y_1^2 - \cdots - \mathrm{d}\, y_{n+1}^2$, missä G' on kuten edellisessä lauseessa. Kuvaamalla stereograafisella projektiolla pohjoisnavalta pallonpuolisko kuvautuu yksikköpalloksi ja säilyväksi metriikaksi $\mathrm{d}\, s^2$ tulee $\frac{\mathrm{d}\, x_1, \ldots \mathrm{d}\, x_n}{(1-|x|^2)^2}$.*

Määritellään joukko A seuraavasti

$$\begin{aligned}
A = \{(y_1, \ldots, y_{n+1}\} \colon y_0^2 - y_1^2 - \ldots, y_{n+1}^2 &= 0, \\
y_{n+1} &= -1, \\
y_0 &> 0\},
\end{aligned}$$

jolloin kuvauksessa $y_i \mapsto y_i/y_0$ joukon A kuva on eteläinen pallonpuolisko. Koska $y_i = \eta_i y_0$ ja $y_0^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$, saadaan

$$y_0^2(1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2) = 1,$$

josta edelleen

$$y_0 = (1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2)^{-1/2}.$$

Siten

$$\mathrm{d}\, y_0 = \frac{\sum_i \eta_i \,\mathrm{d}\, \eta_i}{(1 - \sum_i \eta_i^2)^{3/2}}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, y_i = y_0 \,\mathrm{d}\, \eta_i + \eta_i \,\mathrm{d} &= \frac{\mathrm{d}\, \eta_i}{(1 - \sum_j n_j^2)^{1/2}} + \frac{\eta_i \sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j}{(1 - \sum_j \eta_j^2)^{3/2}} \\
&= (1 - \sum_j \eta_j^2)^{-3/2}(\eta_i \sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j + (1 - \sum_j \eta_j^2)\,\mathrm{d}\, \eta_i).
\end{aligned}$$

Niinpä

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, y_0^2 - \sum_i \mathrm{d}\, y_i^2 &= (1 - \sum_j \eta_j^2)^{-3}[(\sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j)^2 - \sum_i(\eta_i \sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j + (1 - \sum_j \eta_j^2)\,\mathrm{d}\, \eta_i)^2] \\
&= (1 - \sum_j \eta_j^2)^{-3}[(\sum_j \eta_j^2)^{-3}[(\sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j)^2 - (\sum_i \eta_i^2)(\sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_J)^2 \\
&\quad - (1 - \sum_j \eta_j^2)^2(\sum_i \eta_i^2) - 2(\sum_i \eta_i \,\mathrm{d}\, \eta_i)(\sum_j \eta_j \,\mathrm{d}\, \eta_j) + 2(\sum_i \eta_i^2)(\sum_i \eta_i \,\mathrm{d}\, \eta_i)^2 \\
&= (1 - \sum_j \eta_j^2)^{-3}[(\sum_i \eta_i \,\mathrm{d}\, \eta_i)^2(-1 + \sum_j \eta_j^2) - \sum_j \mathrm{d}\, \eta_J(1 - \sum_j \eta_j^2)^2] \\
&= -(1 - \sum_j \eta_j^2)^{-1}[(1 - \sum_j \eta_j \eta_j^2)^{-1}(\sum_i \eta_i \,\mathrm{d}\, \eta_i)^2 + \sum_i \mathrm{d}\, \eta_i^2].
\end{aligned}$$

Viimeisissä hakasuluissa oleva lauseke on $\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{d}\, \eta_i^2$ yksikköpallolla, sillä $\eta_{n+1} = (1 - \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i^2)^{1/2}$. Täten invariantista neliömuodosta tulee $-\eta_{n+1}^{-2}(\mathrm{d}\, \eta_1^2, \ldots, \mathrm{d}\, \eta_{n+1}^2)$. Käyttämällä stereograafista projektiota saadaan

$$\begin{aligned}
\eta_i &= \frac{2x_i}{1 + |x|^2} \quad \text{kaikille } i = 1, \ldots, n, \\
\eta_{n+1} &= \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Täten

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{d}\,\eta_i^2 = 4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1+|x|^2)\,\mathrm{d}\,x_i - 2x_i\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j}{(1+|x|^2)^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{(1+|x|^2)2\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j - (|x|^2-1)2\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j}{(1+|x|^2)^2}\right)^2$$
$$= 4(1+|x|^2)^{-4}(\sum_{i=1}^{n}[(1+|x|^2)^2\,\mathrm{d}\,x_i^2 - 4(1+|x|^2)(\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j)x_i\,\mathrm{d}\,x_i + 4(\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j)^2x_i^2])$$
$$+ 16(1+|x|^2)^{-4}(\sum_j x_j\,\mathrm{d}\,x_j)^2$$
$$= 4(1+|x|^2)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\,x_i^2,$$

ja siten $\eta_{n+1}^{-2}(\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{d}\,\eta_i^2) = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\,x_i$. Tämä todistaa väitteen.

Lause 2.7. *Ryhmä $GM(n)$ on separoituva.*

Todistus. Tarkastellaan hyperbolisen avaruuden pallomallia. Jos $g \in GM(n)$, niin pätee $g = Rh$, missä $h \in O(n)$ ja R on peilaus yksikköhyperpallopinnan kanssa ortogonaalisen hyperpallopinnan suhteen. Voidaan valita yksikköpallon numeroituvaa, tiheää osajoukkoa vastaavat peilaukset R. Tästä saadaan väite, sillä $O(n)$ on kompaktina separoituva. □

Lause 2.8. *Separoituvalla metrisellä avaruudella on numeroituva topologian kanta.*

Todistus. Olkoon S numeroituva tiheä joukko, jolloin määritellään

$$\mathcal{B} = \{B(x, 1/n) \colon x \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

Olkoon nyt U avoin joukko ja $y \in U$, jolloin $B(y, 1/k) \subset U$ jollain $k \in \mathbb{N}$. On olemassa $x \in B(y, 1/2k) \cap S$, joten myös $y \in B(x, 1/2k) \in \mathcal{B}$. Tämä todistaa väitteen, sillä $B(x, 1/2k) \subset B(y, 1/k) \subset U$. □

Lause 2.9. *Käytetään pohjois- ja etelänavoille merkintöjä p_p ja p_e ja Lebesguen mitalle merkintää μ. Jos γ on Möbius-kuvaus, niin asetetaan*

$$S_\gamma = \lim_{r\to 0}\frac{\mu(\gamma(B(p_e, r)))}{\mu(B(p_e, r))}\frac{\mu(\gamma(B(p_p, r)))}{\mu(B(p_p, r))},$$

missä μ on Lebesguen mitta. Tällöin pätee $\sup_{\gamma\in GM(n)} S_\gamma < \infty$.

Todistus. Olkoon γ Möbius-kuvaus. Tällöin $R \circ \gamma(0) = 0$, missä R on peilaus sopivan joukon S^{n-1} kanssa ortogonaalisen hyperpallopinnan suhteen. Hyperbolisesta metriikasta seuraa, että $R \circ \gamma \in O(n)$. Koska ryhmän $O(n)$ alkiot säilyttävät pallomitan, riittää todistaa väite kuvaukselle R.

Oletetaan, että on olemassa jono joukon S^{n-1} kanssa ortogonaalisia hyperpallopintoja S_j, joiden suhteen peilauksille käytetään merkintöjä R_j, säteillä r_j^0 ja säteitä

r_j^1 siten, että $\lim_{j\to\infty} r_j^{1'} r_j^{1''}/(r_j^1)^2 = \infty$, missä $r_j^{1'}$ ja $r_j^{1''}$ ovat pohjois- ja etelänapakeskisten hyperpallopintojen kuvien kuvauksessa R_j säteet. Tällöin pätee lauseen 2.3 perusteella

$$\frac{r_j^{1'} r_j^{1''}}{(r_j^1)^2} < \min\left(\frac{(r_j^0)^4}{(1-r_j^1)(\sqrt{1+(r_j^0)^2}-1)^2}, \frac{(r_j^0)^4}{2(\sqrt{1+(r_j^0)^2}-1)^4}\right),$$

sillä hyperpallopinnan S_j keskipiste on etäisyydellä $\sqrt{1+r^2}$ origosta ja etäisyys keskipisteestä toiseen napakeskiseen hyperpallopintaan on vähintään $(1-r_j^1)$. Tämä on ristiriita, sillä minimin ensimmäinen argumentti on rajoitettu, kun $r_0 < 1$ ja toinen, kun $r_0 > 1$. $\square$

Seuraavissa on käytetty lähteitä [**6**] ja [**4**].

Jos M on metrinen avaruus, niin määritellään kahden polun $\gamma_i\colon [0,1] \to M$ välinen etäisyys $\mathrm{D}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t\in[0,1]}|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$.

Määritelmä 2.10. Olkoon M metrinen avaruus ja $x \in M$. Jos jokaiselle $y \in M$ on olemassa polku γ_y pisteestä x pisteeseen y siten, että jokaiselle $z_1 \in M$ ja $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\mathrm{D}(\gamma_{z_1}, \gamma_{z_2}) < \epsilon$ kun $\mathrm{d}(z_1, z_2) < \delta$, missä $z_2 \in M$, niin sanotaan, että M on *kartiomainen*.

Määritelmä 2.11. Olkoon M metrinen avaruus ja γ polku avaruudessa M. Jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että jokainen polku γ', jolle pätee $\mathrm{D}(\gamma, \gamma') < \epsilon$, on homotooppinen polun γ kanssa päätepisteet paikallaan pitäen, niin sanotaan, että polku γ on *hyvä*.

Määritelmä 2.12. Olkoon M metrinen avaruus. Jos jokaisella $x \in M$ on olemassa ympäristö, joka on yhdesti yhtenäinen sekä kartiomainen, ja lisäksi, jos jokainen polku avaruudessa M on hyvä sanotaan, että M on *hyvä*.

Määritellään avaruus $\tilde{X}$: Valitaan peruspiste $x \in X$ ja asetetaan avaruuden $\tilde{X}$ alkioiksi $(y, [f])$, missä $y \in X$ ja $[f]$ on pisteiden x ja y välisen polun f homotopialuokka päätepisteet paikallaan pitäen. Asetetaan

$$\mathrm{D}([f_1], [f_2]) = \inf_{f_1'\in[f_1], f_2'\in[f_2]} \mathrm{D}(f_1', f_2').$$

Lopuksi asetetaan

$$\tilde{d}((y_1, [f_1]), (y_2, [f_2])) = \mathrm{d}(y_1, y_2) + \mathrm{D}([f_1], [f_2]).$$

Kuvaus $\tilde{d}$ on selvästi symmetrinen ja toteuttaa kolmioepäyhtälön. Jos X on hyvä, niin siitä, että $\tilde{d}((y_1, [f_1]), (y_2, [f_2])) = 0$ seuraa, että $[f_1] = [f_2]$, sillä f_1 on hyvä. Selvästi myös $y_1 = y_2$, joten $\tilde{d}$ on metriikka.

On olemassa kuvaus $E\colon \tilde{X} \to X$ määriteltynä $E((y, [f])) = y$.

Lause 2.13. *Jos X on hyvä metrinen avaruus, niin E on peitekuvaus.*

Todistus. Olkoon $y \in X$ piste ja olkoon U ϵ-säteinen pallo, joka on yhdesti yhtenäinen sekä kartiomainen, ja jonka keskipiste on y. Olkoon H pisteet x ja y yhdistävien polkujen homotopialuokkien joukko. Ensin luodaan homeomorfismi Ψ joukolta $E^{-1}(U)$ joukkoon $U \times H$. Mille tahansa $x \in U$ olkoon $\gamma(y, z)$ pisteestä y

pisteeseen z kulkeva polku, joka on kartiomaisen metrisen avaruuden määritelmän mukainen. Olkoon $\gamma(z,y)$ sen käänteispolku. Määritellään

$$\Psi((z,[f])) = (z,[f * \gamma(z,y)]),$$

missä merkintä $*$ tarkoittaa konkatenaatiota eli siis $f * \gamma(z,y)$ on polku, joka saadaan siten, että ensin kuljetaan polku f ja sitten polku $\gamma(z,y)$. Tämä kuvaus on hyvin määritelty, sillä polkujen f_1 ja f_2 välinen homotopia laajenee polkujen $f_1 * \gamma$ ja $f_2 * \gamma$ väliseksi.

Lemma 2.14. *Kuvaus Ψ on bijektio.*

Todistus. Oletetaan, että $\Psi(z_1,[f_1]) = \Psi(z_2,[f_2])$. Tällöin $z_1 = z_2 \colon = z$. Tiedetään, että $[f_1 * \gamma(z,y)] = [f_2 * \gamma(z,y)]$, joten

$$[f_1] = [f_1 * \gamma(z,y) * \gamma(y,z)] = [f_2 * \gamma(z,y) * \gamma(y,z)] = [f_2].$$

Täten Ψ on injektio. Jos $(z,[g]) \in U \times H$, niin polku $f = g * \gamma(y,z)$ yhdistää pisteen x pisteeseen z. Polut g ja $f * \gamma(z,y)$ ovat homotooppisia, joten $\Psi((z,[f])] = (z,[g])$ ja Ψ on surjektio. $\square$

Joukkoon $U \times H$ laitetaan metriikka asettamalla etäisyydeksi 1, jos pisteiden toinen komponentti eli homotopialuokka eroaa. Muutoin etäisyytenä on ensimmäisten komponenttien välinen etäisyys käyttäen metriikkaa avaruudessa U.

Lemma 2.15. *Kuvaus Ψ on homeomorfismi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että Ψ on jatkuva. Jos $(z_1,[f_1])$ ja $(z_2,[f_2])$ ovat hyvin lähellä toisiaa, niin koska $\gamma(z_2,y)$ on valittu kartiomaisuuden määritelmän mukaiseksi, on polku $f_2 * \gamma(z_2,y)$ lähellä polkua $\gamma(z_1,y)$. Koska X on hyvä ja koska niiden päätepisteet ovat samat, ovat ne homotooppiset. Täten pisteiden $\Psi((z_1,[f_1]))$ ja $\Psi(z_2,[f_2])$ ensimmäiset komponentit ovat hyvin lähellä toisiaan ja toiset ovat samat. Täten Ψ on jatkuva. Sitten ä osoittaa, että Ψ^{-1} on jatkuva. Käyttäen edellisen lemman merkintöjä

$$\Psi^{-1}((x,[g])) = (z,[f]),$$

missä $f = g * \gamma(y,z)$. Jos $(z_1,[g_1])$ ja $(z_2,[g_2])$ ovat lähempänä kuin 1 toisiaan, niin $[g_1] = [g_2]$. Tällöin voidaan ottaa molemmille luokille sama edustaja g, mutta silloin $f_1 = g * \gamma(y,z_1)$ ja $f_2 = g * \gamma(y,z_2)$ ovat lähellä toisiaan polun γ valinnan nojalla. Täten Ψ^{-1} on jatkuva. $\square$

Kuvaus $\Psi \colon E^{-1}(U) \to U \times H$ on siis homeomorfismi. Olkoon $\pi \colon U \times H \to U$ projektiokuvaus, jolloin sen rajoittuma jokaiseen avaruuden $U \times H$ komponenttiin $U \times h$ on homeomorfismi. Selvästi $E = \pi \circ \Psi$. Jokainen avaruuden E^{-1} komponentti $\tilde{U}$ kuvautuu kuvauksessa Ψ joukoksi $U \times h$ jollekin $h \in H$. Täten kuvauksen E rajoittuma joukkoon $\tilde{U}$ on kahden homeomorfismin yhdisteenä homeomorfismi. Siten E on peitekuvaus. $\square$

Kun avaruuden $\tilde{X}$ metriikka puolitetaan, niin kuvaus E on paikallinen isometria, jos avaruuden X polut ovat hyviä.

Lause 2.16. *Jos X on täydellinen, niin myös $\tilde{X}$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(\tilde{x}_j)$ Cauchy-jono avaruudessa $\tilde{X}$. Konstruktion perusteella myös $E((\tilde{x})_j)$ on Cauchy-jono, joka suppenee johonkin pisteeseen x, sillä X on täydellinen. Olkoon U pisteen x ympäristö siten, että $E^{-1}(U)$ koostuu erillisistä joukoista, jotka ovat homeomorfisia joukon U kanssa. Koska $\tilde{x}_j$ on Cauchy, kuuluvat sen alkiot jostain indeksistä lähtien yhteen joukon E^{-1} komponenttiin $\tilde{U}$. Täten jono $\tilde{x}_j$ suppenee pisteeseen $\tilde{U} \cap E^{-1}(x)$. Täten $\tilde{X}$ on täydellinen. □

Lause 2.17. *Jos X on hyvä, on metrinen avaruus $\tilde{X}$ yhdesti yhtenäinen.*

Todistus. Valitaan peruspisteeksi $\tilde{x} \in \tilde{X}$ pari $(x, *)$, missä $*$ on triviaali silmukka. Oletetaan, että $f\colon [0,1] \to \tilde{X}$ on silmukka. Tällöin $f(t) = (x_t, [\gamma_t])$, missä $x_t \in X$ ja γ_t on polku, joka yhdistää pisteen x pisteeseen x_t. Asetetaan $\beta(t) = x_t$. Määritellään $\beta_t\colon [0,1] \to X$ kaavalla

$$\beta_t(s) = \beta(st).$$

Siten sekä β_t että γ_t liittävät pisteen x pisteeseen x_t.

Lemma 2.18. *Pätee $[\beta_t] = [\gamma_t]$ kaikille $t \in [0,1]$.*

Todistus. Olkoon J niiden pisteiden t joukko, joille pätee $[\beta_t] = [\gamma_t]$. Piste $0 \in J$, sillä tällöin molemmat polut ovat triviaaleja. Osoitetaan, että $J = [0,1]$ osoittamalla se sekä avoimeksi että suljetuksi.

J on suljettu. Oletetaan, että $[\beta_t] = [\gamma_t]$ pisteeseen s suppenevalle jonolle arvoja t. Koska polut β ja f ovat jatkuvia ja koska polun β jatkuvuudesta seuraa, että $\lim_{s\to t} \mathrm{d}(\beta_t, \beta_s) = 0$, niin pätee

$$(x_s, [\gamma_s]) = \lim_{t\to s}(x_t, [\gamma_t]) = \lim_{t\to s}(x_t, [\beta_t]) = (x_S, [\beta_s]).$$

Täten $[\beta_s] = [\gamma_s]$.

J on avoin. Oletetaan, että $[\beta_t] = [\gamma_t]$. Olkoon β_{ts} polun β rajoittuma joukkoon $[t, s]$. Koska γ_s on hyvä, niin voidaan valita $[\gamma_t * \beta_{ts}]$ luokan $[\gamma_t]$ edustajaksi, kun s on lähellä pistettä t. Nyt saadaan

$$[\gamma_t] = [\gamma_t * \beta_{ts}] = [\beta_t * \beta_{st}] = [\beta_S]. \tag{1}$$

□

Täten siis $f(t) = (\beta(t), [\beta_t])$. Koska f on silmukka, on $f(1)$ avaruuden $\tilde{X}$ peruspiste. Siten $\beta_1 = \beta$ on triviaali polku avaruuden X perusryhmässä. On siis olemassa homotopia $B\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ siten, että $B(t,0) = \beta(t)$ ja $B(t,1) = x$. Määritellään funktio $F\colon [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ asettamalla $F(t,s) = (B(t,s), [B_{|[0,t]\times\{s\}}])$. Kuvaus F on jatkuva metriikan $\tilde{d}$ toisen termin suhteen, sillä jos $(t', s') \to (t, s)$, niin käyttämällä kompaktiutta peitteeseen $\{F^{-1}(B(B(t'', s)), \epsilon))\colon t'' \in [0,t]\}$ saadaan polkujen $B_{|[0,t']\times\{s'\}}$ suppeneminen polkuun $B_{|[0,t]\times\{s\}}$. Koska F on myös selvästi jatkuva tämän metriikan ensimmäisen termin suhteen, ja koska $F(t,0) = (\beta(t), [\beta_t])$ ja $F(t,1) = (x, *)$, on se homotopia polun f ja triviaalin polun välillä. Täten lause on todistettu.

□

Lause 2.19. *Hyperbolisen avaruuden pallojen B_1 ja B_2 välinen isometria γ laajenee koko avaruuden isometriaksi.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että pallot ovat origokeskisiä pallomallissa. Olkoon γ' koko avaruuden isometria, jolla on sama differentiaali origossa kuin kuvauksella γ. Kuvaus γ' kuvaa origosta lähtevät geodeesit samoiksi geodeeseiksi kuin γ, joten $\gamma'_{|B_1} = \gamma$. Yleinen tulos seuraa siitä, että mikä tahansa pallo voidaan isometrialla kuvata origokeskiseksi. □

Lause 2.20. *Olkoon M ja N Riemannin monistoja. Jos M on täydellinen ja $f\colon M \to N$ on paikallinen isometria, niin f on isometrinen peitekuvaus.*

Todistus. Olkoon $x \in N$ ja $r > 0$ siten, että pisteen x tangenttiavaruuden eksponenttikuvaus pallolta $B(0,r)$ on diffeomorfismi kuvalleen. Koska f on paikallinen isometria, niin $f(\exp_{\tilde{x}}(v)) = \exp_x(v)$ kaikilla $v \in B(0,r)$ kun $f(\tilde{x}) = x$. Nimittäin f on jatkuva, joten kaksi pisteestä x lähtevää geodeesia leikkaavat vain jos niiden kuvatkin leikkaavat. Täten f on kahden diffeomorfismin yhdisteenä diffeomorfismi ja siten isometria. Toisaalta jos $y \in M$, niin pisteen $f(y)$ pisteeseen x yhdistävä geodeesi nousee geodeesiksi, joka liittää pisteen y joksikin pisteeksi joukosta $f^{-1}(\tilde{x})$. Täten joukon $f^{-1}(B(\tilde{x},r))$ eri komponentit eivät leikkaa. Siispä f on peitekuvaus. □

Lause 2.21. *Olkoon E polkuyhtenäinen ja B yhdesti yhtenäinen topologinen avaruus. Jos $f\colon E \to B$ on peitekuvaus, niin f on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon $a, b \in E$ siten, että $f(a) = f(b)$. Olkoon γ pisteet a ja b yhdistävä polku. Tällöin $\gamma' = f(\gamma)$ on silmukka avaruudessa B. Olkoon F polun γ' pisteeksi x päätepisteet paikallaan pitäen kutistava homotopia. Kuvaus F voidaan nostaa polun γ joukkoon $f^{-1}(x)$ kutistavaksi, päätepisteet paikallaan pitäväksi homotopiaksi. Nimittäin jokaisella pisteellä avaruudessa B on ympäristö U siten, että sen alkukuva kuvauksessa f koostuu sen kanssa homeomorfisista, erillisistä komponenteista. Koska kuvauksen F kuvajoukko on kompakti, voidaan F nostaa avaruuteen E yksi joukko U kerrallaan valitsemalla nostot yhteneviksi, kun joukot U leikkaavat. Koska $f^{-1}(x)$ on diskreetti, kutistuu γ yhdeksi pisteeksi. Koska homotopia piti päätepisteet paikallaan, pätee $a = b$. □

Lause 2.22. *Täydellinen, yhdesti yhtenäinen hyperbolinen n-monisto M on isometrinen avaruuden $\mathbb{H}^n$ kanssa.*

Todistus. Valitaan piste $x \in M$. Olkoon $y \in M$ ja olkoon α pisteet x ja y yhdistävä geodeesi. Kompaktiuden nojalla välillä $[0,1]$ on jako $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < 1 = t_k$ siten, että jokaiselle $i \in 0, \ldots, k-1$ on isometria $D\colon U_i \to V_i$, missä U_i on avaruuden M avoin joukko, joka sisältää joukon $\alpha[t_i, t_{i+1}]$, ja $V_i \subset \mathbb{H}^n$. Olkoon C joukon $U_{i-1} \cap U_i$ komponentti. Tällöin $D_{i-1} \circ D_i^{-1}\colon D_i(C) \to D_{i-1}(C)$ on avaruuden $\mathbb{H}^n$ alueiden välinen isometria ja siten laajenee koko avaruuden isometriaksi D'_i. Korvataan joukko V_i joukolla $D'_i(V_i)$ ja kuvaus D_i kuvauksella $D'_i \circ D_i$. Polusta α tulee polku $\alpha'\colon [0,1] \to \mathbb{H}^n$. Määritellään $D(y) = \alpha'(1)$. Osoitetaan sitten, että kuvaus D on hyvin määritelty. Olkoon β toinen pisteet x ja y yhdistävä polku. Koska M on yhdesti yhtenäinen, on olemassa homotopia polkujen α ja β välillä. Kompaktiudesta seuraa, että Lebesguen peitelauseen perusteella voidaan jakaa joukko $[0,1] \times [0,1]$ samansuuruisiin neliöihin siten, että jokainen neliön kuva kuuluu vähintään yhteen avaruuden $\mathbb{H}^n$ pallon kanssa isometriseen palloon. Neliön ylärivin isometrioita voidaan muokata kuten aiemmin ja sitten voidaan jatkaa muille riveille, jolloin ne saadaan yhdistettyä yhdeksi isometriaksi. Homotopia saadaan siten siirrettyä polkujen α' ja β' välille. Jos

y' on lähellä pistettä y, niin polku α' voidaan konstruoida käyttäen samoja isometrioita molemmille pisteille. Siten D on paikallinen isometria. Koska M on täydellinen, on D isometrinen peitekuvaus. Siten se on isometria. □

LAUSE 2.23. *Täydellinen hyperbolinen monisto X on hyvä metrinen avaruus.*

TODISTUS. Jokaisella pisteellä on selvästi ympäristö, joka on yhdesti yhtenäinen ja kartiomainen. Olkoon f_0 polku avaruudessa X. Jokaisella polun f_0 pisteellä on ympäristö, joka on isometrinen hyperbolisen avaruuden pallon kanssa. Kompaktiudesta seuraa, että sama vakio, jolle käytetään merkintää 2ϵ, kelpaa tällaisen ympäristön säteeksi kaikille polun pisteille. Olkoon f_1 polku avaruudessa X siten, että $D(f_0, f_1) < \epsilon$. Jokaiselle $t \in [0, 1]$ on olemassa geodeesi γ_t, joka yhdistää pisteet $f_0(t)$ ja $f_1(t)$, sekä pysyy joukossa $B(f_0(t), \epsilon)$. Tarpeeksi lähellä pistettä t olevalle pisteelle s polku γ_s pysyy joukossa $B(f_0(t), 2\epsilon)$. Koska geodeesit hyperbolisessa avaruudessa riippuvat jatkuvasti päätepisteistään, riippuu γ_t jatkuvasti pisteestä t. Tällöin kuvaus $F(s, t) = \gamma_s(t)$ on homotopia polkujen f_0 ja f_1 välillä. □

LAUSE 2.24. *Jos M on täydellinen hyperbolinen monisto, niin on olemassa peitekuvaus $\mathbb{H}^n \to M$, joka on lokaali isometria.*

TODISTUS. Ensinnäkin M on hyvä metrinen avaruus, joten sillä on yhdesti yhtenäinen peite $\tilde{M}$, jonka peitekuvaus on lokaali isometria. Hyperbolisen moniston määritelmän perusteella $\tilde{M}$ on lokaalisti isometrinen hyperbolisen avaruuden kanssa. Koska M on täydellinen, on myös $\tilde{M}$ täydellinen. Siten $\tilde{M}$ on isometrinen hyperbolisen avaruuden kanssa. □

Olkoon $[\gamma]$ täydellisen hyperbolisen moniston perusryhmän alkio. Tällöin kuvaus $g_\gamma\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ määriteltynä $g_\gamma((x, [f])) = (x, [\gamma * f])$ on isometria, kun avaruus $\tilde{M}$ samaistetaan avaruuden $\mathbb{H}$ kanssa. Ensinnäkin g on hyvin määritelty, sillä jos $[f_1] = [f_2]$, niin selvästi $[\gamma * f_1] = [\gamma * f_2]$. Vastaavasti koska M on hyvä, on g_γ paikallinen isometria. Kuvaus $g_{\gamma^{-1}}$ on kuvauksen g_γ käänteiskuvaus. Koska paikallinen isometria säilyttää geodeesien pituudet, ja koska täydellisen Riemannin moniston pisteet voidaan yhdistää etäisyyden toteuttavalla geodeesillä, on g_γ isometria. Koska polkujen ketjuttaminen on perusryhmän laskutoimitus, perusryhmä voidaan identifioida hyperbolisen avaruuden isometrioiden ryhmän $GM(n)$ aliryhmän kanssa.

Seuraavan todistuksen lähteinä on käytetty [**1**] ja [**7**].

LAUSE 2.25. *Olkoon T kääntyvä n-ulotteinen lineaarikuvaus. Tällöin $T = O_1O_2DO_2^{-1}$, missä lineaarikuvaukset O_i ovat ortogonaalisia ja D on diagonaalinen.*

TODISTUS. Lineaarikuvaus T^TT on itseadjungoitu ja siten positiivisesti definiitti, sillä

$$0 \leq |Tx| = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle} = \sqrt{\langle x, T^TTx\rangle} = x^TT^TTx.$$

Todistetaan induktiolla ulottuvuuden n suhteen, että itseadjungoidulla lineaarikuvauksella on ortonormaali ominaisvektorikanta. Perustapaus on selvä. Määritellään siis neliömuoto

$$Q(v) = \langle Tv, v\rangle.$$

Tällöin pätee

$$\frac{1}{4}(Q(v+w)-Q(v-w)) = \langle Tv, w\rangle,$$

sillä T on itseadjungoitu ja sisätulo on symmetrinen. Määritellään

$$\lambda_1 = \max_{\{v\in V\colon |v|=1\}} Q(v).$$

Valitaan $v_1 \in S$ siten, että

$$Q(v_1) = \lambda_1.$$

Soveltamalla Lagrangen kertoimia funktiolle f määriteltynä $v \mapsto |v|^2$ saadaan

$$\nabla Q(v_1) = \lambda \nabla f(v_1)$$

jollekin λ. Koska

$$\nabla Q(v) = 2T(v) \text{ ja } \nabla f(v) = 2v,$$

joten $Tv_1 = \lambda v_1$. Täten

$$\lambda_1 = Q(v_2) = \langle Tv_1, v_1\rangle = \langle \lambda v_1, v_1\rangle = \lambda\langle v_1, v_1\rangle = \lambda.$$

Olkoon $W = v_i^{\perp}$ ja $w \in W$. Tällöin

$$\langle Tw, v_1\rangle = \langle w, Tv_1\rangle = \langle w\lambda_1, v_1\rangle = 0,$$

joten $TW = W$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa kuvauksen T ortonormaali ominaisvektorikanta B, joten $B \cup \{v_1\}$ käy induktioaskeleessa tarvittavasta ominaisvektorikannasta.

Täten kuvaukselle $T' = O_2 D O_2^{-1}$ saadaan neliöjuuri $P = \sqrt{T'}$ ottamalla neliöjuuret matriisin D alkioista.

Tällöin

$$|T'x|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle xT'x\rangle = \langle x, PPx\rangle = \langle Px, Px\rangle = |Px|^2.$$

Kuvaus TP^{-1} on ortogonaalinen, sillä kaikille $y = Px$ pätee

$$|TP^{-1}y| = |Tx| = |Px| = |y|.$$

Täten hajotelma saadaan, kun asetetaan $O_1 = TP^{-1}$. □

3. Konformikapasiteetti

Tämän luvun tarkoituksena on muun muassa osoittaa konformikapasiteetin jatkuvuus.

Määritelmä 3.1. *Kuori* Möbius-avaruudessa on yhtenäinen avoin joukko D, jonka komplementti koostuu kahdesta yhtenäisyykomponentista C_0 ja C_1. Joukkoja $\delta_0 = C_0 \cap \overline{D}$ ja $\delta_1 = C_1 \cap \overline{D}$ kutsutaan sen *reunakomponenteiksi.*

Kuorta, joka ei sisällä pistettä ∞ kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ kuoreksi, ja pisteen ∞ sisältävä komplementin komponentti on *rajoittamaton.* Jos $a, b > 0$, niin kuorta $\{x\colon a < |x| < b\}$ kutsutaan *pallokuoreksi* ja sille käytetään merkintää $D_{a,b}$.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Olkoon D kuori n-Möbius-avaruudessa ja olkoon Δ_0, Δ_1 sen reunakomponentit. Tällöin konformikapasiteetti $\mathscr{C}(D)$ määritellään

$$\inf_u \int_D |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, D, \tag{2}$$

missä u on joukossa $\overline{D}$ määritelty jatkuva, reaaliarvoinen, joukossa D luokkaa C^1 oleva, sekä joukossa Δ_0 vakioarvon 0 ja joukossa Δ_1 vakioarvon 1 saava funktio.

Konformikapasiteetin määritelmä ei riipu reunan komponenteille käytettävästä merkinnästä, sillä $|\nabla u| = |\nabla(1-u)|$.

LAUSE 3.3. *Olkoon D ja D' kuoria ja olkoon $f\colon D \to D'$ konformikuvaus. Tällöin $\mathscr{C}(D) = \mathscr{C}(D')$.*

TODISTUS. Olkoon u konformikapasiteetin määritelmän ehdot toteuttava funktio. Tällöin funktio u', joka toteuttaa yhtälön $u = u' \circ f$, toteuttaa myös nämä ehdot. Asettamalla $y = f(x)$ saadaan

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial u'}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

josta seuraa, että $\nabla u =^t \dot{f}(\nabla u')$, missä $\dot{f}$ on kuvauksen f differentiaali ja ${}^t\dot{f}$ on kuvauksen $\dot{f}$ transpoosi.

Mille tahansa kahdelle ortogonaaliselle yksikkövektorille X_i, X_j yhtälöstä $\langle X_i + X_j, X_i + X_i - X_j\rangle = \langle X_i, X_i\rangle - \langle X_j, X_j\rangle = 1 - 1 = 0$ saadaan

$$0 = \langle X_i + X_j, X_i + X_i - X_j\rangle = \langle \dot{f}_p(X_i + X_j), \dot{f}_p(X_i - X_j)\rangle = |\dot{f}_p(X_i)|^2 - |\dot{f}_p(X_j)|^2.$$

Täten siis $|\dot{f}_p(X_i)| = |\dot{f}_p(X_j)|$. Siten $\dot{f}_p$ kuvaa yksikköpallon palloksi, jonka säde on $\lambda(p) = |\dot{f}_p(X_i)|$, koska venytys kommutoi kaikkien matriisien kanssa. Siispä ${}^t\dot{f}_p\dot{f}_p = \lambda^2 \operatorname{Id}$. Täten

$$|\det \dot{f}_p|^2 = \det({}^t\dot{f}_p\dot{f}_p) = \lambda^{2n}(p)$$

ja

$$|\nabla u|^2 = \langle {}^t\dot{f}(\nabla u'), {}^t\dot{f}(\nabla u')\rangle = \langle \dot{f}\,{}^t\dot{f}(\nabla u'), \nabla u'\rangle.$$

Mutta $\dot{f}\,{}^t\dot{f} =^t \dot{f}^{-1}({}^t\dot{f}\dot{f})^t\dot{f} =^t \dot{f}^{-1}\lambda^{2t}\dot{f} = \lambda^2$. Täten $|\nabla u|^2(p) = \lambda^2(p)|\nabla u'|^2(f(p))$, eli

$$|\nabla u|^n = |\det \dot{f}|(|\nabla u'|^n \circ f).$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa saadaan

$$\int_{D'} |\nabla u'|^n \, \mathrm{d}\, D' = \int_D |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, D,$$

josta väite seuraa. $\square$

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon v jatkuva reaaliarvoinen funktio määriteltynä alueessa $D \subset \mathbb{R}^n$. Jos jokaisessa joukkoon D sisältyvässä suljetussa pallossa v on absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla janoilla, niin sanotaan, että v on ACL alueessa D.

Lemma 3.5. *Olkoon v jatkuva, ACL funktio avoimessa joukossa $R \subset \mathbb{R}^n$. Olkoon R' avoin joukko, jolla on kompakti, joukkoon R sisältyvä sulkeuma. Olkoon $U = B(0,\epsilon)$ ja oletetaan, että etäisyys joukosta R' joukon R komplementtiin on vähintään 2ϵ. Oletetaan, että $|\nabla v|$ on integroituva joukossa R. Asetetaan $w(x) = \frac{1}{m(U)}\int_U v(x+y)\,\mathrm{d}\,y$, jos $x + U \subset R$, missä m on Lebesguen mitta. Tällöin*

(1) *w on luokkaa C^1 joukossa R',*
(2) *$\lim_{\epsilon\to 0} w = v$ tasaisesti joukon R kompakteissa osajoukoissa,*
(3) *$\nabla w(x) = \frac{1}{m(U)}\int_U \nabla v(x+y)\,\mathrm{d}\,y$ melkein kaikille x,*
(4) *$\int_{R'}|\nabla w(x)|^p\,\mathrm{d}\,x \le \int_R |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}\,x \quad p \ge 1$.*

Todistus. Väitteet 1) ja 2) ovat tunnettuja tosiasioita jatkuvista funktioista. Väitteen 3) perusteella pätee
$|\nabla w(x)| \le \frac{1}{m(U)}\int_U |\nabla v(x+y)|\,\mathrm{d}\,y$. Täten

$$\left(\int_{R'}|\nabla w(x)|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p} \le \left(\int_{R'}\left(\frac{1}{m(U)}\int_U |\nabla v(x+y)|\,\mathrm{d}\,y\right)^p \mathrm{d}\,x\right)^{1/p}$$
$$\le \frac{1}{m(U)}\int_U \left(\int_{R'}|\nabla v(x+y)|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\mathrm{d}\,y,$$

Minkowskin integraaliepäyhtälön perusteella. Nyt pätee $\int_{R'}|\nabla v(x+y)|^p\,\mathrm{d}\,x \le \int_R |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}\,x$, sillä $R' + U \subset R$. Tästä saadaan

$$\left(\int_{R'}|\nabla w(x)|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p} \le \left(\int_R |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/p}\frac{1}{m(U)}\int_U \mathrm{d}\,y,$$

josta väite 4) seuraa. □

Määritelmä 3.6. Reaaliarvoista, joukossa $\overline{D}$ määriteltyä funktiota u kutsutaan *sallituksi*, jos se on jatkuva, ACL kuoressa D, ja saa arvon 0 joukossa $C_0 \cap \overline{D}$, arvon 1 joukossa $C_1 \cap \overline{D}$, ja jos lisäksi $|\nabla u|^n$ on integroituva kuoressa D. Funktiota u kutsutaan *sileästi sallituksi*, jos se lisäksi on luokkaa C^1 joukossa D ja sen gradientilla ∇u on kompakti kantaja, joka sisältyy joukkoon D.

Sileästi sallitut funktiot toteuttavat konformikapasiteetin määritelmässä funktioille annetut ehdot. Konformikapasiteetin määritelmässä annetut funktiot puolestaan ovat aina sallittuja.

Lemma 3.7. *Asetetaan*

$$\mathscr{C}^1(D) = \inf_u \int_D |\nabla u|^n\,\mathrm{d}\,D,$$

missä u on sallittu funktio ja asetetaan

$$\mathscr{C}^2(D) = \inf_u \int_D |\nabla u|^n\,\mathrm{d}\,D,$$

missä u on sileästi sallittu funktio. Tällöin

$$\mathscr{C}^1(D) = \mathscr{C}(D) = \mathscr{C}^2(D).$$

TODISTUS. Olkoon u sallittu funktio. Kiinnitetään $0 < a < 1/2$. Asetetaan

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } u(x) < a \\ \frac{u(x)-a}{1-2a} & \text{if } a \leq u(x) \leq 1-a \\ 1 & \text{if } 1-a < u(x) \leq 1 \end{cases}$$

ja jatketaan funktiota v siten, että se saa arvon 0 joukossa C_0 ja arvon 1 joukossa C_1. Koska $u(x) \to 1$, kun $x \to \infty$, niin funktiolla ∇v on kompakti kantaja K, joka on positiivisella etäisyydellä, jolle käytetään merkintää ϵ, kuoren D komplementista. Olkoon $U = \{y\colon |y| < \epsilon/2\}$. Asetetaan

$$w(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U v(x+y)\,\mathrm{d}\,y.$$

Tällöin $w = 0$ joukossa C_0 ja $w = 1$ joukossa C_1. Koska funktiolla ∇v on kompakti kantaja K, saadaan käyttäen Hölderin epäyhtälöä

$$\begin{aligned}\int_D |\nabla u|\,\mathrm{d}\,D = \int_K |\nabla v| \cdot 1\,\mathrm{d}\,D &\leq \left(\int_K |\nabla v|^n\,\mathrm{d}\,D\right)^{1/n} \left(\int_K 1\,\mathrm{d}\,D\right)^{(n-1)/n} \\ &\leq (1-2a)^{-1} \left(\int_D |\nabla u|^n\,\mathrm{d}\,D\right)^{1/n} m(K) \leq \infty.\end{aligned}$$

Täten $|\nabla v|$ on integroituva kuoressa D. Täten melkein kaikille x,

$$\nabla w(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U \nabla v(x+y)\,\mathrm{d}\,y.$$

Lemman 3.5 perusteella w on luokkaa C^1 joukossa $K + \overline{U}$, joka sisältää funktion ∇w kantajan. Täten w on sileästi sallittu funktio kuorella D. Täten

$$\mathscr{C}^2(D) \leq \int_D |\nabla w|^n\,\mathrm{d}\,x \leq \int_D |\nabla v|^n\,\mathrm{d}\,x. \tag{3}$$

Lemman 3.5 kohdan 4) perusteella ja toisaalta

$$\int_D |\nabla v|^n\,\mathrm{d}\,x \leq \int_D |\nabla u|^n (1-2a)^{-n}\,\mathrm{d}\,x.$$

Täten

$$\mathscr{C}(D) \leq \int_D |\nabla w|^n\,\mathrm{d}\,x \leq (1-2a)^{-n} \int_D |\nabla u|^n. \tag{4}$$

Väitteen toinen yhtälö seuraa epäyhtälöstä (3) ja epäyhtälöstä (4), kun $a \to 0$. Väitteen ensimmäinen yhtälö taas seuraa epäyhtälöstä (4), kun $a \to 0$. Näiden yhtäsuuruksien toiset epäyhtälöt ovat nimittäin triviaaleja lausetta edeltävän huomautuksen nojalla. □

Olkoon $Q \subset \mathbb{R}^n$, $p \in Q$ ja olkoon L pisteen p sisältävä suora. Käytetään suoran L Lebesguen mitalla merkintää μ. Jos $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mu(B(p,\epsilon) \cap L \cap Q)}{\mu(B(p,\epsilon) \cap L)} = 1$, niin sanotaan, että p on joukon Q *lineaarisen tiheyden piste* suoran L suuntaan.

LEMMA 3.8. *Melkein kaikki suljetun joukon $Q \subset \mathbb{R}^n$ pisteet ovat sen lineaarisen tiheyden pisteitä koordinaattiakselien suuntaan.*

Todistus. Olkoon D joukon Q ne pisteet, jotka eivät ole lineaarisen tiheyden pisteitä kiinnitetyn akselin x_k suuntaan. Fubinin lauseen nojalla riittää osoittaa, että D on mitallinen, sillä Lebesguen tiheyslauseen nojalla joukon D leikkaus x_k akselin suuntaisen suoran kanssa on aina nollamittainen. Tätä varten asetetaan jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^n$ ja jokaiselle $a, b \in \mathbb{R}$

$$E(x, a, b) = \{t \colon (x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) \in Q, a \leq t \leq b\},$$

missä vektorissa on k:s komponentti. Käytetään kokonaislukuja n ja k kohti merkintää $Q_{n,k}$ joukolle joukon Q pisteitä x, joille epäyhtälöistä $a < x_k < b$ ja $b - a \leq 1/k$ seuraa, että $\mu(E(x, a, b)) > (1 - n^{-1})(b - a)$. Selvästi $Q = \cap_n \cup_k Q_{n,k}$. Osoitetaan, että kaikki joukot $Q_{n,k}$ ovat suljettuja. Kiinnitetään siis kokonaisluvut n ja k ja olkoon (x_j) jono joukon $Q_{n,k}$ pisteitä, joka suppenee pisteeseen x. Olkoot a ja b sellaiset, että $a < x_k < b$ ja $b - a \leq 1/k$. Riittävän isoilla indekseillä j pätee $a < x_j < b$, joten $\mu(E(x, a, b)) > (1 - n^{-1})(b - a)$. Koska Q on suljettu, pätee $\limsup E(x_i, a, b) \subset E(x, a, b)$, joten koska sisäkkäisten joukkojen leikkauksen mitta on mittojen raja-arvo, pätee $\mu(E(x, a, b)) \geq (1 - n^{-1})(b - a)$, joten $x \in Q_{n,k}$. Täten Q on suljettujen joukkojen numeroituvan yhdisteen numeroituvana leikkauksena Borel-joukko. $\square$

Lemma 3.9. *Olkoon D kuori Möbius-avaruudessa ja olkoot C_0 ja C_1 sen komplementin komponentit. Olkoon lisäksi u sallittu funktio kuorella D. Jatketaan u Möbius-avaruuden funktioksi asettamalla sille vakioarvot 0 ja 1 joukoissa C_0 ja C_1. Tällöin u on jatkuva ja ACL kaikkialla avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja $|\nabla u| = 0$ melkein kaikkialla joukossa $C_0 \cup C_1$.*

Todistus. Selvästi u on jatkuva. Asetetaan $\operatorname{proj}(D) = \{(p_2, \ldots, p_n) \colon p \in D\}$ ja $X_q = \{(x_1, q) \colon x_1 \in \mathbb{R}\}$ kaikille $q \in \mathbb{R}^{n-1}$. Tällöin

$$\int_{\operatorname{proj}(D)} \left(\int_{X_q \cup D} |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, x_1 \right) \mathrm{d}\, q = \int_D |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, x < \infty.$$

Täten

(1) $\int_{X_q \cap D} |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, x_1 < \infty$ melkein kaikille $q \in \mathbb{R}^{n-1}$. Lisäksi koska u on ACL kuorella D,
(2) u on absoluuttisesti jatkuva jokaisella joukon X_q kompaktilla välillä melkein kaikille q.

Valitaan ehdot 1 ja 2 toteuttava $X_q = X$.

Tällöin mille tahansa välille $I = [p, s] \in X$ osoitetaan

$$|u(p) - u(s)| \leq \int_{I \cap D} |\nabla u| \, \mathrm{d}\, x_1. \tag{5}$$

Koska funktion u gradientti on nolla kuoren D sulkeuman ulkopuolella, voidaan olettaa, että $p, s \in \overline{D}$. Olkoon p' lähinnä pistettä p oleva joukon $(C_0 \cup C_1) \cap I$ piste ja olkoon s' lähinnä pistettä s oleva joukon $(C_0 \cup C_1) \cap I$ piste. Tällöin

$$|u(p) - u(s)| \leq |u(p) - u(p')| + |u(p') - u(s')| + |u(s') - u(s)|.$$

Koska välit $[p,p']$ ja $[s,s']$ sijaitsevat päätepistettä lukuunottamatta kuoressa D, pätee

$$|u(p)-u(p')| \le \int_{[p,p']} |\nabla u| \,\mathrm{d}\, x_1 \text{ ja } |u(s)-u(s')| \le \int_{[s,s']} |\nabla u| \,\mathrm{d}\, x_1.$$

Jos $u(p') = u(s')$, väite seuraa helposti. Jos taas $u(p') \neq u(s')$, niin väliltä $[p',s']$ löytyy lyhin suljetut, erilliset joukot $C_0 \cap [p',s']$ ja $C_1 \cap [p's']$ yhdistävä väli $[p'',s'']$. Välin $[p'',s'']$ sisus kuuluu kuoreen D, joten

$$\int_{[p'',s'']} |\nabla u| \,\mathrm{d}\, x_1 = 1 = |u(p') - u(s')|,$$

Tämä todistaa väitteen (5). Nyt jokaiselle erillisten välien $[p_k, s_k]$ yhdisteelle E pätee

$$\begin{aligned}\sum_k |u(p_k) - u(s_k)| &\le \int_{E\cap D} |\nabla u| \,\mathrm{d}\, x_1 \le \left(\int_E |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, x_1\right)^{(1/n)} \left(\int_E 1 \,\mathrm{d}\, x_1\right)^{(n-1)/n} \\ &\le \left(\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, x\right)^{1/n} \mu(E)^{(n-1)/n}.\end{aligned}$$

Täten u on absoluuttisesti jatkuva ja siten u on ACL kaikkialla avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

□

Asetetaan merkintä $\operatorname{osc}_A u = \sup_A u - \inf_A u$, missä u on joukossa A määritelty funktio.

LEMMA 3.10. *Olkoon D kuori avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja olkoot C_0 ja C_1 sen komplementin komponentit. Tällöin $\mathscr{C}(D) > 0$, jos sekä C_0 että C_1 koostuu useammasta kuin yhdestä pisteestä.*

TODISTUS. Valitaan piste 0 avaruudesta $\mathbb{R}^n$ siten, että 0-keskiset pallot, joiden säteet ovat r_1 ja r_2 $(0 < r_1 < r_2)$ leikkaavat sekä joukkoa C_0 että joukkoa C_1. Koska C_0 ja C_1 ovat yhtenäisiä, kohtaa pallo S_r sekä joukon C_0 että joukon C_1 kaikilla r, $r_1 \le r \le r_2$. Olkoon u mikä tahansa sileästi sallittu funktio joukossa D. Tällöin

$$\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, D = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, x \ge \int_{D_{r_1,r_2}} |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, x = \int_{r_1}^{r_2} \int_{S_r} |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, \sigma \,\mathrm{d}\, r,$$

missä $\mathrm{d}\,\sigma$ tarkoittaa $(n-1)$-mittaa joukossa S_r.

Gradientti ∇u on missä tahansa pallon S_r pisteessä vähintään yhtä suuri kuin gradientti pallon pintaa pitkin. Täten Lemman 3.11 perusteella

$$\int_{S_r} |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, \sigma \ge A^{-1} r^{-1} (\operatorname{osc}_{S_r} u)^n \ge A^{-1} r^{-1}$$

ja siten

$$\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, D \ge= A^{-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}\, r}{r} = A^{-1} \log(r_2/r_1)$$

kaikille sileästi sallituille funktioille u. Väite seuraa ottamalla infimum. □

3.1. Eräiden funktioiden heilahtelu. Tämä luku sisältää aputuloksia seuraavaa lukua varten.

LEMMA 3.11. *Olkoon S r-säteinen pallopinta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja olkoon u C^1-funktio avaruudessa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Tällöin*

$$(\operatorname{osc}_u)^n \leq Ar \int_S |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, S,$$

missä A on vain ulottuvuudesta n riippuva vakio ja gradientti otetaan joukkoa S pitkin.

TODISTUS. Koska molemmat yhtälön puolet ovat vakioita venytysten toiminnassa voidaan olettaa, että $r = 1/2$.

Olkoon p ja q kaksi eri pistettä pinnalla S. Olkoon π stereograafinen projektio pisteestä p pisteen p vastakkaisen pisteen p' tangenttiavaruuteen E. Asetetaan $a = \pi(q)$, $u' = u \circ \pi^{-1}$ ja $v = |\nabla u| \circ \pi^{-1}$. Olkoon ξ muuttuva piste pinnalla S ja asetetaan $x = \pi(\xi)$. Tällöin $|x| = \tan\theta$, missä θ on pisteen p ja pisteen x välisen suoran ja pisteen p ja pisteen p' välisen suoran välinen kulma. Kuljettaessa pisteen p ja pisteen p' välistä isoympyrää pitkin kulman θ muutos on puolet kuljetusta matkasta.

Koska π on konformikuvaus, voidaan Jacobin determinantti laskea käyttäen venytyksen määrää pisteen p ja pisteen p' välisen isoympyrän suuntaan:

$$\det \dot{\pi} = \left| \frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}(2\theta)} \right|^{n-1} = \left(\frac{\sec^2 \theta}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1 + |x|^2}{2} \right)^{n-1}.$$

Tällöin pätee

$$|u(p) - u(q)| = |u'(\infty) - u'(a)| = \left| \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} u'(a + ty) \, \mathrm{d}\, t \right| \leq \int_0^\infty |\nabla u'| \, \mathrm{d}\, t,$$

missä y on joku yksikkövektori avaruudessa E, joka samaistetaan avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ kanssa. Olkoon Y avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ yksikköpallopinta. Täten

$$|u(p) - u(q)| \leq \frac{1}{c_{n-2}} \int_Y \int_0^\infty |\nabla u'|(a + ty) \, \mathrm{d}\, t \, \mathrm{d}\, y = \frac{1}{c_{n-2}} \int_E \frac{|\nabla u'|}{|x - a|^{n-2}},$$

missä c_{n-2} on $(n-2)$-yksikköpallopinnan $(n-2)$-mitta. Koska mille tahansa konformikuvaukselle π pätee

$$|\nabla u'| = (|\nabla u| \circ \pi^{-1})(\det \dot{\pi})^{-1/(n-1)},$$

$|\nabla u'| = \frac{2v}{1+|x|^2}$ ja voidaan kirjoittaa

$$|u(p) - u(q)| \leq \frac{2}{c_{n-2}} \int_E \frac{v}{(1 + |x|)^{(n-1)/n}} \frac{1}{|x - a|^{n-2}(1 + |x|^2)^{1/n}} \, \mathrm{d}\, x.$$

Hölderin epäyhtälön perusteella edellisen epäyhtälön oikea puoli on korkeintaan

$$\frac{2}{c_{n-2}} \left(\int_E \frac{v^n}{(1 + |x|^2)^{n-1}} \, \mathrm{d}\, x \right)^{1/n} \left(\int_E \frac{1}{|x - a|^{\frac{(n-2)n}{n-1}} (1 + |x|^2)^{1/(n-1)}} \right)^{(n-1)/n}.$$

Oikeanpuoleisen integraalin sisällä olevan lausekkeen suuruusluokka lähestyttäessä pistettä $x = \infty$ on $|x|^{-e}$, missä

$$e = \frac{(n-2)n}{n-1} + \frac{2}{n-1} = \frac{n^2-2n+2}{n-1} = \frac{(n-1)^2+1}{n-1} = n+1+\frac{1}{n-1} > n-1,$$

joten integraali suppenee lähestyttäessä ääretöntä. Pisteessä $x = a$ taas integraalin sisällä oleva lauseke on olennaisesti $|x-a|^{\frac{(n-2)n}{n-1}}$, jonka eksponentille pätee

$$\frac{(n-2)n}{n-1} = \frac{n^2-2n}{n-1} = \frac{(n-1)^2-1}{n-1} = n-1-\frac{1}{n-1} < n-1.$$

Täten integraali on äärellinen myös pisteessä $x = a$. Asetetaan

$$A(a) = \left(\int_E \left(|x-a|^{n-1-1/(n-1)}(1+|x|^2)^{1/(n-1)}\right)^{-1} \mathrm{d}\,x\right)^{(n-1)/n}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
|(u(p)-u(q)|^n &\le \left(\frac{2A(a)}{c_{n-2}}\right)^n \int_E \frac{v^n}{(1+|x|^2)^{(n-1)}} \mathrm{d}\,x = A\int_E \left(\frac{v}{(1+|x|^2)}(\det\pi)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^n \mathrm{d}\,x \\
&= A\int_E (|\nabla u'|(\det\pi)^{\frac{1}{n(n-1)}})^n \mathrm{d}\,x \\
&= A\int_E \left(|\nabla u\circ\pi^{-1}|(\det\pi)^{-1/(n-1)}(\det\pi)^{(\frac{1}{n(n-1)})}\right)^n \mathrm{d}\,x \\
&= A\int_E (|\nabla u\circ\pi^{-1}|(\det\pi)^{-1/n})^n \mathrm{d}\,x = A\int_E |\nabla u\circ\pi^{-1}|^n(\det\pi)^{-1} \mathrm{d}\,x \\
&= A\int_E |\nabla u|^n \mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Riittää siis osoittaa, että $A(a)$ on rajoitettu. Koska $|x| \le |x-a| + |a|$, niin nähdään, että jos $|x-a| \ge |a|/2$, niin $|x| \le 3|x-a|$, ja siten $|x-a| \ge |x|/3$. Jos taas $|x-a| \le |a|/2$, niin $|x| \ge |a| - |x-a| \ge |a|/2$. Asetetaan $b = \max(|a|/2, 1)$. Merkitään sitten

$$B = \frac{1}{|x-a|^{n-1-\frac{1}{n-1}}(1+|x|^2)^{1/(n-1)}}.$$

Tällöin jaetaan A seuraavasti:

$$A = \int_E B\,\mathrm{d}\,x = \int_{|x-a|\le b} B\,\mathrm{d}\,x + \int_{|x-a|\ge b} B\,\mathrm{d}\,x = I + II.$$

Jos $b \le 1$, niin ensimmäinen integraali on rajoitettu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
I &\le \int_{|x-a|\le b} \frac{1}{|x-a|^{n-1-\frac{1}{n-1}}} \mathrm{d}\,x \\
&= c_{n-2}\int_0^b \frac{1}{r^{n-1-\frac{1}{n-1}}} r^{n-2} \mathrm{d}\,x = c_{n-2}\int_0^b r^{-1+\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}\,x \\
&= (n-1)c_{n-2}b^{1/n-1} \le (n-1)c_{n-2}.
\end{aligned}$$

Jos taas $b < 1$, on $b = |a|/2$ ja $|x| \geq b$, jos $|x-a| \leq b$. Täten

$$\begin{aligned} I &\leq (1+b^2)^{-\frac{1}{n-1}} \int_{|x-a|\leq b} \frac{1}{|x-a|^{n-1-\frac{1}{n-1}}} \,\mathrm{d}\,x \\ &\leq b^{-\frac{2}{n-1}}(n-1)c_{n-2}b^{1/(n-1)} \leq (n-1)c_{n-2}. \end{aligned}$$

Otetaan käyttöön merkintä

$$C = \frac{1}{(|x|/3)^{n-1-\frac{1}{n-1}}(1+|x|^2)^{1/(n-1)}}.$$

Tällöin toiselle integraalille pätee

$$\begin{aligned} II &\leq \int_{|x-a|\geq b} C \,\mathrm{d}\,x = \int_{\substack{|x-a|>b \\ |x|<1}} C \,\mathrm{d}\,x + \int_{\substack{|x-a|>b \\ |x|>1}} C \,\mathrm{d}\,x \\ &\leq 3^{n-1} \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^{n-1-\frac{1}{n-1}}} \,\mathrm{d}\,x + 3^{n-1} \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{n-1+\frac{1}{n-1}}} \,\mathrm{d}\,x \\ &\leq 3^{n-1}c_{n-2} \int_0^1 r^{-1+\frac{1}{n-1}} \,\mathrm{d}\,r + 3^{n-1}c_{n-2} \int_1^\infty r^{-1-\frac{1}{n-1}} \,\mathrm{d}\,r = 2 \cdot 3^{n-1}c_{n-2}(n-1). \end{aligned}$$

Täten

$$A \leq \frac{2^n}{c_{n-2}^n}(n-1)c_{n-2} + 2(n-1)c_{n-2} \cdot 3^{n-1} = \frac{2^n(n-1)^{n-1}(1+2\cdot 3^{n-1})^{n-1}}{c_{n-2}}.$$

□

Lemma 3.12. *Olkoon u jatkuva ja ACL funktio kuoressa $D_{a,b} = D$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\int_a^b (\operatorname{osc}_{|x|=r} u)^n \frac{\mathrm{d}\,r}{r} \leq A \int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\,x$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $|\nabla u|^n$ on integroituva kuoressa D, sillä muuten tulos on triviaali. Hölderin epäyhtälöstä seuraa, että $|\nabla u|$ on integroituva. Asetetaan

$$v(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U u(x+y) \,\mathrm{d}\,y, x \in D_{a+\epsilon, b-\epsilon} = D',$$

missä $U = \{y \colon |y| < \epsilon/2\}$. Tällöin lemmasta 3.5 seuraa, että

$$\nabla v(x) = \frac{1}{m(U)} \int_U \nabla u(x+y) \,\mathrm{d}\,y$$

ja v on C^1-funktio kuorella D'. Täten lemmasta 3.11 saadaan

$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} (\operatorname{osc}_{|x|=r} v)^n \frac{\mathrm{d}\,r}{r} \leq A \int_{D'} |\nabla v|^n \,\mathrm{d}\,x \leq A \int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\,x.$$

Täten siis tasaisen suppenemisen perusteella

$$\int_a^b (\operatorname{osc}_{|x|=r} u)^n \frac{\mathrm{d}\,r}{r} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} (\operatorname{osc}_{|x|=r} v)^n \frac{\mathrm{d}\,r}{r} \leq A \int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\,x.$$

□

Lause 3.13. *Olkoon u monotoninen sallittu funktio kuorelle D avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja asetetaan $M = \int_D |\nabla u| \, \mathrm{d}\, x$.*

Asetetaan lisäksi

$$\begin{aligned} a &= \textit{joukon } C_0 \textit{ halkaisija} \\ b &= \mathrm{d}(C_0, C_1) \\ c(x,y) &= \min(d(x,C_0), \mathrm{d}(y,C_0)). \end{aligned}$$

Nyt on olemassa vakio A siten, että

$$|u(x)-u(y)|^n \le AM \left(\log \frac{a}{\mathrm{d}(x,y)}\right)^{-1}$$

kaikille x, $y \in \mathbb{R}^n$, joille pätee $d(x,y) < a$ ja

$$|u(x)-u(y)|^n \le AM \left(\log \frac{c(x,y)}{b}\right)^{-1}$$

kaikille x ja y, joille pätee $c(x,y) > b$.

Todistus. Oletuksen nojalla u on monotoninen kuorella D ja siten jokaisessa joukon D avoimessa osajoukossa. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^n$ yhtenäinen ja avoin siten, että $V \not\subset C_i$ ja $C_i \not\subset V$, kun $i \in \{1,2\}$. Asetetaan $W = V \setminus (C_0 \cup C_1)$. Koska $V \not\subset C_i$ ja V on yhtenäinen, kohtaa ∂W joukon C_i, jos V kohtaa joukon C_i. Täten

$$\sup_{x\in V} u(x) = \sup_{x \in W} u(x), \inf_{x\in V} u(x) = \inf_{x\in W} u(x), \tag{6}$$

sillä u on vakio joukoissa C_i. Jos V kohtaa joukon C_i, myös ∂V kohtaa joukon C_i, sillä $C_i \not\subset V$ ja C_i on yhtenäinen. Siksi

$$u(\bar{V} - V) = u(\bar{W} - W),$$

sillä $\bar{V} \setminus V \subset \bar{W} \setminus W \cup C_0 \cup C_1$, $\bar{W} \setminus W \subset \bar{V} \setminus V \cup C_0 \cup C_1$. Täten yhtälöistä (6) seuraa

$$\sup_{x\in V} u(x) = \sup_{x\in \bar{V}-V} u(x), \inf_{x\in V} u(x) = \inf_{x\in \bar{V}-V} u(x), \tag{7}$$

sillä u on monotoninen joukossa W. Täten u on monotoninen joukossa V.

Käytetään edeltävää avoimeen palloon V, jonka keskipiste on x ja säde on a. Koska $\mathrm{B}(x,r') \subset \mathrm{B}(x,r)$, jos $r > r'$, niin $\sup_{z\in \mathrm{B}(x,r')} u(z) \le \sup_{z \in \mathrm{B}(x,r)} u(z)$. Kuvauksen u monotonisuudesta pallossa V seuraa, että $\sup_{S_r\colon |z-x|=r} u(z) \le \sup_{S_{r'}} u(z)$, kun $a > r > r'$. Koska vastaava pätee infimumille, saadaan $|u(x)-u(y)| \le \operatorname{osc}_{S_r} u$, jos $\mathrm{d}(x,y) < a$. Täten Lemman 3.11 perusteella

$$|u(x)-u(y)|^n \int_{\mathrm{d}(x,y)}^a \frac{\mathrm{d}\, r}{r} \le A \int_D' |\nabla u|^n \, \mathrm{d}\, D \le AM, \tag{8}$$

koska $\int_{D'} |\nabla u|^n \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n = \int_D |\nabla u|^n$, missä D' on kuori $\mathrm{d}(x,y) \le z \le a$.

Toisaalta voidaan soveltaa edeltävää myös suljetun pallon, jonka keskipiste on p ja säde $r > \mathrm{d}(p, C_1)$, ulkopuoleen, missä p on piste joukossa C_0 siten,että $\mathrm{d}(p,C_1) = \mathrm{d}(C_0,C_1) = b$. Kuvauksen u monotonisuudesta seuraa nyt, että osc_{S_r} on vähenevä muuttujan r suhteen, sillä pallon $\mathrm{B}(p,r')$ ulkopuoli sisältyy pallon $\mathrm{B}(p,r)$ ulkopuoleen, kun $r' > r$. Täten $|u(x) - u(y)| \leq \operatorname{osc}_{S_r}(U)$, jos $r < \mathrm{d}(p,x), \mathrm{d}(p,y)$. Lemman 3.11 perusteella

$$|u(x) - u(y)|^n \int_b^{c(x,y)} \frac{\mathrm{d}\,r}{r} \leq AM. \tag{9}$$

Epäyhtälöistä (8) ja (9) saadaan väite.

□

3.2. Konformikapasiteetin jatkuvuus.

Määritelmä 3.14. Olkoon D avoin joukko lokaalisti yhtenäisessä topologisessa avaruudessa ja olkoon f jatkuva funktio joukossa $\overline{D}$. Jos jokaiselle yhtenäiselle, avoimelle joukolle $U \subset D$ pätee $\sup_{x\in\overline{U}} f(x) \leq \sup_{x\in\overline{U}-U} f(x)$ ja $\inf_{x\in\overline{U}} f(x) \geq \inf_{x\in\overline{U}-U} f(x)$, niin sanotaan, että f on *monotoninen*.

Jos U on avoin joukko ja $x \in U$, niin käytetään pisteen x sisältävälle joukon U yhtenäisyyskomponentille merkintää U_x. Jos $c \in \mathbb{R}$ ja f on jatkuva reaaliarvoinen funktio joukossa $\overline{D}$, niin käytetään kaikkien joukon $D - f^{-1}(c)$ yhtenäisyyskomponenttien, joiden sulkeumat sisältyvät joukkoon D, yhdisteestä merkintää cDf. Jos $a \in \mathbb{R}$, niin määritellään funktio $f.a$ seuraavasti

$$(f.a)(x) = \begin{cases} a & \text{jos } x \in aDf \\ f(x) & \text{jos } x \notin aDf. \end{cases}$$

Täten pätee $f_{|\overline{D}-D} = f.a_{|\overline{D}-D}$

Lemma 3.15 (Lebesguen suoristuslemma). *Olkoon D yhtenäinen ja avoin yhtenäisen ja lokaalisti yhtenäisen topologisen avaruuden X aito osajoukko ja olkoon f jatkuva reaaliarvoinen funktio joukossa $\overline{D}$. Oletetaan lisäksi, että f saa arvoja vain joukosta $[m,M]$. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ välin $[m,M]$ rationaaliluvut. Asetetaan $f_n = (\ldots(f.a_1).a_2)\ldots).a_n$. Tällöin f_n suppenee tasaisesti monotoniseen funktioon.*

Todistus. Olkoon a ja c eri reaalilukuja ja olkoon $x \in cDf.a$. Tällöin joukon $(c(Df.a))_x$ reunalla funktio $f.a$ saa vakioarvon c, sillä yhtenäisyyskomponentit ovat suljettuja. Koska $a \neq c$ ja koska siirryttäessä funktiosta f funktioon $f.a$, minkään pisteen arvoa ei muuteta arvoksi c, saa myös f vakioarvon c joukon $(cD(f.a))_x$ reunalla ja täten $x \in cDf$, jos $f(x) \neq c$. Siispä $cD(f.a) \subset cDf \cup f^{-1}(c)$.

Oletetaan, että $a > c$ ja olkoon joukko S joukon $(cD(f.a))_x$ alkiot y siten, että $f(y) > a$. Jos olisi $z \in S$, joka kuuluisi yhtenäiseen joukon $D - f^{-1}(a)$ osajoukkoon, jonka sulkeuma ei sisälly joukkoon D, niin tällöin $z \notin cDf.a$, mikä on ristiriita. Täten $S \subset aDf \cap cD(f.a)$ ja siispä $(f.a)(y) = a$ kaikilla $y \in S$. Voidaan siis todeta, että

$$\sup(f.a)(y) \leq a \tag{10}$$

kaikilla $y \in cD(f.a)$ jos $a > c$. Vastaavasti

$$\inf(f.a)(y) \geq a \tag{11}$$

kaikilla $y \in cD(f.a)$ jos $a < c$.

Tällöin pätee $(cD(f.a))_x \not\subset aDf$. Nimittäin $\overline{f.a^{-1}(c)} \cap (cD(f.a))_x = \emptyset$, sillä $f.a^{-1}(c)$ on suljettu. Ei voi olla $\overline{cD(f.a)) \setminus (cD(f.a))_x} \cap (cD(f.a))_x \neq \emptyset$, sillä muuten jokainen pisteen $y \in (cD(f.a))_x$ ympäristö U leikkaisi joukkoa $cD(f.a))/(cD(f.a))_x$.

Tällöin koska X on lokaalisti yhtenäinen on olemassa yhtenäinen pisteen y ympäristö $U \subset D$, mikä ei ole mahdollista, sillä yhtenäinen joukko voi leikata vain yhtä yhtenäisyyskomponenttia. Lisäksi $cD(f.a))/(cD(f.a))_x \cap \overline{(cD(f.a))_x} = \emptyset$, sillä yhtenäisyyskomponentit ovat suljettuja. Täten, koska D on yhtenäinen, $\overline{(cD(f.a))_x} \cap f.a^{-1}(c) \neq \emptyset$, ja siten yhtenäisyyskomponentin yhtenäisyyden ja funktion $f.a$ jatkuvuuden nojalla $f.a$ saavuttaa arvon $(a+c)/2$ jossain joukon $(cD(f.a))_x$ pisteessä, joka ei siten voi kuulua joukkoon aDf. Siispä f saa funktion $f.a$ joukossa $(cD(f.a))_x$ saavuttamat arvot joukossa $(cD(f.a))_x$. Koska $f.a^{-1}(c) \subset f^{-1}(c)$, pätee $cDf.a \subset cDf$ ja siten

$$\sup\{(f.a)(y) \colon y \in cD(f.a)\} \le \sup\{f(y) \colon y \in cDf\},$$
$$\inf\{(f.a)(y) \colon y \in cD(f.a)\} \ge \inf\{f(y) \colon y \in cDf\}$$

Jos nyt $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ovat eri reaalilukuja, merkitään

$$D_k = a_{n+1}D(f.a_1.a_2 \ldots a_k).$$

Tällöin pätee

$$\sup_{y \in D_n} (f.a_1.a_2 \ldots a_n)(y) \le \sup_{y \in D_{n-1}} (f.a_1.a_2 \ldots a_{n-1})(y) \tag{12}$$
$$\le \sup_{y \in D_k} (f.a_1.a_2 \ldots a_k)(y) \tag{13}$$
$$\le a_k \text{ jos } a_k > a_{n+1}, \tag{14}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa epäyhtälöstä (9). Nyt $\sup_{y \in D_n}(f_n(y) - f_{n+1}(y)) \le a_k - a_{n+1}$ jos $a_{n+1} < a_k$ ja vastaavasti $\inf_{y \in D_n}(f_n(y) - f_{n+1}(y)) \ge a_k - a_{n+1}$, jos $a_k < a_{n+1}$. Koska f_{n+1} poikkeaa funktiosta f_n vain joukossa D_n, pätee

$$\sup_{y \in D} |f_n(y) - f_{n+1}(y)| \, \mathrm{d}(n+1) \le \mathrm{d}(n), \tag{15}$$

missä d() on joukon $[m, M] - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pisimmän välin pituus.

Oletetaan, että r on pienempi kokonaisluku kuin $n+1$. Osoitetaan induktiolla luvun $n-r$ suhteen, että

$$\sup_{y \in D} |f_r(y) - f_{n+1}(y)| \le \mathrm{d}(r). \tag{16}$$

Epäyhtälöstä (11) seuraa, että epäyhtälö (12) pätee, kun $n - r = 0$. Koska $cD(f.a) \subset cDf \cup f^{-1}(c)$, niin nähdään, että

$$D_n \subset D_{n-1} \cup f_n^{-1}(a_{n+1}) \tag{17}$$
$$\subset D_r \cup f_{r+1}^{-1}(a_{n+1}) \cup \cdots \cup f_n^{-1}(a_{n+1}) \tag{18}$$
$$= D_r \cup f_{r+1}^{-1}(a_{n+1}). \tag{19}$$

Koska f_{n+1} poikkeaa funktiosta f_n vain joukossa D_n, induktio-oletuksesta seuraa, että $\sup_{y \in D}|f_r - f_{n+1}| \le \max\{\mathrm{d}(r), \sup_{y \in D_n}|f_r(y) - f_{n+1}(y)|\}$. Inkluusiosta (13) seuraa, että jälkimmäinen termi on pienempi kuin

$$\sup_{D_r \cup f_{r+1} - 1(a_{n+1})} |f_r(y) - a_{n+1}(y)| = \sup_{y \in D_r} |f_r(y) - a_{n+1}| \le \mathrm{d}(r)$$

epäyhtälön (10) perusteella (ja vastaavan yhtälön infimumille). Täten (12) on todistettu.

Koska $\lim_{r \to \infty} \mathrm{d}(r) = 0$, suppenee $\{f_n\}$ tasaisesti joukossa D funktioon $\overline{f}$.

Funktio $\overline{f}$ on monotoninen joukossa D. Jos ei, niin olisi avoin joukko U siten, että on olemassa $x \in U$, jolle pätee $\overline{f}(x) > \sup_{y \in U} \overline{f}(y)$. Merkitään $c = (\overline{f}(x) + \sup_{y \in U} \overline{f}(y))/2$. Tällöin $x \in cD\overline{f}$, sillä jokaisessa yhtenäisessä joukossa, joka sisältää pisteen x, ja jonka sulkeuma ei sisälly joukkoon U, $\overline{f}$ saavuttaa arvon c. Olkoon $b = \sup_y |\overline{f}(y) - c|$, missä $y \in (cD\overline{f})_x$. Täten mille tahansa kokonaisluvulle n, jolle pätee $\sup|f_n - \overline{f}| < b/3$, pätee

$$\sup\{f_n(y) - c'; y \in c'Df_n\} > b/3,$$

kun $c < c' < b/3$, vastaavan päättelyn kuin edellä nojalla. Valitsemalla n siten, että $\mathrm{d}(n) < b/3$ ja $c < a_{n+1} < c + b/3$ saataisiin

$$\sup\{f_n(y) - a_{n+1}; y \in_a n + 1D\overline{f}\} > \mathrm{d}(n);$$

eli $|f_n - f_{n+1}| > d(n)$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön (11) kanssa. □

Jos D on kuori, niin $\int_D |\nabla \overline{f}|^n \leq \int_D |\nabla f|^n$. Nimittäin $|\nabla f.a(x)| \leq |\nabla f(x)|$ kaikilla $x \in D$, sillä $f.a$ on vakio joukossa, jossa se eroaa funktiosta f. Väite seuraa siten monotonisesta konvergenssista. Jos $T \subset \overline{D}$ on yhtenäinen ja $T \not\subset aDf$, niin $f.a(T) \subset f(T)$. Täten $f.a$ on ACL, jos f on ACL.

Lause 3.16. *$\mathscr{C}(D)$ riippuu jatkuvasti kuoresta D.*

Todistus. Olkoon $x_1 \in C_1$ ja olkoon I niiden kuorien joukko, jotka eivät sisällä pistettä x_1. Tällöin jokaiselle kuoren D ympäristölle U kuorien avaruudessa joukon $U \cap I$ radan yhdiste Möbius-ryhmän toiminnassa on kuoren D ympäristö: Koska on olemassa Möbius-ryhmän transitiivinen aliryhmä, joka säilyttää metriikan, voidaan olettaa, että $\infty \in D$. Olkoon U_δ niiden kuorien D' joukko, joille pätee $d(D, D') < \delta$, missä d on Hausdorff-metriikka kuorten komplementeille. Kuoren $D' \in U_\delta$ komplementin komponentti C_1' voidaan euklidisen avaruuden siirrolla t, jonka pituus pallometriikassa on pienempi kuin δ, viedä osajoukoksi, joka sisältää pisteen x_1. Koska

$$\mathrm{d}(C_0 \cup C_1, t(C_0' \cup C_1') \leq \mathrm{d}(C_0 \cup C_1, C_0' \cup C_1') + \mathrm{d}(C_0' \cup C_1', t(C_0' \cup C_1')) < 3\delta,$$

pätee $T(U_{3\delta} \cap I) \supseteq U_\delta$, jossa T on siirtojen ryhmä avaruudessa $R^n \cup \{\infty\}$. Koska joukot $U_{3\delta}$ muodostavat kuoren D ympäristökannan, väite on todistettu.

Nyt riittää osoittaa, että $\mathscr{C}_{|I}$ on jatkuva avaruudessa I: jos näin on, niin pätee

$$\lim_{j \to \infty} D_j = D \Rightarrow \lim_{j \to \infty} \mathscr{C}(D_j) = \mathscr{C}(D),$$

missä $D_j \in I$. Olkoon nyt D_j jono kuoria siten, että $\lim_{j \to \infty} D_j = D$. Tällöin

$$\lim_{j \to \infty} \mathscr{C}(D_j) = \lim_{j \to \infty} \mathscr{C}(t_j(D_j)) = \mathscr{C}(D),$$

missä t_j on kuoren $D_j \in U_\delta$ joukkoon $U_{3\delta} \cap I$ kuvaava siirto. Täten siis $\mathscr{C}$ on jatkuva niillä kuorilla D, jotka sisältyvät joukkoon I. Koska jokaisen kuoren komplementti sisältää jonkun pisteen, ja koska ortogonaaliryhmä toimii pallolla transitiivisesti sekä säilyttää konformikapasiteetin sekä pallometriikan, on $\mathscr{C}$ jatkuva kaikilla kuorilla.

Voidaan valita $x_1 = \infty$. Riittää siis osoittaa, että $\mathscr{C}(D)$ riippuu jatkuvasti kuoresta D kuorille $D \subset \mathbb{R}^n$.

Olkoon D kuori joukossa $\mathbb{R}^n$, olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon u sileästi sallittu funktio kuorelle D siten, että $\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, D < \mathscr{C}(D) + \epsilon$. Olkoon K funktion u kantaja. Funktion u määritelmän nojalla K on kuoren D kompakti osajoukko. Jokaiselle kuorelle D' riittävän lähellä kuorta D pätee $K \subset D'$. Täten u on sallittu kuorelle D' ja

$$\mathscr{C}(D') \leq \mathscr{C}(D) + \epsilon. \tag{20}$$

Olkoot C_0 ja C'_0 kuorien D ja D' komplementin rajoitetut komponentit. Olkoon a' joukon C'_0 halkaisija euklidisessa metriikassa, olkoot $b' = \mathrm{d}(C'_0, C'_1)$ ja $c'(x,y) = \min(\mathrm{d}(x, C'_0), \mathrm{d}(y, C'_0))$. Valitaan jokaiselle kuorelle D' monotoninen sallittu funktio u' siten, että

$$\int_{D'} |\nabla u'|^n \,\mathrm{d} \leq \mathscr{C}(D') + \epsilon.$$

Asetetaan u' vakioksi joukoissa C'_0 ja C'_1.

Määritellään funktio v' seuraavasti:

$$v'(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } u'(x) < \epsilon \\ \frac{u'(x)-\epsilon}{1-2\epsilon} & \text{jos } \epsilon \leq u'(x) \leq 1-\epsilon \\ 1 & \text{jos } 1-\epsilon < u'(x) \leq 1 \end{cases}$$

Tällöin v' on ACL avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon K' funktion $\nabla v'$ kantaja. Tällöin K' on kuoren D' kompakti osajoukko. Epäyhtälöstä

$$|u'(x) - u'(y)|^n \leq AM' \left(\log \frac{a'}{\mathrm{d}(x,y)}\right)^{-1} \quad \text{jos } \mathrm{d}(x,y) < a'$$

seuraa mille tahansa $x \in K'$,

$$\mathrm{d}(x, C'_i) \geq \frac{a'}{\exp(AM'\epsilon^{-n})} \geq \frac{a-\epsilon}{\exp(A(M+2\epsilon)\epsilon^{-n})} = \delta(\epsilon) \quad (i = 0, 1),$$

jos D' on riittävän lähellä kuorta D.

Epäyhtälöstä

$$|u'(x) - u'(y)|^n \leq AM' \left(\log \frac{c'(x,y)}{b'}\right)^{-1}$$

taas seuraa valitsemalla $y = \infty$ mille tahansa $x \in K'$

$$\mathrm{d}(x, C'_0) \leq b' \exp(AM'\epsilon^{-n}) < (b+\epsilon)\exp(A(M+2\epsilon)\epsilon^{-n}) = r(\epsilon).$$

jos D' on riittävän lähellä kuorta D ja $\mathrm{d}(x, c_0) < a'$. Olkoon B $r(\epsilon) + a + \delta(\epsilon)$-säteinen suljettu n-pallo jossain joukon C_0 kiinnitetyssä pisteessä. Nyt $K' \subset B$. Tällöin jokaiselle kuorelle D', jolle pätee

$$\mathrm{d}((C'_0 \cup C'_1) \cap B, (C_0 \cup C_1) \cap B) < \delta(\epsilon), \tag{21}$$

ja jokaiselle $x \in K'$ pätee $\mathrm{d}(x, C_0 \cup C_1) > 0$, joten $K' \subset D$.

Siispä v' on sallittu kuorelle D ja siten

$$\mathscr{C}(D) \leq \int_D (\nabla v')^n \,\mathrm{d}\, D \leq (1-2\epsilon)^{-n} (\mathscr{C}(D') + \epsilon) \tag{22}$$

kaikille ehdon (21) toteuttaville kuorille. Tällaisten kuorien joukko on kuoren D ympäristö myös pallometriikassa, joten väite seuraa epäyhtälöistä (20) ja (22). $\square$

LEMMA 3.17. *$\mathscr{C}(\mathrm{D}_{a,b}) = c_{n-1}(\log(b/a)^{-(n-1)}$, jossa c_{n-1} tarkoittaa $(n-1)$-ulotteisen yksikköpallon pinnan $(n-1)$-mittaa.*

TODISTUS. Olkoon u sallittu C^1-funktio pallokuorelle $D = \mathrm{D}_{a,b}$. Integroimalla pitkin kuoren D komplementin komponentteja yhdistävää sädettä saadaan

$$\begin{aligned}
1 = u(b) - u(a) &\leq \left(\int_a^b |\nabla u| \,\mathrm{d}\, r \right)^n = \left(\int_a^b |\nabla u| r^{(n-1)/n} r^{-(n-1)/n} \,\mathrm{d}\, r \right)^n \\
&\leq \left(\int_a^b |\nabla u|^n r^{((n-1)/n)n} \right)^{n/n} \left(\int_a^b r^{(-(n-1)/n)(n/(n-1))} \,\mathrm{d}\, r \right)^{n/(n/(n-1))} \\
&= \left(\int_a^b |\nabla u|^n r^{n-1} \right) \left(\int_a^b r^{-1} \,\mathrm{d}\, r \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

käyttäen Hölderin epäyhtälöä. Integroimalla kaikkien säteiden yli saadaan napakoordinaatteja käyttämällä

$$c_{n-1} \leq \left(\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, D \right) (\log(a/b))^{n-1} \,.$$

Täten $\mathscr{C}(D) \geq c_{n-1} \left(\log(b/a)\right)^{-(n-1)}$. Toisaalta valitsemalla $u(x) = (\log(|x|/a)) \left(\log(b/a)\right)^{-1}$, nähdään

$$\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, D = c_{n-1} \left(\log(b/a)\right)^{-n} \int_a^b (1/r)^n \, r^{n-1} \,\mathrm{d}\, r = c_{n-1} \left(\log(b/a)\right)^{-(n-1)} \,.$$

Täten $\mathscr{C}(D) = c_{n-1} \left(\log(b/a\right)^{-(n-1)}$. □

MÄÄRITELMÄ 3.18. Kuoren D *moduli* Möbius-n-avaruudessa on $c_{n-1}/\mathscr{C}(D)^{1/(n-1)}$. Sille käytetään merkintää $\operatorname{mod} D$.

Täten pätee $\operatorname{mod} D_{a,b} = \log(b/a)$.

Jos D ja D' ovat kuoria siten, että $C_0' \subseteq C_0$ ja $C_1' \subseteq C_1$, missä C_0 ja C_1 ovat kuoren D komplementin komponentit ja C_0' ja C_1' ovat kuoren D' komplementin komponentit, niin sanotaan, että D' *erottaa* kuoren D reunat. Tällöin $D' \subset D$ ja jokainen funktio, joka on sallittu kuorelle D', on sallittu myös kuorelle D. Täten $\mathscr{C}(D) \leq \mathscr{C}(D')$ ja $\operatorname{mod} D \geq \operatorname{mod} D'$.

LEMMA 3.19. *Olkoon D kuori siten, että toinen sen komplementin komponenteista koostuu vain yhdestä pisteestä. Tällöin $\mathscr{C}(D) = 0$.*

TODISTUS. Voidaan olettaa, että origo on joukon C_0 ainoa piste. Tällöin riittävän pienille b pallokuori $D_{a,b}$ sisältyy kuoreen D erottaen sen reunat. Täten $\operatorname{mod} D \geq \log(b/a)$ mielivaltaisen pienille a. Täten $\mathscr{C}(D) = 0$. □

LEMMA 3.20. *Olkoon D kuori ja olkoot $D_1, \ldots, D_m$ pareittain erillisiä kuoria, joista jokainen erottaa kuoren D reunat. Tällöin* $\operatorname{mod} D \geq \operatorname{mod} D_1 +, \ldots, + \operatorname{mod} D_m$.

TODISTUS. Käytetään kuorten D_m komplementin komponenteille merkintää $C_{i,j}$, missä $i \in \{1, 2\}$. Oletuksen perusteella komplementin komponenteille pätee $C_0 \subset C_{0,i}$

ja $C_1 \subset C_{1,i}$. Olkoon u_i sileästi sallittu funktio kuorelle D_i, joka saa arvon 0 joukossa $C_{0,i}$ ja arvon 1 joukossa $C_{1,i}$. Asetetaan $u = \sum_{i=1}^m a_i u_i$, jossa $a_i \geq 0$ ja $\sum_{i=0}^m a_i = 1$.

$$\int_D |\nabla u|^n \,\mathrm{d}\, x = \sum_{i=1}^m \int_{D_i} |\nabla u_i|^n \,\mathrm{d}\, x.$$

Täten $\mathscr{C}(D) \leq \sum_{i=1}^m a_i^n \mathscr{C}(D_i)$. Voidaan olettaa, että $\mathscr{C}(D) > 0$, sillä väite on muussa tapauksessa selvä. Täten $\mathscr{C}(D_i) > 0$ ja voidaan valita

$$a_i = \mathscr{C}(D_i)^{-(1/(n-1))} \left(\sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_j)^{-(1/(n-1))} \right)^{-1}$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}(D) &\leq \frac{\sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-(n/(n-1))+1}}{\left(\sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-(/(n-1))}\right)^n} = \frac{\sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-(1/(n-1))}}{\sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-(n/(n-1))}} \\
&= \sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-(n-1)}, \\
\mathscr{C}(D)^{-1/(n-1)} &\geq \sum_{i=1}^m \mathscr{C}(D_i)^{-1/(n-1)},
\end{aligned}$$

joten

$$\operatorname{mod} D \geq \sum_{i=1}^m \operatorname{mod} D_i.$$

□

4. Kvasikonformikuvaukset

Tämä luku sisältää joitakin lauseita päälauseen todistamista varten.

Jos $\phi\colon D \to D'$ on Riemannin monistojen välinen homeomorfismi, niin asetetaan

$$\begin{aligned}
L_\phi(p,r) &= \sup_{\mathrm{d}(q,p)=r} \mathrm{d}(\phi(q), \phi(p)) \\
l_\phi(p,r) &= \inf_{\mathrm{d}(q,p)=r} \mathrm{d}(\phi(q), \phi(p)) \\
H_\phi(p) &= \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{L(p,r)}{l(p,r)}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 4.1. Riemannin monistojen D ja D' välistä homeomorfismia ϕ kutsutaan *kvasikonformiseksi*, jos H_ϕ on rajoitettu avaruudessa D. Kuvausta ϕ kutsutaan K-kvasikonformikuvaukseksi, jos H_ϕ on rajoitettu avaruudessa D ja $H_\phi \leq K$ melkein kaikkialla avaruudessa D.

Lause 4.2. *Kvasikonformikuvaus avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimelta pallolta itselleen laajenee pallon reunalle ja tämä reunan kuvaus on myös kvasikonformikuvaus.*

Todistus. Todistettu Mostow'n artikkelissa [**5**, Thm 10.1 ja 10.2]. □

LAUSE 4.3. *Olkoon $\psi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ 1-kvasikonformikuvaus. Tällöin ψ on Möbius-kuvaus, jos $n \geq 1$.*

TODISTUS. Kuvaus ψ voidaan esittää muodossa $\psi' \circ \gamma$, jossa γ on Möbius-kuvaus ja ψ' 1-kvasikonformikuvaus siten, että jollekin pisteelle $p_\infty \in S^{n-1}$ pätee $\psi'(p_\infty) = p_\infty$, ψ' on differentioituva pisteessä p_∞ ja $\dot{\psi}'_{p_\infty} = \mathrm{Id}$.

Olkoon $\pi\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ stereograafinen projektio pisteestä p_∞. Asetetaan $\xi = \pi\psi'\pi^{-1}$. Koska stereograafinen projektio on konforminen, on myös ξ Möbius-avaruuden 1-kvasikonformikuvaus, jolle pätee $\xi(\infty) = \infty$. Jokaiselle $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ ja $a \in \mathbb{R}$ asetetaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(p,a) &= \inf\{|\xi(q) - \xi(p)|\colon |q-p| = a\},\\
\mathrm{L}(p,a) &= \sup\{|\xi(q) - \xi(p)|\colon |q-p| = a\},\\
\mathrm{H}(p) &= \varlimsup_{a\to 0} \mathrm{L}(p,a)/l(p,a),
\end{aligned}$$

ja

$$\mathrm{I}(p) = \varlimsup_{a\to 0} \mathrm{L}(p,a)/a.$$

Lisäksi asetetaan pisteelle ∞ ja pisteelle $b \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{l}(\infty,b) = \inf\{|\xi(q)|\colon |q| = b\},$$

ja

$$\mathrm{L}(\infty,b) = \sup\{|\xi(q)|\colon |q| = b\}.$$

Koska ξ on 1-kvasikonformikuvaus, on $\mathrm{H}(p) = 1$ melkein kaikkialla. Koska $\dot{\psi}'_{p_\infty}$ on identtinen kuvaus, pätee

$$\lim_{b\to\infty} \mathrm{l}(\infty,b)/b = 1 = \lim_{b\to\infty} \mathrm{L}(\infty,b)/b. \tag{23}$$

Olkoon $\mathrm{B}_r(p) = \{q\colon |q-p| \leq r\}$ jokaiselle $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ ja $\mathrm{B}_r(\infty) = \{q\colon |q| \geq r\}$ jokaiselle $r > 0$. Olkoon $p \in \mathbb{R}^{n-1}$, jossa $\mathrm{H}(p) = 1$. Käytetään pallokuorelle $\{q\colon a < |q-p| < b\}$ merkintää $\mathrm{D}_{a,b}(p)$. Tällöin pätee

$$\mathrm{B}_{l(p,a)}(\xi(p)) \subset \xi(\mathrm{B}_a(p)) \subset \mathrm{B}_{L(p,a)}(\xi(p))$$

ja

$$\mathrm{B}_{l(\infty,b)}(\xi(\infty)) \subset \xi(\mathrm{B}_b(\infty)) \subset \mathrm{B}_{L(\infty,b)}(\xi(\infty)).$$

Koska $\mathrm{B}_a(p)$ ja $\mathrm{B}_b(\infty)$ ovat pallokuoren $\mathrm{D}_{a,b}$ komplementin komponentit, pätee

$$\mathrm{D}_{\mathrm{L}(p,a),L(\infty,b)}(\xi(p)) \subset \xi(\mathrm{D}_{a,b}(p)) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{l}(p,a),l(\infty,b)}(\xi(p))$$

ja tällöin Lemmoista 3.17 ja 3.20 seuraa

$$\log \mathrm{L}(\infty,b)/\,\mathrm{L}(p,a) \leq \log b/a \leq \log \mathrm{l}(\infty,b)/\,\mathrm{l}(p,a).$$

Täten

$$\frac{\mathrm{L}(\infty,b)/b}{\mathrm{L}(p,a)/a} \leq 1 \leq \frac{\mathrm{l}(\infty,b)/b}{\mathrm{l}(p,a)/a}.$$

Kun $a \to 0$ ja $b \to 0$, niin yhtälöistä (1) ja siitä, että $\mathrm{H}(p) = 1$ saadaan

$$\frac{1}{\mathrm{I}(p)} \leq 1 \leq \frac{1}{\mathrm{I}(p)}.$$

Siten $\mathrm{I}(p) = 1$ melkein kaikille pisteille $o \in \mathbb{R}^{n-1}$. Kuvaus ξ siis säilyttää niiden janojen pituudet, joilla se on absoluuttisesti jatkuva. Koska ξ on absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla koordinaattiakseleiden suuntaisilla janoilla, on se isometria. Täten ξ on Möbius-kuvaus ja siten myös ψ' on Möbius-kuvaus.

□

5. Haarin mitta ja ergodista teoriaa

Määritelmä 5.1. Olkoon G topologinen, lokaalisti kompakti ryhmä ja olkoon μ ryhmän G Borel-joukoilla määritelty mitta. Mitta μ on *Haarin mitta*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

(1) siirtoinvarianttius: $\mu(gS) = \mu(S)$ kaikilla Borel-joukoilla $S \subset G$ ja kaikilla $\gamma \in G$.
(2) Mitta μ on äärellinen kaikilla kompakteilla ryhmän G osajoukoilla.
(3) Mitta μ on ulkosäännöllinen Borel-joukoilla.
(4) Mitta μ on sisäsäännöllinen avoimilla joukoilla.

Konstruoidaan seuraavaksi induktiolla Haarin mitta ryhmään $O(n)$. Olkoon $H \subset O(n)$ vektorin e_1 kiinnittäjä. H on isomorfinen ryhmän $O(n-1)$ kanssa. Vasempien sivuluokkien avaruus $O(n)/H$ on isomorfinen pallon S^{n-1} kanssa. Olkoon $f\colon S^{n-1} \to O(n)$ yhden alkion jokaisesta sivuluokasta poimiva funktio. Jos $X \subset O(n)$, niin asetetaan

$$\mu_{O(n)}(S) = \int_{S^{n-1}} \mu_{O(n-1)}(f(p)^{-1}(X \cap f(p)H))\mu_{S^{n-1}}(p).$$

Tämä määritelmä tuottaa mitan: selvästi $\mu(\emptyset) = 0$ ja μ on monotoninen. Additiivisuus seuraa monotonisesta konvergenssista.

Tällöin siirtoinvarianttius toteutuu, sillä

$$\begin{aligned}\mu_{n-1}(f(g(p))^{-1}(gX \cap f(g)H)) &= \mu_{n-1}(h'f(p)^{-1}g^{-1}(gX \cap f(g(p))H)) \\ &= \mu_{n-1}(h'f(p)^{-1}(X \cap f(p)h'H)) = \quad h' \in H\end{aligned}$$

käyttäen induktiivisesti tietoa, että siirtoinvarianttius toteutuu ryhmällä $O(n-1)$ ja sitä, että $O(n)$ säilyttää pallopinnan mitan.

Määritellään seuraavaksi edeltävän avulla Haarin mitta ryhmälle $GM(n)$. Kiinnitetyn avaruuden $\mathbb{H}^n$ pisteen kiinnittäjä H ryhmässä $GM(n)$ on isomorfinen ryhmän $O(n)$ kanssa. Valitaan kuten edellä funktio f. Jos $S \subset GM(n)$ on avoin, niin asetetaan

$$\mu_{GM(n)}(S) = \int_{\mathbb{H}^n} \mu_{O(n)}(f(p)^{-1}(X \cap f(p)H))\,\mathrm{d}\,\mu_{\mathbb{H}^n}(p),$$

missä käytetään funktion $x \mapsto x_n^2$ (puoliavaruusmallissa) indusoimaa mittaa $\mu_{\mathbb{H}^n}$.

Tällöin saadaan mitta samalla perusteella kuin edellä. Siirtoinvarianttius toteutuu vastavasti kuin edellä, koska $GM(n)$ säilyttää mitan $\mu_{\mathbb{H}^n}$. Jos S on avoin, saadaan integraalin sisälle alhaalta puolijatkuva, ja siten mitallinen funktio. Täten $\mu_{GM(n)}$ on hyvin määritelty. Funktio $\mu_{GM(n)}$ voidaan laajentaa mitaksi käyttämällä määriteltyä funktiota esimittana ja rajoittamalla saatu ulkomitta mitallisiin joukkoihin, jotka sisältävät Borel-joukot.

MÄÄRITELMÄ 5.2. Olkoon G ryhmä, jossa mitta μ. Jos Γ on ryhmän G aliryhmä, ja jos avoin joukko F sisältää korkeintaan yhden edustajan kustakin vasemmasta sivuluokasta, ja jos $\mu(G/\Gamma F) = 0$, niin sanotaan, että F on *perusalue.*

Olkoon Γ ryhmän $GM(n)$ diskreetti aliryhmä, jonka alkioilla ei ole kiintopisteitä. Kiinnitetään piste $p \in \mathbb{H}^m$. Määritellään joukko

$$F_0 = \{q \in \mathbb{H}^n\colon \ \mathrm{d}(p,q) < \inf\{\mathrm{d}(q,\gamma p)\colon \gamma \in \Gamma \setminus \mathrm{Id}\}\}.$$

Tällöin joukko $F = \{g \in G\colon p \in g(F_0)\}$ on perusalue. Nimittäin jos $g_1, g_2 \in F$ ja $g_1^{-1}g_2 \in \Gamma$, niin $g_1^{-1}g_2(q) = q'$ joillekin $q, q' \in F_0$, mikä on mahdotonta, sillä $g_1^{-1}g_2(p) \neq p$ ja G toimii isometrisesti hyperbolisella avaruudella. Koska joukko F_0 on konveksi, on sen reuna nollamittainen ja siten $\mu_{\mathbb{H}^n}(\mathbb{H}^n/\Gamma F_0) = 0$.

Olkoon $S_0 \subset G\Gamma$ ja $S = \{g\colon [g] \in S_0, g \in F\}$. Tällöin asettamalla $\mu_{G/\Gamma}(S_0) = \mu_G(S)$ saadaan avaruuteen G/Γ G-invariantti mitta. Nimittäin

$$\mu_{G/\Gamma}(gS_0) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_G(\gamma^{-1}(\gamma F \cap gS)) = \mu_G(S) = \mu_{G/\Gamma}(S_0).$$

Tätä kutsutaan *invariantiksi tekijämitaksi.*

MÄÄRITELMÄ 5.3. Olkoon G ryhmä ja V vektoriavaruus. Tällöin ryhmähomomorfismia $\rho\colon G \to GL(V)$ kutsutaan *ryhmän G esitykseksi vektoriavaruudessa V*, missä $GL(V)$ on vektoriavaruuden V kääntyvien lineaarikuvausten ryhmä. Tämä tarkoittaa, että

$$\begin{gathered}\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \text{ kaikille } g_1, g_2 \in G \\ \text{eli} \\ \rho(g_1g_2)(v) = (\rho(g_1) \circ \rho(g_2))(v), \text{ kaikille } g_1, g_2 \in G \text{ ja kaikille } v \in V.\end{gathered}$$

MÄÄRITELMÄ 5.4. Olkoon S joukko ja $*$ binäärinen operaatio joukossa S eli $s_1 * s_2 \in S$ kaikilla $s_1, s_2 \in S$. Jos $*$ on assosiatiivinen eli $(s_1 * s_2 *) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$ kaikille $s_1, s_2, s_3 \in S$, niin sanotaan, että S (yhdessä operaation $*$ kanssa) on *puoliryhmä.*

Jos siis oletetaan lisäksi, että puoliryhmässä on neutraalialkio ja kaikilla alkioilla käänteisalkiot, on se ryhmä.

Jos lineaarinen operaattori on surjektiivinen, rajoitettu ja jos se säilyttää sisätulon on se *unitaarinen.* Jos G on ryhmä, niin ryhmän G esitys ρ on *unitaarinen*, jos $\rho(g)$ on unitaarinen operaattori kaikilla $g \in G$.

LEMMA 5.5. *Olkoon S ei-abelinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä B, joka on isomorfinen reaalilukujen additiivisen ryhmän kanssa sekä aliryhmä A, joka on* *isomorfinen positiivisten reaalilukujen multiplikatiivisen ryhmän kanssa. Oletetaan, että S on muotoa $BA = \{ba\colon b \in B, a \in A\}$ ja ryhmässä S on laskutoimitus*

$$(ba)(b'a') = (b + a * b')a * a' \text{ kaikilla } a, b, a', b' \in S.$$

Olkoon lisäksi ρ jatkuva unitaarinen ryhmän S esitys Hilbert-avaruudessa V ja olkoon v vektori avaruudessa V siten, että $\rho(a)v = v$ kaikilla $a \in A$. Tällöin $\rho(s)v = v$ kaikilla $s \in S$.

Todistus. Kaikille $a \in A$ ja $b \in B$ pätee $a \circ b \circ a^{-1} = a * b$, jossa $a * b$ on additiivinen alkio. Siten

$$\begin{aligned}\langle \rho(b)v, v\rangle &= \langle \rho(a^n)\rho(b)v, \rho(a^n)v\rangle \\ &= \langle \rho(a^n \circ b \circ a^{-n})\rho(a^n)v, \rho(a^n)v\rangle \\ &= \langle \rho(a^n * b)v, v\rangle\end{aligned}$$

kaikilla $n > 0$. Valitsemalla $|a| < 1$ saadaan, kun $n \to \infty$

$$\langle \rho(b)v, v\rangle = \langle \rho(\mathrm{Id})v, v\rangle = \langle v, v\rangle = \langle \rho(b)v, \rho(b)v\rangle.$$

Koska Cauchy-Schwarzin epäyhtälössä yhtäsuuruus pätee vain, kun vektorit ovat yhdensuuntaiset, $\rho(b)v = v$ kaikilla $b \in B$, ja siten koska A ja B virittävät ryhmän S, on väite todistettu. □

Jos G on ryhmä, joka toimii mitta-avaruudessa S, niin esitystä $\rho\colon G \mapsto L^2(S, \mu)$ määriteltynä $\rho(g) = f \mapsto (h \mapsto f(g^{-1}h))$ kutsutaan *säännölliseksi esitykseksi.* Seuraavan lauseen todistus on saatu kirjasta [**3**].

Lause 5.6. *Olkoon G topologinen ryhmä ja H sen diskreetti aliryhmä, jonka alkioilla ei ole kiintopisteitä, ja olkoon $E \subset H$ äärellismittainen Borel-joukko, kun käytetään invarianttia tekijämittaa. Tällöin funktio $f\colon G \to \mathbb{R}$ määriteltynä $f(g) = \rho(E, gE)$ on jatkuva, missä $\rho(A, B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B\setminus)$.*

Todistus. Jos $\epsilon > 0$, niin Haarin mitan säännöllisyydestä seuraa, että on olemassa kompakti joukko $C \subset H$ siten, että $\rho(E, C) < \epsilon/4$ ja on olemassa avoin joukko $U \supseteq C$ siten, että $\rho(U, C) < \epsilon/4$. Olkoon V neutraalialkion ympäristö siten, että $V = V^{-1}$ ja $VC \subset U$. Jos $x^{-1}y \in V$, niin

$$\begin{aligned}\rho(xC, yC) &= \mu(xC \setminus yC) + \mu(yC \setminus xC) = \mu(y^{-1}xC \setminus C) + \mu(x^{-1}yC \setminus C) \\ &\le 2\mu(VC - C) \le 2\mu(U - C) < \epsilon/2.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}&|\rho(xE, E) - \rho(yE, E)| \\ \le \rho(xE, yE) \le \rho(xE, xC) &+ \rho(xC, yC) + \rho(yC, yE) < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Siten säännöllinen esitys $GM(n) \to L^2(G/H, \mu)$ on jatkuva karakteristisilla funktioilla ja siten myös yksinkertaisilla funktioilla. Koska yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^2(G/H, \mu)$, on säännöllinen esitys jatkuva.

Lemma 5.7. *Olkoon (W,μ) mitta-avaruus, jolle pätee $\mu(W) < \infty$. Olkoon A ryhmä mitallisia mitan säilyttäviä kuvauksia avaruudessa W siten, että ainoat A-invariantit funktiot avaruudessa $L^2(W,\mu)$ ovat vakioita. Olkoon A^+ puoliryhmä ryhmässä A siten, että A^+ ja sen käänteisalkioiden joukko virittää ryhmän A. Oletetaan, että ryhmässä A on separoituva topologia, jonka suhteen ryhmän A esitys avaruudessa $L^2(W,\mu)$ on jatkuva. Olkoon $\{W_n\}$ numeroituva kokoelma positiivismittaisia mitallisia joukkoja avaruudessa W. Tällöin melkein kaikille $x \in W$ joukko A^+x leikkaa jokaista joukkoa W_n.*

Todistus. Asetetaan $A^- = (A^+)^-$, jolloin A^- on myös puoliryhmä. Tarkastellaan mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä mitallisen joukon $DW_n = \cup_{d\in D} d(W_n)$ karakteristista funktiota f, missä D on puoliryhmän A^- numeroituva tiheä osajoukko. Jokaiselle $d \in D$ pätee $dDW_n \subset DW_n$, ja koska kuvauksen d toiminta on mitan säilyttävää, pätee $\mu(dDW_n) = \mu(DW_n)$. Siten $[df] = [f]$ kaikilla $d \in D$. Koska D on tiheä joukossa A^-, pätee $[A^-f] = [f]$ ja siten $[Af] = f$. Oletuksen nojalla f on vakio melkein kaikkialla ja siten $\mu(DW_n) = \mu(W)$, koska W_n on positiivismittainen. Täten A^-W_n eroaa joukosta W vain nollamittaisessa joukossa ja $\mu(\cap_n A^-W) = \mu(W)$. Siispä jokaiselle $x \in \cap A^-W_n$, pätee $A^+x \cap W_n \neq \emptyset$ kaikille n. $\square$

Lause 5.8. *Olkoon G separoituva lokaalisti kompakti ryhmä ja olkoon Γ diskreetti aliryhmä siten, että avaruudella G/Γ on äärellinen invariantti tekijämitta. Olkoon A ryhmän G aliryhmä, joka on isomorfinen positiivisten reaalilukujen multiplikatiivisen ryhmän kanssa ja olkoon A^+ puoliryhmä $\{a\colon a \leq 1\}$. Oletetaan, että A ja kokoelma aliryhmiä, jotka ovat isomorfisia reaalilukujen $\{B\}$ kanssa virittävät ryhmän G. Lisäksi oletetaan, että kaikki nämä aliryhmät toteuttavat laskusäännön: $(ba)\circ(b'a') = (b+a*b')a*a'$ kaikilla $a, b, a', b' \in S$. Tällöin melkein kaikilla sivuluokilla $x\Gamma$, $A^+x\Gamma$ on tiheä avaruudessa G.*

Todistus. Tarkastellaan ryhmän G säännöllistä esitystä ρ avaruudessa $L^2(G/\Gamma)$. Tällöin ρ on unitaarinen Haarin mitan määritelmän perusteella ja myös jatkuva. Lemman 5.5 perusteella BA kiinnittää funktion f kaikilla kokoelman $\{B\}$ alkioilla. Oletuksen nojalla $\{BA\}$ virittää ryhmän G, joten G kiinnittää funktion f. Täten f on vakiofunktio avaruudessa G/Γ. Lemman 5.7 oletukset ovat voimassa ryhmälle A ja väite seuraa valitsemalla joukoiksi $\{W_n\}$ numeroituva avaruuden G/Γ topologian kanta. $\square$

6. Päälauseen todistus

Lause 6.1. *Olkoon G hyperbolisen n-avaruuden X isometrioiden ryhmä. Olkoon Γ ja Γ' ryhmän G aliryhmiä siten, että sivuluokkien avaruuksilla G/Γ ja G/Γ' on äärellinen invariantti tekijämitta. Olkoon $\theta\colon \Gamma \to \Gamma'$ isomorfismi ja olkoon $\varphi\colon X \to X$ kvasikonformikuvaus siten, että $\varphi(\gamma x) = \theta(\gamma)\varphi(x)$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$ ja $x \in X$. Tällöin*

$$\theta(\gamma) = \psi\gamma\psi^{-1}$$

jollekin $\psi \in G$.

Todistus. Olkoon p_0 ja p_∞ vastakkaiset pisteet pallokuorella S^{n-1} avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Käytetään stereograafiselle projektiolle pisteestä p_∞ pisteen p_0 tangenttitasolle E_0 merkintää π_∞ ja olkoon T_0 tason E_0 siirtojen ryhmä. Merkitään $N_+ = \pi_\infty^{-1} T_0 \pi_\infty$, jolloin $N_+ \subset G$. Vastaavasti projisoimalla pisteestä p_0 määritetään ryhmä N_-. Olkoon A ryhmän G homotetioiden $x \mapsto tx$ aliryhmä, missä $t > 0$ ja $x \in E_0$, jota pidetään vektoriavaruutena, jonka origo on p_0.

Käytetään peilaukselle päiväntasaajan suhteen merkintää σ. Jos $t\colon x \mapsto tx$, niin $\sigma t \sigma$ kuvaa $x \mapsto t^{-1}x$, joten $\sigma A \sigma = A$. Koska lisäksi $\sigma^2 = 1$ ja $\sigma N_+ \sigma = N_-$, niin A, N_- ja N_+ generoivat ryhmän G identiteettikomponentin G_0, sillä $\sigma \notin G_0$. Olkoon B joko ryhmän N_+ tai ryhmän N_- yhden parametrin aliryhmä. Jos identifioidaan A positiivisten reaalilukujen multiplikatiivisen aliryhmän kanssa ja B additiivisen aliryhmän kanssa, niin alkioille $b, b' \in B$ ja $a, a' \in A$ pätee

$$(ba)(b'a') = (b + a * b')a * a' \text{ kaikilla } a, b, a', b' \in S.$$

Ryhmä A kiinnittää vain pisteet p_0 ja p_∞. Jos $\gamma \in GM(n)$ kiinnittää nämä pisteet, niin γ kuuluu aliryhmän A normalisoijaan. Nimittäin siirtymällä avaruuteen $\mathbb{R}^n$ stereograafisella projektiolla γ kuvaa origokeskiset hyperpallopinnant origokeskisiksi hyperpallopinnoiksi. Jos $q = ap, a > 0$, niin $\gamma(q) = \gamma(ap)$, sillä γ kuvaa p-keskisen ja $\mathrm{d}(p, q)$-säteisen hyperpallopinnan, johon q kuuluu, $\gamma(p)$-keskiseksi hyperpallopinnaksi, joka ei ulotu origokeskisen, $|\gamma(q)|$-säteisen hyperpallopinnan toiselle puolelle. Siten joukon $\{p_0, p_\infty\}$ kiinnittäjä on aliryhmän A normalisoijan osajoukko.

Jos Möbius-ryhmän alkio g kuvaa pisteen p_0 tai p_∞ joksikin muuksi pisteeksi, niin $a^{-1}ga(p_i) \neq g(p_i)$. Siten aliryhmän A normalisoija $N(A)$ kiinnittää joukon $\{p_0, p_\infty\}$. Jos $x^{-1}y \in N(A)$, niin jokaiselle $a \in A$ on olemassa $a' \in A$ siten, että $ax^{-1}y = x^{-1}ya'$ siis $a = x^{-1}ya'y^{-1}x$. Siten $xax^{-1} = ya'y^{-1}$, joten jokainen aliryhmän $N(A)$ vasen sivuluokka määrää yksikäsitteisen aliryhmän A konjugaatin xAx^{-1}. Jokainen näistä konjugaateista kiinnittää kaksi pistettä. Käytetään pisteet $\{p, q\}$ kiinnittävälle konjugaatille merkintää $A_{p,q}$.

Lauseen 5.8 oletukset ovat voimassa kolmikolle G_0, $\Gamma \cap G_0$ ja A. Täten melkein kaikille sivuluokille Γx ryhmässä ΓG_0 (joka on G tai G_0) joukko $\Gamma x A^+$ on tiheä ryhmässä ΓG_0, missä $A^+ = \{a \in A; a \leq 1\}$. Haarin mitan ja kompaktiuden määritelmän nojalla $\Gamma x A^+$ on tiheä melkein kaikille $x \in G_0$. Koska topologisessa ryhmässä alkiolla operointi on homeomorfismi, on myös $A_{p,q} = \Gamma x A^+ x^{-1}$ tiheä ryhmässä ΓG_0 melkein kaikilla $x \in G_0$. Ryhmän A keskittäjä $Z(A)$ kiinnittää pisteet p_0 ja p_∞, sillä jos Möbius-kuvaus g vaihtaa nämä pisteet, niin $2D(g)_{p_0} = D(g \circ t_2)_{p_0} \neq D(t_2 \circ g)_{p_0} = D(g)_{p_0}/2$, missä $t_2 = x \mapsto 2x$. Koska $Z(A) \subset N(A)$, myös jokainen sivuluokka $G/Z(A)$ määrää myös yksikäsitteisen konjugaatin. Sivuluokkien avaruuden $G/Z(A)$ voi identifioida tuloavaruuden $S^{n-1} \times S^{n-1} -$ diagonaali kanssa. Tällöin $A_{p,q}$ on tiheä ryhmässä Γ_0 melkein kaikilla p ja q kun käytetään pallomittojen tuloa. Nimittäin jos näin ei ole, on olemassa positiivismittaiset joukot $E_1, E_2 \subset S^{n-1}$ siten, että $A_{p,q}$ ei ole tiheä ryhmässä Γ_0 kaikilla $(p, q) \in E_1 \times E_2$. Jos $e_1 \in E_1$ ja $e_2 \in E_2$, niin pisteet p_0 ja p_1 voidaan kuvata pisteiksi e_1 ja e_2 ortogonaaliryhmän alkion ja aliryhmän A alkion yhdisteellä, missä p_1 on piste päiväntasaajalta. Otetaan jokaiselle $e \in E_1 \times E_2$ tällainen kuvaus, jolloin saadaan joukko $B \subset GM(n)$. Joukko B sisältää positiivismittaisen origon kiinnittävän aliryhmän $O(n)$ sivuluokan osajoukon jokaista joukon C pistettä kohti. Joukko C on positiivismittainen pisteiden p_0 ja p_∞ välisen janan osajoukko, johon origo voidaan kuvata joukon $E_1 \times E_2$ kuvauksilla. Olkoon h pisteet e_1 ja e_2 pisteiksi p_0 ja p_∞ kuvaava Möbius-kuvaus. Tällöin joukon C pisteen kuvajoukko kuvauksella h konjugoidulla ryhmillä A ja $O(n)$ on positiivismittainen. Nimittäin jokaista joukon C vastasi positiivismittainen ryhmän $O(n)$ sivuluokan osajoukko, joten väite seuraa siitä, että jokaiseen pallon pisteeseen kuvautuu korkeintaan äärellinen joukon C pisteitä.

Kvasikonformikuvaus φ on selvästi kvasikonformikuvaus myös euklidisessa metriikassa. Siten se laajenee kvasikonformikuvakseksi ψ reunalle S^{n-1} Lauseen 4.2 perusteella. Selvästi

$$\psi(\gamma p) = \theta(\gamma)\psi(p)$$

kaikilla $\gamma \in \Gamma$ ja $p \in S^{n-1}$, sillä laajennuksien yhdiste on yhdisteen laajennus. Nimittäin jatkuvuuden nojalla reunapistetä lähestyvä jono voidaan valita vapaasti.

LEMMA 6.2. *Olkoon* $\psi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ *kvasikonformikuvaus. Olkoon* $p, q \in S^{n-1}$ *sellaiset, että* $\dot{\psi}_p$ *on assa ja kääntyvä ja* $\Gamma_0 A^+_{p,q}$ *on tiheä joukossa* G_0*. Tällöin* $\dot{\psi}_p$ *on lineaarinen konformikuvaus.*

TODISTUS. Kuvaamalla ψ Möbius-kuvauksella voidaan olettaa, että $\psi(p) = p$ ja $\psi(q) = q$. Kuvataan pari (p, q) vastakkaisiksi pisteiksi (p_0, p_∞) kuvauksella $\tau \in G$ ja korvataan ryhmä Γ ryhmällä $\tau\Gamma\tau^{-1}$, kuvaus φ kuvauksella $\varphi \circ \tau^{-1}$ ja kuvaus $\theta(\gamma)$ kuvauksella $\theta(\tau\gamma\tau^{-1})$. Tällöin päädytään seuraavaan tilanteeseen: $(p, q) = (p_0, p_\infty)$, $\psi(p_0) = p_0$ ja $\Gamma_0 A^+_{p_0,p_\infty}$ on tiheä joukossa G_0.

Samaistetaan pisteen p_0 tangenttiavaruus pallolla S^{n-1} euklidiseen (n-1)-avaruuteen E_0 ja stereograafisen projektion pisteeltä p_∞ tasolle E_0 kautta samaistetaan S^{n-1} Möbius-avaruuden $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ kanssa. Kuvausta ψ voidaan pitää kuvauksena avaruudelta $E_0 \cup \{\infty\}$ itselleen kuten myös mitä tahansa Möbius-ryhmän alkiota.

Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota f ryhmässä G_0 määriteltynä

$$f(g) = \mathscr{C}(\dot{\psi}_{p_0}(gD)),$$

missä D on kuori avaruudessa E_0, jota pidetään vektoriavaruutena, jonka origo on p_0. Differentiaalin määritelmän perusteella $\dot{\psi}_{p_0}(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\psi(tx)$ kaikille $x \in E_0$ ja suppeneminen on tasaista avaruuden E_0 kompakteilla osajoukoilla. Kuori $\dot{\psi}_{p_0}(gD)$ on kuorien avaruudessa raja-arvo $\lim_{t\to 0} t^{-1}\psi(tgD)$, jossa $t\colon x \mapsto tx$. Konformikapasiteetti riippuu jatkuvasti kuorista, joten

$$f(g) = \lim_{t\to 0} \mathscr{C}(t^{-1}\psi(tgD)).$$

Homotetiat $a^t\colon xx \mapsto tx$, jossa $x \in E_0$ ja $0 < t \leq 1$ muodostavat puoliryhmän $A^+(= A^+_{p_0,p_\infty})$. Koska $\Gamma_0 A^+$ on tiheä joukossa G_0, ja koska vasemmalta operointi on homeomorfismi avaruudessa G_0, on myös $\Gamma_0 A^+ a^t$ tiheä joukossa G_0 kaikilla $t > 0$. Täten voidaan valita kuvaukset $\gamma_n \in \Gamma$ ja t_n siten, että $\gamma_n a_{t_n} \to g^{-1}$ ja $t_n \to 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(g) &= \lim_{t\to 0} \mathscr{C}(t^{-1}\psi(tgD)) \\ &= \lim_{t\to 0} \mathscr{C}(\psi(tgD)) \\ &= \lim_{t\to 0} \mathscr{C}(\theta(\gamma)\psi(tgD)) \end{aligned}$$

mille tahansa $\gamma \in \Gamma$, sillä konformikapasiteetti on invariantti Möbius-kuvausten toiminnassa. Koska $\theta(\gamma) \circ \psi = \psi \circ \theta$ kaikille $\gamma \in \Gamma$, pätee

$$\begin{aligned} f(g) &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{C}(\psi(\gamma a_{t_n} gD)) \\ f(g) &= \mathscr{C}(\psi(\lim_{n\to\infty} \gamma a_{t_n} gD)) \\ &= \mathscr{C}(\psi(\gamma g^{-1} gD)) \\ &= \mathscr{C}(\psi(\gamma D)). \end{aligned}$$

Erityisesti siis

$$\mathscr{C}(\dot{\psi}_{p_0}(kD)) = \mathscr{C}(\psi(\gamma D)) = \mathscr{C}(\dot{\psi}_{p_0}(D))$$

kaikille ryhmän G_0 kiertoaliryhmän $SO(n-1,\mathbb{R})$ alkioille, jotka aan pisteen p_0. □

Lemma 6.3. *Olkoon $T\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ kääntyvä lineaarikuvaus siten, että $\mathscr{C}(T(kD)) = \mathscr{C}(T(D))$ jokaiselle $k \in SO(n-1,\mathbb{R})$ ja jokaiselle kuorelle D avaruudessa $\mathbb{R}^{n-1}$. Tällöin T on konformikuvaus.*

Todistus. Lauseen 2.25 perusteella riittää todistaa väite diagonaaliselle T. Voidaan siis olettaa, että T on kuvaus

$$(x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots \lambda_{n-1} x_{n-1}),$$

missä $\lambda_1 = \sup\{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\}$ ja $\lambda_2 = \inf\{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\}$. Yhdistämällä T kuvaukseen $\lambda_1^{-1}\,\mathrm{Id}$ voidaan olettaa, että $\lambda_1 = 1$. Riittää siis osoittaa, että $\lambda_2 = 1$. Asetetaan $\lambda = \lambda_2$. Tarkastellaan kuorta $D(a)$, jonka komplementti koostuu janasta $0 \le x_2 \le a$, $0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$ ja äärettömästä janasta $1 \le x_2 < \infty$, $0 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$. Olkoon k (x_1,x_2)-tasossa toimiva 90 asteen kierto, joka kiinnittää muut akselit. Tällöin kaikille $0 \le a < \infty$, $T(kD(a)) = \lambda k D(\lambda^{-1}a)$ ja $T(D(a)) = D(\lambda a)$. Täten oletuksesta seuraa, että $\mathscr{C}(D(\lambda^{-1}a)) = \mathscr{C}(D(\lambda a))$ eli $\mathscr{C}(D(a)) = \mathscr{C}(D(\lambda^2 a))$ kaikille $a > 0$. Käyttämällä tätä tietoa n kertaa saadaan $\mathscr{C}(D(a)) = \mathscr{C}(D(\lambda^{2n}))$. Jos $\lambda < 1$, pätee $\mathscr{C}(D(1)) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{C}(D(\lambda^{2n})) = \mathscr{C}(\lim_{n\to\infty} D(\lambda^{2n})) = \mathscr{C}(D(0)) = 0$, sillä kuorella $D(0)$ on komplementin komponentti, joka koostuu pisteestä. Mutta Lemmasta 3.10 seuraa, että $\mathscr{C}(D(1)) > 0$. Täten $\lambda = 1$ ja T on konformikuvaus. □

Täten Lauseen 4.3 perusteella ψ on Möbius-kuvaus. Koska

$$\psi(\gamma p) = \theta(\gamma)\psi(p)$$

kaikilla $\gamma \in \Gamma$ ja kaikilla $p \in S^{n-1}$, pätee

$$\psi\gamma = \theta(\gamma)\psi(p)$$

ja siten

$$\theta(\gamma) = \psi\gamma\psi^{-1},$$

mikä todistaa lauseen väittämän. □

Lause 6.4. *Olkoon M ja N kompakteja, vähintään 3-ulotteisia hyperbolisia monistoja, jotka ovat diffeomorfisia. Tällöin ne ovat isometrisiä.*

TODISTUS. Diffeomorfismi ψ indusoi monistojen M ja N perusryhmien välille isomorfismin θ. Koska kompaktien monistojen väliset diffeomorfismit ovat biLipschitz-kuvauksia, ovat ne myös kvasikonformikuvauksia. Monistojen M ja N perusryhmät ovat isomorfisia ryhmän $GM(n)$ diskreettien aliryhmien, joiden alkioilla ei ole kiintopisteitä, kanssa peiteavaruuden konstruktion perusteella. Kuvaus ψ voidaan nostaa avaruuteen $\mathbb{H}^n$ määrittämällä $\overline{\psi}((p,[\beta])) = (\psi(p),[\psi \circ \beta])$. Kuvaus $\overline{\psi}$ on kvasikonforminen, koska rajoittumalla riittävän pieniin ympäristöihin nähdään, että sillä on vastaava differentiaali kuin kuvauksella ψ. Täten

$$\overline{\psi}(\gamma p) = \theta(\gamma)\overline{\psi}(p)$$

kaikilla $\gamma \in \Gamma$ ja $p \in \mathbb{H}^n$.

Koska M ja N ovat kompakteja, perusalueen ja invariantin tekijämitan konstruktiosta nähdään, että niihin voidaan asettaa äärellinen invariantti tekijämitta. Nimittäin, jos p_n on jono perusalueen pisteitä, niin jonolla $\pi(p_n)$ on johonkin pisteeseen p suppeneva osajono. Jos $p_n \to \infty$, niin täytyisi olla joukon $\pi^{-1}(p)$ pisteitä mielivaltaisen lähellä jonon p_n pisteitä. Tämä ei ole mahdollista, koska jono p_n kuuluu perusalueeseen. Täten perusalueen mitta on äärellinen.

Siten väite seuraa helposti Lauseesta 6.1. □

Lähdeluettelo

[1] MATAN GAVISH, *A personal interview with the singular value decomposition*, saatavilla verkosta os. `https://web.stanford.edu/~gavish/documents/SVD_ans_you.pdf`

[2] FREDERICK W. GEHRING, *An Introduction to the Theory of Higher-Dimensional Quasiconformal Mappings*, American Mathematical Society, 2017

[3] PAUL R. HALMOS, *Measure Theory*, Springer-Verlag New York Inc., 1974

[4] BRUNO MARTELLI, *Hyperbolic geometry, surfaces, and 3-manifolds*, 2013, s. 16–17 ja 49–50, saatavilla verkossa os. `http://people.dm.unipi.it/martelli/didattica/matematica/2014/Hyperbolic%20geometry.pdf`

[5] G. D. MOSTOW, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1968, 53-104

[6] RICHARD EVAN SCHWARTZ, *Mostly Surfaces*, 2011, versio samannimisestä kirjasta, s. 78–83 ja 147, saatavilla verkossa os. `http://www.math.brown.edu/~res/Papers/surfacebook.pdf`

[7] NANCY K. STANTON, *A self adjoint linear operator is diagonalizable*, saatavilla verkosta os. `https://www3.nd.edu/~nancy/Math40760/Info/self-adjoint.pdf`