

UUDENMAAN RIISTANHOITOPUIRIN
VALKOHÄNTÄKAURISKANNAN ARVIOINTI
DYNAAMISEN POPULAATIOMALLIN AVULLA

JANI RANTANEN

Tilastotieteen pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
20. kesäkuuta 2018

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Rantanen, Jani: Uudenmaan riistanhoitopiirin valkohäntäkauriskannan arviointi dynaamisen populaatiomallin avulla

Tilastotieteen pro gradu -tutkielma, 38 sivua, 2 liitettä (10 sivua)
20. kesäkuuta 2018

Tiivistelmä

Valkohäntäkauris (*Odocoileus virginianus*) on Suomeen riistaeläimeksi tuotu vieraslaji. Valkohäntäkaurispopulaation kokoa säädelään metsästyksellä esimerkiksi liikenneonnettomuuksien vähentämiseksi. Kannan koosta on tärkeä saada ajankohtaista tietoa, sillä myönnettyjen metsästyslupien määrä perustuu kannan koon arvioihin. Tässä tutkielmassa muodostetaan Bayes-tilastotiedettä hyödyntävä malli Uudenmaan riistanhoitopiirin valkohäntäkaurispopulaation määrän arvioimiseksi. Mallissa otetaan huomioon kauriin luonnolliset elämänvaiheet sekä ulkopuoliset tekijät, kuten metsästys, petoeläimet ja kolarit.

Bayes-tilastotiede perustuu ennakko-oletuksiin tuntemattomista, kiinnostuksen kohteina olevista parametreista. Tehdyt oletukset realisoituvat todennäköisyysjakaumina, joita sanotaan priorijakaumiksi. Dynaamisen populaatiomallin tapauksessa populaation alkutila on tuntematon. Alkutilasta voidaan hankkia ennakkotietoa esimerkiksi asiantuntijoiden tai kirjallisuuden avulla. Bayes-tilastotiede soveltuu populaatiossa tapahtuvien muutosten mallintamiseen, sillä monimutkaistenkin mallien tapauksessa vapaan lähdekoodin ohjelmistoilla on mahdollista hyödyntää valmiiksi implementoituja laskennallisia menetelmiä.

Avainsanat: Bayes-tilastotiede, dynaaminen populaatiomalli, valkohäntäkauris, MCMC

Kiitokset

Erityiskiitos pro-gradu työni mahdollistamisesta ja kommentoinnista lehtori Harri Högmanderille. Lisäksi haluan kiittää Luonnonvarakeskuksen erikoistutkijoita Jyrki Puseniusta ja Katja Holmalaa sekä tutkija Tuomas Kukkoa asiantuntijakommenteista ja tutkimuksen onnistumisen kannalta välttämättömästä avusta.

Jani Rantanen

Sisältö

1	JOHDANTO	1
2	AINEISTO	2
3	BAYES-TILASTOTIEDE JA -MALLINNUS	5
3.1	Bayesilaisen päättelyn perusteita	5
3.2	Hierarkkiset mallit	6
3.3	Priorin valinta	6
4	POSTERIORIN SIMULOINTI	8
4.1	Stokastinen prosessi	8
4.2	Markovin ketju	8
4.3	Monte Carlo -integrointi	9
4.4	Metropolis-Hastingsin algoritmi	9
4.5	Gibbsin algoritmi	10
4.6	Slice sampling	11
5	DYNAAMINEN POPULAATIOMALLI	12
5.1	Mallin aliprosessit	13
5.2	Valkohäntäkaurispopulaation alkutila	21
5.3	Priorien valitseminen	21
5.4	Uskottavuusfunktion muodostaminen	23
5.5	Populaatiomallin posteriori	25
6	MALLIN SIMULOINTI	27
7	TULOKSET	28
8	YHTEENVETO	36
	LÄHTEET	37

A MERKINTÖJÄ	39
B JAGS-MALLIN KOODI	42

1 JOHDANTO

Suomessa riistanhoito on pitkälle kehittynyttä ja ajantasaista. Riistakantojen kestävä käyttö ja metsästyksen sopiva mitoitus edellyttävät tietoa riistaeläinkantojen koosta ja kehityksestä. Metsäriistan seurannan perustana toimii riistakolmiolaskenta, ja eri riistaeläinryhmille on kehitetty omat seurantaohjelmansa. (Maa- ja metsätalousministeriö, 2014.) Riistatalous ja riistaeläinten runsaudenseuranta pohjautuvat Suomessa metsästäjien, riistantutkimuskeskuksen ja riistahallinnon yhteistyöhön. Riistalaskentoja hoitavat vapaaehtoiset metsästäjät, ja riistantutkimuskeskus käsittelee metsästäjien kokoamat tiedot. Suomen riistakeskus sekä maa- ja metsätalousministeriö hyödyntävät näitä tietoja riistaan liittyvän päätöksenteon pohjana. (Suomen Riistakeskus, 2017a.)

Yksi Suomen hirvieläinten heimoon kuuluvista riistaeläimistä on valkohäntäkauris (*Odocoileus virginianus*), joka tuotiin 1930-luvulla Pohjois-Amerikasta Etelä-Suomeen riistaeläimeksi (LuontoPortti, 2017). Valkohäntäkaurispopulaation kasvu on ollut nopeaa ja kasvu jatkuu edelleen. Vuonna 1938 kanta koostui vain kuudesta yksilöstä, mutta kymmenentuhannen valkohäntäkauriin rajan arvioidaan ylittyneen jo vuonna 1973 (Kairikko ja Ruola, 2004). Valkohäntäkaurista esiintyy yleisimmin Lounais-Suomessa, mutta se on leviittänyt lähes Oulun korkeudelle saakka. Tällä hetkellä kannan suuruudeksi arvioidaan noin 70 000 yksilöä. (LuontoPortti, 2017.) Tässä tutkimuksessa paneudutaan valkohäntäkauriin kannan koon arviointiin dynaamisen populaatiomallin avulla. Dynaamista populaatiomallia on aiemmin kehitetty Pöytyän seudun riistanhoitoyhdistyksen alueelta kerätyn aineiston avulla (Arjoranta, 2012). Tässä tutkimuksessa valkohäntäkauriin kantaa arvioidaan Uudenmaan riistanhoitopiirin alueella, jossa elää merkittävä osa Suomen valkohäntäkaurispopulaatiosta. Tavoitteena on luoda dynaaminen populaatiomalli Uudenmaan riistanhoitopiirin alueelle kattavaan kaikki sen 30 riistanhoitoyhdistystä. Tutkimus toteutetaan yhteistyössä Luonnonvarakeskuksen kanssa.

Luvussa 2 esitellään tarkemmin tutkimuksessa käytettyä aineistoa. Luvussa 3 kerrataan Bayes-tilastotieteen perusteet sekä siihen liittyviä, tutkimuksen kannalta oleellisia käsitteitä. Luku 4 käsittelee stokastisia prosesseja sekä erilaisia simulointialgoritmeja, joita tarvitaan mallin muuttujien marginaaliposteriorien mallintamiseen. Dynaaminen populaatiomalli valkohäntäkaurispopulaatiolle esitellään luvussa 5. Luku 6 käsittelee mallin sovittamista ja siihen käytettyjä laskennallisia toimenpiteitä. Tutkimuksen tulokset esitellään yksityiskohtaisesti luvussa 7. Liitteessä A on listattu tutkielmassa käytetyt oleelliset merkinnät.

2 AINEISTO

Tutkimus perustuu Uudenmaan riistanhoitopiirin alueelta kerättyyn valkohäntäkaurista käsittelevään aineistoon. Aineisto on kerätty vuosilta 2000–2014, ja se kattaa Uudenmaan riistanhoitopiirin kaikki 30 riistanhoitoyhdistystä. Helsingin riistanhoitoyhdistyksen alueella valkohäntäkaurista ei tavata, joten se jätetään pois tilastollisista tarkasteluista. Liljendalin riistanhoitoyhdistyksen alueella valkohäntäkauriiden lukumäärät ovat muihin yhdistyksiin verrattuna pieniä, joten Liljendalista saatava aineisto on liitetty rajanaapurinsa Lapinjärven riistanyhdistyksen alueen aineistoon. Muuttujina aineistossa ovat valkohäntäkauriiden kaadettujen yksilöiden lukumäärät luokiteltuna iän ja sukupuolen mukaan sekä maalaskentatulokset, jotka ovat arvioita koko valkohäntäkaurispopulaation koolle. Lisäksi mallinnuksessa hyödynnetään aineistoa valkohäntäkauriiden aiheuttamista liikenneonnettomuuksien määristä ja Satakunnan alueelta kerättyä havaintokorttiaineistoa, joka sisältää informaatiota valkohäntäkauriiden vasatuotosta sekä asiantuntija-arvioihin perustuvia ilvesten saalistamien valkohäntäkauriiden lukumääriä. Seuraavassa kuvataan lyhyesti käytettävää aineistoa.

Kaadettujen valkohäntäkauriiden lukumäärät

Metsästettyjen kauriiden lukumäärät tiedetään metsästyskausilta vuodesta 2000 vuoteen 2014. Tietty vuosi tarkoittaa ajanjaksoa kyseisen vuoden syksystä seuraavan vuoden kevättalveen. Esimerkiksi kaadettujen kauriiden määrä vuonna 2000 tarkoittaa kaadettujen määrää syksystä 2000 kevääseen 2001. Lukumäärät tiedetään sukupuolittain sekä iän mukaan aikuisiksi ja vasoiksi luokiteltuna. Kaadettujen valkohäntäkauriiden lukumäärät tiedetään sukupuolittain sekä iän mukaan aikuisiksi ja vasoiksi luokiteltuna, ja tiedot ovat saatavilla erikseen kaikilta Uudenmaan riistanhoitoyhdistyksiltä.

Maalaskentatulokset

Valkohäntäkauriiden maalaskennassa pyritään laskemaan halutun alueen kaikki valkohäntäkauriit. Laskenta suoritetaan vuosittain lopputalvella pari kuukautta metsästyksen jälkeen. Tarkkaa maalaskennassa käytettyä yhdistys- ja vuosikohtaista laskentamenetelmää ei ole tiedossa, mutta yleensä nisäkäiden maalaskennalla kuitenkin tarkoitetaan lumitilanteen salliessa lumijälkilaskentaa. Tutkimuksessa oletetaan, että eri yhdistyksissä ja eri vuosina suoritettut maalaskennat ovat yhtä tarkkoja. (Suomen Riistakeskus, 2017b.)

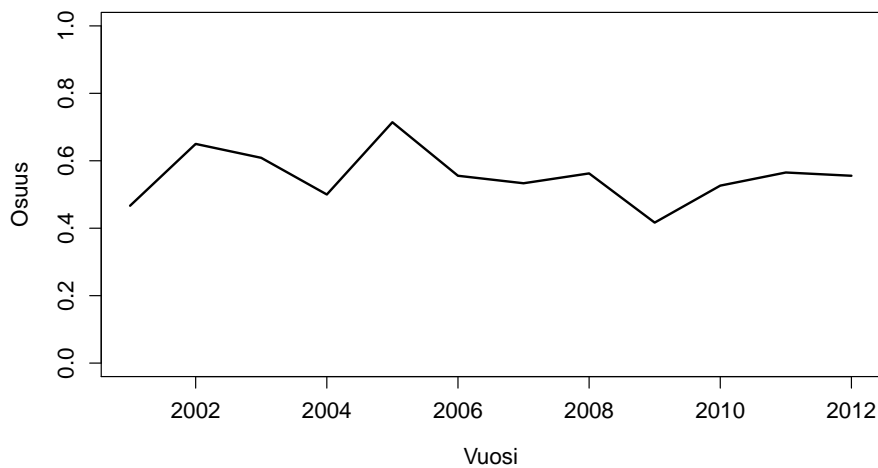
Ilveskanta-arviot

Käytettävissä on myös aineisto ilvesten yksilö- ja pentuemääristä Uudel-

lamalla vuosilta 2001–2015. Näiden arvioiden pohjalta on, asiantuntija-arvioihin perustuen, määritetty vuosittain ilvesten saalistamien valkohäntäkauriiden lukumäärät. Aineisto ja saalisarviot esitetään täsmällisesti luvussa 5.

Liikenneonnettomuusaineisto

Pienten hirvieläinten aiheuttamat kolarit on tilastoitu Uudellamaalla vuosilta 2000–2014. Koko Uudenmaan kattavaa tietoa pelkästään valkohäntäkauriiden aiheuttamista kolareista ei sen sijaan ole saatavilla. Kun peurakolareita tilastoidaan, valkohäntäkauriiden, metsäpeurojen ja metsäkauriiden aiheuttamia kolareita ei eroteta toisistaan. (Niemi et al., 2013.) Lajikohtaisien kolareiden lukumäärät ovat tiedossa vain Hyvinkäältä. Hyvinkään alueella sattuneiden valkohäntäkauriiden aiheuttamien kolareiden lukumäärät ovat muutaman kymmenen kolarin luokkaa kaikkina tarkasteltavina vuosina. Näitä tietoja ei suoraan voida hyödyntää, mutta valkohäntäkauriiden aiheuttamien kolareiden osuus kaikista pienten hirvieläinten kolareista pysyy lähes samana eri vuosina Hyvinkään alueella. Kuvassa 1 on vuosittainen valkohäntäkauriiden osuus liikenneonnettomuuksissa kuolleista hirvieläimistä Hyvinkäällä.



Kuva 1: Valkohäntäkauriiden osuus liikenneonnettomuuksissa kuolleista hirvieläimistä Hyvinkäällä vuosittain.

Tässä tutkimuksessa oletetaan, että valkohäntäkauriit aiheuttavat yhtä suuren osan kaikista kolareista tarkasteltavina vuosina ja Hyvinkään kolari-

neiston avulla tästä osuudesta saadaan tarvittavaa informaatiota mallinnusta varten. Kolaritiedot puuttuvat vuosilta 2013 ja 2014.

Satakunnan havaintokorttiaineisto

Uudenmaan riistanhoitopiiristä ei ole saatavilla aineistoa, josta saisi informaatiota valkohäntäkaurisnaaraiden vasatuotosta. Satakunnan alueella valkohäntäkaurishavainnot on koottu havaintokorttiaineistoksi riistanhoitoyhdistyksittäin. Havainnot on luokiteltu yksinäisiin vasoihin, yksinäisiin naaraisiin sekä 1-, 2- ja 3-vasaisiin naaraisiin. Aineisto on saatavilla metsästyskausilta, jotka ovat alkaneet vuosina 1999 ja 2000 sekä 2005–2010. Näitä tietoja käytetään hyödyksi, kun mallinnetaan vasojen ja naaraiden välistä suhdelukua. Vasa-emo-suhde oletetaan samaksi eri vuosina, mutta mallinnuksessa huomioidaan vasojen ja naaraiden välisen suhteen vaihtelu riistanhoitoyhdistyksittäin Satakunnan havaintokorttiaineiston avulla.

3 BAYES-TILASTOTIEDE JA -MALLINNUS

Bayes-tilastotieteessä havainnot ajatellaan tunnetuiksi ja kiinteiksi, mutta todellisuus on tuntematon. Tutkimusongelmaan liittyvät tuntemattomat parametrit ovat satunnaismuuttujia, joiden arvojen vaihtelua kuvataan todennäköisyysjakaumilla. Lopulliseen malliin sisällytetään havaintoaineiston informaation lisäksi ongelmaan liittyvää etukäteistietoa. (Gelman et al., 2000.)

3.1 Bayesilaisen päättelyn perusteita

Olkoot satunnaismuuttuja y ja siihen liittyvät kiinnostavat parametrit $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$. Lisäksi oletetaan riippumaton otos $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, jonka jakauma ehdolla parametrit on tunnettu. Tällöin havaintoaineiston jakauma voidaan esittää uskottavuusfunktiona $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$. Bayes-päätelyssä tuntemattomille parametreille määritellään priorijakauma $p(\boldsymbol{\theta})$, joka valitaan saatavilla olevan ennakkotiedon perusteella ilman aineiston vaikutusta. Tavoitteena on löytää parametrien $\boldsymbol{\theta}$ ehdollinen jakauma ehdolla havaittu aineisto \mathbf{y} eli posteriorijakauma. (Gelman et al., 2000.)

Aluksi on muodostettava yhteistiheysfunktio tuntemattomille parametreille ja havaitulle aineistolle. Tämä saadaan priorijakauman ja uskottavuuden tulona seuraavasti:

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}).$$

Posteriorijakauma voidaan nyt muodostaa Bayesin kaavan avulla:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}.$$

Kun satunnaismuuttuja y on jatkuva, niin $p(\mathbf{y}) = \int p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$, ja diskreetillä y vastaavasti $p(\mathbf{y}) = \sum_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$. Termin $p(\mathbf{y})$ laskeminen on usein haastavaa tai mahdotonta, sillä se vaatii integraalin laskemista parametrien $\boldsymbol{\theta}$ yli. Posteriori on kuitenkin parametrien $\boldsymbol{\theta}$ funktio, joten $p(\mathbf{y})$ voidaan ajatella vakioksi. Tällöin termi $p(\mathbf{y})$ on skaalausermi, ja voidaan määritellä normalisoimaton posteriori

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}).$$

Posteriorin ja eri muuttujien marginaaliposteriorien estimoimiseen tullaan käyttämään JAGS-ohjelmistoa, joka hyödyntää erilaisia posteriorin estimoimiseen kehitettyjä algoritmeja.

3.2 Hierarkkiset mallit

Tutkittavan ongelman ratkaiseminen voi joskus vaatia, että jotkin mallin parametrit ovat toisistaan riippuvia ja kytkettyjä toisiinsa jollain tavalla. Olkoot havainnot \mathbf{y} kuten kappaleessa 3.1 ja parametrivektorit $\boldsymbol{\theta}$ sekä $\boldsymbol{\phi}$. Oletetaan, että havainnoille pätee

$$\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi} \sim p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}).$$

Oletetaan lisäksi, että havainnot \mathbf{y} ovat riippuvia vain parametreista $\boldsymbol{\theta}$ ja että parametrit $\boldsymbol{\phi}$ vaikuttavat satunnaismuuttujiin \mathbf{y} vain parametrien $\boldsymbol{\theta}$ välityksellä. Tällöin uskottavuusfunktio on

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}) = p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}).$$

Parametrien $\boldsymbol{\theta}$ ehdollinen jakauma ehdolla $\boldsymbol{\phi}$ on $\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\phi} \sim p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\phi})$, joten priorin tuntemattomille parametreille Bayesin kaavan avulla laskettuna on

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}) = p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\phi})p(\boldsymbol{\phi}).$$

Tällöin parametrit $\boldsymbol{\phi}$ ovat siis priorin parametreja eli *hyperparametreja*, joille on valittava myös priorin $p(\boldsymbol{\phi})$, jota kutsutaan *hyperprioriksi*. Posteriori parametrivektoreille $\boldsymbol{\theta}$ ja $\boldsymbol{\phi}$ on

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}|\mathbf{y}) &= \frac{p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})}{p(\mathbf{y})} \\ &= \frac{p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\phi})p(\boldsymbol{\phi})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})}{p(\mathbf{y})} \\ &\propto p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\phi})p(\boldsymbol{\phi})p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

3.3 Priorin valinta

Priorijakauman avulla malliin voidaan sisällyttää käytettävissä olevaa ennakkotietoa. Priorin valintaan liittyy kuitenkin lukuisia seikkoja, jotka tulee ottaa huomioon ennen aineiston analysointia. Priorijakaumalla tulee olla positiivinen todennäköisyys aineistosta lasketuille parametreille $\boldsymbol{\theta}$, jotta priorin olisi järkevä. Prioreja voidaan jaotella ominaisuuksiensa mukaan esimerkiksi *informatiivisiin* ja *epäinformatiivisiin* prioreihin. Tämä jako kuvastaa tutkijan ennakkotiedon varmuutta $\boldsymbol{\theta}$:n todellisen jakauman suhteen, mutta karkea jako kahteen luokkaan voi olla harhaanjohtava.

Informatiivisella priorilla tarkoitetaan yleensä vahvaa käsitystä tutkittavan ilmiön luonteesta, joka perustuu aikaisempiin havaintoihin. Tällöin voidaan

esimerkiksi todeta saavatko θ :n alkiot positiivisia vai negatiivisia arvoja, ja mille välille arvot todennäköisesti sijoittuvat. Myös θ :n jakauman muoto voi olla tiedossa. Epäinformatiivisella priorilla tarkoitetaan yleensä jakaumaa, joka ei ota merkittävästi kantaa θ :n saamiin arvoihin. Jakaumalla voi olla esimerkiksi suuri varianssi, eikä se rajoita pois äärimmäisiä arvoja. Tyypillinen esimerkki epäinformatiivisesta priorista on tasajakauma, jolloin kaikki θ :n arvot ovat yhtä todennäköisiä. Mikäli vahvaa ennakkotietoa ei ole, voidaan epäinformatiivisella priorilla myös vähentää tarvittavien hyperparametrien määrää tai välttää ne kokonaan.

Priorijakaumana on usein hyödyllistä käyttää *konjugaattiprioria*. Konjugaattipriori takaa, että posteriorijakaumalla on sama parametrinen muoto kuin priorijakaumalla. Esimerkiksi Beta-jakauman käyttö priorina tuottaa Beta-posteriorin binomijakautuneella aineistolla. Konjugaattijakauman etuja ovatkin juuri laskennan helppous ja tunnettu posteriorin muoto.

4 POSTERIORIN SIMULOINTI

Posteriorijakaumaa ei usein voida määrittää suljetussa muodossa eikä siitä myöskään voida aina tuottaa otoksia yksinkertaisesti. Tällöin on turvaututtava numeerisiin menetelmiin. Erilaisten simulointimenetelmien avulla on mahdollista tuottaa havaintoja jakaumasta, joka simulointikierrosten määrän kasvaessa lähestyy todellista posterioria. Erityisesti moniulotteisten ja monimutkaisten mallien tapauksessa on simulointi usein ainoa vaihtoehto bayesiläisen analyysin suorittamiseksi.

Tutkielman simuloinneissa hyödynnetään bayesiläiseen data-analyysiin suunniteltua JAGS-ohjelmistoa (Plummer, 2003). Ohjelma hyödyntää Markovin ketju Monte Carlo -menetelmiin (*Markov Chain Monte Carlo, MCMC*) kuuluvia Gibbs, Metropolis-Hastings ja Slice sampling -algoritmeja. (Spiegelhalter et al., 1996.) Tässä luvussa määritellään käsitteet stokastinen prosessi, Markovin ketju ja Monte Carlo -integrointi sekä tarvittavien simulointialgoritmien periaatteet.

4.1 Stokastinen prosessi

Stokastinen prosessi määritellään joukkona $\{X_t \mid t \in T\}$, missä T on indeksijoukko ja satunnaismuuttujat X_t saavat arvoja joukosta $S \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin joukko S on stokastisen prosessin tila-avaruus ja joukko T on parametriavaruus. Tässä tutkimuksessa käsitellään diskreettiaikaisia stokastisia prosesseja, jolloin indeksijoukko T on numeroituva. Lisäksi oletetaan, että T on muotoa $T = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Markovin ketju

Jos stokastisessa prosessissa muuttujan nykyinen arvo X_t riippuu ainoastaan aikaisemman ajanhetken arvosta X_{t-1} ja on ehdollisesti riippumaton aiemmista arvoista $X_{t-2}, X_{t-3}, \dots, X_0$, niin kyseisellä prosessilla on Markovin ominaisuus. Markovin prosessi on erikoistapaus stokastisesta prosessista. (Gamerman, 1997, s. 93.)

Diskreetillä parametriavaruudella Markovin prosessi tunnetaan nimellä Markovin ketju. Diskreetti stokastinen prosessi on Markovin ketju, jos

$$P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})$$

kaikilla $x_0, x_1, \dots, x_t \in S$. (Gamerman, 1997, s. 94–95.)

Bayes-mallinnuksen tapauksessa Markovin ketju on muodostettava siten, että simulointi aloitetaan jostain alkuarvosta $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ ja siirtymätodennäköisyydet $P(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t-1)})$ lähestyvät yksikäsitteistä stationäärijakaumaa, joka on posteriorijakauma $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$.

4.3 Monte Carlo -integrointi

Tavoitteena Monte Carlo -integroinnissa on arvioida odotusarvoa $E[\gamma(\mathbf{X})]$, missä $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio ja \mathbf{X} on d -dimensioinen satunnaisvektori, jolla on tiheysfunktio $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan lisäksi, että $E[|\gamma(\mathbf{X})|] < \infty$. Nyt odotusarvo voidaan määrittää laskemalla integraali

$$E[\gamma(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^k} \gamma(x)f(x) dx.$$

Numeerinen integraalin laskeminen hankaloituu nopeasti dimension d kasvaessa. MCMC-menetelmissä ideana on välttää integraalin laskeminen. Generoidaan otos satunnaisvektoreita $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ jakaumasta f , jolloin ne ovat samoin jakautuneita kuin \mathbf{X} . Suurten lukujen lain nojalla saadaan

$$E[\gamma(\mathbf{X})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(X_i).$$

Monte Carlo -integrointia voidaan soveltaa Bayes-tilastotieteeseen. Olkoot $\boldsymbol{\theta}$ kiinnostavat parametrit sisältävä parametrivektori ja \mathbf{y} havaintovektori. Asetetaan $\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta}$ ja $f(x) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$, jolloin $\boldsymbol{\theta} \sim p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Monte Carlo -integroinnilla voidaan estimoida monimutkaisten posteriorijakaumien odotusarvo ja varianssi. (Pierre, 1997, s. 290–291.)

4.4 Metropolis-Hastingsin algoritmi

Metropolis-Hastingsin algoritmilla saadaan otos parametrivektorin $\boldsymbol{\theta}$ posteriorijakaumasta $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Oletetaan, että parametrilla $\boldsymbol{\theta}$ on priorijakaumana $p(\boldsymbol{\theta})$. Ideana on päivittää parametrin $\boldsymbol{\theta}_i$ arvo generoimalla uusi arvo $\boldsymbol{\theta}'$ ehdotusjakaumasta $q(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\theta}_i)$. Ehdotusjakauman $q(\boldsymbol{\theta}'|\cdot)$ täytyy määritellä todennäköisyysjakauma kaikille $\boldsymbol{\theta}' \in \mathbb{R}^d$. Lisäksi, jos siirtymä edellisestä tilasta $\boldsymbol{\theta}_i$ tilaan $\boldsymbol{\theta}'$ on mahdollinen, eli $q(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\theta}_i) > 0$, niin vastaava siirtymän täytyy olla mahdollinen myös toisin päin, eli $q(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{\theta}') > 0$. Ehdotusjakauma voi olla esimerkiksi moniulotteinen normaalijakauma, missä jakaumien odotusarvot saadaan vektorista $\boldsymbol{\theta}_i$. Algoritmi toimii seuraavasti:

1. Asetetaan alkuarvot $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ ja indeksilaskuri $i = 0$.
2. Generoidaan uusi arvo $\boldsymbol{\theta}' \sim q(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\theta}_i)$. Hyväksytään tämä ehdotus todennäköisyydellä $\alpha(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}')$, missä

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}') = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}_i|\boldsymbol{\theta}')}{\pi(\boldsymbol{\theta}_i)q(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\theta}_i)} \right\}.$$

3. Jos ehdotettu arvo $\boldsymbol{\theta}'$ hyväksytään, niin asetetaan $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}'$. Jos ehdotus hylätään, niin $\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i$. Päivitetään indeksilaskurin arvo $i = i + 1$ ja toistetaan kohta 2, kunnes generointi on suoritettu $B + N$ kertaa. Ensimmäiset B kappaletta iteraatioita ovat lämmittely- eli *burn-in*-jaksoa, jonka aikana ketjun ajatellaan saavuttavan tasapainojakauman, ja loput N kierrosta tuottavat approksimatiivisen otoksen posteriorista. (Gamerman, 1997, 163.)

4.5 Gibbsin algoritmi

Oletetaan, että kiinnostava jakauma on $p(\boldsymbol{\theta})$, missä $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$. Tässä tapauksessa riittää olettaa, että tarkastellaan skalaarimuotoisia parametreja, mutta vektorin $\boldsymbol{\theta}$ alkiot voisivat olla myös matriiseja tai vektoreita. Gibbsin algoritmissa simuloinnit tapahtuvat ehdollisista jakaumista $p_i(\theta_i|\boldsymbol{\theta}_{-i})$. Tämän vuoksi kaikkien yksittäisten parametrien θ_i ehdollisten jakaumien, ehdolla muut parametrit $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_d)$, täytyy olla tunnettuja. Gibbsin algoritmi toimii seuraavalla tavalla.

1. Asetetaan alkuarvot $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$. Iteraatiolaskurin arvoksi asetetaan $j = 1$.
2. Simuloidaan kierroksella j uusi parametrivektori $\boldsymbol{\theta}^{(j)}$ ehdollisista jakaumista.

$$\begin{aligned} \theta_1^{(j)} &\sim p_1(\theta_1|\boldsymbol{\theta}_{-1}^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim p_2(\theta_2|\boldsymbol{\theta}_{-2}^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ \theta_d^{(j)} &\sim p_d(\theta_d|\boldsymbol{\theta}_{-d}^{(j-1)}) \end{aligned}$$

3. Asetetaan $j = j + 1$, ja toistetaan kohtaa 2. Generointeja tehdään yhteensä N kierroksen verran.

Lopputuloksena saadaan vektorit $\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(N)}$. Jos simulointi on onnistunut, niin otoksen $\theta_1^{(N)}, \theta_2^{(N)}, \dots, \theta_d^{(N)}$ yhteisjakauma lähestyy jakaumaa $p(\boldsymbol{\theta})$, kun $N \rightarrow \infty$. (Gamerman, 1997, s. 120–121.)

4.6 Slice sampling

Metropolis-Hastingsin ja Gibbsin algoritmeilla voidaan suorittaa otantaa hyvin monimutkaisista jakaumista. Joissain tilanteissa toimivan Metropolis-Hastingsin ehdotusjakauman löytäminen voi olla haasteellista. Gibbsin algoritmissa havaintojen generointi ehdollisista jakaumista on joskus hidasta ja voi vaatia MCMC-menetelmien hyödyntämistä ehdollisten jakaumien simuloimiseksi.

Oletetaan jälleen, että halutaan löytää otos satunnaisvektorin $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$ posteriorijakaumasta $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Tarkastellaan algoritmia yhdelle vektorin alkiolle. Merkitään sitä tässä kohdassa θ . Slice sampling toimii seuraavasti:

1. Valitaan alkuarvo θ_0 ja asetetaan $j = 1$.
 - (a) Generoidaan apusattunnaismuuttujalle H arvo h tasajakaumasta väliltä $[0, p(\theta_{j-1}|\mathbf{y})]$.
 - (b) Generoidaan θ_j tasajakaumasta väliltä $p^{-1}(h, \theta_{j-1})$, missä $p^{-1}(h, \theta_{j-1})$ on se joukko, jonka funktio p kuvaa väliksi (h, θ_{j-1}) (alkukuva).
2. Asetetaan $j = j + 1$. Toistetaan kohta 1. Kierroksia tehdään kaikkiaan N kappaletta.

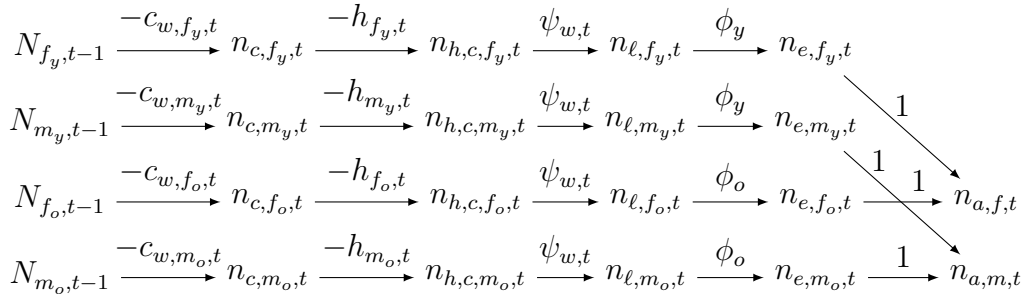
Näin saadaan otos θ posteriorista $p(\theta|\mathbf{y})$. (Ranford, 2003.)

5 DYNAAMINEN POPULAATIOMALLI

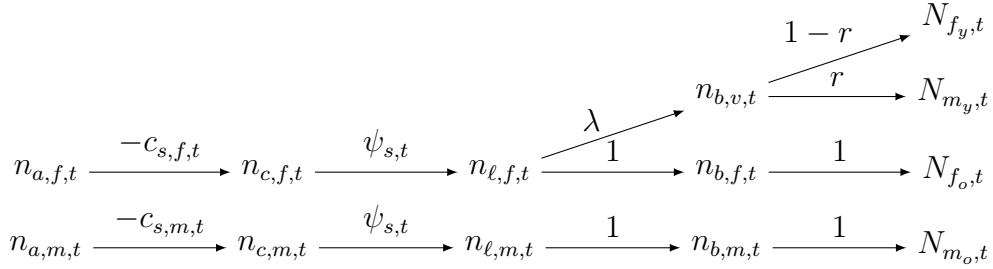
Tässä tutkimuksessa hyödynnetään dynaamista populaatiomallia, joka on malli populaatiossa tapahtuville lukumäärä- ja rakennemuutoksille tietyn ajan kuluessa. Tarkasteluajan jakoväli voidaan valita tilannekohtaisesti populaation ominaisuuksien mukaisesti. Valkohäntäkauriin tapauksessa aika voidaan jakaa lisääntymiskausien avulla vuoden mittaisiin osiin, jolloin valkohäntäkauriin vuoden alkupisteeksi valitaan hetki välittömästi syntymän jälkeen. Tässä mallissa populaatio oletetaan suljetuksi, eli Uudenmaan valkohäntäkaurispopulaatiosta ei muuta yksilöitä pois eikä populaatioon muuta uusia yksilöitä. Kannan kokoon ja rakenteeseen vaikuttavat esimerkiksi syntymät ja kuolemat. Syntyminen lisää nuorien yksilöiden määrää populaatiossa, ja sitä voidaan arvioida esimerkiksi kirjallisuutta ja Satakunnan havaintokorttiaineistoa hyödyntäen. Kannan pienenemistä aiheuttavat luonnollisten kuolemien lisäksi metsästys, liikenneonnettomuudet sekä ilvesten saaliiksi joutuminen.

Prosessikaavio valkohäntäkauriille

Valkohäntäkaurispopulaation rakennemuutokset voidaan jakaa kahteen ajanjaksoon vuosittain. Talvikautena kauriita menehtyy liikenneonnettomuuksissa, metsästyksen seurauksena, ilvesten saalistuksessa sekä muista luonnollisista syistä. Talvikausi päättyy vasaajien aikuistuuessa. Kesäkautena aikuiset urokset ja naaraat voivat jälleen menehtyä kolareissa ja ilvesten saalistamina, mutta eivät metsästyksen seurauksena. Kesäkautena naaraat myös tuottavat uusia vasoja populaatioon. Kuvassa 2 näkyy, kuinka valkohäntäkaurispopulaation rakenne muuttuu talvikauden aikana ja kuvassa 3 kesäkauden aikana. Kuvien symbolit selitetään mallin aliprosessien yhteydessä luvussa 5.1. On syytä huomata, että prosessi on sama jokaisessa yhdistyksessä, joten yhdistykseen liittyvä indeksi u jätetään selkeyden vuoksi pois kauriiden lukumääristä tässä luvussa.



Kuva 2: Valkohäntäkauriiden populaation talvikauden rakennemuutoksia kuvaava prosessikaavio.



Kuva 3: Valkohäntäkauriiden populaation kesäkauden rakennemuutoksia kuvaava prosessikaavio.

Dynaamisessa populaatiomallissa huomioidaan kannan koon lisäksi rakenne muutokset populaatiossa. Valkohäntäkauriit voidaan jakaa iän ja sukupuolen mukaan nuoriin ja aikuisiin sekä sukupuolen mukaan uroksiin ja naaraisiin. Näin saadaan neljä eri tilaa, joissa olevien valkohäntäkauriiden yksilömäärät muuttuvat vuosittain eri tavoin. Vuosittainen muutosprosessi koostuu useista erillisistä tapahtumista, joita kutsutaan aliprosesseiksi. Näitä aliprosesseja ovat esimerkiksi syntyminen, luonnonoloista selviäminen ja vanheneminen.

5.1 Mallin aliprosessit

Tilamallin odotusarvoa eli eri tiloihin kuuluvien yksilöiden odotusarvoa voidaan kuvata matriisien avulla. Vuosi jaetaan eri tilojen muutoksia selittäviin aliprosesseihin ja jokaista aliprosessia varten määritellään matriisi, jonka alkiot kertovat, miten tietyssä tilassa olevien valkohäntäkauriiden yksilömäärä muuttuu. Vuoden aikana tapahtuvat muutokset saadaan yhdistämällä aliprosesseja kuvaavat matriisit toisiinsa peruslaskutoimituksilla. Jotta odotusarvolle saadaan matriisiesitys, on oleellista tietää yksilömäärät tiloittain ennen muutosprosessia eli syksyllä ennen seuraavan metsästyskauden alkua. (Buckland et al., 2007.)

Mahdollisia tiloja i_j valkohäntäkauriille on jokaisella ajanhetkellä neljä. Sukupuolelle i pätee, että $i = f$ (*female*), kun yksilö on naaras ja koiraille $i = m$ (*male*). Ikäryhmiä j on kaksi, ja kun kauris on vasa merkitään $j = y$ (*young*), ja kauriin ollessa aikuinen $j = o$ (*old*). Esimerkiksi ajanhetkellä t nuorten naaraiden lukumäärä on siis $N_{f_y,t}$. Kun tarkasteltava vuosi on t , niin muutosprosessin jälkeen eli syksyllä ennen seuraavaa metsästyskautta, eri ti-

loissa olevien yksilöiden lukumäärät voidaan kirjoittaa vektorin \mathbf{N}_t avulla

$$\mathbf{N}_t = \begin{bmatrix} N_{f_y,t} \\ N_{m_y,t} \\ N_{f_o,t} \\ N_{m_o,t} \end{bmatrix}.$$

Yksilöiden lukumäärien muutoksia eri aliprosessien tilojen välillä on helppo kuvata matriisien avulla. Koska kiinnostuksen kohteena olevat lukumäärät on jaoteltu ryhmiin sukupuolen ja iän mukaan, ovat kyseiset matriisit 4×4 -matriiseja. Tällöin suhteelliset lukumäärien muutokset ryhmien sisällä voidaan lukea matriisien diagonaaleilta ja siirtymät ryhmistä toisiin diagonaalin ulkopuolelta.

Liikenneonnettomuudet

Valkohäntäkauriiden aiheuttamista liikenneonnettomuuksista ei ole koko Uudenmaan kattavaa tietoa. Kaikkien pienten hirvieläinten osalta liikenneonnettomuudet on kuitenkin tilastoitu vuosilta 2000–2012. Valkohäntäkauriiden aiheuttamien kolareiden osuus näistä kolareista on suunnilleen vakio kyseisinä vuosina. Vastaavasti kaikkien pienten hirvieläinten liikenneonnettomuuksien lukumäärän ja koko Uudenmaan maalaskentatulosten perusteella saadun populaatiokoon suhde vaihtelee välillä 0.127–0.154 vuosina 2000–2008 keskiarvonaan 0.138 ja vuosina 2009–2012 välillä 0.170–0.235 keskiarvonaan 0.206. Näiden asioiden vuoksi pienten hirvieläinten aiheuttamien liikenneonnettomuuksien lukumäärän ajatellaan olevan vuosittain suoraan verrannollinen Uudenmaan valkohäntäkaurispopulaation kokoon. Liikenneonnettomuuksista ei ole tietoa vuosilta 2013–2015. JAGS imputoi arvot puuttuviin tietoihin näille vuosille, jotka ovat samalla ennusteita kolareiden määriille.

Laskennan helpottamiseksi estimoitava kolareiden ja populaatiokoon estimoitava suhde ajatellaan samaksi vuosina 2000–2008 ja vastaavasti vuosina 2009–2012, jolloin estimoitavia suhdelukuja on kaksi. Aineiston perusteella on määritetty missä suhteessa kolarien lukumäärät jakaantuvat eri tiloissa olevien yksilöiden välille talvella ja kesällä. Talviaikana kolareissa kuolleiden yksilöiden lukumäärä mallinnetaan deterministisenä prosessina. Vuonna t talviaikana w (*winter*) kolareissa c (*collision*) kuolleet yksilöt voidaan esittää vektorina $\mathbf{c}_{w,t}$ seuraavasti:

$$\mathbf{c}_{w,t} = \begin{bmatrix} c_{w,f_y,t} \\ c_{w,m_y,t} \\ c_{w,f_o,t} \\ c_{w,m_o,t} \end{bmatrix} = c_{w,t} \begin{bmatrix} c_{w,f_y,t}^* \\ c_{w,m_y,t}^* \\ c_{w,f_o,t}^* \\ c_{w,m_o,t}^* \end{bmatrix},$$

missä $c_{w,t}$ on vuoden t talven liikenneonnettomuuksien lukumäärä ja $c_{w,i_j,t}^*$ on tilan i_j liikenneonnettomuuksissa menehtyneiden yksilöiden osuus vuonna t .

Kesällä vain aikuiset urokset ja naaraat voivat joutua kolareiden uhreiksi mallissa, sillä nuoret yksilöt ovat jo aikuistuneet, eikä aineisto sisällä vasa-kolareita kesälle. Kesäkauden s (*summer*) kolareille voidaan myös määrittää vektori $\mathbf{c}_{s,t}$ seuraavasti:

$$\mathbf{c}_{s,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{s,f,t} \\ c_{s,m,t} \end{bmatrix} = c_{s,t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{s,f,t}^* \\ c_{s,m,t}^* \end{bmatrix},$$

missä $c_{s,t}$ on vuoden t kesän liikenneonnettomuuksien lukumäärä ja $c_{s,i,t}^*$ on tilan i liikenneonnettomuuksissa menehtyneiden yksilöiden osuus vuoden t kesällä.

Metsästys

Metsästettyjen h (*hunted*) kauriiden lukumäärät ovat tarkasti tiedossa kaikissa neljässä tilassa oleville yksilöille. Vektorissa \mathbf{h}_t ovat vuonna t metsästettyjen kauriiden lukumäärät seuraavasti:

$$\mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_{f_y,t} \\ h_{m_y,t} \\ h_{f_o,t} \\ h_{m_o,t} \end{bmatrix}.$$

Ilvesten saalistus

Uudenmaan alueelta on käytössä aineisto, joka sisältää arvion keskimääräisestä ilvesten lukumäärästä jokaiselta tarkasteltavalta vuodelta. Aineiston avulla voidaan arvioida saalistettujen kauriiden lukumäärää. Asiantuntija-arvioiden mukaan urosilves saalistaa noin 10 kaurista ja naarasilves noin 5 kaurista vuoden aikana. Lisäksi arvio on, että jokaisena vuonna saalistavien urosten lukumäärä on noin 1.3-kertainen saalistaviin naaraisiin verrattuna. Ilvespentueista tiedetään, että jokaisessa pentueessa on noin 1.7 pentua. Näiden tietojen perusteella saadaan arviot aikuisten urosten ja naaraiden lukumäärille, sekä näiden saaliille. Saalistuksen oletetaan jakautuvan talvelle ja kesälle siten, että 90 % saalistuksesta tapahtuu talvella ja loput 10 % kesällä jokaisena vuonna. Merkitään vuoden t ilvesten asiantuntija-arvioihin perustuvaa saalista ℓ_t^* . Todellisen saalislukumäärän ℓ (*lynx*) oletetaan noudattavan Poisson-jakaumaa

$$\ell_t \sim \text{Poisson}(\ell_t^*).$$

Merkitään talvikauden kolareiden ja metsästysten jälkeistä kannan kokoa vektorilla $\mathbf{n}_{h,c,t}$, joka on

$$\mathbf{n}_{h,c,t} = \mathbf{N}_{t-1} - \mathbf{c}_{w,t} - \mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} n_{h,c,f_y,t} \\ n_{h,c,m_y,t} \\ n_{h,c,f_o,t} \\ n_{h,c,m_o,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{f_y,t-1} - c_{w,f_y,t} - h_{f_y,t} \\ N_{m_y,t-1} - c_{w,m_y,t} - h_{m_y,t} \\ N_{f_o,t-1} - c_{w,f_o,t} - h_{f_o,t} \\ N_{m_o,t-1} - c_{w,m_o,t} - h_{m_o,t} \end{bmatrix}.$$

Talven saalistuksesta selviämistä voidaan nyt mallintaa binomijakaumalla

$$n_{\ell,i_j,t} \sim \text{Bin}(n_{h,c,i_j,t}, \psi_{w,t}),$$

missä selviämisen todennäköisyys on

$$\psi_{w,t} = 1 - \frac{0.9 \cdot \ell_t}{\sum_{u=1}^{28} (n_{h,c,f_y,t,u} + n_{h,c,m_y,t,u} + n_{h,c,f_o,t,u} + n_{h,c,m_o,t,u})},$$

ja indeksi u viittaa yhdistykseen. Kauriin sukupuolen ja iän ei oleteta vaikuttavan ilveksen saaliiksi joutumisen todennäköisyyteen. Ilvesten saalistukselta välttymistä talviaikana voidaan nyt kuvata matriisilla

$$\mathbf{L}_{w,t} = \begin{bmatrix} \psi_{w,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{w,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{w,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{w,t} \end{bmatrix}.$$

Kesällä vain aikuiset urokset ja naaraat voivat joutua ilvesten saalistamiksi, sillä vasaaja lasketaan vasta metsästyskauden alusta alkaen. Merkitään kesäkauden kolareiden jälkeistä kannan kokoa vektorilla $\mathbf{n}_{c,t}$, joka on

$$\mathbf{n}_{c,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{c,f,t} \\ n_{c,m,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{a,f,t} - c_{s,f,t} \\ n_{a,m,t} - c_{s,m,t} \end{bmatrix},$$

missä $n_{a,m,t}$ ja $n_{a,f,t}$ ovat aikuisten urosten ja naaraiden lukumäärät heti ikääntymisprosessin jälkeen.

Myös kesän saalistuksesta selviämistä voidaan nyt mallintaa binomijakaumalla

$$n_{\ell,i,t} \sim \text{Bin}(n_{c,i,t}, \psi_{s,t}),$$

missä

$$\psi_{s,t} = 1 - \frac{0.1 \cdot \ell_t}{\sum_{u=1}^{28} (n_{c,f,t,u} + n_{c,m,t,u})}.$$

Kuten talviaikana, ilveksen saaliiksi joutumisen todennäköisyys kesäaikana oletetaan riippumattomaksi kauriin sukupuolesta. Ilvesten saalistukselta välttymistä kesäaikana voidaan nyt kuvata matriisilla

$$\mathbf{L}_{s,t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{s,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{s,t} \end{bmatrix}.$$

Ympäristöolosuhteet

Luonnonolot ja näin ollen myös selviämistodennäköisyydet vaihtelevat vuosittain. Luultavasti todennäköisyydet eroavat myös eri ikäisillä ja eri sukupuolta olevilla yksilöillä. Riittävän tiedon puuttuessa oletamme selviämistodennäköisyydet samoiksi sekä sukupuolitain että kaikkina tarkasteltavina vuosina. Lisäksi yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että yksilöitä menehtyy luonnollisesti vain talviaikana. Merkitään aikuisten yksilöiden selviämistodennäköisyyttä ϕ_o ja vasojen selviämistodennäköisyyttä ϕ_y . Todellisuudessa selviämistodennäköisyydet voivat erota toisistaan myös koirilla ja naaraila, mutta voidaan olettaa, että vasojen ja aikuisten välillä ero on suurempi. Luonnollisista haasteista selviämistä voidaan mallintaa kahdella binomijakaumalla. Luonnonoloista e (*environment*) selvinneiden vasojen lukumäärä on $n_{e,f_y,t} + n_{e,m_y,t}$ ja aikuisten lukumäärä on $n_{e,f_o,t} + n_{e,m_o,t}$. Lukumäärille pätee

$$\begin{aligned} n_{e,f_y,t} &\sim \text{Bin}(n_{\ell,f_y,t}, \phi_y), & n_{e,m_y,t} &\sim \text{Bin}(n_{\ell,m_y,t}, \phi_y) \text{ ja} \\ n_{e,f_o,t} &\sim \text{Bin}(n_{\ell,f_o,t}, \phi_o), & n_{e,m_o,t} &\sim \text{Bin}(n_{\ell,m_o,t}, \phi_o). \end{aligned}$$

Selviytymistä ympäristöolosuhteista kuvataan matriisilla

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_o \end{bmatrix}.$$

Ikääntyminen

Kun valkohäntäkauris on selvinnyt luonnon haasteista ja välttynyt metsästykseltä, tieliikenneonnettomuuksilta sekä ilveksiltä, niin se välttämättä ikääntyy. Tämä tarkoittaa, että tilassa f_y olevat yksilöt siirtyvät tilaan f_o ja tilassa m_y olevat tilaan m_o . Aikuisten urosten lukumäärä ikääntymisprosessin a (*aging*) jälkeen on $n_{a,m,t} = n_{e,m_y,t} + n_{e,m_o,t}$, ja aikuisten naaraiden

lukumäärä $n_{a,f,t} = n_{e,f_y,t} + n_{e,f_o,t}$. Ikääntymistä kuvataan matriisilla

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Syntyminen

Mallin yksinkertaistamiseksi voidaan ajatella, että vasat ovat syntyessään sukupuolettomia. Näin saamme erilliset aliprosessit syntymille ja sukupuolen määräytymiselle. Olkoon λ aikuisen naaraan metsästyskauden alkuun asti tuottama keskimääräinen vasamäärä vuodessa. Mallissa λ oletetaan samaksi joka vuonna. Naaraat ovat sukukypsiä puolentoista vuoden iässä, mutta aikuisten joukkoon lasketaan kuuluvaksi myös edellisvuonna syntyneet vasat. Varhaiskypsien yksilöiden jälkeläiset eivät vaikuta merkittävästi kannan kokoon, eikä suurin osa naaraista edes tule kiimaan ensimmäisenä elinvuotenaan. Aineisto ei anna mahdollisuutta eritellä yksivuotiaita naaraita vanhemmista, joten niitä käsitellään aikuisina, joiden jälkeläismäärä on nolla. Syntymisprosessissa b (*birth*) vuonna t syntyneiden vasojen lukumäärää $n_{b,v,t}$ voidaan mallintaa Poisson-jakaumalla, jonka odotusarvo on naaraiden lukumäärä ikääntymisen ja kesän kuolemien jälkeen kerrottuna keskimääräisellä vasatuotolla. Tällöin $n_{b,v,t} \sim \text{Poisson}(\lambda n_{a,f,t})$. Syntyneet vasat ajatellaan tässä vaiheessa sukupuolettomiksi ja tätä väliaikaista tilaa merkitään symbolilla v (*very young*). Syntymäprosessi ei vaikuta aikuisten naaraiden eikä urosten lukumääriin, eli $n_{b,f,t} = n_{\ell,f,t}$ ja $n_{b,m,t} = n_{\ell,m,t}$. Syntymäprosessille saadaan matriisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sukupuolen määräytyminen

Populaatiomallissa sukupuolen voidaan ajatella määräytyvän välittömästi syntymän jälkeen. Tämä tapahtuma on tarkastelujakson t viimeinen aliprosessi. Mallinnetaan syntyvien uroksien määrää $N_{m_y,t}$ binomijakaumalla, missä kaikkien vasojen lukumäärä metsästyskauden alussa vastaa toistojen määrää ja urosten osuus vasoista on r . Urosuuden oletetaan olevan vakio vuoden t suhteen. Tällöin $N_{m_y,t} \sim \text{Bin}(n_{b,v,t}, r)$. Loput vasoista määritellään naariksi, jolloin $N_{f_y,t} = n_{b,v,t} - N_{m_y,t}$. Sukupuolen määräytymiselle määritellään

matriisi

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lukumäärät syksyllä ennen metsästystä

Valkohäntäkauriiden lukumäärien odotusarvot sukupuolen ja iän suhteen saadaan edellä esiteltyjen aliprosessien avulla vuodelle t seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{N}_t) &= \mathbf{SBL}_{s,t} \left(\mathbf{AEL}_{w,t}(\mathbf{N}_{t-1} - \mathbf{c}_{w,t} - \mathbf{h}_t) - \mathbf{c}_{s,t} \right) \\ &= \mathbf{SBL}_{s,t} \left(\mathbf{AEL}_{w,t} \mathbf{n}_{h,c,t} - \mathbf{c}_{s,t} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{s,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{s,t} \end{bmatrix} \times \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{w,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{w,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{w,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{w,t} \end{bmatrix} \times \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} n_{h,c,f_y,t} \\ n_{h,c,m_y,t} \\ n_{h,c,f_o,t} \\ n_{h,c,m_o,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{s,f,t} \\ c_{s,m,t} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{s,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{s,t} \end{bmatrix} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,f_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,f_o,t} - c_{s,f,t} \\ \phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,m_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,m_o,t} - c_{s,m,t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-r)\lambda(\phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,f_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,f_o,t} - c_{s,f,t}) \\ r\lambda(\phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,m_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,m_o,t} - c_{s,m,t}) \\ \phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,f_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,f_o,t} - c_{s,f,t} \\ \phi_y \psi_{w,t} n_{h,c,m_y,t} + \phi_o \psi_{w,t} n_{h,c,m_o,t} - c_{s,m,t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dynaamisella populaatiomallilla voidaan mallintaa populaation koon ja rakenteen kehitystä saatavilla olevan aineiston perusteella, mutta ensimmäisen

vuoden alussa eri tiloissa oleville kauriiden lukumäärille on valittava priorijakaumat muihin ennakkotietoihin perustuen.

5.2 Valkohäntäkaurispopulaation alkutila

Tarkasteltava ajanjakso sijoittuu vuosiin 2000–2014. Kaikilta 28 riistanhoito-yhdistykseltä on saatavissa metsästettyjen valkohäntäkauriiden lukumäärät sukupuolen ja iän mukaan jaettuna sekä metsästysseurojen arviot jäävistä kauriskannoista. Eri tiloissa (f_y, m_y, f_o, m_o) olevien valkohäntäkauriiden lukumäärien oletetaan noudattavan normaalijakaumaa. Tarkasteltava ajanjakso alkaa vuoden 2000 syksyllä, jolloin ensimmäinen metsästyskausi alkaa. Ensimmäiselle metsästettävälle kauriskannan koolle tarvitaan alarajat vuonna 2000 keväällä kerätyistä yhdistyskohtaisista maalaskentatuloksista $d_{1,u}$. Tarkkaa tietoa yksilöiden jakautumisesta eri tiloihin ei kuitenkaan saada maalaskentatulosten avulla. Priorijakaumiksi valitaan yhdistyksittäin ja tiloittain tasajakaumat, joiden alarajana on 0 ja ylärajana on kyseisen yhdistyksen maalaskentatuloksen antama populaatiokoon estimaatti. Tällöin priorii ei ole liian ohjaava ja oikeat eri tiloissa olevat yksilömäärät ovat hyvin todennäköisesti kyseisellä välillä. Lisäksi vältetään negatiivisilta arvoilta, ja yläraja on riittävän suuri. Priorit ensimmäisten metsästettävien kantojen ko'oilte ovat

$$N_{j,0,u} \sim U(0, d_{1,u}), \text{ missä } j \in \{f_y, m_y, f_o, m_o\} \text{ ja } u = 1, 2, \dots, 28.$$

5.3 Priorien valitseminen

Tuntemattomia muuttujia ovat aikuisten naaraiden keskimääräinen jälkeläistuotto λ , urosten osuus syntyneistä vasaista r ja luonnonoloista selviämisen todennäköisyydet nuorille ϕ_y sekä aikuisille ϕ_o . Maalaskentatulokset oletetaan keskimäärin oikeiksi, mutta tuntemattomiksi muuttujiksi jäävät niiden varianssit $\sigma_{t,u}^2$.

Naaraiden keskimääräinen vasatuotto

Vasovista naaraista 14 % saa yhden ja 75 % kaksi vasaa (Metsästäjien Keskusjärjestö, 2007). Priorijakaumaksi parametrille λ on järkevää valita jakauma, jonka arvot painottuvat välille 0–2. Havaintokorttiaineiston perusteella Satakunnan alueella syys–lokakuussa esiintyy noin 1.05 vasaa yhtä valkohäntäkaurisnaarasta kohti. Voidaan olettaa, että keskimääräinen kaikkien naaraspuolisten valkohäntäkauriiden vasatuotto on vähintään 0.1 vasaa ja korkeintaan 2 vasaa. Todellinen keskimääräinen vasatuotto on varmasti näiden rajojen sisäpuolella. Priorijakaumaksi keskimääräiselle vasa-naaras-suhteelle valitaan epäinformatiivinen tasajakaumapriori

$$\lambda \sim U(0.1, 2).$$

Urosten osuus vasoista

Vähäisen ennakkotiedon vuoksi on urososuuden r prioriksi syytä valita jakauma, jonka todennäköisyysmassa painottuu lähelle arvoa 0.5 kuvastaen yleistä käsitystä naaraiden ja urosten lukumäärien suhteesta. Priorijakaumaksi valitaan

$$r \sim \text{Beta}(2, 2).$$

Selviytyminen luonnonoloista

Selviytymistodennäköisyyttä kuvaavista muuttujista ϕ_y ja ϕ_o on saatavilla hyvin vähän ennakkotietoa. Vasoilla selviytymistodennäköisyys on kuitenkin pienempi kuin aikuisilla. Kirjallisuuden perusteella selviytymistodennäköisyydet ovat 80–95 % luokkaa. Priorijakaumiksi valitaan

$$\phi_y \sim \text{Beta}(50, 4) \quad \text{ja} \quad \phi_o \sim \text{Beta}(40, 5).$$

Maalaskentatulokset

Maalaskennasta saatujen populaatiokokojen estimaatit oletetaan keskimäärin oikeiksi. Maalaskenta suoritetaan keväällä metsästyskauden jälkeen, joten maalaskentatulosten ajatellaan noudattavan normaalijakaumaa odotusarvoon metsästyksen jälkeen jäljelle jäävä kannan koko ja varianssina tuntematon $\sigma_{t,u}^2$. Maalaskentatulosten $d_{t,u}$ tapauksessa priorin muotoa

$$d_{t,u} \sim N \left(\sum_{i,j} n_{h,c,i_j,t,u}, \sigma_{t,u}^2 \right), \text{ missä } t = 1, 2, \dots, 15 \text{ ja } u = 1, 2, \dots, 28.$$

Maalaskentatulosten varianssien $\sigma_{t,u}^2$ tulee olla positiivisia. Maalaskentatulosten populaatiokokoarvioiden $d_{t,u}$ tuntemattomat varianssit $\sigma_{t,u}^2$ estimoidaan variaatiokerroimen $v = \sigma_{t,u}/d_{t,u}$ avulla. Variaatiokerroin oletetaan vuosittain ja yhdistyksittäin samaksi. Malliin annetaan datana vuosittaiset ja yhdistyskohtaiset maalaskentatulosten neliöt. Koska maalaskentatulokset oletetaan keskimäärin oikeiksi, niin $\hat{\sigma}_{t,u}^2 = v^2 d_{t,u}^2$. Havainnoille pätee tällöin

$$d_{t,u} \sim N \left(\sum_{i,j} n_{h,c,i_j,t,u}, \hat{\sigma}_{t,u}^2 \right).$$

Variaatiokerroimelle asetetaan epäinformatiivinen tasajakaumapriori

$$v \sim U(0.001, 3).$$

Näin voidaan määrittää posteriorijakauma muuttujalle v , jonka avulla saadaan suoraan estimaatti maalaskentatulosten varianssille yhdistyksittäin ja vuosittain.

5.4 Uskottavuusfunktion muodostaminen

Uskottavuusfunktion muodostamiseksi on ensimmäiseksi johdettava tilafunktio $g_{t,u}$ eli tilaprosessin jakauma. Tilafunktio saadaan jokaisen aliprosessin $g_{t,u}^{(k)}$ ehdollisen todennäköisyysjakauman tulona, jossa ehtona on edellisen aliprosessin tuottama kannan koko. Aliprosessin k tuottamaa kannan kokoa merkitään $\mathbf{n}_{t,u}^{(k)}$. Tilaprosessin jakauma on siis kannan koon todennäköisyysjakauma ehdolla kannan koko edellisenä vuonna. Kanan kokoon liittyy lukuisia deterministisiä prosesseja, kuten metsästys, liikenneonnettomuudet ja vanheneminen, jotka eivät ole osana tilafunktiota. Ensimmäinen kauriiden lukumääriin liittyvä stokastinen aliprosessi on ilvesten saalistus. Todennäköisyysjakauma kauriiden lukumäärille x talvella ilvesten saalistuksen jälkeen vuonna t ja yhdistyksessä u on

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}^{(1)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(1)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \\
&= \prod_{i,j} g_{t,u}^{(1)}(n_{\ell,i_j,t,u} = x | \mathbf{n}_{h,c,t}, \ell_t) \\
&= \prod_{i,j} P(n_{\ell,i_j,t,u} = x | \mathbf{n}_{h,c,t}, \ell_t, \psi_{w,t}) \\
&= \prod_{i,j} \binom{n_{h,c,i_j,t,u}}{x} \psi_{w,t}^x (1 - \psi_{w,t})^{n_{h,c,i_j,t,u} - x}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Seuraava aliprosessi on luonnonoloista selviäminen. Todennäköisyysjakauma kauriiden lukumäärille x luonnonoloista selviämisen jälkeen vuonna t ja yhdistyksessä u on

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}^{(2)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(2)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \\
&= \prod_{i,j} g_{t,u}^{(2)}(n_{e,i_j,t,u} = x | \mathbf{n}_{\ell,t}, \phi_y, \phi_o) \\
&= \prod_{i,j} P(n_{e,i_j,t,u} = x | \mathbf{n}_{\ell,t}, \phi_y, \phi_o) \\
&= \prod_{i,j} \binom{n_{\ell,i_j,t,u}}{x} \phi_j^x (1 - \phi_{w,t})^{n_{\ell,i_j,t,u} - x}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Luonnonoloista selviämisen jälkeen nuoret urokset ja naaraat aikuistuvat. Tämän jälkeen aikuisia joutuu jälleen liikenneonnettomuuksiin. Seuraava stokastinen prosessi on kesäajan ilvesten saalistus. Todennäköisyysjakauma kesällä eri tiloissa olevien kauriiden lukumäärille x ilvesten saalistuksen jälkeen

ajanhetkellä t ja yhdistyksessä u on

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}^{(3)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(3)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \\
&= \prod_i g_{t,u}^{(3)}(n_{c,i,t,u} = x | \mathbf{n}_{c,t}, \ell_t) \\
&= \prod_i P(n_{c,i,t,u} = x | \mathbf{n}_{h,c,t}, \ell_t, \psi_{s,t}) \\
&= \prod_i \binom{n_{c,i,t,u}}{x} \psi_{s,t}^x (1 - \psi_{s,t})^{n_{c,i,t,u} - x}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Seuraavaksi aikuistuneet naaraat tuottavat uusia vasioja. Syntyneiden määrän odotusarvo saadaan yhdistyskohtaisesti kertolaskulla

$$\lambda_{t,u} = \lambda n_{\ell,f,t,u}.$$

Vastasyntyneiden vasiojen lukumäärän $n_{b,v,t,u}$ ajatellaan noudattavan Poisson-jakaumaa $n_{b,v,t,u} \sim \text{Pois}(\lambda_{t,u})$, jolloin vasiojen lukumäärän x jakauma on

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}^{(4)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(4)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \\
&= g_{t,u}^{(4)}(n_{b,v,t,u} = x | n_{\ell,f,t,u}, \lambda) \\
&= P(n_{b,v,t,u} = x | \lambda_{t,u}) \\
&= \frac{\lambda_{t,u}^x}{x!} e^{-\lambda_{t,u}}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Kun vastasyntyneiden vasiojen lukumäärä vuonna t yhdistyksessä u on tiedossa, niin urosvasojen lukumäärän x ehdollinen todennäköisyysjakauma on

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}^{(5)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(5)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \\
&= g_{t,u}^{(5)}(n_{m_y,t,u} = x | n_{b,v,t,u}, r) \\
&= P(N_{m_y,t,u} = x | n_{b,v,t,u}, r) \\
&= \binom{n_{b,v,t,u}}{x} r^x (1 - r)^{n_{b,v,t,u} - x}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Kaikki valkohäntäkauriit ovat joko uroksia tai naaraita, joten naarasvasojen lukumäärä saadaan urosvasojen lukumäärän avulla

$$N_{f_y,t,u} = n_{b,v,t,u} - N_{m_y,t,u}. \tag{5.6}$$

Tilafunktio voidaan nyt muodostaa aliprosessien tilafunktioiden avulla

$$\begin{aligned}
& g_{t,u}(\mathbf{N}_{t,u} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) = \\
& \prod_{k=1}^5 g_{t,u}^{(k)}(\mathbf{n}_{t,u}^{(k)} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Vuosittaisten ja yhdistyskohtaisten maalaskentatulosten $d_{t,u}$ ja metsästettyjen yksilöiden yhteys tuntemattomiin yhdistyskohtaisiin variansseihin σ_u^2 on

$$f_{1,t,u}(d_{t,u} | \sum_{i,j} n_{h,c,i,j,t,u}, \sigma_{t,u}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t,u}} e^{-\frac{(d_{t,u} - \sum_{i,j} n_{h,c,i,j,t,u})^2}{2\sigma_{t,u}^2}}.$$

Vuosittain ja yhdistyksittäin metsästettyjen nuorten urosten lukumäärien $h_{m_y,t,u}$ yhteys syntyvien urosvasojen osuuteen r on

$$f_{2,t,u}(h_{m_y,t,u} | r, h_{y,t,u}) = \binom{h_{y,t,u}}{h_{m_y,t,u}} r^{h_{m_y,t,u}} (1-r)^{h_{y,t,u}-h_{m_y,t,u}}.$$

Satakunnan havaintokorttiaineistosta saatavat yhdistyskohtaiset vasaosuudet λ_s oletetaan normaalijakautuneiksi odotusarvolla on λ ja varianssilla σ^2 . Yhteys naaraan keskimääräiseen vasatuottoon Uudellamaalla λ on

$$f_3(\lambda_s | \lambda, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\lambda_s - \lambda)^2}{2\sigma^2}}, \quad s = 1, \dots, S,$$

missä $S = 20$ on Satakunnan yhdistysten lukumäärä. Tällöin uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} & \prod_{u=1}^U \prod_{t=1}^T f_{1,t,u}(d_{t,u} | \mathbf{N}_t, \sigma_{t,u}^2) f_{2,t,u}(h_{m_y,t,u} | r, h_{y,t,u}) \prod_{s=1}^S f_3(\lambda_s | \lambda, \sigma^2) \\ &= \prod_{u=1}^U \prod_{t=1}^T f_{t,u}(d_{t,u}, h_{m_y,t,u}, \boldsymbol{\lambda}_{1,\dots,S} | N_t, \sigma_{t,u}, r, h_{y,t,u}, \lambda, \sigma^2), \end{aligned}$$

missä $\boldsymbol{\lambda}_{1,\dots,S}$ on vektori $(\lambda_1, \dots, \lambda_S)$, $U = 28$ on Uudenmaan yhdistysten lukumäärä ja $T = 15$ on tarkastelujakson pituus.

5.5 Populaatiomallin posteriori

Dynaamisen populaatiomallin posteriorin määrittämiseksi tarvitaan priorijakaumat $\pi(\phi_y, \phi_o, \lambda, r, \sigma_u^2)$ ja $\pi(N_{1,u})$, tilafunktio $g_{t,u}$ sekä uskottavuusfunktio

$$\prod_{u=1}^U \prod_{t=1}^T f_{t,u}(d_{t,u}, h_{m_y,t,u}, \boldsymbol{\lambda}_{1,\dots,S}).$$

Otetaan käyttöön merkinnät $\mathbf{c}_{1,\dots,T}$, $\mathbf{h}_{1,\dots,T}$, $\boldsymbol{\ell}_{1,\dots,T}^*$ ja $\mathbf{d}_{1,\dots,T}$, jotka tarkoittavat vektoreita kolareille, metsästettyjen kauriiden lukumäärille, ilvesten saalisar-

vioille sekä maalaskentatuloksille jokaiselta vuodelta ja jokaisesta yhdistyksestä vastaavasti. Posteriorijakauma on

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{N}_{1,\dots,T}, \phi_y, \phi_o, \lambda, r, \sigma_m^2 | \mathbf{c}_{1,\dots,T}, \mathbf{h}_{1,\dots,T}, \boldsymbol{\ell}_{1,\dots,T}^*, \mathbf{d}_{1,\dots,T}) \\
& \propto p(\mathbf{N}_{1,\dots,T}, \phi_y, \phi_o, \lambda, r, \sigma_m^2, \mathbf{c}_{1,\dots,T}, \mathbf{h}_{1,\dots,T}, \boldsymbol{\ell}_{1,\dots,T}^*, \mathbf{d}_{1,\dots,T}) \\
& \propto \pi(\phi_y, \phi_o, \lambda, r) \prod_{u=1}^U \pi(\sigma_u^2) \pi(\mathbf{N}_{1,u}) \times \\
& \quad \prod_{t=1}^T g_{t,u}(\mathbf{N}_{t,u} | \mathbf{N}_{t-1,u}, \mathbf{c}_{t,u}, \mathbf{h}_{t,u}, \ell_t^*, \phi_y, \phi_o, \lambda, r) \times \\
& \quad f_{t,u}(d_{t,u}, h_{m_y,t,u}, \boldsymbol{\lambda}_{1,\dots,S} | \mathbf{N}_t, \sigma_{t,u}, r, h_{y,t,u}, \lambda, \sigma^2).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

6 MALLIN SIMULOINTI

JAGS (*Just Another Gibbs Sampler*) on Bayes-mallien analysointiin suunniteltu ohjelma, joka käyttää MCMC-menetelmiä. Ohjelma on suunniteltu käytettäväksi R-ohjelman avulla, ja myös tässä tutkimuksessa simuloinnit ajetaan R-ohjelman kautta R-paketin *rjags* avulla (Plummer, 2016). JAGS perustuu BUGS-ohjelmaan (*Bayesian inference Using Gibbs Sampling*), joka mahdollistaa monimutkaisten mallien muodostamisen oman ohjelmointikielensä avulla. BUGS mahdollistaa myös mittausvirheen, puuttuvan tiedon ja muunlaisten vaihtelun lähteiden sisällyttämisen malliin (Spiegelhalter et al., 1996). JAGS laajentaa BUGSin toiminnallisuutta esimerkiksi uusien jakaumien muodossa (Plummer, 2003).

JAGS sisältää lukuisia otantajia (*sampler*), jotka operoivat parametrijoukoilla ja päivittävät niitä iteraatiosta toiseen. Otantajat ovat siis käytännössä ohjelmistossa toteutettuja MCMC-simulointimenetelmiä. Otantajat valitaan automaattisesti jokaiselle mallin muuttujalle kun malli alustetaan. JAGS kykenee tunnistamaan mitkä otantajat soveltuvat kullekin parametrille ja valitsee sopivista otantajista tehokkaimman. Mikäli sopivaa menetelmää ei voida valita, lopetetaan suoritus. (Plummer, 2003.)

Simuloinnissa käytetään 2 000 000 iteraatiota, joista ensimmäiset 1 000 000 hylätään *burn-in*-jaksona. Tarkasteluun otetaan mukaan joka sadas iteraatio, joten lopullisissa tarkasteluissa on mukana 1000 iteraatiota. Laskennallisista syistä vuoden 2015 ($t = 15$) simulaatio voidaan suorittaa vain talvikauden loppuun, eli luonnonoloista selviytymiseen asti.

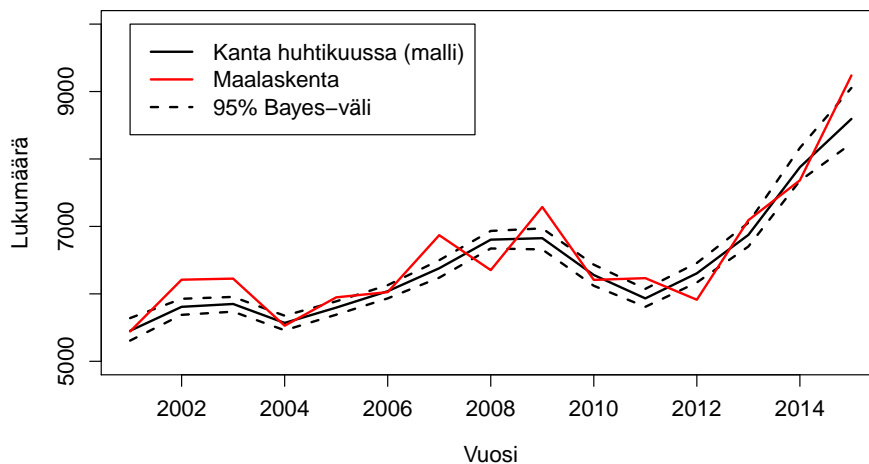
Simuloiminen vaatii alkuarvojen asettamista stokastisille muuttujille. Jos alkuarvoja ei aseteta, niin JAGS-ohjelma generoi alkuarvot priorijakaumasta (Plummer, 2016). Järkevien alkuarvojen varmistamiseksi luvut asetetaan itse. Luonnonoloista selviämisen todennäköisyyksille ϕ_y ja ϕ_o valitaan alkuarvoiksi 0.9 sekä aikuisille ja vasoille. Urosuuden r alkuarvoksi asetetaan 0.5, ja naaraiden keskimääräiselle vasatuotolle λ asetetaan alkuarvoksi luku 1.

Vuosittain ja yhdistyksittäin syntyvien vasojen lukumäärä noudattaa mallissa Poisson-jakaumaa, joten myös niille asetetaan alkuarvot. Alkuarvoiksi valitaan suoraan maalaskentatuloksista saatavat yhdistys- ja vuosikohtaiset kannan koon arviot. Tällöin alkuarvot yliarvioivat syntyvien vasojen lukumääriä, mutta tämä osoittautuu tarpeelliseksi laskennallisista syistä. Liitteessä B on käytetyn JAGS-mallin koodi.

7 TULOKSET

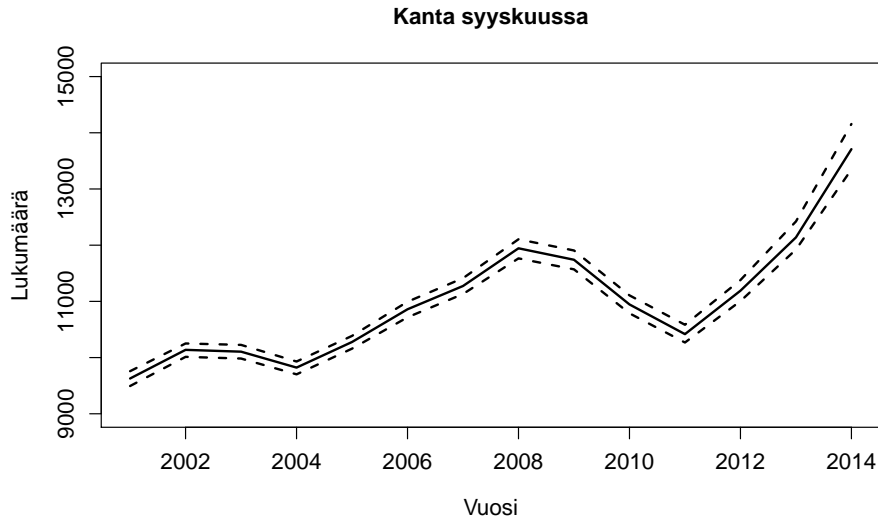
Uudenmaan riistanhoitopiirin valkohäntäkauriiden kannan koko arvioidaan dynaamisella populaatiomallinnuksella. Uusimaa jaetaan 28 alueeseen ja näiden alueiden sisällä valkohäntäkauriiden lukumäärät selvitetään erikseen uroksille, naaraille, urosvasoille ja naarasvasoille. Jakamalla kauriit näihin neljään tilaan voidaan estimoida myös vasojen ja naaraiden lukumäärien suhdetta λ ja luonnonoloista selviämisen todennäköisyyksiä aikuisille (ϕ_o) sekä vasoille (ϕ_y).

Tarkastellaan Uudenmaan valkohäntäkauriiden lukumääriä vuosina 2000–2014 kokonaisuudessaan, sukupuolittain ja aikuisille sekä vasoille erikseen. Kuvassa 4 on esitetty simulaatiosta saadut vuosittaiset huhtikuun jäävän kannan arviot sekä maalaskentatulokset koko Uudeltamaalta. Metsästyskauden jälkeinen kannan arvio on kiinnostava siksi, että maalaskenta suoritetaan juuri samana ajankohtana. Maalaskentatuloksissa esiintyy simulaatioon verrattuna suurempaa vaihtelua. Mallin trendi kuitenkin mukailee maalaskentatuloksia ja kannan arvioiden suuruusluokka vaikuttaa järkevältä.



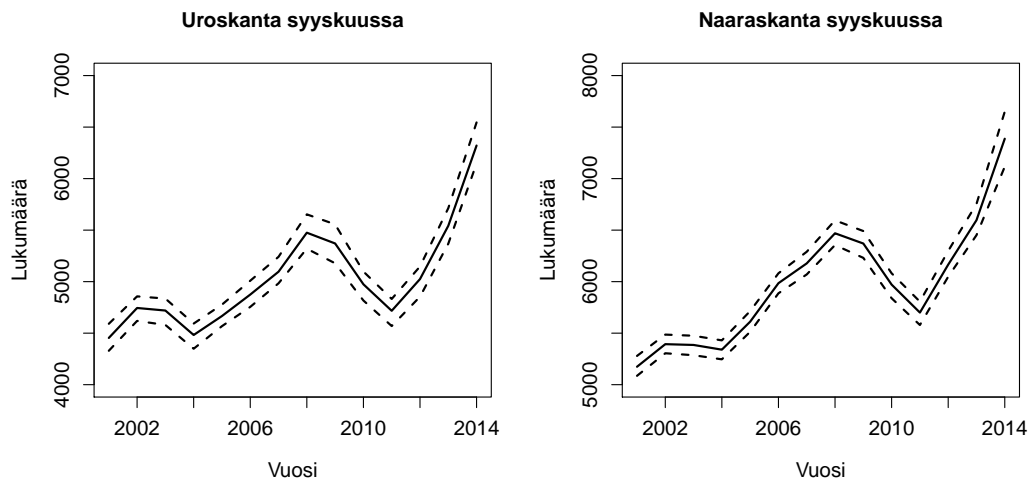
Kuva 4: Jäävä kanta vuosittain huhtikuussa sekä tämän 95 %:n Bayes-väli. Punainen viiva kuvaa maalaskentatuloksia.

Vuosittaiset syyskuun eli metsästettävän kannan arviot ovat esitetty kuvassa 5.

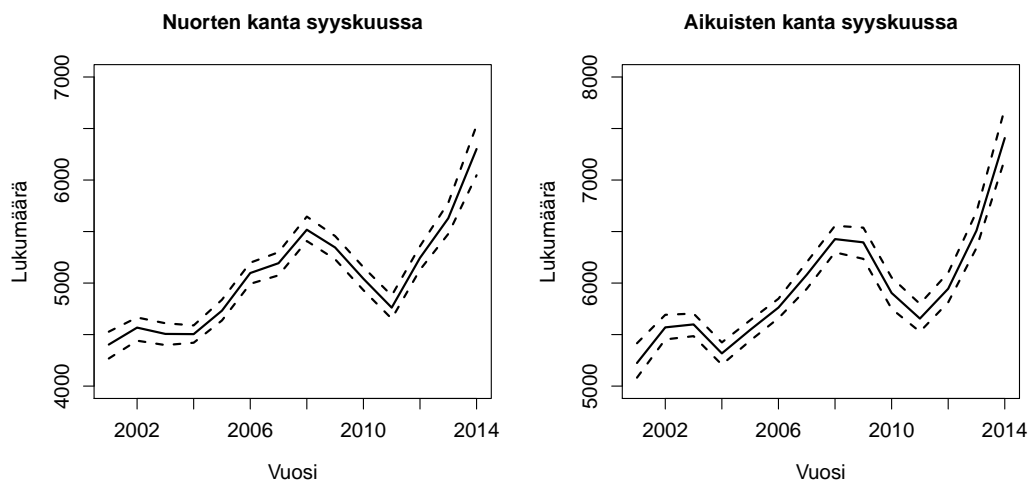


Kuva 5: Kanta vuosittain syyskuussa sekä 95 %:n Bayes-väli.

Kuvissa 6 ja 7 vertaillaan simulaation tuottamia arvioita urosten ja naaraiden lukumäärille sekä nuorten ja aikuisten lukumäärille. Kuvasta nähdään, että naaraita on mallin mukaan vuosittain keskimäärin enemmän kuin uroksia. Lukumäärän trendi on samanlainen sekä uroksilla että naarilla. Ikäryhmittäin vertailtaessa voidaan nähdä, että aikuisia valkohäntäkauriita on keskimäärin enemmän kuin nuoria, mutta kokonaislukumäärän trendi on edelleen havaittavissa molemmissa ryhmissä.

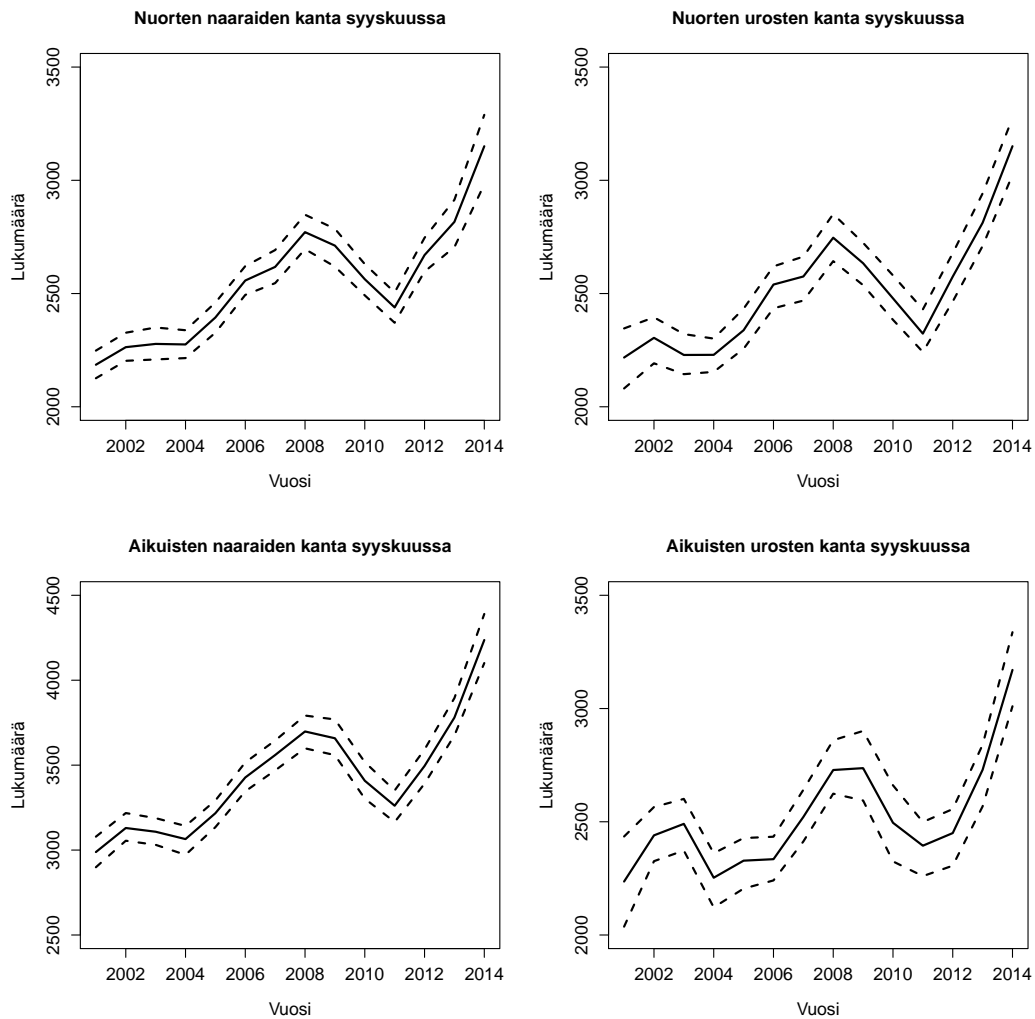


Kuva 6: Kanta sukupuolittain syyskuussa sekä 95 %:n Bayes-välit.



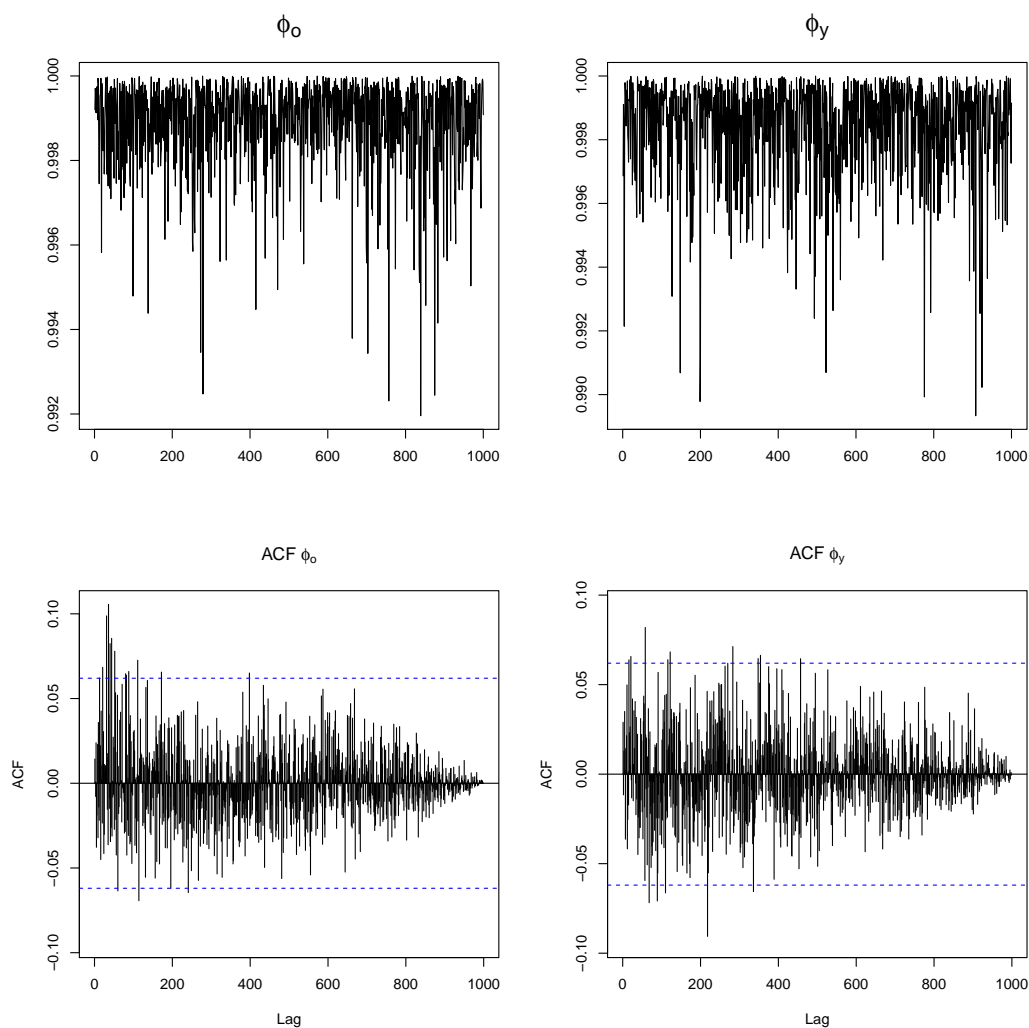
Kuva 7: Kanta ikäryhmittäin syyskuussa sekä 95 %:n Bayes-välit.

Tarkastellaan lukumääriä vielä jokaisessa tilassa erikseen. Vuosittaiset lukumäärät nuorille naaraille, nuorille uroksille, aikuisille naaraille ja aikuisille uroksille on koottu kuvaan 8.



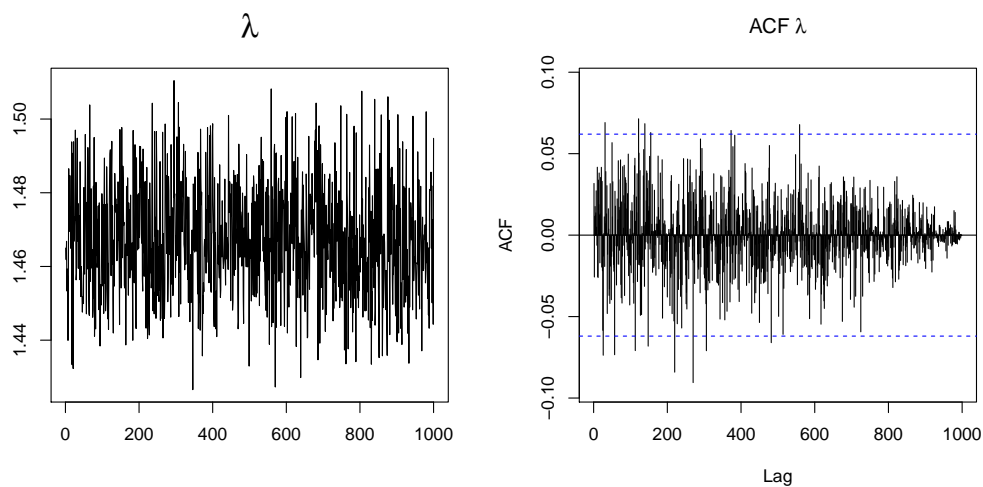
Kuva 8: Kanta jokaisessa tilassa syyskuussa sekä 95 %:n Bayes-välit.

Kuvassa 9 ovat simulointiketjut selviytymistodennäköisyyksille ϕ_o ja ϕ_y sekä näiden autokorrelaatiofunktiot. Kuvien perusteella ketjut ovat sekoittuneet hyvin ja konvergenssi rajajakaumiin on saavutettu. Ketjujen autokorrelaatiofunktiota tarkastelemalla voidaan havaita vain muutamia merkitseviä autokorrelaatioita. Sekä vasojen että aikuisten selviytymistodennäköisyydet ovat hyvin lähellä lukua 1. Tämä viittaa siihen, että suurin osa populaatiossa tapahtuvista kuolemista liittyy kolareihin ja ilvesten saalistukseen, jotka malli jo ottaa huomioon.



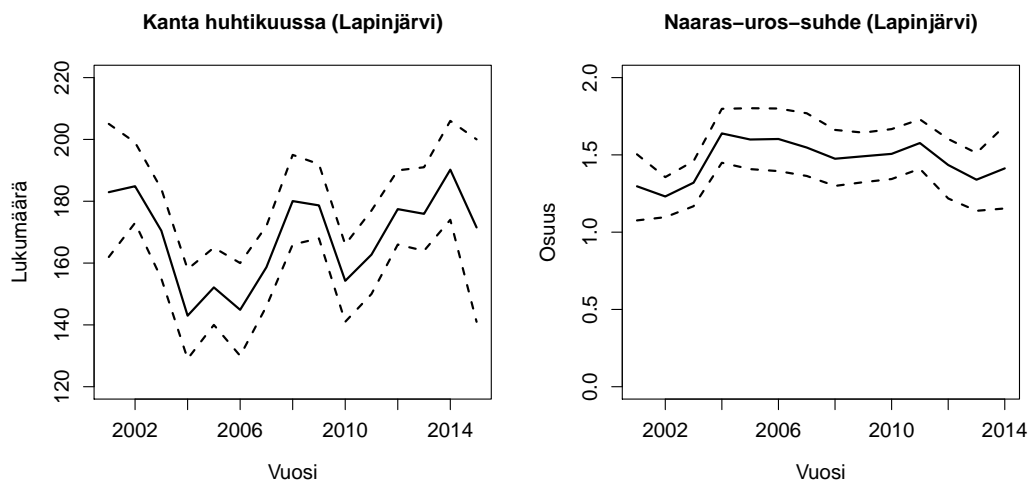
Kuva 9: Selviytymistodennäköisyyksien simulointiketjut ja näiden autokorrelaatiofunktiot. Katkoviivat kuvaavat autokorrelaatioiden 95 %:n luottamusväliä.

Kuvassa 10 on simulointiketju vasatuottoa kuvaavalle parametrille λ sekä tämän autokorrelaatiofunktio. Ketjun voidaan havaita olevan hyvin sekoittunut ja konvergoineen rajajakaumaansa. Muutamia merkitseviä autokorrelaatioita on edelleen havaittavissa. Simulointien keskiarvo parametrille on noin 1.47, mikä Poisson-jakauman tapauksessa tarkoittaa, että jokainen aikuinen naaras tuottaa mallin mukaan keskimäärin 1.47 vasaa vuodessa.

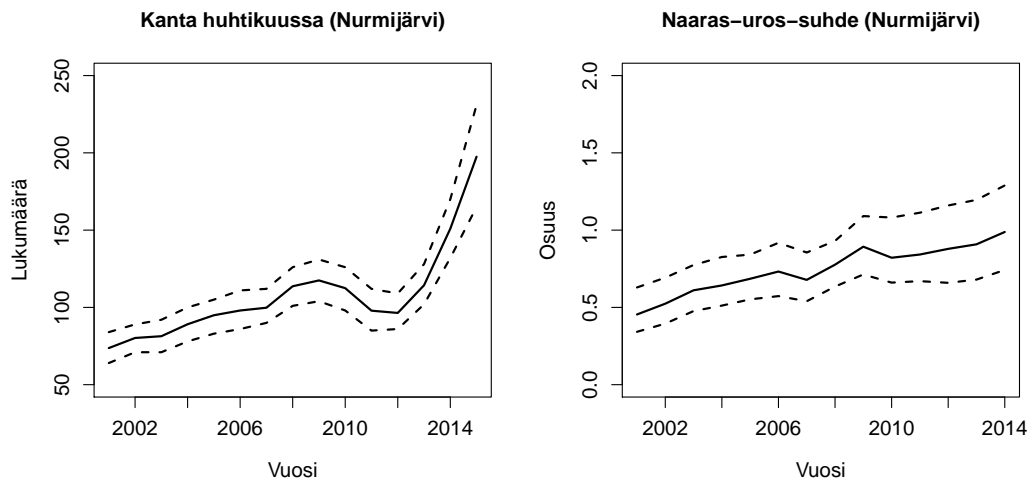


Kuva 10: Vasatuoton simulointiketju ja sen autokorrelaatiofunktio. Katkoviivat kuvaavat autokorrelaatioiden 95 %:n luottamusväliä.

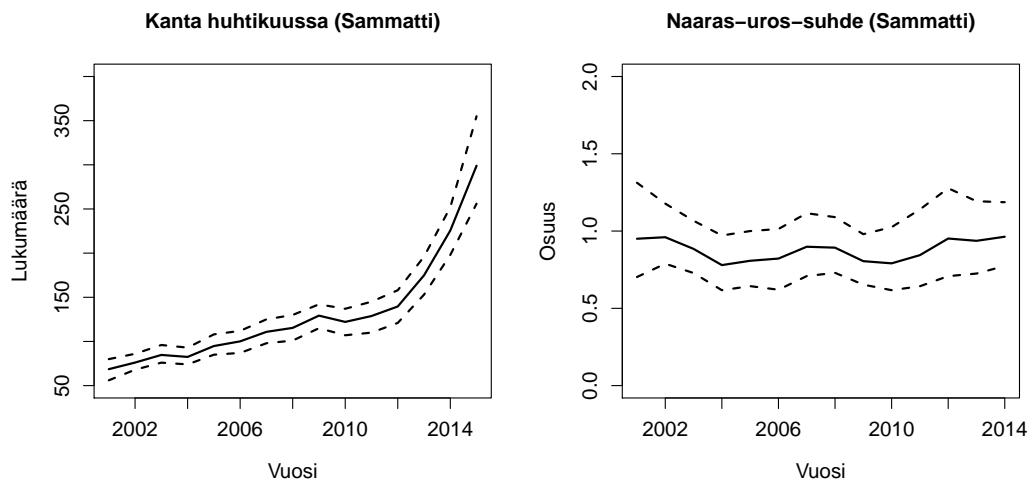
Valitaan seuraavaksi tarkasteluun Lapinjärven, Nurmijärven ja Sammattin yhdistykset. Kuvissa 11, 12 ja 13 ovat esitettyinä näiden yhdistysten jäävän kannan arviot sekä naaraspuolisten yksilöiden lukumäärien suhteet urosten lukumääriin (ns. *sex-ratio*).



Kuva 11: Jäävä kanta huhtikuussa ja naaraiden lukumäärän suhde urosten lukumäärään Lapinjärven yhdistyksen alueella sekä näiden 95 %:n Bayesvälit.



Kuva 12: Jäävä kanta huhtikuussa ja naaraiden lukumäärän suhde urosten lukumäärään Nurmijärven yhdistyksen alueella sekä näiden 95 %:n Bayes-välit.



Kuva 13: Jäävä kanta huhtikuussa ja naaraiden lukumäärän suhde urosten lukumäärään Sammatin yhdistyksen alueella sekä näiden 95 %:n Bayes-välit.

Nurmijärven ja Sammatin kantojen koossa on havaittavissa hyvin samankaltainen kasvu. Kasvu on hidasta vuosina 2001–2012, mutta nopeutuu huomattavasti vuodesta 2012 eteenpäin. Lapinjärvellä samaa ilmiötä ei ole havaittavissa. Naaraiden lukumäärän suhde uroksiin on melko erilainen yhdistysten

välillä. Sammatin yhdistyksessä uroksia ja naaraita on lähes yhtä paljon, ja suhde pysyy likimain vakiona tarkastelujakson ajan. Nurmijärvellä uroksia on aluksi noin kaksi kertaa niin paljon kuin naaraita, mutta naaraiden lukumäärä kasvaa tasaisesti ja vuonna 2014 uroksia ja naaraita on jo yhtä paljon. Lapinjärvellä puolestaan naaraita on jatkuvasti enemmän kuin uroksia. Joinakin vuosina naaraita on jopa yli 50 % enemmän kuin uroksia.

8 YHTEENVETO

Valkohäntäkauriiden kannan kokoa arvioidaan nykyään suurelta osin käyttäen metsästäjien antamia arvioita. Tässä tutkimuksessa muodostettiin dynaaminen populaatiomalli Uudenmaan riistanhoitopiirin valkohäntäkauriin kannan koon arviointia varten. Kannan koon arviointi tarjoaa riistanhoitollisesti tärkeää tietoa, koska riistanhoito perustuu riistalajien kannanvaihteluita kuvaavaan ajantasaiseen tietoon ja metsästys mitoitetaan lajeittain riistakantojen tilan mukaisesti (Suomen Riistakeskus, 2017a).

Prioreita muodostaessa täytyy muistaa, ettei parametreille tule asettaa liian tiukkoja ehtoja. Tällöin aineistosta löytyvä pienikin lisäinformaatio vaikuttaa saatavaan posterioriin enemmän. Alkuarvojen valinnalla ei vaikuta olevan suurta vaikutusta posterioriin, joten käytettävissä oleva aineisto sisältää suurimman osan mallin informaatiosta. Mallissa on myös käytetty onnistuneesti lukuisia epäinformatiivisia tasajakaumaprioreja, mikä puolestaan vähentää tarvittavien parametrien lukumäärää.

Lisäksi on huomionarvoista, että jäävän kannan arvioissa voi olla epätarkkuutta. Joissakin metsästysseuroissa kannan arviot perustuvat tarkkaan tietämykseen ja riistakolmiolaskentatulosten hyödyntämiseen, kun taas joissakin seuroissa ilmoitetut lukumäärät perustuvat epätarkempiin arvioihin. Voidaan kuitenkin olettaa, että arviot ovat yhtä todennäköisesti sekä liian suuria että liian pieniä.

Mallin avulla voidaan ottaa huomioon lukuisia valkohäntäkauriin populaatiodynamiikkaan liittyviä tekijöitä. Erityisesti kuolleisuuden liittyvät aliprosessit kuten metsästys, liikenneonnettomuudet ja ilvesten saalistus näyttäisivät sisältävän lähes kaiken informaation kuolleisuudesta. Mallin tuottamat jäävän kannan arviot ovat uskottavia ja malli mahdollistaa kannan arvion tarkastelun sekä sukupuolen että iän mukaan. Mallia olisi vielä mahdollista laajentaa luopumalla muuton suhteen suljetun populaation oletuksesta, eli yksilöiden muutto populaatioon tai siitä pois lisättäisiin osaksi mallia. Lisäksi voitaisiin tarkastella yksilöiden muuttoa eri riistanhoitopiirien välillä.

Mallia voitaisiin todennäköisesti soveltaa myös muidenkin eläinlajien kannan koon arviointiin. Mallinnuksessa tehdään vain muutamia oletuksia, jotka liittyvät siihen, että tarkasteltavana on juuri valkohäntäkauris, kuten vakioksi asetettu osuus liikenneonnettomuuksissa. Mahdollisia suoria sovelluskohteita ovat sellaiset eläinlajit, kuten hirvet, joiden kuolleisuuden vaikuttavat samat riskitekijät kuin valkohäntäkauriin kuolleisuuteen. Mikäli kuolleisuuden vaikuttaa useita tai eri riskitekijöitä, ovat mallin aliprosessit helposti muutettavissa niitä vastaaviksi.

LÄHTEET

- Arjoranta, T. (2012). ”Dynaaminen populaatiomalli Suomen valkohäntäkauriille. Sovelluskohteena Pöytyän riistanhoitoyhdistys”. Tilastotieteen pro gradu. Jyväskylän yliopisto.
- Buckland, S., Newman, K., Fernandez, C., Thomas, L. ja Harwood, J. (2007). ”Embedding Population Dynamics Models in Inference”. *Statistical Science* 22 (1), s. 44–58.
- Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo - Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London: Chapman & Hall.
- Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. ja Rubin, D. (2000). *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall.
- Kairikko, J. K. ja Ruola, J. (2004). *Valkohäntäpeura*. Suomen metsästäjäliitto. Riihimäki.
- LuontoPortti (2017). ”Valkohäntäkauris”. URL: <http://www.luontoportti.com/suomi/fi/nisakkaat/valkohantakauris> (viitattu 29.08.2017).
- Maa- ja metsätalousministeriö (2014). ”Riistanhoito”. URL: http://www.mmm.fi/fi/index/etusivu/kalastus_riista_porot/riistatalous/riistanhoito.html (viitattu 08.12.2014).
- Metsästäjien Keskusjärjestö (2007). *Metsäkauris*. Metsästäjien keskusjärjestön oppaita. 8. painos. Jyväskylä: Kopijyvä Oy.
- Niemi, M., Melin, M., Matala, J., Häggblom, K., Hokkanen, P., Tiilikainen, R., Paasivaara, A., Pusenius, J. ja Järvenpää, H. (2013). ”Peuroja vai kauriita - mitä peurakolaritilastot sisältävät?” *Suomen Riista* 59, s. 100–113.
- Pierre, B. (1997). *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, And Queues*. New York: Springer.
- Plummer, M. (2003). ”JAGS: A program for Analysis of Bayesian Graphical Models Using Gibbs Sampling”. Teoksessa: *Proceedings of the 3rd International Workshop of Distributed Statistical Computing*.
- (2016). *rjags: Bayesian Graphical Models using MCMC*. R package version 4-6. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=rjags>.
- Ranford, N. (2003). ”Slice Sampling”. URL: http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.aos/1056562461 (viitattu 14.04.2015).

- Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N. ja Lunn, D. (1996). "BUGS: Bayesian inference using Gibbs sampling, version 0.5".
- Suomen Riistakeskus (2017a). "Riistakantojen Seuranta". URL: <http://riista.fi/riistatalous/riistakannat/riistakantojen-seuranta/> (viitattu 29.08.2017).
- (2017b). "Riistakolmiolaskennat". URL: <https://riista.fi/riistatalous/riistakannat/riistakantojen-seuranta/riistakolmiolaskennat/> (viitattu 29.08.2017).

A MERKINTÖJÄ

Bayes-tilastotiede

θ	tuntemattomat parametrit
\mathbf{y}	kerätty aineisto
ϕ	hyperparametrit
$f(\cdot)$	satunnaismuuttujan tiheysfunktio
$p(\cdot)$	posteriorijakauma, priorijakauma, uskottavuusfunktio
$\pi(\cdot)$	priorijakauma

MCMC

X_t	stokastisen prosessin muuttujan arvo ajanhetkellä t
$\theta^{(t)}$	simuloidun posteriorijakauman t :s otos
$\gamma(\cdot)$	funktio, joka kuvaa d -ulotteisen satunnaismuuttujan yksiulotteiseksi
$q(\cdot)$	Metropolis-Hastingsin algoritmin ehdotusjakauma
$\alpha(\cdot)$	generoidun ehdotuksen hyväksymistodennäköisyys
B	lämmittelyajanjakson (<i>burn-in</i>) pituus
θ_{-i}	vektori $(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_d)$

Tilat

f_y	nuori naaras
f_m	nuori uros
f_o	aikuinen naaras
m_o	aikuinen uros
$i \in \{f, m\}$	sukupuolen indikaattori
$j \in \{y, o\}$	iän indikaattori
$i_j \in \{f_y, f_m, f_o, m_o\}$	tilan indikaattori

Aliprosessit

$N_{i_j,t}$	tilassa i_j olevien yksilöiden lukumäärä vuonna t
$c_{w,i_j,t}$	kolareissa vuoden t talvikautena tilassa i_j menehtyneiden lukumäärä
$c_{s,i_j,t}$	kolareissa vuoden t kesä kautena tilassa i_j menehtyneiden lukumäärä
$h_{i_j,t}$	tilassa i_j metsästettyjen lukumäärä vuonna t
$n_{c,i_j,t}$	talven kolareista selvinneiden lukumäärä tilassa i_j vuonna t
$n_{h,c,i_j,t}$	metsästyksestä selvinneiden lukumäärä tilassa i_j vuonna t
$n_{\ell,i_j,t}$	ilvesten saalistuksesta selvinneiden lukumäärä tilassa i_j vuonna t
$n_{e,i_j,t}$	ympäristöolosuhteista selvinneiden lukumäärä tilassa i_j vuonna t
$n_{a,i,t}$	ikäntyneiden lukumäärä tilassa i vuonna t
$n_{b,v,t}$	syntyneiden vasojen lukumäärä vuonna t
ℓ_t^*	asiantuntia-arvioihin perustuva ilvesten saalislukumäärä vuonna t
ℓ_t	ilvesten todellinen saalislukumäärä vuonna t

Uskottavuusfunktio ja priorijakaumat

$\psi_{w,t}$	todennäköisyys selvittää ilvesten saalistuksesta vuoden t talvikautena
$\psi_{s,t}$	todennäköisyys selvittää ilvesten saalistuksesta vuoden t kesä kautena
ϕ_y	nuorten yksilöiden todennäköisyys selvittää ympäristöolosuhteista
ϕ_o	aikuisten yksilöiden todennäköisyys selvittää ympäristöolosuhteista
λ	keskimääräinen vasatuotto
r	urososuus vasoista
$d_{t,u}$	maalaskentatuloksen yhdistyksestä u vuonna t
$\sigma_{t,u}^2$	maalaskentatuloksen varianssi
v	maalaskentatulosten variaatiokerroin
$g_{t,u}^k(\cdot)$	aliprosessiin k liittyvä uskottavuusfunktio yhdistykselle u vuonna t
λ_s	Satakunnan yhdistyskohtainen vasaosuus
σ^2	λ_s :n varianssi

Aineisto

$t \in \{1, \dots, T\}$	vuosi
$u \in \{1, \dots, U\}$	riistanhoitoyhdistys
T	tarkastelujakson pituus, eli vuosien lukumäärä (15)
U	Uudenmaan yhdistysten lukumäärä (28)
S	Satakunnan yhdistysten lukumäärä (20)
$\lambda_{1, \dots, S}$	vektori, joka sisältää Satakunnan yhdistyskohtaiset vasaosuudet
$\mathbf{c}_{1, \dots, T}$	vektori, joka sisältää kaikkien kolareiden lukumäärät
$\mathbf{h}_{1, \dots, T}$	vektori, joka sisältää kaikkien metsästettyjen kauriiden lukumäärät
$\ell_{1, \dots, T}^*$	vektori, joka sisältää kaikki ilvesten saalisarviot
$\mathbf{d}_{1, \dots, T}$	vektori, joka sisältää kaikki maalaskentatulokset

B JAGS-MALLIN KOODI

```
1
2 model{
3
4 # Havaintokortttiaineisto (15.9-31.10) saatavilla Satakunnan
   riistanhoitopiiristä yhdistyksittäin
5 # lambda.yhd vektori yhdistysten lambdaista (kaikkien vasojen
   lkm kyseisenä aikana/naaraiden lkm kyseisenä aikana).
6 # lambda.tau = 1/var(lambda.yhd) eli lambdaiden varianssin kää
   nteisluku.
7 # Yhdistysten lukumäärä satakunnassa, eli myös vektorin lambda.
   yhd pituus on 20.
8
9 lambda ~ dunif(0.1, 3)
10 for(i in 1:length(lambda.yhd)){
11   lambda.yhd[i] ~ dnorm(lambda, lambda.tau)
12 }
13
14 # Priorit ja ja muut esivalmistelut muuttujille
15
16 # r on selvitettävä vasojen urosuus.
17 # r.hav on sama kuin matriisi h.ym, eli metsästettyjen urosten
   lukumäärät yhdistyksittäin ja vuosittain.
18 # h.y on kaikki metsästety vasat, eli summa matriiseista h.yf ja
   h.ym.
19 # ilves.aito on estimoitava vektori, joka sisältää ilveksen
   tappamien valkohäntäkauriiden
20 # lukumäärät vuosittain.
21 # lynx.hunt.w on syy-huhtikuussa tapettujen valkohäntien suhden
   koko populaation kokoon.
22 # lynx.hunt.s on touko-kesäkuussa tapettujen valkohäntien suhden
   koko populaation kokoon.
23
24 # phi.y.il.w on ilveksen talvikauden saalistuksesta välttyneiden
   osuus vasoista,
25 # phi.f.il.ww vastaava naaraille, phi.m.il.w vastaava uroksille.
26 # phi.f.il.s on ilveksen kesän saalistuksesta välttyneiden osuus
   aikuisista naaraista,
27 # phi.m.il.s vastaava uroksille
28
29 # Priori urososuudelle
30 r ~ dunif(0, 1)
31
32 # Priori maalaskentatulosten variaatiokertoimelle
33 cv ~ dunif(0, 0.1)
34
35 # Priorit luonnonoloista selviytymisen todennäköisyyksille.
```

```

36 phi.o ~ dunif(0,1)
37 phi.y ~ dunif(0,1)
38
39
40 # Priorit ilveksen saalistamille valkohäntäkauriiden lukumää
    rille vuosittain (aito = mallin antama saalis, arvio =
    laskettu)
41 ilves.aito[1] ~ dpois(ilves.arvio[1])
42 for (t in 1:(T-1)){
43   ilves.aito[t+1] ~ dpois(ilves.arvio[t+1])
44   phi.il.w[t] <- 1-0.9*ilves.aito[t]/(sum(n.h.c.yf[t, ])+sum(n.h
    .c.ym[t, ])+sum(n.h.c.m[t, ])+sum(n.h.c.f[t, ]))
45   phi.il.s[t] <- 1-0.1*ilves.aito[t+1]/(sum(n.a.c.f[t, ])+sum(n.
    a.c.m[t, ]))
46 }
47
48 phi.il.w[15] <- 1-0.9*ilves.aito[15]/(sum(n.h.c.yf[15, ])+sum(n.
    h.c.ym[15, ])+sum(n.h.c.m[15, ])+sum(n.h.c.f[15, ]))
49
50 for (t in 1:T) {
51   for (i in 1:k) {
52     r.hav[t, i] ~ dbin(r, h.y[t,i])
53     tau.yhd[t,i] <- (1/cv^2)*tau.apu[t,i] #(tau.apu = 1/mlask^2)
54     mlask[t,i] ~ dnorm(kanta.huhtikuu[t,i], tau.yhd[t, i])
55   }
56 }
57
58 # Priorit populaatioiden ko'oilte yhdistyksittäin.
59 # vuosi.0[i] yhdistyksen i maalaskentatulos vuonna 2000
60
61 for(i in 1:k){
62   N.yf.1[i] ~ dunif(0, vuosi.0[i]+10)
63   N.ym.1[i] ~ dunif(0, vuosi.0[i]+10)
64   N.f.1[i] ~ dunif(0, vuosi.0[i]+10)
65   N.m.1[i] ~ dunif(0, vuosi.0[i]+10)
66 }
67
68 N.yf.tot.1 <- sum(N.yf.1)
69 N.ym.tot.1 <- sum(N.ym.1)
70 N.f.tot.1 <- sum(N.f.1)
71 N.m.tot.1 <- sum(N.m.1)
72
73 ## TILAMALLI
74
75 for (i in 1:k) {
76 # Rajoite: Kolareissa (talvi) ja metsästyksessä voi kuolla
    korkeintaan
77 # edellisen syksyn kannan koon verran yksilöitä
78

```



```

79 h.yf[1, i] ~ dunif(0, N.yf.1[i] - cw[1, i]*c.w.yf)
80 h.ym[1, i] ~ dunif(0, N.ym.1[i] - cw[1, i]*c.w.ym)
81 h.f[1, i] ~ dunif(0, N.f.1[i] - cw[1, i]*c.w.f)
82 h.m[1, i] ~ dunif(0, N.m.1[i] - cw[1, i]*c.w.m)
83
84 # Talviaajan kolarit ja metsästys 1. vuonna
85 n.h.c.yf[1, i] <- trunc(N.yf.1[i] - h.yf[1, i] + 0.5 - cw[1, i]*
      c.w.yf) # metsästyksestä selviytyvät yf
86 n.h.c.ym[1, i] <- trunc(N.ym.1[i] - h.ym[1, i] + 0.5 - cw[1, i]*
      c.w.ym) # metsästyksestä selviytyvät ym
87 n.h.c.f[1, i] <- trunc(N.f.1[i] - h.f[1, i] + 0.5 - cw[1, i]*c.
      w.f) # metsästyksestä selviytyvät f
88 n.h.c.m[1, i] <- trunc(N.m.1[i] - h.m[1, i] + 0.5 - cw[1, i]*c.
      w.m) # metsästyksestä selviytyvät m
89
90 # Ilveksen talvikauden saalistus 1. vuonna
91 n.h.c.il.yf[1, i] ~ dbin(phi.il.w[1], n.h.c.yf[1, i])
92 n.h.c.il.ym[1, i] ~ dbin(phi.il.w[1], n.h.c.ym[1, i])
93 n.h.c.il.f[1, i] ~ dbin(phi.il.w[1], n.h.c.f[1, i])
94 n.h.c.il.m[1, i] ~ dbin(phi.il.w[1], n.h.c.m[1, i])
95
96 # Muut luonnolliset kuolemat 1. vuonna
97 surv.yf[1, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.yf[1, i])
98 surv.ym[1, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.ym[1, i])
99 surv.f[1, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.f[1, i])
100 surv.m[1, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.m[1, i])
101
102 # Koko kannan koko yhdistyksittäin keväällä 1. vuonna
103 kanta.huhtikuu[1, i] <- surv.yf[1, i]+ surv.ym[1, i]+ surv.f[1,
      i]+ surv.m[1, i]
104
105 # Aikuiset 1. vuonna
106 n.a.f[1, i] <- surv.yf[1, i] + surv.f[1, i]
107 n.a.m[1, i] <- surv.ym[1, i] + surv.m[1, i]
108
109 # Syntyminen 1. vuonna
110
111 # Kesän aikana aikuisia yksilöitä joutuu kolareihin ja ilveksien
      saaliiksi
112 cs.f[1, i] ~ dunif(0, n.a.f[1, i])
113 cs.m[1, i] ~ dunif(0, n.a.m[1, i])
114 n.a.c.f[1, i] <- trunc(n.a.f[1, i] - cs.f[1, i] + 0.5)
115 n.a.c.m[1, i] <- trunc(n.a.m[1, i] - cs.m[1, i] + 0.5)
116
117 # Eri tiloissa olevien yksilöiden lukumäärät 1. vuoden lopussa
118 # eli syksyllä 2001.
119
120 N.f[1, i] ~ dbin(phi.il.s[1], n.a.c.f[1, i])
121 N.m[1, i] ~ dbin(phi.il.s[1], n.a.c.m[1, i])

```

```

122
123 n.b.vee[1, i] <- lambda * N.f[1, i]
124 n.born[1, i] ~ dpois(n.b.vee[1, i])
125 ym.t[1, i] ~ dbin(r, n.born[1, i]) # uroksiksi valikoituvat
      vasat
126
127 N.ym[1, i] <- ym.t[1, i]
128 N.yf[1, i] <- n.born[1, i] - N.ym[1, i] # loput vasat naaraiksi
129
130 # Kokonaismäärä yhdistyksittäin syksyllä ennen metsästyskautta
      1. vuonna
131 N.total[1, i] <- N.ym[1, i] + N.yf[1, i] + N.m[1, i] + N.f[1, i]
132
133 # Naaraspuolisten yksilöiden lukumäärän suhde uroksiin
      yhdistyksittäin 1. vuonna
134 sex.ratio[1, i] <- (N.f[1, i] + N.yf[1, i]+1)/(N.ym[1, i] + N.m
      [1, i]+1)
135 }
136
137 # Kokonaismäärä Uudellamaalla tiloittain syksyllä ennen
138 # metsästyskautta 1. vuonna
139 N.yf.total[1] <- sum(N.yf[1, ])
140 N.ym.total[1] <- sum(N.ym[1, ])
141 N.f.total[1] <- sum(N.f[1, ])
142 N.m.total[1] <- sum(N.m[1, ])
143
144 # Kokonaismäärä
145 N.total.uusimaa[1] <- sum(N.total[1, ])
146
147 for (t in 2:(T-1)) {
148
149   for (i in 1:k){
150     # Rajoite: Kolareissa (talvi) ja metsästyksessä voi kuolla
      korkeintaan
151     # edellisen syksyn kannan koon verran yksilöitä
152
153     h.yf[t, i] ~ dunif(0, N.yf[t-1, i] - cw[t, i]*c.w.yf)
154     h.ym[t, i] ~ dunif(0, N.ym[t-1, i] - cw[t, i]*c.w.ym)
155     h.f[t, i] ~ dunif(0, N.f[t-1, i] - cw[t, i]*c.w.f)
156     h.m[t, i] ~ dunif(0, N.m[t-1, i] - cw[t, i]*c.w.m)
157
158     # Talviajan kolarit ja metsästys 1. vuonna
159     n.h.c.yf[t, i] <- trunc(N.yf[t-1, i] - h.yf[t, i] + 0.5 - cw[t,
      i]*c.w.yf) # metsästyksestä selviytyvät yf
160     n.h.c.ym[t, i] <- trunc(N.ym[t-1, i] - h.ym[t, i] + 0.5 - cw[t,
      i]*c.w.ym) # metsästyksestä selviytyvät ym
161     n.h.c.f[t, i] <- trunc(N.f[t-1, i] - h.f[t, i] + 0.5 - cw[t, i]
      *c.w.f) # metsästyksestä selviytyvät f

```

```

162 n.h.c.m[t, i] <- trunc(N.m[t-1, i] - h.m[t, i] + 0.5 - cw[t, i]
      *c.w.m)
163
164 # Ilveksen talvikauden saalistus vuonna t
165 n.h.c.il.yf[t, i] ~ dbin(phi.il.w[t], n.h.c.yf[t, i])
166 n.h.c.il.ym[t, i] ~ dbin(phi.il.w[t], n.h.c.ym[t, i])
167 n.h.c.il.f[t, i] ~ dbin(phi.il.w[t], n.h.c.f[t, i])
168 n.h.c.il.m[t, i] ~ dbin(phi.il.w[t], n.h.c.m[t, i])
169
170 # Muut luonnolliset kuolemat vuonna t
171 surv.yf[t, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.yf[t, i])
172 surv.ym[t, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.ym[t, i])
173 surv.f[t, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.f[t, i])
174 surv.m[t, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.m[t, i])
175
176 # Koko kannan koko yhdistyksittäin keväällä vuonna t
177 kanta.huhtikuu[t, i] <- surv.yf[t, i]+ surv.ym[t, i]+ surv.f[t,
      i]+ surv.m[t, i]
178
179
180 # Aikuiset vuonna t
181 n.a.f[t, i] <- surv.yf[t, i] + surv.f[t, i]
182 n.a.m[t, i] <- surv.ym[t, i] + surv.m[t, i]
183
184 # Syntyminen vuonna t
185
186 # Kesän aikana aikuisia yksilöitä joutuu kolareihin ja ilveksien
      saaliiksi
187 cs.f[t, i] ~ dunif(0, n.a.f[t, i])
188 cs.m[t, i] ~ dunif(0, n.a.m[t, i])
189 n.a.c.f[t, i] <- trunc(n.a.f[t, i] - cs.f[t, i] + 0.5)
190 n.a.c.m[t, i] <- trunc(n.a.m[t, i] - cs.m[t, i] + 0.5)
191
192 # Eri tiloissa olevien yksilöiden lukumäärät vuoden t lopussa (
      syksyllä).
193
194 N.f[t, i] ~ dbin(phi.il.s[t], n.a.c.f[t, i])
195 N.m[t, i] ~ dbin(phi.il.s[t], n.a.c.m[t, i])
196
197 n.b.vee[t, i] <- lambda * N.f[t, i]
198 n.born[t, i] ~ dpois(n.b.vee[t, i])
199 ym.t[t, i] ~ dbin(r, n.born[t, i])
200
201 N.ym[t, i] <- ym.t[t, i]
202 N.yf[t, i] <- n.born[t, i] - N.ym[t, i]
203
204 # Kokonaismäärä yhdistyksittäin syksyllä vuonna t ennen metsä
      styskautta
205 N.total[t, i] <- N.ym[t, i] + N.yf[t, i] + N.m[t, i] + N.f[t, i]

```

```

206
207 # Naaraspuolisten yksilöiden lukumäärän suhde uroksiin
    yhdistyksittäin 1. vuonna.
208 # Lisätty luku 1 osoittajaan ja nimittäjään pienten nimittäjien
    varalta.
209 sex.ratio[t, i] <- (N.f[t, i] + N.yf[t, i] + 1)/(N.ym[t, i] + N
    .m[t, i] + 1)
210 }
211
212 # Kokonaismäärä Uudellamaalla tiloittain syksyllä vuonna t ennen
213 # metsästyskautta
214 N.yf.total[t] <- sum(N.yf[t, ])
215 N.ym.total[t] <- sum(N.ym[t, ])
216 N.f.total[t] <- sum(N.f[t, ])
217 N.m.total[t] <- sum(N.m[t, ])
218
219 # Kokonaismäärä
220 N.total.uusimaa[t] <- sum(N.total[t, ])
221 }
222
223
224 for (i in 1:k){
225 # Rajoite: Kolareissa (talvi) ja metsästyksessä voi kuolla
    korkeintaan
226 # edellisen syksyn kannan koon verran yksilöitä
227
228 h.yf[15, i] ~ dunif(0, N.yf[14, i] - cw[15, i]*c.w.yf)
229 h.ym[15, i] ~ dunif(0, N.ym[14, i] - cw[15, i]*c.w.ym)
230 h.f[15, i] ~ dunif(0, N.f[14, i] - cw[15, i]*c.w.f)
231 h.m[15, i] ~ dunif(0, N.m[14, i] - cw[15, i]*c.w.m)
232
233 # Talviajan kolari15 ja me15säs15ys 1. vuonna
234 n.h.c.yf[15, i] <- trunc(N.yf[14, i] - h.yf[15, i] + 0.5 - cw
    [15, i]*c.w.yf) # metsästyksessä selviytyvät yf
235 n.h.c.ym[15, i] <- trunc(N.ym[14, i] - h.ym[15, i] + 0.5 - cw
    [15, i]*c.w.ym) # metsästyksessä selviytyvät ym
236 n.h.c.f[15, i] <- trunc(N.f[14, i] - h.f[15, i] + 0.5 - cw[15,
    i]*c.w.f) # metsästyksessä selviytyvät f
237 n.h.c.m[15, i] <- trunc(N.m[14, i] - h.m[15, i] + 0.5 - cw[15,
    i]*c.w.m)
238
239 # Ilveksen talvikauden saalistus vuonna t
240 n.h.c.il.yf[15, i] ~ dbin(phi.il.w[15], n.h.c.yf[15, i])
241 n.h.c.il.ym[15, i] ~ dbin(phi.il.w[15], n.h.c.ym[15, i])
242 n.h.c.il.f[15, i] ~ dbin(phi.il.w[15], n.h.c.f[15, i])
243 n.h.c.il.m[15, i] ~ dbin(phi.il.w[15], n.h.c.m[15, i])
244
245 # Muut luonnolliset kuolemat vuonna t
246 surv.yf[15, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.yf[15, i])

```

```
247 | surv.ym[15, i] ~ dbin(phi.y, n.h.c.il.ym[15, i])
248 | surv.f[15, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.f[15, i])
249 | surv.m[15, i] ~ dbin(phi.o, n.h.c.il.m[15, i])
250 |
251 | # Koko kannan koko yhdistyksittäin keväällä vuonna t
252 | kanta.huhtikuu[15, i] <- surv.yf[15, i]+ surv.ym[15, i]+ surv.f
    | [15, i]+ surv.m[15, i]
253 |
254 | }
255 | }
```

model.bug