Matematiikan sivuainetutkielma

Ongelmanratkaisun opettaminen todennäköisyystehtävissä

Nanni Koski

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
14. elokuuta 2017

Tiivistelmä

Mitä enemmän oppilas tai opiskelija oivaltaa itse, sitä enemmän hän oppii ja nauttii ongelmanratkaisusta. Tämä ajatus toimii lähtökohtana tutkielmassa. Käsiteltävät tehtävät ovat tasoltaan yläkouluun ja / tai lukioon soveltuvia. Tutkielma antaa opettajalle käytännönläheisiä esimerkkejä opetustilanteessa hyödynnettävistä todennäköisyysongelmista. Tehtävistä esitetään useita ratkaisuvaihtoehtoja, jotta opettajan on helpompi samaistua erilaisiin ajattelutapoihin. Mikä tärkeintä, tutkielmaan on kehitetty kysymyksiä, joilla oppijaa voi ohjata hienovaraisesti eteenpäin ratkaisussaan. Tavoitteena on, että ratkoja keksii kysymysten avulla itse ratkaisun kuhunkin ongelmaan.

Ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen kuuluu peruskoulun ja lukion opetussuunnitelman perusteisiin (Opetushallitus, 2016 ja 2015). Tutkielmassa esitellään Polyan (1973) ongelmanratkaisumalli, jota hyödynnetään ongelmien ratkaisemisessa. Malli perustuu neljään vaiheeseen: ongelman ymmärtäminen, ratkaisusuunnitelman tekeminen, ratkaisusuunnitelman toteuttaminen ja ratkaisun tarkastelu. Viimeiseen kohtaan kuuluu myös opitun soveltaminen toisessa ongelmassa. Tähän tarkoitukseen sekä opetuksen eriyttämiseen voi käyttää tutkielmassa esitettyjä lisätehtäviä.

Pohdinnassa esitetään erilaisia keinoja ottaa ongelmanratkaisu osaksi opetusta. Koska ongelmanratkaisu kuuluu useiden oppiaineiden opetussuunnitelmaan, voisi peruskouluun rakentaa ongelmanratkaisun ympärille monialaisen teemapäivän. Esimerkkinä esitetään suomen kielen opetukseen sopiva ongelma. Pohdinnassa tarkastellaan myös matemaattisen ongelmanratkaisun ja peleissä esiintyvien ongelmien yhtäläisyyksiä ja eroja. Pelien näkökulmasta oppilaat voivat kehittää käsitystään ongelmanratkaisusta.

Tekijä: Koski, Nanni
Työn nimi: Ongelmanratkaisun opettaminen todennäköisyystehtävissä
Tieteenala: Matematiikka
Sivumäärä: 70 s.
Korkeakoulu: Jyväskylän yliopisto
Laitos: Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Valmistumisaika: Elokuu 2017

Sisältö

Lukijalle

Tutkielmani on kirjoitettu näkökulmasta, jossa opettaja neuvoo oppilaitaan ratkomaan ongelmia. Opettajalle tutkielmani antaa vinkkejä siitä, kuinka ohjata oppilasta tai opiskelijaa matemaattisen ongelmanratkaisutehtävän ratkomisen eri vaiheissa.

Tutkielmani pariin on kuitenkin ihan yhtä tervetullut kuka tahansa oppilas, opiskelija tai muu ongelmanratkaisusta kiinnostunut. Tällöin voi samaistua oppijan rooliin ja saada ajatuksia siitä, miten ongelmanratkaisuprosessi toimii ja millaisia kysymyksiä kannattaa esittää itselleen, jotta saisi ratkaistua esitetyn ongelman.

Mistä näkökulmasta tutkielmaa lähestytkään, jokaista tehtävää kannattaa ensin ratkoa itse. Ratkaisun saamisen jälkeen voit lukea vinkkini ja katsoa ratkoitko tehtävää samalla tavalla kuin minä. Kenties keksit itse jonkin erilaisen tavan saada ratkaisun ongelmaan!

Vasta, jos tunnollisen yrittämisen jälkeen tuntuu, ettei ratkaisu aukea, kannattaa tehtävässä edetä osio kerrallaan. Lue jokainen kysymys läpi ja pohdi, mitä apua siitä voisi olla ongelman ratkaisussa. Muistathan myös, että ratkaisutapoja voi olla useita, eikä kaikkia toimivia tapoja ole varmastikaan käsitelty tässä tutkielmassa. Oli ratkaisusi mikä tahansa, kaikista tärkeintä on, että ymmärrät itse sen oikeellisuuden.

Tehtävissä mainitaan, mille ryhmälle ne on suunnattu. Vaadittavat esitiedot ilmenevät kuitenkin vasta ratkaisun edetessä, ettei niiden näkyminen vaikuttaisi ratkaisuprosessin kulkuun.

Toivon sinulle oivalluksen hetkiä tutkielmani parissa!

1 Ongelmanratkaisu ja todennäköisyys

”Onko meidän pakko löytää ratkaisu? Emmekö voisi vain nauttia ongelmasta jonkin aikaa?”

Näin raapustin vihkoni sisäkanteen pitkän matematiikan tunneilla esiintyneiden lentävien lauseiden joukkoon. Enemmän syvennyin kuitenkin ystäväni kirjaamaan yhdistetyn funktion derivoimissääntöön sekä määrätyn integraalin laskemisessa käytettävään ”y niin kuin ensin ja a niin kuin myöhemmin” lausahduksen hyödyntämiseen. Tämä omituinen muistisääntö toimi mahtavasti ja ratkaisun saaminen kyseisiin tehtäviin oli helppoa. Ja kun vastaus täsmäsi kirjan takana olevaan, pystyin innokkaana matematiikan laskijana jatkamaan eteenpäin.

Ongelmanratkaisusta nautin sitten vapaa-aikanani. Ratkoin isäni *Tekniikan Maailman* pulmakulmat erilliselle paperille ennen kuin isä kerkesi töistä kotiin. Mutta jossain vaiheessa leirintäalueongelmien tai ABCD-ruudukkojen ratkaisut alkoivat syntyä tiettyjen, hyviksi huomaamieni välivaiheiden kautta. En silloin ymmärtänyt, että tehtävät eivät enää olleet ongelmia sanan varsinaisessa merkityksessä. Milloin siis voidaan puhua ongelmasta?

1.1 Ongelma

Ongelma-sanaa käytetään arkipäivässä useissa merkityksissä. Voi esiintyä ihmissuhdeongelmia tai uniongelmia. Ongelmana voi olla myös kadoksissa olevan tavaran löytäminen tai uuteen paikkaan suunnistaminen. Kaikkia ongelmia yhdistänee se, että yksilö kokee tarvetta löytää tilanteeseensa ratkaisun. Toinen ongelmaa määrittävä tekijä on se, että ratkaisun keksimiseen tai löytämiseen tarvitsee käyttää aikaa ja vaivaa. Jos asian ratkaisemiseen ei siis tarvitse käyttää pohdintaa, tilanne ei ikään kuin ehdi muodostua ongelmaksi.

Tässä tutkielmassa tarkasteltavat ongelmat rajataan matemaattisiin ongelmiin, mutta yleiset ongelman pääpiirteet pätevät myös niihin. Tarkastelun pohjaksi otetaan ongelman määrittely Henry Leppäahon väitöskirjasta *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi* (2007):

> *Ongelma on sellainen tehtävätilanne, jota yksilö ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla. Ratkaisun saavuttaminen voi kestää muutamista sekunneista viikkoihin tai jopa vuosiin.*

Tästä eteenpäin tutkielmassa ongelma tarkoittaa matemaattista tehtävätilannetta, joka täyttää edellä olevan määritelmän. Määritelmässä kannattaa kiinnittää huomiota siihen, että tietty tehtävä ei ole kaikille ongelma. Matematiikassa hyvänä esimerkkinä toimii suorakulmion pinta-alan laskeminen, mikä on alakoulussa ongelma mutta yläkouluikäiselle perustaito.

Tästä seuraa se, että tutkielmassa esiteltävät ongelmat eivät tuota ongelmia välttämättä jokaiselle oppilaalle, opiskelijalle tai opettajalle. Mutta tehtävän ratkaisemisesta voi silti oppia tärkeitä asioita. Ratkaisua voi usein myös lähestyä eri näkökulmista, mikä voi vaikuttaa ratkaisun löytymisen helppouteen ja nopeuteen. Ensimmäinen askel ongelman ratkaisuun on kuitenkin kiinnostus esitettyä ongelmaa kohtaan ja halu tarkastella sitä.

1.2 Ongelmanratkaisun vaiheet

Ongelmanratkaisu on prosessi, jonka alkutilassa on ongelma, joka halutaan ratkaista. Ihanteellisessa tilanteessa ongelmanratkaisuprosessin lopuksi ongelmaan on löydetty ratkaisu ja ratkaisu voidaan nähdä oikeaksi. Malleja ongelmanratkaisuprosesseihin on 1900-luvulla esitetty useita (Leppäaho, 2007). Siitä huolimatta ongelmat voidaan ratkaista ilman yhdenkään mallin tuntemista. Kuitenkin ongelmanratkaisun prosessien tunteminen voi auttaa ratkaisun löytymisessä etenkin silloin kun oma intuitio ei vie ratkaisua maaliin asti.

Tähän tutkielmaan esiteltäväksi on valittu Polyan ongelmanratkaisumalli. Polya on työssään painottanut ongelmanratkaisun tärkeyttä matematiikassa ja ongelmanratkaisun kehittyminen on perustunut pääosin hänen työhönsä (Schoenfeld, 1992). Mikäli lukija on kiinnostunut ongelmanratkaisuprosessimalleista, suosittelen aloittamaan tutustumisen Leppäahon (2007) väitöskirjan luvusta 4.6, jossa niitä on esitetty useita erilaisia.

Polya on alun perin vuonna 1945 julkaistussa kirjassaan *How to solve it* listannut ongelmanratkaisun neljä vaihetta: ongelman ymmärtäminen, ratkaisusuunnitelman tekeminen, suunnitelman toteuttaminen ja ratkaisun tarkastelu. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että ongelmanratkaisu olisi välttämättä suoraviivaista. Käsitys ongelmasta muuttuu ratkaisemisen eri vaiheissa. Aluksi käsitys voi olla vain pintapuolinen ja näkökulmaa voi joutua muuttamaan useita kertoja ennen kuin ratkaisu on valmis. (Polya, 1973.)

Jokaisella vaiheella on selkeä merkitys ongelman ratkaisemisen kannalta: Ymmärtämättä ongelmaa voi päätyä laskemaan jotain ongelman kannalta epäoleellista asiaa. On myös mahdollista laskea ratkaisun kannalta tärkeää asiaa tietämättä ollenkaan, miksi se on oleellista tehtävässä. Tehtävän sisäistämisen jälkeen täytyy selvittää, miten alkutiedoista voidaan saada selville tehtävässä kysytty asia, tuntematon. Ratkaisusuunnitelman tekeminen onkin yleensä haastavin tehtävä. Tehdyn suunnitelman oikeaoppinen toteuttaminen ja jokaisen vaiheen tarkistaminen varmistavat tuloksen oikeellisuuden. Onnekkaissa tilanteissa oppilas keksii ratkaisun kuin itsestään, ilman mitään valmisteluja. Tällaisessakin tilanteessa tehtävästä saadaan lisähyötyä, kun ratkaisua tarkastellaan vielä lopuksi. (Polya, 1973.)

Itse asiassa Polyan esittämää listaa voi hyödyntää käsitellessä mitä tahansa ongelmaa (Leppäaho, 2007) tai laskiessa laskua, joka vaatii useita välivaiheita. Käsitellään vaiheet yksinkertaisen esimerkin avulla: tehtävänä on selvittää suorakulmaisen kolmion piiri ja pinta-ala, kun hypotenuusan ja toisen kateetin pituus tunnetaan.

1.2.1 Ongelman ymmärtäminen

Ensimmäinen askel ongelman ratkaisemiseen on tehtävän ymmärtäminen. Ei kannata vastata kysymykseen, jota ei ymmärrä tai lähteä laskemaan ennen kuin tietää mihin pyrkii. Ongelmat esitetään usein sanallisesti ja on tärkeää pystyä poimimaan tehtävänannosta tarpeelliset asiat: mikä on tuntematon, mitä on annettu ja millä tavoin nämä asiat ovat kytköksissä toisiinsa. Kuvan piirtäminen kannattaa, jos se on mahdollista. Tässä vaiheessa kehitetään myös notaatio eli merkintätapa. On tärkeää miettiä, onko tehtävänannossa annettu jotain ylimääräistä, mikä ei vaikuta ongelmanratkaisuun. On myös mahdollista, että tehtävästä puuttuu jokin tärkeä tieto, eikä tehtävälle välttämättä ole yksiselitteistä ratkaisua. (Polya, 1973.)

Käsiteltävässä esimerkissä kannattaa aloittaa kuvan piirtämisellä. Tässä kohtaa tulee myös varmistus, ymmärtääkö laskija, mikä on suorakulmainen kolmio. Todetaan aluksi, että pyrkimyksenä on ratkaista kolmion piiri p ja pinta-ala A. Notaatiota päätettäessä voidaan esimerkiksi valita, että tunnettu kateetti on pituudeltaan a, tuntematon kateetti b ja tunnettu hypotenuusa c. Yhteys piirin ja sivujen pituuksien välillä on $p = a + b + c$. Kolmion pinta-ala lasketaan jakamalla kolmion kannan ja korkeuden tulo kahdella. Suorakulmaisessa kolmiossa kolmion kateetit voidaan tulkita kannaksi ja korkeudeksi ja pinta-alan kaava saadaan muotoon $A = {}^{ab}/_{2}$.

Tämän jälkeen huomataan, että kaikki muu piirin ja pinta-alan laskemiseksi tunnetaan paitsi kateetin pituus b. Mutta voidaanko se selvittää tehtävänannossa annettujen tietojen perusteella?

1.2.2 Ratkaisusuunnitelman tekeminen

Ratkaisusuunnitelman keksiminen on ongelman ratkaisemisen ydin ja se voi viedä paljon aikaa ja yrityksiä. Tämä on haastavin listan kohdista. Suunnitelma on valmis, kun vähintään pääpiirteittäin on tiedossa, mitä vaiheita tulee suorittaa tuntemattoman ratkaisemiseksi. Suunnitelma voi rakentua astettain tai idean voi saada väläyksenomaisesti muutamien epäonnistuneiden yritysten jälkeen. Auttaakseen oppilasta keksimään ratkaisusuunnitelman, opettajan kannattaa huomaamattomasti ohjata oppilasta tällaista ideaa kohti. (Polya, 1973.)

Polya (1973) huomauttaa, että hyvät ideat perustuvat kokemukselle ja aiemmin saaduille tiedoille. Pelkkä tietojen muistaminen ei riitä, vaan tietoja tulee myös osata soveltaa. Kuitenkin ilman pohjatietoja ratkaisu voi olla mahdotonta rakentaa. Jos ongelmaan ei tunnu löytyvän ratkaisua, voi olla hyödyksi miettiä seuraavia kysymyksiä:

- Oletko nähnyt joskus aiemmin vastaavan ongelman?

- Tunnetko matemaattisen lauseen tai teoreeman, jonka käyttäminen voisi olla avuksi?
- Tiedätkö ongelmia, joissa on vastaavankaltainen tuntematon?
- Voitko käyttää apuna aiemmin ratkaisemaasi ongelmaa?

Voi olla vaikeaa löytää juuri se vastaava ongelma, joka auttaa ratkaisun saamiseen. Tästä syystä kannattaa erityisesti keskittyä ongelmiin, joissa on samankaltainen tuntematon kuin käsiteltävässä ongelmassa. Mikäli muistaa ratkaisseensa ongelman, joka liittyy tällä hetkellä ratkaistavaan, kannattaa pyrkiä hyödyntämään sitä. Jos esitetty ongelma ei lähde aukenemaan suoraan, kannattaa miettiä voisiko ongelmasta ratkaista muunnellun version: yleisemmän version, erikoistapauksen, osan ongelmasta tai voisiko lähtöarvoja lisätä tai kenties jopa vaihtaa ratkaistavaa tuntematonta. Lopuksi kannattaa muistaa palata esitetyn ongelman pariin. Itse asiassa muunnellun ongelman ratkaiseminen voi auttaa keksimään tavan lähestyä alkuperäistä ongelmaa. (Polya, 1973.)

Oppilaan hienovarainen ohjaaminen ratkaisua kohti voi olla haastavaa. Polya (1973) kehottaa asettamaan itsensä oppilaan asemaan: mitä vaikeuksia ja onnistumisia muistat kokeneesi ongelmanratkaisun parissa? Itselläni hankaluuksia on aiheuttanut epäonnistuneesta yrityksestä siirtyminen uuden ajatuksen keksimiseen. Voi olla myös vaikeaa nähdä, milloin ensimmäinen ratkaisuyritys ei voi edes viedä maaliin asti. Liian hankalaa lähestymistapaa käsitellessään saattaa turhautua ongelmaan. Itse olen huomannut helpommaksi tuottaa useita ratkaisumahdollisuuksia tilanteissa, joissa tulee löytää sääntö esimerkiksi lukujonoon. Tällöin säännön sopivuus on helppo todeta nopeasti joko oikeaksi tai vääräksi, ennen kuin ajatukseen ehtii kiintymään. Toisinaan hankaluutta aiheuttaa se, ettei sisäistä hyödyllisellä tavalla kaikkea tehtävässä annettua informaatiota. Myös oppilas voi saada hyötyä omien vaikeuksiensa pohtimisesta. Vaikeuksien tiedostaminen voi nimittäin auttaa välttämään niitä.

Esimerkin ratkaisusuunnitelmassa on nyt edetty siihen, että jos b tunnetaan niin piiri ja pinta-ala osataan laskea. Tehtävä on tarjoillut kaikki mahdollisuudet käyttää Pythagoraan lausetta $a^2 + b^2 = c^2$, joka pätee nimenomaan suorakulmaisille kolmioille. Toki mahdollisuutena on myös käyttää trigonometrisia funktioita kahteen kertaan: ensin terävän kulman α ratkaisemiseen esimerkiksi yhtälöstä $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ ja tämän jälkeen kateetin b ratkaisemiseen yhtälöstä $\sin\alpha = \frac{b}{c}$.

Jos Pythagoraan lauseen käyttäminen ei tule oppilaalle mieleen, eikä tehtävä lähde heti ratkeamaan, hän voi muokata tehtävää hieman: tavoitteeksi voi esimerkiksi ottaa terävän kulman ratkaisemisen. Sen saa selville käyttämällä trigonometrisen funktion käänteisfunktiota. Kulman ratkaisemisen jälkeen oppilas on lähempänä sivun b ratkaisemista.

Mikäli oppilas ei muista Pythagoraan lausetta tai tunne trigonometrisia funktioita, hän ei välttämättä pysty tekemään ratkaisusuunnitelmaa. Toki yksi vaihtoehto on piirtää suorakulmainen kolmio, jonka kaksi sivua on tunnettujen pituiset. Tästä kuvasta voisi sitten mitata tuntemattoman kateetin pituuden. Tämä ratkaisu olisi epätarkka, mutta osoittaisi oppilaan oivalluskykyä ja sisukkuutta ongelmatilanteessa.

1.2.3 Suunnitelman toteuttaminen

Suunnitelman toteuttaminen on paljon helpompaa kuin sen keksiminen. Toteuttamiseen tarvitaan pääasiassa vain kärsivällisyyttä, kun oletetaan että taidot riittävät keksityn suunnitelman toteuttamiseen. Mikäli oppilas on saanut suunnitelman opettajalta tai vaikka vierustoveriltaan suoraan, on olemassa riski, että oppilas unohtaa suunnitelman sen toteutuksen aikana. Jos oppilas on taas itse keksinyt suunnitelman tai häntä on johdateltu siihen tarpeeksi hienovaraisesti, hän pystyy sen todennäköisesti myös toteuttamaan. (Polya, 1973.)

Toteuttamiseen kuuluu se, että oppilas tarkistaa välivaiheiden oikeellisuuden. Virheettömyyden voi perustella joko todistuksella tai syvällä ymmärryksellä asiasta. Tavoitteena on, että oppilas itse on täysin vakuuttunut ratkaisun jokaisen vaiheen oikeellisuudesta. (Polya, 1973.)

Suunnitelman toteuttamiseen kuuluu nyt esimerkiksi kateetin b ratkaiseminen Pythagoraan lauseesta ja tämän jälkeen kaavaan sijoittaminen ja tuloksen käyttäminen piirin ja pinta-alan laskemisessa. Kateetin voi ratkaista myös edellä esitetyistä trigonometrisista funktioista.

1.2.4 Ratkaisun tarkastelu

Tehtävän tarkastelu ratkaisun löytymisen jälkeen on erittäin opettavaista ja tärkeää. Ratkaisuun johtaneen polun uudelleen tutkiminen voi lujittaa tietoja ja kykyä ratkaista ongelmia. Löytyneen ratkaisun äärellä kannattaa pohtia esimerkiksi seuraavia kysymyksiä: (Polya, 1973.)

- Pystytkö tarkistamaan ratkaisun?
- Pystytkö tarkistamaan perustelusi?
- Voitko saada saman ratkaisun eri menetelmällä?
- Voisiko ratkaisun perustella helpommin?
- Pystytkö käyttämään tulosta tai käyttämääsi menetelmää jossain toisessa ongelmassa?

Vaikka jokainen välivaihe on tarkistettu, on mahdollista, että jossain kohdassa on tapahtunut virhe. Yksi hyvä tapa tarkistaa tulos on käyttää erilaista ratkaisutapaa. Jos kahdella eri tavalla saa saman tuloksen, se tukee ratkaisun oikeellisuuden tuntua. Ongelman ratkaiseminen saattaa antaa ongelmasta niin paljon lisätietoa, että lopuksi huomaa, että ratkaisun olisi voinut nähdä paljon helpommin. Tällaiset huomiot voivat antaa työkaluja tulevia ongelmanratkaisutilanteita varten. Viimeisellä kysymyksellä voi osoittaa, että matematiikassa asiat ovat kytköksissä toisiinsa. Se antaa myös hienon mahdollisuuden hyödyntää tulosta, jonka eteen oppilas on nähnyt vaivaa. (Polya, 1973.)

Tehtävän tarkastamisen helppous vaihtelee, mutta aina kannattaa lopuksi miettiä, onko saatu ratkaisu järkevä. Mikäli ratkaisu ei tunnu järkevältä, voi ratkaisustaan löytää samalla virheen tai saada uuden idean tehtävän ratkaisemiseen. Toisaalta voi vakuuttua perusteluidensa pätevyydestä. Tärkeää on varmistua siitä, että on muistanut selvittää nimenomaan alun perin esitetyn ongelman. Esimerkkitehtävässä voi esimerkiksi unohtaa laskea kolmion pinta-alan sen jälkeen kun on selvittänyt sen korkeuden. Ratkaisun huolellinen tarkastelu estää ratkaisun jäämisen viittä vaille valmiiksi.

Esimerkissä ratkaisun tarkastelu tai vertailu toisen oppilaan kanssa voi tuoda erilaisia ratkaisutapoja. Oppilas voi myös muistaa Pythagoraan lauseen vasta tässä vaiheessa ja käyttää sitä b:n tarkistamiseen.

1.3 Todennäköisyys

Todennäköisyys on läsnä jokapäiväisissä päätöksentekotilanteissa. Todennäköisyyteen pohjautuvia päätöksiä voi tehdä joko tiedostetusti tai tiedostamattaan. Mihin auto kannattaa parkkeerata, jotta kukaan ei kolhisi sitä? Mihin aikaan kannattaa soittaa vieraalle ihmiselle, jotta hänet saisi kiinni varmimmin? Kannattaako tänään ottaa mukaan sateenvarjo? Näissä tilanteissa todennäköisyyttä voidaan arvioida subjektiivisesti, ja lisäksi tehtävään päätökseen vaikuttaa koettu haitta ja hyöty. On myös tilanteita, joissa todennäköisyyden arviointi on mahdollista perustella tarkasti tai aineistoon pohjautuen.

Kirjassaan *Miksi heittää lanttia: Päättämisen taito ja tiede* H. W. Lewis käsittelee useita päätöksenteon tilanteita. Todennäköisyyden käsitettä Lewis (1999) kuvaa hienosti:

> *Todennäköisyys on tapahtuman suhteellinen tapahtumismahdollisuus keskellä muiden mahdollisten tapahtumien viidakkoa. Jotta todennäköisyyttä voi käyttää hyödykseen kunnolla, täytyy tietää, minkä mahdollisuutta se mittaa.*

Todennäköisyydessä minua viehättää se, että melko yksinkertaiseltakin näyttävä tehtävä voi olla haasteellinen. Toisaalta tarkalla järkeilyllä voi päästä pitkälle, kunhan laskija luottaa itseensä. Todennäköisyyden opettamiseen tuo haastetta se, että tehtävää voi usein lähestyä eri näkökulmista ilman että yksikään on toista oikeampi. Tehtävään voi myös joskus saada oikean vastauksen väärällä päättelyllä ja laskulla, mikä vaatii opettajalta tarkkuutta.

Toisinaan tapahtumien todennäköisyyksien vertailu onnistuu intuitiivisesti, toisinaan intuitio vie harhaan. Tämä saattaa aiheuttaa laskijassa epävarmuutta ja tunteen siitä, ettei osaa tai ymmärrä todennäköisyyttä. Tästä syystä on tärkeää oppia käsittelemään todennäköisyyksiä järjestelmällisesti ja perustelemaan erityisesti itselleen päättelynsä periaatteet. Todennäköisyystehtävät ovat erittäin hyviä matematiikan sanallistamisen ja perustelemisen harjoittelussa. Koettu epävarmuus kannattaa pyrkiä kääntämään haasteeksi, uteliaisuudeksi.

Käydään seuraavaksi läpi hieman todennäköisyyden käsitteistöä. Jos lukija kokee hallitsevansa todennäköisyyden perusteet hyvin, käsitteistöön tutustuminen ei ole välttämätöntä. Jos taas käsitteet tuntuvat täysin vierailta, voi olla hyödyllistä kerrata asioita myös jostain muusta lähteestä. Käyttämäni käsitteet pohjautuvat suurimmaksi osaksi lukion pitkän matematiikan kirjaan *Calculus 4*, jonka ovat kirjoittaneet Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja Matti Räsänen (2003).

Todennäköisyyden avulla tarkastellaan satunnaisilmiöitä, joiden tulokseen sattuma vaikuttaa. Kaikki eri tulosmahdollisuudet eli alkeistapaukset muodostavat otosavaruuden eli perusjoukon Ω. **Tapahtuma** on perusjoukon osajoukko, jonka ilmenemisestä ollaan kiinnostuneita. Nopanheiton tilanteessa perusjoukko $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ eli kaikki mahdolliset nopanheiton tulokset. Määritellään tapahtumat

$$A = \text{"vähintään 3"} = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \text{"pariton luku"} = \{1, 3, 5\},$$

$$C = \text{"luku 2"} = \{2\}.$$

Tapahtumien **leikkaus** sisältää alkeistapaukset, jotka kuuluvat jokaiseen tapahtumaan. Esimerkiksi tapahtumien A ja B leikkaus on $\{3,\ 5\}$, sillä 3 ja 5 kuuluvat tapahtumiin A ja B. Tapahtumilla B ja C ei ole yhteisiä alkeistapauksia, joten niiden leikkaus on tyhjä joukko $\emptyset$.

Tapahtumien **yhdiste** sisältää alkeistapaukset, jotka kuuluvat mihin tahansa tapahtumaan. Yhdisteeseen kuuluvat siis kaikki alkeistapaukset, jotka ovat tapahtumassa A tai B tai molemmissa. Esimerkiksi tapahtumien A ja B yhdiste on $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Huomaa, että jokainen alkeistapaus kirjoitetaan joukkoon vain kerran. Kun tähän yhdisteeseen lisätään vielä tapahtuma C, saadaan koko perusjoukko Ω, sillä vain luku 2 puuttuu tapahtumien A ja B yhdisteestä.

Tapahtuman A **komplementtitapahtuma** $\overline{A}$ sisältää kaikki alkeistapaukset, jotka eivät kuulu tapahtumaan A. Esimerkiksi

$$\overline{A} = \text{"enintään 2"} = \{1, 2\},$$

$$\overline{B} = \text{"parillinen luku"} = \{2, 4, 6\},$$

$$\overline{C} = \text{"ei luku 2"} = \{1, 3, 4, 5, 6\}.$$

Tapahtuman **todennäköisyys** voidaan ilmaista prosenttina nollasta sataan tai lukuna nollasta yhteen. Täten todennäköisyyden $\frac{47}{100}$ voi esittää myös muodossa 0.47 ja 47 %. Perusjoukon todennäköisyys $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ja tyhjän joukon todennäköisyys $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Todennäköisyys on siis aina väliltä 0–1. Komplementtitapahtuman todennäköisyys on $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1.3.1 Klassinen todennäköisyys

Yksinkertaisessa tilanteessa alkeistapauksia on äärellinen määrä ja niillä kaikilla on sama todennäköisyys, eli ne ovat symmetrisiä. Tällöin tapahtuman A todennäköisyyden laskemiseen voidaan käyttää klassisen todennäköisyyden kaavaa:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{tapahtumalle } A \text{ suotuisien alkeistapausten määrä}}{\text{kaikkien alkeistapausten määrä}}.$$

Tapahtumalle A suotuisa alkeistapaus on sellainen, joka kuuluu tapahtumaan A. Klassista todennäköisyyttä hyödynnetään useissa uhkapeli- ja arvontatilanteissa.

Lasketaan edellä määriteltyjen tapahtumien A, B ja C todennäköisyydet. Kuusitahokkaan tapauksessa kaikkien alkeistapauksien lukumäärä on 6.

$$\mathbb{P}(\text{nopan silmäluku on vähintään 3}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.67.$$

$$\mathbb{P}(\text{pariton luku}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

$$\mathbb{P}(\text{luku 2}) = \frac{1}{6} \approx 0.17.$$

1.3.2 Tilastollinen todennäköisyys

Useat satunnaisilmiöt ovat monimutkaisempia kuin mitä klassisen todennäköisyyden käyttäminen edellyttää. Esimerkiksi kolikonheitossa voidaan pohtia, ovatko klaava- ja kruunapuolet keskenään riittävän samanlaisia tuottaakseen symmetrisen tuloksen. Tällaisissa tilanteissa tapahtumien todennäköisyyttä voidaan tutkia tilastollisen todennäköisyyden avulla. Tilastollinen todennäköisyys perustuu nimensä mukaisesti joko tilastoon tai koetta varten kerättyyn aineistoon. Tällöin tapahtuman A todennäköisyys lasketaan:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{tapahtumaan } A \text{ kuuluvien toistojen määrä}}{\text{kaikkien toistojen määrä}}.$$

Nimittäjä on siis koko aineiston määrä ja osoittaja on tapahtumaan A kuuluvien tapausten määrä. Tilastolliseen todennäköisyyteen pohjautuen voidaan esimerkiksi laskea todennäköisyys, että yliopistossa aloittava opiskelija valmistuu tavoiteajassa. Tällöin arvio perustuu aiemmin aloittaneista opiskelijoista kerättyyn aineistoon. Mitä suurempi aineisto on, sitä varmempana saatua tulosta voidaan pitää, mikäli aloittavien opiskelijoiden tilanne ei ole merkittävästi muuttunut aineiston keräämisen jälkeen.

Esimerkiksi pelinkehittäjä voi tehdä koejulkaisun uudesta pelistä ja arvioida saadun aineiston perusteella, kannattaisiko peliin tehdä muutoksia ennen sen julkaisemista muihin maihin. Jos free to play -pelin koejulkaisussa 1500 pelaajasta 75 tekee vähintään yhden oston pelissä, voidaan ostoja tekevien pelaajien osuuden arvioida olevan $\frac{75}{1500} = 0.05$. Tämän mukaan olisi siis 5 % todennäköisyys, että pelaaja maksaa pelaamisestaan jotain. Tämän jälkeen pelinkehittäjän tulee arvioida, onko tämä tulos tarpeeksi hyvä pelin julkaisemisen jatkamiseksi.

1.3.3 Kombinatoriikka

Kombinatoriikka eli kombinaatio-oppi käsittelee sitä, kuinka monella eri tavalla äärellisestä joukosta voidaan valita erilaisia yhdistelmiä. Yhdistelmässä järjestyksellä voi olla merkitystä, esimerkiksi urheilujoukkueissa kullakin pelaajalla on tietty pelipaikka. Toisaalta merkitystä voi olla ainoastaan sillä, millainen joukko valitaan, eli kaikki yhdistelmän jäsenet ovat keskenään samanlaisia tai samanarvoisia Tämä tilanne esiintyy esimerkiksi, kun tietystä joukosta esineitä valitaan, mitkä kolme ottaisi mukaan autiolle saarelle. Käydään seuraavaksi läpi kombinatoriikan peruskäsitteitä.

Tuloperiaatteella lasketaan, kuinka monta erilaista peräkkäisistä valinnoista koostuvaa yhdistelmää on mahdollista muodostaa. Sitä käytetään esimerkiksi, kun ratkaistaan, kuinka monta erilaista asua saadaan tietyistä määristä paitoja, housuja ja kenkäpareja. Tuloperiaatteen mukaisesti kaikkien valintatilanteiden vaihtoehtojen määrät kerrotaan keskenään, jolloin saadaan erilaisten kokonaisuuksien määrä. Jos paitoja on 5, housuja 3 ja kenkäpareja 4, erilaisia asukokonaisuuksia on $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$, kun kaikista kategorioista tulee valita yksi vaate.

Kun kaikki joukon alkiot laitetaan järjestykseen, saadaan **permutaatio**. Jokainen erilainen järjestys on eri permutaatio, ja kaikkien permutaatioiden määrä voidaan laskea tuloperiaatteen avulla. Esimerkiksi käytössä on seitsemän väriä, joilla väritetään sateenkaaren seitsemän raitaa erivärisiksi. Ylimmän kaaren väri voidaan valita seitsemästä vaihtoehdosta. Toiseksi ylin ei saa olla samanvärinen, joten sen väri voidaan valita kuudesta. Tätä jatketaan, kunnes kaikki kaaret on väritetty. Erilaisia vaihtoehtoja on $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$. Tälle tulolle on merkintä 7!, joka luetaan ”seitsemän kertoma”. Jos joukossa on n alkiota, sen permutaatioiden määrä on ***n* kertoma**, joka määritellään $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Lisäksi $0! = 1$.

Mikäli koko määrästä n valitaan k alkion järjestetty osajoukko, puhutaan ***k*-permutaatiosta**, jota kutsutaan myös ***k*-variaatioksi**. Jos edellisen esimerkin tilanteessa värejä olisi 11, erilaisia sateenkaaria voisi värittää $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,663\,200$. Tämä 11 alkion 7-permutaatio saadaan myös laskemalla $\frac{11!}{(11-7)!}$. Yleinen kaava n alkion k-permutaatiolle kirjoitetaan $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$.

Kombinaatio on osajoukko, jonka alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Tehdään esimerkiksi kakkua, johon on kymmenen eri täytevaihtoehtoa. Kakun sisään tulee kolme eri täytettä, mutta ei ole merkitystä, mihin järjestykseen täytteet tulevat. Kolme täytevaihtoehtoa voidaan laittaa $3! = 6$ järjestykseen, eli jokainen eri osajoukko esiintyy 3-permutaatioiden määrässä 6-kertaisena. Kun

3-permutaatioiden määrä jaetaan tällä luvulla, saadaan 3-kombinaatioiden määrä. Tällöin erilaisia täytevaihtoehtoja kakulle on $\frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$.

Kun n alkion joukosta valitaan $\boldsymbol{k}$**-kombinaatio**, edellä käytetty kaava yleistyy muotoon $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tätä merkitään lyhemmin $\binom{n}{k}$. Merkintää kutsutaan **binomikertoimeksi**, ja se luetaan ”n yli k:n” tai ”n alla k”. Huomaa, että $\binom{n}{n} = 1$ eli joukon kaikki alkiot voidaan valita yhdellä tavalla, ja tuloksena on koko joukko itse.

Kombinaatioilla on tulkinta myös binomitodennäköisyyden yhteydessä, kun on n yritystä, joista k onnistuu. Tällöin kiinnostuksen kohteena on, kuinka monessa eri järjestyksessä onnistumiset voivat esiintyä yritysten joukossa. Esimerkiksi, kun koripalloilija saa kolme vapaaheittoa ja hän saa niistä kaksi sisään, onnistuneet korit voivat tulla kolmella eri tavalla: sisään menee heitoista joko kaksi ensimmäistä, kaksi viimeistä tai ensimmäinen ja viimeinen. Tulos voidaan myös laskea $\binom{3}{2} = 3$.

Mikäli on epäselvää, ovatko edellä esitetyt esimerkit toisiaan vastaavia tilanteita, voidaan kakkuesimerkki ajatella seuraavasti: asetetaan kaikki täytevaihtoehdot pöydälle riviin ja tämän jälkeen valitaan kolmikkoja, jotka pääsevät kakun täytteeksi. Esimerkiksi yhteen täytevaihtoon tulee rivissä olevista täytteistä ensimmäinen, kolmas ja seitsemäs ja tässä tilanteessa täytteet ovat mansikkahillo, banaani ja kermavaahto. Tällöin ”yritys” on laittaa kakkuun täytteitä, mutta vain kolme täytteistä ”onnistuu”.

1.3.4 Onko järjestyksellä merkitystä vai ei?

Edellä esitettiin tilanteita, jossa laskettiin joko k-permutaatioita tai k-kombinaatioita n alkion joukosta. Aina ei ole välttämättä selvää, pitääkö osajoukon järjestys ottaa huomioon vai ei. Otetaan esimerkki tavallisella korttipakalla. Korttipakassa on neljä eri maata: punaiset maat ruutu ja hertta sekä mustat maat risti ja pata. Jokaisesta maasta on kortit, jotka vastaavat lukuarvoja 1–13. Yhteensä pakassa on siis 52 korttia. Tarkastellaan seuraavaksi eri tapoja laskea pokerin neloskäsien määrä ja yhdellä jaolla saatavan neloskäden todennäköisyys. Tällöin kädessä on neljä samannumeroista korttia ja yksi muu kortti.

Lasketaan ensin neloskäsien määrä kombinaatioiden näkökulmasta, eli kädessä olevien korttien keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä. Neloset voivat olla mitä numeroa tahansa, mahdollisia arvoja on siis 13. Pakassa olevat neljä samanarvoista korttia voi valita käteen yhdellä tavalla. Viidennen kortin voi valita 12 lukuarvosta, ja se voi olla mistä tahansa neljästä eri maasta. Tällöin tuloperiaatetta käyttämällä saadaan erilaisten neloskäsien määräksi $13 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 4 = 624$. Saman voi laskea binomikertoimia käyttämällä:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1} = 13 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 4 = 624,$$

jossa ensin valitaan, mitä numeroa neloset ovat. Tämän jälkeen ne kaikki neljä korttia valitaan käteen mukaan. Sen jälkeen arvotaan, mitä numeroa viides kortti on, ja sen numeroisista korteista valitaan yksi käteen. Viidenneksi kortiksi voi myös valita suoraan minkä tahansa jäljellä olevista 48 kortista:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1} = 13 \cdot 1 \cdot 48 = 624.$$

Pokerikäden voidaan myös ajatella muodostuvan kahdennumeroisista korteista, joita toisia on yksi ja toisia neljä. Kolmestatoista kortista kaksi voidaan valita $\binom{13}{2} = 78$ tavalla. Tässä ei vielä oteta huomioon, että jokainen numeropari voi muodostaa kaksi erilaista neloskättä: toinen numeroista on neloset ja toinen on viides kortti. Määrä tulee siis kertoa kahdella. Tulos on taas sama:

$$2\binom{13}{2}\binom{4}{4}\binom{4}{1} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{2!11!} \cdot 1 \cdot 4 = 13 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 4 = 624$$

Neloskäsien kombinaatioiden määrän voi siis laskea usealla eri tavalla.

Neloskäsien todennäköisyyksien laskemiseen tarvitaan myös klassisen todennäköisyyden kaavassa olevan nimittäjän arvo eli kaikkien mahdollisten käsien määrä. Binomikerrointa käyttämällä saadaan laskettua, kuinka monella tavalla 52 kortista voi valita 5:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960.$$

Näin nelosten todennäköisyydeksi saadaan 0,24 %:

$$\mathbb{P}(\text{neloset}) = \frac{624}{2\,598\,960} = \frac{1}{4\,165} \approx 0.00024.$$

Edellä ei otettu huomioon, että jokainen pokerikäsi voidaan jakaa useassa eri järjestyksessä. Lasketaan kaikkien erilaisten käsien määrä tässä tapauksessa. Ensimmäinen kortti voidaan valita 52 kortista, toinen 51 kortista, kolmas 50:stä, neljäs 49:stä ja viides 48 kortista. Kyseessä on 5-permutaatio 52 kortista. Kaikkien järjestysten määrä on:

$$\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200.$$

Neloskäsien permutaatioiden määrä saadaan laskettua tuloperiaatteen avulla. Käydään läpi yksi esimerkkijako: Ensimmäinen kortti voi olla mikä tahansa. Sen jälkeen pakassa on 3 samannumeroista korttia, jotka nousevat yksi kerrallaan. Lopuksi käden täydentää mikä tahansa muu 48 kortista. Näitä järjestyksiä on $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 = 14\,976$. Nelosten kanssa kädessä oleva kortti voidaan kuitenkin jakaa käteen missä tahansa vaiheessa. Siksi järjestyksiä on yhteensä $5 \cdot 14\,976 = 74\,880$. Kaikkien järjestysten laskemista on havainnollistettu taulukkoon 1.

Nelosten lisäksi kädessä oleva yksittäinen kortti voi sijaita jaossa siis $\binom{5}{1} = 5$ eri kohdassa, ja neloset voivat olla keskenään $4! = 24$ eri järjestyksessä. Eri jakojen määrä voidaan laskea myös:

$$\binom{5}{1} \cdot 4! \cdot 624 = 5 \cdot 4! \cdot 624 = 5! \cdot 624 = 74\,880.$$

Kaavassa oleva kombinaatioiden määrä 624 on voitu saada esimerkiksi millä tahansa edellä esitetyistä tavoista. Yleistetysti voidaan ajatella, että 5 korttia voi olla $5! = 120$ järjestyksessä riippumatta siitä, mikä kortin numero on.

Nelosten todennäköisyydeksi permutaatioita käyttämällä saadaan:

$$\mathbb{P}(\text{neloset}) = \frac{74\,880}{311\,875\,200} = \frac{1}{4\,165} \approx 0.00024,$$

joka on täsmälleen sama kuin kombinaatioilla laskettuna.

Jos siis laskee pokerin eri neloskäsien määrää, on merkitystä sillä, otetaanko järjestys huomioon vai ei. Todennäköisyyden kannalta sillä ei kuitenkaan ole merkitystä. Osoitetaan seuraavaksi, että tämä pätee aina, kun n kokoisesta joukosta valitaan k. Olkoon m tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten k-kombinaatioiden lukumäärä. Tapahtuman todennäköisyys saadaan jakamalla m binomikertoimella $\binom{n}{k}$, joka antaa kaikkien k-kombinaatioiden määrän. Kun binomikertoimen määritelmä kirjoitetaan auki ja todennäköisyyden lauseketta muokataan hieman, nähdään, että nimittäjä vastaa k-permutaatiota ja osoittajana on suotuisten alkeistapausten permutaatioiden määrä:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{\binom{n}{k}} = \frac{m}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!m}{\frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Todennäköisyyttä laskiessa ei ole siis merkitystä, ottaako järjestyksen huomioon vai ei. Tärkeää on se, että laskee kaikkien ja suotuisten tapausten määrän samalla tavalla (Lewis, 1999). Mikäli taas lasketaan lukumäärää, täytyy tietää, lasketaanko eri järjestykset keskenään erilaisiksi vai samanlaisiksi.

Taulukko 1: Kuinka monella tavalla voi saada pokerissa neloset, kun kädessä olevien korttien järjestyksellä on väliä. Taulukon oikea puoli osoittaa yksittäisen kortin X sijainnin nelosten O joukossa. Vasemman puolen tulo osoittaa, kuinka monessa järjestyksessä kukin rivi voidaan valita. Yhteensä erilaisia jakoja tulee $5 \cdot 52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 = 74\,880$. Taulukko mukailee Lewisin (1999, s. 32) esittämää kaaviota.

$52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	X	O	O	O	O
$52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	O	X	O	O	O
$52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 2 \cdot 1$	O	O	X	O	O
$52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 1$	O	O	O	X	O
$52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48$	O	O	O	O	X

1.4 Ongelmanratkaisu ja todennäköisyys peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa

Peruskoulun opetuksen tulee noudattaa peruskoulun opetussuunnitelman perusteita. Tarkastellaan seuraavaksi, miten ongelmanratkaisuun liittyvät elementit sekä todennäköisyyden opettaminen ilmenevät *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 2014* (Opetushallitus, 2016). Oppiainesisältöjen lisäksi opetussuunnitelmaan on kirjattu laaja-alaisen osaamisen tavoitteita.

Ensimmäinen laaja-alaisista osaamiskokonaisuuksista (L1) on ajattelu ja oppimaan oppiminen. Siihen sisältyy paljon ongelmanratkaisuun liittyviä teemoja, kuten tutkiva ja luova työskentelyote, yhdessä tekeminen sekä mahdollisuus syventymiseen ja keskittymiseen. Itseensä ja omiin näkemyksiinsä luottaminen, eri näkökulmien tarkasteleminen, toisten näkökulmien kuunteleminen ja avoimuus uusia ratkaisuja kohtaan ovat myös taitoja, joita matemaattisessa ongelmanratkaisussa harjoitellaan. Vuosiluokilla 7–9 ajattelun ja oppimaan oppimisen osaamiskokonaisuuden tavoitenäkökulmissa painottuvat muun muassa oppilaiden omien ideoiden tukeminen sekä tilaisuuksien antaminen itsenäiseen ja yhteiseen ongelmanratkaisuun, argumentointiin, päättelyyn ja johtopäätösten tekemiseen.

Ongelmanratkaisun opettelu näkyy myös matematiikan oppimistavoitteissa koko peruskoulun läpi, ja ongelmanratkaisutaito on yksi matematiikan arviointikohteista 6. ja 9. luokan päättöarvioinneissa. Vuosiluokkien 7–9 matematiikan opetuksen tehtäviin kuuluvat mm. ongelmien matemaattinen mallintaminen ja ratkaiseminen, omien ratkaisujen esittäminen ja niistä keskusteleminen sekä tavoitteellinen, täsmällinen ja pitkäjänteinen toiminta. Lisäksi 7–9 vuosiluokille kirjatuissa opetuksen tavoitteissa esiintyy tieto- ja viestintäteknologian sekä ohjelmoinnin käyttäminen sekä matematiikan opiskelussa että ongelmanratkaisussa.

Todennäköisyyden osalta peruskoulun opetussuunnitelma on melko väljä: matematiikan sisältöalueisiin on vuosiluokilla 3–6 kirjattu ”tutustutaan todennäköisyyteen arkitilanteiden perusteella päättelemällä, onko tapahtuma mahdoton, mahdollinen vai varma” ja vuosiluokilla 7–9 ”lasketaan todennäköisyyksiä”. 9. luokan päättöarvioinnin arvosanan 8 kriteeri todennäköisyyden osalta on se, että oppilas osaa määrittää sekä klassisia että tilastollisia todennäköisyyksiä.

1.5 Ongelmanratkaisu ja todennäköisyys lukion opetussuunnitelman perusteissa

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 (Opetushallitus, 2015) käsittelee ongelmanratkaisun harjoittelua useaan otteeseen yleisellä tasolla. Luvussa 3.2 esitetään tavoitteet opiskeluympäristöistä ja -menetelmistä. Oppimisen monimuotoisuuden vuoksi käytetään monipuolisia opiskelumenetelmiä. Tutkimiseen, kokeilemiseen ja ongelmanratkaisuun perustuvien opiskelumenetelmien käytön todetaan edistävän oppimaan oppimista ja kehittävän kriittistä ja luovaa ajattelua. Myös lukuun 5.1 kirjattuihin opiskelun yleisiin tavoitteisiin kuuluu opiskelijan ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen.

Luvussa 5.2 käsitellään lukiokoulutukseen kuuluvia aihekokonaisuuksia, jotka ovat yhteiskunnallisesti merkittäviä kasvatus- ja koulutushaasteita. Näitä aihekokonaisuuksia on yhteensä kuusi. Kaikkien aihekokonaisuuksien yhteisiin tavoitteisiin kuuluu mm. opiskelijalle mahdollisuuden antaminen luovaan ongelmanratkaisuun ja ajatteluun. Tämä tavoite on myös kirjattu erityisesti teknologia ja yhteiskunta -aihekokonaisuuden alle. Samassa aihekokonaisuudessa on myös tavoite oppia suhtautumaan erehdyksiin luovaan prosessiin kuuluvana kokemuksena. Tämä taito on tärkeä ongelmanratkaisun parissa.

Matematiikan oppiaineen tavoitteet ja sisällöt ovat opetussuunnitelman luvussa 5.6. Sekä pitkän että lyhyen matematiikan tavoitteisiin kuuluu opiskelijan kannustaminen matemaattisten ongelmien luovaan ratkaisemiseen. Lisäksi tavoitteena on käyttää tietokoneohjelmistoja apuna matematiikan oppimiseen, tutkimiseen ja ongelmanratkaisuun.

Pitkän matematiikan osalta tavoitteita ongelmanratkaisulle on enemmänkin: Opiskelijan tulee kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan. Lukio-opintojensa aikana hän harjoittelee käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla eli tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja. Tärkeää on pystyä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä. Opiskelija opettelee myös mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita.

Lyhyen matematiikan puolelta ei löydy tarkennuksia matemaattisen ongelmanratkaisun opettamiseen. Lähimpänä sitä opetuksen tavoitteissa on opiskelijan rohkaiseminen kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen. Ongelmanratkaisussa tarvitaan taitoa tehdä johtopäätöksiä matematiikkaan pohjautuen, joten myös tämä tavoite toteutuu ongelmanratkaisun opettamisessa.

Pitkässä matematiikassa todennäköisyyttä opetetaan kurssilla Todennäköisyys ja tilastot (MAA10). Se on pitkän matematiikan viimeinen pakollinen kurssi. Todennäköisyyden käsitteestä opetetaan klassinen ja tilastollinen todennäköisyys. Opiskelija perehtyy myös kombinatorisiin menetelmiin ja todennäköisyyksien laskusääntöihin. Tavoitteena on ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsite ja oppia määrittämään jakauman odotusarvo ja soveltamaan sitä. Aiheena on lisäksi jatkuva todennäköisyysjakauma, jonka erikoistapaus on normaalijakauma.

Lyhyessä matematiikassa on kaksi todennäköisyyttä käsittelevää kurssia: pakollinen tilastot ja todennäköisyys -kurssi (MAB5) sekä syventävä kurssi tilastot ja todennäköisyys II (MAB8). Todennäköisyydestä lyhyessä matematiikassa opetetaan todennäköisyyslaskennan perusteet eli kombinatoriikkaa ja todennäköisyyden käsite. Tavoitteisiin kuuluvat myös todennäköisyyden laskulakien käyttäminen. Syventävällä kurssilla käydään myös normaali- ja binomijakauma, toistokoe sekä luottamusväli.

2 Taitopelin kuningas

Seuraavan tehtävässä käsitellään todennäköisyyttä helposti lähestyttävässä ja ymmärrettävässä asiayhteydessä. Tehtävä sopii sekä peruskouluun että lukioon.

Eräässä digitaalisessa pelissä on taitotehtäviä, joita kukin pelaaja voi yrittää vain kerran. Ensimmäisen tehtävän suoritti onnistuneesti 40 % pelaajista ja toisen tehtävän 70 % pelaajista. Samat pelaajat ovat yrittäneet molempia tehtäviä. Ei ole kuitenkaan kerrottu, mikä osuus pelaajista pääsi läpi molemmat näistä taitotehtävistä.
Arvioidaan todennäköisyyttä, että satunnaisesti valittu pelaaja on päässyt läpi molemmat tehtävät. Kuinka suuri tämä todennäköisyys on korkeintaan? Kuinka suuri kysytty todennäköisyys on vähintään? Kuvaile, millaisissa tilanteissa nämä todennäköisyydet toteutuisivat. Mikä arvo olisi mielestäsi todennäköinen molempien tehtävien läpäisemisen todennäköisyydelle? Perustele näkemyksesi.

2.1 Todennäköisyyden arviointi

Ongelman ymmärtäminen aloitetaan lähtötietojen selvittämisellä. Tehtävästä kannattaa myös piirtää havainnollistava kuva.

- Millä tavalla tiivistäisit tehtävänannon?
- Poimi tärkeimmät tiedot tehtävänannosta.
- Mihin kysymykseen pitää vastata?

Ongelman kysymys on monivaiheinen. Tehtävässä pyydetään arvioimaan todennäköisyydelle suurin ja pienin mahdollinen arvo. Lisäksi oppilaan tulee pohtia, mikä todennäköisyyden arvo olisi todennäköinen, eli mitä arvoa hän pitää parhaana arvauksena. Jokainen kysymys kannattaa käydä läpi erillisenä. Aloitetaan kuitenkin tehtävänannon sisäistämisellä.

Tehtävässä tulee selvittää todennäköisyyksiä, joten oppilaan ajatukset kannattaa suunnata aluksi todennäköisyyden pohtimiseen:

- Mitä todennäköisyyksiä tehtävässä on annettu?
- Miten lähtöarvot tulkitaan todennäköisyyksiksi?
- Mitä todennäköisyys kuvaa?
- Millaisia arvoja todennäköisyys voi saada?
- Millä välillä todennäköisyys on aina?

Tehtävässä on annettu osuudet pelaajista, jotka ovat päässeet läpi tehtävät. Nämä voidaan tulkita tilastollisiksi todennäköisyyksiksi:

$$\mathbb{P}(\text{suorittaa 1. tehtävän}) = \frac{\text{1. tehtävän suorittaneiden määrä}}{\text{kaikkien pelaajien määrä}} = 40\%.$$

Todennäköisyys on luku, joka voidaan ilmoittaa joko lukuna väliltä 0–1 tai prosenttilukuna 0–100 %. Todennäköisyys kuvaa, kuinka mahdollista tai varmaa jokin tapahtuma on. Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0 eli 0 %. Varman tapahtuman todennäköisyys on 1 eli 100 %.

Kun oppilaat sisäistävät tehtävänannon, heille voi antaa omaa aikaa tehdä ratkaisusuunnitelmaa, tutkia ja ratkoa tehtävää. Mikäli ratkaisusuunnitelman tekeminen ei ole heille tuttua tai he eivät osaa edetä ratkaisussaan, oppilaita voi ohjata esittämällä heille kysymyksiä.

Ensimmäinen tehtävänannon kysymyksistä koskee todennäköisyyttä, että on päässyt läpi molemmat tehtävät eli todennäköisyyksien leikkauksen maksimia. Seuraavilla kysymyksillä voi ohjata oppilasta ongelman pariin:

- Kuinka suuri osuus pelaajista on maksimissaan / korkeintaan päässyt läpi molemmat tehtävät?
- Kuinka paljon suorittaneiden osuus on kummassakin tehtävässä?
- Arvaa jokin todennäköisyys ja perustele, voiko se olla mahdollinen.
- Tuo tehtävään lisää alkuarvoja.

Yksinkertaisimmillaan ongelman voi ratkaista esimerkiksi seuraavalla ajattelulla: Ensimmäisen tehtävän läpäisee pelaajista 40 % ja toisen 70 %. Molemmat tehtävät läpäisseitä voi olla korkeintaan yhtä suuri osuus kuin ensimmäisen tehtävän läpäisseitä. Jos kaikki ensimmäisen tehtävän läpäisseet läpäisevät toisen tehtävän, on molempien tehtävien läpäisseiden prosentti 40 %. Kaavana asian voi esittää esimerkiksi:

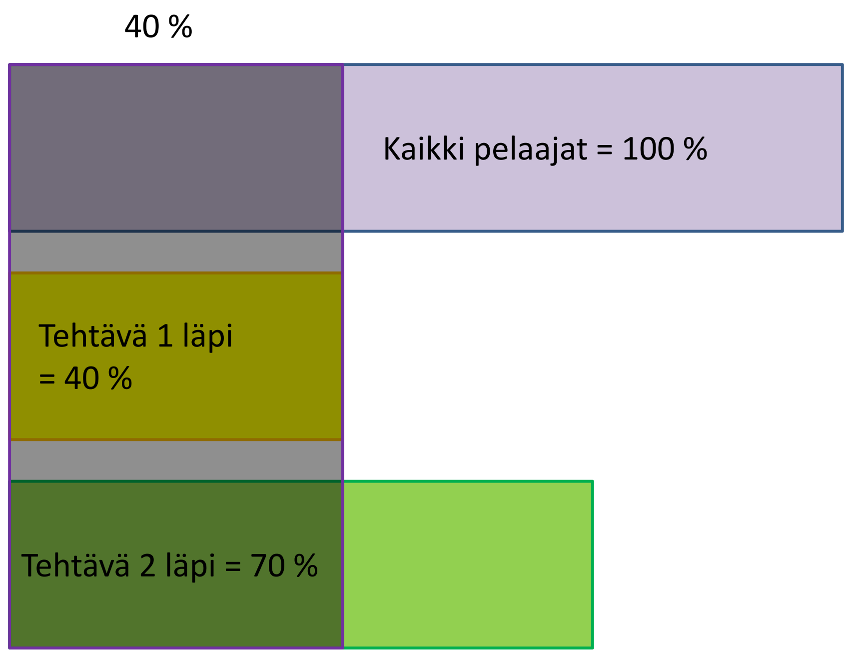
$$\min(40\,\%, 70\,\%) = 40\,\%.$$

Jos tehtävän ratkaisu näin systemaattisesti ei heti onnistu, oppilas voi esimerkiksi arvata, että 50 % pääsi läpi molemmat tehtävät. Tämän jälkeen hänen tulee perustella, voiko arvaus olla mahdollinen. Koska ensimmäisen tehtävän pääsi läpi vain 40 % pelaajista, 50 % ei ole voinut päästä läpi molempia. Tämä havainto voi auttaa pääsemään ratkaisuun.

Mikäli tehtävää on vaikeaa lähestyä vain osuuksien ja todennäköisyyksien kautta, oppilas voi ratkaista tehtävän päättäen, että pelaajia on ollut yhteensä esimerkiksi 100. Konkreettisilla luvuilla laskiessaan hänen voi olla helpompi huomata, kuinka monta ihmistä on voinut päästä läpi molemmat tehtävät. Eli kuinka monta pelaajaa on maksimissaan voinut päästä läpi molemmista tehtävistä, jos 40 pelaajaa pääsi läpi ensimmäisen tehtävän ja 70 pelaajaa pääsi läpi toisen tehtävän? Kun oppilas keksii vastauksen, hän on lähellä ratkaisua. Vastaus ei saa kuitenkaan perustua itse lisättyihin alkuarvoihin, joten hänen täytyy ratkaista vielä alkuperäinen tehtävä, jossa ei ole annettu kaikkien pelaajien määrää.

Oppilas saattaa tehdä virhepäätelmän siitä, että maksimi on 70 %. Erityisesti tällöin oppilas voi piirtämällä havaita tehneensä virheen. Kuvassa 1 on esitetty visualisointi tehtävään. Yhtä lailla tehtävien suorittamisen todennäköisyydet voi esittää kahtena ympyränä, joiden leikkaus on todennäköisyys

Tehtävien 1 ja 2 läpäisytodennäköisyyksien leikkauksen maksimi



Kuva 1: Havainnollistus mahdollisimman suuresta todennäköisyydestä suorittaa molemmat tehtävät 1 ja 2. Todennäköisyyden maksimi on 40 %.

päästä läpi molemmat tehtävät. Tällöin täytyy olla tarkkana, ettei yhdisteen todennäköisyys ylitä 100 prosenttia. Tämän estämiseksi kuvaan on havainnollistettu kaikki pelaajat. Kummallekin tehtävälle on oma palkki, joka kuvaa tehtävän suorittamisen todennäköisyyttä. Kuvaan on piirretty tehtävien palkit mahdollisimman paljon päällekkäin, sillä etsitään leikkauksen maksimia. Päällekkäin menevä osuus kuvaa todennäköisyyttä läpäistä molemmat tehtävät. Tässä tapauksessa ensimmäisen tehtävän palkki sijoittuu kokonaan päällekkäin toisen tehtävän palkin kanssa. Kokonaisuudessaan leikkaus on 40 %.

Seuraavana oppilaan tulee selvittää alaraja leikkauksen todennäköisyydelle. Oppilas voi osata soveltaa edellistä kohtaa itsenäisesti vastauksen saamiseen. Mikäli on tarvetta avulle, ohjaamisessa voi käyttää pääasiassa samoja kysymyksiä ja tekniikoita kuin maksimin etsimisessä. Lisäksi alarajaa voi lähestyä pohtimalla mahdollisimman pientä todennäköisyyttä:

- Kuinka suuri osuus pelaajista on minimissään / vähintään päässyt läpi molemmat tehtävät?
- Voiko kysytty todennäköisyys olla 0 %?

Tavoitteena nyt on saada tapahtumien leikkaus mahdollisimman pieneksi. Minkä tahansa tapahtuman todennäköisyys on vähintään 0 %, joten se on hyvä arvaus leikkauksen todennäköisyyden alarajaksi. Tämä todennäköisyys tarkoittaisi, että kaikki ensimmäisessä tehtävässä onnistuvat epäonnistuvat toisessa tehtävässä. Tällöin kukaan ei pääse läpi molempia tehtäviä. Ensimmäisessä tehtävässä onnistuu 40 %, mutta toisessa tehtävässä epäonnistuu $100\,\% - 70\,\% = 30\,\%$. Tällöin kaikki ensimmäisessä tehtävässä onnistuneista eivät voi epäonnistua toisessa tehtävässä, eikä tapahtumien leikkauksen todennäköisyys voi olla 0 %.

Tämä päättely voi auttaa näkemään vastauksen alkuperäiseen kysymykseen. Pienin leikkaus saadaan, kun mahdollisimman moni ensimmäisessä tehtävässä onnistuneista epäonnistuu toisessa tehtävässä. Toisessa tehtävässä epäonnistuvia on 30 %, joten ensimmäisessä onnistuvia ja toisessa epäonnistuvia on korkeintaan 30 %. Niinpä molemmissa onnistuvia on vähintään $40\,\% - 30\,\% = 10\,\%$.

Saman voi päätellä myös toisin: Pienin leikkaus saadaan, kun mahdollisimman suuri osuus ensimmäisessä tehtävässä epäonnistuneista 60 %:sta onnistuu toisessa tehtävässä. Kun toisen tehtävän suorittaneiden osuudesta vähennetään osuus, johon kuuluvat onnistuivat toisessa tehtävässä ja epäonnistuivat ensimmäisessä, saadaan osuus molemmissa tehtävissä onnistuneille. Eli $70\% - 60\% = 10\%$ ensimmäisessä tehtävässä onnistuneista onnistuu myös toisessa tehtävässä.

Saman tuloksen voi saada myös kolmannella tavalla: Kaikki pelaajat muodostavat 100 %, eikä tämä määrä saa ylittyä edes eri tapahtumien yhdisteelle. Lasketaan siis ensimmäisen ja toisen tehtävän onnistuneesti suorittaneiden osuudet yhteen ja katsotaan, kuinka paljon 100 % ylittyy. Tällöin saadaan osuus, jonka tapahtumat vähintään leikkaavat. Tämä on leikkauksen todennäköisyyden minimi.

$$40\,\% + 70\,\% - 100\,\% = 10\,\%$$

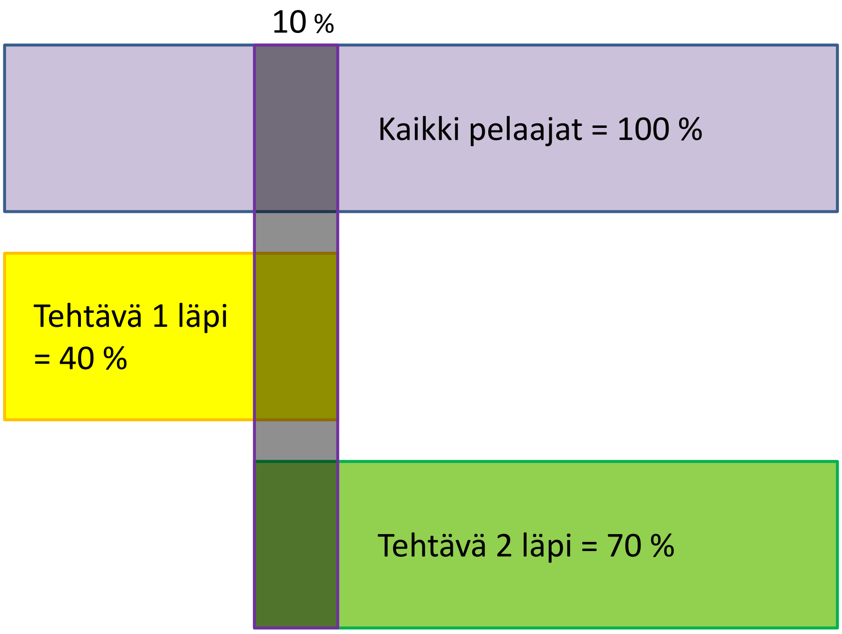
Saman voi ajatella visuaalisesti: Kuvaan 2 on havainnollistettu leikkauksen minimi kahdelle tapahtumalle. Kaikkia pelaajia kuvaava palkki asettaa rajat, joiden ulkopuolelle muita palkkeja ei voi asettaa. Nyt tehtävien läpäisemisen todennäköisyyksiä kuvaavat palkit täyttävät koko 100 % ja ne leikkaavat mahdollisimman vähän. Tehtävien 1 ja 2 suoritustodennäköisyydet menevät päällekkäin 10 %-yksikön osalta.

Kun leikkauksen todennäköisyyden ylä- ja alaraja ovat selvillä, tulee kuvailla sanoin, millaisia tilanteita saadut todennäköisyydet kuvaisivat. Oppilasta voi auttaa yksinkertaistamalla kysymyksiä:

- Miten kuvailisit pelaajia?
- Miten kuvailisit tehtäviä?

Jos leikkaus olisi maksimi 40 %, kaikki ensimmäisessä tehtävässä onnistuneet pelaajat onnistuisivat myös toisessa tehtävässä. Lisäksi ensimmäisessä tehtävässä epäonnistuneista puolet eli kokonaisuudesta 30 % saisi toisen tehtävän läpi. Toinen tehtävä on siis joko helpompi kuin ensimmäinen, tai ensimmäisestä on opittu jotain toisessa hyödynnettävää asiaa.

Tehtävien 1 ja 2 läpäisytodennäköisyyksien leikkauksen minimi



Kuva 2: Havainnollistus mahdollisimman pienestä todennäköisyydestä suorittaa molemmat tehtävät 1 ja 2. Todennäköisyyden minimi on 10 %.

Jos taas leikkauksen todennäköisyys olisi minimi 10 %, ensimmäisen tehtävän osanneet eivät olisi pärjänneet toisessa yhtä hyvin, sillä heistä vain neljäsosa ($^{10\,\%}/_{40\,\%}$) olisi päässyt myös toisen tehtävän läpi. Kuitenkin ensimmäisessä tehtävässä epäonnistuneista (60 % osuus) kaikki olisivat saaneet toisen tehtävän läpi. Tällöin vaikuttaisi siltä, että tehtävät ovat keskenään todella erilaisia, sillä ensimmäisessä onnistuminen ei käytännössä edesauta toisessa onnistumista, ennemminkin päinvastoin.

Nyt, kun leikkauksen todennäköisyyden ääripäiden tulkinnat ovat selvillä, päästään viimeiseen kysymykseen: mikä olisi mielestäsi hyvä arvio molempien tehtävien läpäisemisen todennäköisyydelle? Tämä arvio on henkilökohtainen, ja pääasia on, että oman arvionsa osaa perustella. Yksi arvio voisi olla esimerkiksi välin puoliväli. Molempien tehtävien suorittamisen todennäköisyys on väliltä 10–40 %. Puolivälissä on siis 25 %. Etenkin yläkoululainen voi mieltää tämän tilanteeksi, jolloin ensimmäisessä tehtävässä pärjääminen ei vaikuta toisessa tehtävässä pärjäämiseen. Mikäli oppilas päätyy tällaiseen tulkintaan, voi riippumattomuuden käsitettä tarkastella seuraavan luvun pohjalta.

Lopuksi voi myös pohtia, mikä tapa oli helpoin ratkaista tehtävä tai voisiko oppilas löytää paremman tavan perustella ala- ja yläraja leikkauksen todennäköisyydelle. Oppilaille voi myös antaa luvussa 2.3 esitettävän lisätehtävän, jossa tehtävässä opittua pääsee hyödyntämään uudestaan. Konkreettisen tehtävän kautta voi olla helpompi löytää omasta mielestä paras tapa ratkoa tällaista tehtävää kuin jälkikäteen ratkaisuaan muistellessa.

Lukiolaisille lisää tehtävään tuo riippumattomuus, jota voi hyödyntää tehdessä arviota todennäköisyyksien leikkaukselle. Yläkoulun puolella riippumattomuus ei ole niin oleellinen osa tehtävää, vaan tärkeintä on perehtyä todennäköisyyden määritelmään. Yläkouluun ensisijainen tavoite on, että oppilas ymmärtää, että 70 % ja 40 % leikkaa vähintään 10 %-yksikköä ja enintään 40 %-yksikköä. Lisäksi todennäköisyyksien tulkinta on oleellinen osa tätä tehtävää.

2.2 Riippumattomuuden hyödyntäminen

Lukiossa käsitellään riippumattomuutta enemmän kuin yläkoulussa, joten lukiolaiset voivat todennäköisyyden arvioinnissa hyödyntää tietoaan riippumattomuudesta. Jos kaksi tapahtumaa A_1 ja A_2 ovat riippumattomia, todennäköisyys, että molemmat tapahtuvat, on niiden tapahtumien tulo. Eli

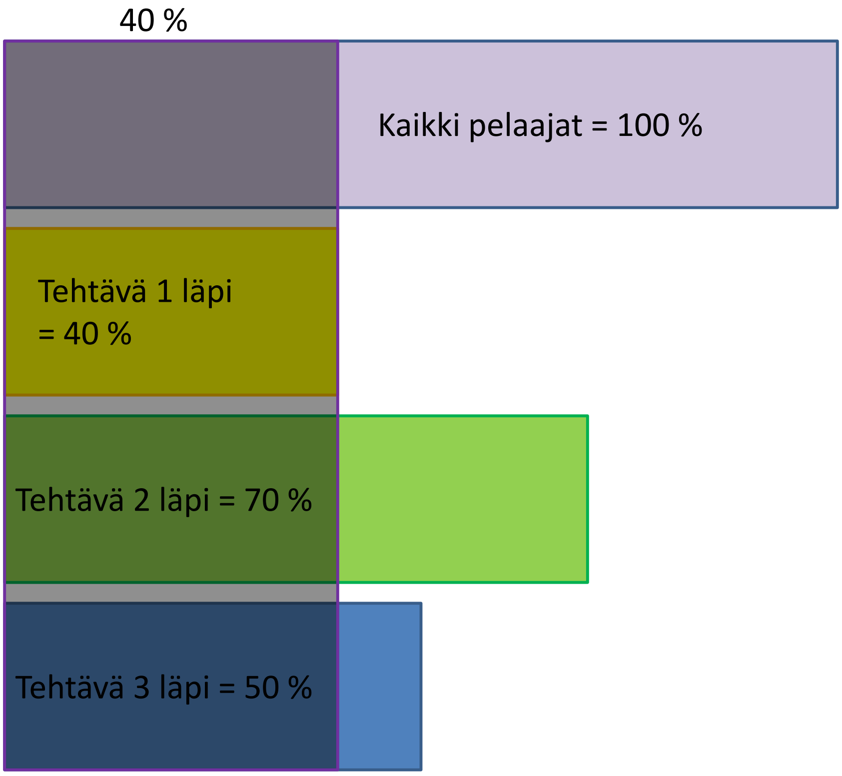
$$\mathbb{P}(A_1 \text{ ja } A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2).$$

Mikäli ehdolliset todennäköisyydet ovat opiskelijalle tuttuja, tapahtumien riippumattomuus tarkoittaa myös sitä, ettei ensimmäisen tapahtuman tulos vaikuta toisen tapahtuman todennäköisyyteen. Tämä tieto voi olla erittäin hyödyllinen riippumattomuuden tulkinnassa. Seuraavilla kysymyksillä voi ohjata opiskelijaa käyttämään riippumattomuutta todennäköisyyden arvioinnin tukena:

- Mitä sinun tulee olettaa, että voit laskea todennäköisyyden läpäistä molemmat tehtävät?
- Mikä on todennäköisyys läpäistä molemmat tehtävät, jos ne ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia?
- Mitä riippumattomuus tarkoittaa?
- Ovatko tapahtumat mielestäsi riippumattomia?
- Millä tavalla voit käyttää riippumattomuutta todennäköisyyden arvioinnissa?

Jos ensimmäisen ja toisen tehtävän suorittaminen olisivat toisistaan riippumattomia tapahtumia, todennäköisyys saada molemmat tehtävät läpi olisi aineiston perusteella $0.4 \cdot 0.7 = 0.28$. Jos tapahtumat olisivat riippumattomia, toisessa tehtävässä onnistuminen olisi yhtä todennäköistä riippumatta siitä, onnistuiko ensimmäisessä tehtävässä. Tämä ei liene totta, koska kyseessä on taitopeli. Leikkauksen todennäköisyys siis poikkeaa riippumattomuustilanteen 28 %:sta. Koska ensimmäisessä tehtävässä onnistuminen ennustanee myös toisessa tehtävässä onnistumista, todennäköisyyden tulisi olla suurempi kuin 28

Tehtävien 1, 2 ja 3 läpäisytodennäköisyyksien leikkauksen maksimi



Kuva 3: Havainnollistus mahdollisimman suuresta todennäköisyydestä suorittaa kaikki tehtävät 1, 2 ja 3. Todennäköisyyden maksimi on 40 %.

%. Tällöin on todennäköisempää päästä läpi toinen tehtävä ehdolla että läpäisi ensimmäisen tehtävän kuin että ei läpäissyt.

2.3 Lisätehtävä: Kolmas tehtävä

Kun alkuperäinen tehtävä on saatu ratkaistuksi, ongelmaa voi muokata tuomalla mukaan peliin kolmannen tehtävän. Kolmella tapahtumalla riippumattomuuden tarkastelu monimutkaistuu, ja sen tarkastelu jätetään huomiotta.

> Kolmannesta tehtävästä pääsi läpi 50 % pelaajista. Mitkä nyt ovat ala- ja yläraja todennäköisyydelle, että satunnaisesti valittu pelaaja pääsi läpi kaikista kolmesta tehtävästä? Oletetaan, että samat pelaajat ovat yrittäneet kaikkia tehtäviä.

Edellisestä tehtävästä opittiin erilaisia tapoja ratkaista tällainen ongelma. Nyt kolmas tehtävä monimutkaistaa hieman tarkastelua. Mielestäni havainnollisin tapa ratkaista tämä ongelma on visualisoiminen. Aiemmin opittiin, että maksimia etsittäessä tapahtumien leikkauksesta halutaan mahdollisimman suuri, eli kuvassa palkit piirretään mahdollisimman paljon päällekkäin. Minimin tapauksessa leikkauksesta halutaan mahdollisimman pieni, eli palkit sijoitetaan mahdollisimman kauas toisistaan.

Maksimin tapauksessa voidaan toimia samalla tavalla kuin luvussa 2.1:

$$min(40\,\%, 70\,\%, 50\,\%) = 40\,\%.$$

Kolmen tehtävän suoritustodennäköisyyksien minimi on 40 %, ja se on maksimi todennäköisyydelle, että suorittaa kaikki tehtävät. Tämän voi perustella myös sitä kautta, että koska kahden tehtävän tapauksessa yläraja oli 40 % eikä kolmannen tehtävän suoritustodennäköisyys ole sitä pienempi, sama yläraja on edelleen voimassa.

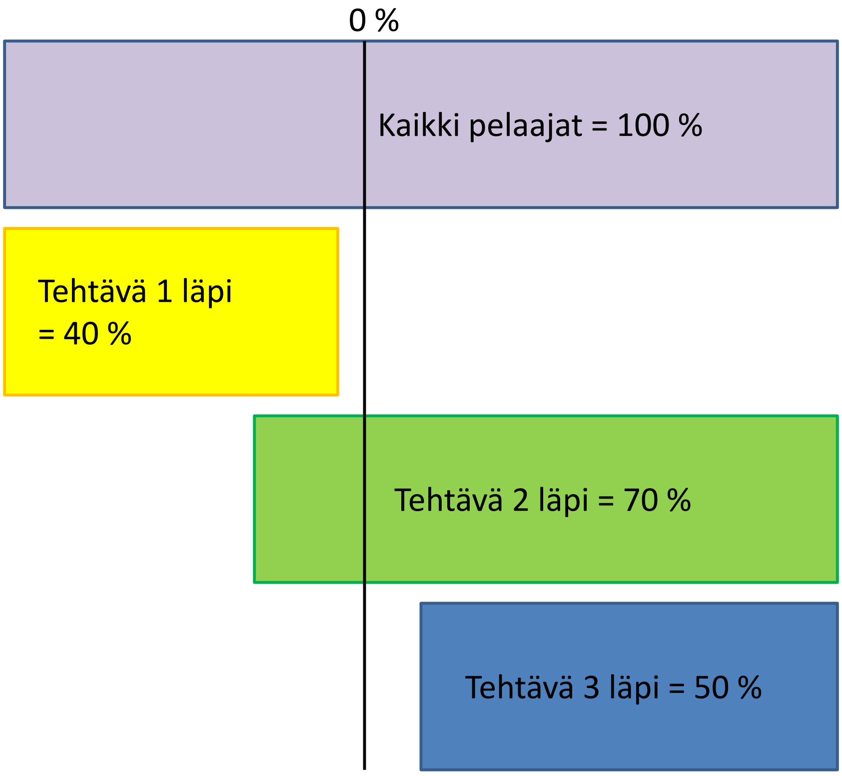
Kuvassa 3 on kuvattuna kolmen tehtävän läpäisyosuudet palkkeina. Palkit on asetettu mahdollisimman paljon päällekkäin, ja tilanne säilyy samana: Maksimi kolmen tehtävän suorittamisen todennäköisyydelle on 40 %.

Alarajan tilanteessa aiemman tavan mukaiset laskutoimitukset muuttuvat hankaliksi. Pääasia on huomata, että selvitetään alarajaa todennäköisyydelle suorittaa kaikki kolme tehtävää. Tällöin 0 %:n tulokseen riittää se, että jotkin kaksi tapahtumaa eivät leikkaa ollenkaan. Kannattaa siis tutkia kahta pienintä todennäköisyyttä samaan tyyliin kuin aiemmassa tehtävässä:

$$40\,\% + 50\,\% - 100\,\% = -10\,\%.$$

Kahden pienimmän todennäköisyyden summa ei siis ylitä 100 %, joten ne eivät välttämättä leikkaa ollenkaan. Alarajaksi tulee siis 0 %.

Tehtävien 1, 2 ja 3 läpäisytodennäköisyyksien leikkauksen minimi



Kuva 4: Havainnollistus mahdollisimman pienestä todennäköisyydestä suorittaa kaikki tehtävät 1, 2 ja 3. Todennäköisyyden minimi on 0 %.

Kuvassa 4 ensimmäisen ja kolmannen tehtävän todennäköisyyksiä kuvaavat palkit on sijoitettu mahdollisimman kauas toisistaan, eivätkä ne mene yhtään päällekkäin. Toisen tehtävän palkin voisi asettaa mihin vain, eikä sillä olisi vaikutusta kolmen tehtävän suorittamisen todennäköisyyden alarajaan. Koska palkkien leikkaus jää tyhjäksi, alaraja on 0 %.

3 Pelata vai eikö pelata?

Ongelmanratkaisutehtävän tehtävänanto voi ohjata ajattelua, sillä sen muotoilusta riippuen ratkaisua voi lähteä hakemaan eri tavoin. Joskus tehtävänannossa annetaan ratkaisun kannalta ylimääräisiä, tärkeiltä näyttäviä tietoja. Tällöin voi olla vaikeaa löytää ratkaisun kannalta oleelliset asiat. Luvuissa 3.1 ja 3.5 esitetään kaksi eri versiota samasta tehtävästä. Versiot eroavat toisistaan kehystarinan ja annettujen lähtötietojen osalta. Ensimmäinen tehtävänanto on suunnattu yläkouluun ja toinen lukioon. Tehtävän ratkaiseminen käsitellään ensimmäisen tehtävän kohdalla, joten lukion tehtävästä kiinnostuneen kannattaa tutustua myös yläkoulun tehtävän versioon.

Tehtävän alkuperäinen versio on peräisin kirjasta *Five hundred mathematical challenges*, jonka ovat kirjoittaneet Barbeau, Klamkin ja Moser 1995. Tehtävä löytyy kirjasta numerolla 317.

Luvun 3.1 ongelmasta esitetään kolme erilaista ratkaisuvaihtoehtoa: Ensimmäiseksi päättelymenetelmä, luvussa 3.2 yleinen ratkaisu ja luvussa 3.3 listaamismenetelmä, jota käytetään vielä myöhemmin luvussa 3.6. Ongelmanratkaisussa hyödynnetään luvussa 1.2 esitettyjä vaiheita.

3.1 Mikä elokuva katsotaan?

Tämä tehtävä on ajateltu yläkouluikäisille sopivaksi.

> Seitsemäsluokkalaiset kaksoset riitelevät joka sunnuntai siitä, mikä elokuva katsotaan perheen kesken illalla. Äiti on kyllästynyt jatkuvaan kinaan ja sanoo kaksosille, että he saavat minuutin aikaa päästä sopuun tai pelataan seuraavaa peliä: Äiti laittaa kirjekuoreen molempien lasten alakoulun koulukuvat, siis kuusi kuvaa kummastakin. Tämän jälkeen kuoresta arvotaan pareja siihen asti, että kuori on tyhjä. Mikäli nostetut kuvat esittävät samaa lasta, saa kuvissa oleva lapsi parin itselleen. Mikäli nostetaan yksi kuva kummastakin lapsesta, pari laitetaan sivuun. Katsottavan elokuvan saa päättää kaksosista se, kummalla on enemmän pareja, kun kuori on tyhjä. Jos molemmilla on yhtä monta paria, äiti päättää katsottavan elokuvan. Mitä nuorten kannattaisi tehdä tässä tilanteessa?

Kysymys voisi olla vaihtoehtoisesti: Kannattaako nuorten pelata? Miten neuvoisit nuoria tässä tilanteessa? Myös kysymyksen asettelu voi vaikuttaa siihen, millä tavalla tehtävää ajattelee. Tehtävänanto on kirjoitettu siten, että kuulijana oleva yläkouluikäinen oppilas voisi samaistua ongelmaan. Oppilas saattaa nähdä ongelmassa myös mahdollisuuden käyttää sitä jollain tapaa omassa arjessaan.

Ongelman esittämisen jälkeen luokassa saattaa herätä lisää kysymyksiä, jotka voisivat vaikuttaa siihen, kannattaako pelata vai ei. Esimerkiksi äidin elokuvamieltymyksestä ei kerrota tehtävänannossa. Mitä jos se suosiikin toista nuorista? Kysymysten herääminen on positiivinen ilmiö, sillä oppilaat osoittavat kiinnostusta tehtävää kohtaan. Peruskoulun opetussuunnitelman (Opetushallitus, 2016) tavoitteisiin kuuluu oppilaiden omien ideoiden tukeminen. Tällaisessa tilanteessa oppilaan idean tukeminen voisi tarkoittaa sitä, että opettaja kehuu oppilaita heidän esittämistään huomioista. Tehtävän yksinkertaistamiseksi opettaja voi kuitenkin suositella jättämään elokuvamieltymyksien käsittelyn tämän tehtävän ulkopuolelle. Näitä erilaisia mieltymyksiä voi pohtia myös vasta esitetyn tehtävän ratkaisun löytymisen jälkeen. Jos pohditaan elokuvamieltymyksiä, ne voivat esimerkiksi olla: kummallakin nuorella ja myös äidillä on erilaiset toiveet katsottavasta elokuvasta, nuoret katsoisivat mieluummin toistensa valitseman elokuvan kuin äidin valitseman, nuoret katsovat mieluummin äidin valitseman elokuvan kuin toistensa tai nuoret eivät halua myöntyä siihen, että toinen saisi päättää.

Ongelmanratkaisun ensimmäinen vaihe on ongelman ymmärtäminen. Mikäli luokassa ei herää kysymyksiä tai ideoita tehtävän ratkaisemiseksi voi opettaja kysyä esimerkiksi:

- Mikä nuorilla on tavoitteena?
- Onko kummallakin nuorella yhtä hyvät mahdollisuudet voittaa äidin esittämässä pelissä? Miksi?
- Kannattaako siis pelata?
- Miten tämä peli toimii?

Näillä kysymyksillä pyritään kohdistamaan ajatukset pelin tutkimista kohti siten, että huomio kiinnittyy ratkaisun kannalta oleellisiin asioihin tehtävänannossa. Nuorilla on tavoitteena löytää heidän kannaltaan paras ratkaisu, ja sen löytäminen on myös ratkaisu esitettyyn ongelmaan.

Kysymys voittomahdollisuuksista ei ole välttämätön, mutta asian perusteleminen on kuitenkin matemaattisesti kiinnostavaa. Tämän kysymyksen voi nostaa esille myös vasta lopuksi. Tarkoitus on herättää ajatuksia ratkaisun löytämisen sijaan. Ei siis ole välttämätöntä tietää, kannattaako peliä pelata todennäköisyyksien valossa. Tässä vaiheessa opettajankin kannattaa olla pohdiskelevalla kannalla sen sijaan, että vahvistaisi oikeaa ajatusta tai yrittäisi saada oppilaan vaihtamaan mieltänsä. Oppilas voi olla kumpaa mieltä tahansa pelaamisen kannattavuudesta, ja siitä syystä myös lukija saa pohtia vastausta siihen asti, että ratkaisu alkuperäiseen ongelmaan löytyy. Molemmissa tapauksissa voi siirtyä pohtimaan, miten käsiteltävänä olevassa pelissä käy. Mikäli mahdollista, oppilaiden kannattaa pelata muutama kierros peliä saadakseen siitä hyvän mielikuvan.

Merkintätavan eli notaation kehittäminen on tärkeää, koska silloin pelistä on helpompi keskustella ja tehdä muistiinpanoja. Oppilaita voi johdatella keksimään merkintätapa esimerkiksi seuraavilla kysymyksillä:

- Mille asioille olisi hyödyllistä saada merkintätapa?
- Miten peli etenee?

- Millä on merkitystä pelin kannalta?
- Voiko merkintöjä yksinkertaistaa?

Luultavasti oppilas kiinnittää huomiota siihen, että pelaajia on kaksi. Heitä voidaan merkitä esimerkiksi nuori A ja nuori B. Pelipakka koostuu kuudesta kummankin nuoren kuvasta, eli kuvia on yhteensä kaksitoista. Pelissä jaetaan pareja, ja ne voivat koostua joko yhden nuoren kuvista tai kummankin nuoren yhdestä kuvasta. Jaettava pari voi siis olla joko tasapari T tai sekapari S. Pelissä lasketaan kummallekin nuorelle muodostuvia tasapareja, ja jos parit haluaa merkitä erilaisiksi, voi esimerkiksi käyttää alaindeksejä T_A, T_B. Tasapareja voi myös valita merkitsevänsä vain kirjaimilla A ja B.

Tässä on pelin kulkujen yksinkertaistamiseksi valittu merkitä tasaparit alaindeksein 1 ja 2. Pari T_1 kuvaa tasapareja sille nuorelle, jonka pari nousee ensin. Toisen nuoren parit merkitään T_2. Näin yhdellä pelinkululla saadaan kuvattua kahden pelin kulku, kun ei tarvitse määrittää, kummalle nuorista nousee ensimmäinen pari.

Kahdentoista kuvan pelipakka voi olla liian monimutkainen oppilaalle käsiteltäväksi. Tällöin ratkaisusuunnitelmaa tehdessään oppilas voi lähteä ratkomaan yksinkertaisempia tilanteita. Seuraavaksi käydään läpi yksinkertaistettuja versioita parienkeräyspelistä, ennen kuin päästään käsiksi alkuperäisen ongelman ratkaisuun.

2 + 2 kuvaa

Muokataan tehtävää yksinkertaisemmaksi siten, että molemmista nuorista on kuoressa vain kaksi kuvaa. Päättelytapaa käytettäessä käydään läpi mahdollisia pelin kulkuja. Pelin kannalta oleellista on, millaisia pareja kuoresta nousee. Neljällä kuvalla on helppoa käydä erilaiset vaihtoehdot läpi, sillä pareja muodostuu vain kaksi ja toisen parin kortit määräytyvät suoraan ensimmäisen parin korttien perusteella. Oppilasta voi kehottaa kertomaan erilaiset vaihtoehdot, joita pelissä voi tapahtua. Päättelytapa voi edetä esimerkiksi seuraavasti:

Vaihtoehto 1

Ensimmäisessä nostetussa parissa on kuva kummastakin nuoresta. Tämän jälkeen kuoressa on jäljellä samanlainen pari. Molemmat parit menevät siis sivuun, eikä kumpikaan nuorista saa yhtään paria.

Nostetut parit ovat siis SS.

Vaihtoehto 2

Ensimmäinen pari koostuu kumman tahansa nuoren molemmista kuvista. Tällöin kyseinen nuori saa parin. Tämän jälkeen kuoressa on jäljellä toisen nuoren kuvat, joten toinen nostettu pari menee hänelle. Molemmat nuoret saavat yhden parin.

Tämän vaihtoehdon jako voidaan esittää T_1T_2.

Kummassakin tapauksessa peli päättyy tasan. Molemmat nuoret saavat joko yhden tai ei yhtään paria.

2 + 2 kuvan tapauksesta on tavoitteena oppia seuraavat asiat:

- Päättelytekniikan käyttö.
- Peli päättyy tasan.
- Molemmat pelaajat saavat joko yhden tai ei yhtään paria.

Esitetty päättelytapa vie oikeaan ratkaisuun. Sitä käytettäessä saattaa kuitenkin jäädä virhekäsitys, että molemmat tilanteet ovat yhtä todennäköisiä. Esitetyn ongelman kannalta sillä ei ole merkitystä. Kuitenkin ettei virhekäsitystä jäisi, opettaja voi esittää asiasta kysymyksen esimerkiksi ongelman koontivaiheessa:

- Onko 2 + 2 kuvan tilanteessa yhtä todennäköistä, että molemmat saavat yhden parin tai ei yhtään paria? Miksi?
- Mikä on todennäköisyys saada yksi pari?

Tähän kysymykseen vastatakseen täytyy listata kaikki jaot kortti kortilta. Lista esitetään listaamismenetelmän kohdalla taulukossa 2 sivulla 32. Todennäköisyys voidaan laskea klassisella todennäköisyydellä. Alkeistapaukset ovat eri järjestyksiä. Niitä on yhteensä kuusi, ja kahdessa molemmat osallistujat saavat yhden parin. Todennäköisyys parin saamiselle on siis $2/6 = 1/3 \approx 0.33$.

Ensimmäisen yksinkertaistetun ongelman ratkaistuaan oppilaalle voi tulla vahva oletus siitä, että peli päättyy aina tasan. Se ei kuitenkaan riitä, vaan perustelu pitää pystyä esittämään joko yleisesti tai alun perin esitettyyn 6 + 6 kuvan ongelmaan. On mahdollista, että oppilas osaa hyödyntää 2 + 2 kuvan ratkaisua suoraan 6 + 6 kuvan ratkaisuun. Mikäli oppilas ei kuitenkaan keksi tapaa, voidaan ratkaisusuunnitelmassa edetä lisäämällä yksi kuva kummastakin nuoresta mukaan.

3 + 3 kuvaa

Päättelymenetelmällä on mahdollista saada ratkaisu melko yksinkertaisesti myös 3 + 3 kuvan tilanteessa. Vaihtoehdot on mahdollista pelkistää kahteen.

Vaihtoehto 1

Ensimmäinen nostettu pari on sekapari. Tämän jälkeen kuoressa on kaksi kuvaa molemmista nuorista, joten tilanne palautuu 2 + 2 kuvan tilanteeseen. Koska ensimmäinen nostettu pari menee sivuun, nuoret saavat joko yhden tai ei yhtään paria, kuten 2 + 2 kuvan tilanteessa käy.

Mahdolliset jaot voidaan siis merkitä SSS ja ST_1T_2.

Vaihtoehto 2

Ensimmäinen pari koostuu kumman tahansa nuoren kahdesta kuvasta.

Tämän jälkeen kuoressa on jäljellä yksi kuva kyseiseltä nuorelta ja kolme toisen nuoren kuvaa. Näistä korteista muodostuu yksi sekapari ja yksi pari toiselle nuorelle. Parien nousemisjärjestyksellä ei ole merkitystä pelin tuloksen kannalta. Molemmat nuoret saavat yhden parin.

Nousevat parit ovat siis joko muotoa T_1ST_2 tai T_1T_2S.

Edellisessä päättelyssä olisi hyödyllistä huomata, että aina tulee ainakin yksi sekapari. Oppilas voi perustella sekaparin ilmenemisen esimerkiksi siksi, että kummallakin nuorella on pariton määrä kuvia, joten ainakin yksi pari muodostuu erilaisista kuvista. Toinen vaihtoehto on huomata, että 2 + 2 kuvan tilanteessa kuvat voivat muodostaa parin kummallekin nuorelle, ja nyt lisätään joukkoon kaksi kuvaa, jotka eivät keskenään muodosta paria. Tätä kautta oppilas voi oppia jakamaan ongelmaan pienempiin osiin. Alkuperäisen ongelman ratkaisu löytyy helpommin, jos osaa osittaa tilanteita.

3 + 3 kuvan tapauksesta on hyvä oppia:

- Peli päättyy tasan.
- Tulevien parien järjestyksellä ei ole väliä pelin lopputuloksen kannalta.
- Edellisen kohdan perusteella peli voidaan ajatella koostuvan tilanteista jolloin on yhdistetty 2 + 2 ja 1 + 1 kuvaa samaan peliin.

Nyt, kun on käsitelty tehtävä sekä parittomien että parillisten kuvien tapauksessa, ratkaisun keksiminen yleisessä muodossa on helpompaa. Jos oppilas ei osaa sanallistaa yleistä ratkaisua, hän voi lähestyä alkuperäisen tehtävän ratkaisua lisäämällä esimerkkiin taas yhden kuvan kummastakin nuoresta.

4 + 4 kuvaa

Kaikki mahdolliset muodostuvat parit voi päätellä myös 4 + 4 kuvan pelissä. Päättelymenetelmä monimutkaistuu, kun pelissä mukana olevien kuvien määrä kasvaa. Vaihtoehdot voi kirjata aiemmin ratkaistuihin kohtiin pohjautuen.

Vaihtoehto 1

Ensimmäinen nostettu pari on sekapari. Tämän jälkeen kuoressa on kolme kuvaa molemmista nuorista, joten tilanne palautuu 3 + 3 kuvan tilanteeseen. Koska ensimmäinen nostettu pari menee sivuun, peli päättyy joko 0–0 tai 1–1, kuten 3 + 3 kuvan tilanteessa käy.

Nostetut parit ovat siis $SSSS$, SST_1T_2, ST_1ST_2 tai ST_1T_2S.

Vaihtoehto 2

Ensimmäinen pari koostuu kumman tahansa nuoren kahdesta kuvasta. Tämän jälkeen nousee sekapari. Nuorten kuvia on jäljellä 1 + 3, joista välttämättä syntyy yksi sekapari ja pari sille nuorelle, joka ei saanut ensimmäisenä paria. Peli päättyy 1–1 tasan.

Tällöin jaot voidaan kirjoittaa T_1ST_2S ja T_1SST_2.

Vaihtoehto 3

Ensimmäinen pari koostuu kumman tahansa nuoren kahdesta kuvasta. Tämän jälkeen nousee kaksi toisen nuoren kuvaa. Nyt tilanne palautuu 2 + 2 kuvan tilanteeseen. Peli päättyy joko 1–1 tai 2–2.

Nämä jaot voidaan lyhentää merkinnöin T_1T_2SS, $T_1T_2T_1T_2$ ja $T_1T_2T_2T_1$.

Vaihtoehto 4

Ensimmäinen ja toinen pari koostuu kumman tahansa nuoren kuvista. Tämän jälkeen tulee kaksi paria toiselle nuorelle. Peli päättyy tasan 2–2.

Tätä jakoa vastaa merkintä $T_1T_1T_2T_2$.

Vaihtoehto 3 osoittaa hyvin, että 4 + 4 kuvan tilanne voidaan nähdä kahtena 2 + 2 kuvan tilanteena. Oppilasta kannattaa ohjata huomaamaan, että sama pätee joka tilanteessa, koska parien nousemisjärjestyksellä ei ole merkitystä pelin lopputuloksen kannalta. Neljä ensimmäistä kuvaa ei välttämättä koostu kahdesta molempien nuorien kuvasta, mutta kokonaisuudesta löytyy kaksi 2 + 2 kuvan pelitulosta. Tämä on vastaava osittaminen kuin mitä käytettiin jo 3 + 3 kuvan tilanteessa.

Neljän kuvan pelin tulos on 0–0, jos kumpikin kahden kuvan pelistä muodostuu pelkistä sekapareista. Tulos on 1–1, jos jompikumpi kahden kuvan osista päättyy yhden kuvan tasapeliin ja toisessa kumpikaan ei saa paria. Jos molemmat ositteet päättyvät 1–1, kokonaisuutena neljän kuvan peli päättyy 2–2. Yhteenvetona 4 + 4 kuvan tapauksessa peli päättyy aina tasan.

4 + 4 kuvan tapauksesta on tarkoituksena oppia:

- Peli päättyy tasan.
- Peli voidaan ajatella koostuvaksi kahdesta 2 + 2 kuvan tapauksesta.

Ratkaisu alkuperäiseen 6 + 6 kuvan ongelmaan

Helpompien erikoistapauksien käsittelyn jälkeen tulee lopulta ratkaista alun perin esitetty ongelma, jossa kummastakin nuoresta on kuoressa kuusi kuvaa. Mikäli erikoistapaukset on sisäistetty hyvin, vastaus 6 + 6 kuvan ongelmaan löytynee helposti. Pääasiat, jotka oppilaan tulee keksiä ratkaisun löytämiseksi ovat:

- Peli voidaan ajatella koostuvaksi kolmesta 2 + 2 kuvan tapauksesta.
- 2 + 2 kuvan tapaukset päättyvät aina tasan, joten 6 + 6 kuvan peli päättyy myös tasan.

Oppilasta voi auttaa käyttämällä samantyylisiä kysymyksiä kuin 4 + 4 kuvan tapauksessa. Ainoana erona on se, että nyt kannattaa kohdistaa oppilaan ajatukset juuri edellä opittuun erikoistapaukseen.

Äidin ehdottama peli tulee siis päättymään tasan jokaisessa tapauksessa. Mitä nuorten sitten kannattaisi tehdä? Jos nuoret haluavat välttää äidin valitseman elokuvan katsomisen, heidän kannattaa löytää sopu nopeasti. Nuoret voivat esimerkiksi sopia, että toinen päättää katsottavan elokuvan tänään ja toinen ensi viikolla.

Ongelman ratkaisun tarkasteluvaiheessa voidaan käydä läpi alussa esitetty kysymys pelin voittotodennäköisyyksistä. Molemmilla nuorilla on yhtä hyvä mahdollisuus voittaa pelissä, sillä tilanne on symmetrinen: kummallakin on yhtä monta kuvaa kuoressa ja arvonta on satunnainen. Se ei vielä kuitenkaan tarkoita, että peliä kannattaisi pelata. Hauska yksityiskohta on, että yhtä suuri voittotodennäköisyys ei tarkoita, että kumpikaan kilpailija voi voittaa. Tässä tapauksessa molempien voittotodennäköisyys on nolla, ja peli päättyy aina tasan.

Ratkaisun tarkasteluvaiheessa kannattaa tutkia, voiko tuloksen perustella myös toisin. Seuraavissa luvuissa esitetään kaksi muuta tapaa vastauksen perustelemiseksi. Niiden jälkeen luvussa 3.4 esitetään tehtävästä muunnelma, jossa opittua pääsee syventämään.

3.2 Yleinen ratkaisu

Erityisesti lukiolainen saattaa kiinnostua yleisen ratkaisun muotoilusta luvussa 3.1 asetettuun ongelmaan. Aluksi kannattaa kuitenkin tutustua vähintään 2 + 2 kuvan erikoistapaukseen, jotta ratkaisun alkuun on helpompi päästä. Opettaja voi ohjata opiskelijaa yleisen ratkaisun muotoiluun esimerkiksi seuraavasti:

- Mitkä asiat tarvitsisivat merkintätavan?
- Millaisia erilaisia pareja voi jakaa?
- Kuinka monta paria yhteensä jaetaan?
- Mitä halutaan todistaa?
- Tarkastele yksinkertaistettuja esimerkkejä. Millaisia vaihtoehtoja pakan jakamiseen on?
- Miten voisit tiivistää eri jaot?
- Muotoile eri vaihtoehtojen tilanteet valitsemasi merkintätavan mukaisesti.
- Käy läpi erilaiset jaot yleisellä tasolla. Miten pelissä käy?

Peli perustuu pakan jakamiseen. Pakka muodostuu kahdenlaisista kuvista. Pakan kooksi on alkuperäisessä tehtävässä annettu 6 + 6, joten tälle merkinnälle olisi luonnollista saada yleinen muoto. Pakasta tulee jakaessa joko tasapareja tai sekapareja. Tasapareja voi muodostua kahdelle eri pelaajalle. Pyrkimyksenä on todistaa olettamus, että kummankin pelaajan tasapareja muodostuu aina yhtä monta.

Jos tutkii 2 + 2 kuvan tapausta, voi kiinnittää huomiota siihen, että parit ovat joko pelkkiä tasapareja tai pelkkiä sekapareja. Jos lisäksi tarkastelee 3

+ 3 kuvan tilannetta, huomaa, että tässä tapauksessa voidaan jakaa myös molempia. Jakoja voisi siis ajatella olevan kolmenlaisia: pelkkiä tasapareja, pelkkiä sekapareja tai jakoja, joissa tulee kumpiakin. Vielä tiivistetymmin jaot voi mieltää siten, että jaossa joko esiintyy sekapareja tai ei esiinny. Tavoitteena on yleisellä tasolla näyttää, että molemmissa tapauksessa kumpikin pelaajista saa saman verran tasapareja.

Esitetään seuraavaksi yleinen ratkaisu.

Sekä A- että B-kuvien määrä on $n \in \mathbb{N}$. Pakka koostuu siis kuvista, joita on $n+n$, ja sen koko on $2n$. Pakka jaetaan pareiksi, joita tulee $\frac{2n}{2} = n$ kappaletta. Jaettu pari voi olla sekapari, jossa on A- ja B-kuva tai tasapari, jossa on joko kaksi A-kuvaa tai kaksi B-kuvaa.

Olkoon muodostuneiden A-parien määrä k ja B-parien määrä l. Tällöin $k + l$ on korkeintaan n.

Jos $k + l = n$, sekapareja ei muodostu ollenkaan, sillä tasaparien määrät yhteenlaskettuna on kaikkien parien määrä n. Koska molempia kuvia on sama määrä, voidaan päätellä, että $k = l = n/2$.

Jos taas $k+l < n$, niin sekaparien määrä on kaikkien jaettujen parien määrä, josta vähennetään tasaparien määrä eli $n-(k+l)$ kappaletta. Sekapareihin menee A- ja B-kuvia sama määrä, $n - (k + l)$. Niinpä tasapareihin niitä jää $k + l$ kumpiakin, jolloin $k = l$.

Jos kaikki jaettavat parit ovat sekapareja, tasapareja ei muodostu ollenkaan, ja $k = l = 0$. Tällöinkin peli päättyy tasan. Tämä tilanne sisältyy edelliseen kohtaan eikä siis ole välttämätön esittää.

3.3 Vaihtoehtoinen ratkaisutapa: Listaus

Aiemmin todettiin, että luvun 3.1 ongelman 2 + 2 kuvan tilanteessa on kaksi eri vaihtoehtoa: joko molemmat pelaajat saavat yhden parin tai ei yhtään paria. Tästä saattaa tulla ajatus, että nämä tapahtumat ovat keskenään yhtä todennäköisiä. Kaikkien symmetristen alkeistapausten kirjaaminen on tärkeä taito, sillä se kehittää kombinatorista ymmärrystä ja mahdollistaa tapahtumien todennäköisyyden laskemisen.

Listaamismenetelmä voi olla oppilaalle luonnollisempi ja helpompi tapa lähestyä tehtävää, ja sillä voi ratkoa 2 + 2 ja 3 + 3 erikoistapaukset esitetystä ongelmasta. Siitä syystä ratkaisu on kirjoitettu siten, että oppilasta voi ohjata listaamisessa vaikka tehtävän lopputulos ei olisi tiedossa. Jos ratkaisun on saanut päättelymenetelmällä, oppilas voi syventää listaamismenetelmällä ymmärrystään tehtävästä ja samalla varmistaa perustelujensa oikeellisuutta.

Tavoitteena on listata kaikki erilaiset järjestykset, joissa pakka voi olla. Järjestys voidaan kirjoittaa ikään kuin yhdeksi sanaksi esimerkiksi 3 + 3 tilanteessa $BAAABB$, josta peräkkäiset kuvat tulkitaan jaettavaksi pariksi $BA|AA|BB$. Kun kaikki keskenään erilaiset jaot on listattu, eri tapahtumien todennäköisyyden voi selvittää helposti laskemalla listasta tapahtumaan kuuluvat alkeistapaukset ja jakamalla sen kaikkien järjestysten määrällä.

Listaamismenetelmälle voi kehittää notaation mukailemalla päättelymenetelmässä käytettyjä kysymyksiä:

- Mille asialle olisi hyödyllistä saada merkintätapa?
- Missä järjestyksessä kuvat voivat esimerkiksi olla?
- Millä on merkitystä pelin kannalta?
- Voiko merkintöjä yksinkertaistaa?

Kahdella ensimmäisellä kysymyksellä on tarkoitus kiinnittää huomio nuorten valokuviin, jotka muodostavat pelipakan. Tärkeää on keksiä merkinnät, jotka erottelevat nuorten valokuvat toisistaan. Esimerkiksi kirjain A tarkoittaa nuoren A kuvaa ja kirjain B nuoren B kuvaa.

Kahta viimeistä kysymystä voidaan käyttää, mikäli ehdotetuissa merkinnöissä otetaan huomioon koulukuvan luokka-aste, esimerkiksi $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ja $B_1, B_2, \ldots, B_6$. Tällöin tavoitteena on saada oppilas ymmärtämään, että muodostuvien parien kannalta ei ole merkitystä, minkä luokka-asteen kuvasta on kyse. Tällöin pelipakan voi kirjoittaa yksinkertaisemmin kuudella A- ja B-kirjaimella.

Tarkastellaan yksinkertaistettua esimerkkiä. Taulukkoon 2 on listattu eri järjestykset, joissa pakka voi olla, kun molemmista nuorista on kaksi kuvaa. Yhden nuoren kuvat katsotaan keskenään samanlaisiksi, eikä niiden keskinäistä järjestystä tarvitse ottaa huomioon. Erilaisia järjestyksiä on yhteensä kuusi.

Listan tekemisessä on tärkeää, että oppilas löytää kaikki erilaiset vaihtoehdot ja ymmärtää, että on löytänyt kaikki erilaiset vaihtoehdot. Listaamisen aloittamista voi tukea esimerkiksi käyttämällä jompaakumpaa seuraavista kysymyksistä:

- Ajattele, että kuvat ovat kuoressa sekaisin ja nostat yhden kuvan kerrallaan. Millaisissa järjestyksissä kuvat voivat tulla?
- Pyrit jakamaan neljä kuvaa pöydälle riviin. Kuinka monella eri tavalla A-kuvat voivat sijaita?

Taulukko 2: Parienkeräyspelin mahdolliset tulokset 2 + 2 kuvan tilanteessa. Ensimmäinen rivi osoittaa kuvien nostamisjärjestyksen. Pystykatkoviiva erottaa jaettavat parit. Poikkiviivan yläpuolella ovat järjestykset, joissa muodostuu yksi pari kummallekin pelaajalle. Poikkiviivan alapuolella ovat järjestykset, joissa kumpikaan pelaajista ei saa yhtään paria.

1	2	3	4
A	A	B	B
B	B	A	A
A	B	A	B
A	B	B	A
B	A	A	B
B	A	B	A

Seuraavia kysymyksiä voi käyttää, kun oppilas on löytänyt ainakin osan järjestyksistä, mutta ei keksi niitä enää lisää. Tavoitteena on, että oppilas osaa kertoa ajatteluprosessistaan. Sitä kautta hän voi saada ideoita uusiin vaihtoehtoihin tai pystyä selittämään, miksi hän on keksinyt kaikki järjestykset.

- Kerro minulle keksimistäsi järjestyksistä.
- Millä tavalla löysit nämä järjestykset?
- Onkohan eri järjestyksiä vielä lisää?
- Millä perusteella olet löytänyt kaikki järjestykset?
- Tuntuuko, että erilaisia järjestyksiä on vielä löytymättä? Miksi / Miksi ei?

Oppilas voi perustella kaikkien vaihtoehtojen löytymistä esimerkiksi sillä, että on listannut kaikki A-kuvien mahdolliset sijainnit neljän kuvan joukossa. Toinen tapa perustella on tutkia järjestyksissä olevia pareja. Erilaiset vaihtoehdot voidaan perustella esimerkiksi seuraavasti: Mikäli kuvista muodostuu parit AA ja BB, niiden järjestykselle on kaksi vaihtoehtoa sen mukaan kumpi nuorista saa parinsa ensin. Sekaparit voivat olla joko AB tai BA. Jos ensimmäinen pari on AB, toinen pari voi olla AB tai BA. Vaihtoehtoja on siis kaksi. Mikäli ensimmäinen pari on BA, erilaisia järjestyksiä muodostuu myös kaksi. Yhteensä erilaisia järjestyksiä on siis kuusi eikä yhtään enempää.

Oppilas saattaa kohdata erilaisia vaikeuksia listaa tehdessään. Käsitellään seuraavaksi joitakin mahdollisia virhekäsityksiä ja hankaluuksia, joita oppilas saattaa kohdata ratkoessaan tehtävää.

- Jos oppilas listaa järjestykset ajatellen pareja, on otettava huomioon, ovatko sekaparin muodostavat kuvat järjestyksessä AB vai BA. Muutoin osa alkeistapauksista jää laskematta. Erilaisia pareja voi havainnollistaa seuraavasti: Kuoresta poimitaan yksi kuva kummallakin kädellä yhtä aikaa. Mikäli saat AA-parin, molemmissa käsissä on A-kuva. Mikäli saat sekaparin, A voi olla joko vasemmassa tai oikeassa kädessä. Eli on kaksi tapaa saada sekapari.

- Oppilas saattaa ajatella, että AA-parin voi saada kahdella tavalla, sillä kuvat ovat erilaiset. Vastaavassa tapauksessa AB-pari voitaisiin saada neljällä eri tavalla, sillä nostettava A voidaan valita kahdella eri tavalla kuten myös nostettava B. Mutta kuten edellä todettiin, pelin tapauksessa kaikki saman nuoren kuvat ovat samanarvoisia keskenään.

- Kaikkien parien löytymisen perustelu voi osoittautua hankalaksi. Tällöin opettaja voi kertoa erilaisten järjestysten määrän, jolloin oppilas tietää kuusi vaihtoehtoa löytäessään saaneensa kaikki listattua. Tavoitemäärän tietäminen voi auttaa oppilasta löytämään eri järjestykset. Riski on, että oppilas ei kuitenkaan ymmärrä, miksi kaikki erilaiset järjestykset tarvitaan.

- Jos oppilas kirjaa saman järjestyksen monta kertaa, voi opettaja kehottaa häntä esimerkiksi korostamaan eri merkinnät eri väreillä tai esimerkiksi ympyröimällä toiset symbolit. Tällöin oppilaan on helpompi löytää samanlaiset järjestykset.

Otetaan esimerkki tilanteesta, jossa oppilas on keksinyt osan mahdollisista järjestyksistä. Kuvitellaan, että oppilas on löytänyt kolme ensimmäistä taulukossa 2 olevista vaihtoehdoista. Oppilas on keksinyt, että kahdella ensimmäisellä rivillä esitetyt järjestykset ovat keskenään erilaisia, sillä nuoret saavat parit eri järjestyksessä. Sivuun laitettaville pareille hän on löytänyt kuitenkin vain yhden vaihtoehdon neljästä. Tällöin oppilaan ajattelu perustuu parien jakamiseen. Mikäli oppilaalla on kuitenkin tarkoituksena löytää kaikki eri järjestykset tai hän kuvittelee ne löytäneensä, hänen huomionsa kannattaa kiinnittää yksittäisten kuvien pohtimiseen. Tässä vaiheessa voi käyttää edellä esitettyjä kysymyksiä, mutta oppilaan ajattelua voi herätellä myös hänen löytämiensä järjestysten kautta.

- Nyt kahdessa tapauksessa ensimmäisenä nousee A ja yhdessä B. Onko se mielestäsi odotettua?
- Hyvä, löysit nyt yhden järjestyksen lisää (taulukossa 2 järjestys 5 tai 6). Pystytkö löytämään vielä lisää?
- Millä tavalla keksit uusimman järjestyksen? Voiko samaa ajatusta käyttäen keksiä vielä erilaisia järjestyksiä?

Ensimmäisellä kysymyksellä pyritään saamaan oppilas huomaamaan, että ensimmäisen kuvan tulisi olla yhtä todennäköisesti A tai B, sillä kuoressa on yhtä monta nuoren A ja nuoren B kuvaa. Oppilas saattaa tämän keksittyään pyrkiä löytämään yhden järjestyksen lisää, joka alkaa kuvalla B. Mikäli oppilas löytää järjestyksen $BAAB$, hän on kääntänyt ensimmäisen parin kuvat eri järjestykseen. Tämän jälkeen A- ja B-alkuisia järjestyksiä on yhtä monta ja opettajan tulee varmistaa, ettei oppilas tyydy tähän ratkaisuun. Oppilasta rohkaistaan sanallistamaan toimintansa ja käyttämään samaa ideaa vielä uudestaan. Oppilaan tulee huomata, että myös toisena nousevan parin järjestys kääntämällä saadaan uusia järjestyksiä aikaan.

Kun oppilas on löytänyt kaikki eri järjestykset ja vakuuttunut siitä, että lista on valmis, listasta halutaan löytää tietoja, jotka auttavat ongelmanratkaisussa. Oppilasta voi ohjata esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

- Miten peli voi päättyä?
- Millä tavalla tiivistäisit taulukossa olevat tiedot?
- Mieti, mikä on oleellista pelin kannalta.

Vastauksena ensimmäiseen kysymykseen tulisi huomata, että peli voi päättyä tasan 1–1 tai 0–0. Taulukon voi tiivistää pelin kannalta oleellisesti siten, että kaksi kertaa kuudesta kumpikin saa yhden parin ja neljä kertaa kuudesta kumpikaan ei saa yhtään paria. Ei siis ole yhtä todennäköistä, että pelaajat saavat yhden tai ei yhtään paria. Taulukkoon 2 on merkitty poikkiviiva, joka erottelee nämä eri tapaukset. Tiivistämisen kautta oppilas käsittelee tietoja mielessään ja myöhemmin hän voi löytää keinon hyödyntää saatua informaatiota alkuperäisen tehtävän ratkaisemisessa. Lisäksi listaamismenetelmässä on tärkeää oppia, että AB on eri kuin BA.

3 + 3 kuvaa

Kun kuvia on 3 + 3, erilaisia järjestyksiä syntyy $\binom{6}{3} = 20$ ja tehtävää on mahdollista lähteä ratkomaan listaamismenetelmällä. Järjestysten määrä saadaan laskettua binomikertoimella, sillä ongelma vastaa tilannetta, jossa kuuden kuvan joukosta valitaan kolme. Kysymys on siis esimerkiksi, kuinka monella tapaa nuoren A kuvat voivat olla kaikkien kuvien joukossa.

Mikäli oppilaalla on vielä hankaluuksia listaamismenetelmän käyttämisessä, häntä voi ohjata samanlaisilla kysymyksillä kuin 2 + 2 kuvan tapauksessa. Tällä kertaa voi kuitenkin olla hyvä auttaa oppilasta kertomalla erilaisten järjestysten määrä.

Siirrytään nyt tarkastelemaan syntyvää listaa, joka on esitetty taulukossa 3. Pelin tuloksen lisäksi listasta pyritään löytämään asioita, jotka auttavat kehittämään ratkaisua alkuperäiseen 6 + 6 kuvan ongelmaan. Listaa voi tarkastella seuraavien kysymysten kautta:

- Miten peli voi nyt päättyä?
- Mikä kiinnittää huomiosi listassa?
- Onko listassa jotain toistuvaa?
- Mikä on ero 2 + 2 tilanteen ja 3 + 3 tilanteen välillä?
- Miten peli muuttuu, kun kummastakin nuoresta lisätään peliin yksi kuva?
- Korosta muodostuvat parit.
- Löydätkö listasta jotain samankaltaista edellisen 2 + 2 -listan kanssa?
- Kuinka tämän taulukon voisi tiivistää?

Listasta huomataan helposti, että myös 3 + 3 kuvan tapauksessa peli päättyy aina tasan. Viiden seuraavan kysymyksen tarkoituksena on saada oppilas huomaamaan, että nyt jokaisessa jaossa tulee ainakin yksi pari, jossa on sekä A että B. Mikäli oppilas korostaa muodostuvat parit, hänen voi olla helpompi hahmottaa, että jokaisella rivillä on vähintään yksi sekapari. Mikäli jokaiselta riviltä poistaa sekaparin, rivit ovat samanlaisia kuin 2 + 2 kuvan tapauksessa, toki osa riveistä on keskenään samanlaisia. Taulukon voisi tiivistää siten, että 8 tilanteessa kumpikaan ei saa yhtään paria ja 12 tilanteessa kumpikin saa yhden parin ja yksi pari menee sivuun.

Oppilas saattaa haluta taulukkoa tiivistäessään ottaa huomioon, monentena sekapari nousee. Tällöin häntä voi ohjata huomaamaan, että tiivistäminen halutaan tehdä pelin kannalta merkitykselliseksi. Tällainen tilanne on oikeastaan hyvä, sillä oppilas tulee kiinnittäneeksi enemmän huomiota siihen, ettei parien nousemisjärjestyksellä ole väliä.

Taulukko 3: Parienkeräyspelin mahdolliset tulokset 3 + 3 kuvan tilanteessa. Ensimmäinen rivi osoittaa kuvien sijainnin pakassa. Pystykatkoviivat erottavat jaettavat parit. Poikkiviivan yläpuolella ovat järjestykset, joissa muodostuu yksi pari kummallekin pelaajalle. Poikkiviivan alapuolella ovat järjestykset, joissa kumpikaan pelaajista ei saa yhtään paria.

1	2	3	4	5	6
A	A	A	B	B	B
A	A	B	A	B	B
A	A	B	B	A	B
A	A	B	B	B	A
B	B	A	A	A	B
B	B	A	A	B	A
B	B	A	B	A	A
B	B	B	A	A	A
A	B	A	A	B	B
A	B	B	B	A	A
B	A	A	A	B	B
B	A	B	B	A	A
A	B	A	B	A	B
A	B	A	B	B	A
A	B	B	A	A	B
A	B	B	A	B	A
B	A	A	B	A	B
B	A	A	B	B	A
B	A	B	A	A	B
B	A	B	A	B	A

4 + 4 tai 6 + 6 kuvaa

Kun molemmista nuorista on neljä kuvaa, listatattavia järjestyksiä tulisi $\binom{8}{4} = 70$ ja 6 + 6 kuvan tapauksessa $\binom{12}{6} = 924$. Listaamisessa olisi suuri työ ja riski tehdä huolimattomuusvirheitä, joten tehtävän ratkaisemiseen täytyy löytää jokin muu keino. Edellä on haluttu löytää erilaiset tulosmahdollisuudet pelille, eikä tehtävää ole pakko ratkaista listaten loppuun asti. Listaamismenetelmällä on opittu samoja asioita kuin päättelymenetelmällä, ja opittua voi soveltaa perustellakseen ratkaisun 4 + 4 ja 6 + 6 kuvan tilanteessa luvun 3.1 tyyliin.

Listaamistekniikkaa käytetään lukiossa myös luvun 3.6 lisätehtävään. Tällöin listat kiinnostavat nimenomaan kokonaisuuksina, ja opiskelija tarvitsee kombinatorista ymmärrystä listojen muodostumisen säännöistä.

3.4 Lisätehtävä: Useampi osallistuja

Luvussa 3.1 esitetyn ongelman ratkaisun tarkasteluvaiheessa voidaan ottaa tarkasteluun muunnelma, joka monipuolistaa oppimiskokemusta. Tehtävää voi käyttää joko seuraavalla oppitunnilla tai antaa lisätehtäväksi edellisen tehtävän nopeasti ratkaisseille.

> Miten pelissä käy, jos mukaan otetaan äiti, isä ja kaksoset? Korttipakasta jätetään pois kuvakortit, ja jokainen valitsee itselleen maan. Tämän jälkeen 40 kortin pakka sekoitetaan ja jaetaan pareiksi. Jokainen saa itselleen parit, jotka muodostuvat hänen valitsemastaan maasta. Mikäli parien kortit ovat eri maata, ne laitetaan sivuun. Päättyykö peli näilläkin säännöillä aina tasan?

Aluksi poimitaan tehtävänannosta oleelliset asiat. Pelaajia on neljä, ja jokaiselle on pakassa kymmenen korttia. Muuten säännöt ovat käytännössä edellisen tehtävän kaltaiset. Tehtävänanto voi hämätä ylimääräisellä tiedolla siitä, että kuvakortit jätetään pois. Tällöin kaikilla on parillinen määrä kortteja, kuten edellisessäkin tehtävässä.

Tehtävää kannattaa lähestyä pelaamalla sitä yksi kierros, jos mahdollista, tai kuvittelemalla pelin kulkua. Mikäli oppilas on omaksunut liikaa edellisen tehtävän piirteitä, voi hän keksiä vain kahden maan tyylisiä jakoja. Esimerkiksi hän saattaa ryhmitellä punaiset ja mustat kortit omiksi ryhmikseen, joissa voi muodostua pareja oman maan kanssa tai kahden samanvärisen kortin välille. Toisille oppilaille tehtävä saattaa olla päivänselvä. Vastauksen keksiminen voi olla myös tuurista kiinni: satunnainen pelikierros tai sen kuvitteleminen ei välttämättä auta keksimään ratkaisua.

Pelistä voi keksiä esimerkkijakoja, jotka päättyvät tasan, mutta on olemassa myös jakoja, jolloin jokin maista voittaa. Tehtävän ratkaisemiseksi oppilaiden tarvitsee vain löytää esimerkki pakan järjestyksestä, joka tuottaa muunlaisen tuloksen kuin tasapelin. Kun käytössä on neljä eri maata, erilaisia mahdollisia pareja on paljon enemmän kuin kahdella maalla. Mikä tahansa maa voi muodostaa parin saman maan kortin tai jonkin kolmen muun maan kortin kanssa. Jaossa voi käydä esimerkiksi niin, että ruutu muodostaa viisi paria padan ja viisi ristin kanssa, jolloin ruutupareja tulee nolla. Tästä huolimatta hertta voi muodostaa kaikki parit oman maansa sisällä, jolloin herttapareja muodostuu viisi. Koska ruutu muodostaa pareja sekä ristin että padan kanssa, kumpikaan näistä maista ei voi saada täyttä määrää pareja oman maansa kanssa. Tällöin hertta voittaa.

Esimerkin voi esittää myös täsmällisemmin keksimällä pakan järjestyksen, jossa hertan valinnut voittaa: pakan päällä on kaikki hertat ja sen jälkeen numerojärjestyksessä ruudut, ristit ja padat siten, että maat tulevat aina samassa järjestyksessä. Tällöin muodostuu viisi herttaparia ja muut parit koostuvat korteista, jotka eivät ole samaa maata. Esimerkiksi tämä jako osoittaa, että peli ei pääty aina tasan.

Tällä tehtävänannolla päästään harjoittelemaan vastaesimerkin käyttöä todistuksessa. Jos haluaa näyttää, ettei jokin väite pidä aina paikkaansa, perusteluksi riittää antaa yksi esimerkki, jossa väitetty asia ei toteudu. Kunkin maan korttien parillinen määrä ei ole tehtävän kannalta oleellista, sillä peli toimisi samaan tapaan kokonaisella korttipakallakin. Näillä säännöillä oppilaat eivät voi tehdä virheellistä päätelmää siitä, että korttien parittomuus aiheuttaisi sen, että pelissä voi voittaakin.

3.5 Karkkipäivä

Luvussa 3.1 esitetyn tehtävänannon voi esittää myös vaikeammassa muodossa. Tehtävänantoon on nyt lisätty haastavuutta kasvattamalla pakan kokoa ja lisäämällä peliin panos ja voitto.

> Samilla ja Tepolla on karkkipäivä, ja he ovat saaneet erilaiset karkkipussit. Sami pitää enemmän Tepon karkkipussista, mutta Teppo ei halua vaihtaa pusseja. Siispä Sami ehdottaa Tepolle seuraavaa peliä: Teppo antaa pussistaan Samille osallistumispanoksena kaksi Samin valitsemaa karkkia. Teppo saa valita, ottaako korttipakan punaiset vai mustat kortit. Sekoitettu korttipakka jaetaan pareiksi. Jos pari on Tepon valitsemaa väriä, hän saa parin itselleen. Sami saa toisenväriset parit. Sivuun laitetaan parit, jotka koostuvat erivärisistä korteista.
> Kun pakka on käyty läpi, saadut parit lasketaan. Mikäli Tepolla on enemmän pareja kuin Samilla, hän saa valita jokaista saamaansa paria kohden neljä karkkia Samin pussista. Sami ei voi kuitenkaan saada osallistumismaksua enempää karkkeja Tepolta. Samin karkit houkuttelevat Teppoa. Millainen päätös Tepon olisi järkevää tehdä?

Tehtävästä voi esittää vieläkin haastavamman version, jos odotusarvo on jo opiskeltu. Tällöin kysymys voisi olla, mikä on Samilta saatavien karkkien odotusarvo.

Ongelman ymmärtämisen kannalta kannattaa aluksi kiteyttää tehtävänanto: Peliä pelataan korttipakalla ja pakka jaetaan pareiksi. Panos on 2 karkkia, ja jos Teppo saa enemmän pareja kuin Sami, hän saa jokaisesta parista 4 karkkia.

Mikäli opiskelija pohtii tehtävää odotusarvon kannalta, hänen ajatuksensa kohdistuvat todennäköisesti tehtävästä saatavien karkkien määriin ja kunkin määrän todennäköisyyksin. Teppo voi saada pareja 0–13 kappaletta, mikä tarkoittaa 0–52 karkkia. Tämän ajatuksen rinnalla kahden karkin osallistumismaksu tuntuu pieneltä ja osallistuminen hyvältä ajatukselta. Tehtävänanto on myös kirjoitettu siten, että tasatilannetta ei korosteta millään tavalla, jolloin ajatus tasapelistä ei luultavasti ole ensimmäisenä mielessä.

Esitetään mahdollinen ajatuskulku: Teppo voi voittaa saamalla pareja 1–13 kappaletta. Odotusarvon laskemiseen tarvitaan jokaisen sellaisen tapauksen todennäköisyys, että Teppo saa enemmän pareja kuin Sami. Näiden todennäköisyyksien laskeminen voi aiheuttaa opiskelijalle ongelmatilanteen. Miten laskea esimerkiksi todennäköisyys, että Teppo saa yhden parin ja Sami ei yhtään?

Opiskelija saattaa aloittaa tehtävän ratkaisemisen myös tutustumalla esitettyyn peliin. Tällöin panokselle ja voitolle ei tule niin suuri painoarvo ratkaisussa ja tilanne muistuttaa luvussa 3.1 esitettyä. Ainoastaan pelipakka on suurempi. Jos opiskelija lähestyy tehtävää odotusarvon kautta, opettaja voi ohjata häntä eri raiteille ehdottamalla, että lopputuloksen (esim. voitto 13 parilla) sijaan hän ajattelisi pelin kulkua: Millainen pelin tilanne on silloin kun Teppo saa 13 paria? Tai missä järjestyksessä kortit on voitu esimerkiksi jakaa, kun Teppo on saanut yhden parin ja Sami ei yhtään? Oikeat vastaukset näihin kysymyksiin ovat: Sami on saanut myös 13 paria, ja kortteja ei voi jakaa niin, että toinen saa yhden parin ja toinen ei yhtään.

Ratkaisua pohtiessaan opiskelija saattaa huomata, ettei ole mahdollista tehdä voittavia jakoja. Tämän jälkeen opiskelijan pitää pystyä perustelemaan, miksi näin on. Mikäli perusteleminen on hankalaa, opettaja voi ohjata opiskelijaa samalla tavalla kuin luvussa 3.1.

Tehtävä on esimerkki siitä, että joskus ratkaisu voi olla yksinkertainen, vaikka tehtävä vaikuttaisi haastavalta. Mikäli alkuperäinen kysymys esitetään odotusarvon kautta, vastaus eli Samilta saatavien karkkien määrän odotusarvo on nolla, sillä todennäköisyys Tepon voitolle on nolla. Teppo häviää osallistumismaksuna annetut kaksi karkkia jokaisella pelikerralla, eikä hänen kannata suostua Samin ehdottamaan peliin.

3.6 Lisätehtävä: Ei yhtään saman maan paria

Lukiolainen saa edellisestä tehtävästä enemmän irti, kun tehtävänanto muutetaan laskennallisemmaksi. Tässä esitettävässä tehtävän muunnelmassa pääsee soveltamaan useita todennäköisyyden laskusääntöjä.

Teppo kieltäytyy Samin ehdotuksesta, joten Sami keksii nopeasti uuden pelin: Hän ottaa pakasta viisi herttaa ja viisi ristiä ja sekoittaa niistä uuden pelipakan. Osallistumismaksu on edelleen kaksi Samin valitsemaa karkkia. Pakasta jaetaan pareja, ja mikäli yhtään hertta- tai ristiparia ei tule, Teppo voittaa kymmenen karkkia Samin pussista. Kummalla on etu pelissä?

Tehtävän ratkaiseminen kannattaa aloittaa taas etsimällä tehtävänannosta tarvittavat alkutiedot. Mikäli opiskelija ei pääse alkuun sen jälkeen, kannattaa opettajan yrittää avata keskustelu selvitettävästä asiasta:

- Mitä tarkoittaa ”etu pelissä”?
- Millä tavalla voi selvittää, kummalla pelaajalla on etu?
- Missä tilanteessa Tepon kannattaa pelata?
- Mikä aiemmin oppimasi asia auttaisi tässä?

Pakka koostuu 5 + 5 kortista, panos on 2 karkkia, ja jos yhtään paria ei muodostu, Tepon voitto on 10 karkkia. Etu voidaan käsittää toistojen kautta: Kun peliä pelataan useita kertoja, etu on hänellä, joka jää plussalle eli saa enemmän karkkeja kuin menettää. Teoreettinen työkalu tämän asian ratkaisemiseen on odotusarvo. Odotusarvo kuvaa saatavien tai menetettävien karkkien määrää keskimäärin yhtä peliä kohden. Mitä enemmän odotusarvo poikkeaa nollasta, sitä enemmän peli suosii toista pelaajista. Pelin etua voidaan tutkia joko Samin tai Tepon karkkien odotusarvon kautta. Koska tehtävä on esitetty Tepon päätöksenteon kannalta, lasketaan nyt Tepon odotettavien karkkien määrää.

Tepon kannattaa pelata, mikäli hän saa keskimäärin enemmän karkkeja kuin menettää eli odotusarvo on positiivinen. Jos odotusarvo on negatiivinen, Tepon ei kannata pelata, sillä hän todennäköisesti saa vähemmän karkkeja kuin menettää. Mikäli tarkastelun kohteena on Samin karkkien odotusarvo, odotusarvon etumerkin tulkinta Tepon näkökulmasta tehdään päinvastoin.

Tehtävän ymmärtämisen jälkeen siirrytään ratkaisusuunnitelman tekemiseen. Mikäli opiskelija on suunnannut ajatukset odotusarvoon mutta ei osaa edetä ratkaisussaan, opettaja voi ohjata häntä esimerkiksi seuraavasti:

- Kuinka odotusarvo lasketaan tässä tapauksessa?
- Kuvaile sanoin, mistä odotusarvo koostuu.
- Mistä odotusarvon kaava muodostuu?
- Miten pelistä voitettavien karkkien odotusarvo lasketaan?
- Kuinka maksettava panos otetaan odotusarvon laskemisessa huomioon?

Koska Tepon panos halutaan ottaa huomioon odotusarvon laskemisessa, lasketaan netto-odotusarvoa. Odotusarvo on siis Tepon voittamien karkkien odotusarvo, josta vähennetään Tepon maksama panos. Sama voidaan esittää kaavana:

$$\mathbb{E}(K_{\text{netto}}) = \mathbb{E}(K_{\text{peli}}) - P, \tag{1}$$

jossa $\mathbb{E}(K_{\text{netto}})$ on Tepon karkkien nettovoiton odotusarvo, $\mathbb{E}(K_{\text{peli}})$ on odotusarvo Tepon voittamille karkeille pelistä ja P on Tepon maksama panos. Sääntöjen mukaan panos on aina kaksi karkkia.

Odotusarvo pelistä voitettaville karkeille lasketaan käyttämällä odotusarvon kaavaa $\mathbb{E}(K_{\text{peli}}) = \sum_{i=1}^{m} k_i p_i$, jossa k_i on satunnaismuuttujan arvo indeksillä i ja p_i on arvon pistetodennäköisyys. Eri tulosvaihtoehtoja on m kappaletta. Todennäköisyyksille pätee $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Tässä tapauksessa k_i kuvaa pelin tulosvaihtoehtoja, joita on kaksi eli nollan ja kymmenen karkin voitot. Siis $k_1 = 10$ ja $k_2 = 0$. Merkitään todennäköisyyttä p_1 pelissä, jossa on $n + n$ korttia, $\mathbb{P}_{n+n}(''\text{Ei pareja}'')$. Teppo siis saa kymmenen karkkia, mikäli pareja ei muodostu ollenkaan. Jos voitto on 0, se ei kasvata odotusarvon summaa, sillä voiton ja sen todennäköisyyden tulo on 0. Pelistä voitettavien karkkien odotusarvon kaava sievenee muotoon:

$$\mathbb{E}(K_{\text{peli}_{n+n}}) = 10 \cdot \mathbb{P}_{n+n}(''\text{Ei pareja}''). \tag{2}$$

Ratkaisusuunnitelma on valmis, kun saadaan selville, millä todennäköisyydellä pelissä ei muodostu yhtään paria eli kaikki jaettavat parit ovat sekapareja. Aloitetaan tutkiminen yksinkertaistetusta esimerkistä, jossa pelipakka on pieni. Opettaja voi oheistaa opiskelijoita tarpeelliseksi katsomansa verran:

- Tutki odotusarvon laskemista yksinkertaistetulla esimerkillä.
- Selvitä netto-odotusarvo, mikäli kortteja on 2 + 2 ja 3 + 3.
- Miten voisit laskea odotusarvon 4 + 4 tilanteessa?
- Millä tavalla voit laskea todennäköisyyden, ettei tule yhtään paria?
- Mitä sinun pitäisi selvittää saadaksesi laskettua kyseisen todennäköisyyden?
- Kuinka voit laskea kaikkien jakojen määrän ilman että luetteloit?
- Kuinka saat selville niiden jakojen määrän, jossa ei muodostu pareja?

Jos alkuperäinen 5 + 5 kortin peli tuntuu liian vaikealta, ratkaisusuunnitelmaa tehdessään voi yksinkertaistaa tehtävää vähentämällä jaettavien korttien määrää. Pelin 2 + 2 kortin ja 3 + 3 kortin versioista on taulukoitu kaikki symmetriset alkeistapaukset luvussa 3.3. Kun kaikki alkeistapaukset ovat tiedossa, erilaisten tapahtumien todennäköisyydet on luontevaa laskea klassista todennäköisyyttä hyödyntäen. Sivun 32 taulukosta 2 nähdään, että 2 + 2 kortin tapauksessa erilaisia jakoja on 6 ja niistä 4:ssä ei muodostu yhtään paria. Taulukko 3 sivulla 36 näyttää, että 3 + 3 kortin pelissä vastaavat luvut ovat 20 ja 8. Netto-odotusarvoiksi tulee:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_{\text{netto}_{2+2}}) &= 10 \cdot \mathbb{P}_{2+2}(''\text{Ei pareja}'') - 2 &&= 10 \cdot \frac{4}{6} - 2 &&= 4\frac{2}{3} \approx 4.67,\\
\mathbb{E}(K_{\text{netto}_{3+3}}) &= 10 \cdot \mathbb{P}_{3+3}(''\text{Ei pareja}'') - 2 &&= 10 \cdot \frac{8}{20} - 2 &&= 2.
\end{aligned}
$$

Pelin yksinkertaisimmissa versioissa Tepon karkkien netto-odotusarvo on positiivinen eli hänen kannattaisi pelata.

Kun peliä vaikeutetaan 4 + 4 kortin versioon, kaikkien jakojen luettelointi käy työlääksi. Yksinkertaistetuista esimerkeistä voidaan katsoa, mitä todennäköisyyden "yhtään paria ei muodostu" laskemiseen tarvitaan: tulee tietää, kuinka monta erilaista jakoa on ja monessa niistä ei synny yhtään paria. Mikäli opiskelijan on vaikea keksiä, kuinka saisi lasketuksi jakojen määrän, opettaja voi johdatella esimerkiksi seuraavilla kysymyksillä:

- Mistä jako muodostuu?
- Millä tavalla luetteloit jakoja ja varmistuit, että olet kirjannut ne kaikki?
- Kuinka monella eri tavalla esimerkiksi herttakortit voivat sijaita jaoissa?
- Kuvittele, että sinulla on kädessäsi pelkät herttakortit.
  - Kuinka monta korttia sinulla on?
  - Kuinka monta "paikkaa" on, joihin voi "asettaa" hertan?
  - Kuinka monella eri tavalla voit jakaa hertat eri paikoille? (Kortin numerolla ei ole merkitystä.)
  - Kuinka monella eri tavalla herttojen paikat voidaan valita kaikkien paikkojen joukosta?
- Muistatko aiemmin käsitelleesi esimerkkiä, jossa kysyttäisiin samantapaista asiaa?

- Mitkä vastaavat kysymykseen ”kuinka monella eri tavalla”? Mikä niistä sopii tähän tilanteeseen?

Jokaisessa jaossa on kahta korttimaata yhtä monta korttia. Oman luettelointitapansa sisäistäminen voi auttaa opiskelijaa keksimään, kuinka voisi laskea kaikkien erilaisten jakojen lukumäärän. Yksi hyvä tapa luetteloida on, että asettelee toisen maan kortit aina eri tavalla ja täyttää ”tyhjät paikat” jäljelle jääneen maan korteilla. Kun tekee luetteloinnin systemaattisesti, saa helpommin kaikki erilaiset vaihtoehdot kirjattua ja listaansa jokaisen vaihtoehdon vain kerran. Jos opiskelija ei ole luetteloinut systemaattisesti tai hänen on vaikea kuvailla luettelointimenetelmäänsä, häntä voi ohjata edellä olevaan ajatteluun esimerkillä hertoista.

Mikäli opiskelija ei lähde pohtimaan erilaisten jakojen laskemista, esimerkki kannattaa tehdä konkreettisemmaksi. Opiskelija kuvittelee käteensä 4 herttaa, joille valittavia paikkoja on 8. Näillä 4 kortilla tulee käydä läpi kaikki eri paikat, joihin kortit voi asettaa yhtä aikaa. Käytännössä 8 paikasta valitaan 4 siten, että vain herttakorttien sijainnilla, ei numerolla, on merkitystä. Tällöin hertat voivat olla esimerkiksi neljällä ensimmäisellä paikalla vain yhdellä tavalla.

Kysymyksillä yritetään ohjata opiskelijaa huomaamaan, että esitetty ongelma saadaan ratkaistua käyttämällä binomikerrointa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ eli n alkion joukosta valitaan k-kombinaatio. Binomikertoimen eri tulkintoja on käsitelty sivulla 10. Käsiteltävän korttipelin voi samaistaa tilanteeseen, jossa jaetaan kortteja, joista puolet ”onnistuvat” olemaan herttoja.

Kaikkien erilaisten jakojen määrä 4 + 4 kortin tilanteessa saadaan valitsemalla 8 paikasta 4. Niitä on siis $\binom{8}{4} = 70$. Kun kortteja on 5 + 5, määrä lasketaan valitsemalla 10 paikasta 5 eli kaikkien jaettavien korttien määrästä toisen maan korteille paikat. Tällöin erilaisia jakoja on $\binom{10}{5} = 252$.

Kun kaikkien jakojen määrä on selvitetty, lasketaan jaot, joissa ei muodostu saman maan pareja. Tässä hyödyllisiä kysymyksiä voivat olla:

- Millaisia ovat jaot, joissa ei muodostu saman maan pareja?
- Tarkastele esimerkiksi 3 + 3 kortin listausta. Mitä huomaat jaoista, joissa ei muodostu saman maan pareja?
- Mitä tarkoittaa, ettei muodostu yhtään paria?
- Millaisia ovat parit, jotka ovat sekapareja?
- Kuinka monella eri tavalla sekapari voi muodostua?
- Kuinka monta sekaparia muodostuu yhteensä pelissä?
- Millä tavalla saisit laskettua, kuinka monella eri tavalla pelkkiä sekapareja sisältävä jako voi muodostua?
- Muistatko aiemmin käsitelleesi esimerkkiä, jossa kysyttäisiin samantapaista asiaa?
- Mitkä vastaavat kysymykseen ”kuinka monella eri tavalla”? Mikä niistä sopii tähän tilanteeseen?

Jaot, joissa ei ole saman maan pareja ollenkaan, sisältävät pelkästään sekapareja. Sekapareissa on aina kaksi eri maan korttia ja kortit voivat olla kahdessa eri järjestyksessä, joko AB tai BA. Mikäli jaossa on pelkkiä sekapareja, niitä muodostuu puolet kaikkien korttien määrästä tai toisin ilmaistuna niin monta kuin kummankin maan kortteja on.

Pelkkiä sekapareja sisältävien jakojen määrän saa laskettua tuloperiaatetta käyttämällä.

Esimerkiksi 4 + 4 kortin tapauksessa pareja jaetaan 4 ja jokainen jaettava sekapari voidaan jakaa kahdella eri tavalla. Siis sekaparijakoja on yhteensä $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ = 2^4 = 16$. Opiskelijaa voi kehottaa kokeilemaan laskutapaa myös jo luetteloituihin 2 + 2 ja 3 + 3 kortin tilanteisiin saadakseen konkreettisen esimerkin laskutavan käyttämisestä ja toimimisesta.

Opiskelija saattaa keksiä laskutavan myös eri kautta: 2 + 2 kortin pelissä sekaparijakoja on neljä erilaista ja 3 + 3 kortin pelissä kahdeksan. Voidaan ajatella, että 3 + 3 kortin pelissä muodostuvat jaot saadaan lisäämällä 2 + 2 kortin jakoihin yksi pari. Jokaiseen neljään sekaparijakoon lisätään siis yksi sekapari, joka voi muodostua kahdella eri tavalla. Kaikki jaot kirjatakseen tulee jokaisesta neljästä jaosta siis kaksi uutta, eli 3 + 3 kortin pelissä on $4 \cdot 2 = 8$ sekaparijakoa ja 4 + 4 kortin pelissä $8 \cdot 2 = 16$ erilaista jakoa. Vastaavasti 5 + 5 kortin sekaparijakojen määrä 32 voidaan laskea joko 2^5 tai $16 \cdot 2$.

Opiskelija voi muotoilla kaavan, jolla saadaan laskettua todennäköisyys, ettei yhtään saman maan paria muodostu $n + n$ kortin pelissä:

$$\mathbb{P}_{n+n}('' \text{Ei pareja}'') = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Kaavan muotoilu ei ole tehtävän kannalta välttämätön, mutta opettaja voi kannustaa kaavan keksimiseen opiskelijoita, jotka saavat muita nopeammin ratkaisun ongelmaan. Kaavan keksimistä voi auttaa, jos opettaja pyytää opiskelijaa laskemaan todennäköisyyden eri korttimäärillä, kuten 7 + 7 ja 10 + 10. Tämän jälkeen voi opiskelijalta kysyä, saako hän kirjoitettua laskemiseen käytettävän kaavan, jota voi käyttää mille tahansa korttimäärälle. Mikäli hän tarvitsee enemmän tukea, kannattaa kehottaa opiskelijaa tutkimaan, mikä laskuissa muuttuu korttimäärää vaihdettaessa. Lisäksi on hyödyllistä miettiä, kuinka lasku riippuu korttimäärästä. Kun opiskelija keksii kaavan, kannattaa häntä pyytää testaamaan kaavaa erityisesti luetteloiduissa tapauksissa ja tarkastelemaan tulosten mielekkyyttä.

Kun kaikki tarvittavat tiedot on saatu selville, opiskelija pääsee toteuttamaan ratkaisusuunnitelman eli laskemaan netto-odotusarvot 4 + 4 ja 5 + 5 kortin peleihin:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_{\text{netto}_{4+4}}) &= 10 \cdot \mathbb{P}_{4+4}('' \text{Ei pareja}'') - 2 &&= 10 \cdot \frac{16}{70} - 2 &&= \frac{2}{7} &&\approx 0.29, \\
\mathbb{E}(K_{\text{netto}_{5+5}}) &= 10 \cdot \mathbb{P}_{5+5}('' \text{Ei pareja}'') - 2 &&= 10 \cdot \frac{32}{252} - 2 &&= -\frac{46}{63} &&\approx -0.73.
\end{aligned}$$

Tepon kannattaisi pelata 4 + 4 kortin peliä, mutta 5 + 5 kortin pelin odotusarvo tarkoittaa Tepon kannalta, että useita kierroksia pelattaessa hän häviää keskimäärin 0.73 karkkia per kierros. Koska odotusarvo on negatiivinen, Tepon ei kannata suostua Samin ehdottamaan peliin.

Lopuksi opiskelijan tulee vielä tarkastella ratkaisuaan, vakuuttua perustelujensa pätevyydestä ja välivaiheiden oikeellisuudesta. Tämän tehtävän kohdalla ratkaisun tarkasteluvaiheessa voi opiskelijoille antaa tehtävästä myös muunnelman, jossa juuri opittua pääsee soveltamaan.

Kuinka suuri voitettavan karkkimäärän tulisi olla, että etu olisi Tepolle? Millä muulla tavoin pelin sääntöjä voisi muuttaa, jotta etu olisi Tepon puolella? Millä tavalla peli ei suosisi kumpaakaan pelaajaa?

Ensimmäinen esitetyistä kysymyksistä on vastaava kuin: kuinka monta karkkia pelistä tulee voittaa, jotta Tepon kannattaa pelata? Kaavassa (1) määritellyn nettovoiton tulee siis olla positiivinen:

$$\mathbb{E}(K_{\text{peli}}) - P > 0.$$

Esitetään pelistä voitettavien karkkien odotusarvo $\mathbb{E}(K_{\text{peli}})$ voitettavien karkkien k ja voittotodennäköisyyden tulona, kuten kaavassa (2):

$$k \cdot \mathbb{P}_{n+n}(''\text{Ei pareja}'') - P > 0. \tag{3}$$

Sijoitetaan kaavaan 5 + 5 kortin pelille edellä selvitetty voittotodennäköisyys $^{32}/_{252}$ ja panos 2 ja ratkaistaan voitettavien karkkien määrä k:

$$\begin{aligned} k \cdot \frac{32}{252} - 2 &> 0, \\ k &> 2 \cdot \frac{252}{32}, \\ k &> 15.75. \end{aligned}$$

Jos voitettavien karkkien määrä on suurempi kuin 15.75, Tepon kannattaa pelata. Pienin luonnollinen luku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 16 karkkia.

Kaavasta (3) nähdään, että nettovoiton odotusarvoon vaikuttaa myös voittotodennäköisyyden tai panoksen muuttaminen. Edellä huomattiin, että jos kortteja on pelissä 2–4 paria, odotusarvo on 4.67–0.29 karkkia Tepon hyväksi. Eli Tepon kannattaisi pelata, jos pelissä olisi mukana vähemmän kortteja. Jos taas Tepon panos olisi vain yksi karkki, tulee odotusarvoksi muuten alkuperäisillä säännöillä:

$$10 \cdot \mathbb{P}_{5+5}(''\text{Ei pareja}'') - 1 = 10 \cdot \frac{32}{252} - 1 = \frac{17}{63} \approx 0.27,$$

mikä positiivisena lukuna on Tepon kannalta suotuisa odotusarvo.

Selvästi haastavin on viimeisenä esitetty kysymys säännöistä, jotka eivät suosi kumpaakaan pelaajaa. Haastetta tuo se, että panos ja voitto ovat järkeviä vain luonnollisina lukuina, sillä kyseessä on karkkien määrä. Jotta peli ei suosisi kumpaakaan pelaajaa, tulee olla voimassa:

$$k \cdot \mathbb{P}_{n+n}(''\text{Ei pareja}'') - P = 0.$$

Sopivan voittomäärän, voittotodennäköisyyden ja panoksen voi löytää monella eri tavalla. Yksinkertaisin ratkaisu tämänhetkisillä tiedoilla löytynee valitsemalla 3 + 3 kortin peli. Tällöin voittotodennäköisyys on $^8/_{20} = 0.4$.

$$\begin{aligned} k \cdot 0.4 - P &= 0, \\ \frac{P}{k} &= 0.4. \end{aligned}$$

Eli panoksen ja voittokarkkien suhde on 0.4. Tähän sopii esimerkiksi valinta, jossa panos on 4 karkkia ja voitosta saa 10 karkkia.

4 Matkamuistoja maailmalta

Tämä tehtävä soveltuu käytettäväksi erityisesti lukion pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssille.

Tuomaksen tyttärellä Tiinulla on tylsää, ja hänen isänsä päättää viihdyttää häntä arvausleikillä. Tiinu on erityisen kiinnostunut isänsä matkamuistoista ja Tiinu tietää, mistä matkakohteista hänen isänsä on ne tuonut. Tuomas on matkustellut yhdeksässä eri kohteessa ja tuonut jokaiselta matkalta täsmälleen yhden matkamuiston. Hän on käynyt kerran Australiassa, kahdesti Belgiassa, kolmesti Chilessä, neljästi Dubaissa, viidesti Egyptissä, kuudesti Filippiineillä, seitsemästi Ghanassa, kahdeksasti Havaijilla sekä yhdeksän kertaa Irlannissa. Tuomas valitsee satunnaisesti yhden matkamuiston ja Tiinun tulee selvittää kyllä-ei-kysymyksiä esittämällä, mistä kohteesta hänen isänsä valitsema matkamuisto on tuotu. Tiinu saa kysymyksissään käyttää ainoastaan tietoa matkakohteesta, ei esimerkiksi matkamuistojen ulkonäköön liittyviä seikkoja.

Keksi vähintään kaksi kysymyssarjaa, joilla saa minkä tahansa matkamuiston alkuperämaan selville. Vertaile keksimiäsi kysymyssarjoja. Mitä kysymyksiä Tiinun kannattaisi esittää saadakseen oikean vastauksen mahdollisimman vähillä kysymyksillä?

Tehtävä on peräisin kirjasta *New mathematical diversions*, jonka on kirjoittanut Martin Gardner vuonna 1969. Kirjan esimerkki käyttää korttipakan kortteja, mutta nyt mukaan on rakennettu tarina. Tarinan käyttäminen voi lisätä tehtävän lähestyttävyyttä, mutta myös vaikeuttaa tehtävän hahmottamista.

4.1 Ongelman ratkaisemisen aloittaminen

Ensimmäisenä kannattaa selvittää, mitä tehtävänanto vaatii. Nyt ongelma koostuu kahdesta vaiheesta: kysymyssarjojen keksimisestä ja niiden vertailusta. Koska vertailua ei voi tehdä ilman kysymyssarjoja, ongelman ymmärtämisen jälkeen voi keskittyä ensin kysymyssarjojen keksimiseen. Pitkän tehtävänannon johdosta on kuitenkin erityisen tärkeää poimia tehtävänannosta tarpeelliset tiedot ja päättää merkitsemistapa. Oppilasta voi ohjata löytämään tietoja esimerkiksi seuraavilla kysymyksillä:

- Mitkä tiedot vaikuttavat tärkeimmiltä tehtävän ratkaisemisen kannalta?
- Millä tavalla tiivistäisit tehtävänannon?
- Mitkä tiedot auttaisivat sinua tehtävänannon kuvaamassa tilanteessa?

Oleellisimmat tehtävänannossa kerrotut tiedot ovat kustakin matkakohteesta tuotujen matkamuistojen lukumäärä. Tehtävän ratkaisemisen kannalta tärkeää

Taulukko 4: Matkamuisto-ongelmasta kerätyt tiedot koottuna taulukkoon. Matkakohteisiin viitataan etukirjaimella. Kohteet ovat Australia, Belgia, Chile, Dubai, Egypti, Filippiinit, Ghana, Havaiji ja Irlanti.

matkakohde	A	B	C	D	E	F	G	H	I	yhteensä
matkamuistojen määrä	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45

on myös tieto siitä, että kysymyksissä voi käyttää tietoa vain matkakohteesta, sillä vain sellaisiin kysymyksiin voi vastata annetun informaation perusteella. Taulukkoon 4 on kerätty numeeriset tiedot. Yksinkertaisuuden vuoksi matkakohteisiin on viitattu niiden etukirjaimella. Vaihtoehtoisesti matkakohteisiin voisi viitata esimerkiksi numerolla aakkosjärjestyksessä. Tällöin numero kertoisi suoraan tuotujen matkamuistojen määrän.

Ongelman ymmärtämisen jälkeen siirrytään ensimmäisen osan ratkaisemiseen. Mikäli tietojen poimimisen jälkeen opiskelija ei pääse eteenpäin, opettaja voi ohjata opiskelijaa alkuun ratkaisussaan:

- Mitä halutaan tietää?
- Kuinka sen voisi selvittää?
- Miten tehtävänanto ohjeistaa toimimaan?
- Millaisen kysymyksen voisit esimerkiksi esittää?
- Mitä tietoa saat esittämälläsi kysymyksellä?
- Mitä sinun täytyy sitten vielä tehdä?

Tavoitteena on ohjata opiskelijaa keksimään sellaiset kysymykset, joita käyttämällä saa jokaisessa tapauksessa selville, mistä matkakohteesta matkamuisto on tuotu. Kysymyksiin tulee voida vastata kyllä tai ei. Opiskelija saattaa esimerkiksi kysyä jotain tiettyä matkakohdetta. Yksi kysymys on kuitenkin vasta alku: opiskelijan tulee keksiä kysymyssarja, joka kattaa kaikki eri matkakohdevaihtoehdot. Osa matkakohteista voi selvitä vähemmillä kysymyksillä, mutta kysymyksiä tulee kysyä niin kauan että vastaus selviää jokaisessa tapauksessa.

Nyt opiskelija voi keksiä esimerkiksi kysymykset, joissa aina kysytään yksittäinen maa aakkosjärjestyksessä, kunnes kaikki maat on käyty läpi. Mikäli matkamuisto on Australiasta, vastaus selviää yhdellä kysymyksellä. Mikäli se on Irlannista, tarvitaan kahdeksan kysymystä matkakohteen selvittämiseen. Viimeinen kysymys aakkosjärjestystä noudattaen on ”onko matkamuisto Havaijilta”. Kieltävä vastaus tarkoittaa, että matkamuisto on Irlannista, sillä se on ainut maa, jota ei ollut vielä kysytty.

Kuvan 5 yläosassa on esitetty kysymyspuu aakkosjärjestystä käytettäessä. Kysymyssarja etenee vasemmalta oikealle. Kuvaa luetaan siten, että kutakin matkakohdetta lähinnä olevan haaran kohdalta nähdään sen matkakohteen selvittämiseen tarvittavien kysymysten määrä vaaka-akselilta. Jokaisen haaran kohdalla esitetään kysymys siitä, kumpaan haaraan selvitettävä esine kuuluu.

Kysymys voi olla yleisessä muodossa esimerkiksi ”onko esine matkakohteesta, joka kuuluu alempaan haaraan?”. Mikäli vastaus on myönteinen, siirrytään alempaan haaraan. Kielteisessä tapauksessa siirrytään ylempään haaraan. Kysymyksiä käydään läpi kunnes vastaus saadaan selville. Aakkosjärjestystä käytettäessä alempi haara tuottaa aina suoraan vastauksen. Vain ylemmän haaran tapauksessa joudutaan kysymään uusi kysymys, mikäli vaihtoehtoja on jäljellä enemmän kuin kaksi.

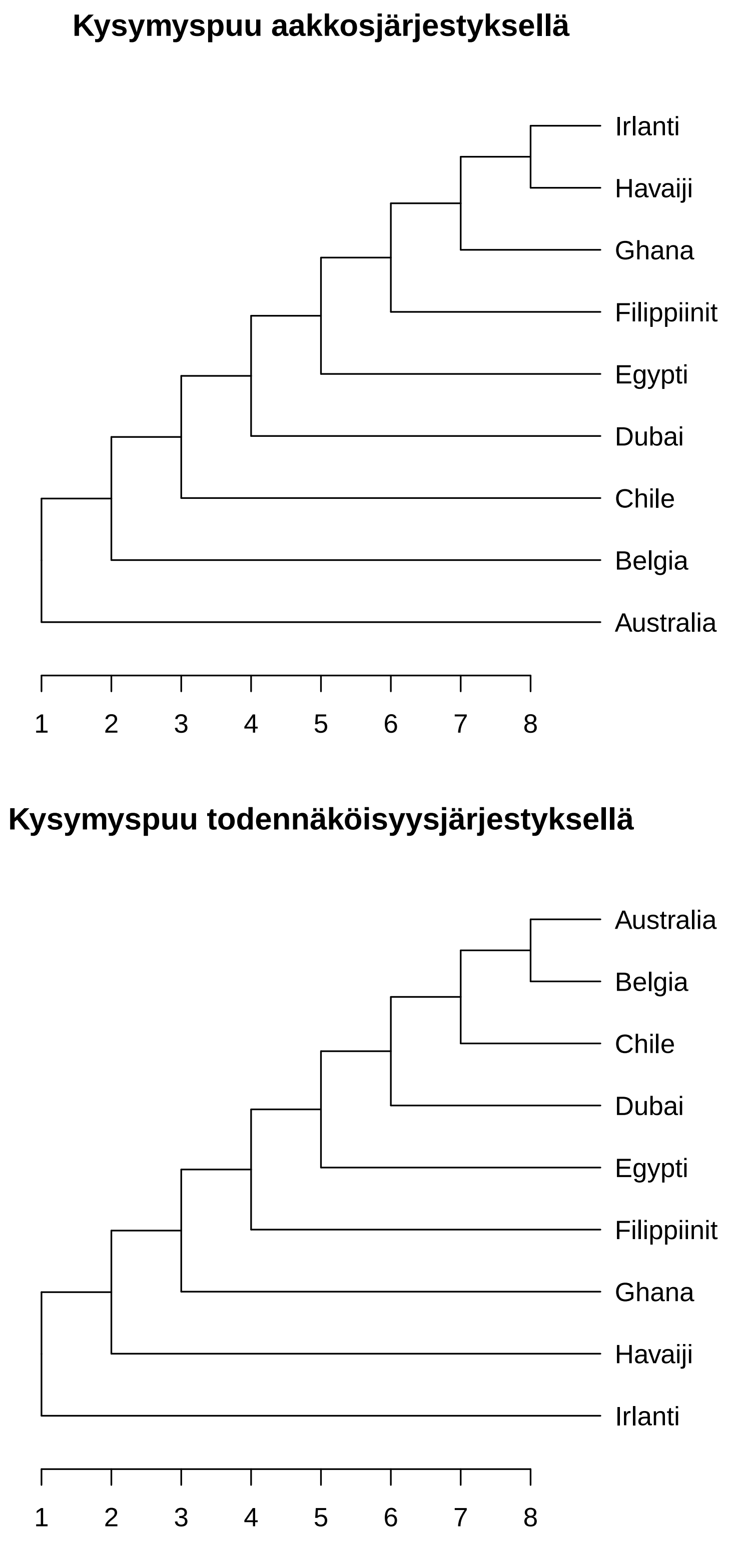
Kun opiskelija on saanut yhden kysymyssarjan valmiiksi, hänen tulee vielä keksiä jokin toinen tapa saada matkamuiston ostopaikka selville. Vaihtoehtoisesti opiskelijat voivat myös vertailla keksimiään kysymyksiä parin kanssa. Aakkosjärjestyksestä on helppo muokata toinen kysymyspuu vaihtamalla järjestystä, jossa maat käydään läpi. Kuvan 5 alaosaan on piirretty kysymyspuu, jossa kysymykset esitetään todennäköisyysjärjestyksessä. Tässä tapauksessa kysytään jäljellä olevista aina sitä matkakohdetta, josta on tuotu eniten matkamuistoja. Opiskelija ei välttämättä nimitä tätä todennäköisyysjärjestykseksi, sillä hän voi mieltää järjestyksen suurimman lukumäärän mukaan tehdyksi.

4.2 Vaihtoehtoja yhdistelevän kysymyssarjan keksiminen

Kuvaan 5 kuvatuissa esimerkeissä kysytään aina kerrallaan vain yhtä maata. Mikäli opiskelijoille on epäluontevaa tehdä muunlaisia kysymyksiä, heitä voi ohjata esimerkiksi seuraavanlaisella keskustelulla:

- Kuinka monta kysymystä tarvitset maksimissaan matkakohteen selvittämiseen?
- Onko sitä maksimia mahdollista saada pienemmäksi?
- Millä tavalla kuvailisit tällä hetkellä käyttämiäsi kysymyksiä?
- Millä tavalla voisitte muunnella nykyisiä kysymyksiä?
- Millä tavalla matkakohteen voisi selvittää kysymällä vähemmän kysymyksiä?
- Olisiko mahdollista karsia useampia vaihtoehtoja yhdellä kysymyksellä?

Ensimmäisellä kysymyksellä halutaan herättää opiskelija miettimään kysyttävien kysymysten määrää. Yhtä vaihtoehtoa kerrallaan kysyttäessä kysymyksiä tarvitaan maksimissaan yksi vähemmän kuin vaihtoehtoja eli tässä tapauksessa kahdeksan. Ainoa tapa pienentää kysyttävien kysymysten maksimimäärää on niputtaa useita vaihtoehtoja yhden kysymyksen alle. Jos opiskelija huomaa kysymyksistään kysyvänsä vaihtoehdot yksi kerrallaan, hänen lienee helpompi luoda vaihtoehtoja niputtavia kysymyksiä. Viimeinen kysymys tarjoaa opiskelijalle ratkaisun, mikäli hän ei sitä itse keksi. Opiskelijaa kannattaa kannustaa kehittelemään kysymyssarja samaa menetelmää käyttäen loppuun asti.



Kuva 5: Ylhäällä on kysymyspuu matkamuisto-ongelmaan aakkosjärjestyksellä. Alhaalla on kysymyspuu todennäköisyysjärjestyksellä. Vaaka-akselilta voi lukea kunkin maan selvittämiseen tarvittavien kysymysten määrän matkakohdetta lähinnä olevan haaran kohdalta.

Opiskelijan voi olla esimerkiksi luontevaa tehdä kysymykset maantieteellisen sijainnin mukaan. Kysymys ”onko matkamuisto Euroopasta” yhdistää Belgian ja Irlannin. Mikäli vastaus on ”ei”, yhdellä kysymyksellä saa karsittua pois kaksi väärää vaihtoehtoa. Jos vastaus on ”kyllä”, täytyy esittää vielä toinen kysymys oikean matkakohteen löytämiseksi. Opiskelijalle ei ole välttämättä selvää, onko tällaisesta vaihtoehtojen yhdistämisestä mitään hyötyä. Ensisijaisesti on kuitenkin tärkeää löytää erilainen tapa. Opiskelijaa voi kehottaa vertailemaan keksimiään kysymyssarjoja sen jälkeen, kun on ensin saanut suunniteltua kysymykset loppuun.

Oletetaan, että opiskelija luo kysymyssarjan, joka on havainnollistettu kysymyspuuhun kuvaan 6. Siinä matkakohteet on ryhmitelty maantieteellisen sijainnin mukaan. Tällä kysymystavalla tarvitaan maksimissaan viisi kysymystä vastauksen saamiseen, mutta toisaalta tarvitaan vähintään kaksi kysymystä. Jos valittu matkamuisto on esimerkiksi Irlannista, tarvitaan neljä kysymystä. Ne voivat olla esimerkiksi:

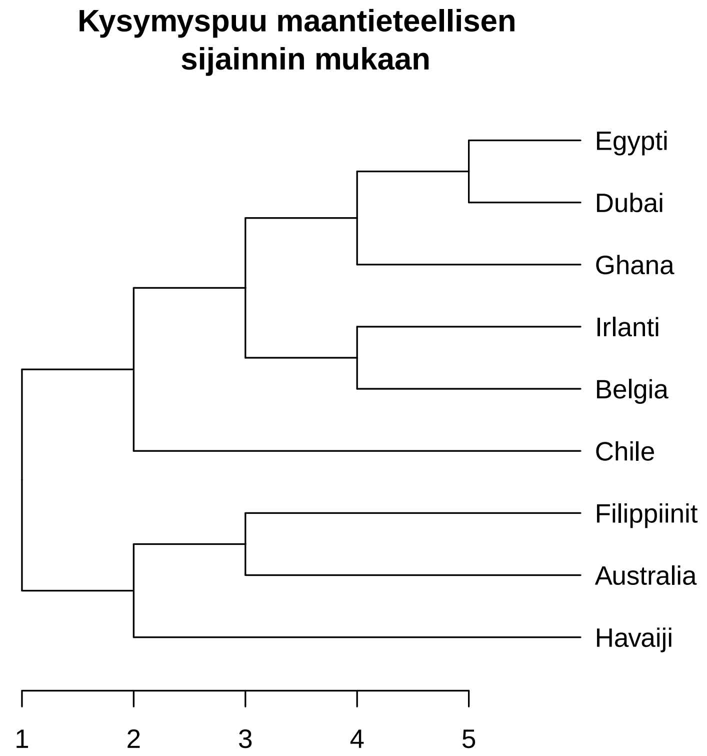
”Onko matkamuisto Australiasta, Filippiineiltä tai Havaijilta?”
”Ei.”
”Onko se Chilestä?”
”Ei.”
”Entä Irlannista tai Belgiasta?”
”Kyllä.”
”No onko se Belgiasta?”
”Ei.”
”Eli se on Irlannista!”

4.3 Eri kysymyssarjojen vertailu

Nyt opiskelijalla on tehtynä vähintään kaksi kysymyssarjaa, ja hän voi siirtyä ongelman seuraavaan vaiheeseen eli kysymyssarjojen vertailuun. Opettaja voi auttaa vertailuun tarttumisessa esittämällä kysymyksen monipuolisilla tavoilla.

> Millä tavalla voi verrata eri kysymistapoja? Kummalla kysymyssarjalla saa todennäköisemmin vastauksen vähemmillä kysymyksillä? Vai onko esitettävillä kysymyksillä merkitystä keskimääräiseen käytettävien kysymysten määrään?

Nyt opiskelijoiden täytyy löytää oleelliset tiedot keksimistään kysymyspuista. Koska alkuperäisessä tehtävänannossa mainitaan ”mahdollisimman vähillä kysymyksillä”, suuntautunevat opiskelijat selvittämään kussakin kysymyssarjassa tarvittavien kysymysten määrää. Taulukossa 5 on esitetty nämä määrät



Kuva 6: Kysymyspuu matkamuisto-ongelmaan, kun käytetään maantieteellistä järjestystä. Vaaka-akselilta voi lukea kunkin matkakohteen selvittämiseen tarvittavien kysymysten määrän matkakohdetta lähinnä olevan haaran kohdalta.

matkakohteittain eri kysymyssarjoille. Mikäli määrien laskeminen on hankalaa, ne kannattaa selvittää käymällä kysymykset läpi kunkin matkakohteen tapauksessa ja laskemalla määrä samalla. Kahdesta vaihtoehdosta oikean saa selville yhdellä kysymyksellä, mikä on tärkeää kertoa opiskelijoille. Vastauksen ei siis tarvitse olla myönteinen, jotta oikean vastauksen voi päätellä. Tämä käy ilmi aiemmasta esimerkkikeskustelusta.

Jos ratkaiseminen tuntuu opiskelijasta hankalalta yhdeksän maan tapauksessa, ongelmaa voi yksinkertaistaa. Yksinkertaisimman mielekkään ongelman saa kolmella vaihtoehdolla, sillä tällöin voi tehdä kolme erilaista kysymyssarjaa. Matkakohteiksi kannattaa valita kohteet, joiden välillä on paljon vaihtelua matkamuistojen määrässä. Esimerkiksi Australia, Belgia ja Irlanti ovat toimiva kolmikko. Kolmella vaihtoehdolla kysymyssarja on käytännössä yhden matkakohteen kysymistä kerrallaan. Kolme erilaista sarjaa saa siten, että muuttaa ensimmäisenä kysyttävää kohdetta. Vastauksen selvittämiseen tarvitsee kysymyksiä joko yhden tai kaksi.

Opiskelijaa voi ohjata samalla tavalla riippumatta siitä, onko kyseessä yhdeksän tai kolmen vaihtoehdon kysymyssarjat. Kun opiskelija keksii vertailutavan yksinkertaistettuun erikoistapaukseen, hänen tulee soveltaa keksimäänsä alkuperäisiin yhdeksän matkakohteen kysymyssarjoihin.

Mikäli opiskelijan on vaikeaa saada ideaa siitä, kuinka vertailla eri kysymyssarjoja keskenään, hänen ajatuksiaan voidaan kohdistaa oikeaan suuntaan esimerkiksi seuraavilla kysymyksillä:

- Mikä on tavoitteena?
- Onkohan sillä merkitystä, mitä kysymyssarjaa käyttää?
- Mitä noista kysymyssarjoista käyttäisit itse? Miksi?

Tavoitteena on löytää tapa, jolla voidaan verrata eri kysymyssarjoja keskenään. Opiskelijalle on myös hyvä antaa aluksi mahdollisuus pohtia tehtävän merkitystä; hänen tulisi löytää syy toiminnalleen. Mikäli opiskelija uskoo, ettei kysymyssarjan valinnalla ole merkitystä, hänen ei ole mielekästä yrittää todistaa päinvastaista. Parhaimmassa tapauksessa eri mieltä olevat opiskelijat ryhtyvät perustelemaan omia kantojaan toisilleen ja ongelman ratkaisun avaimet löytyvät kuin itsestään.

Kysymyssarjan valitseminen omaan käyttöön tuo opiskelijalle konkretiaa ongelman käsittelyyn, jos hän uskoo valitsemisella olevan merkitystä. Esimerkiksi aakkosjärjestys tuntunee intuitiivisesti todennäköisyysjärjestystä huonommalta, koska siinä käytetään eniten kysymyksiä yleisimpiin vaihtoehtoihin ja vähiten niihin, joista on vähän matkamuistoja. Intuitio on hyvä lähtökohta vertailutavan keksimiseen ja ongelman matemaattiseen tarkasteluun.

Opiskelijoille voi tulla ratkaisuvaiheessa mieleen erilaisia virheellisiä päätelmiä. Esimerkiksi kysymyssarjojen vertailu kysymysmäärien summien tai aritmeettisen keskiarvon avulla. Tällöin oppilasta voi pyytää vertaamaan aakkosjärjestystä ja todennäköisyysjärjestystä. Molemmat niistä saavat samat arvot (summa 44, keskiarvo $^{44}/_{9} \approx 4.89$) edellä mainittuja vertailutapoja käyttämällä. Intuitio puhuu kuitenkin todennäköisyysjärjestyksen puolesta, mikä voi herättää ajatuksen siitä, että esitetyt keinot eivät toimi ratkaisuna vertailuongelmaan.

Mikäli todennäköisyysjärjestyksen paremmuus verrattuna aakkosjärjestykseen ei ole intuitiivista, voi eroa havainnollistaa käymällä kysymyssarjoja läpi

Taulukko 5: Tarvittavien kysymyksien määrät ja niiden pistetodennäköisyydet matkakohteittain matkamuisto-ongelman kolmesta eri kysymyssarjasta. Matkakohteisiin viitataan etukirjaimella. Kohteet ovat Australia, Belgia, Chile, Dubai, Egypti, Filippiinit, Ghana, Havaiji ja Irlanti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
aakkosjärjestys	1	2	3	4	5	6	7	8	8
todennäköisyysjärjestys	8	8	7	6	5	4	3	2	1
maantieteellinen järjestys	3	4	2	5	5	3	4	2	4
pistetodennäköisyys	$^1/_{45}$	$^2/_{45}$	$^3/_{45}$	$^4/_{45}$	$^5/_{45}$	$^6/_{45}$	$^7/_{45}$	$^8/_{45}$	$^9/_{45}$

siten, että Australia valitaan kerran ja sitten Irlanti jopa yhdeksän kertaa. Jos samalla lasketaan käytettyjen kysymysten määrää, selvinnee kysymyssarjojen ero. Painotusta käyttämällä opiskelija saattaa myös keksiä tavan laskea luvun, jolla kysymyssarjoja voi vertailla.

Opiskelija voi ajatella, että valittu matkakohde vaikuttaa siihen, mitä kysymystapaa hänen kannattaa käyttää. Kuitenkin yksi kysymyssarja on valittava käyttöön. Tällöin häntä voi pyytää selvittämään, minkä matkakohteiden tapauksessa esimerkiksi aakkosjärjestys on parempi kuin todennäköisyysjärjestys. Taulukosta 5 nähdään, että molemmissa tavoissa käytetään viisi kysymystä Egyptin arvaamiseen. Aakkosjärjestystä käytettäessä aakkosilla A–D alkavat maat löytyvät vähemmillä kysymyksillä kuin todennäköisyysjärjestyksellä ja aakkosilla F–I alkavilla matkakohteilla asia on päinvastoin. Nyt kummankin tavan puolesta puhuvia matkakohteita on yhtä monta, joten oppilas saattaa ajatella tapojen olevan yhtä hyviä keskenään.

Mikäli oppilas pitää kutakin matkakohdetta samanlaisena arvausleikin kannalta, opettaja voi käyttää esimerkiksi seuraavia kysymyksiä, joilla johdatellaan huomaamaan, että matkakohteesta tuotujen matkamuistojen määrä tulee ottaa huomioon päättelyssä:

- Mitä alun perin kysyttiin?
- Miten matkamuistot vaikuttavat tehtävään?
- Miten voisit ottaa vertailussa huomioon sen, kuinka usein mikäkin matkakohde on oikea vastaus?
- Oletko ratkaissut vastaavan ongelman aiemmin?
- Miten voisit laskea sen kuinka useasti satunnainen valinta kohdistuu esimerkiksi Filippiineihin? Miksi?

Alkuperäinen tehtävänanto käsittelee matkamuistoja, mikä on hyvä palauttaa mieleen, mikäli opiskelija on keskittynyt ajattelemaan vain matkakohteita. Jos opiskelija jättää matkamuistot huomiotta, toisella kysymyksellä voi täsmentää hänen ajatuksensa niihin. Kolmas listan kysymys vihjaa opiskelijalle, että kaikki matkakohteet eivät ole yhtä todennäköisiä ja suuntaa ajatuksia pistetodennäköisyyksiä kohti. Kaikkia kysymyksiä ei tarvitse välttämättä esittää, vaan opiskelija saattaa ryhtyä selvittämään pistetodennäköisyyksiä jo vähemmillä vihjeillä.

Tarvittavat tiedot matkakohteisiin liittyvien pistetodennäköisyyksien laskemiseen ovat tehtävänannossa ja taulukossa 4. Pistetodennäköisyyksien laskeminen perustuu klassiseen todennäköisyyteen, joka on opeteltu lukion todennäköisyyskurssin alkupuolella. Taulukossa 5 esitetyt pistetodennäköisyydet saadaan siis jakamalla suotuisten alkeistapausten määrä kaikkien alkeistapausten määrällä. Tässä alkeistapaukset ovat tietystä matkakohteesta ostettuja matkamuistoja.

Mikäli opiskelija ei keksi, kuinka hyödyntää tietoja matkamuistoista, häntä kannattaa pyytää etsimään vastaavaa ongelmaa. Opiskelija voi samaistaa ongelman esimerkiksi korttipakkaan: Korttipakassa on 4 ässää ja yhteensä 52 korttia, ja ässän todennäköisyys on $4/52$. Koska matkamuistoja on yhteensä 45 ja niistä 6 on Filippiineiltä, todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu matkamuisto on Filippiineiltä on $6/45$. Mikäli opiskelija ei keksi itse sovellettavaa esimerkkiä, häneltä voi esimerkiksi kysyä, miten korttipakan kanssa toimittiin ja pystyisikö samaa periaatetta käyttämään tässä tilanteessa.

Kun opiskelija on saanut selvitettyä pistetodennäköisyydet, hänen tulee saada vielä tärkein oivallus, jotta kysymyssarjojen vertailu on mahdollista. Mikäli oivallus ei synny itsestään, opettaja voi johdattaa opiskelijaa esimerkiksi seuraavien kysymysten avulla:

- Mitä tietoja sinulla nyt on käytettävissä?
- Mitä haluat selvittää?
- Miten voisit vertailla eri tapoja?
- Miten sen voisi selvittää sinulla olevia tietoja käyttämällä?
- Oletko käyttänyt samankaltaisia tietoja aiemmin?
- Muistuttaako tämä tehtävä jotain, jonka olet jo aiemmin ratkaissut?
- Minkä odotusarvon voisit nyt laskea?
- Mitä käytössäsi olevat määrät kuvaavat?

Käytettävissä olevat tiedot saattavat herättää opiskelijassa tuttuuden tunteen siitä, että hän on käyttänyt vastaavia tietoja laskuissaan aiemmin. Vaikka ensimmäinen kysymys ei auttaisikaan opiskelijaa suoraan oivallukseen, on hyvä aloittaa lähtötilanteen kartoituksella. Tähän mennessä on selvitetty kunkin matkakohteen matkamuistojen määrät ja todennäköisyydet sille, että matkamuisto on tietystä kohteesta. Lisäksi on keksitty useampi kysymyssarja, joista jokaisesta tiedetään, kuinka monta kysymystä joutuu käyttämään oikean vastauksen löytymiseen. Näitä tietoja käyttämällä halutaan selvittää, millä kysymyssarjoista tarvitsee keskimäärin käyttää vähiten kysymyksiä satunnaisesti valitun matkamuiston ostokohteen selvittämiseen.

Opiskelija saattaa huomata yhtäläisyyden jonkin aiemman tehtävän kanssa: diskreetin muuttujan odotusarvon laskemiseen on käytetty satunnaismuuttujan arvoja ja pistetodennäköisyyksiä. Tässä tapauksessa satunnaismuuttuja on tarvittavien kysymysten määrä. Matkamuistojen määrää on käytetty pistetodennäköisyyksien laskemiseen ja ainoastaan kysymyssarjoihin liittyvien tarvittavien kysymysten lukumääriä käyttämällä voidaan saada vertailtavat odotusarvot. Tällöin lasketaan nimenomaan käytettävien kysymysten odotusarvo kullekin kysymyssarjalle. Opettajan kannattaa kuitenkin tiedostaa riski, että opiskelija käyttää matkamuistojen lukumääriä laskussaan.

Mikäli opiskelija ei yhdistä käytössä olevia tietoja odotusarvojen laskemiseen, häntä voi yksinkertaisesti kehottaa pohtimaan tapaa laskea luku, jonka avulla eri kysymyssarjoja voi vertailla. Opiskelija voi nimittäin päätyä sisällöllisesti vastaavaan laskuun ajattelematta odotusarvon kaavaa. Mikäli keksiminen on vaikeaa, opiskelijaa voi ohjeistaa katsomaan kurssikirjan sisällysluetteloa ja miettimään, mikä opiskelluista asioista voisi auttaa häntä eteenpäin.

Kuvataan kolmen matkakohteen erikoistapauksen ratkaisu käyttämättä suoranaisesti odotusarvon kaavaa. Valituissa kohteissa, jotka ovat Australia, Belgia ja Irlanti, matkamuistoja on yhteensä $1 + 2 + 9 = 12$. Jos vastaus osuu ensimmäisellä kysymyksellä oikein, tarvitaan yksi kysymys, muuten kaksi. Keskimääräisen käytettävien kysymysten määrän voi laskea ajattelemalla, kuinka monta kertaa kokonaismäärästä kukin matkakohde on oikea vastaus. Kun matkakohteen arvaamiseen tarvittavien kysymysten määrä kerrotaan tällä luvulla, joka itse asiassa on matkakohteen todennäköisyys, saadaan kysymysmäärästä yhtä suuri osuus kuin sen yleisyys on.

Jos ensimmäinen kysymys on, onko matkamuisto Irlannista, kysymyksiä tarvitaan keskimäärin:

$$1 \cdot \frac{9}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} = 1\frac{1}{4} = 1.25.$$

Mikäli ensimmäisenä kysytään Belgiaa, keskimääräinen kysymysmäärä on:

$$1 \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{9}{12} = 1\frac{5}{6} \approx 1.83.$$

Jos taas ensin kysytään, onko matkamuisto Australiasta, kysymyksiä esitetään odotettavasti:

$$1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{9}{12} = 1\frac{11}{12} \approx 1.92.$$

Saadut luvut eroavat toisistaan, joten kysymyssarjalla on merkitystä. Kannattaa siis kysyä ensin Irlantia, joka on muita vaihtoehtoja yleisempi vastaus.

Yksinkertaistetusta erikoistapauksesta opiskelijan pitää löytää oleellinen informaatio, jotta hän voi ratkoa alkuperäisen ongelman. Opiskelijan huomio kannattaa kiinnittää siihen, mitä käytettävät luvut ovat ja kuinka vastaavat löydetään alkuperäisestä ongelmasta.

Edellisessä esimerkissä laskettiin itse asiassa odotusarvo, vaikka asia voi jäädä opiskelijalta huomaamatta. Käydään seuraavaksi läpi esitettyjen kysymyssarjojen vertailu odotusarvon kaavaa käyttäen. Tämän jälkeen kiinnitetään vielä lisää huomiota mahdollisiin erilaisiin ajatustapoihin, joilla voidaan päästä samaan tulokseen.

Määritellään satunnaismuuttuja K tarvittavien kysymysten määräksi. Odotusarvo diskreetille muuttujalle K lasketaan kaavalla

$$\mathbb{E}(K) = \sum_{i \in I} k_i p_i,$$

jossa indeksijoukko I käy läpi kaikki mahdolliset tapaukset, esimerkiksi matkakohteet, k_i on tarvittavien kysymysten määrä indeksillä i ja p_i on indeksiin i liittyvä pistetodennäköisyys. Odotusarvot tarvittavien kysymysten määrälle aakkosjärjestyksen (aak), todennäköisyysjärjestyksen (tn) ja maantieteellisen järjestyksen (maan) tapauksissa ovat:

$$\mathbb{E}(K_{\text{aak}}) = 1 \cdot \frac{1}{45} + 2 \cdot \frac{2}{45} + 3 \cdot \frac{3}{45} + 4 \cdot \frac{4}{45} + 5 \cdot \frac{5}{45} + 6 \cdot \frac{6}{45} + 7 \cdot \frac{7}{45} + 8 \cdot \frac{8}{45} + 8 \cdot \frac{9}{45} = 6\frac{2}{15} \approx 6.13,$$

$$\mathbb{E}(K_{\mathrm{tn}}) = 8\cdot\frac{1}{45}+8\cdot\frac{2}{45}+7\cdot\frac{3}{45}+6\cdot\frac{4}{45}+5\cdot\frac{5}{45}+4\cdot\frac{6}{45}+3\cdot\frac{7}{45}+2\cdot\frac{8}{45}+1\cdot\frac{9}{45} = 3\frac{29}{45} \approx 3.64,$$

$$\mathbb{E}(K_{\mathrm{maan}}) = 3\cdot\frac{1}{45}+4\cdot\frac{2}{45}+2\cdot\frac{3}{45}+5\cdot\frac{4}{45}+5\cdot\frac{5}{45}+3\cdot\frac{6}{45}+4\cdot\frac{7}{45}+2\cdot\frac{8}{45}+4\cdot\frac{9}{45} = 3\frac{5}{9} \approx 3.56.$$

Siis maantieteellisen tavan kysymysmäärän odotusarvo on näistä vaihtoehdoista pienin ja aakkosjärjestyksen suurin. Aakkosjärjestyksen odotusarvo on huomattavasti suurempi kuin kahden muun tavan, mikä selittää sitä, että aakkosjärjestys on melko helppo nähdä intuitiivisesti huonommaksi vaihtoehdoksi kuin todennäköisyysjärjestys.

Yksinkertaistetun erikoistapauksen laskemisessa esitettiin erilainen näkökulma odotusarvon laskemiseen. Yhtä lailla tarvittavien kysymysten määrää voi painottaa kohteesta tuotujen matkamuistojen määrällä, summata painotetut arvot yhteen ja jakaa summan kaikkien matkamuistojen määrällä. Tällöin nimittäjä otetaan ikään kuin yhteiseksi tekijäksi ja jakolasku tehdään vasta lopussa.

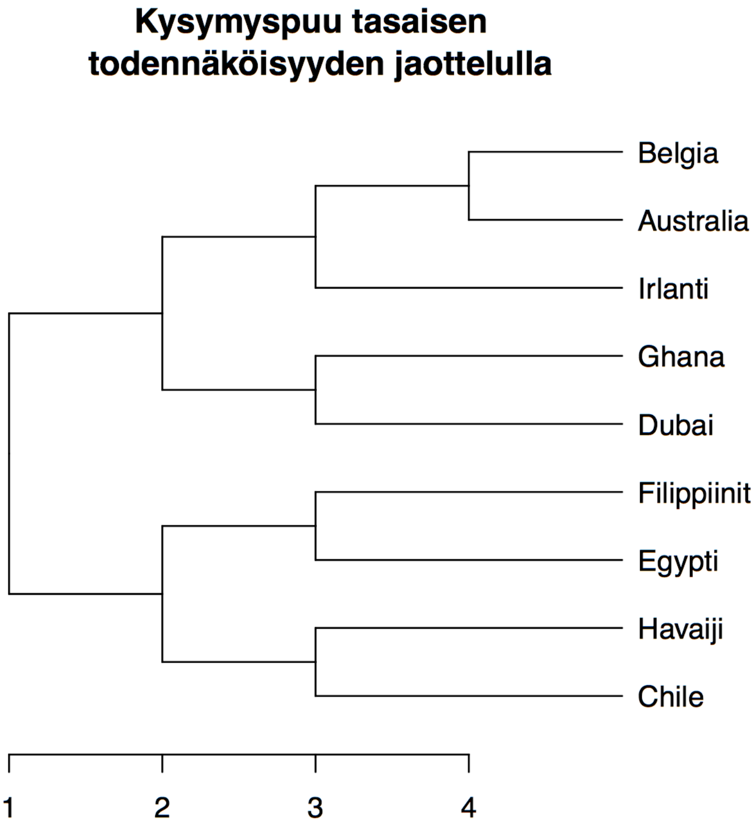
Odotusarvon voi laskea myös ajattelematta matkakohteita. Tällöin tulee selvittää esiintyvien kysymysmäärien todennäköisyydet, ja summausindeksi i käy läpi kaikki esiintyvät kysymysten määrät. Esimerkiksi todennäköisyysjärjestyksessä Australian ja Belgian selvittämiseen tarvitaan kahdeksan kysymystä, jolloin todennäköisyys kahdeksalle kysymykselle on kyseisten matkakohteiden todennäköisyyden summa. Muiden matkakohteiden tapauksessa samoja kysymysmääriä ei esiinny, joten kahdeksaa pienemmille kysymysmäärille pistetodennäköisyytenä voi käyttää suoraan matkakohteeseen liittyvää todennäköisyyttä. Tällöin odotusarvoa laskettaessa indeksi käy läpi kysymysmäärät yhdestä kahdeksaan ja pistetodennäköisyys on kunkin kysymysmäärän todennäköisyys.

4.4 Kysymyssarjan kehittäminen paremmaksi

Nyt on saatu kehitettyä tapa vertailla kysymyssarjojen paremmuutta. Ratkaisun tarkasteluvaiheessa voi pyrkiä käyttämään oppimaansa ratkaisun parantamiseen. Seuraavassa tehtävässä voi käyttää odotusarvoa soveltavasti.

Keksi vielä yksi kysymyssarja ja pyri siihen, että saisit sille tähän mennessä pienimmän odotusarvon. Onnistuitko?

Kun minimoidaan odotusarvoa, pyritään minimoimaan keskimäärin käytettävien kysymysten määrää. Esimerkiksi todennäköisyyksien mukaan ryhmittely voisi auttaa saamaan pienemmän odotusarvon. Kuvassa 7 on esimerkki



Kuva 7: Kysymyspuu matkamuisto-ongelmaan, kun matkakohteet on jaoteltu todennäköisyyksien mukaan mahdollisimman tasaisiin ryhmiin. Vaaka-akselilta voi lukea kunkin maan selvittämiseen tarvittavien kysymysten määrän matkakohdetta lähinnä olevan haaran kohdalta.

kysymyspuusta, jossa on pyritty luomaan neljä haaraa, joiden todennäköisyydet olisivat mahdollisimman samat. Kun matkamuistoja on pariton määrä, todennäköisyyksiltään täysin samanarvoisia ryhmiä ei voida luoda. Nyt saadaan kolme kahden kohteen ryhmää, joiden todennäköisyys on $^{11}/_{45}$ ja yksi kolmen kohteen ryhmä, jonka todennäköisyys on $^{12}/_{45}$. Kysymysten määrät on koottu taulukkoon 6. Tässä esimerkissä Australian ja Belgian selvittämiseen tarvitaan neljä kysymystä ja kaikki muut maat saadaan selville täsmälleen kolmella kysymyksellä. Neljän kysymyksen todennäköisyys on siis Australian ja Belgian yhteenlaskettu todennäköisyys $^{3}/_{45}$. Sen komplementtitapahtuman todennäköisyys on $1 - {}^{3}/_{45} = {}^{42}/_{45}$, mikä tässä tapauksessa kertoo todennäköisyyden käyttää kolme kysymystä vastauksen saamiseen. Odotusarvo voidaan yksinkertaistetusti laskea:

$$\mathbb{E}(K_{\text{tn\_jako}}) = 3 \cdot \frac{42}{45} + 4 \cdot \frac{3}{45} = 3\frac{1}{15} \approx 3.07.$$

Tällä tavalla saatiin pienempi odotusarvo kuin edellisillä kysymyssarjoilla.

Taulukko 6: Matkamuisto-ongelman tasaisen todennäköisyyden jaottelun kysymyssarjan kysymysten määrä ja niiden pistetodennäköisyydet matkakohteittain. Matkakohteisiin viitataan etukirjaimella. Kohteet ovat Australia, Belgia, Chile, Dubai, Egypti, Filippiinit, Ghana, Havaiji ja Irlanti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
todennäköisyysjaottelu	4	4	3	3	3	3	3	3	3
pistetodennäköisyys	$1/45$	$2/45$	$3/45$	$4/45$	$5/45$	$6/45$	$7/45$	$8/45$	$9/45$

Tässä esitetyistä ratkaisuista viimeisin olisi siis Tiinulle paras. Hän tarvitsee keskimäärin vain hieman yli kolme kysymystä löytääkseen oikean vastauksen, mutta toisaalta myös vähintään kolme kysymystä. Luokassa opiskelijat voivat keksiä hyvin erilaisia kysymyssarjoja, ja se on itse asiassa toivottavaa: tavoitteena on tarkastella ongelmaa mahdollisimman monipuolisesti useiden kysymyssarjojen kautta. Tehtävästä voivat nauttia eritasoiset opiskelijat, sillä tehtävä koostuu useasta vaiheesta, jossa jokaisessa on tilaa omalle oivallukselle. Ratkaisuun pääsemiseen vaaditaan uteliaisuutta, luovuutta, kekseliäisyyttä ja keskittymistä, mikä tekee matkamuistotehtävästä oivallisen ongelmanratkaisutehtävän.

Esitiedoiksi vaaditaan pistetodennäköisyys sekä diskreetin muuttujan odotusarvon laskeminen. Kuitenkaan ei ole välttämätöntä, että nämä tiedot ovat juuri opeteltuja ja tuoreessa muistissa. Mikäli tarvittavan tiedon opiskelusta on hieman aikaa, opiskelija joutunee käyttämään enemmän pohdintaa ratkaisun löytämiseen.

Todennäköisyydessä tärkeä käsite, odotusarvo, esiintyy ongelmassa erittäin tulkinnallisessa roolissa. Kunkin kysymyssarjan odotusarvo on odotettavissa oleva kysymysten määrä, joka keskimäärin tulee esittää vastauksen löytymiseen. Tehtävän kautta odotusarvo voidaan nähdä hyödyllisenä työkaluna eri tilanteiden vertailuun, ei pelkkänä satunnaismuuttujan jakauman tunnuslukuna.

Kysymyssarjojen keksiminen, odotusarvon hyödyntäminen niiden vertailussa ja pyrkimys kehittää kysymyssarjaa optimaalisempaan suuntaan ovat lukiolaiselle hieno tapa nauttia esitetystä ongelmasta ja saada oppimisen sekä oivaltamisen kokemuksia. Matkamuisto-ongelman käyttäminen lukio-opetuksessa tässä laajuudessa tuo opiskelijalle tarpeeksi pohdittavaa, mutta ongelmalle on myös olemassa optimaalinen ratkaisu, joka esitetään seuraavassa luvussa. Opettaja voi käsitellä sitä luokan kanssa harkintansa mukaan.

4.5 Optimaalinen ratkaisu

Ongelman pohtimisen kannalta ei ole välttämätöntä esittää optimaalista ratkaisua. Tärkeämpää on se, että opiskelijat keksivät ja kokeilevat monipuolisia tapoja tehdä kysymyspuita ja osaavat vertailla niitä odotusarvojen avulla.

Ratkaisu esitetään tässä taustatiedoksi, mikäli opiskelijoilla herää kiinnostus, löytyykö matkamuisto-ongelmalle paras kysymyssarja. Optimaalinen ratkaisu sopii myös Polyan ongelmanratkaisumallin neljänteen osioon eli alkuperäisen ongelman ratkaisun tarkasteluun. Huffmanin koodi tuo tehtävään uuden näkökulman, joka osoittaa matemaattisten ongelmien yhteyksiä toisiinsa.

David A. Huffman on esittänyt viestien koodaamiseen optimaalisen ratkaisun 1952 artikkelissaan *A method for the construction of minimum-redundancy codes*. Koodeissa käytetään vaan tiettyä määrää eri merkkejä, esimerkiksi binäärisessä koodissa kahta. Mahdollisia viestejä on äärellinen määrä, ja niiden esiintymistodennäköisyydet tunnetaan. Viestien todennäköisyyksien summa on yksi. Viestikokonaisuus voi sisältää yhden tai useamman viestin. Koodattua viestikokonaisuutta kutsutaan koodiketjuksi. Tavoitteena on saada koodiketjuista mahdollisimman lyhyitä. Tavoitteeseen päästään, kun keskimääräinen viestikoodin pituus minimoidaan. Keskimääräinen viestikoodin pituus l_{ka} määritellään $l_{\text{ka}} = \sum_{i=1}^{n} l_i p_i$, missä n on eri viestien määrä, viestin i koodin pituus on l_i ja todennäköisyys on p_i.

Otetaan esimerkki binäärisestä koodista matkamuisto-ongelman tapauksessa. Käytetään kahta merkkiä 0 ja 1. Aiemmin esitellyistä kysymyspuista saa poimittua koodit kullekin matkakohteelle eli Huffmanin termein viestille. Tarkastellaan maantieteellistä kysymyspuuta, joka on esitetty sivulla 51. Koodi kertoo matkakohteen sijainnin kysymyspuussa seuraavasti: 0 tarkoittaa, että haarautumiskohdassa puussa kuljetaan alempaan haaraan, ja 1 tarkoittaa kulkemista ylempään haaraan. Tällöin koodi 011 tarkoittaa, että ensin puussa kuljetaan alempaan haaraan ja sen jälkeen kaksi kertaa ylempään haaraan. Haara päättyy ja lopusta löytyy koodia vastaava matkakohde. Maantieteellisessä kysymyspuussa koodia 011 vastaava matkakohde on Filippiinit. Mikäli se olisi arvauksen kohde, löytämiseen tarvittaisiin koodin pituuden verran kysymyksiä eli kolme.

Huffman (1952) listaa ja perustelee ominaisuuksia optimaaliselle koodille: Minkään viestin koodi ei saa olla sama kuin toisen, eikä yksikään koodi saa olla toisen alkuosa. Esimerkiksi, jos yksi koodeista on 00, ei voi esiintyä koodia 0, eikä ainuttakaan muuta koodia, joka alkaa 00. Kysymyspuusta luodut koodit ovat automaattisesti tällaisia, sillä kunkin haaran päästä löytyy vain yksi viesti ja viesti voi löytyä ainoastaan haaran päästä, ei matkan varrelta. Jälkimmäinen sääntö mahdollistaa sen, että koodiketju voidaan esittää yhteenkirjoitettuna. Kun koodisto tunnetaan, koodiketju pystytään purkamaan tietämättä kunkin koodin pituutta.

Taulukossa 7 on kullekin matkakohteelle koodit sekä maantieteellisen että optimaalisen kysymyspuun mukaan. Huffmanin menetelmällä rakennettu optimaalinen kysymyspuu on kuvassa 8. Ennen Huffmanin menetelmän esittelyä käsitellään esimerkki koodiketjun purkamisesta.

Taulukko 7: Maantieteellisen ja optimaalisen kysymyspuun mukaan luodut binääriset koodit matkakohteille.

Maantieteellinen		Optimaalinen	
kohde	koodi	kohde	koodi
Havaiji	00	Irlanti	00
Australia	010	Dubai	010
Filippiinit	011	Egypti	011
Chile	10	Ghana	100
Belgia	1100	Havaiji	101
Irlanti	1101	Filippiinit	110
Ghana	1110	Chile	1110
Dubai	11110	Australia	11110
Egypti	11111	Belgia	11111

Koodiketju on ikään kuin salakirjoitus. Oletetaan, että saat koodatun viestin, jossa jokainen maininta koodissa tarkoittaa yhtä viikkoa kohteessa. Koodiketju on seuraava:

$$1011111011011101111100100010011$$

Jotta koodiketjun voi purkaa, tulee tuntea käytetty koodisto. Koodiketju puretaan alusta koodi kerrallaan. Vasemmalta lukien etsitään siis mahdollisimman lyhyt koodi, joka löytyy koodistosta. Tätä jatketaan lopulle koodiketjulle, kunnes koko ketju on käyty läpi. Maantieteellisen kysymyspuun koodistosta ei löydy koodia 1 mutta 10 löytyy. Ensimmäinen matkakohde on siis Chile. Eroteltu koodiketju näyttää tältä:

$$10 - 11111 - 011 - 011 - 10 - 11111 - 00 - 10 - 00 - 10 - 011$$

Viesti vastaa reittiä Chile – Egypti – Filippiinit – Filippiinit – Chile – Egypti – Havaiji – Chile – Havaiji – Chile – Filippiinit. Viesti kertoo siis yhdentoista viikon matkasuunnitelman, ja viestikokonaisuus sisältää vain neljä eri maata.

Optimaalisen koodiston tapauksessa sama viesti purettaisiin erilaiseksi reitiksi:

$$101 - 11110 - 110 - 1110 - 11111 - 00 - 100 - 010 - 011$$

Viesti sisältää tiedon reitistä Havaiji – Australia – Filippiinit – Chile – Belgia – Irlanti – Ghana – Dubai – Egypti. Nyt viesti sisältää kaikki matkakohteet, ja matkasuunnitelma olisi yhdeksän viikon mittainen. Optimaalinen koodisto on optimaalinen luvussa 4 esitetylle tehtävälle. Jotta koodi siis olisi paras mahdollinen, tulisi matkakohteiden esiintyä viesteissä tehtävässä olevien todennäköisyyksien mukaan. Tässä havainnollistettiin koodiketjun purkamista viestikokonaisuudeksi eikä otettu kohteiden todennäköisyyksiä huomioon millään tavalla.

Tarkastellaan lisää Huffmanin (1952) mukaan optimaaliselle koodistolle päteviä rajoitteita:

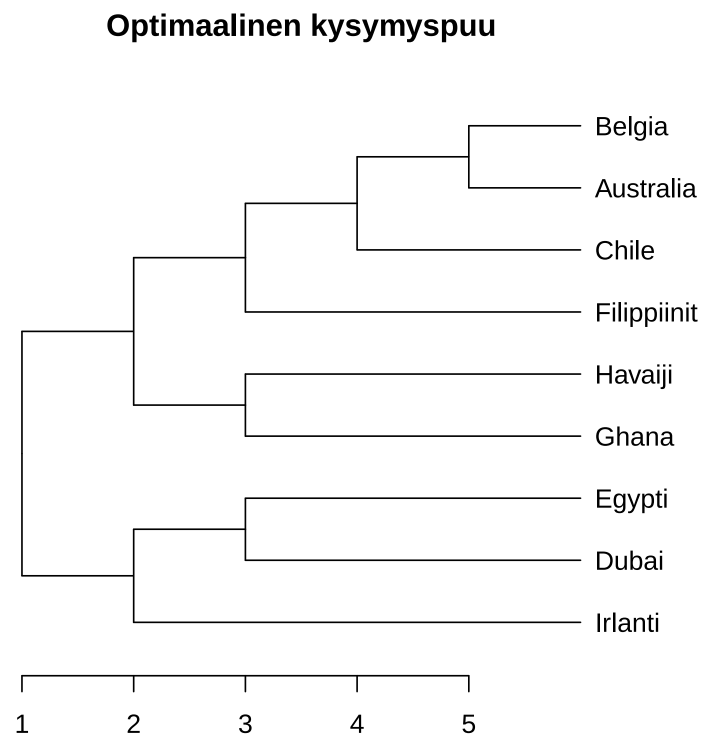
- Optimaalisessa koodistossa yhdenkään viestin koodi ei voi olla lyhyempi kuin sitä todennäköisemmän viestin koodi on.
- Kahdella vähiten todennäköisimmällä viestillä tulee olla samanmittaiset koodit.
- Yhtä todennäköisillä viesteillä voi olla erimittaiset koodit.
- Jokaiselle pisimmistä koodeista on vähintään yksi yhtä pitkä koodi, jolla on sama alkuosa, mutta viimeinen merkki on erilainen. Tällaisia keskenään ainoastaan viimeisen merkin kohdalla poikkeavia koodeja voi olla korkeintaan yhtä monta kuin koodeissa käytettäviä erilaisia merkkejä on.
- Kaikki pisintä koodia yhdellä merkillä lyhyemmät koodit tulee olla joko käytössä tai niiden mikä tahansa alkuosa tulee olla käytössä oleva koodi.

Kaksi viimeistä kohtaa pätevät mille tahansa kysymyspuusta muodostetulle koodistolle. Optimaalisen koodin rajoitteet saattavat kuulostaa hankalilta toteuttaa, mutta menetelmä on varsin yksinkertainen. Tiivistetysti viestille tulee sitä lyhyempi koodi, mitä suurempi sen esiintymistodennäköisyys on. Seuraavaksi esitetään Huffmanin menetelmä ja sen soveltaminen matkamuisto-ongelmaan. Esitetyt rajoitteet toteutuvat automaattisesti Huffmanin menetelmää käytettäessä.

Huffmanin menetelmä

Huffmanin binäärinen menetelmä etenee seuraavasti: Ensin niputetaan yhdeksi viestijoukoksi ne kaksi viestiä, joilla on pienimmät todennäköisyydet. Nämä muodostavat yhden haaran kysymyspuuhun, joka matkamuistotehtävän tapauksessa on Australia-Belgia-haara. Viestien todennäköisyyksien summa muodostaa kyseisen viestijoukon todennäköisyyden, ja joukkoa käsitellään jatkossa aivan kuin yhtä viestiä. Tämän jälkeen sama menettely toistetaan. Näin aina kaksi pienintä todennäköisyyttä lasketaan yhteen ja viestien määrä vähenee yhdellä kunnes kaikki viestit kuuluvat samaan joukkoon, jonka todennäköisyys on 1. Mikäli pienimmillä todennäköisyyksillä olevat viestit eivät ole yksikäsitteiset, mitkä tahansa niistä voidaan valita.

Tämän jälkeen alkuperäisille viesteille annetaan koodit siten, että koodin pituus kertoo, kuinka monta haaraa kysymyspuussa tarvitsee edetä viestin löytämiseksi. Tällöin lyhimmät koodit menevät viimeisimpinä niputetuille viesteille. Huffmanin menetelmä optimoi koodit todennäköisyyksien mukaan siten, että keskimääräinen koodin pituus on mahdollisimman lyhyt. Tällöin myös kysyttävien kysymysten määrän odotusarvo on mahdollisimman pieni.



Kuva 8: Kuvassa on kysymyspuu, joka on optimaalinen matkamuisto-ongelmaan. Optimaalinen kysymyspuu on muodostettu Huffmanin menetelmällä. Vaaka-akselilta voi lukea kunkin matkakohteen selvittämiseen tarvittavien kysymysten määrän kohdetta lähinnä olevan haaran kohdalta.

Käydään läpi Huffmanin menetelmän soveltaminen matkamuisto-ongelmaan. Erillistä alustusta Huffmaniin koodiin ei ole välttämätöntä esittää opiskelijoille. Menetelmää voi perustella siten, että kysymyksien määrän minimoimiseksi halutaan käyttää vähän kysymyksiä todennäköisten vaihtoehtojen selvittämiseen, eikä haittaa käyttää useita kysymyksiä harvinaisten vaihtoehtojen selvittämiseen.

Huffmanin menetelmän vaiheita kannattaa verrata valmiiseen kysymyspuuhun, joka on kuvassa 8. Matkakohteiden yhdistäminen aloitetaan Australiasta ja Belgiasta, sillä niillä on pienimmät todennäköisyydet. Niiden yhteenlaskettu todennäköisyys on $^3/_{45}$, joka on sama kuin Chilellä. Nämä ovatkin yhdistämisen jälkeen pienimmät todennäköisyydet, joten Chile niputetaan yhteen Australian ja Belgian kanssa (yhteenlaskettu todennäköisyys $^6/_{45}$).

Tämän jälkeen pienimmät todennäköisyydet ovat Dubailla ja Egyptillä (yhteistodennäköisyys $^9/_{45}$). Niiden yhdistymisen jälkeen pienimmät todennäköisyydet ovat Filippiineillä sekä Australian, Belgian ja Chilen yhdistetyllä joukolla (yhteistodennäköisyys $^{12}/_{45}$). Sitten niputetaan Ghana ja Havaiji keskenään (yhteistodennäköisyys $^{15}/_{45}$). Tämän jälkeen Irlanti liittyy samaan joukkoon

Taulukko 8: Matkamuisto-ongelman optimaalisen kysymyssarjan kysymysten määrä ja niiden pistetodennäköisyydet matkakohteittain. Matkakohteisiin viitataan etukirjaimella. Kohteet ovat Australia, Belgia, Chile, Dubai, Egypti, Filippiinit, Ghana, Havaiji ja Irlanti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
optimaalinen	5	5	4	3	3	3	3	3	2
pistetodennäköisyys	$1/45$	$2/45$	$3/45$	$4/45$	$5/45$	$6/45$	$7/45$	$8/45$	$9/45$

Egyptin ja Dubain kanssa (yhteistodennäköisyys $18/45$). Nyt on kolme joukkoa, joista pienimmät todennäköisyydet ovat joukoilla, jossa on Australia ($12/45$) ja jossa on Havaiji ($15/45$). Näiden joukkojen yhdistymisen jälkeen on enää kaksi joukkoa, jotka lopulta yhdistyvät. Tämän jälkeen selvitetään tarvittavien kysymysten määrä käyden kysymyspuu läpi ensimmäisestä haarasta eteenpäin. Tarvittavien kysymysten määrät löytyvät taulukosta 6.

Optimaalisen (opt) menetelmän kysymysten odotusarvo on

$$\mathbb{E}(K_{\mathrm{opt}}) = 5\cdot\frac{1}{45}+5\cdot\frac{2}{45}+4\cdot\frac{3}{45}+3\cdot\frac{4}{45}+3\cdot\frac{5}{45}+3\cdot\frac{6}{45}+3\cdot\frac{7}{45}+3\cdot\frac{8}{45}+2\cdot\frac{9}{45} = 3.$$

Tämä on siis pienin odotusarvo, joka matkamuisto-ongelmaan voidaan saada. Keskimäärin satunnaisesti valitun matkamuiston ostopaikka selviää siis kolmella kysymyksellä, mikäli käytetään optimaalista kysymyssarjaa. Todennäköisyyksien tasaisella jaottelulla saatu odotusarvo 3.07 on melko lähellä optimaalista odotusarvoa.

5 Pohdinta

Olen halunnut tuoda esille useita eri tapoja lähestyä ongelmia, sillä koen sen auttavan opettajan työtä antamalla valmiuksia erilaisten ratkaisutapojen kohtaamiseen. Toivon, että sitä kautta myös oppilaat ja opiskelijat voivat huomata, että matematiikassa voi olla useita tapoja ratkaista sama tehtävä. Ja vaikka joku tapa olisikin muita elegantimpi, sitä tapaa ei välttämättä ajattele ensimmäisenä.

Edellä on esitetty ideaaleja tilanteita, jotka eivät välttämättä siirry luokkatilanteeseen sellaisinaan. Tutkielman tavoitteena onkin ollut antaa opettajalle eväitä ongelmanratkaisun opettamiseen. Toivottavasti lukijani on saanut ongelmien läpikäymisessä ahaa-elämyksiä ja huomannut seikkoja, jotka auttavat häntä ratkaisun sisäistämisessä.

Tutkielmaa tehdessäni huomasin, että ongelmanratkaisusta voisi perustellusti tehdä myös tietoteknisemmän matematiikan tutkielman. Lukion opetussuunnitelman perusteisiin (Opetushallitus, 2015) tutustuessani löysin tavoitteista tietokoneohjelmistojen käytön matematiikan oppimisen ja tutkimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Tästä näkökulmasta voisi kehitellä ongelmia, joita voisi ratkoa esimerkiksi ohjelmoinnin, simuloinnin ja visualisoinnin kautta. Tähän sopiva alusta olisi esimerkiksi R-ympäristö (R Core Team, 2017).

Olen rajannut tehtävät koskemaan todennäköisyyttä, sillä se on lähellä sydäntäni. Minua kiehtoo se, että todennäköisyyksiin pohjautuen voidaan tehdä hyviä päätöksiä epävarmoissa tilanteissa. Minua innostaa myös se haaste, joka voi sisältyä yksinkertaisen näköiseen tehtävään. Todennäköisyyksien viidakossa eksyy helposti, jos ei ole tarkkana.

Erilaisia tutkielmaani sopivia todennäköisyysongelmia on tarjolla melko paljon. Olen kuitenkin halunnut käsitellä tehtäviä laajasti ja mielestäni on ollut kiinnostavaa keksiä ja jatkokehittää tehtäviä itse sen sijaan että olisin käyttänyt vain kirjallisuudesta löytämiäni ongelmia. Näin koen antavani enemmän itsestäni tälle tutkielmalle. Opettajan kannattaa kuitenkin käyttää omaa harkintaansa, kuinka laajasti käsittelee eri ongelmia tunneillaan. Esimerkiksi koko luvun 3 käsitteleminen vie paljon aikaa, mutta samalla opitaan, että yksinkertaisestakin ongelmasta voi löytyä reilusti tarkasteltavaa. Pienillä muutoksilla ongelmasta saa paljon irti. Toisaalta tehtäviä voi käyttää eriyttämiseen, jotta kaikille riittää mielekästä ratkottavaa ongelman parissa.

Lukuun 2 olen luonut melko avoimen tehtävän, jolla pyrin herättelemään oppijan ajattelua sen sijaan, että tavoitteena olisi saada vastaukseksi tietty luku. Itse koen vasta yliopistossa oppineeni matematiikasta sen, että vastauksen ei tarvitse olla aina tarkka. Joskus päätöksentekoon riittää tietää luvulle vain alaraja, yläraja tai molemmat.

Toivon, että odotusarvoa käsittelevät tehtävät antavat lukijalle käsitystä siitä, kuinka monipuolisesti odotusarvoa voi hyödyntää. Luvun 4 tehtävä valikoitui mukaan nimenomaan leikillisyytensä ja tulkinnallisen odotusarvon vuoksi. Odotusarvo on mukana myös luvun 3.6 ongelmassa. Kortinjakopelissä päästään tutkimaan pelin symmetrisyyttä, ja odotusarvon avulla voidaan tarkastella reilua peliä sekä pelin kannattavuutta eri pelaajien näkökulmasta. Kombinatorisia ongelmia otin mukaan tutkielmaan, jotta pääsin sivuamaan myös ikuisuuskysymystä siitä, onko järjestyksellä väliä. Halusin teoriaosuudessa luvussa 1.3.4 tuoda esille eri tapoja laskea sama todennäköisyys, jotta opettajan olisi helpompi sisäistää oppilaiden erilaiset näkemykset. Toivon, että tätä kautta tutkielmani antaa varmuutta oman ajattelun käyttöön todennäköisyyksien määrittämisessä.

Mikäli lukijan kiinnostus on herännyt nimenomaan todennäköisyysongelmia kohtaan, useita hyviä ongelmia löytyy Mostellerin (1987) kirjoittamasta kirjasta *Fifty challenging problems in probability with solutions.*

Yksi ongelmanratkaisun opettamisen haasteista on, että oppilaat pitää sitouttaa pitkäjänteiseen työhön. Pienien pulmien antaminen ratkaistavaksi voi kehittää oppilaiden itseluottamusta ja kiinnostusta ongelmanratkaisua kohtaan. Mutta jos oppilaalle muodostuu mielikuva, että kaikki ongelmat on ratkottavissa kolmessa minuutissa, hän saattaa luovuttaa nopeasti vaikeamman ongelman parissa. Toisaalta ei voida aloittaa ongelmasta, jonka ratkominen kestää kolme tuntia, sillä suurin osa oppilaista väsyy kesken ratkaisuprosessin.

Polya (1981) käsittelee opettamisen periaatteita kirjassaan *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* Opettajan tulee myydä oppilaille kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Oppilaille tulee myös tarjota edes silloin tällöin ongelmia, jotka vaativat enemmän kuin juuri opetellun säännön käyttämistä. Haastavat ongelmat antavat esimakua tieteellisestä työstä. Polya ohjeistaa, että oppilaita voi innostaa ratkaistavan ongelman pariin esimerkiksi antamalla heidän osallistua ratkottavan ongelman muotoiluun. Ongelmanratkaisuun aktiivista osallistumista voi lisätä myös antamalla oppilaiden arvata tuloksen tai sen osan ennen ratkaisun muotoilemista.

Tutkielmassani on esitetty melko laajoja ongelmia, joiden ratkaisemiseen tarvitaan useita välivaiheita. Ihan ensimmäiseksi ratkaistavaksi ongelmaksi ne voivat olla liian vaikeita. Ratkaiseminen on haastavaa etenkin, jos oppilas ei ole motivoitunut ratkaisemaan ongelmaa. Ja vaikka oppilas olisi kiinnostunut ratkaisemaan ongelman, punainen lanka saattaa katketa kesken monimutkaisen ajatteluprosessin. Toisaalta ongelmanratkaisun tavoitteena on kehittää oppilaan sinnikkyyttä ja kykyä tarkastella asioita monelta kantilta, joten ongelmat eivät saisi olla liian helppojakaan. Tuon seuraavaksi esille tapoja, joiden kautta voisi lähestyä ongelmanratkaisun oppimista.

Ongelmanratkaisun taitojen oppiminen on matematiikan lisäksi osa suomen kielen ja kirjallisuuden, biologian, maantiedon, fysiikan, kemian, käsitöiden ja kotitalouden opetussuunnitelmaa vuosiluokilla 7–9 (Opetushallitus, 2016). Peruskoulun opetussuunnitelmassa (Opetushallitus, 2016) mainittu monialainen oppimiskokonaisuus voisi olla esimerkiksi ongelmanratkaisuun pohjautuva teemapäivä. Tällöin ongelmanratkaisusta voitaisiin antaa monipuolinen näkemys. Matematiikka-pajoja voisi olla kaksi: toisessa olisi pistetyöskentelynä

Taulukko 9: Taulukkoon on ryhmitelty suomen kielen sanoja kolmeen erilaiseen ryhmään A, B ja C. Keksitkö säännön, jonka mukaan sanat on lajiteltu?

A	B	C
aamupala	lounas	illallinen
parveke	eteinen	vessa
käärme	koira	kissa
pipo	huivi	lippalakki
sänky	pöytä	lattia
raha	luotto	luotto

useita pieniä ongelmia, joiden ratkaisemiseen olisi rajallinen aika ja toisessa olisi muutama monimutkainen ongelma, joista voisi valita yhden ratkottavakseen. Ratkominen tapahtuisi 2–4 oppilaan ryhmissä. Pistetyöskentelyn aikana tutustuttaisiin useisiin pieniin ongelmiin ja kartutettaisiin oppilaiden näkemystä erilaisista ongelmista. Ongelmat voisivat olla eritasoisia, jotta jokainen saisi ratkottua vähintään yhden ongelman. Monimutkaisempi ongelma voisi edetä välivaiheittain, jotta olisi mahdollista ratkaista myös jokin osa ongelmasta.

Olen kehittänyt suomen kielen opetukseen ongelman, joka voisi olla osa ongelmanratkaisupäivää tai tavallista oppituntia. Tehtävän innoittajana on toiminut Ira Ewenin esittämä ongelma "Moon is, Sun isn't" Alfred Posamentierin ja Wolfgang Schulzin toimittamassa teoksessa *The art of problem solving* (1996).

Opettaja esittää rivi kerrallaan taulukon 9, jossa on kolmeen ryhmään jaettuja sanoja. Oppilaiden tulee keksiä, minkä säännön mukaan sanat kuuluvat kuhunkin ryhmään. Kun oppilas uskoo löytäneensä ratkaisun kysymykseen, hänen tulee itse keksiä kuhunkin ryhmään kuuluvia sanoja.

Tämä on ongelma, jossa täytyy löytää sääntö. Ensimmäisen rivin perusteella sääntö voisi liittyä esimerkiksi vokaalien ja konsonanttien suhteeseen sanassa: A-ryhmässä on enemmän vokaaleja kuin konsonantteja, B-ryhmässä yhtä paljon kumpiakin ja C-ryhmässä enemmän konsonantteja kuin vokaaleja. Tämä sääntö ei sovi aineistoon, mikä huomataan jo toisella rivillä. Tämän tyyppisissä tehtävissä ratkaisusuunnitelma on usein saadun idean testaamista, jonka jälkeen keksitty sääntö huomataan joko aineistoon sopivaksi tai ei. Jälkimmäisessä tilanteessa täytyy keksiä uusi sääntö.

Vastaus ongelmaan on: B-ryhmän sanoissa esiintyy kussakin sanassa tavu, jossa on kaksi erilaista vokaalia peräkkäin. Tätä kutsutaan diftongiksi. C-ryhmän sanoissa esiintyy taas geminaatta eli kaksoiskonsonantti, jonka välissä on tavuraja. A-ryhmän sanoissa ei esiinny kumpaakaan. C-ryhmän sana lattia ei sisällä diftongia, sillä tavutus on lat-ti-a, eivätkä i- ja a-kirjaimet ole siis samassa tavussa. Ongelman ei siis tarvitse näyttää matemaattiselta vaatiakseen säännönmukaisuuksien löytämistä.

Opintojeni aikana tutustuin pelisuunnitteluun, mikä avasi silmäni sille, että pelit sisältävät paljon ongelmanratkaisua. Pelit kuitenkin opettavat pelaajaansa hyvin, jolloin tilannetta ei aina koeta ongelmaksi vaan sen sijaan tunnetaan jännitystä ja selvittämisen riemua. Peli on kiinnostava ja turvallinen ympäristö käsitellä ongelmanratkaisun perusteita.

Digitaalinen peli on pelaajalle leikkikenttä, jonka säännöt eivät välttämättä ole tiedossa. Pelaaja tutustuu sääntöihin pelin antaman palautteen perusteella. Vastaantulevaan hahmoon törmäämisessä menettää elämän, mutta päällehyppäyksessä hahmo litistyy pois ja pistetili karttuu. Kysymysmerkillä koristeltuun palikkaan hyppäämällä saa rahaa tai muita pelissä auttavia esineitä. Esineiden avulla pelihahmo voi kasvaa tai saada erilaisen asun. Tämän jälkeen pelaajan täytyy oppia käyttämään uutta ominaisuuttaan, esimerkiksi kykyä viskoa tulipalloja. Isompi koko auttaa myös kestämään enemmän törmäyksiä vihollisten kanssa.

Kaiken tämän pelaaja oppii kokeilemalla. Aiempi pelikokemus erityisesti saman lajityypin peleistä voi antaa pelaajalle tietoa siitä, mitkä ratkaisut voisivat toimia hänen kohtaamassaan tilanteessa. Esimerkiksi useissa peleissä päävastuksen voittamiseen tarvitsee kolme osumaa, mutta se, mikä lasketaan osumaksi, vaihtelee.

Edellä kuvattu peli Super Mario Bros. (Nintendo, 1985) ei ole varsinaisesti ongelmanratkaisupeli. Siinä tavoitteena on selvitä kaikista esteistä, joita matkan varrella on, ja pelata peli läpi taso kerrallaan. Pelin ensimmäinen taso on suunniteltu siten, että haasteet kasvavat tason edetessä. Yhden kohdan selvittämällä oppii taitoja, jotka auttavat seuraavan läpäisemiseen. Muistan edelleen, kuinka sitkeästi pelasin lapsena tätä peliä ja kuinka iloinen olin, kun ensimmäistä kertaa en tippunut ensimmäiseen pelissä olevaan korotettuun rotkoon.

Esimerkiksi tällaisen pelikokemuksen analysoiminen voi auttaa oppilasta lähestymään ongelmanratkaisua. Pelatessa pohdinta tapahtuu hyvin nopeasti. Pelaaja testaa erilaisia asioita ja oppii toimivia ratkaisuja. Kun pelissä esiintyvät ongelmat tehdään tietoisiksi, oppilas saa konkreettisen tarttumapinnan ongelmanratkaisuun. Sitä kautta voi kehittää oppilaan ymmärrystä ongelmanratkaisun prosessista ja sen eroista ja yhtäläisyyksistä peliin.

Mitä nämä erot ja yhtäläisyydet sitten ovat? Pelien maailmassa epäonnistumisen jälkeinen uudelleen yrittäminen on lähes aina sisäänrakennettu ominaisuus. Harva pelaaja lopettaa pelin heti ensimmäiseen epäonnistumiseen. Osoitus siitä, että kokeiltu tie oli väärä, sulkee pois vaihtoehdon ja auttaa löytämään oikean suunnan. Jopa pelihahmon kuolemasta yleensä opitaan jotain, mikä auttaa eteenpäin. Ja tämän jälkeen päästään hyödyntämään oppimisprosessiin varattuja lisäelämiä.

Samanlainen suhtautuminen kuuluu myös ongelmanratkaisuun. Yritys, joka ei tuota tulosta, osoittaa, että kannattaa yrittää jotain muuta. Matemaattisen tehtävän parissa epäonnistuminen koetaan usein vakavammin kuin pelissä kuoleminen, sillä pelaaja ei koe tarvetta läpäistä peliä ilman virheitä. Hän osaa odottaa haasteita. Virhe ei myöskään osoita, ettei pelaaja voisi päästä tasoa läpi. Lukion opetussuunnitelman perusteissa todetaan, että erehdys on luovaan prosessiin kuuluva kokemus (Opetushallitus, 2015). Opiskelijan tulee käsittää, että mikään ratkaisuyritys ei ole arvoton eikä osoita ratkaisijan olevan huono. Sekin, että pääsee ensimmäisen rotkon yli, on arvokasta, vaikka sen jälkeen törmäisi viholliseen.

Pelit antavat pelaajalle rajatun ympäristön, jossa tehdä rajallisia valintoja. Siitä syystä peleissä ongelman ratkominen voi olla helpompaa kuin paperilla. Peli tarjoaa ratkaisusuunnitelmia ja kaikki eri vaihtoehdot on mahdollista käydä läpi. On myös helppo kokeilla erilaisia vaihtoehtoja, sillä peli antaa usein välittömän palautteen, ja pelaaja tietää tehneensä oikein. Matemaattisessa ongelmanratkaisussa vastuu ratkaisun ymmärtämisestä on oppilaalla itsellään. Myös alkuun pääseminen voi olla hankalaa, koska erilaisia mahdollisia lähestymistapoja on monia. Tästä syystä on hyvä käyttää aikaa ratkaisusuunnitelman (Polya, 1973) kehittämiseen.

Muissa kuin ongelmanratkaisupeleissä ongelmat kohdataan usein niin pieninä, ettei niitä mielletä ongelmiksi. Pelaaja oppii vähän kerrallaan ja osaa hyödyntää oppimaansa jatkossa. Matemaattisessa ongelmanratkaisussa ongelmaksi voi muodostua myös se, ettei muista mitään keinoa, mikä auttaisi tehtävässä eteenpäin. Opettajan voi olla vaikeaa tietää, mitä ongelman ratkaisemisessa tarvittavia taitoja oppilas on unohtanut.

Kuten kokemus samantyyppisestä pelistä antaa ideoita uuden pelin pelaamiseen, kokemus ongelmanratkaisussa antaa työkaluja uusien ongelmien ratkaisuun. Nimenomaan vastaavan ongelman aiempi ratkaiseminen voi auttaa ongelman ratkaisussa eteenpäin, mikä on tärkeää myös Polyan esittämässä ratkaisumallissa (Polya, 1973). Myös muiden ongelmien ratkaiseminen voi antaa itseluottamusta ja minäpystyvyyden tunteen oppilaalle, mikä on erittäin tärkeää uusiin ongelmiin tarttumisessa.

Toiselle rotkon ylitys on haaste, toiselle ei. Samoin matematiikassa oppilaat kokevat eri kohdat vaikeiksi ja heitä tulee tukea eri vaiheissa ratkaisua. Vaikka ensimmäisen tason läpäiseminen ei olisi haastavaa, se voi olla palkitsevaa. Samalla tavalla oppilaan tulisi iloita myös ongelmanratkaisussa etenemisestä, kun hän kokee oppineensa tehtävästä jotain uutta tai keksineensä jotain, mikä vie tehtävää eteenpäin.

Sen lisäksi, että peleistä voi oppia ongelmanratkaisun prosesseista, ongelmien ratkaisuun voi ottaa hieman pelillistä otetta. Ongelmaa voi lähestyä uteliaasti ja etsiä erilaisia asioita, joita tehtävänannon perusteella voi päätellä sen sijaan, että etsisi vain ”sitä oikeaa ratkaisua”. Ongelmien ratkaisemisessa saa olla luova.

Viime päivinä olen lumoutunut ongelmanratkaisusta *The Witness* -pelin parissa (Thekla, 2016). Pelissä tutkitaan saarta ja ratkotaan loogista päättelyä vaativia ongelmia. Peli on upea esimerkki siitä, kuinka ratkomisessa tarvittavat säännöt voi opettaa ongelmien kautta antamalla pelaajalle palautetta siitä, mikä osa ratkaisusta menee oikein ja mikä ei. Peli sisältää monia eri sääntöjä, joita tulee myös yhdistellä ja soveltaa ratkaistakseen ongelmat. Kunkin säännön ensimmäinen tehtävä on aina lähes triviaali, mutta ongelmat muuttuvat nopeasti melko haastaviksi.

The Witness antaa hienon ympäristön harjoitella sääntöjen sanallistamista. Pelissä huomataan, että pelkkä ratkaisu ei ole tärkeä vaan se, mitä siitä opitaan. Koen yhteistyön voiman olevan erittäin suuri tässä pelissä. Kun pelaajat keskustelevat ratkaisuista, he huomaavat, miten eri tavoin säännön voi tulkita. Usein ratkominen saattaakin tyssätä siitä syystä, että muutaman tehtävän pohjalta sääntö on ymmärretty puutteellisesti. Edistyneemmän ongelman ratkaisemisen voi toisinaan todistaa olevan mahdotonta omaksumansa säännön avulla. Tällöin aiempien tehtävien pariin palaaminen ja niistä keskusteleminen voi edesauttaa säännön tarkentumista. Pelissä toistuu siis Polyan (1973) ongelmanratkaisumallin ratkaisun tarkastelu -kohta erittäin merkityksellisessä roolissa.

The Witness -pelin voisi tuoda kouluopetukseen mukaan esimerkiksi seuraavasti: Oppilaat saisivat varata tietyn määrän pelivuoroja viikossa välitunneille, pelaajia kerrallaan voisi olla 2–5. Pelaajat kirjoittaisivat oppimiaan sääntöjä ylös muita pelaajia varten, jotta pelaajien vaihtuessa menetettäisiin mahdollisimman vähän tietoa. Pelin lomassa oppilaat harjoittelisivat huomaamattaan matemaattisen päättelyn lisäksi sosiaalisia taitoja. Uskon, että peli herättäisi keskustelua oppilaiden välille siitä, kuinka peli etenee ja millaisia ratkaisuja ongelmiin kannattaisi kokeilla.

Erilaisten asioiden etsimiseen ja hyödyntämiseen voi paneutua myös ei-matemaattisissa point and click -ongelmanratkaisupeleissä. Itse olen viettänyt useita tunteja pelaten tällaisten pelien tarinaa eteenpäin ja pähkäillen erilaisia vaihtoehtoja, jotka voisivat toimia kohtaamissani tilanteissa. Uusimpana suosikkinani tämän genren peleistä on mobiilipeli *Love you to bits* (Alike Studio, 2016).

Opettajana tulee antaa oppilaille riittävä tuki ongelmanratkaisuun. Yksi tapa tukea on osata ratkaisu perin pohjin, jotta voi opastaa oppilasta jokaisessa ongelmatilanteessa. Toinen tapa on samaistua oppilaan tilanteeseen, hänen kokemiin tunteisiin ja epävarmuuteen, mikä on myös Polyan (1973) mukaan hyvä keino lähestyä oppilaan hienovaraista ohjaamista kohti ratkaisua. Mikäli rohkeutta riittää, voi valita käsiteltäväksi ongelman, jota ei ole itse ennen nähnyt. Tällöin jokainen ehdotettu ratkaisu tulee perusteltua tarkasti, koska opettajan vakuuttamiseksi ratkaisun oikeellisuudesta joutuu näkemään enemmän vaivaa. Oppilaille voi olla erittäin opettava kokemus nähdä elävä esimerkki ongelman pohtimisesta. Toki etukäteen tulee varmistua siitä, että oppilaiden on mahdollista ratkaista tehtävä.

Mikäli kaipaa vähemmän jännitystä, voi tyytyä kohtaamaan epävarmuuden tunteita koulun ulkopuolella. Oppilaat käsittelevät joka päivä koulussa asioita, joista eivät ole ennen kuulleetkaan. Mielestäni opettajalle voi olla sekä ammatillisesti että henkilökohtaisesti eduksi tehdä uusia asioita, jotka ovat oman mukavuusalueen ulkopuolella. Esimerkiksi johonkin uuteen peliin tutustuminen voi olla tällainen kokemus. Onnistumisen onni ja epäonnistumisen pettymys ja turhautuminen ovat tunteita, joita jokainen käsittelee eri tavoin. Epäonnistumisen pelko ei saa estää oppilasta yrittämästä. Samalla tavalla opettajien tulisi edes silloin tällöin kokeilla jotain uutta.

On hyödyllistä välillä olla tilanteessa, jossa kaikki on uutta eikä yksikään käsite ole tuttu. Tai löytää itsensä pakohuoneesta ystäviensä, tikittävän kellon sekä epämääräisten vihjeiden kanssa. Tai kokea se tunne, kun on varma, että kaikki mahdollinen on yritetty ja täytyisi olla vaan paljon parempi pelaamaan päästäkseen eteenpäin. Ja yhden painikkeen vahinkopainallus tuottaa ratkaisun ongelmaan ja antaa oppimiskokemuksen, josta on hyötyä myös jatkossa. Sekä se yhtäaikainen hämmennys ja riemu, kun kolmatta kertaa palaa saman ongelman pariin ja keksii ratkaisun.

Mitä itse olen ongelmien ratkaisemisesta oppinut? Ainakin sen, ettei ongelmaa tule aliarvioida. Ongelmalle kannattaa antaa aikaa. Nopeasti keksitty ratkaisu pitää malttaa perustella. Täytyy varmistua, että päättely on oikein.

Tärkeintä ei ole saada vastaus, joka täsmää kirjan takana olevaan tai saada ratkaisuun hyväksyntä opettajalta. Tärkeämpää on ymmärtää, mitä tekee ja pystyä itsenäisesti varmistumaan antamansa vastauksen oikeellisuudesta tai mahdottomuudesta, perustelemaan toimintaansa tai löytämään omat virheensä. Tärkeämpää kuin kirjoittaa tietty luku paperiin on kokea, että itse ymmärtää, miksi tarvittiin tietyt välivaiheet. Tulee pystyä perustelemaan ajatteluketjunsa ja luopumaan ideasta, joka vie umpikujaan.

Ratkaisuja voi olla useita oikeita. Ja vaikka ongelma ei ratkeaisi, siitä voi silti oppia. Mutta mikä tärkeintä: muista nauttia ongelmasta jonkin aikaa.

Lähteet

Alike Studio (2016). *Love You To Bits*, iOS.

Barbeau, Edward J.; Klamkin, Murray S. & Moser, William O. J. (1995). *Five Hundred Mathematical Challenges*. The Mathematical Association of America: USA.

Ewen, Ira (1996). Strategies for Problem Exploration. Teoksessa Alfred S. Posamentier & Wolfgang Schulz (toim.) *The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher*. Corwin Press: Thousand Oaks, Kalifornia.

Gardner, Martin (1969). *New Mathematical Diversions*. George Allen & Unwin: Lontoo.

Huffman, David A. (1952). A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proceedings of the IRE*, **40(9)**, 1098–1101.

Jäppinen, Paavo; Kupiainen, Alpo; Räsänen, Matti (2003). *Calculus 4*. Otava: Helsinki.

Leppäaho, Henry (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa: ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Jyväskylän yliopisto.

Lewis, Harold W. (1999). *Miksi heittää lanttia? Päättämisen taito ja tiede.* Suom. Johanna Birkstedt. Terra Cognita: Helsinki.

Mosteller, Frederick (1987). *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*. Dover Publications: New York. Uusintapainos vuodelta 1965, the Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

Nintendo (1985). *Super Mario Bros.*, Nintendo Entertainment System.

Opetushallitus (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Next Print Oy: Helsinki.

Opetushallitus (2016). *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2014*. 4. painos. Next Print Oy: Helsinki.

Polya, George. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press: Princeton, New Jersey.

Polya, George. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. John Wiley & Sons: New York.

R Core Team (2017). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. `http://www.R-project.org/`.

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. Teoksessa Douglas A. Grouws (toim.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* 334–370, Macmillan: New York.

Thekla (2016). *The Witness*, PlayStation 4.