Fourier'n sarjan suppeneminen

Leevi Annala

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
2017

Tiivistelmä: Leevi Annala, Fourier'n sarjan suppeneminen, matematiikan pro gradu -tutkielma, 71s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesäkuu 2017.

Funktion f Fourier'n sarja on ääretön funktiosarja, jossa summataan funktiosta f ja summausindeksistä n riippuvia Fourier'n kertoimia funktiolla e^{inx} kerrottuna. Fourier'n sarjoja käytetään esimerkiksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Tässä tutkielmassa käsitellään Fourier'n sarjan suppenemista. Kun Fourier'n sarja keksittiin, pitkään luultiin, että jatkuvan funktion Fourier'n sarja suppenee aina. Tässä työssä osoitetaan, että näin ei ole.

Ensin työssä osoitetaan, että jatkuvan funktion Fourier'n sarja "melkein suppenee," eli on Abel- ja Cesàro-summautuva. Abel-summautuvuudessa sarjan summattavat kerrotaan luvulla r^n, missä luku r on itseisarvoltaan pienempi kuin 1 ja n kertoo monesko summattava on kyseessä, ja tutkitaan suppeneeko näin saatu sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Cesàro-summautuvuudessa puolestaan lasketaan osasummien keskiarvoja, ja tutkitaan suppeneeko osasummien keskiarvojen jono.

Lisäksi todistetaan, että kun funktio on rajoitetusti heilahteleva, niin sen Fourier'n sarja suppenee niissä pisteissä, missä funktio on jatkuva. Tämä tarkoittaa samalla sitä, että kun funktio on paloittain C^1-funktio, Lipschitz-jatkuva tai absoluuttisesti jatkuva, niin funktion Fourier'n sarja suppenee.

Viimeisenä työssä esitellään jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja hajaantuu. Funktion konstruoinnissa käytetään menetelmää, jossa kansanomaisesti sanottuna pienet ongelmat kasaantuvat ja tuottavat massiivisia ongelmia.

Sisältö

1 Johdanto

Fourier'n sarja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}, \text{ missä } \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x,$$

kuten moni muukin matemaattinen idea, on alunperin fysiikan tarpeisiin syntynyt. Ranskalainen matemaatikko ja fyysikko Jean-Babtiste Joseph Fourier tutki 1800-luvun alussa lämmön johtumista kiinteissä materiaaleissa ja esitteli tutkimuksensa ohessa äärettömän sarjan, joka nykyisin tunnetaan Fourier'n sarjana. Saksalainen Peter Dirichlet puolestaan formalisoi asian tarkemmin ja osoitti muun muassa, että aina kun funktio on "piirrettävissä," eli paloittain sileä, niin sen Fourier'n sarja suppenee. Aluksi kaikille oli täysin selvää, että kaikkien jatkuvien funktioiden Fourier'n sarjat suppenevat. Tämän todistaminen osoittautui kuitenkin odotettua hankalammaksi, ja epäilykset heräsivät. Vuonna 1876 Paul du Bois-Reymond esittelikin jatkuvan funktion, jonka Fourier'n sarja ei suppene. Jäljelle jäi kysymys, millä ehdolla Fourier'n sarja sitten suppenee. Tässä työssä tutustutaan tarkemmin tähän 1900-luvun alussa ratkaistuun kysymykseen.

Fourier'n sarjan suppenemista voidaan tarkastella ainakin kahdesta eri näkökulmasta. Voidaan määritellä erilaisia suppenemistapoja, jotka ovat erilaisia kuin perinteinen pisteittäinen tai tasainen suppeneminen, ja käyttää niitä Fourier'n sarjan tutkimiseen. Esimerkiksi voidaan sanoa, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ on Abel-summautuva jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k$ suppenee. Nyt voitaisiin tutkia, onko funktion f Fourier'n sarja esimerkiksi Abel-summautuva. Toinen näkökulma on tutkia, mitä ominaisuuksia funktiolla pitää olla, että funktion Fourier'n sarja suppenee perinteisessä mielessä.

Kun tutkitaan funktion f Fourier'n sarjaa ensimmäisellä tavalla, huomataan, että kun funktio f on jatkuva, niin sen Fourier'n sarja on Abel-summautuva ja Cesàro-summautuva. Toisella tavalla tutkittuva huomataan, että jos funktio f on rajoitetusti heilahteleva, niin sen Fourier'n sarja suppenee kaikissa niissä pisteissä, missä funktio f on jatkuva. Silloin myös absoluuttisesti jatkuvan funktion, C^1-funktion ja Lipschitz-jatkuvan funktion Fourier'n sarja suppenee.

Fourier'n sarjalla on monia mielenkiintoisia sovelluksia, joihin tässä työssä ei syvällisesti tutustuta. Esimerkiksi perunakellarin ihanteellisen syvyyden määrittämiseen voi käyttää Fourier'n sarjaa [2]. Aikaisemmin mainittu Fourier'n tutkima lämmön johtuminen on luonteeltaan osittaisdifferentiaaliyhtälöongelma, ja Fourier'n sarjaa voi käyttää muihinkin osittaisdifferentiaaliyhtälöongelmiin, kuten vaikkapa kitaran kielen värähtelyn ymmärtämiseen.

Tässä työssä on käytetty päälähteenä Rajendra Bhatian kirjaa *Fourier Series* [1]. Määritelmien, tekstikappaleiden ja lauseiden lähteenä on tämä päälähde ellei toisin mainita. Jos lauseen muotoilussa ja todistuksessa ei kummassakaan ole lähdeviitettä, niin todistus on kirjoittajan omaa tuotosta. Lisää hyvää luettavaa aiheesta löytyy muun muassa Dymin ja McKeanin kirjasta *Fourier Series and Integrals* [2] ja Mikko Salon luentomonisteesta *Fourier analysis and distribution theory* [7].

2 Integrointiytimiä ja muita tarpeellisia esitietoja

Tässä kappaleessa esitellään tarpeellisia esitietoja, jotka eivät ainakaan kirjoittajan mielestä ole triviaaleja. Kappale koostuu kolmesta osasta. Ensimmäisessä osassa on sekalaisia esitietoja, toisessa käsitellään integrointiytimiä, ja kolmannessa funktioiden ominaisuuksia.

2.1 Sekalaisia työkaluja

Weierstrassin M-testi on eräs funktiosarjan suppenemistesti.

Lause 2.1 (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon f_n reaali- tai kompleksiarvoinen funktiojono $f_n : A \to \mathbb{C}$. Jos on olemassa sellainen lukujono M_n, jolle pätee*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \textit{kaikilla } x \in A \textit{ ja } n \in \mathbb{Z} \textit{ ja}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty, \textit{ niin funktiosarja}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) \textit{ suppenee tasaisesti joukossa } A.$$

Todistus. [8] Tarkastellaan funktiosarjan osasummia

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k(x).$$

Tiedetään, että $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ suppenee ja $M_n \geq 0$ kaikilla n. Tällöin Cauchyn kriteerin[1] mukaan kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n ja m joille $n > m > N$ pätee

$$\sum_{k=-n}^{-(m+1)} M_n + \sum_{k=(m+1)}^{n} M_n < \epsilon.$$

Nyt osasummille $S_n(x)$ ja $S_m(x)$ pätee

$$\begin{aligned}
|S_n(x) - S_m(x)| &= |\sum_{k=-n}^{-(m+1)} f_n + \sum_{k=(m+1)}^{n} f_n| \leq |\sum_{k=-n}^{-(m+1)} f_n| + |\sum_{k=(m+1)}^{n} f_n| \\
&\leq \sum_{k=-n}^{-(m+1)} |f_n| + \sum_{k=(m+1)}^{n} |f_n| \leq \sum_{k=-n}^{-(m+1)} M_n + \sum_{k=(m+1)}^{n} M_n \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in A$. Tämä tarkoittaa sitä, että $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti. □

Konvoluutiota käytetään tässä työssä Fourier'n sarjan laskemisen helpottamiseksi. Konvoluution ja integrointiytimien avulla voidaan ääretön sarja muuttaa suhteellisen yksinkertaiseksi integraaliksi.

Määritelmä 2.2 (Konvoluutio)**.** Kahden 2π-jaksollisen integroituvan funktion f ja g konvoluutio $(f * g)(x)$ määritellään seuraavasti:

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Konvoluutio on määritelty niissä pisteissä x, joissa $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)g(t)|\mathrm{d}t < \infty$.

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ suppenee jos, ja vain jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e. $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ pätee kaikille $n > N$ ja $p \geq 1$.

Lemma 2.3 ([2])**.** *Jos f ja g ovat integroituvia 2π-jaksollisia funktioita, niin $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.*

Todistus. 2π-jaksollisten funktioiden f ja g konvoluutioille pätee

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

□

Diracin jono on melko keskeinen tässä työssä. Diracin jonon ja jatkuvan funktion f konvoluutio suppenee tasaisesti funktioon f, kun $n \to \infty$. Kun tutkitaan integrointiytimiä, huomataan, että osa niistä on Diracin jonoja. Tällöin Fourier'n sarjan suppenemiseksi riittää, että Fourier'n sarjan voi sanoa funktion f ja jonkin Diracin jonon konvoluutiona. Valitettavasti tämä osoittautuu mahdottomaksi, mutta onneksi tästä tulee olemaan jotain muuta hyötyä.

Määritelmä 2.4. Funktiojonoa $Q_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ sanotaan Diracin jonoksi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa: kaikilla $n \in \mathbb{N}$:

(i) $Q_n(t) \geq 0$

(ii) $Q_n(-t) = Q_n(t)$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\mathrm{d}t = 1$

ja

(iv) Jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$ on olemassa sellainen N, jolle

$$\int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)\mathrm{d}t < \epsilon \quad \text{kaikilla } n > N.$$

Funktiojoukkoa $Q_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, 0 \leq r \leq 1$ sanotaan Diracin perheeksi, jos vastaavat ehdot ovat voimassa.

[2] Aputuloksen ja lemman ero on tässä työssä hiuksenhieno. Lemma on yleismaailmallisempi tulos kuin aputulos, jota käytetään oikeastaan vain seuraavan lemman tai lauseen todistamiseen.

Lause 2.5. *Jos funktio f on jatkuva ja 2π-jaksollinen ja Q_n on Diracin jono, niin $Q_n * f$ suppenee tasaisesti funktioon f, kun $n \to \infty$.*

Todistus. [1] Olkoon $h_n = Q_n * f$, jolloin pätee

$$\begin{aligned}
h_n(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t - f(x) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$ mikä tahansa. Funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[-\pi,\pi]$, joten on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ kaikilla } t \in [-\delta,\delta].$$

Olkoon $M = \sup_{-\pi \le x \le \pi} |f(x)|$. Käyttämällä Diracin jonon neljättä ominaisuutta, voidaan valita N, jolle pätee

$$\int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{4M} \quad \text{aina, kun } n \ge N.$$

Funktiolle $|h_n(x) - f(x)|$ pätee

$$\begin{aligned}
|h_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
=& \bigg| \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t + \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\delta}^{-\pi} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \bigg| \\
\le& \left| \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
&+ \left| \int_{\delta}^{-\pi} (f(x-t) - f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t \right|.
\end{aligned}$$

Tutkitaan tätä paloittain. Kun $n > N$, ensimmäiselle ja viimeiselle integraalille pätee

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x-t)-f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\delta}^{-\pi}(f(x-t)-f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\delta} 2MQ_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} 2MQ_n(t)\mathrm{d}t \\
&= 2M(\int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)\mathrm{d}t) < 2M\frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Keskimmäiselle integraalille pätee

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))Q_n(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x))|\,|Q_n(t)|\,\mathrm{d}t \\
&< \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2}Q_n(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Nyt funktiolle $|h_n(x) - f(x)|$ pätee

$$|h_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } n > N,$$

jolloin funktiojono h_n suppenee tasaisesti funktioon f. □

2.2 Integrointiytimiä

Integraalimuunnos T määritellään seuraavasti:

$$(Tf)(x) = \int_{t_1}^{t_2} K_x(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Tässä f on muunnettava funktio, ja funktiota $K_x(t)$ sanotaan integraalimuunnoksen ytimeksi tai integrointiytimeksi. Tätä voidaan myös merkitä $K(x,t)$ tai $K(t,x)$. Tässä työssä käytetään seuraavia integrointiytimiä:

1. Dirichlet'n ydin $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, missä $n \in \mathbb{N}$,

2. Fejérin ydin: $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$, missä $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

3. Poissonin ydin: $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|k|} e^{ikx}$, missä $0 \leq r < 1$.

Lause 2.6 (Dirichlet'n ytimen ominaisuuksia)**.** *Dirichlet'n ytimellä on seuraavia ominaisuuksia:*

(i) $D_n(-t) = D_n(t)$,

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1$,

(iii) $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}$.

Todistus. (i) Ensimmäinen kohta seuraa siitä, että Dirichlet'n ydin on summa kokonaisluvusta $-n$ kokonaislukuun n:

$$D_n(-t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(-t)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{i(-k)t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=n}^{-n} e^{ikt} = D_n(t).$$

(ii) Huomioidaan ensin, että Dirichlet'n ytimen integraali on ytimen summattavien integraalien summa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t.$$

Kun näitä integraaleja lasketaan, niin huomataan, että integraalilla on kaksi mahdollista arvoa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{ki} \Big/_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} = 0, \text{ kun } k \neq 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi, \text{ kun } k = 0. \end{cases}$$

Nyt Dirichlet'n ytimen integraali saadaan muotoon

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(0 + \cdots + 0 + 2\pi + 0 + \cdots + 0) = 1.$$

(iii) Dirichlet'n ydin voidaan ilmoittaa muodossa $D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)\right)$:

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\cos(kt) + i\sin(kt)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\cos(kt) + \frac{i}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\sin(kt) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right) + \frac{i}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\sin(kt) - \sin(kt)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)\right).
\end{aligned}$$

Kun tälle käytetään geometrisen sarjan summan kaavaa, niin Dirichlet'n ydin saadaan muunnettua seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} - e^{it(n+1)}}{1 - e^{it}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1 - e^{itn}}{1 - e^{it}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{tn}{2}}\left(e^{-i\frac{tn}{2}} - e^{i\frac{tn}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{tn}{2}}\left(-2i\sin(\frac{tn}{2})\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(-2i\sin\frac{t}{2}\right)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{t(n+1)}{2}}\frac{\sin\frac{tn}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\frac{tn}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t(n+1)}{2}\right) + i\sin\frac{t(n+1)}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{tn}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t(n+1)}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{tn}{2}\cos\frac{t(n+1)}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

Tämä saadaan trigonometristen funktioiden summakaavoja ja kaksinkertaisen kulman kaavoja [5] käyttämällä lopulliseen muotoonsa:

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{t}{2}+2\sin\frac{tn}{2}\cos\frac{t(n+1)}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\tfrac{t}{2}+2\sin\tfrac{tn}{2}\cos\left(\tfrac{tn}{2}+\tfrac{t}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\tfrac{t}{2}+2\sin\tfrac{tn}{2}\left(\cos\tfrac{tn}{2}\cos\tfrac{t}{2}-\sin\tfrac{tn}{2}\sin\tfrac{t}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\tfrac{t}{2}+2\sin\tfrac{tn}{2}\cos\tfrac{tn}{2}\cos\tfrac{t}{2}-2\sin\tfrac{tn}{2}\sin\tfrac{tn}{2}\sin\tfrac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\cos nt\sin\tfrac{t}{2}+2\sin\tfrac{tn}{2}\cos\tfrac{tn}{2}\cos\tfrac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\left(\cos nt\sin\tfrac{t}{2}+\sin(tn)\cos\tfrac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Dirichlet'n ytimien jono ei kuitenkaan ole Diracin jono, sillä Dirichlet'n ytimet eivät ole kaikkialla positiivisia. Esimerkiksi kun $t = 3$ pätee

$$D_1(3) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((1+\frac{1}{2})3)}{\sin(3/2)} < \frac{1}{2\pi}\frac{0}{\sin(3/2)} = 0.$$

Tämä näkyy myös esimerkiksi kuvasta 1.

Fejerin ytimien jono F_n sen sijaan on Diracin jono. Diracin jonon ensimmäisen ehdon mukaan Fejerin ytimen on oltava positiivinen. Sen todistamista varten täytyy laskea Fejerin ydin auki ja katsoa, mitä siitä tulee:

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin((2k+1)\frac{t}{2})}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n2\pi\sin(t/2)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\frac{t}{2}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(t/2)}\sum_{k=1}^{n}\sin((2k-1)\frac{t}{2}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(t/2)}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Im}(e^{i(2k-1)\frac{t}{2}}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(t/2)}\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}e^{i(2k-1)\frac{t}{2}}).
\end{aligned}
$$

Tehdään tässä vaiheessa laskemisen helpottamiseksi muuttujanvaihto $\frac{t}{2} = x$.

$$
\begin{aligned}
F_n(2x) &= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}e^{i(2k-1)x}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}e^{-ix}e^{i2kx}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(e^{-ix}\frac{e^{2ix}-e^{2ix(n+1)}}{1-e^{2ix}}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\frac{e^{ix}-e^{2ixn+ix}}{1-e^{2ix}}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\frac{e^{ix}-e^{2ix(n+\frac{1}{2})}}{1-e^{2ix}}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\frac{e^{ix(1-n)}-e^{ix(n+1)}}{1-e^{2ix}}e^{inx}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\frac{e^{ix}(e^{-ixn}-e^{ixn})}{e^{ix}(e^{-ix}-e^{ix})}e^{inx}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\mathrm{Im}(\frac{(2i\sin(nx))}{2i\sin(x)}e^{inx}) \\
&= \frac{1}{n2\pi\sin(x)}\frac{(\sin(nx))}{\sin(x)}\sin(nx) \\
&= \frac{1}{n2\pi}\frac{(\sin^2(nx))}{\sin^2(x)} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Toisen ehdon mukaan Fejerin ytimen on oltava symmetrinen. Se seuraa suoraan Dirchletin ytimen symmetrisyydestä:

$$F_n(-t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(-t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = F_n(t).$$

Kolmannen ehdon mukaan Fejerin ytimen integraali välin $[-\pi,\pi]$ yli on oltava 1. Tämä seuraa siitä, että äärellisen summan ja äärellisen integraalin järjestystä voidaan vaihtaa, kunhan integroitava funktio on integroituva:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n}n = 1.$$

Neljännen ehdon mukaan kaikilla $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$ on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$ jolle pätee

$$\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t < \epsilon$$

aina, kun $n \geq N$. Tämän todistamiseksi arvioidaan funktiota $F_n(t)$ seuraavalla tavalla:

$$F_n(t) = \frac{1}{2n\pi}\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} = \frac{1}{2n\pi}\frac{1-\cos(nt)}{1-\cos(t)} < \frac{1}{2n\pi}\frac{2}{1-\cos(\delta)},$$

kun $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$. Seuraavaksi voidaan arvioida integraalia. Kun valitaan

$$N > \frac{\pi-\delta}{\pi\epsilon\sin^2(\frac{\delta}{2})},$$

niin integraalille pätee aina, kun $n > N$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t =& 2\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t \leq 2\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{2n\pi}\frac{2}{1-\cos(\delta)}\mathrm{d}t \\
=& \int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\mathrm{d}t \\
\leq& \int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{N\pi}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\mathrm{d}t \\
=& \frac{\pi-\delta}{N\pi\sin^2(\frac{\delta}{2})}
\end{aligned}$$

$$< \frac{\pi - \delta}{\frac{\pi-\delta}{\pi\epsilon \sin^2(\frac{\delta}{2})}\pi \sin^2(\frac{\delta}{2})} = \epsilon.$$

Nyt seuraava lause on todistettu:

Lause 2.7. *Fejerin ytimien jono F_n on Diracin jono. Lisäksi Fejerin ytimelle pätee*

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(n\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2\pi n}\frac{1-\cos(nt)}{1-\cos(t)}.$$

Lause 2.8 (Poissonin ytimen ominaisuuksia)**.** *Poissonin ytimellä on seuraavia ominaisuuksia.*

(i) $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|}e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = \mathrm{Re}(\frac{1}{2\pi}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}})$,

(ii) Poissonin ydin $P_r(x)$ on Diracin perhe.

Todistus. Todistetaan ensin, että ominaisuuden (i) molemmat yhtäsuuruudet ovat tosia. Muistetaan, että $|r| < 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|}e^{inx} =& \frac{1}{2\pi}(\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{inx} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx}) \\
=& \frac{1}{2\pi}(\sum_{n=1}^{\infty}(re^{-ix})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(re^{ix})^n) \\
=& \frac{1}{2\pi}(\frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} + \frac{1}{1-re^{ix}}) \\
=& \frac{1}{2\pi}(\frac{(re^{-ix})(1-re^{ix})}{(1-re^{-ix})(1-re^{ix})} + \frac{1-re^{-ix}}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})}) \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{(re^{-ix})(1-re^{ix}) + 1 - re^{-ix}}{(1-re^{-ix})(1-re^{ix})} \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{re^{-ix} - r^2 + 1 - re^{-ix}}{(1 - re^{ix} - re^{-ix} + r^2} \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2 - r(\cos x + i\sin x) - r(\cos(-x) + i\sin(-x))} \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2 - r\cos x - ir\sin x - r\cos x + ir\sin x} \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x},
\end{aligned}$$

jolloin ensimmäinen yhtäsuuruus on tosi. Toisaalta pätee

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1+r(\cos x + i\sin x)}{1-r(\cos x + i\sin x)}\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{(1+r\cos x)+ir\sin x}{(1-r\cos x)-ir\sin x}\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{((1+r\cos x)+ir\sin x)((1-r\cos x)+ir\sin x)}{((1-r\cos x)-ir\sin x)((1-r\cos x)+ir\sin x)}\\
=&\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2(\cos^2 x+\sin^2 x)+2ir\sin x}{1+r^2(\cos^2 x+\sin^2 x)-2r\cos x}\\
=&\frac{1}{2\pi}(\frac{1-r^2}{1+r^2(\cos^2 x+\sin^2 x)-2r\cos x}+\frac{2ir\sin x}{1+r^2(\cos^2 x+\sin^2 x)-2r\cos x}),
\end{aligned}
$$

jolloin on

$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2\pi}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},$$

ja toinen yhtäsuuruus on tosi. Seuraavaksi todistetaan, että kaikki Diracin perheen ehdot toteutuvat.

(i) Ensimmäisen ehdon mukaan Poissonin ytimen on oltava positiivinen: Yhtälöstä

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$

huomataan, että $1-r^2 > 0$ ja $1-2r\cos x + r^2 \geq 1-2r+r^2 = (1-r)^2 > 0$, jolloin niiden osamääränkin on oltava positiivinen, eli on $P_r(x) \geq 0$.

(ii) Toisen ehdon mukaan sen on oltava symmetrinen nollan suhteen:

$$P_r(-x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(-x)+r^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} = P_r(x).$$

(iii) Kolmannen ehdon mukaan sen integraali yli välin $[-\pi,\pi]$ on oltava 1: Kiinteälle $r < 1$ geometrinen sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|r|^{|n|}$ suppenee, ja tiedetään, että

$$|P_r(x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|r|^{|n|}|e^{inx}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|r|^{|n|}.$$

Nyt lauseen 2.1 mukaan nähdään, että tarkasteltava funktiosarja suppenee tasaisesti. Tasaisen suppenemisen perusteella integroinnin ja summaamisen järjestyksen voi vaihtaa seuraavassa yhtälössä.

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{inx}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mathrm{d}x.$$

Lisäksi pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, \text{ kun } n \neq 0, \\ 2\pi, \text{ kun } n = 0, \end{cases}$$

jolloin on

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

(iv) Neljäs ehto kertoo, että nollan välittömän läheisyyden ulkopuolella oleva ytimen integraalin osa saadaan mielivaltaisen pieneksi: Pitää todistaa, että jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$ on olemassa sellainen r_0, jolle

$$\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x < \epsilon \quad \text{kaikilla } r > r_0.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$. Nyt on

$$\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(x)\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\delta}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x.$$

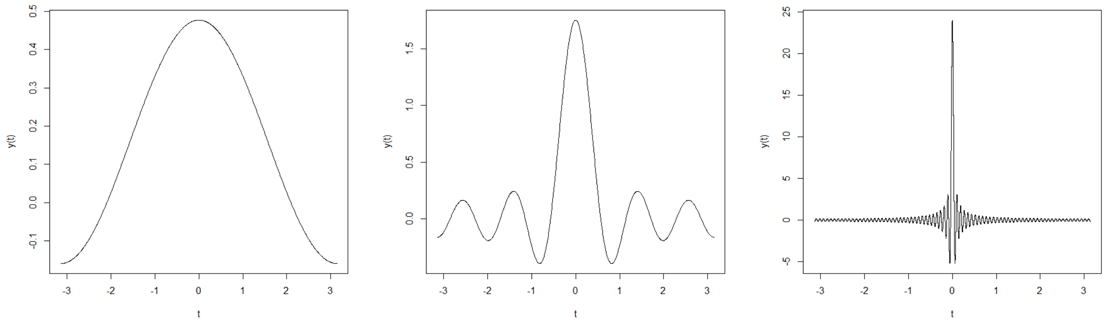
Lisäksi tiedetään, että

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \quad \text{kaikilla } \delta \leq x \leq \pi,$$

ja $\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-1^2}{1-2\cos\delta + 1^2} = 0.$

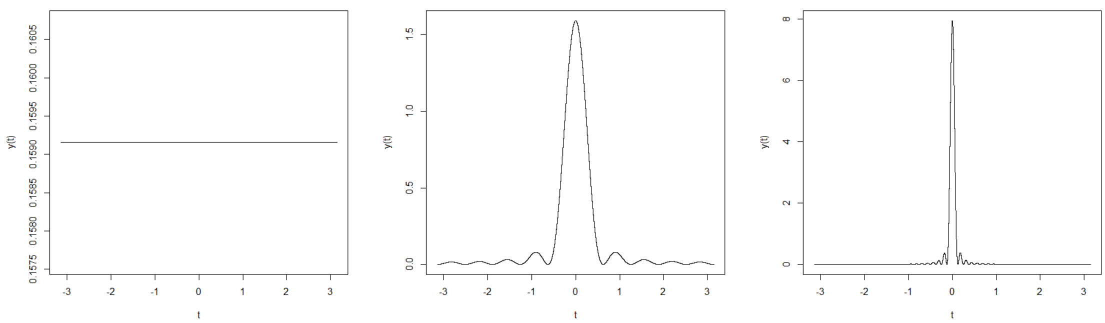
Nyt siis on olemassa sellainen $r_0 < 1$, jolle $|P_r(\delta)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$ kaikilla $r_0 \leq r < 1$. Siispä

$$2\int_{\delta}^{\pi} P_r(x)\mathrm{d}x \leq 2\int_{\delta}^{\pi} P_r(\delta)\mathrm{d}x < 2\int_{\delta}^{\pi} \frac{\epsilon}{2\pi}\mathrm{d}x = \frac{\pi-\delta}{\pi}\epsilon < \epsilon, \text{kun } r \geq r_0. \quad \square$$



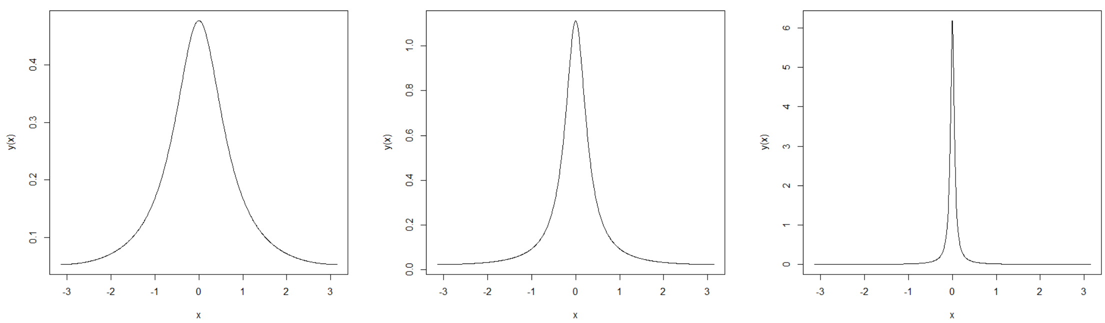
(a) Dirichlet'n ydin n:n arvolla 1. **(b)** Dirichlet'n ydin n:n arvolla 5. **(c)** Dirichlet'n ydin n:n arvolla 75.

Kuva 1. Dirichlet'n ytimiä eri n:n arvoilla.



(a) Fejerin ydin n:n arvolla 1. **(b)** Fejerin ydin n:n arvolla 10. **(c)** Fejerin ydin n:n arvolla 50.

Kuva 2. Fejerin ytimiä eri n:n arvoilla.



(a) Poissonin ydin r:n arvolla 0,5. **(b)** Poissonin ydin r:n arvolla 0,75. **(c)** Poissonin ydin r:n arvolla 0,95.

Kuva 3. Poissonin ytimiä eri r:n arvoilla

2.3 Funktioiden ominaisuuksia

Määritellään seuraavaksi C^1-funktio, funktion Lipschitz-jatkuvuus, absoluuttinen ja tasainen jatkuvuus sekä funktion rajoitettu heilahteleminen ja selvitetään niiden suhteet toisiinsa. Näitä tarvitaan kappaleessa 4, kun tutkitaan Fourier'n sarjan suppenemista.

Määritelmä 2.9. Jos funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen derivaatta on olemassa ja jatkuva kaikissa pisteissä $x \in [a,b]$, niin sanotaan, että funktio f on C^1-*funktio.* Jos funktio on rajoitettu ja sillä on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä ja sen derivaatta on olemassa ja jatkuva aina peräkkäisten epäjatkuvuuspisteiden muodostamalla suljetulla välillä, niin sanotaan, että funktio f on *paloittain* C^1-*funktio.*

Määritelmä 2.10 (Lipschitz-jatkuvuus pisteessä x_0)**.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio, ja x_0 välin $]a,b[$ piste. Jos on olemassa sellaiset vakiot M ja δ, että on

$$|f(x_0) - f(t)| \leq M|x_0 - t|, \quad \text{kun } |x_0 - t| < \delta,$$

niin sanotaan, että funktio f on Lipschitz-jatkuva pisteessä x_0. Pienin mahdollinen vakio M on funktion f lokaali Lipschitz-vakio pisteessä x_0.

Määritelmä 2.11 (Lipschitz-jatkuvuus)**.** Funktio $f : A \to B$ on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa sellainen vakio $K \geq 0$, jolle pätee

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t|$$

kaikilla x ja $t \in A$. Pienin mahdollinen vakio K on funktion f Lipschitz-vakio.

Määritelmä 2.12 (Rajoitetusti heilahteleva funktio)**.** Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mikä tahansa. Olkoon P välin $[a,b]$ jako, eli pisteet $p_i \in [a,b]$ niin, että $a = p_0 < p_1 < ... < p_n = b$. Jos kaikilla mahdollisilla välin jaoilla heilahtelulle pätee

$$v(f,P) := \sum_{i=1}^{n} |f(p_i) - f(p_{i-1})| < K < \infty,$$

niin sanotaan, että funktio f on rajoitetusti heilahteleva. Lukua

$$V(f) = \sup v(f,P)$$

sanotaan funktion f (kokonais)heilahteluksi.

Lause 2.13. *Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva funktio jos ja vain jos on olemassa sellaiset kasvavat funktiot $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ joille pätee $f = g - h$.*

Todistus. [4] Todistetaan ensin se, että rajoitetusti heilahtelevalle funktiolle f on olemassa lauseen mukaiset funktiot g ja h. Valitaan funktio g seuraavasti:

$$\begin{aligned} g(x) &= V_f(a,x) \\ &:= \sup\left\{ \sum_{j=1}^{k} \left| f(x_j) - f(x_{j-1}) \right| : k \in \mathbb{N}, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = x \right\}. \end{aligned}$$

Tämä funktio on selvästi kasvava, sillä kun $x_2 > x_1$ pätee

$$V_f(a,x_2) - V_f(a,x_1) = V_f(x_1,x_2) \geq 0.$$

Nyt funktio h täytyy valita seuraavasti:

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Myös funktio h on kasvava, sillä heilahtelulle $V_f(x_1,x_2)$ pätee $V_f(x_1,x_2) \geq f(x_2) - f(x_1)$: Kun $x_2 > x_1$, niin pätee

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1) \\ &= V_f(x_1,x_2) - (f(x_2) - f(x_1) \\ &\geq f(x_2) - f(x_1) - (f(x_2) - f(x_1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nyt g ja h ovat kasvavia funktioita, ja f on niiden erotus.

Todistetaan seuraavaksi toinen suunta; jos funktiot $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat kasvavia niin niiden erotus $f = g - h$ on rajoitetusti heilahteleva funktio. Funktiot g ja h ovat selvästi rajoitettuja, sillä ne ovat kasvavia ja määriteltyjä suljetulla välillä. Olkoon P mikä tahansa välin $[a,b]$ jako. Nyt funktion f heilahtelulle jaolla P pätee

$$V(f,P) = \sum_{x_i \in P} |g(x_i) - h(x_i) - (g(x_{i-1}) - h(x_{i-1}))|$$

$$\leq \sum_{x_i \in P} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{x_i \in P} |h(x_i) - h(x_{i-1})|$$
$$= V(g,P) + V(h,P).$$

Koska edellinen pätee kaikilla jaoilla, niin on oltava

$$V(f) \leq V(g) + V(h).$$

Koska funktiot g ja h ovat kasvavia ja rajotettuja, niin niiden heilahtelut välillä $[a,b]$ ovat $V(g) = g(b) - g(a)$ ja $V(h) = h(b) - h(a)$, eli erityisesti niiden heilahtelut ovat rajoitettuja, jolloin on

$$V(f) < \infty.$$

□

Lause 2.14. *Rajoitetusti heilahtelevalla funktiolla f on seuraavia ominaisuuksia:*

(i) Funktiolla f on (korkeintaan) numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä,

(ii) funktiolla f on kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä olemassa vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot,

(iii) funktio f on integroituva,

(iv) funktio on differentioituva melkein kaikkialla,

(v) jos funktio f on jatkuva, niin funktion heilahtelu saadaan integroimalla funktion derivaattan itseisarvoa yli määrittelyvälin:

$$\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x = V(f).$$

Tämän lauseen todistus sivuutetaan tässä työssä. Todistuksia voi etsiä halutessaan esimerkiksi lähteestä [9] kappaleesta kolme, tai rajoitetusta heilahtelusta (engl. bounded variation) kertovasta kirjallisuudesta. Internetistä löytyy myös Noella Gradyn kirjoittama erittäin yleistajuinen *Functions of Bounded Variation* [3].

Määritelmä 2.15. Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ niin, että aina kun $\{(a_i,b_i) : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ on äärellinen joukko välin $[a,b]$ pistevieraita avoimia välejä joille

$$\sum_{i\in I}(b_i - a_i) < \delta,$$

niin

$$\sum_{i\in I}|f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Määritelmä 2.16. Funktio $f : A \to B$ on tasaisesti jatkuva, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että aina kun pätee $x,y \in A$ ja $|x-y| < \delta$, niin pätee myös $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Lause 2.17. *Jos funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on C^1-funktio, niin se on Lipschitz-jatkuva.*

Todistus. Funktion f derivaatta on jatkuva välillä $[a,b]$, ja kyseinen väli on suljettu ja rajoitettu, joten derivaattafunktio on rajoitettu. Olkoon $M = \sup|f'(x)|$. Nyt analyysin peruslauseen mukaan, kun $x < y$ pätee

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leq M\,|x-y|\,.$$

Funktio f on siis Lipschitz-jatkuva. □

Lipschitz-jatkuvuus ei kuitenkaan tarkoita, että funktio olisi C^1-funktio kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 2.18. Funktio $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ on Lipschitz-jatkuva, koska kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|\,,$$

mutta se ei ole derivoituva, kun $x = 0$, sillä erotusosamäärät suppenevat eri arvoihin eri puolilta lähestyttäessä:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

ja

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Lause 2.19. *Jos funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-jatkuva, niin se on absoluuttisesti jatkuva.*

Todistus. Koska funktio on Lipschitz-jatkuva, niin kaikille pisteille $x,y \in [a,b]$ pätee

$$|f(x)-f(y)| < M|x-y|$$

jollain $M \in \mathbb{R}$. Olkoon $\epsilon > 0$ mikä tahansa, ja $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Olkoon joukko välin $[a,b]$ pistevieraita avoimia osavälejä (a_i,b_i) niin, että niiden yhteenlaskettu pituus on pienempi kuin δ :

$$\sum_i |a_i - b_i| < \delta.$$

Nyt funktion arvojen erotuksien itseisarvoille pätee

$$\sum_i |f(a_i) - f(b_i)| \leq \sum_i M|a_i - b_i| < M\delta = \epsilon,$$

eli funktio f on absoluuttisesti jatkuva. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että absoluuttisesti jatkuva funktio ei välttämättä ole Lipschitz-jatkuva:

Esimerkki 2.20. Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Esimerkiksi lähteessä [4] on esitelty seuraavanlainen lause: Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos f on derivoituva melkein kaikilla $x \in]a,b[$, derivaattafunktio on Lebesgue-integroituva ja

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y \quad \text{kaikilla } x \in [a,b].$$

Nämä ehdot pätevät funktiolle f :

(i) $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ on määritelty välillä $]0,1]$.

(ii) $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ on Lebesgue-integroituva, sillä $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1.$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{0} + \sqrt{1} - \sqrt{0} = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(y)\mathrm{d}y,$

joten funktio f on absoluuttisesti jatkuva.

Funktio f ei kuitenkaan ole Lipschitz jatkuva, sillä

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \infty,$$

jolloin ei ole olemassa sellaista lukua M jolle pätisi aina $|f(x) - f(y) < M|x - y|$.

Lause 2.21. *Absoluuttisesti jatkuva funktio* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on rajoitetusti heilahteleva.*

Todistus. Koska funktio f on absoluuttisesti jatkuva, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ niin, että kun otetaan joukko pistevieraita välin $[a,b]$ avoimia välejä (a_i,b_i), joille

$$\sum_{i \in I} |b_i - a_i| < \delta,$$

niin on

$$\sum_{i \in I} |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon.$$

Olkoon P mikä tahansa välin $[a,b]$ jako. Peräkkäisille jakopisteille p_i ja p_{i+1} pätee

$$|p_i - p_{i+1}| = |p_i - c| + |c - p_{i+1}|$$

ja

$$|f(p_i) - f(p_{i+1})| \leq |f(p_i) - f(c)| + |f(c) - f(p_{i+1})|,$$

kaikilla luvuilla c, jotka ovat jakopisteiden välissä, jolloin jaon tihentäminen kasvattaa summaa

$$\sum_{p_i \in P, p_{i+1} \in P} |f(p_i) - f(p_{i+1})|.$$

Jakoa voidaan siis tihentää niin, että kukin jakoväli on lyhyempi kuin δ. Nyt kullakin uuden jaon P_u jakovälillä funktio on rajoitetusti vaihteleva, sillä

$$|p_i - p_{i-1}| < \delta,$$

jolloin on

$$|f(p_i) - f(p_{i-1})| < \epsilon.$$

Nyt pätee

$$\sum_{i \in P_u} |f(p_i) - f(p_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(p_i) - f(p_{i-1})| < n\epsilon$$

jollain $n \in \mathbb{N}$. Funktio f on siis rajoitetusti heilahteleva. □

Lause 2.22. *Absoluuttisesti jatkuva funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $I = \{1\}$, $\epsilon > 0$ mikä tahansa. Nyt absoluuttisen jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolle pätee

$$\sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon,$$

eli

$$|b_i - a_i| < \delta \implies |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon,$$

jolloin funktio f on siis tasaisesti jatkuva. □

Tässä vaiheessa on hyvä huomioda, että rajoitetusti heilahteleva funktio ei välttämättä ole jatkuva. Esimerkiksi funktio

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 1, \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

ei ole jatkuva, mutta sen heilahtelu on yksi, jolloin sen heilahtelu on rajoitettu. Absoluuttisesti tai tasaisesti jatkuvat funktiot puolestaan ovat jatkuvia, jolloin rajoitetusta heilahtelusta ei seuraa tasaista tai absoluuttista jatkuvuutta.

Osoitetaan vielä esimerkkien avulla, että tasaisesta jatkuvuudesta ei seuraa heilahtelun rajoittuneisuutta eikä absoluuttista jatkuvuutta.

Esimerkki 2.23. Funktio

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} t \cos \frac{2\pi}{t}, & \text{kun } t \in (0,1], \\ 0, & \text{kun } t = 0 \end{cases}$$

on tasaisesti jatkuva sillä väli on suljettu ja rajoitettu, ja funktio on jatkuva:

$$\lim_{t\to 0} t \cos \frac{2\pi}{t} = 0 = f(0).$$

Se ei kuitenkaan ole rajoitetusti heilahteleva, sillä kun valitaan jakopisteiksi

$$p_j = \begin{cases} 0, \text{kun } j = 0, \\ \frac{2}{j+2}, \text{kun } 0 < j < n, \\ 1, \text{ kun } j = n, \end{cases}$$

niin saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} |f(p_{j+1}) - f(p_j)| &\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-2} |\frac{2}{j+3} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{j+3}} - \frac{2}{j+2} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{j+2}}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-2} |\frac{2}{j+3} \cos(j+3)\pi - \frac{2}{j+2} \cos(j+2)\pi| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{2}{j+3} + \frac{2}{j+2} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{2}{j+3} = \infty, \end{aligned}$$

jolloin funktion f kokonaisheilahtelu on ääretön.

Esimerkki 2.24. Cantorin funktio [4] on jatkuva funktio, jonka määrittelyjoukko on suljettu ja rajoitettu, jolloin se on myös tasaisesti jatkuva. Cantorin funktio kasvaa vain nollamittaisessa Cantorin joukossa. Koska joukko on nollamittainen ja kompakti, se voidaan peittää äärellisellä määrällä niin pieniä välejä kuin halutaan. Silloin voidaan siis kaikilla $\delta > 0$ valita äärelllinen määrä välin $[0,1]$ pistevieraita avoimia välejä (a_i,b_i) joilla koko Cantorin joukko on peitetty ja

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta.$$

Koska koko Cantorin joukko on peitetty, niin on

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \geq 1.$$

Silloin esimerkiksi kun $\epsilon = 0{,}5$, niin ei löydy absoluuttisen jatkuvuuden määritelmän täyttävää $\delta > 0$.

Lause 2.25. *Jos funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on paloittain C^1-funktio, niin se on rajoitetusti heilahteleva.*

Todistus. Olkoon $M = \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)|$. Olkoon $x_1,...,x_{k-1}$ funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko ja $x_0 = a$ ja $x_k = b$. Nyt kun tutkitaan funktion rajoittumaa kullekkin välille $[x_{l-1}, x_l]$, $l \in \{1,..k\}$, niin kukin rajoittuma on rajoitetusti heilahteleva. Lisäksi

$$|\lim_{t \to 0} f(x_l - t) - \lim_{t \to 0} f(x_l + t)| \leq M,$$

joten funktion vaihtelulle on

$$V_f \leq \sum_{l=1}^{k} (V_{f_{|[x_{l-1}, x_l]}} + M) < \infty.$$

$\square$

Nyt on osoitettu, että kun funktiot jaotellaan ominaisuuksien mukaan, niin näin saatavien funktiojoukkojen väliset suhteet ovat seuraavat:

$$C^1 \subset \text{Lipschitz} \subset \text{absoluuttisesti jatkuva} \subset \text{tasaisesti jatkuva},$$

$$C^1 \subset \text{Lipschitz} \subset \text{absoluuttisesti jatkuva} \subset \text{rajoitettu heilahtelu}$$

ja

$$\text{paloittain } C^1 \subset \text{rajoitettu heilahtelu}.$$

3 Fourier'n sarja

Fourier'n sarjan [1] avulla voidaan esittää jaksollinen funktio sini- ja kosinifunktioiden äärettömänä sarjana. Fourier'n kerroin määritellään seuraavasti:

Määritelmä 3.1. Olkoon funktio f integroituva jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on 2π, ja $f(-\pi) = f(\pi)$. Tällöin funktion Fourier'n kertoimet ovat:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x,$$

missä n on kokonaisluku.

Fourier'n sarja samalle funktiolle f puolestaan määritellään seuraavasti:

Määritelmä 3.2. Funktion f Fourier'n sarja on summa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}.$$

Huomautetaan tässä vaiheessa, että tässä työssä on valittu 2π-jaksollisuus ja jakson keskikohdaksi nolla käytännön syistä. Kuitenkin eri jaksonpituuksilla Fourier'n sarja voidaan tietenkin laskea, ja ainoa merkittävä muutos tulee Fourier'n kertoimessa olevan integraalin edellä olevan kertoimen nimittäjään. Toisaalta, jos funktion jakson keskikohta on jokin muu piste kuin nolla, niin tilanne on ekvivalentti jonkin sellaisen tilanteen kanssa, missä funktio on nollan ympärillä. Myöskään jaksollisuus ei ole täysin ehdoton ehto. Funktiosta voidaan valita jokin tutkittava väli, ja jatkaa funktio jaksolliseksi kyseisen välin ulkopuolella.

Fourier'n sarjalle pätee sopivien ehtojen ollessa voimassa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} = f(x).$$

Näitä ehtoja tutkitaan kappaleessa 4. Fourier'n kertoimet ovat järkevästi määriteltyjä, sillä funktio f on integroituva ja funktio e^{-inx} on rajoitettu. Niinpä näiden tulo on myös integroituva, ja integroituvan funktion määrätyn integraalin tuloksena saadaan jokin luku. Fourier'n sarjassa puolestaan summataan sini- ja kosinifunktioita kerrottuna joillakin luvuilla, joten sekin on hyvin määritelty.

Todistetaan seuraavaksi muutamia perustuloksia Fourier'n sarjasta.

Lause 3.3. *Jos jatkuvien 2π-jaksollisten funktioden f ja g Fourier'n kertoimet $\widehat{f}(n)$ ja $\widehat{g}(n)$ ovat samat kaikilla kokonaisluvuilla, niin funktiot f ja g ovat samat.*

Todistus. Lauseiden 2.8 ja 2.5 mukaan Poissonin ytimen ja funktion f konvoluutio suppenee tasaisesti funktioon f:

$$(P_r * f)(x) \xrightarrow{r \to 1} f(x).$$

Kyseiselle konvoluutiolle pätee

$$(P_r * f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in(x-t)} f(t) \mathrm{d}t.$$

Edellisen yhtälön summa suppenee tasaisesti, joten integroinnin ja summan järjestystä voi vaihtaa:

$$\begin{aligned}
(P_r * f)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \widehat{f}(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \widehat{g}(n) \\
&= (P_r * g)(x)
\end{aligned}$$

Nyt pätee

$$(P_r * f)(x) \xrightarrow{r \to 1} f(x) \quad \text{ja} \quad (P_r * f)(x) \xrightarrow{r \to 1} g(x),$$

eli on oltava $f(x) = g(x)$. □

Lause 3.4. *Jos jatkuvalle 2π-jaksolliselle funktiolle f pätee*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{inx},$$

ja sarjan suppeneminen summaan $f(x)$ on tasaista, niin

$$\widehat{f}(n) = a_n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Summan $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ Fourier-kerroin on

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx})e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n-k)x})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Seuraavaksi käytetään tietoa, että sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ suppenee tasaisesti funktioon $f(x)$, jolloin integroinnin ja summaamisen järjestystä voidaan vaihtaa:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n-k)x})\mathrm{d}x \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n e^{i(n-k)x})\mathrm{d}x \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nyt integroitavaksi jäi enää $e^{i(n-k)x}$, jolle pätee

$$\int_a^b e^{i(n-k)x} = \Big/_{a}^{b} -\frac{i}{n-k}e^{i(n-k)x} = -\frac{i}{n-k}(e^{i(n-k)a} - e^{i(n-k)b}),$$

kun $n-k \neq 0$. Kun $n = k$, pätee

$$\int_a^b e^{i(n-k)x} = \int_a^b 1 = (a-b).$$

Kun sijoitetaan $a = -\pi$ ja $b = \pi$, niin saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} = \begin{cases} -\frac{i}{n-k}(e^{i(n-k)\pi} - e^{i(n-k)\pi}) = 0, & \text{kun } n \neq k \\ \pi - (-\pi) = 2\pi, & \text{kun } n = k. \end{cases}$$

Nyt siis saadaan funktion f Fourier-kertoimiksi

$$\widehat{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_k 2\pi}{2\pi} = a_k,$$

jolloin $\widehat{f}(n) = a_n$ kaikilla kokonaisluvuilla n. $\square$

Lause 3.5. *Jos jatkuvan 2π-jaksollisen funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti johonkin funktioon, suppenee se funktioon f.*

Todistus. Lauseen 3.4 mukaan summafunktion $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ Fourier-kertoimet ovat samat kuin funktion f Fourier-kertoimet. Lisäksi funktio g on jatkuva, sillä funktion f Fourier'n sarja on jatkuvien funktioiden sarja, joka suppenee tasaisesti funktioon g. Tästä seuraa lauseen 3.3 mukaan se, että funktiot f ja g ovat samat. $\square$

Lause 3.6. *Olkoon f jatkuva 2π-jaksollinen funktio. Jos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ suppenee, niin funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti funktioon f välillä $[-\pi,\pi]$.*

Todistus. Huomataan ensin, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)e^{inx}|,$$

sillä $|e^{inx}| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Käytetään seuraavaksi Weierstrassin M-testiä (lause 2.1):

$$|\widehat{f}(n)e^{inx}| \leq |\widehat{f}(n)| = M_n$$

ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty.$$

Nyt Weierstrassin M-testin mukaan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee tasaisesti välillä $[-\pi,\pi]$. Lauseessa 3.5 todistettiin, että jos funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti, se suppenee tasaisesti funktioon f. $\square$

Seuraavana kaksi esimerkkiä Fourier'n sarjan laskemisesta.

Esimerkki 3.7. Esimerkiksi funktion $\sin(x)$ Fourier'n sarja on helppo laskea. Sen laskemisesta ei välttämättä ole muuta hyötyä kuin se, että se auttaa ymmärtämään vähän, miten tämä toimii. Lasketaan ensin funktion $f(x) = \sin(x)$ Fourier'n kertoimet:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2}(e^{-ix} - e^{ix})e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2}(e^{-ix-inx} - e^{ix-inx})\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ix(1+n)} - e^{ix(1-n)})\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tämä integraali osataan laskea ja integraalilla on kolme mahdollista arvoa:

(i) Kun $n = 1$, niin $\widehat{f}(n) = -\frac{i}{2}$,

(ii) kun $n = -1$, niin $\widehat{f}(n) = \frac{i}{2}$,

(iii) kun n on jotain muuta, niin $\widehat{f}(n) = 0$.

Tällöin on

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{i}{2}e^{-ix} - \frac{i}{2}e^{ix} = \sin(x)$$

Esimerkki 3.8. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ kun } x \in [-\pi,\pi] \\ f(x) = f(x+2k\pi) \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Fourier'n sarja voidaan laskea, sillä funktio f on jaksollinen, integroituva, ja $f(-\pi) = \pi = f(\pi)$. Lasketaan funktiolle f Fourier'n kertoimet:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(-\int_{-\pi}^{0} xe^{-inx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x)$$

Todetaan ensin, että kun $n = 0$, niin $\widehat{f}(0)$ on helppo laskea:

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(-\int_{-\pi}^{0} x\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}(-\Big/_{-\pi}^{0} \frac{x^2}{2} + \Big/_{0}^{\pi} \frac{x^2}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Lasketaan seuraavaksi integraali $\int xe^{-inx}\mathrm{d}x$ osittaisintegroimalla:

$$\begin{aligned}
\int xe^{-inx}\mathrm{d}x &= -\frac{x}{in}e^{-inx} + \int \frac{1}{in}e^{-inx}\mathrm{d}x + C \\
&= \frac{ix}{n}e^{-inx} - \frac{1}{(in)^2}e^{-inx} + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ix}{n}e^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx} + C \\
&= \frac{e^{-inx}(inx+1)}{n^2} + C.
\end{aligned}
$$

Tällöin Fourier'n kertoimiksi saadaan:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\Big(-\int_{-\pi}^{0} xe^{-inx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\Big/_{\!-\pi}^{\,0} \frac{e^{-inx}(inx+1)}{n^2} + \Big/_{\!0}^{\,\pi} \frac{e^{-inx}(inx+1)}{n^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{e^{-in0}(in0+1)}{n^2} + \frac{e^{in\pi}(-in\pi+1)}{n^2}\Big) \\
&\quad + \frac{e^{-in\pi}(in\pi+1)}{n^2} - \frac{e^{-in0}(in0+1)}{n^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{e^{in\pi}(-in\pi+1) - 1 + e^{-in\pi}(in\pi+1) - 1}{n^2}\Big) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\big(\frac{-in\pi+1-1+in\pi+1-1}{n^2}\big) = 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ \frac{1}{2\pi}\big(\frac{-(-in\pi+1)-1+-(in\pi+1)-1}{n^2}\big) = -\frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Funktion f Fourier'n sarjaksi saadaan siis

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{2}{(2n+1)^2}e^{ix(2n+1)}.
$$

4 Fourier'n sarjan suppeneminen

Fourier'n sarjan suppenemista voidaan tarkastella ainakin kahdesta eri näkökulmasta. Voidaan määritellä erilaisia suppenemistapoja, jotka poikkeavat perinteistä sarjan suppenemisesta jollain tavalla. Toinen näkökulma on tutkia, millainen funktion f on oltava, että funktion Fourier'n sarja suppenee.

Ensimmäisellä tavalla huomataan, että kun heikennetään suppenemisehtoja riittävästi, saadaan kaikkien jatkuvien jaksollisten funktioiden Fourier'n sarjat suppenemaan. Jälkimmäisellä tavalla tarkasteltuna huomataan, että kun f on rajoitetusti heilahteleva funktio, niin sen Fourier'n sarja suppenee.

Lisäksi huomataan, että kun Fourier'n sarjaa tutkitaan pisteessä x, niin suppenemiseen vaikuttavat vain funktion arvot pisteen ympäristössä, ja koko väliä $[-\pi,\pi]$

ei tarvitse huomioida. Kappaleen lopussa esitellään myös jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja ei suppene.

Käsitellään ensin erilaisia suppenemisen käsitteitä.

4.1 Abel-summautuvuus

Abel-summautututuvuus on heikompi ehto kuin suppeneminen. Abel-summautuvuudessa lisätään sarjan jokaiseen summattavaan kerroin $r^{|n|}$, missä $0 \leq r < 1$.

Määritelmä 4.1. Olkoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{1}$$

sarja, jonka termit ovat reaali- tai kompleksilukuja. Jos sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k x_k$$

suppenee kaikilla reaaliluvuilla $0 \leq r < 1$ ja sarjan summa lähestyy raja-arvoa L, kun $r \to 1$ niin sanotaan, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ on *Abel-summautuva* ja sen *Abel-raja-arvo* on L.

Lause 4.2. *Jos sarja (1) suppenee ja sen summa on L, se on Abel-summautuva Abel-raja-arvolla L.*

Todistus. [6] Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, joten $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Tällöin on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, jolle $|x_k| < 1$ kun $k > N$.

Käytetään nyt juuritestiä [8] lukujonoon $y_k = r^k x_k$:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|y_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|r^k x_k|} = \limsup_{k\to\infty} r\sqrt[k]{|x_k|} \leq \limsup_{k\to\infty} r\sqrt[k]{|1|} = r < 1,$$

jolloin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k x_k$ suppenee.

Osoitetaan vielä, että raja-arvot ovat samat. Olkoon

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} r^n x_n.$$

Kun sovitaan, että edellisen sarjan nollas osasumma on $s_0 = 0$, summalle $\sum_{k=1}^{m} r^k x_k$ pätee

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} r^n x_n &= \sum_{k=1}^{m} (s_k - s_{k-1}) r^k \\
&= s_m r^m + (1-r) \sum_{k=1}^{m-1} s_k r^k \\
&\xrightarrow{m\to\infty} (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.
\end{aligned}$$

Nyt on

$$f(r) = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ mikä vaan. Nyt tiedetään, että

(i) on olemassa luonnollinen luku N, jolle pätee $|L - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$ aina, kun $n > N$,

(ii) kun r_0 on riittävän lähellä lukua 1, niin $(1 - r_0) \sum_{k=0}^{N} |s_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$.

Nyt, kun $r_0 < r < 1$ ja N on luku jolla kohta (i) on voimassa, pätee

$$\begin{aligned}
|f(r) - L| &= \left| (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - L \right| \\
&= \left| (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - L(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k \right| \\
&= \left| (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - L) r^k \right| \\
&\le (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} |s_k - L| r^k \\
&= (1-r) \sum_{k=0}^{N} |s_k - L| r^k + (1-r) \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_k - L| r^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< (1-r_0)\sum_{k=0}^{N}|s_k - L| + \frac{\epsilon}{2}(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}(1-r)\frac{1}{1-r} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Nyt on oltava

$$\lim_{r\to 1} f(r) = L.$$

$\square$

Seuraava esimerkki osoittaa, että Abel-summautuva sarja ei välttämättä suppene.

Esimerkki 4.3. Olkoon $x_n = (-1)^n$. Nyt sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ei suppene, mutta $\sum_{n=1}^{\infty} r^n x_n$ suppenee:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} r^n x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(r^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} r\cdot(r^2)^n - 1 = \frac{1}{1-r^2} - \frac{r}{1-r^2} - 1 \\
&= \frac{1-r}{(1-r)(1+r)} - 1 = \frac{1}{(1+r)} - 1
\end{aligned}
$$

ja

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{(1+r)} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että jatkuvan funktion f Fourier'n sarja on Abel-summautuva.

Lause 4.4. *Jos funktio f on jatkuva 2π-jaksollinen funktio, niin sen Fourier'n sarja on Abel-summautuva ja sen Abel-raja-arvo on $f(x)$ kaikissa pisteissä x.*

Todistus. [1] Lauseen 2.8 perusteella tiedetään, että Poissonin ydinten joukko on Diracin perhe, jolloin lauseen 2.5 mukaan

$$(P_r * f)(x) \xrightarrow{r\to 1} f(x)$$

tasaisesti. Riittää siis osoittaa, että seuraava yhtäsuuruus pätee:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx} = (P_r * f)(x).$$

Konvoluution määritelmän nojalla on

$$\begin{aligned}
(P_r * f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in(x-t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in(x-t)} f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Integraalin sisällä oleva sarja suppenee tasaisesti (sillä $f(t)$ on rajoitettu, ja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-t)}$ suppenee), jolloin integroinnin ja summauksen järjestystä voidaan vaihtaa:

$$\begin{aligned}
(P_r * f)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in(x-t)} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

□

4.2 Cesàro-summautuvuus

Cesàro-summautuvuus on Abel-summautuvuuden ja tavallisen suppenemisen välissä oleva ehto. Kaikki Abel-summautuvat sarjat eivät ole Cesàro-summautuvia, mutta kaikki suppenevat sarjat ovat Cesàro-summautuvia. Cesàro-summautuvuudessa tutkitaan sarjan osasummien keskiarvojen muodostamaa jonoa. Tässä kappaleessa päästään vähän lähemmäksi tavallista suppenemista osoittamalla, että jatkuvan funktion Fourier'n sarja on Cesàro-summautuva.

Määritelmä 4.5. Cesàro-summautuvuus: Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sarja ja

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

sen osasummien jono. Olkoon

$$\sigma_k = \frac{s_1 + s_2 + ... + s_k}{k}$$

ensimmäisten osasummien keskiarvo. Jos jono σ_k suppenee johonkin raja-arvoon L, sanotaan, että sarja on Cesàro-summautuva, ja sen Cesàro-raja-arvo on L.

Otetaan ensin käyttöön muutamia aputuloksia ja todistetaan, että Cesàro-summautuvuus todella on suppenemisen ja Abel-summautuvuuden välissä.

Lemma 4.6. *Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppenee raja-arvoon L, niin se on Cesàro-summautuva, ja sen Cesàro-raja-arvo on L.*

Todistus. Tiedetään, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa sellainen luonnollinen luku N_δ, jolle $|s_n - L| < \delta$ kaikilla $n \geq N_\delta$. Halutaan löytää jokaiselle $\epsilon > 0$ sellainen N_ϵ, jolle kaikilla $k \geq N_\epsilon$ pätee $|\sigma_k - L| < \epsilon$.

Olkoon $\epsilon > 0$ mikä vaan. Valitaan sellainen δ, jolle $\delta < \epsilon$. Valitaan

$$A = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N_\delta - 1} |s_n - L| & \text{jos } N_\delta > 1 \\ 0 \quad \text{jos } N_\delta = 1. \end{cases}$$

Valitaan K_ϵ niin suureksi, että $\frac{A}{K_\epsilon} + \delta < \epsilon$ ja $K_\epsilon > N_\delta$. Kun $k \geq K_\epsilon$, pätee

$$\begin{aligned} |\sigma_k - L| &= \left| \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k} - L \right| = \left| \frac{s_1 + \cdots + s_k - kL}{k} \right| \\ &= \left| \frac{(s_1 - L) + \cdots + (s_k - L)}{k} \right| \\ &\leq \left| \frac{(s_1 - L)}{k} \right| + \cdots + \left| \frac{(s_k - L)}{k} \right| \\ &< \left| \frac{(s_1 - L)}{k} \right| + \cdots + \left| \frac{(s_{N_\delta - 1} - L)}{k} \right| + \sum_{n=N_\delta}^{k} \frac{\delta}{k} \\ &= \frac{A}{k} + \sum_{n=N_\delta}^{k} \frac{\delta}{k} < \frac{A}{k} + \delta < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Siitä, että sarja on Cesàro-summautuva ei kuitenkaan seuraa tavallista suppenemista kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 4.7. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ ei suppene tavallisessa mielessä, mutta se on Cesàro-summautuva: Osasummille s_n pätee

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \end{cases}$$

jolloin on

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{1+0+1+0+1+\cdots+1}{k} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k}, & \text{kun } k \text{ on pariton,} \\ \frac{1+0+1+0+1+\cdots+0}{k} = \frac{1}{2}, & \text{kun } k \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Silloin on selvästi

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \frac{1}{2}.$$

Seuraavaksi todistetaan aputulokset 4.8-4.11, joiden avulla todistetaan, että Cesàro-summautuvat sarjat ovat Abel-summautuvia.

Aputulos 4.8 ([9]). *Jos sarja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *on Cesàro-summautuva, niin pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0.$$

Todistus. Osasummalle s_n pätee

$$\frac{s_n}{n} = \frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} s - s = 0.$$

Summattaville x_n pätee

$$\frac{x_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{s_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Aputulos 4.9 ([9]). *Jos sarjoilla* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *ja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ *on suppenemissäteet* R_1 *ja* R_2*, ja jos*

$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *kun* $n \geq 0$, *niin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n\right), \quad kun\ |r| < \min\{R_1,R_2\}.$$

Aputuloksen todistus löytyy lähteestä [9] sivulta 93 ideatasolla.

Aputulos 4.10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Todistus.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^{n+1} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{r}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

□

Aputulos 4.11. *Jos lukujono* $\frac{x_n}{n}$ *suppenee nollaan, niin sarja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n r^n$ *suppenee, kun* $|r| < 1$:

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x_n r^n < \infty.$$

Todistus. Kun lukujono $\frac{x_n}{n}$ suppenee nollaan, niin jostain luonnollisesta luvusta n_0 lähtien $|x_n|$ on pienempää kuin n :

$$|x_n| < n, \quad \text{kun } n > n_0.$$

Tällöin sarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n r^n|$ pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n r^n| < \sum_{n=0}^{n_0} |x_n r^n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n|r|^n.$$

Tämä suppenee, kun $|r| < 1$. Tällöin myös summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n r^n|$$

suppenee, jolloin suppenee myös summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n r^n.$$

$\square$

Lause 4.12 ([9]). *Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ on Cesàro-summautuva, se on Abel-summautuva. Lisäksi raja-arvot ovat samat.*

Todistus. Kun sarja $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ on Cesàro-summautuva raja-arvoon s, niin

$$|s - \sigma_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Olkoon $\epsilon > 0$ mikä vaan. Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ niin, että

$$|s - \sigma_n| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{kun } n > n_0.$$

Valitaan $r_0 \in [0,1[$ siten, että

$$(1 - r_0)^2 \sum_{n=0}^{n_0} (n+1)|s - \sigma_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Aputuloksen 4.8 mukaan $\frac{x_n}{n}$ suppenee, ja aputuloksen 4.11 mukaan tämä tarkoittaa sitä, että Abelin summa suppenee, ja sarja on Abel-summautuva. Todistetaan vielä se, että Cesàron ja Abelin summat ovat tässä tapauksessa samat. Abelin summalle pätee

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty} x_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n,$$

sillä aputuloksen 4.9 nojalla on

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n r^n\right)$$

$$= (1-r)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n r^n\right)$$

ja

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n r^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n\right)\\ &= (1-r)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n\right).\end{aligned}$$

Aputuloksen 4.10 nojalla raja-arvo s voidaan ilmoittaa muodossa

$$s = (1-r)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)sr^n.$$

Nyt Abelin summa ja raja-arvo s voidaan vähentää toisistaan. Tällöin saadaan

$$s - A_r = (1-r)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(s-\sigma_n)r^n,$$

jolloin seuraava epäyhtälö on selvä:

$$|s - A_r| \leq (1-r)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|s-\sigma_n|r^n.$$

Lisäksi pätee, kun $r_0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned}&(1-r)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|s-\sigma_n|r^n\\ &= (1-r)^2\sum_{n=0}^{n_0}(n+1)|s-\sigma_n|r^n + (1-r)^2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(n+1)|s-\sigma_n|r^n\\ &\leq (1-r_0)^2\sum_{n=0}^{n_0}(n+1)|s-\sigma_n| + (1-r)^2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(n+1)|s-\sigma_n|r^n\\ &< \frac{\epsilon}{2} + (1-r)^2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(n+1)\frac{\epsilon}{2}r^n = \epsilon.\end{aligned}$$

Nyt täytyy olla

$$\lim_{r\to 1} A_r = s.$$

$\square$

Käänteinen tulos ei kuitenkaan ole totta, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 4.13. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$$

on Abel-summautuva, mutta ei Cesàro-summautuva. Todistetaan ensin Abel-summautuvuus:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} r^n(-1)^{n+1}n &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n(-1)^{n+1}n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1}(2n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}2n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} r\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^{2n} \\
&= r\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r(r^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(r^2)^n\right) \\
&= r\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r-1}{1-r^2} = \frac{r}{(1+r)^2} \\
&\xrightarrow{r\to 1} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ osasummille pätee:

$$\begin{aligned}
s_1 &= (-1)^2 \cdot 1 = 1 \\
s_2 &= 1 + (-1)^3 \cdot 2 = -1 \\
s_3 &= -1 + (-1)^4 \cdot 3 = 2 \\
s_4 &= -2 \\
&\vdots \\
s_{2n-1} &= n \\
s_{2n} &= -n.
\end{aligned}$$

Tällöin osasummien keskiarvolle pätee:

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{1-1+2-2+3-3+\ldots+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}n}{n} = 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \\ \frac{1-1+2-2+3-3+\ldots+\frac{1}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Jonolla σ_n ei siis ole raja-arvoa, sillä parillisten indeksien raja-arvo on 0 ja parittomien $\frac{1}{2}$. Sarja on siis Abel-summautuva, muttei Cesàro-summautuva.

Todistetaan vielä eräs yhteys suppenemisen ja Cesàro-summautumisen välille.

Lemma 4.14. *Jos $x_n \geq 0$ kaikilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$, niin sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

on Cesàro-summautuva jos, ja vain jos se suppenee tavallisessa mielessä.

Todistetaan ensin pieni aputulos:

Aputulos 4.15. *Jos lukujono x_n on kasvava, positiivinen ja hajaantuu äärettömään, lukujonon keskiarvojono hajaantuu.*

Todistus. Todistetaan tämä antiteesin "Lukujonon keskiarvo suppenee raja-arvoon L" avulla. Aloitetaan kuitenkin todistamalla, että keskiarvojen jono on kasvava: osoitetaan, että $\sigma_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{n=1}^{k+1} x_n \geq \sigma_k$:

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{k+1} x_n \\ &= \frac{k}{(k+1)k}\sum_{n=1}^{k} x_n + \frac{x_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{k}{k+1}\sigma_k + \frac{x_{k+1}}{k+1} \\ &\geq \frac{k}{k+1}\sigma_k + \frac{\sigma_k}{k+1} = \sigma_k. \end{aligned}$$

Edellinen epäyhtälö seuraa siitä, että lukujono x_n on kasvava, jolloin lukujonon n ensimmäistä ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin lukujonon seuraava, $(n+1)$.:s arvo, jolloin niiden keskiarvo on myös pienempi tai yhtä suuri kuin x_{n+1}.

Nyt antiteesin nojalla jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa luonnollinen luku N_ϵ, jota suuremmille luonnollisille luvuille $n \geq N_\epsilon$ pätee $|\sigma_n - L| < \epsilon$. Kuitenkin, kun tehdään seuraavat valinnat, niin on $\sigma_N > L$:

(i) $\epsilon < L$.

(ii) $x_n > 2L$ ja $n > N_\epsilon$. Muistetaan, että x_n hajaantuu äärettömään ja on kasvava, jolloin tällainen valinta voidaan tehdä.

(iii) $N > 2n + 2$.

Nyt pätee

$$\sigma_N = \frac{n}{N}\sigma_n + \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{N} x_k > \frac{n}{N}(L-\epsilon) + \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{N} 2L$$

ja

$$\frac{n}{N}(L-\epsilon) + \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{N} 2L > \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{N} 2L = \frac{2N-2n-2}{N}L > \frac{N}{N}L = L.$$

Seuraavat keskiarvot ovat vielä kauempana raja-arvosta, joten antiteesi johtaa ristiriitaan ja keskiarvojen jono ei voi supeta. □

Lemman 4.14 todistus. Lemman 4.6 mukaan suppenemisesta seuraa Cesàro-summautuvuus, jolloin riittää todistaa, että positiivisilla summattavilla Cesàro-summautuvuudesta seuraa suppeneminen. Todistetaan tämäkin antiteesillä: "On olemassa Cesàro-summautuva sarja, jonka kaikki summattavat ovat epänegatiivisia, mutta joka ei suppene."

Luvut x_n ovat kaikki epänegatiivisia, jolloin osasummien jono s_n on kasvava. Summa ei suppene, jolloin osasummien jonon täytyy hajaantua, ja koska se on kasvava, on sen hajaannuttava äärettömään. Nyt aputuloksen oletukset ovat voimassa, joten osasummien keskiarvon on myös hajaannuttava. Osasummien keskiarvo kuitenkin suppenee, sillä sarja on Cesàro-summautuva. Antiteesin on siis oltava väärä, ja väite on todistettu. □

Jatkuvan 2π-jaksollisen funktion Fourier'n sarjan Cesàro-summautuvuuden todistamiseksi täytyy miettiä sitä, että onko funktion f Fourier'n sarjan Cesàron jono ilmoitettavissa jonkin Diracin perheen tai jonon ja funktion f konvoluution avulla.

Jos tällainen Diracin perhe tai jono löytyy, suppenee funktion f Fourier'n sarjan Cesàron jono lauseen 2.5 mukaan funktioon f. Aiemmin integraaliytimistä kertovassa kappaleessa esiteltiin kolme integrointiydintä: Poissonin ydin, Dirichlet'n ydin ja Fejérin ydin. Poissonin ydintä käytettiin aiemmin Abel-summautuvuuden yhteydessä, ja Dirichlet'n ytimien joukko ei ole Diracin perhe, jolloin jäljelle jää Fejérin ydin. Katsotaan, mitä sen ja funktion f konvoluutiosta tulee:

$$
\begin{aligned}
(F_n * f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x-t)\Big)f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-k}^{k} e^{il(x-t)}\Big)f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ilt}f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilx}\widehat{f}(l).
\end{aligned}
$$

Viimeiseltä riviltä tunnistaa viimeisen summan olevan Fourier'n sarjan osasumma, jolloin viimeinen rivi on n:n ensimmäisen Fourier'n sarjan osasumman keskiarvo, eli Cesàron jonon n:s alkio:

$$
(F_n * f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilx}\widehat{f}(l) = \sigma_n(f,x).
$$

Tätä voidaan käyttää seuraavan lauseen todistukseen.

Lause 4.16. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Tällöin funktion f Fourier'n sarja on Cesàro-summautuva raja-arvoon f niissä pisteissä, missä funktio f on jatkuva. Lisäksi jos funktio on jatkuva koko määrittelyvälillään, niin Cesàron jonon suppeneminen tähän raja-arvoon on tasaista.*

Todistus. Jos funktio f on jatkuva, niin äskeisen laskun perusteella väite on selvä. Olkoon $\epsilon > 0$ mikä vaan. Oletetaan, että funktio f on jatkuva pisteessä x. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ niin, että

$$
|f(x+t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ aina, kun } |t| < \delta.
$$

Funktio f on integroituva, joten sen integraali on rajoitettu:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \mathrm{d}x < M \text{ jollain } M > 0.$$

Lisäksi, kun $\pi > |x| > \delta$, Fejerin ydintä voidaan arvioida seuraavalla tavalla:

$$|F_n(x)| = \left| \frac{1}{2\pi n} \frac{1 - \cos(nx)}{1 - \cos(x)} \right| < \frac{A}{|n|}, \text{ missä } A = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1 - \cos\delta}$$

jolloin on $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$, kun $|x| > \delta$. Tällöin voidaan valita luonnollinen luku N niin, että on

$$F_n(x) < \frac{\epsilon}{4M}, \text{ kun } n > N.$$

Nyt, kun $n > N$, niin funktion f Fourier'n sarjan osasumman ja funktion f erotukselle pätee

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(x) - f(x)| &= |(F_n * f)(x) - f(x)| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \mathrm{d}t \\
&< \frac{\epsilon}{4M} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon}{2} F_n(t) \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\epsilon}{4M} 2M + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

jolloin on oltava

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma_n(x) - f(x)| = 0.$$

□

Tässä vaiheessa on tärkeä tehdä eräs huomio. Tarkastellaan Dirichlet'n ytimiä

$$D(N,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{int}.$$

Integroituvan funktion f ja Dirichlet'n N:nen ytimen konvoluutiolle pätee

$$\begin{aligned}
(D_N * f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t)f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{-N}^{N} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-int} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{-N}^{N} e^{inx}\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

Funktion f ja Dirichlet'n N:nen ytimen konvoluutio on siis sama asia kuin funktion f Fourier'n sarjan N :s osasumma. Nyt jos Dirichlet'n ytimien joukko olisi Diracin jono, niin funktion f Fourier'n sarja suppenisi tasaisesti funktioon f. Silloin tämä kappale olisi noin sivun mittainen, ja asia olisi käsitelty. Se, että Dirichlet'n ytimet ovat joissain pisteissä negatiivisia aiheuttaa kuitenkin ongelmia Fourier'n sarjan suppenemisen kannalta. Eräs mielenkiintoinen seikka on se, että siinä missä $\int_{-\pi}^{\pi}|P_r(t)|\mathrm{d}t = 1 = \int_{-\pi}^{\pi}|F_n(t)|\mathrm{d}t$ kaikilla r ja n joilla ytimet on määritelty, Dirichlet'n ytimelle pätee $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t = \infty$, ja hajaantuminen tapahtuu samaa tahtia kuin funktion $\log n$ hajaantuminen [1]. Tätä tietoa tutkitaan tarkemmin ja käytetään kappaleessa 4.5, kun konstruktoidaan jatkuvaa funktiota, jonka Fourier'n sarja ei suppene.

4.3 Fourier'n sarjan pisteittäinen suppeneminen

Tässä kappaleessa todistetaan, että funktion Fourier'n sarjan suppenemiseen annetussa pisteessä vaikuttaa vain Fourier'n sarjan arvot pisteen ympäristössä. Ensin tarvitaan kuitenkin muutamia aputuloksia.

Lause 4.17 (Weierstrassin approksimaatiolause)**.** *Jokaista jatkuvaa 2π-jaksollista funktiota f voidaan arvioida epsilonin tarkkuudella äärellisten* trigonometristen polynomien

$$p_N = \sum_{-N}^{N} a_n e^{int} \tag{2}$$

avulla. Siis joillakin luvuilla a_n ja N pätee

$$\sup_{-\pi \le t \le \pi} |p_N - f| < \epsilon. \tag{3}$$

Todistus. Lauseessa 4.4 on todistettu, että funktion f Fourier'n sarja on tasaisesti Abel-summautuva funktioon f, eli

$$\lim_{r \to 1} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int} = f.$$

Tällöin on olemassa jokin r_0, jolle pätee

$$\sup_{-\pi \le t \le \pi} | \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int} - f(t)| < \epsilon.$$

Tällöin on oltava jokin luonnollinen luku N, jolle on

$$\sup_{-\pi \le t \le \pi} | \sum_{n=-N}^{N} r_0^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int} - f(t)| < \epsilon.$$

Merkitään

$$a_n = r_0^{|n|} \widehat{f}(n),$$

niin lause on todistettu. □

Lause 4.18 (Riemannin ja Lebesquen lemma)**.** *Olkoon f jatkuva 2π-jaksollinen funktio. Silloin pätee $lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0$.*

Todistus. [1] Halutaan osoittaa, että kaikille $\epsilon > 0$ löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $|\widehat{f}(n)| < \epsilon$ kaikilla $n > N$.

Valitaan p_N siten, että se toteuttaa edellisen lauseen yhtälöt (2) ja (3). Lasketaan tälle

Fourier'n kertoimet:

$$\begin{aligned}
\widehat{p_N}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_N(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}e^{-int}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} a_k e^{it(k-n)}\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \mathrm{d}t = a_n, \text{ kun } n \le N, \\ 0 \quad \text{muutoin.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Erityisesti siis $\widehat{p_N}(n) = 0$, kun $n > N$. Nyt saadaan funktion f Fourier'n kertoimelle seuraava muoto, kun $n > N$:

$$\widehat{f}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{p_N}(n) = \widehat{f - p_N}(n).$$

Lisäksi tiedetään, että

$$|\widehat{f - p_N}(n)| = \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - p_N(t))e^{-int}\mathrm{d}t| < \frac{1}{2\pi}\epsilon \cdot 2\pi = \epsilon,$$

kun $n > N$. Nyt siis jokaiselle $\epsilon > 0$ löydetään sellainen $N \in \mathbb{N}$ jota suuremmilla luonnollisilla luvuilla funktion f Fourier'n kerroin on pienempi kuin ϵ. □

Todistetaan sama vielä integroituvalle funktiolle:

Lause 4.19 (Riemannin-Lebesquen lemma integroituvalle funktiolle)**.** *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Silloin pätee* $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ mikä tahansa. Olkoon funktio g sellainen jatkuva 2π-jaksollinen funktio, jolle pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t) - g(t)|\mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt koska g on jatkuva, voidaan valita jokin luku $N \in \mathbb{N}$, jolle

$$\widehat{g}(n) < \frac{\epsilon}{2}$$

aina, kun $n \geq N$. Arvioidaan seuraavaksi funktioiden f ja g Fourier'n kertoimien itseisarvojen vähennyslaskua:

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(n)| - |\widehat{g}(n)| \leq |\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))e^{-int}\mathrm{d}t| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)||e^{-int}|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t \\
&< \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Nyt funktion funktion f Fourier'n kertoimelle pätee

$$
|\widehat{f}(n)| < \frac{\epsilon}{2} + |\widehat{g}(n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
$$

kun $n \geq N$. □

Seuraus 4.20. *Riemannin-Lebesquen lemmasta seuraa se, että sekä Fourier'n kertoimen reaaliosan, että imaginääriosan tulee supeta nollaan, kun luvun n itseisarvo kasvaa rajatta. Silloin siis pätee*

$$
\lim_{|n|\to\infty} \mathrm{Re}\widehat{f}(n) = 0 \quad \textit{ja} \quad \lim_{|n|\to\infty} \mathrm{Im}\widehat{f}(n) = 0,
$$

jolloin on siis

$$
\lim_{|n|\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0 \quad \textit{ja} \quad \lim_{|n|\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0.
$$

Aputulos 4.21. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Funktiolle f pätee*

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)\mathrm{d}t = 0.
$$

Todistus. Edellisen seurauksen perusteella tiedetään, että

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(\frac{t}{2})\cos(nt)\mathrm{d}t = 0
$$

ja

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\frac{t}{2})\sin(nt)\mathrm{d}t = 0.
$$

Edellisten lausekkeiden summan täytyy siis myös supeta nollaan:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin(\frac{t}{2})\cos(nt)+\cos(\frac{t}{2})\sin(nt))\mathrm{d}t = 0.$$

Kun integraalin sisällä olevaa lauseketta sievennetään saadaan trigonometristen funktioiden summakaavoja käyttämällä:

$$\begin{aligned} f(t)(\sin(\frac{t}{2})\cos(nt)+\cos(\frac{t}{2})\sin(nt)) &= f(t)\sin(nt+\frac{t}{2}) \\ &= f(t)\sin((n+\frac{1}{2})t), \end{aligned}$$

jolloin pätee

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin((n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t = 0.$$

□

Nyt voidaan todistaa kappaleen alussa luvattu asia.

Lause 4.22. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Olkoon $0<\delta<\pi$. Tällöin kaikille $x\in[-\pi,\pi]$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t) = 0.$$

Todistus. [1] Olkoon x jokin piste tarkasteluväliltä. Olkoon g 2π-jaksollinen funktio

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{jos } |t|<\delta \\ \frac{f(x-t)}{sin(\frac{t}{2})} & \text{jos } \delta\le|t|\le\pi. \end{cases}$$

Funktio g on jaksollinen sillä f on jaksollinen ja $\sin(\frac{t}{2})$ on jaksollinen. Funktio g on integroituva, sillä funktio f on integroituva ja $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ on jatkuva ja rajoitettu, kun $|t|>\delta$. Nyt pätee

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Nyt aputuloksen 4.21 mukaan pätee

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\mathrm{d}t = 0,$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t \right) = 0.$$

$\square$

Kun muistetaan, että $S_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t$, niin havaitaan, että funktion f Fourier'n sarjan summa on 0, kun ollaan riittävän kaukana tutkittavasta pisteestä. Tällöin pisteittäistä suppenemista miettiessä ei tarvitse huomioida kuin jokin mielivaltainen δ-ympäristö tutkittavan pisteen x ympärillä.

4.4 Fourier'n sarjan suppeneminen

Kappaleessa 2.3 määriteltiin funktion ominaisuuksia. Katsotaan seuraavaksi, miten Fourier'n sarja käyttäytyy, kun funktiolla on joitakin näistä ominaisuuksista.

Lause 4.23. *Olkoon funktio f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Jos funktio f on Lipschitz-jatkuva pisteessä x, niin funktion Fourier'n sarja suppenee pisteessä x pisteeseen $f(x)$.*

Todistus. [1] Halutaan osoittaa yhtälö

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

Yhtälölle yhtäpitävä muoto on

$$\lim_{n\to\infty} (\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t - f(x)) = 0.$$

Kun käytetään Dirichlet'n ytimen ominaisuutta $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t - f(x)\Big) = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x)\mathrm{d}t\Big) = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Kun tiedetään, että funktio f on Lipschitz-jatkuva pisteessä x, voidaan valita δ ja M siten, että $|f(x+t)-f(x)| \le M|x+t-x| = M|t|$ aina, kun $|t| < \delta$. Kun vielä muistetaan Dirichlet'n ytimen ominaisuuksista, että $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(t(n+\frac{1}{2}))}{\sin\frac{t}{2}}$, niin saadaan

$$
|(f(x-t)-f(x))D_n(t)| < |Mt\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(t(n+\frac{1}{2}))}{\sin\frac{t}{2}}| \le \frac{M}{\pi}|\frac{t/2}{\sin t/2}|,
$$

kun $|t| < \delta$. Olkoon $0 < \epsilon < \delta$. Tällöin ylärajafunktio $\frac{M}{\pi}|\frac{t/2}{\sin t/2}|$ on rajoitettu välillä $[-\epsilon, \epsilon]$, sillä

$$
\lim_{t\to 0}\frac{t/2}{\sin t/2} = \lim_{t\to 0}\frac{1/2}{1/2\cos t/2} = 1,
$$

joten funktio on jatkuva ja siten rajoitettu. Nyt

$$
|\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t| \le C\epsilon
$$

jollakin C kaikilla n.

Nyt siis kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$
\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{-\pi}^{-\epsilon}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\epsilon}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t\Big) = 0
$$

ja

$$
-C\epsilon < \lim_{n\to\infty}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t < C\epsilon.
$$

Siispä on oltava

$$
-C\epsilon < \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t < C\epsilon,
$$

jolloin on

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

$\square$

Määritelmä 4.24. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä x, merkitään $f(x-)$, on raja-arvo

$$f(x-) = \lim_{t\to x, t<x} f(t).$$

Vastaavasti oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$f(x+) = \lim_{t\to x, t>x} f(t).$$

Lause 4.25. *Olkoon funktio f 2π-jaksollinen paloittain C^1-funktio. Tällöin funktion f Fourier'n sarja pisteessä x suppenee arvoon*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Jos funktio f on jatkuva pisteessä x, niin

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x).$$

Todistus. Funktion f Fourier'n sarjan osasummat pisteessä x ovat

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Todistetaan lauseen väite todistamalla, että Fourier'n sarjan osasumman ja väitetyn raja-arvon erotuksen raja-arvo on nolla:

$$S_n(f,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \\
&= \int_0^\pi f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t - \frac{f(x+)}{2} - \frac{f(x-)}{2} \\
&= \int_0^\pi f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi f(x+)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi f(x-)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi f(x+)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\pi f(x-)D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (f(x-t)-f(x-))D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi (f(x+t)-f(x+))D_n(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Nyt, koska funktio f on paloittain C^1-funktio, niin voidaan valita sellainen $r_0 > 0$, jolle funktio f on jatkuva ja jatkuvasti derivoituva väleillä $[x - r_0, x]$ ja $[x, x + r_0]$. Funktio on nyt myös Lipschitz-jatkuva kyseisillä väleillä. Huomiodaan vielä, että funktiolla voi olla epäjatkuvuuspiste pisteessä x, jolloin funktio ei välttämättä ole jatkuva välillä $[x - r_0, x + r_0]$ Nyt lauseen 4.22 mukaan ei tarvitse tutkia muuta kuin suppenemista 2δ, $\delta < r_0$ kokoisella välillä:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| S_n(f,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^\pi (f(x-t)-f(x-))D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi (f(x+t)-f(x+))D_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^\delta (f(x-t)-f(x-))D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\delta (f(x+t)-f(x+))D_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left| \int_0^\delta M_1 t D_n(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_0^\delta M_2 t D_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta M_1 \left| \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t + \int_0^\delta M_2 \left| \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Itseisarvojen sisälle jäänyt funktio on aiemmin osoitettu rajoitetuksi, joten kaikilla luonnollisilla luvuilla n on olemassa vakio C niin, että

$$
\int_0^\delta M_2 \left| \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t < C\delta
$$

aina, kun $0 < \delta < r_0$. Tällöin on oltava

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n(f,x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| < C\delta$$

kaikilla $0 < \delta < r_0$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n(f,x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| = 0.$$

$\square$

Lause 4.26. *Olkoon f 2π-jaksollinen C^1-funktio. Funktion derivaatan n. Fourier-kerroin on*

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n).$$

Todistus. Todistetaan tämä osittaisintegroimalla derivaattafunktion Fourier'n kerrointa:

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(t)e^{-int} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-ine^{-int}) \\
&= \frac{1}{2\pi} f(\pi)\cdot(-1) - \frac{1}{2\pi} f(-\pi)\cdot(-1) + in\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} \\
&= 0 + in\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

$\square$

Seuraavat lauseet tähtäävät siihen, että osoitetaan, että rajoitetusti heilahtelevan funktion Fourier'n sarja suppenee niissä pisteissä missä funktio on jatkuva.

Lause 4.27. *Jos funktio f on jatkuva 2π-jaksollinen rajoitetusti heilahteleva funktio, niin Fourier'n kertoimien itseisarvot ovat pienempiä kuin $\frac{A}{|n|}$:*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{A}{|n|}$$

jollakin $A \in \mathbb{R}$.

Todistus. [1] Kun $n = 0$, niin $\frac{A}{|n|} = \infty$, joten väite on selvä.

Kun $n \neq 0$, niin todistetaan tämä osittaisintegoimalla. Osittaisintegrointia voidaan käyttää, sillä kun funktio f on rajoitetusti heilahteleva, niin se on integroituva ja melkein kaikkialla differentioituva:

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(n)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\left(\Big/_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)e^{-int}}{-in} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f'(t)e^{int}}{-in}\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2\pi in}\right|\int_{-\pi}^{\pi}\left|f'(t)e^{int}\right|\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi|n|}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi|n|}V(f).
\end{aligned}$$

Edellisen epäyhtälöketjun viimeinen osa $\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|\mathrm{d}t = V(f)$ seuraa lauseesta 2.14. $\square$

Lause 4.28. *Jos f on paloittain jatkuva 2π-jaksollinen rajoitetusti heilahteleva funktio, niin funktion f Fourier'n kertoimien itseisarvot $|\widehat{f}(n)|$ ovat pienempiä kuin $\frac{A}{|n|}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Kun $n = 0$, niin väite on selvä.

Oletetaan, että $n \neq 0$. Olkoon E funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko. Koska funktio f on rajoitetusti heilahteleva, niin joukko E on numeroituva. Olkoon nyt

$$x_1, x_2, \dots \in E,\ x_0 = -\pi \text{ ja } x_0 < x_1 < x_2 < ... < \pi.$$

Jos epäjatkuvuuspisteitä on äärellinen määrä, m kappaletta, niin sovitaan, että $x_k = \pi$ kaikilla $k \geq m+1$. Nyt funktion f Fourier'n kertoimien itseisarvot voidaan kirjoittaa seuraavalla tavalla:

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{int}\mathrm{d}t\right|.$$

Funktio f on jatkuva väleillä (x_k, x_{k+1}), joten voidaan käyttää osittaisintegrointia:

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{0}^{\infty} \left(\Big/_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(t)e^{-int}}{-in} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f'(t)e^{int}}{-in} \mathrm{d}t \right) \right|.$$

Nyt summa voidaan jakaa kahteen osaan, sillä funktiolle f pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty :$$

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi in} \left(\sum_{0}^{\infty} \Big/_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{-int} - \sum_{0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)e^{int} \mathrm{d}t \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi in} \left(0 - \sum_{0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)e^{int} \mathrm{d}t \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi in} \sum_{0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)e^{int} \mathrm{d}t \right|.
\end{aligned}$$

Tätä voidaan arvioida ylöspäin siirtämällä itseisarvo summan ja integraalin sisälle:

$$|\widehat{f}(n)| \leq \left| \frac{1}{2\pi in} \right| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| f'(t)e^{int} \right| \mathrm{d}t = \left| \frac{1}{2\pi in} \right| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t$$
$$= \left| \frac{1}{2\pi in} \right| \sum_{k=0}^{\infty} V(f_{|[x_k, x_{k+1}]}) \leq \left| \frac{1}{2\pi in} \right| V(f).$$

□

Seuraavaksi todistetaan, että kun Fourier'n kertoimet voidaan rajoittaa ylhäältä funktiolla $\frac{A}{|n|}$, niin Fourier'n sarja suppenee. Tätä varten todistetaan ensin muutamia aputuloksia. Aputuloksia varten muistetaan aiemmin käytetyt merkinnät Fourier'n sarjan osasummalle (S_n) ja osasummien keskiarvolle (σ_n). Lisäksi merkitään indeksistä n indeksiin m olevien osasummien keskiarvoa merkinnällä

$$\sigma_{n,m}(f,x) = \frac{S_{n+1}(f,x) + ... + S_m(f,x)}{m - n}.$$

Aputulos 4.29. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio. Nyt jokaiselle kokonaislu-*

vulle k pätee

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) = f(x)$$

kaikissa pisteissä x, joissa funktio f on jatkuva. Jos funktio on jatkuva koko määrittelyvälillä, niin suppeneminen on tasaista.

Todistus. [1] Osasummien keskiarvolle pätee

$$\begin{aligned}
\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) &= \frac{S_{kn+1}(f,x) + ... + S_{(k+1)n}(f,x)}{(k+1)n - kn} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{kn} S_i(f,x) - \sum_{i=0}^{kn} S_i(f,x) + \sum_{i=kn+1}^{(k+1)n} S_i(f,x)}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{(k+1)n} S_i(f,x) - \sum_{i=0}^{kn} S_i(f,x)}{n} \\
&= \frac{(k+1)n\sigma_{(k+1)n} - kn\sigma_{kn}}{n} \\
&= (k+1)\sigma_{(k+1)n} - k\sigma_{kn}.
\end{aligned}$$

Nyt, kun luku n lähestyy ääretöntä, niin lauseen 4.16 mukaan osasummien keskiarvot lähestyvät funktiota f pisteessä x, jos funktio on jatkuva pisteessä x:

$$(k+1)\sigma_{(k+1)n} - k\sigma_{kn} \xrightarrow{n\to\infty} (k+1)f(x) - kf(x) = f(x).$$

Lisäksi suppeneminen on tasaista jos funktio on jatkuva koko määrittelyvälillä. □

Aputulos 4.30. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio jolle pätee $|\widehat{f}(j)| \leq \frac{A}{|j|}$, kun j on nollasta poikkeava. Nyt kaikille positiivisille kokonaisluvuille k,m,n joille pätee $kn < m < (k+1)n$ on voimassa*

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - S_m(f,x)| \leq \frac{2A}{k}.$$

Todistus. [1] Osasummien keskiarvolle pätee

$$\begin{aligned}
\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) &= \frac{S_{kn+1}(f,x) + ... + S_{(k+1)n}(f,x)}{(k+1)n - kn} \\
&= \sum_{j=-kn-1}^{kn+1} \frac{\widehat{f}(j)e^{ijx}}{n} + ... + \sum_{j=-(k+1)n}^{(k+1)n} \frac{\widehat{f}(j)e^{ijx}}{n}
\end{aligned}$$

$$= n\sum_{j=-kn}^{kn}\frac{\widehat{f}(j)e^{ijx}}{n} + \sum_{kn<|j|\leq(k+1)n}\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}$$
$$= S_{kn}(f,x) + \sum_{kn<|j|\leq(k+1)n}\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}.$$

Nyt siis pätee

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - S_m(f,x)\right| \\
=&\left|S_{kn}(f,x) + \sum_{kn<|j|\leq(k+1)n}\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx} - S_m(f,x)\right| \\
=&\left|\sum_{kn<|j|\leq(k+1)n}\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx} - \sum_{kn<|j|\leq m}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right| \\
=&\left|\sum_{kn<|j|\leq m}\frac{1+(k+1)n-|j|-n}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right. \\
&\left.+\sum_{m<|j|\leq(k+1)n}\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right| \\
\leq&\sum_{kn<|j|\leq m}\left|\frac{1+(k+1)n-|j|-n}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right| \\
&+\sum_{m<|j|\leq(k+1)n}\left|\frac{1+(k+1)n-|j|}{n}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right| \\
\leq&\sum_{kn<|j|\leq|(k+1)n}|\widehat{f}(j)| \\
\leq&2\sum_{kn+1}^{(k+1)n}\frac{A}{|j|} \leq 2\sum_{kn+1}^{(k+1)n}\frac{A}{kn} = \frac{2An}{kn} = \frac{2A}{k}.
\end{aligned}$$

□

Lause 4.31. *Olkoon f integroituva 2π-jaksollinen funktio, jonka Fourier'n kertoimien itseisarvot $|\widehat{f}(n)|$ ovat pienempiä kuin $\frac{A}{|n|}$, jollakin vakiolla A. Silloin funktion f Fourier'n sarja suppenee funktioon f kaikissa pisteissä, joissa funktio f on jatkuva. Jos f on jatkuva koko jaksollaan, niin suppeneminen on tasaista.*

Todistus. [1] Olkoon $\epsilon > 0$ mikä tahansa. On olemassa luku A, jolle pätee epäyhtälö

$$|\widehat{f}(j)| \leq \frac{A}{|j|},$$

kun kokonaisluku j on nollasta poikkeava. Valitaan kokonaisluku k, jolle pätee

$$\frac{A}{k} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Nyt aputuloksen 4.29 mukaan voidaan valita luku $n_0 > k$ niin, että kaikille $n > n_0$ pätee

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Aputuloksen 4.30 mukaan puolestaan, kun valitaan $m > kn_0$ ja n niin, että $kn_0 < kn < m < (k+1)n$, pätee

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - S_m(f,x)| \leq \frac{2A}{k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt kahdesta edellisestä epäyhtälöstä seuraa, että kun $m > kn_0$ pätee, niin on myös

$$\begin{aligned}|S_m(f,x) - f(x)| &= |S_m(f,x) - f(x) + \sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - \sigma_{kn,(k+1)n}(f,x)| \\ &\leq |S_m(f,x) - \sigma_{kn,(k+1)n}(f,x)| + |\sigma_{kn,(k+1)n}(f,x) - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Nyt on siis todistettu, että jos funktion f Fourier'n sarjan summattavien jono on ylhäältä rajoitettu jollakin muotoa $\frac{A}{|n|}$ olevalla jonolla, jollakin $A > 0$, niin funktion f Fourier'n sarja suppenee niissä pisteissä missä funktio f on jatkuva. Lisäksi on todistettu, että jos funktio f on rajoitetusti heilahteleva, niin sen Fourier'n sarjan summattavien jono suppenee samaa tahtia kuin funktio $\frac{A}{|n|}$. Siispä funktion f Fourier'n sarja suppenee funktion f jatkuvuuspisteissä jos funktio on rajoitetusti heilahteleva. Lisäksi huomataan, että jos funktio f on absoluuttisesti jatkuva, (paloittain) C^1-funktio tai Lipschitz-jatkuva, niin se on rajoitetun heilahtelun funktio, ja sen Fourier'n sarja suppenee niissä pisteissä missä funktio on jatkuva.

4.5 Esimerkki jatkuvasta funktiosta, jonka Fourier'n sarja ei suppene

Seuraavaksi annetaan esimerkki jatkuvasta funktiosta, jonka Fourier'n sarja ei suppene. Tässä käytetään apuna tietoa siitä, että Lebesguen vakioiden $L_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \mathrm{d}t$ jono hajaantuu, kun n lähestyy ääretöntä. Esimerkissä käytetään funktioita, joilla on ikäviä ominaisuuksia. Kun ikävyyksien annetaan kasautua, niin saadaan jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja ei suppene. Kappaleen runko on seuraava:

- Osoitetaan, että L_n hajaantuu.
- Konstruktoidaan funktio.
- Tutkitaan funktion ominaisuuksia.
- Osoitetaan, että kyseisen funktion Fourier'n sarja hajaantuu pisteessä 0.

Aloitetaan Lebesquen vakioista. Lebesquen vakiot on määritelty Dirichlet'n ytimen itseisarvon integraalina:

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \mathrm{d}t.$$

Lause 4.32. *On olemassa nollasta poikkeavat positiiviset vakiot C_1 ja C_2, joille pätee*

$$C_1 \log n < L_n < C_2 \log n \quad \textit{kaikilla } n \geq 2.$$

Todistus. Lauseen 2.6 mukaan Lebesquen vakio voidaa kirjoittaa muodossa

$$L_n = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t.$$

Koska Dirichlet'n ydin on symmetrinen, voidaan edellinen muuttaa muotoon

$$L_n = 2 \int_{0}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t.$$

Tälle voidaan tehdä muuttujanvaihto $t = 2u$, jolloin saadaan

$$L_n = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} \right| \mathrm{d}u = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} \right| \mathrm{d}u.$$

Selvitetään ensin alaraja C_1 : Koska $\sin x \leq x$ kaikilla positiivisilla x :n arvoilla, niin Lebesquen vakiota voidaan arvioida alaspäin:

$$L_n \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2n+1)u)}{u} \right| \mathrm{d}u.$$

Tämä alaraja voidaan esittää summana

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{k}{2n+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2n+1)u)}{u} \right| \mathrm{d}u.$$

Edellistä voidaan arvioida vielä alaspäin korvaamalla nimittäjät integraalien ylärajoilla:

$$L_n \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{k}{2n+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2n+1)u)}{u} \right| \mathrm{d}u \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{k}{2n+1}\frac{\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2n+1)u)}{\frac{k+1}{2n+1}} \right| \mathrm{d}u.$$

Summan sisällä olevat integraalit on helppo integroida, ja tulokseksi saadaan

$$L_n \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

Nyt aputuloksen 4.33 avulla tämä saadaan muotoon

$$L_n \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \log \frac{k+1}{k} > \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{k+1}{k} = \frac{4}{\pi^2} \log n.$$

Käsitellään seuraavaksi yläraja: Lebesquen vakio voidaan ilmoittaa muodossa

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t.$$

Kun integraalin jakaa osiin, niin saadaan

$$L_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{1/n} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t + \int_{1/n}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \right).$$

Arvioidaan ensin ensimmäistä integraalia. Integraalille pätee

$$\int_0^{1/n} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq 1 + \tfrac{1}{2n},$$

sillä aputuloksen 4.34 mukaan, kun huomiodaan, että on $\sum_{k=1}^{n} \cos(tk) \leq n$, pätee

$$\left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq n + \tfrac{1}{2},$$

jolloin on

$$\int_0^{1/n} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{1/n} n + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Kun käsitellään toista osaa integraalista, saadaan

$$\int_{1/n}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq \int_{1/n}^{\pi} \left| \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2} \int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{2}(\log \pi + \log n).$$

Edellisessä epäyhtälöketjussa viimeinen epäyhtälö seuraa sinifunktion ominaisuuksista:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin t, \quad \text{kun } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}.$$

Nyt siis Lebesquen vakiolle ollaan saatu yläraja:

$$L_n \leq 2\log n + 2\log \pi + \frac{1}{\pi}(1 + \tfrac{1}{2n}) \leq C_2 \log n.$$

Näin Lebesquen vakioille ollaan saatu ala- ja ylärajat, jotka ovat oikeaa muotoa, ja lause on todistettu. □

Lauseessa käytettiin seuraavia kahta aputulosta:

Aputulos 4.33. *Kaikille kokonaisluvuille $n \geq 1$ pätee*

$$\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Todistus. Käytetään integraalilaskennan väliarvolausetta: Koska pätee

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log \frac{n+1}{n}$$

ja $\frac{1}{x}$ on aidosti vähenevä ja jatkuva välillä $[n,n+1]$, niin integraalilaskennan väliarvolauseen mukaan pätee

$$\frac{1}{n+1} < \frac{\log \frac{n+1}{n}}{n+1-n} < \frac{1}{n},$$

eli

$$\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

□

Aputulos 4.34. *Kun t ei ole 2π:n monikerta ja n on jokin luonnollinen luku, niin pätee*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Todistus. Summa $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ on eksponenttimuodossa

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + e^{-ikt} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}.$$

Huomataan, että saadaan kahden geometrisen sarjan summa, jolle pätee

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{int} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-int} = \frac{1}{2}\frac{e^{it} - e^{it(n+1)}}{1-e^{it}} + \frac{1}{2}\frac{e^{-it} - e^{-it(n+1)}}{1-e^{-it}}.$$

Kun nyt saadut summattavat lavennetaan samannimisiksi ja lasketaan yhteen, saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\frac{-e^{it(n+1)} + e^{itn} + e^{-itn} - e^{-it(n+1)}}{2 - e^{it} - e^{-it}} - \frac{1}{2}.$$

Nyt huomataan, että riittää todistaa seuraava yhtäsuuruus:

$$\frac{-e^{it(n+1)} + e^{itn} + e^{-itn} - e^{-it(n+1)}}{2 - e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Yhtälön vasemman puolen saa toiseen muotoon seuraavalla tavalla:

$$\frac{-e^{it(n+1)}+e^{itn}+e^{-itn}-e^{-it(n+1)}}{2-e^{it}-e^{-it}}=\frac{-e^{it(n+1)}+e^{itn}+e^{-itn}-e^{-it(n+1)}}{-\left(e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{it(n+\frac{1}{2})}(e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}})+e^{-it(n+\frac{1}{2})}(e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}})}{-\left(e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}}\right)^2}=\frac{e^{it(n+\frac{1}{2})}-e^{-it(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}}}.$$

Kun vielä lavennetaan $\frac{1}{2i}$:llä niin saadaan suoraan haluttu muoto:

$$\frac{e^{it(n+\frac{1}{2})}-e^{-it(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}}}=\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{it(n+\frac{1}{2})}-e^{-it(n+\frac{1}{2})}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{it}{2}}-e^{\frac{-it}{2}}\right)}=\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

□

Konstruoidaan seuraavaksi tutkittava funktio. Olkoon A mikä tahansa positiivinen reaaliluku. Olkoon N sellainen luku, jolle pätee $L_N > A$. Olkoon

$$g_N(t)=\begin{cases}1, & \text{kun } D_N(t)\geq 0,\\ -1, & \text{kun } D_N(t)<0.\end{cases}$$

Nyt funktion g_N Fourier'n sarjan N. osasumma pisteessä 0 voidaan laskea:

$$\begin{aligned}S_N(g_N,0)&=\int_{-\pi}^{\pi}g_N(-t)D_N(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{\pi}g_N(t)D_N(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\mathrm{d}t\\&=L_N>A.\end{aligned}$$

Funktio g_N on paloittain jatkuva rajoitettu funktio, joten jokaiselle $\epsilon > 0$ löydetään jatkuva funktio g_ϵ, jolle pätee

$$|g_\epsilon(t)|<1,$$

ja

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - g_N(t)| \mathrm{d}t < \epsilon.$$

Kun lisäksi muistetaan, että $D_n(t)$ on jatkuva kaikilla n, niin huomataan, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - g_N(t)| D_N(t) \mathrm{d}t < M\epsilon,$$

missä $M = \max D_N(t)$. Arvioidaan funktion g_ϵ Fourier'n sarjan osasummaa pisteessä 0:

$$\begin{aligned}
&S_n(g_\epsilon,0) = \int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(-t) D_N(t) \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(g_\epsilon(-t) - g_N(-t) + g_N(-t)\right) D_N(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(g_\epsilon(-t) - g_N(-t)\right) D_N(t) \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} g_N(-t) D_N(t) \mathrm{d}t \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} g_N(-t) D_N(t) \mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_\epsilon(-t) - g_N(-t)\right| D_N(t) \mathrm{d}t \\
&> L_N - M\epsilon.
\end{aligned}$$

Kun nyt valitaan funktio $g = g_\epsilon$, missä $A + M\epsilon < L_N$, niin saadaan

$$S_N(g,0) > A.$$

Weierstrassin approksimaatiolauseen (lause 4.17) mukaan funktiolle g ja positiiviselle luvulle δ löytyy trigonometrinen polynomi $p(t) = \sum_{n=-M}^{M} p_n e^{int}$, jolle pätee

$$\sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |p(t) - g(t)| < \delta.$$

Selvästi voidaan myös valita funktio p niin, että sen Fourier'n sarjan N. osasumma on suurempi kuin A:

$$S_N(p,0) > A.$$

Tällöin pätee

$$\sum_{n=-N}^{N} p_n = \sum_{n=-N}^{N} p_n e^{in0} = S_N(p,0) > A.$$

Yhtälöketjun viimeinen osa seurasi lauseesta 3.4: jos funktiolla p on esitys $p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{inx}$, niin funktion Fourier'n kertoimet ovat $\widehat{p}(n) = p_n$ Lisäksi voidaan valita $p(t)$ niin, että sen itseisarvo on aina pienempi kuin 1, sillä arvioitava funktio g on aina itseisarvoltaan pienempää kuin 1.

Nyt voidaan kaikille luvuille $k = 1,2...$ löytää sellaiset trigonometriset polynomit

$$p_k(t) = \sum_{j=-m(k)}^{m(k)} \widehat{p_k}(j) e^{ijt},$$

jotka ovat itseisarvoltaan yhtä pienempiä:

$$|p_k(t)| \leq 1, \tag{4}$$

ja joille pätee

$$\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{p_k}(j) > 2^{2k} \tag{5}$$

jollakin positiivisella luvulla $n(k)$.

Oletetaan, että $m(k) > n(k)$ ja $m(k) > m(k-1)$ [3]. Olkoon

$$r(k) = \sum_{j=1}^{k} (2m(j) + 1)$$

ja

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e^{ir(k)t} p_k(t). \tag{6}$$

Lause 4.35. *Funktiolla $f_n(t)$ on seuraavat ominaisuudet:*

(i) $\widehat{f_n}(r(k) + j) = \frac{1}{2^k} \widehat{p_k}(j)$,

(ii) $\widehat{f_n}(j) = 0$, *kun* $j < 0$.

Todistus. Lauseen todistus perustuu siihen, että funktion f Fourier'n kertoimet ovat

[3] Trigonometriseen polynomiin voidaan tarvittaessa lisätä nollatermejä tarvittava määrä.

yksikäsitteisiä. Fourier'n sarja on muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int},$$

ja jos funktiolle löydetään toinen samanlainen esitys, niin sen on oltava funktion Fourier'n sarja.

Funktio f_n on määritelty seuraavasti:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e^{ir(k)t} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=-m(k)}^{m(k)} \frac{1}{2^k} e^{i(r(k)+j)t} \widehat{p_k}(j). \tag{7}$$

Tämä on oikeaa muotoa, joten riittää enää etsiä Fourier'n kertoimet. Fourier'n kertoimeksi

$$\widehat{f_n}(s)$$

tulee luvun e^{ist} kertoimien summa yhtälön (7) sarjasta. Huomataan, että

(i) kun luvun s voi esittää muodossa $s = r(k) + j$, missä $k \leq n$ ja $j \leq m(k)$, niin kertoimia on yksi tai useampi,

(ii) kun lukua s ei voi esittää kyseisessä muodossa, kertoimia ei ole yhtäkään.

Nyt riittää osoittaa, että

(i) Kun luvun s voi esittää muodossa $s = r(k) + j$, missä $k \leq n$ ja $j \leq m(k)$, niin kertoimia on täsmälleen 1.

(ii) Negatiivisia lukuja ei voi esittää muodossa $r(k) + j$, missä $k \leq n$ ja $j \leq m(k)$.

Kohdan (i) todistus: Tutkitaan kahta peräkkäistä summattavaa yhtälön (7) sisemmästä summalausekkeesta:

$$\sum_{j=-m(k)}^{m(k)} \frac{1}{2^k} e^{i(r(k)+j)t} \widehat{p_k}(j)$$

ja

$$\sum_{j=-m(k+1)}^{m(k+1)} \frac{1}{2^{k+1}} e^{i(r(k+1)+j)t} \widehat{p_{k+1}}(j).$$

Nyt riittää osoittaa, että $r(k+1)+j \neq r(k)+h$ kaikilla $j < m(k)$ ja $h < m(k+1)$. Tähän riittää osoittaa se, että

$$r(k+1) - m(k+1) > r(k) + m(k).$$

Tämä on totta, sillä

$$r(k+1) - m(k+1) = r(k) + 2m(k+1) - m(k+1) > r(k) + m(k).$$

Kohdan (ii) todistus: Kohdassa (i) tuli samalla todistettua, että kun $k > 1$, niin $r(k) + j > r(1) + h$ kaikilla $j < m(k)$ ja $h < m(1)$. Riittää siis osoittaa, että $r(1) - m(1) \geq 0$:

$$r(1) - m(1) = 2m(1) + 1 - m(1) = m(1) + 1 \geq 0.$$

$\square$

Funktiojonon f_n raja-arvosta saadaan haluttu jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja hajaantuu jossain pisteessä. Todistetaan ensin, että funktiosarjalla on raja-arvo, ja että kyseinen raja-arvofunktio on jatkuva:

Lause 4.36. *Kohdassa (6) määritelty funktiojono suppenee jatkuvaan funktioon f.*

Todistus. Olkoon $n' \geq n+1$. Nyt pätee

$$|f_{n'}(t) - f_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n'} \frac{1}{2^k} e^{ir(k)t} p_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n'} \frac{1}{2^k} \left| e^{ir(k)t} p_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n'} \frac{1}{2^k},$$

jolloin Weierstrassin M-testin mukaan jono f_n suppenee tasaisesti jatkuvaan funktioon f. $\square$

Nyt lauseen 4.35 mukaiset ominaisuudet periytyvät tälle funktiolle. Näitä ominaisuuksia käyttämällä saadaan todistettua, että funktion f Fourier'n sarja hajaantuu pisteessä 0.

Lause 4.37. *Funktion f Fourier'n sarja hajaantuu pisteessä* 0.

Todistus. Arvioidaan seuraavaa funktion f kahden Fourier'n osasumman erotuksen itseisarvoa:

$$\left|S_{r(k)+n(k)}(f,0) - S_{r(k)-n(k)}(f,0)\right|.$$

Käyttämällä lauseen 4.35 kohdan (ii) mukaista ominaisuutta, saadaan osasummat kirjoitettua seuraavasti:

$$\left|S_{r(k)+n(k)}(f,0) - S_{r(k)-n(k)}(f,0)\right| = \left|\sum_{j=0}^{r(k)+n(k)} \widehat{f}(j) - \sum_{j=0}^{r(k)-n(k)} \widehat{f}(j)\right|.$$

Jälkimmäiselle muodolle pätee

$$\left|\sum_{j=0}^{r(k)+n(k)} \widehat{f}(j) - \sum_{j=0}^{r(k)-n(k)} \widehat{f}(j)\right| = \left|\sum_{j=r(k)-n(k)+1}^{r(k)+n(k)} \widehat{f}(j)\right|$$
$$= \left|\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{f}(r(k)+j) \quad - \widehat{f}(r(k)-n(k))\right|.$$

Nyt voidaan muuttaa Fourier'n kertoimet lauseen 4.35 kohdan (i) mukaisiksi:

$$\left|S_{r(k)+n(k)}(f,0) - S_{r(k)-n(k)}(f,0)\right| = \frac{1}{2^k}\left|\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{p_k}(j) - \widehat{p_k}(n(k))\right|.$$

Tätä voidaan arvioida alaspäin kolmioepäyhtälöllä:

$$\left|S_{r(k)+n(k)}(f,0) - S_{r(k)-n(k)}(f,0)\right| = \frac{1}{2^k}\left|\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{p_k}(j) - \widehat{p_k}(n(k))\right|$$
$$\geq \frac{1}{2^k}\left(\left|\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{p_k}(j)\right| - |\widehat{p_k}(n(k))|\right).$$

Kun vielä käytetään funktion p ominaisuutta (5), ja todetaan ominaisuuden (4) avulla, että $|\widehat{p_k}(n(k))|$ on rajoitettu, saadaan

$$\left|S_{r(k)+n(k)}(f,0) - S_{r(k)-n(k)}(f,0)\right|$$
$$\geq \frac{1}{2^k}\left(\left|\sum_{j=-n(k)}^{n(k)} \widehat{p_k}(j)\right| - |\widehat{p_k}(n(k))|\right) \geq \frac{1}{2^k}\left(2^{2k} - C\right).$$

Tämä hajaantuu äärettömään, kun k lähestyy ääretöntä, joten funktion f Fourier'n sarja hajaantuu pisteessä 0. $\square$

Lähteitä

[1] Rajendra Bhatia, *Fourier Series,* The Mathematical Assosiation of America, 2005

[2] H. Dym ja H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals,* Academic Press, Inc, 1972

[3] Noella Grady, *Functions of Bounded Variation* PDF-dokumentti osoitteessa www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/grady.pdf luettu 10.6.2017

[4] Tero Kilpeläinen, *Mitta- ja integraaliteoria, luentomoniste,* Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2004, luettu 10.6.2017

[5] MAOL, *MAOL-taulukkokirja,* Otavan kirjapaino OY, 2001

[6] Walter Rudin *Principles of Mathematical Analysis, Second Edition* McGraw-Hill, Inc, 1964

[7] Mikko Salo, *Fourier analysis and distribution theory, lecture notes,* Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2013, luettu 10.6.2017

[8] Michael Spivak, *Calculus,* Cambridge University Press, 1994

[9] Karl R. Stromberg *An Introduction to Classical Real Analysis,* Wadsworth Inc., 1981