# Kompaktisuus ja kompaktisointi

Mikko Salo

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017

**Tiivistelmä:** Mikko Salo, *Kompaktisuus ja kompaktisointi* matematiikan pro gradu -tutkielma, 47. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2017.

Tässä tutkielmassa käsitellään topologisia avaruuksia ja erityisesti niiden kompaktisuutta. Topologiset avaruudet ovat yleistys normiavaruuksista, mutta niissä ei tunneta etäisyyden käsitettä. Topologisia käsitteitä ovatkin sellaiset, jotka säilyvät avaruuden jatkuvissa muodonmuutoksissa, kuten venytyksissä ja taivutuksissa. Topologian näkökulmasta esimerkiksi väli $(0, 1)$ on sama kuin koko reaaliakseli $\mathbb{R}$.

Kompaktisuus on yksi tärkeimpiä topologisia ominaisuuksia ja tutkielmassa todistetaankin useita kompaktisuuteen liittyviä tuloksia, joista tärkein on ehdottomasti Tihonovin lause. Tihonovin lauseen sovelluksena todistamme myös Heine-Borelin lauseen, joka karakterisoi euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompaktit osajoukot. Kompaktilla avaruudella on monia hyödyllisiä ja haluttuja ominaisuuksia. Tunnettuna esimerkkinä näistä on se, että jatkuva kuvaus $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman ja pienemmin arvonsa jokaisessa kompaktissa joukossa.

Lisäksi tutkielmassa perehdytään siihen, miten topologista avaruutta approksimoidaan kompaktilla topologisella avaruudella. Tätä kutsutaan kompaktisoinniksi ja se tapahtuu upottamalla topologinen avaruus kompaktiin topologiseen avaruuteen siten, että alkuperäinen avaruus on topologian mielessä hyvin suuri uudessa kompaktissa avaruudessa. Esimerkkinä kompaktisoinnista annetaan yhden pisteen kompaktisointi ja Stone-Čech-kompaktisointi, jotka tullaan osoittamaan tietyissä tapauksissa pienimmäksi ja suurimmaksi kompaktisoinniksi.

Esitiedoiksi lukijalta vaaditaan perustaidot joukko-opista. Lisäksi Heine-Borelin lauseen ymmärtämiseen vaaditaan tietoja vektoriavaruuksista ja erityisesti euklidisista avaruuksista.

In this thesis we address topological spaces and especially their compactness. Topological spaces are a generalization of inner product spaces, but they don't have the concept of distance. Topological concepts are those that are preserved under continuous deformations, such as stretching and bending. For example in topological terms the interval $(0, 1)$ is the same as the entire real axis $\mathbb{R}$

One of the most important topological concepts is compactness and we prove many theorems regarding compactness, the most important of which is by far Tychonoff theorem. As an application of Tychonoff theorem we also prove Heine-Borel theorem which characterizes the compact subsets of the euclidean space $\mathbb{R}^n$. Compact spaces have many useful and wanted properties. A well known example of these is that a continuous mapping $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ attains its minimal and maximal values on any compact interval.

Additionally in this thesis we look into approximating topological spaces with compact topological spaces. This is called compactification and it's done by embedding a topological space into a compact topological space such that the original space is very large in the new compact space in terms of topology. As examples of compactification we give the one point compactification and Stone-Čech-compactification, which turn out to be the smallest and largest compactifications in certain cases.

The reader is expected to have basic understanding of set theory. Additionally, in order to understand the Heine-Borel theorem, the reader must have knowledge of vector spaces, especially of the euclidean space.

# Sisältö

# Johdanto

Tässä tutkielmassa pyritään perehtymään topologisiin käsitteisiin ja tuloksiin, joita ei välttämättä käydä matematiikan tutkintoon kuuluvilla topologian peruskursseilla. Erityisen tärkeässä asemassa tutkielmassa on kompaktisuus, joka on yksi topologian keskeisimpiä käsitteitä. Kompaktisuuden voidaan ajatella olevan yleistys euklidisen avaruuden sulkeutuneisuudesta ja rajoittuneisuudesta. Lisäksi Hausdorff-avaruudet ovat tärkeässä osassa varsinkin kolmannessa luvussa, kun tutustutaan kompaktisointeihin.

Tutkielman voidaan ajatella koostuvan kolmesta osasta. Ensimmäinen luku on puhtaasti topologiaa. Tässä määritellään hyvin paljon topologisia käsitteitä ja todistetaan tuloksia. Luvun päätteeksi todistetaan Tihonovin lause, jolla on hyvin tärkeitä seurauksi, kuten tulemme huomaamaan.

Toisessa luvussa perehdytään siihen, miten topologia liittyy reaalianalyysiin. Jos lukijalla ei ole esitietoja topologiasta, niin vasta tässä vaiheessa saattaa selvitä, mistä topologiassa edes on kyse. Lisäksi toisessa luvussa todistetaan kuuluisa Heine-Borelin lause käyttäen topologisia tuloksia.

Kolmannessa luvussa perehdytään siihen, miten topologisia avaruuksia voidaan approksimoida kompakteilla topologisilla avaruuksilla. Tässä myös Hausdorff-avaruudet ovat tärkeässä roolissa, kuten tulemme huomaamaan. Luvussa todistetaan myös Stone-Čechin lause

Tutkielmassa seurataan jossain määrin Kelleyn kirjaa General Topology [**1**] ja Terence Taon blogia [**3**]. Suuri osa lauseista, todistuksista ja määritelmistä tulevat kirjoittajan omista tiedoista ja päättelyistä, vaikkeivät varmastikaan uusia tuloksia matematiikan alalla olekaan. Paljolti topologian perustuloksista on opittu Jyväskylän Yliopiston topologian kurssilta ja Väisälän teoksesta Topologia II [**2**]. Lukijalta ei odoteta minkäänlaisia esitietoja topologiasta, vaan kaikki tutkielmassa tarvittavat käsitteet määritellään ja tarvittavat lauseet todistetaan.

Suuret kiitokset ansaitsee ohjaajani, Tutkijatohtori Joonas Ilmavirta, avunannosta tutkielman aiheen rajaamisessa, vinkeistä useissa todistuksissa, muutaman erittäin nokkelan vastaesimerkin (3.8 ja 3.13) idean keksimisestä, ja yleisestä ohjauksen antamisesta tutkielman kirjoittamisen aikana.

LUKU 1

# Topologia

Tämän luvun tarkoituksena on todistaa Tihonovin lause, jonka mukaan kompaktien topologisten avaruuksien tuloavaruus on edelleen kompakti. Tämän lisäksi todetaan Tihonovin lauseen ja valinta-aksiooman yhtäpitävyys. Tihonovin lauseen ja siihen tarvittavan Alexanderin lauseen todistuksissa seurataan Terence Taon blogia [**3**]. Luvussa myös määritellään työssä tarvittavia topologisia käsitteitä ja todistetaan tarvittavia tuloksia. Lisää topologisian tuloksista voi lukea Väisälän teoksesta Topologia II [**2**]. Tihonovin lauseen sovelluksena tutustutaan topologisiin vektoriavaruuksiin ja todistetaan Heine-Borelin lause.

## 1.1. Topologisia käsitteitä

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon $X$ joukko ja $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. Kokoelma $\tau$ on **topologia** joukossa $X$, jos

(1) $X, \emptyset \in \tau$.
(2) $U_i \in \tau \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, missä $I$ on mielivaltainen indeksijoukko.
(3) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.

Paria $(X, \tau)$ (tai vaihtoehtoisesti joukkoa $X$, jos topologia on selvä asiayhteydestä) sanotaan **topologiseksi avaruudeksi**. Joukkoja $U \in \tau$ sanotaan **avoimiksi**, ja joukkoja $X \setminus U$, $U \in \tau$, **suljetuiksi**.

Ehdon (3) ja induktioperiaatteen nojalla siis topologia on suljettu kaikkien äärellisten leikkausten suhteen. Annetaan avoimelle joukolle vaihtoehtoinen määritelmä sen sisältämien pisteiden avulla.

LAUSE 1.2. *Olkoon $X$ topologinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on avoin jos, ja vain jos kaikille $x \in A$ on olemassa avoin $U \subset X$ siten, että $x \in U \subset A$.*

TODISTUS. Olkoon ensiksi $A \subset X$ avoin. Tällöin väitteen $U$ voidaan valita joukoksi $A$ kaikille $x \in A$ ja väite pätee selvästikin. Olkoon sitten kaikille $x \in A$ olemassa avoin $U_x \subset X$ siten, että $x \in U_x \subset A$. Nyt

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin. □

Määritellään aluksi tarvittavia topologisia käsitteitä, eli käsitteitä joita kuvataan avoimien joukkojen avulla. Topologisen avaruuden osajoukkoon määräytyy topologia luonnollisella tavalla:

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoon $(X, \tau)$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Määritellään joukkoon $A$ **relatiivitopologia** $\tau_A$ asettamalla $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$.

On helppo tarkistaa, että $\tau_A$ oikeasti on topologia joukossa $A$. Paria $(A, \tau_A)$ sanotaan topologisen avaruuden $(X, \tau)$ **aliavaruudeksi**. Lisäksi De Morganin kaavoista huomataan, että $F \subset A$ on suljettu avaruudessa $(A, \tau_A)$ jos, ja vain jos on olemassa avaruudessa $(X, \tau)$ suljettu $S$ siten, että $F = S \cap A$. Määritellään seuraavaksi Hausdorff-avaruus, joka tulee olemaan hyvin tärkeässä osassa toisessa luvussa.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Topologinen avaruus $(X, \tau)$ on **Hausdorff** (tai **T2-avaruus**), jos kaikille $x, y \in X$, $x \neq y$, on olemassa avoimet joukot $U, V \in \tau$ siten, että $x \in U$, $y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Hausdorff-avaruus siis sisältää eräässä mielessä hyvin paljon avoimia joukkoja, sillä kaikki pisteet voidaan erotella näillä keskenään. On helppo nähdä, että Hausdorff-avaruuden aliavaruus $A$ on Hausdorff, sillä kaksi eri pistettä aliavaruudessa $A$ ovat eri pisteitä koko avaruudessa, joten niille löytyy pistevieraat ympäristöt koko avaruudessa, eivätkä näiden leikkaukset joukon $A$ kanssa myöskään sisällä samoja pisteitä siirryttäessä relatiivitopologiaan.

Eräs tärkeä topologinen ominaisuus on kuvauksen jatkuvuus. Normi- ja metrisissä avaruuksissa kuvauksen jatkuvuus määritellään etäisyyden avulla, mutta topologisessa avaruudessa ei tunneta etäisyyden käsitettä. Etäisyyden avulla saadaan kuitenkin määriteltyä avoimet joukot, joilla on samoja ominaisuuksia kuin topologian avoimilla joukoilla. Kappaleessa 2.1 perehdymme tarkemmin normiavaruuden ja topologisen avaruuden avoimien joukkojen yhteyteen.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoot $(X, \tau)$ ja $(Y, \tau')$ topologisia avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on **jatkuva**, jos kaikille $U \in \tau'$ pätee $f^{-1}[U] \in \tau$, eli jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Edelleen sanotaan, että kuvaus $f$ on **homeomorfismi**, jos $f$ on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus[1] $f^{-1}$ on myös jatkuva. Tällöin sanotaan, että topologiset avaruudet $X$ ja $Y$ ovat **homeomorfiset**.

De Morganin kaavoista ja alkukuvan kommutoinnista joukko-operaatioiden kanssa huomataan helposti, että kuvaus on jatkuva jos, ja vain jos jokaisen suljetun joukon alkukuva on suljettu. Homeomorfismin määritelmässä käänteiskuvauksen $f^{-1}$ jatkuvuudelle yhtäpitävä ehto on se, että jokaisen avaruuden $X$ avoimen joukon $U \subset X$ kuva $f(U)$ on avoin avaruudessa $U$. Tämän huomaa siitä, että bijektiiviselle kuvaukselle pätee $f^{-1}[f(A)] = f(f^{-1}[A]) = A$. Tällaista kuvausta kutsutaan **avoimeksi**. Topologia käsittelee vain avoimia joukkoja, joten homeomorfiset avaruudet ovat topologian mielessä samoja ja homeomorfisuus onkin ekvivalenssirelaatio topologisten avaruuksien luokassa. Näytetään vielä, että kahden jatkuvan kuvauksen yhdiste on jatkuva. Tämähän tietenkin yleistyy äärellisen monen jatkuvan kuvauksen yhdisteellekin induktiolla.

LEMMA 1.6. *Olkoon $X, Y, Z$ topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin $g \circ f\colon X \to Z$ on jatkuva*

TODISTUS. Tulee siis osoittaa, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon siis $U \subset Z$ avoin. Tällöin

$$(g \circ f)^{-1}[U] = (f^{-1} \circ g^{-1})[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]].$$

[1] Huomattavaa tässä ero käänteiskuvauksen ja alkukuvan välillä. Bijektiivisen kuvauksen $f$ käänteiskuvaus on kuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$, kun taas alkukuva mielivaltaiselle kuvaukselle $f$ on $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. Tässä työssä alkukuvassa käytetäänkin hakasulkeita.

Joukko $g^{-1}[U]$ on avoin avaruudessa $Y$ kuvauksen $g$ jatkuvuuden nojalla ja edelleen joukko $f^{-1}[g^{-1}[U]]$ on avoin avaruudessa $X$ kuvauksen $f$ jatkuvuuden nojalla. Siispä $g \circ f$ on jatkuva. □

Seuraavaksi otetaan käsittelyyn kompaktisuuden käsite, joka tulee olemaan tämän työn päätulosten aiheena. Kompaktisuus määritellään yleisimmin avointen peitteiden avulla:

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $(X, \tau)$ topologinen avaruus. Avaruuden $X$ **avoin peite** on kokoelma $\alpha \subset \tau$, jolle pätee

$$X = \bigcup_{U \in \alpha} U.$$

Kokoelmaa $\beta \subset \alpha$ sanotaan avoimen peitteen $\alpha$ (avoimeksi) **alipeitteeksi**, jos se edelleen peittää avaruuden $X$ yllä olevassa mielessä.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon $(X, \tau)$ topologinen avaruus. Sanotaan, että avaruus $X$ on **kompakti**, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.

On huomattavaa, että kompaktisuus on koko topologisen avaruuden ominaisuus. Topologisen avaruuden $X$ osajoukkoa $A \subset X$ kutsutaan kompaktiksi, jos topologinen avaruus $A$ relatiivitopologialle $\tau_A$ on kompakti. On kuitenkin helppo nähdä, että aliavaruus $A \subset X$ on kompakti jos, ja vain jos sen jokaisella peitteellä avaruuden $X$ avoimilla joukoilla on äärellinen alipeite. Osoitetaan seuraavaksi, että kompaktisuus säilyy siirryttäessä suljettuun aliavaruuteen

LAUSE 1.9. *Olkoon $(X, \tau)$ kompakti topologinen avaruus ja $A \subset X$ suljettu. Tällöin $(A, \tau_A)$ on kompakti topologinen avaruus.*

TODISTUS. Olkoon $\mathcal{A} = \{U_i \cap A \mid i \in I\}$ avaruuden $(A, \tau_A)$ avoin peite, missä siis $U_i$ ovat avaruuden $X$ avoimia joukkoja. Huomataan, että tälle pätee siis

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Tällöin $\mathcal{B} := \{U_i \mid i \in I\} \cup \{A^c\}$ on avaruuden $X$ avoin peite, sillä $A$ on suljettu. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$ siten, että $\{U_i \mid i \in J\} \cup \{A^c\}$ on peitteen $\mathcal{B}$ äärellinen alipeite. Lisäksi $\{U_i : i \in J\}$ peittää joukon $A$, joten $\{U_i \cap A \mid i \in J\}$ on peitteen $\mathcal{A}$ äärellinen alipeite avaruudessa $(A, \tau_A)$. Siispä $(A, \tau_A)$ on kompakti. □

Hyvin samantapainen mutta käänteinen tulos pätee myös Hausdorff-avaruuksille:

LAUSE 1.10. *Olkoon $X$ Hausdorff avaruus ja $A \subset X$ kompakti. Tällöin $A$ on suljettu avaruudessa $X$.*

TODISTUS. Osoitetaan että $X \setminus A$ on avoin. Olkoon $x \in X \setminus A$. Tällöin jokaiselle $y \in A$ on olemassa pistevieraat $U_y$ ja $V_y$ siten, että $x \in U_y$ ja $y \in V_y$. Nyt huomataan, että $\{V_y \mid y \in A\}$ on joukon $A$ avoin peite, joten on olemassa äärellinen $F \subset A$ siten, että $\{V_y \mid y \in F\}$ on edelleen avoin peite joukolle $A$. Edelleen joukko

$$U = \bigcap_{y \in F} U_y$$

on avointen joukkojen äärellisenä leikkauksena avoin ja $x \in U$. Nyt huomataan, että $U \cap A = \emptyset$, sillä

$$A \subset \bigcup_{y \in F} V_y$$

eikä $U$ leikkaa mitään joukoista $V_y$. Siispä $U \subset X \setminus A$. Koska tällainen $U$ löydetään mille tahansa $x \in X \setminus A$, niin $X \setminus A$ on avoin lauseen 1.2 nojalla. Siispä $A$ on suljettu. □

Topologiset ominaisuudet kuten kompaktisuus voidaan määritellä ekvivalentisti myös suljettujen joukkojen avulla, sillä jokaista avointa joukkoa $U \in \tau$ vastaa yksikäsitteinen suljettu joukko $X \setminus U$. Annetaan kompaktisuudelle vaihtoehtoinen määritelmä suljettujen joukkojen avulla, sillä tämä helpottaa joidenkin tulosten todistusta jatkossa.

Lause 1.11. *Topologinen avaruus $X$ on kompakti jos, ja vain jos jokaiselle kokoelmalle avaruuden $X$ suljettuja joukkoja $\mathcal{F}$, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus (ÄLO):*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset \textit{ aina kun } \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \textit{ on äärellinen },$$

*pätee*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $X$ on kompakti, ja että kokoelmalla $\mathcal{F}$ suljettuja joukkoja on ÄLO. Tehdään lisäksi vastaoletus, että kokoelmalla $\mathcal{F}$ on tyhjä leikkaus:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset.$$

Nyt kuitenkin

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^c = \emptyset,$$

eli kokoelma $\{A^c \mid A \in \mathcal{F}\}$ on avaruuden $X$ avoin peite. Oletuksen nojalla siis on olemassa äärellinen $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ siten, että $\{A^c \mid A \in \mathcal{B}\}$ peittää avaruuden $X$. Tällöin yllä olevan yhtälön mukaisesti pätee

$$\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A = \emptyset,$$

mikä on ristiriita, sillä kokoelmalla $\mathcal{F}$ on ÄLO. Siispä kokoelmalla $\mathcal{F}$ on epätyhjä leikkaus

Olkoon sitten $\alpha$ avaruuden $X$ avoin peite ja oletetaan, että jokaisella kokoelmalla suljettuja joukkoja, jolla on ÄLO, on epätyhjä leikkaus. Tehdään vastaoletus: mikään äärellinen $\beta \subset \alpha$ ei peitä avaruutta $X$. Tällöin kaikille äärellisille $\beta \subset \alpha$ pätee

$$X \setminus \bigcup_{A \in \beta} A = \bigcap_{A \in \beta} A^c \neq \emptyset.$$

Tällöin siis kokoelmalla $\{A^c \mid A \in \alpha\}$ suljettuja joukkoja on ÄLO, mutta koska $\alpha$ on avoin peite, pätee

$$\bigcap_{A\in\alpha} A^c = X \setminus \bigcup_{A\in\alpha} A = \emptyset,$$

mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siispä avoimella peitteellä $\alpha$ on oltava ainakin yksi äärellinen alipeite ja $X$ on kompakti. □

Osoitetaan vielä jatkon kannalta tärkeä tulos, joka sanoo että kompaktin avaruuden kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.

LAUSE 1.12. *Olkoon $X$ kompakti topologinen avaruus ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus topologiselle avaruudelle $(Y, \tau)$. Tällöin $(f(X), \tau_{f(X)})$ on kompakti topologinen avaruus.*

TODISTUS. Määritelmän 1.8 jälkeisen huomautuksen nojalla riittää osoittaa, että jokaisella joukon $f(X)$ peitteellä avaruuden $Y$ avoimilla joukoilla on äärellinen alipeite. Olkoon siis $\mathcal{A} \subset \tau$ kokoelma avaruuden $Y$ avoimia joukkoja siten, että niiden yhdiste peittää joukon $f(X)$. Tällöin $\{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$ on selvästikin kokoelma avaruuden $X$ avoimia joukkoja, joka peittää avaruuden $X$.

Nyt koska $X$ on kompakti, löydämme äärellisen $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, jolle $\{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}'\}$ edelleen peittää avaruuden $X$. Nyt huomataan, että $\mathcal{A}'$ peittää joukon $f(X)$, sillä jos olisi $z \in f(X)$, joka ei kuulu peitteeseen $\mathcal{A}'$, niin avaruuden $X$ joukko $f^{-1}(\{z\})$ ei sisältyisi joukkoon $f^{-1}[A]$ millekään $A \in \mathcal{A}'$, mikä on ristiriita. Siispä $f(X)$ on kompakti. □

Määritellään seuraavaksi topologian kanta ja esikanta. Tarkoituksena on valita topologian avoimien joukkojen "edustajat", jotka määrittävät tämän topologian. Kannassa ja esikannassa on yleensä vähemmän joukkoja kuin itse topologiassa ja tämä helpottaa usein topologian käsittelyä. Lisäksi kannan ja esikannan avulla voidaan puhua topologioista, joiden kaikki joukkoja ei eksplisiittisesti tunneta.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoon $(X, \tau)$ topologinen avaruus. Kokoelma avoimia joukkoja $\beta \subset \tau$ on topologian $\tau$ **kanta** (kutsutaan myös avaruuden $X$ kannaksi), jos jokainen avoin joukko $U \in \tau$ voidaan esittää yhdisteenä kokoelman $\beta$ joukkoja.

Topologialla on yleensä enemmän kuin yksi kanta. Esimerkkinä eräs kanta on aina topologia itse. Useita topologisia ominaisuuksia voidaan rajoittaa kannan ominaisuuksiin, kuten seuraavan lauseen mukaan kompaktisoinnin karakterisointi avoimien peitteiden avulla.

LAUSE 1.14. *Olkoon $\beta$ topologisen avaruuden $X$ kanta. Tällöin avaruus $X$ on kompakti jos, ja vain jos jokaisella peitteellä kannan $\beta$ joukoilla on äärellinen alipeite*

TODISTUS. Lauseen "vain jos"-suunta on triviaali, sillä kannan joukot ovat avoimia. Olkoon siis $I$ mielivaltainen indeksijoukko ja $\alpha := \{A_i \mid i \in I\}$ avaruuden $X$ avoin peite. Kukin $A_i$ voidaan ilmaista muodossa

$$A_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j},$$

missä $J_i$ on jokin indeksijoukko kaikille $i \in I$ ja $B_{i,j} \in \beta$ kaikille $i \in I$ ja $j \in J_i$. Tällöin $\{B_{i,j} \mid i \in I, j \in J_i\} \subset \beta$ on avaruuden $X$ peite kannan $\beta$ joukoilla, joten löydämme äärellisen alipeitteen $\{B_1, ..., B_n\} \subset \{B_{i,j} \mid i \in I, j \in J_i\}$. Nyt kaikille $k = 1, ..., n$ löytyy indeksi $i_k \in I$ siten, että $B_k \subset A_{i_k}$, sillä joukot $A_i$ muodostuvat joukkojen $B_{i,j}$ yhdisteistä, joten $\{A_{i_k} \mid k = 1, ..., n\}$ on haettu peitteen $\alpha$ äärellinen alipeite. Siispä $X$ on kompakti. $\square$

Usein topologia määritellään antamalla vain sen kanta eikä kaikkia avoimia joukkoja. Tätä varten tutkitaan vielä millaiset kokoelmat ovat kantana jollekin topologialle.

Lause 1.15. *Olkoon $X$ joukko ja $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ siten, että*

$$\bigcup_{B \in \beta} B = X.$$

*Jos kaikille $A, B \in \beta$ ja jokaiselle $a \in A \cap B$ on olemassa $C \in \beta$ siten, että $a \in C \subset A \cap B$, niin $\beta$ on jonkin joukon $X$ topologian kanta.*

Todistus. Todistetaan väite näyttämällä, että kaikki mahdolliset yhdisteet kokoelman $\beta$ joukoista muodostavat topologian. Tällöinhän $\beta$ on kantana tälle muodostuneelle topologialle. Olkoon siis $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ kokoelma, joka koostuu kaikista mahdollisista yhdisteistä kokoelman $\beta$ joukkoja. Oletuksen nojalla $\beta$ on avaruuden $X$ peite, joten $X \in \tau$. Tyhjä joukko on yhdiste yli tyhjän joukon kokoelman $\beta$ joukkoja, joten $\emptyset \in \tau$. Lisäksi mielivaltainen yhdiste kokoelman $\tau$ joukkoja on edelleen yhdiste kokoelman $\beta$ joukkoja, joten $\tau$ on suljettu yhdisteiden suhteen.

Osoitettavaksi siis jää topologian määritelmän ehto (3), eli että $\tau$ on suljettu pareittaisten leikkauksien suhteen. Olkoon siis $A, B \in \tau$. Jos $A \cap B = \emptyset$, niin väite on todistettu. Olkoon siis $a \in A \cap B$. Tällöin, koska $A$ ja $B$ ovat yhdisteitä kokoelman $\beta$ joukoista, on olemassa[2] joukot $A', B' \in \beta$ siten, että $a \in A' \cap B'$. Nyt oletuksen nojalla on olemassa $C_a \in \beta$ siten, että $a \in C_a \subset A' \cap B' \subset A \cap B$. Nyt huomataan, että

$$A \cap B = \bigcup_{a \in A \cap B} C_a$$

on yhdiste kokoelman $\beta$ joukkoja, eli $A \cap B \in \tau$. Siispä $\tau$ on topologia ja väite on todistettu. $\square$

Määritelmä 1.16. Olkoon $(X, \tau)$ topologinen avaruus, jonka eräs kanta on $\beta$. Kokoelma avoimia joukkoja $\gamma \subset \tau$ on topologian $\tau$ (tai avaruuden $X$) **esikanta**, jos jokainen kannan $\beta$ avoin joukko $U \in \beta$ voidaan esittää äärellisenä leikkauksena kokoelman $\gamma$ joukkoja.

Jos $\gamma$ on siis topologian $\tau = \{U_i \mid i \in I\}$ esikanta, niin jokainen avoin joukko $U \in \tau$ on jokin yhdiste äärellisiä leikkauksia esikannan $\gamma$ joukkoja

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} U_k,$$

missä $U_k \in \gamma$ kaikille $k \in K_j$, $J \subset I$ ja $K_j \subset I$ on äärellinen kaikille $j \in J$. Sanotaan, että esikanta $\gamma$ **virittää** topologian $\tau$, sillä ottamalla kaikki mahdolliset yllä olevaa muotoa olevat yhdisteet leikkauksista, saadaan topologia $\tau$: Jos $U \in \tau$, niin se on yllä

[2]Tässä siis $A' \subset A$ ja $B' \subset B$ ovat jotkin niistä joukoista joiden yhdisteistä $A$ ja $B$ muodostuvat.

olevaa muotoa kannan ja esikannan määritelmien nojalla, ja jos taas $U$ on yllä olevaa muotoa, niin $U \in \tau$ topologian määritelmän nojalla. Kuten kannan tapauksessa, topologia saatetaan joskus määritellä pelkästään antamalla sen jokin esikanta. Tarkastellaan siis vielä millainen joukko yleensäkään voi olla jonkin topologian esikanta. Osoittautuu, että mikä tahansa avaruuden peite on esikantana jollekin topologialle.

LAUSE 1.17. *Olkoon $X$ joukko ja $\gamma \subset \mathcal{P}(X)$ siten, että*

$$\bigcup_{U \in \gamma} U = X.$$

*Tällöin kaikkien muotoa*

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} U_k$$

*olevien joukkojen kokoelma, missä $U_k \in \gamma$ kaikille $k \in K_j$, $J \subset I$ ja $K_j \subset I$ on äärellinen kaikille $j \in J$, on topologia joukossa $X$. Erityisesti siis $\gamma$ on jonkin joukon $X$ topologian esikanta.*

TODISTUS. Topologian määritelmän ehdot (2) ja (3) täyttyvät selvästikin. Lisäksi yhdiste yli tyhjän joukon on tyhjä joukko, ja

$$\bigcup_{U \in \gamma} U = X$$

oletuksen nojalla. □

Siispä mikä tahansa kokoelma mielivaltaisen joukon $X$ osajoukkoja virittää jonkin topologian, kunhan tämä kokoelma peittää joukon $X$. On huomattavaa, että topologialla on usein monia eri kantoja ja esikantoja, mutta ne kaikki virittävät saman topologian (sen jonka kantoja/esikantoja ne ovat) määritelmän 1.16 jälkeisen huomautuksen mielessä. Kannan virittämä topologia siis määritellään analogisesti ottamalla kaikki mahdolliset yhdisteet sen alkioista kuten lauseen 1.15 todistuksessa. Siispä on järkevää käsitellä topologioita, joista ei tunneta muuta kuin jokin kanta tai esikanta. Myöhemmin tulemmekin käsittelemään topologioita pelkästään lauseen 1.15 oletuksen mukaisten joukkojen avulla.

Kuten kannan tapauksessa, joitain topologisia ominaisuuksia voidaan karakterisoida esikannan avulla, kuten myöhemmin tärkeässä Alexanderin esikantalauseessa huomataan. Tätä ennen tarvitaan kuitenkin Zornin lemma, jota varten määritellään joukkojen järjestämiseen liittyviä käsitteitä.

## 1.2. Joukkojen järjestäminen ja Zornin lemma

Tässä kappaleessa määritellään muutamia joukkojen järjestykseen liittyviä käsitteitä ja annetaan Zornin lemman väite ilman todistusta.

MÄÄRITELMÄ 1.18. Olkoon $X$ joukko. Relaatio $\leq$ on **osittainen järjestys** joukossa $X$, jos

(1) $x \leq x$ kaikille $x \in X$.
(2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ kaikille $x, y \in X$.
(3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ kaikille $x, y, z \in X$.

Tällöin paria $(X, \leq)$ kutsutaan **osittain järjestetyksi joukoksi**

MÄÄRITELMÄ 1.19. Olkoon $(X, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Osittainen järjestys $\leq$ on **täydellinen järjestys**, jos lisäksi kaikille $x, y \in X$ pätee joko $x \leq y$ tai $y \leq x$. Tällöin sanotaan että $(X, \leq)$ on **täysin järjestetty** joukko.

Usein käytetään myös sanontaa osittain/täysin järjestetty joukko $X$, jos sekaannusta ei aiheudu useamman relaation takia. Täysin järjestetyssä joukossa siis pystytään aina vertailemaan kahta alkiota keskenään. Osittain järjestetystä joukosta löytyy aina täysin järjestettyjä osajoukkoja käyttämällä osittaisen järjestyksen rajoittumaa osajoukkoon. Esimerkiksi jokainen osittain järjestetyn joukon yhden alkion osajoukko on täysin järjestetty. Osittain järjestetyn joukon täysin järjestettyjä osajoukkoja kutsutaan **ketjuiksi**.

MÄÄRITELMÄ 1.20. Olkoon $X$ osittain järjestetty joukko ja $A \subset X$. Alkio $y \in X$ on **yläraja** joukolle $A$, jos $x \leq y$ kaikille $x \in A$.

MÄÄRITELMÄ 1.21. Olkoon $X$ osittain järjestetty joukko ja $A \subset X$. Alkio $m \in A$ on **maksimaalinen**, jos kaikille $x \in A$ ehdosta $m \leq x$ seuraa $m = x$.

Osajoukon ylärajan ja maksimaalisen alkion ero on siis siinä, että ylärajan ei tarvitse kuulua osajoukkoon, mutta maksimaalisen alkion tulee. Lisäksi maksimaalinen alkio ei ”ole suurempi” kuin kaikki muut alkiot toisin kuin yläraja. Se vain ”ei ole pienempi” kuin mikään muu alkio. Maksimaalista alkiota ei siis välttämättä edes voi verrata kaikkiin muihin alkioihin, ja se voidaan ilmaista myös muodossa ”kaikille $x \in A \setminus \{m\}$ pätee $m \nleq x$” käyttäen määritelmän 1.21 merkintöjä. Nämä huomautukset kannattaa sisäistää huolella, sillä maksimaalisen alkion ja ylärajan määritelmät ovat hyvin samankaltaisia ja saattavat aiheuttaa sekaannusta. Vastaavalla tavalla määritellään myös joukon **alaraja** ja **minimaalinen** alkio

Nyt olemme valmiita määrittelemään Zornin lemman. Emme kuitenkaan todista tätä, mutta huomattakoon, että todistuksessa tarvitaan valinta-aksioomaa. Zornin lemman todistuksen löytää esimerkiksi Väisälän teoksesta Topologia II [**2**, Z.6].

LEMMA 1.22 (Zorn). *Olkoon $X$ osittain järjestetty joukko. Jos jokaisella ketjulla $\mathcal{S} \subset X$ on yläraja, niin joukossa $X$ on olemassa ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Zornin lemman mukaan siis jos jokaisella osittain järjestetyn joukon ketjulla on yläraja, niin tästä osittain järjestetystä joukosta löytyy ainakin yksi alkio joka ei ole pienempi kuin mikään muu alkio. Huomattavaa on se, että tämä ei kuitenkaan tarkoita, että löytyisi jokin yläraja koko osittain järjestetylle joukolle.

ESIMERKKI 1.23. Olkoon $X$ joukko. Tällöin avaruuden $X$ potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ varustettuna joukkoinkluusiolla $\subset$ on selvästikin osittain järjestetty joukko. Lisäksi jos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $A_n \in \mathcal{P}(X)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, on kasvava jono, eli $A_n \subset A_{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on potenssijoukon ketju. Potenssijoukossa on olemassa ainakin yksi maksimaalinen alkio Zornin lemman nojalla, sillä onhan $X$ yläraja jokaiselle osajoukolle. Toisaalta on myös helppo nähdä suoraan, että ainakin $X$ on maksimaalinen.

## 1.3. Alexanderin esikantalause

Todistetaan nyt Alexanderin esikantalause, joka on tärkeässä osassa kappaleen päätuloksen, Tihonovin lauseen, todistuksessa. Esikantalauseen mukaan topologian kompaktisuutta osoittaessa riittää tutkia vain peitteitä topologian jonkin esikannan avoimilla joukoilla. Tämän todistus ei ole läheskään niin yksinkertaista kuin kannan tapauksessa. Todistus seuraa Terence Taon blogia [**3**, Thm. 6].

LAUSE 1.24 (Alexander). *Olkoon $\gamma$ topologisen avaruuden $X$ esikanta. Tällöin $X$ on kompakti jos, ja vain jos jokaisella avaruuden $X$ peitteellä esikannan $\gamma$ joukkoja on äärellinen alipeite.*

TODISTUS. Jälleen lauseen "vain jos"-suunta on selvä, sillä ovathan esikannankin joukot avoimia. Notaation helpottamiseksi kutsutaan peitettä esikannan joukoilla esikannan peitteeksi ja peitettä kannan joukoilla kannan peitteeksi. Edelleen sanotaan, että peite on hyvä, jos sillä on äärellinen alipeite, ja huono muussa tapauksessa. Oletetaan nyt, että jokainen esikannan $\gamma$ peite on hyvä. Lauseen 1.14 nojalla riittää osoittaa, että jonkin avaruuden $X$ kannan kaikilla peitteillä on äärellinen alipeite. Käytetään todistuksessa sitä kantaa $\beta$, jonka kukin joukko voidaan ilmaista äärellisenä leikkauksena esikannan $\gamma$ joukkoja. Tällainenhan on siis olemassa esikannan määritelmän mukaisesti.

Tehdään vastaoletus, että on olemassa ainakin yksi huono kannan $\beta$ peite. Olkoon $\mathscr{B}$ kaikkien kannan $\beta$ huonojen peitteiden joukko. Varustettuna joukkoinkluusiolla $\mathscr{B}$ on osittain järjestetty. Olkoon $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ jokin ketju. Haluaisimme näyttää, että on olemassa $\alpha_0 \in \mathscr{B}$ siten, että $\alpha \subset \alpha_0$ kaikille $\alpha \in \mathscr{B}'$, eli toisin sanoen, että jokaisella ketjulla $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ on yläraja. Valitaan nyt

$$\alpha_0 = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{B}'} \alpha.$$

Selvästikin $\alpha_0$ on peitteiden yhdisteenä peite. Jotta peite $\alpha_0$ olisi yläraja, tulee näyttää, että se on huono, eli että se yleensäkään kuuluu joukkoon $\mathscr{B}$. Olkoon nyt $\alpha_0' \subset \alpha_0$ jokin äärellinen osajoukko. Merkitään $\alpha_0' := \{A_i \subset X \mid i = 1, ..., n\}$. Tällöin peitteen $\alpha_0$ konstruktion nojalla on olemassa peitteet $\alpha_i \in \mathscr{B}'$, $i = 1, ..., n$ siten, että $A_i \in \alpha_i \forall i = 1, ..., n$. Koska $\mathscr{B}'$ on ketju, niin sen äärellisestä osajoukosta $\{\alpha_i \mid i = 1, ..., n\}$ löytyy[3] suurin alkio $\alpha_k$ jollekin $k = 1, ..., n$, eli $\alpha_i \subset \alpha_k$ kaikille $i = 1, ..., n$. Tällöinhän myös $A_i \in \alpha_k$ kaikille $i = 1, ...n$, eli $\alpha_0' \subset \alpha_k$. Tästä syystä $\alpha_0'$ ei voi olla peite, sillä se on huonon peitteen $\alpha_k$ äärellinen osajoukko. Siispä peitteen $\alpha_0$ mikään äärellinen osajoukko ei voi olla peite, joten $\alpha_0$ on huono ja se kelpaa ylärajaksi ketjulle $\mathscr{B}'$.

Nyt mielivaltaiselle osittain järjestetyn joukon $\mathscr{B}$ ketjulle löydettiin yläraja, joten Zornin lemman nojalla joukossa $\mathscr{B}$ on maksimaalinen alkio, olkoon tämä $\beta^* := \{U_i \mid i \in I\}$, missä siis joukot $U_i$ ovat nyt kannan $\beta$ avoimia joukkoja ja $I$ on jokin indeksijoukko. Jos tähän peitteeseen $\beta^*$ lisätään mikä tahansa uusi joukko, niin tämä uusi peite on suurempi kuin $\beta^*$ eikä ole sama kuin $\beta^*$, joten sen on oltava hyvä siitä syystä että $\beta^*$ on maksimaalinen huonojen peitteiden joukossa. Olkoon $U \in \beta^*$. Nyt $U$ voidaan siis ilmaista muodossa $U = B_1 \cap ... \cap B_n$ joillekin $B_k \in \gamma$, $k = 1, ..., n$, sillä kanta $\beta$ on esikannan $\gamma$ virittämä[4]. Nyt haluaisimme näyttää, että jokin näistä joukoista $B_k$ kuuluu kannan peitteeseen $\beta^*$.

[3]Tämä suurin alkio löydetään esimerkiksi vertaamalla kahta ensimmäistä alkiota ja valitsemalla niistä suurempi ja vertaamalla tätä seuraavaan. Edelleen näistä valitaan aina suurempi ja verrataan seuraavaan, kunnes kaikki alkiot on käyty läpi.

[4]Tällä virittämisellä tarkoitetaan siis sitä, että $\beta$ saadaan ottamalla kaikki äärelliset yhdisteet kokoelman $\gamma$ joukoista.

Tehdään vastaoletus: $B_k$ ei kuulu peitteeseen $\beta^*$ millekään $k = 1, ..., n$. Tällöin voimme lisätä minkä tahansa joukon $B_k$, $k = 1, ..., n$, peitteeseen $\beta^*$, jolloin maksimaalisuuden nojalla peitteen $\beta^* \cup \{B_k\}$ on oltava hyvä. Tällöin siis on olemassa äärellinen $J_k \subset I$ siten, että $\{U_i \mid i \in J_k\} \cup \{B_k\}$ on avaruuden $X$ äärellinen avoin peite (joukon $B_k$ on oltava tässä äärellisessä peitteessä, sillä $\beta^*$ on huono). Yhtäpitävästi $\{U_i \mid i \in J_k\}$ on avaruuden $X \setminus B_k$ äärellinen avoin peite joukoilla $U_i \in \beta^*$, $i \in J_k$. Valitaan nyt

$$J := \bigcup_{k=1}^{n} J_k,$$

jolloin $J$ on äärellinen ja joukot $U_i \in \beta^*$, $i \in J$, peittävät joukon

$$\bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus B_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k = X \setminus U.$$

Nyt huomataan, että $\{U_i \mid i \in J\} \cup \{U\}$ on huonon peitteen $\beta^*$ äärellinen alipeite, mikä on ristiriita.

Siispä jokaiselle $U_i \in \beta^*$ on oltava olemassa jokin esikannan alkio $C_i \in \gamma \cap \beta^*$ siten, että $U_i \subset C_i$. Nyt koska $\beta^*$ peittää avaruuden $X$, niin myös kokoelma $\gamma^* := \{C_i \mid i \in I\} \subset \gamma \cap \beta^*$ peittää avaruuden $X$. Oletuksen mukaan nyt peitteellä $\gamma^*$ esikannan $\gamma$ avoimia joukkoja on olemassa äärellinen alipeite, mikä on ristiriita, sillä tämä alipeite on myös huonon peitteen $\beta^*$ äärellinen alipeite. Siispä lopulta vastaoletuksen ristiriidan nojalla jokainen kannan peite $\beta$ on hyvä ja $X$ on kompakti. □

## 1.4. Tuloavaruus ja Tihonovin lause

Tässä kappaleessa todistetaan yksi työn päätuloksista, Tihonovin lause. Tätä ennen tarvitaan kuitenkin karteesisen tulon ja tuloavaruuden määritelmät. Karteesinen tulo määritellään tavalliseen tapaan kuvauksien avulla.

MÄÄRITELMÄ 1.25. Olkoon $X_a$ joukkoja kaikille $a \in A$. Joukkojen $X_a$ **karteesinen tulo** on

$$X := \prod_{a \in A} X_a = \left\{ f \colon A \to \bigcup_{a \in A} X_a \mid f(a) \in X_a \forall a \in A \right\}.$$

Tuloavaruuden alkion $f \in X$ $a$:s **komponentti** on $f(a) = f_a$. Lisäksi jokaiselle $a \in A$ määritellään **projektiokuvaus** $P_a \colon X \to X_a$ siten, että $P_a(f) = f(a)$ kaikille $f \in X$.

MÄÄRITELMÄ 1.26. Olkoon $X_a$ topologisia avaruuksia kaikille $a \in A$. Karteesiseen tuloon

$$X := \prod_{a \in A} X_a$$

määritellään **tulotopologia** valitsemalla se topologia, jonka eräs esikanta on

$$\bigcup_{a \in A} \left\{ P_a^{-1}[U] \mid U \text{ avoin avaruudessa } X_a \right\}.$$

Näin syntyvää topologista avaruutta kutsutaan **tuloavaruudeksi**.

Selvästikin avoimien joukkojen alkukuvat projektioissa $P_a$ peittävät avaruuden $X$, sillä onhan $P_a^{-1}[X_a] = X$. Siispä nämä alkukuvat tosiaankin ovat jonkin topologian esikanta lauseen 1.17 nojalla. Projektiot $P_a$ ovat jatkuvia, sillä avointen joukkojen alkukuvat projektioissa ovat määritelmältään avoimia tuloavaruudessa. Jatkossa topologisten avaruuksien karteesisessa tulossa oletetaan olevan tulotopologia, ellei toisin mainita.

Tuloavaruuden esikannan joukot ovat siis muotoa

$$\prod_{a \in A} U_a,$$

missä $U_a = X_a$ kaikille paitsi mahdollisesti yhdelle $a \in A$, ja $U_a$ on avoin avaruudessa $X_a$. Tällöin esikannan määritelmän nojalla eräs kanta tuloavaruudelle ovat muotoa

$$\prod_{a \in A} U_a$$

olevat joukot, missä $U_a = X_a$ kaikille paitsi mahdollisesti äärellisen monelle $a \in A$. Eräässä mielessä siis kannan ja varsinkin esikannan joukot ovat hyvin suuria.

Jatkossa tarvitsemme tulosta, jonka mukaan Hausdorff-avaruuksien tuloavaruus on edelleen Hausdorff

LAUSE 1.27. *Olkoon $X_a$, $a \in A$, Hausdorff-avaruuksia. Tällöin tuloavaruus*

$$X \coloneqq \prod_{a \in A} X_a$$

*on Hausdorff.*

TODISTUS. Olkoon $x, y \in X$, $x \neq y$. Tällöin on olemassa $a \in A$ siten, että $x_a \neq y_a$. Nämä ovat siis projektion $P_a$ kuvina avaruuden $X_a$ alkioita, ja koska $X_a$ on Hausdorff, on olemassa avoimet joukot $U_x, U_y \subset X_a$ siten, että $x_a \in U_a$, $y_a \in U_y$ ja $U_x \cap U_y = \emptyset$. Nyt $A \coloneqq P_a^{-1}[U_x]$ ja $B \coloneqq P_a^{-1}[U_y]$ ovat Hausdorff-ehdon vaatimat joukot pisteille $x$ ja $y$ vastaavasti avaruudessa $X$. Selvästikin ne ovat tulotopologian määritelmän nojalla avoimia. Lisäksi $x \in A$, sillä projektion alkukuva rajoittaa tuloavaruudessa vain komponenttiavaruuden $X_a$ joukoksi $U_x$, ja $x_a \in U_x$. Samalla tavalla nähdään, että $y \in B$. Lopuksi huomataan, että $A \cap B = \emptyset$, sillä jos olisi olemassa $z \in A \cap B$, niin pätisi $z_a \in U_x \cap U_y$, mikä on ristiriita. Siispä $X$ on Hausdorff. □

Osoitetaan vielä tulos sellaisten kuvauksien jatkuvuudelle, joiden maaliavaruutena on tuloavaruus

LAUSE 1.28. *Olkoon $X$ topologinen avaruus ja $Y_a$ topologinen avaruus kaikille $a \in A$. Kuvaus $f : X \to Y$ tuloavaruuteen*

$$Y \coloneqq \prod_{a \in A} Y_a$$

*on jatkuva jos, ja vain jos sen yhdiste projektion $P_a$ kanssa $P_a \circ f : X \to Y_a$ on jatkuva kaikille $a \in A$.*

TODISTUS. Lauseen ”vain jos”-suunta seuraa lemmasta 1.6, sillä projektiot ovat jatkuvia.

Oletetaan sitten, että $P_a \circ f$ on jatkuva kaikille $a \in A$, eli $(P_a \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[P_a^{-1}[U]]$ on avoin aina kun $U$ on avoin avaruudessa $Y_a$. Olkoon $V \subset Y$ avoin. Tällöin $V$ on muotoa

$$V = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} U_k,$$

missä $U_k \in \gamma$ kaikille $k \in K_j$, $J \subset I$ ja $K_j \subset I$ on äärellinen kaikille $j \in J$. Tässä $\gamma$ on siis määritelmän 1.26 mukainen projektioiden määräämä esikanta. Nyt

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} f^{-1}[U_k],$$

sillä alkukuva kommutoi yhdisteiden ja leikkausten kanssa. Lisäksi kukin $U_k$ on muotoa $P_a^{-1}[U]$ jollekin $a \in A$ ja avoimelle $U \subset Y_a$. Tällöin $f^{-1}[U_k]$ on oletuksen nojalla avoin kaikille $k \in K_j$, eli $f^{-1}[V]$ on yhdiste äärellisiä leikkausia avoimista joukoista avaruudessa $X$, eli avoin. Siispä $f$ on jatkuva. □

Lauseen 1.28 todistuksessa käytettyjä menetelmiä yleistämällä huomataan, että kuvaus on jatkuva jos, ja vain jos maaliavaruuden jonkin esikannan jokaisen alkion alkukuva on avoin lähtöavaruudessa. Tämä ”vain jos”- suunta ei näy suoraan todistuksesta yleistämällä, mutta se on triviaali, sillä esikannan joukot ovat avoimia.

Seuraavaksi hyödynnetään Alexanderin esikantalausetta luvun päätuloksen, Tihonovin lauseen, todistamiseen. Tihonovin lauseen mukaan kompaktien avaruuksien karteesinen tulo on kompakti. Todistuksessa osoitetaan, että mikään projektioiden virittämän esikannan osakokoelma, jolla ei ole äärellistä osajoukkoa joka peittäisi koko tuloavaruuden, ei voi olla peite. Tällöinhän jokaisella peitteellä esikannan joukoilla on oltava äärellinen alipeite. Tämäkin todistus seuraa Terence Taon blogia [**3**, Thm. 10].

LAUSE 1.29 (Tihonov). *Olkoon $A$ mielivaltainen joukko ja $X_a$ kompakti topologinen avaruus kaikille $a \in A$. Tällöin*

$$X := \prod_{a \in A} X_a = \left\{ f \colon A \to \bigcup_{a \in A} X_a \mid f(a) \in X_a \forall a \in A \right\}$$

*varustettuna tulotopologialla on kompakti topologinen avaruus.*

TODISTUS. Olkoon $\beta \subset \gamma$ mielivaltainen kokoelma avaruuden $X$ esikannan

$$\gamma := \bigcup_{a \in A} \left\{ P_a^{-1}[U] \mid U \text{ avoin avaruudessa } X_a \right\}$$

joukkoja. Oletetaan, että mikään kokoelman $\beta$ äärellinen osakokoelma ei peitä avaruutta $X$. Jos tästä seuraa, että $\beta$ ei ole avaruuden $X$ peite, niin tällöin jokaisella avaruuden $X$ esikannan osakokoelmalla, joka peittää avaruuden[5] $X$, on oltava äärellinen alipeite. Jos näin pätee, niin $X$ on kompakti Alexanderin esikantalauseen nojalla.

Olkoon $a \in A$ mielivaltainen ja $\alpha_a$ kokoelma avaruuden $X_a$ kaikista niistä avoimista joukoista $U \subset X_a$, joille $P_a^{-1}[U] \in \beta$. Tällöin yksikään kokoelman $\alpha_a$ äärellinen osakokoelma ei voi peittää avaruutta $X_a$, sillä muuten tämän äärellisen osakokoelman

[5]Tässä on huomattava, että jokin tällainen peite esikannan joukoilla on olemassa, sillä vain kokoelma joka peittää avaruuden $X$ voi olla esikanta.

alkioiden alkukuvat projektiossa $P_a$ muodostaisivat kokoelman $\beta$ äärellisen osakokoelman, joka peittää avaruuden $X$, mikä on ristiriita oletusta vastaan. Tällöin myöskään kokoelma $\alpha_a$ ei voi peittää avaruutta $X_a$, sillä $X_a$ on kompakti. Muutenhan $\alpha_a$ olisi avaruuden $X_a$ peite, jolla ei ole äärellistä alipeitettä. Eli siis löydämme kaikille $a \in A$ pisteen $x_a \in X_a$ siten, että $x_a \notin U$ kaikille $U \in \alpha_a$. Tällöin piste $x := (x_a)_{a \in A}$ ei kuulu mihinkään kokoelman $\beta$ joukkoon, sillä

$$\beta = \bigcup_{a \in A} \left\{ P_a^{-1}[U] \mid U \in \alpha_a \right\}.$$

Nyt $\beta$ ei ole avaruuden $X$ peite ja väite seuraa. $\square$

Tihonovin lauseen todistusta varten käytettiin valinta-aksioomaa useassa paikassa, kuten Zornin lemmassa, Alexanderin esikantalauseessa joukkojen $C_i$ valitsemiseen kullekin $U_i$, ja itse Tihonovin lauseen todistuksessa pisteen $x$ löytämiseen. Osoittautuu, että Tihonovin lause ja valinta-aksiooma ovat ekvivalentteja, eli myös valinta-aksiooma voidaan todistaa olettamalla Tihonovin lause todeksi. Valinta-aksioomahan siis sanoo, että mielivaltaisen monen epätyhjän joukon karteesinen tulo on epätyhjä.

Lause 1.30. *Oletetaan, että kompaktien topologisten avaruuksien karteesinen tulo varustettuna tulotopologialla on kompakti. Olkoon $X_a \neq \emptyset$ kaikille $a \in A$, missä $A$ on mielivaltainen joukko. Tällöin*

$$X := \prod_{a \in A} X_a \neq \emptyset.$$

Todistus. Lisätään jokaiseen $X_a$ sellainen piste $y$, että $y \notin X_a$ kaikille $a \in A$ ja merkitään $Y_a = X_a \cup \{y\}$ ja

$$Y = \prod_{a \in A} Y_a.$$

Lisäksi varustetaan jokainen $Y_a$ topologialla $\{\emptyset, \{y\}, Y_a\}$. Tällöin kukin $Y_a$ on kompakti topologinen avaruus, sillä sen topologiassa on vain äärellisen monta avointa joukkoa. Olkoon $Z_a \subset Y$ tuloavaruuden $Y$ joukko, $Z_a = Y \setminus P_a^{-1}[\{y\}]$, missä $P_a \colon Y \to Y_a$ on avaruuden $Y$ projektio avaruudelle $Y_a$ kaikille $a \in A$. Tällöin $\{Z_a \mid a \in A\}$ on kokoelma avaruuden $Y$ suljettuja joukkoja, sillä $\{y\}$ on avoin avaruudessa $Y_a$, joten $P_a^{-1}[\{y\}]$ on avoin avaruudessa $Y$. Nyt jokaiselle äärelliselle $B \subset A$ voimme valita pisteen leikkauksesta

$$\bigcap_{a \in B} Z_a$$

määräämällä siitä piste $f$ asettamalla $f(a) = x_a$ jollekin $x_a \in X_a$, kun $a \in B$ (tähän siis ei tarvita valinta-aksioomaa, sillä $B$ on äärellinen), ja $f(a) = y$, kun $a \in A \setminus B$. Tällöin

$$\bigcap_{a \in B} Z_a \neq \emptyset,$$

jolloin kokoelmalla $\{Z_a \mid a \in A\}$ suljettuja avaruuden $Y$ joukkoja on äärellisten leikkausten ominaisuus. Nyt oletuksen nojalla $Y$ on kompakti, joten lauseen 1.11 nojalla

$$X = \bigcap_{a \in A} Z_a \neq \emptyset,$$

ja väite on todistettu. □

Huomattavaa on, että väitteessä on tärkeä vaatia, että $X_a \neq \emptyset$ kaikille $a \in A$. Jos jokin joukoista $X_c$, $c \in A$, on tyhjä, niin tällöin näiden karteesinen tulo on tyhjä riippumatta muista joukoista $X_a$. Tämän voi nähdä karteesisen tulon määritelmästä. Karteesisen tulon alkiot ovat kuvauksia $f$ joukolta $A$ komponenttiavaruuksien yhdisteeseen siten, että $f(a) \in X_a$ (edellisen lauseen merkinnöillä). Jos nyt jokin $X_c$ on tyhjä, niin mitään tällaista kuvausta ei ole olemassa, sillä alkioita $c \in A$ ei voida kuvata mihinkään.

LUKU 2

# Normi ja topologia

## 2.1. Topologiset vektoriavaruudet

Tässä kappaleessa tutustutaan topologisen avaruuden ja normiavaruuden yhteyteen. Normiavaruushan on vektoriavaruus, jossa on käytössä etäisyyden käsite, jota topologiassa ei kuitenkaan tunneta. Kuitenkin voimme määritellä topologian vektoriavaruuteen, kuten mihin tahansa muuhunkin joukkoon. Lisäksi jos vaadimme, että topologia tekee vektoriavaruuden laskutoimituksista jatkuvia, saamme topologisen vektoriavaruuden käsitteen. Tulemme myös huomaamaan, että jokainen normiavaruus on topologinen vektoriavaruus, eli laskutoimitukset ovat normin suhteen jatkuvia. Kuten aikaisemmin mainittiin, tuloavaruuden kannan joukot ovat hyvin suuria. Tätä huomiota hyväksikäyttäen voidaan rakentaa topologinen vektoriavaruus, jolla ei ole olemassa tämän topologian kanssa yhteensopivaa normia. Ennen kuin näissä väitteissä on kuitenkaan edes mitään järkeä, on määriteltävä topologinen vektoriavaruus ja muita käsitteitä.

Määritelmä 2.1. Olkoon $V$ vektoriavaruus ja $\tau \subset \mathcal{P}(V)$ topologia. Sanotaan, että topologinen avaruus $(V, \tau)$ on **topologinen vektoriavaruus**, jos vektoriavaruuden $V$ yhteenlasku $y \colon V \times V \to V$ ja skalaarilla kertominen $s \colon \mathbb{K} \times V \to V$ ovat jatkuvia kuvauksia topologian $\tau$ suhteen.

Yhteenlaskun ja skaalarilla kertomisen kuvia merkitään normaaliin tapaan $y(u, v) = u+v$ ja $s(a, v) = av$ kaikille $u, v \in V$ ja $a \in \mathbb{K}$. Edellä mainituissa tuloavaruuksissa siis käytetään jatkuvuuden tarkastelun kannalta ja muutenkin luonnollisesti tulotopologiaa, kuten aiemmin sovittiin. Tulemme huomaamaan, että normiavaruus on aina myös topologinen vektoriavaruus. Palautetaan kuitenkin ensin mieleen normin määritelmä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $V$ vektoriavaruus kerroinkunnalla $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Kuvaus $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty)$ on **normi** avaruudessa $V$, jos

(1) $\|av\| = |a|\|v\|$ kaikille $a \in \mathbb{K}$ ja $v \in V$, missä $|a|$ on kerroinkunnan $\mathbb{K}$ alkion $a$ moduli.
(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ kaikille $u, v \in V$.
(3) $\|v\| = 0$ jos, ja vain jos $v = 0$.

Paria $(V, \|\cdot\|)$ sanotaan **normiavaruudeksi**.

Määritelmä 2.3. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Kaikille $x \in V$ ja $r \in (0, \infty)$ määritellään **$x$-keskinen $r$-säteinen avoin pallo**

$$B(x, r) := \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}.$$

Sanotaan, että joukko $A \subset V$ on **avoin**, jos kaikille $x \in A$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset A$.

Nimitys avoin joukko ei ole sattumaa. Normiavaruuden $(V, \|\cdot\|)$ kaikkien avoimien joukkojen kokoelma on nimittäin topologia, kuten pian osoitetaan. Tällöin sanotaan, että normi $\|\cdot\|$ **virittää** tämän topologian. Huomion arvoista on myös normin mielessä avoimen joukon määritelmän ja lauseen 1.2 yhtäläisyys.

LAUSE 2.4. *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin kaikkien normin $\|\cdot\|$ mielessä avoimien joukkojen kokoelma $\tau$ on topologia*

TODISTUS. Selvästikin $X \in \tau$, eikä tyhjässä joukossa ei ole alkioita, joille ehto pitäisi tarkistaa, joten $\emptyset \in \tau$. Olkoon sitten $A_i \in \tau$, $i \in I$, ja

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Tällöin $x \in A_j$ jollekin $j \in I$, joten on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(x, r) \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Siispä $\tau$ on suljettu yhdisteiden suhteen. Olkoon lopuksi $A, B \in \tau$ ja $x \in A \cap B$. Tällöin $x \in A$ ja $x \in B$, joten löytyy $r_A > 0$ ja $r_B > 0$ siten, että $B(x, r_A) \subset A$ ja $B(x, r_B) \subset B$. Valitaan nyt $r := max\{r_A, r_B\}$, jolloin selvästikin $B(x, r) \subset A \cap B$. Siispä $A \cap B \in \tau$. $\square$

Normiavaruuden avoimien pallojen kokoelma on siis normin virittämän topologinen eräs kanta, sillä onhan jokainen avoin joukko $A$ yhdiste avoimista palloista:

$$A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a),$$

missä $r_a$ on avoimen joukon määritelmässä pisteelle $a \in A$ löytyvä säde.

ESIMERKKI 2.5 (Reaaliakseli). Reaaliakseli $\mathbb{R}$ varustetaan tavallisesti topologialla, jonka kantana toimii $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Tätä kantaa vastaava eräs esikanta ovat muotoa $(-\infty, a)$ ja $(b, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, olevat joukot, sillä voihan jokaisen välin $(a, b)$ ilmaista leikkauksena $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$. Rajoittamalalla tämän kannan (vastaavasti esikannan) joukot välille $[0, 1]$ saadaan kanta (vastaavasti esikanta) avaruudelle $[0, 1]$ varustettuna relatiivitopologialla [**2**, 5.7].

Nyt osoittautuu, että vektoriavaruuden yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat aina jatkuvia kuvauksia normin indusoimassa topologiassa. Siispä normiavaruus on aina topologinen vektoriavaruus:

LAUSE 2.6. *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin $(V, \tau)$, missä $\tau$ on normin $\|\cdot\|$ virittämä topologia, on topologinen vektoriavaruus.*

TODISTUS. Olkoon $A \subset V$ avoin. Väitteen todistamiseksi siis riittää osoittaa, että $y^{-1}[A]$ on avoin avaruudessa $V \times V$, ja että $s^{-1}[A]$ on avoin avaruudessa $\mathbb{K} \times V$, eli että kuvaukset $y$ ja $s$ ovat jatkuvia. Osoitetaan ensin kuvauksen $y$ jatkuvuus. Lauseen 1.2 nojalla riittää osoittaa, että jokaiselle $(u, v) \in y^{-1}[A]$ on olemassa avoin $U \subset V \times V$ siten, että $(u, v) \in U \subset y^{-1}[A]$.

Olkoon siis $(u, v) \in y^{-1}[A]$. Tällöin siis $y(u, v) = u + v \in A$, eli on olemassa $r > 0$ siten, että $A' := B(u + v, r) \subset A$. Tällöin myös $y^{-1}[A'] \subset y^{-1}[A]$ ja $(u, v) \in y^{-1}[A']$.

Osoitetaan nyt, että

$$U := P_1^{-1}[B(u, \frac{r}{2})] \cap P_2^{-1}[B(v, \frac{r}{2})]$$

on avoin, $(u, v) \in U$ ja $U \subset y^{-1}[A']$, jolloin siis myös $U \subset y^{-1}[A]$, eli että $U$ on etsitty avoin joukko. Tässä siis $P_1$ ja $P_2$ ovat projektiot avaruudelta $V \times V$ ensimmäiselle ja toiselle komponenttiavaruudelle vastaavasti. Selvästikin $U$ on avoin tulotopologiassa kahden esikannan joukon leikkauksena. Joukon $U$ voi ilmaista myös muodossa

$$U = \{(a, b) \in V \times V \mid \|u - a\| < \frac{r}{2}, \|v - b\| < \frac{r}{2}\},$$

mistä nähdään, että $(u, v) \in U$. Lopuksi kaikille $(a, b) \in U$ pätee

$$\begin{aligned}
\|y(u, v) - y(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| \\
&= \|(u - a) + (v - b)\| \\
&\leq \|u - a\| + \|v - b\| \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.
\end{aligned}$$

Eli siis $y(a, b) \in A'$ ja siten $(a, b) \in y^{-1}[A']$. Edelleen nähdään, että $U \subset y^{-1}[A']$. Yllä olevassa laskussa ensimmäinen epäyhtälö seuraa normin määritelmästä ja toinen joukon $U$ rakenteesta. Siispä $U$ on etsitty avoin joukko mielivaltaiselle pisteelle $(u, v) \in y^{-1}[A]$, ja siten $y^{-1}[A]$ on avoin ja yhteenlasku jatkuva.

Osoitetaan seuraavaksi skalaarilla kertomisen $s$ jatkuvuus. Todistus on hyvin samankaltainen kuin yhteenlaskun tapauksessa, mutta joukon $U$ valinta on hieman mutkikkaampaa. Olkoon $A \subset V$ avoin ja $(p, u) \in s^{-1}[A]$. Nyt $s(p, u) = pu \in A$, joten löydämme luvun $r > 0$ siten, että $A' := B(pu, r) \subset A$. Jälleen tästä seuraa, että $s^{-1}[A'] \subset s^{-1}[A]$. Valitaan nyt

$$U := P_{\mathbb{K}}^{-1}[B(p, r')] \cap P_V^{-1}[B(u, r')],$$

missä $r'$ on sellainen[1] että $0 < r'^2 + r'(|p| + \|u\|) < r$. Jälleen $P_{\mathbb{K}}$ ja $P_V$ ovat projektiot avaruudelta $\mathbb{K} \times V$ komponenttiavaruuksille $\mathbb{K}$ ja $V$ vastaavasti. Tällöin $U$ on avoin kahden tulotopologian esikannan alkion leikkauksena. Lisäksi $U$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$U = \{(k, v) \in \mathbb{K} \times V \mid |p - k| < r', \|u - v\| < r'\}.$$

Tästä nähdään, että $(p, u) \in U$. Lisäksi huomataan, että kaikille $(k, v) \in U$ pätee

$$\begin{aligned}
\|s(p, u) - s(k, v)\| &= \|pu - kv\| \\
&= \|pu - ku + ku - kv\| \\
&\leq |p - k|\|u\| + |k|\|u - v\| \\
&\leq |p - k|\|u\| + (|k - p| + |p|)\|u - v\| \\
&= |p - k|(\|u\| + \|u - v\|) + |p|\|u - v\| \\
&< r'(\|u\| + r') + |p|r' \\
&= r'^2 + r'(|p| + \|u\|) < r.
\end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö seuraa normin ominaisuuksista ja toisessa käytetään tietoa $|k| = |k - p + p| \leq |k - p| + |p|$. Siispä $s(k, v) \in A'$, joten $(k, v) \in s^{-1}[A'] \subset s^{-1}[A]$,

[1] Tällainen $r'$ löydetään, sillä $|p|$ ja $\|u\|$ ovat kiinnitettyjä lukuja ja r>0

ja edelleen $U \subset s^{-1}[A]$. Näin ollen kaikille $(p, u) \in s^{-1}[A]$ löytyy avoin $U \subset \mathbb{K} \times V$ siten, että $(p, u) \in U \subset s^{-1}[A]$, siispä $s^{-1}[A]$ on avoin ja $s$ jatkuva. $\square$

Todistetaan vielä tulos, jonka mukaan topologisten vektoriavaruuksien tulo on edelleen topologinen vektoriavaruus.

LAUSE 2.7. *Olkoon $V_i$ topologisia vektoriavaruuksia kaikille $i \in I$. Tällöin tuloavaruus*

$$V := \prod_{i \in I} V_i$$

*on topologinen vektoriavaruus.*

TODISTUS. Lauseen 1.28 mukaan kuvaukset $y \colon V \times V \to V$ ja $s \colon \mathbb{K} \times V \to V$ ovat jatkuvia, jos niiden yhdisteet projektioiden $P_i$ kanssa ovat jatkuvia kaikille $i \in I$. Koska vektorien yhteenlasku $y$ tuloavaruudessa on määritelty komponenteittain, niin $P_i \circ y$ on avaruuden $V_i$ yhteenlasku $y_i \colon V_i \times V_i \to V_i$, joka on jatkuva sillä $V_i$ on topologinen vektoriavaruus. Samoin myös skalaarilla kertominen tuloavaruudessa määritellään komponenteittain, joten $P_i \circ s$ on avaruuden $V_i$ skalaarilla kertominen $s_i \colon \mathbb{K} \times V_i \to V_i$, joka on myös jatkuva. Siispä $y$ ja $s$ ovat jatkuvia lauseen 1.28 nojalla. Siispä $V$ varustettuna tulotopologialla on topologinen vektoriavaruus. $\square$

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoon $(V, \tau)$ topologinen vektoriavaruus. Avaruus $V$ on **normistuva**, jos on olemassa normi $\|\cdot\| \colon V \to [0, \infty)$, joka virittää topologian $\tau$.

Kuten aiemmin mainittiin, normi virittää aina topologian, jossa laskutoimitukset ovat jatkuvia, joten normiavaruus on aina topologinen vektoriavaruus. Tämä ei kuitenkaan päde toiseen suuntaan. Annetaan nyt esimerkki topologisesta vektoriavaruudesta, joka ei ole normistuva. Ideana on se, että äärettömän monen topologisen avaruuden tuloavaruuden avoimet joukot ovat eräällä tavalla rajoittamattomia, kun taas avoimet pallot eivät. Tarkemmin sanottuna jokainen tulotopologian avoin joukko sisältää jonkin suoran.

ESIMERKKI 2.9 (Ei-normistuva topologinen vektoriavaruus). Olkoon $V_i$ topologisia vektoriavaruuksia kerroinkunnalla $\mathbb{R}$ kaikille $i \in I$, missä $I$ on ääretön indeksijoukko. Olkoon lisäksi

$$V := \prod_{i \in I} V_i$$

näiden karteesinen tulo varustettuna tulotopologialla. Lauseen 2.7 nojalla $V$ on topologinen vektoriavaruus. Tehdään antiteesi: tuloavaruus $V$ on normistuva, eli on olemassa normi $\|\cdot\|$ joka virittää tulotopologian. Olkoon $B(0, 1) \subset V$ avoin origokeskeinen yksikköpallo. Tällöin $B(0, 1)$ on siis avoin myös tulotopologiassa, joten se sisältää jonkin muotoa

$$U := \prod_{i \in I} U_i,$$

olevan joukon, missä $U_i$ on avoin avaruudessa $V_i$ ja $U_i = V_i$ kaikille paitsi mahdollisesti äärellisen monelle $i \in I$, sillä ovathan tätä muotoa olevat joukot tuloavaruuden kanta, ja jokainen avoin joukko sisältää ainakin yhden kannan alkion. Lisäksi joukko $U$ voidaan valita siten, että se sisältää origon, sillä avoin yksikköpallo sisältää origon ja on yhdiste kannan joukkoja. Olkoon $j \in I$ sellainen indeksi jolle $U_j = V_j$ ja valitaan $x \in V$ sellaiseksi alkioksi jonka $j$:s komponentti on $x_j \neq 0$ ja muut komponentit ovat nollia, jolloin $\|x\| \neq 0$. Tällöin selvästikin $tx \in U \subset B(0,1)$ kaikille $t \in \mathbb{R}$. Erityisesti $\frac{1}{\|x\|}x \in B(0,1)$, mikä on ristiriita, sillä tämän vektorin normi on 1. Siispä tuloavaruudessa $V$ ei ole olemassa normia, joka virittää tulotopologian, eikä $V$ ole normistuva.

Yleisestikin on hyvin helppo keksiä topologinen vektoriavaruus, joka ei ole normistuva esimerkiksi ottamalla vektoriavaruus $\mathbb{R}$ ja määräämällä tähän topologia $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Kuitenkin vaikeampaa on löytää topologinen vektoriavaruus, joka on Hausdorff, mutta ei normistuva. Esimerkin 2.9 tapauksessa kuitenkin voimme valita vaikkapa $V_i = \mathbb{R}$ tavallisella topologialla kaikille $i \in I$. On helppo nähdä että $\mathbb{R}$ on Hausdorff valitsemalla eri pisteiden $x$ ja $y$ ympärille $\frac{1}{2}\|x-y\|$ säteiset pallot. Edelleen Hausdorff-avaruuksien tulo on Hausdorff, eli myös $V$ on Hausdorff, mutta ei normistuva kuten huomattiin.

## 2.2. Heine-Borelin lause

Käytetään nyt Tihonovin lausetta tunnetun Heine-Borelin lauseen todistamiseen. Heine-Borelin lause siis sanoo, että avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, kompakteja osajoukkoja ovat täsmälleen suljetut ja rajoitetut joukot. Avaruus $\mathbb{R}$ varustetaan siis euklidisen normin (tämä on siis itseisarvofunktio) virittämällä topologialla, ja edelleen avaruus $\mathbb{R}^n$ tulotopologialla. Emme kuitenkaan ole käsitelleet normiavaruuksien tuloja kovin paljoa. Mainittakoon näistä muutamia ominaisuuksia ilman todistuksia. Toisin kuin äärettömän tulon tapauksessa, äärellinen tulo normiavaruuksista varustettuna tulotopologialla (näiden normien virittämien topologioiden suhteen) on normistuva topologinen vektoriavaruus. Lisäksi äärellisulotteisen vektoriavaruuden kaikki normit ovat niinsanotusti ekvivalentteja, eli ne kaikki virittävät saman topologian, tulotopologian. Tuloavaruuden, niinkuin yleensäkin normiavaruuden rajoitetulla joukolla tarkoitetaan joukkoa, joka sisältyy normin (mikä normi nyt avaruuteen onkaan valittu) johonkin palloon $B(0,r)$, missä $r > 0$ on äärellinen. Tässä tulee vastaan ongelma, sillä olemme käsitelleet normiavaruuksien tuloja vain topologian kannalta, emmekä määritelleet tuloavaruuksien normeja ollenkaan. Annetaan nyt kuitenkin äärellisulotteisen tuloavaruuden rajoitetulle joukolle ekvivalentti määritelmä komponenttien avulla euklidisten avaruuksien tapauksessa. Tätä määritelmää käyttäen emme joudu valitsemaan tuloavaruuksiin normeja.

Määritelmä 2.10. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on **rajoitettu**, jos kaikille $k = 1, \dots, n$ on olemassa $r_k > 0$ siten, että $P_k(A) \subset B(0, r_k) \subset \mathbb{R}$

Heine-Borelin lauseen todistamiseksi tarvitsemme vielä aputuloksen, jonka mukaan avaruuden $\mathbb{R}$ suljetut välit $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, ovat kompakteja. Tämän taas todistamme käyttäen Cantorin joukkoa ja Tihonovin lausetta.

Määritelmä 2.11. Olkoon $Y = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ varustettuna topologialla $\tau = \mathcal{P}(Y)$. Tällöin tuloavaruutta

$$\mathcal{C} := Y^{\mathbb{N}} = \{f \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

kutsutaan **Cantorin (tulo)joukoksi**.

Cantorin joukko määritellään usein reaaliakselin välin $[0,1]$ osajoukoksi eräänlaisilla konstruktioilla. Näiden konstruktioiden antamat joukot ovat kuitenkin homeomorfisia määritelmän 2.11 mukaisen tulomuotoisen Cantorin joukon kanssa. Reaaliakselin Cantorin joukkoa ei kuitenkaan tarvita tässä työssä. Lisää Cantorin joukoista voi lukea Väisälän teoksesta Topologia II [**2**, 7.18]. Nyt huomataan, että $\{0,1\}$ varustettuna diskreetillä topologialla (=koko potenssijoukko) on kompakti topologinen avaruus[2], sillä $\{0,1\}$ on äärellinen, joten niin on myös sen jokainen topologia. Tällöin Tihonovin lauseen nojalla $\mathcal{C}$ on kompakti. Osoitetaan nyt tämän huomion avulla suljetun yksikkövälin $[0,1] \subset \mathbb{R}$ kompaktisuus löytämällä jatkuva surjektio Cantorin joukolta suljetulle yksikkövälille.

LAUSE 2.12. *On olemassa jatkuva surjektiivinen kuvaus $f\colon \mathcal{C} \to [0,1]$. Erityisesti siis $[0,1] \subset \mathbb{R}$ on kompakti.*

TODISTUS. Jos tällainen jatkuva surjektio $f$ on olemassa, niin $f(\mathcal{C}) = [0,1]$ on kompakti lauseen 1.12 nojalla. Merkitään kaikille $i \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathcal{C}$ alkion $k$ komponenttia $P_i \circ k = k_i$. Määritellään nyt kuvaus $f\colon \mathcal{C} \to [0,1]$,

$$f(k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i k_i,$$

missä $s_i = \frac{1}{2^i}$. Koska $k_i \in \{0,1\}$, pätee

$$0 \leq f(k) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i = 1,$$

eli $f$ oikeasti kuvaa Cantorin joukon alkion $k$ välille $[0,1]$. Osoitetaan seuraavaksi, että $f$ on surjektio. Olkoon $x \in [0,1]$. Valitaan $k \in \mathcal{C}$ rekursiivisesti siten, että

$$k_n = \begin{cases} 1, & \text{jos } \sum\limits_{i=1}^{n-1} s_i k_i + s_n \leq x \\ 0, & \text{jos } \sum\limits_{i=1}^{n-1} s_i k_i + s_n > x. \end{cases}$$

Tässä käytetään merkintää

$$\sum_{i=1}^{0} s_i k_i = 0.$$

Piste $k$ on nyt valittu niin, että

$$\sum_{i=1}^{n} s_i k_i \leq x$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten

$$f(k) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i k_i \leq x.$$

Surjektiivisuuden osoittamiseksi tulisi siis näyttää, että $f(k) = x$. Tehdään antiteesi: $f(k) < x$. Oletetaan ensin, että $k_n = 0$ äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_{n\to\infty} s_n =$

[2]Itseasiassa diskreetti topologinen avaruus on kompakti jos, ja vain jos avaruus $X$ on äärellinen, sillä diskreetissä avaruudessa yksiöt muodostavat avoimen peitteen.

0, löydämme luvun $N \in \mathbb{N}$ siten, että $s_N < x - f(k)$ ja $k_N = 0$ (sillä $k_n = 0$ äärettömän monelle $n$). Tällöin kuitenkin

$$\sum_{i=1}^{N-1} s_i k_i + s_N \leq f(k) + s_N < x,$$

joten konstruktion nojalla $k_N = 1$, mikä on ristiriita. Siispä $k_n = 0$ vain äärellisen monelle $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $M$ suurin näistä indekseistä. Nyt

$$\sum_{i=1}^{M-1} s_i k_i + s_M = \sum_{i=1}^{M-1} s_i k_i + \sum_{i=M+1}^{\infty} s_i k_i = f(k) < x,$$

jolloin kuvauksen $f$ konstruktion nojalla $k_M = 1$, mikä on jälleen ristiriita. Yllä olevassa yhtälössä $M$:s termi on jätetty merkitsemättä, sillä $k_M = 0$. Lisäksi ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} s_i = s_n \tag{2.1}$$

ja $k_n = 1$ kaikille $n > M$. Siispä ei päde $f(k) < x$, joten on oltava $f(k) = x$, eli $f$ on surjektio.

Vielä tulee siis näyttää kuvauksen $f$ jatkuvuus. Lauseen 1.28 jälkeisen huomautuksen nojalla riittää osoittaa, että jonkin avaruuden $[0, 1]$ esikannan jokaisen joukon alkukuva kuvauksessa $f$ on avoin. Edelleen esimerkissä 2.5 todettiin, että eräs esikanta avaruudelle $[0, 1]$ ovat muotoa $[0, a)$ ja $(b, 1]$ olevat joukot, missä $a, b \in [0, 1]$. Näytetään joukkojen $f^{-1}[[0, a)]$ avoimuus avaruudessa $\mathcal{C}$. Joukoille $(b, 1]$ todistus menee hyvin samantapaisesti. Olkoon siis $a \in [0, 1]$. Olkoon $j$ pienin indeksi, jolle $s_j < a$. Nyt yhtälön 2.1 mukaisesti pätee

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} s_i = s_j < a.$$

Siispä kaikille $k \in \mathcal{C}$, joille $k_i = 0$ kaikilla $i \leq j$, pätee $f(k) \leq s_j < a$. Nyt

$$A_j := f^{-1}[0, s_j] = \prod_{i \in \mathbb{N}} Y_i \cup \{k_j\}, \tag{2.2}$$

missä $Y_i = \{0\}$, kun $i \leq j$, ja $Y_i = \{0, 1\}$, kun $i > j$. Vektori $k_j \in \mathcal{C}$ on sellainen, jolla $j$:s komponentti on 1 ja muut nollia. Yhtälön 2.2 näkee todeksi tarkkailemalla kuvauksen $f$ määritelmää ja huomaamalla, että kaikille muille $k \in \mathcal{C}$ pätee $f(k) > s_j$. Lisäksi $f$ todettiin jo surjektioksi, joten joukon $A_j$ kuvan on täytettävä joukko $[0, s_j]$.

Nyt koska $[0, s_j] \subset [0, a)$, pätee $A_j \subset f^{-1}[[0, a)]$, eli erityisesti joukon $f^{-1}[[0, a)]$ kaikki komponentit, paitsi mahdollisesti $j$ ensimmäistä (eli äärellisen monta), ovat koko komponenttiavaruus $\{0, 1\}$. Tämän lisäksi $j$ ensimmäistä komponenttia ovat automaattisesti avoimia joukkoja avaruuksissa $\{0, 1\}$, sillä näihin oli määritelty diskreetti topologia. Tämän huomion ja määritelmän 1.26 jälkeisen tarkastelun nojalla siis $f^{-1}[[0, a)]$ on avaruuden $\mathcal{C}$ kannan joukko, eli avoin.

Kuten mainittiin, tämä jatkuvuuden todistus menee hyvin pienillä ja epäkiinnostavilla muutoksilla läpi myös joukoille $(b, 1]$. Siispä jokaisen avaruuden $[0, 1]$ erään esikannan avoimen joukon alkukuva on avoin kuvauksessa $f$, eli $f$ on jatkuva. Siispä $[0, 1]$ on kompakti. □

Cantorin joukko $\mathcal{C}$ ei kuitenkaan ole homeomorfinen joukon $[0, 1]$ kanssa. On helppoa nähdä, ettei $f$ kuten yllä ole edes injektio, sillä vektori $k \in \mathcal{C}$, jolle vain $k_i = 1$, kuvautuu samaksi alkioksi kuin vektori, jonka $i$ ensimmäistä komponenttia ovat nollia ja muut ykkösiä. Tämän huomion näkee yhtälöstä 2.1.

Nyt voimme helposti näyttää, että mikä tahansa reaaliakselin suljettu väli on kompakti venyttämällä ja siirtämällä yksikköväliä, sillä aiemmin osoitimme että skalaarilla kertominen ja yhteenlasku ovat jatkuvia kuvauksia.

Seuraus 2.13. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Tällöin $[a, b]$ on kompakti.*

Todistus. Yhden pisteen joukko $\{b-a\}$ on kompakti avaruudessa $\mathbb{R}$, ja lauseen 2.12 nojalla myös $[0, 1]$ on kompakti, joten tuloavaruus $\{b-a\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on kompakti Tihonovin lauseen nojalla. Nyt huomataan, että

$$[0, b-a] = \{(b-a)x \mid x \in [0, 1]\} = s(\{b-a\} \times [0, 1])$$

on kompakti kompaktin avaruuden kuvana jatkuvassa kuvauksessa $s$ (=skalaarilla kertominen). Samaan tapaan joukko

$$[a, b] = \{a + x \mid x \in [0, b-a]\} = y(\{a\} \times [0, b-a])$$

on kompakti. Tässä siis $y$ on reaaliakselin yhteenlasku, eli jatkuva. □

Lause 2.14 (Heine-Borel). *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $A$ on kompakti jos, ja vain jos $A$ on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $A$ on suljettu ja rajoitettu. Tällöin kaikille $k = 1, \ldots, n$ löytyy $r_k$ siten, että $P_k(A) \subset (0, r_k) \subset [0, r_k]$, missä $[0, r_k]$ on kompakti seurauksen 2.13 nojalla. Lisäksi selvästikin selvästikin

$$A \subset \prod_{k=1}^{n} [0, r_k].$$

Edelleen

$$\prod_{k=1}^{n} [0, r_k]$$

on Tihonovin lauseen nojalla kompakti, joten $A$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti lauseen 1.9 nojalla.

Oletetaan seuraavaksi, että $A$ on kompakti. Hausdorff-avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompaktina osajoukkona $A$ on suljettu lauseen 1.10 nojalla. Lisäksi kaikille $k = 1, \ldots, n$ pätee, että $P_k(A)$ on kompakti, sillä projektio on jatkuva kuvaus. Nyt kokoelma

$$\{B(x, 1) \mid x \in P_k(A)\}$$

on joukon $P_k(A)$ avoin peite kannan joukoilla, joten lauseen 1.14 nojalla on olemassa äärellinen $B \subset P_k(A)$ siten, että

$$\{B(x, 1) \mid x \in B\}$$

on edelleen joukon $P_k(A)$ peite. Valitaan nyt $r_k = max\{|x| + 1 \mid x \in B\}$, jolloin selvästikin $P_k(A) \subset B(0, r_k)$. Tällainen $r_k$ löydetään kaikille $k = 1, \ldots, n$, joten $A$ on rajoitettu. □

LUKU 3

# Kompaktisointi

Tässä luvussa tutustutaan topologisen avaruuden kompaktisointiin. Ideana on upottaa avaruus $X$ kompaktiin topologiseen avaruuteen $Y$ siten, että avaruuden $X$ kuva homeomorfismissa on avaruuden $Y$ tiheä osajoukko, jolloin $Y$ on hyvin lähellä avaruutta $X$, mutta kompakti. Esimerkkinä kompaktisoinneista annetaan yhden pisteen kompaktisointi, ja tietynlaisten topologisten avaruuksien $X$ tapauksessa, Stone-Čech-kompaktisointi, joka tulee olemaan yläraja ja maksimaalinen alkio Hausdorff-kompaktisointien joukolle Aluksi tarvitaan vielä muutamia topologisia käsitteitä. Yhden pisteen kompaktisointi osoitetaan myös alarajaksi Hausdorff-kompaktisoinneille, mutta se ei välttämättä ole minimaalinen. Tässä luvussa seurataan Kelleyn kirjaa General Topology [**1**, s.149].

Lisäksi luvussa on käytetty verkkosivua $\pi$-base [**4**] muutamien vastaesimerkkien (3.21 ja 3.24) avaruuksien keksimiseen. Verkkosivu on erittäin kätevä topologiassa vastaesimerkkien keksimiseen. Verkkosivulla määrität itse, mitä topologisia ominaisuuksia haluat avaruuden omaavan, ja mitä ominaisuuksia et halua avaruuden omaavan. Tämän jälkeen saat listan konkreettisia topologisia avaruuksia, jotka täyttävät antamasi ehdot. Verkkosivu on lisäksi oppimisen kannalta erittäin hyödyllinen, sillä näiden esimerkkiavaruuksien topologisten ominaisuuksien todistaminen toimii erinomaisena harjoituksena määritelmien käytössä.

## 3.1. Kompaktisointi

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon $X$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Joukon $A$ **sulkeuma** $\bar{A}$ on

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F,$$

missä $\mathcal{F}_A = \{F \subset X \mid F \text{ suljettu }, A \subset F\}$ on kaikkien joukon $A$ sisältävien suljettujen joukkojen kokoelma.

Topologian määritelmästä ja De Morganin kaavoista huomataan, että suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu, joten joukon $A$ sulkeuma voidaan tulkita pienimpänä suljettuna joukkona, joka sisältää joukon $A$. Selvästikin joukko $A$ on suljettu jos, ja vain jos $A = \bar{A}$.

LAUSE 3.2. *Olkoon $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ kaikille $A \subset X$.*

TODISTUS. Olkoon

$$\mathbb{K}_1 = \{K \subset X \mid A \subset K, K \text{ suljettu }\}$$

ja

$$\mathbb{K}_2 = \{K \subset Y \mid f(A) \subset K, K \text{ suljettu }\}.$$

Nyt, koska $f$ on jatkuva, pätee että $f^{-1}[K]$ on suljettu avaruudessa $X$. Lisäksi, koska $f(A) \subset K$, pätee

$$A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[K]$$

Nyt siis jos merkitään

$$\mathbb{K}_3 = \{f^{-1}[K] \subset X \mid A \subset f^{-1}[K], K \text{ suljettu } \},$$

niin $\mathbb{K}_3$ on kokoelma avaruuden $X$ suljettuja joukkoja, jotka sisältävät joukon $A$, eli $\mathbb{K}_3 \subset \mathbb{K}_1$. Edelleen siis

$$\bar{A} = \bigcap_{K \in \mathbb{K}_1} K \subset \bigcap_{K \in \mathbb{K}_3} K,$$

ja sama inkluusio pätee myös näiden kuville kuvauksessa $f$, eli

$$f(\bar{A}) \subset f\left(\bigcap_{K \in \mathbb{K}_3} K\right) \subset \bigcap_{K \in \mathbb{K}_3} f(K).$$

Lopuksi huomataan, että

$$f(\bar{A}) \subset \bigcap_{K \in \mathbb{K}_3} f(K) = \bigcap_{K \in \mathbb{K}_2} K = \overline{f(A)}$$

kuten haluttiinkin. □

Edellinen lause pätee myös toiseen suuntaan, mutta emme todista tätä, sillä sitä ei tarvita tässä työssä. Todistuksen toiseen suuntaan voi halutessaan lukea Kelleyn kirjasta General Topology [**1**, 3.1]. Kuvauksen jatkuvuuden voisi siis määritellä myös joukkojen sulkeumien avulla haluttaessa.

Määritelmä 3.3. Olkoon $X$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Sanotaan, että joukko $A$ on **tiheä** avaruudessa $X$, jos $\bar{A} = X$.

On helppo nähdä, että jos $A$ on tiheä avaruudessa $X$, niin jokaiselle $x \in \bar{A}$ ja avoimelle $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, jolle $x \in U$, löytyy $y \in U \cap A$. Jos nimittäin on olemassa epätyhjä avoin joukko $U \subset X$, joka ei leikkaa joukkoa $A$, niin huomataan että $\bar{A} \subset X \setminus U \neq X$. Tämä siis tarkoittaa, että jokainen joukon $A$ sulkeuman piste on topologisessa mielessä hyvin lähellä joukkoa $A$ itse, eli tiheä joukko on topologisesti hyvin suuri koko avaruudessa. Tämä johdattelee seuraavaan kompaktisoinnin määritelmään.

Määritelmä 3.4. Olkoon $X$ ja $Y$ topologisia avaruuksia, missä $Y$ on lisäksi kompakti, ja $f\colon X \to f(X) \subset Y$ kuvaus. Sanotaan, että pari $(f, Y)$ on topologisen avaruuden $X$ **kompaktisointi**, jos $f$ on homeomorfismi ja $f(X) \subset Y$ on tiheä.

Esimerkki 3.5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko. Tällöin $(id_A, \bar{A})$ on avaruuden $A$ kompaktisointi. Selvästikin identtinen kuvaus $id_A\colon A \to A$, $id_A(a) = a$, on homeomorfismi, kun avaruuksissa käytetään relatiivitopologioita. Lisäksi määritelmän nojalla $id_A(A) = A$ on tiheä avaruudessa $\bar{A}$. Lopuksi Heine-Borelin lauseen nojalla $\bar{A}$ on kompakti.

Tässä esimerkissä joukkojen mielessä identtinen kuvaus $id$ on homeomorfismi. On kuitenkin oltava varovainen yleisesti joukkojen mielessä identtisen kuvauksen kanssa, sillä maalipuolen joukossa ei automaattisesti ole sama topologia kuin lähtöavaruudessa. Tällöin homeomorfisuus on syytä tarkistaa huolella. Maalipuolella käytetään siis avaruuden $f(X)$ topologiana homeomorfismitarkasteluissa ja muutenkin (määritelmän 3.4 merkinnöillä) relatiivitopologiaa $\tau_{f(X)}$ avaruuden $Y$ suhteen.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Avaruuden $X$ kaikkien kompaktisointien joukkoon määritellään relaatio $\geq$ siten, että $(f, Y) \geq (g, Z)$ jos, ja vain jos on olemassa jatkuva surjektio $h\colon Y \to Z$ siten, että $h_{|f(X)} = g \circ f^{-1}$, tai yhtäpitävästi, $g = h \circ f$. Edelleen kompaktisoinnit $(f, Y)$ ja $(g, Z)$ ovat **topologisesti ekvivalentit**, jos kuvaus $h\colon Y \to Z$ kuten yllä voidaan valita homeomorfismiksi.

Topologinen ekvivalenttisuus on helppo todeta ekvivalenssirelaatioksi kaikkien topologisen avaruuden $X$ kompaktisointien joukossa, joten voimme samaistaa topologisesti ekvivalentit kompaktisoinnit. Tämä siis tarkoittaa, että $(f, Y) = (g, Z)$, jos nämä ovat topologisesti ekvivalentit. Tätä samaistusta tarvitaan jatkossa, kun tutkimme milloin relaatio $\geq$ on osittainen järjestys. Lisäksi jos $(f, Y)$ ja $(g, Z)$ ovat topologisesti ekvivalentit, niin $(f, Y) \geq (g, Z)$ ja $(g, Z) \geq (f, Y)$, sillä onhan $h^{-1}$ tarvittava jatkuva surjektio avaruudelta $Z$ avaruuteen $Y$. Tämä ei kuitenkaan päde aina vastakkaiseen suuntaan, eli on olemassa kaksi saman avaruuden kompaktisointia, jotka ovat molemmat toistaan suurempia, mutta jotka eivät ole topologisesti ekvivalentit. Näytämme tästä esimerkin määriteltyämme yhden pisteen kompaktisoinnin.

## 3.2. Yhden pisteen kompaktisointi

Mahdollisesti yksinkertaisin konkreettinen kompaktisointi on yhden pisteen kompaktisointi. Yhden pisteen kompaktisointia on käsitelty esimerkiksi kompleksianalyysin kurssilla luomalla homeomorfismi yksikköympyrän (tai minkä tahansa ympyrän) kehältä lakipiste poislukien reaaliakselille. Tällöin ympyrän kehän lakipiste kuvaa äärettömyyttä reaaliakselilla ja kehä on kompakti. Tietenkin tämä reaaliakselin ”taivutus” ympyrän kehäksi tehdään vain havainnollisuuden takia, mutta kompaktisoinnissahan etsitään juuri avaruuden kanssa homeomorfista kompaktin avaruuden tiheätä aliavaruutta, joten se on sallittua. Tämä yhden pisteen kompaktisointi voidaan tehdä yleiselle topologiselle avaruudelle seuraavan esimerkin mukaisesti. Esimerkki myös näyttää miten reaaliakselin voisi kompaktisoida yhdellä pisteellä ilman ”taivutteluja”. Lopputulos on kuitenkin homeomorfismin tarkkuudella sama kuin ympyrän kehällä tehtynä.

ESIMERKKI 3.7 (Yhden pisteen kompaktisointi). Olkoon $X$ topologinen avaruus, joka ei ole kompakti, ja $\infty \notin X$ mielivaltainen piste avaruuden $X$ ulkopuolelta. Avaruuden $X$ **yhden pisteen kompaktisointi** on pari $(id_X, X^*)$, missä $X^* = X \cup \{\infty\}$ varustettuna topologialla, jonka avoimia joukkoja ovat avaruuden $X$ avoimet joukot ja ne avaruuden $X^*$ osajoukot, joiden komplementti on suljettu ja kompakti avaruudessa $X$. Selvästikin pisteen $\infty$ tulee sisältyä näihin jälkimmäisen tyypin joukkoihin, ja vain näihin, sillä $\infty \notin X$. Kuvaus $id_X\colon X \to X$ määritellään siten, että $id_X(x) = x$ kaikille $x \in X$.

Osoitetaan ensiksi, että $X^*$ on topologinen avaruus. Tyhjä joukko on kompakti ja suljettu avaruudessa $X$, joten $X^*$ on avoin. Lisäksi tyhjä joukko on avaruuden $X$ avoin joukko, joten se on myös avaruuden $X^*$ avoin joukko. Olkoot $A$ ja $B$ avoimia avaruudessa $X^*$. Selvästikin tällöin $A \cap X$ ja $B \cap X$ ovat avoimia avaruudessa $X$, joten riittää tarkastella tapausta jossa $\infty \in A \cap B$, sillä muissa tapauksissa $A \cap B$ on avoin siitä syystä, että $X$ on topologinen avaruus, jonka avoimet joukot ovat avoimia avaruudessa $X^*$. Nyt $X^* \setminus (A \cap B) = (X^* \setminus A) \cup (X^* \setminus B)$ on kahden kompaktin suljetun joukon yhdisteenä kompakti[1] ja suljettu, joten $A \cap B$ on avoin avaruudessa $X^*$. Olkoon lopuksi $A_i$ avaruuden $X^*$ avoimia joukkoja kaikille $i \in I$. Jos

$$\infty \notin \bigcup_{i \in I} A_i,$$

niin jokainen $A_i$ on avaruuden $X$ avoin joukko joten yhdiste on avoin. Jos taas $\infty \in A_k$ jollekin $k \in I$, niin

$$X^* \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X^* \setminus A_i) \subset X^* \setminus A_k$$

on leikkaus avaruuden $X$ suljettuja joukkoja, siis suljettu, ja kompaktin joukon $X \setminus A_k$ suljettuna osajoukkona kompakti lauseen 1.9 nojalla. Siispä mielivaltainen yhdiste avoimia joukkoja on avoin joukko avaruudessa $X^*$, ja $X^*$ on topologinen avaruus.

Lisäksi tulee näyttää, että $id_X$ on homeomorfismi. Selvästikin $id_X$ on bijektio, joka säilyttää joukot niin kuvassa kuin alkukuvassakin. Tässä kuitenkin huomattava, että kuvajoukon $id_X(X) = X$ topologia, merkitään tätä $\tau_2$, on nyt avaruuden $X^*$ topologian määrittämä relatiivitopologia, kun taas lähtöavaruuden $X$ topologia on alkuperäinen avaruuden $X$ topologia, jota merkitsemme nyt $\tau_1$. Määritelmän mukaan avaruuden $X^*$ topologia sisältää kaikki avaruuden $X$ avoimet joukot, joten selvästikin $\tau_1 \subset \tau_2$, eli jokaisen avoimen joukon $U \in \tau_1$ kuva $id_X(U) \in \tau_2$, eli $id_X$ on avoin. Joukkojen $U \in \tau_1$ lisäksi avaruuden $X^*$ topologiaan kuuluvat sellaiset pisteen $\infty$ sisältävät joukot $V$, joiden komplementti $X^* \setminus V$ on avaruuden $(X, \tau_1)$ suljettu ja kompakti joukko. Siispä relatiivitopologia $\tau_2$ sisältää topologian $\tau_1$ lisäksi myös sellaiset joukot $V$ joille $X \setminus V$ on suljettu ja kompakti avaruudessa $(X, \tau_1)$. Mutta tällaiset joukothan ovat jo valmiiksi topologian $\tau_1$ alkioita, sillä $\tau_1$ sisältää kaikki joukot joiden komplementti on suljettu avaruudessa $(X, \tau_1)$. Siispä huomataan että $\tau_1 = \tau_2$, ja koska $id_X$ säilyttää alkukuvat, niin jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Siispä $id_X$ kuvalleen on jatkuva ja näin ollen homeomorfismi.

Avaruuden $X^*$ kompaktisuuden näyttämiseksi olkoon $U_j$, $j \in J$ avaruuden $X^*$ avoin peite. Tällöin $\infty \in U_k$ jollekin $k \in J$, ja $X^* \setminus U_K$ on kompakti, joten sen peitteellä $U_j$, $j \in J \setminus \{k\}$ on äärellinen alipeite. Kun tähän äärelliseen alipeitteeseen lisätään $U_k$, saadaan alkuperäiselle avaruuden $X^*$ peitteelle $U_j$, $j \in J$, äärellinen alipeite. Siispä $X^*$ on kompakti.

Lopuksi huomataan, että $\{\infty\}$ ei ole avoin avaruudessa $X^*$, sillä oletimme että avaruus $X$ ei ole kompakti. Kaikki muut (avoimet) joukot leikkaavat avaruutta $X$, joten $X$ on tiheä avaruudessa $X^*$ määritelmän 3.3 jälkeisen huomautuksen nojalla.

Vaatimus siitä, että avaruus $X$ ei ole kompakti on tarvittava, sillä jos $X$ olisi kompakti, niin määritelmän mukaan $\{\infty\}$ olisi avoin avaruudessa $X^*$, ja edelleen $X$ ei olisikaan tiheä avaruudessa $X^*$. Tällöinhän yhden pisteen kompaktisointi ei olisikaan kompaktisointi. Tämä on siis järkevä vaatimus, sillä eihän valmiiksi kompaktiin avaruuten kannata mitään lisätä, jotta siitä tulisi kompakti. Yleisestikin jos $X$ on kompakti, niin kompaktisoinnin määritelmässä vaadittava homeomorfismi $f$ voi olla

[1]Kahden kompaktin joukon yhdiste on helppo näyttää kompaktiksi: jos jokin peite peittää yhdisteen, niin se peittää myös molemmat yhdisteen muodostavat joukot, ja molempien tapauksessa voidaan valita äärelliset alipeitteet. Näiden alipeitteiden yhdiste on nyt alkuperäisen peitteen äärellinen alipeite

vaikka identtinen kuvaus ja avaruus $Y = X$ sen sijaan, että avaruutta $X$ pyrittäisiin upottamaan tiheäksi johonkin suurempaan avaruuteen.

Useissa lähteissä yhden pisteen kompaktisoinnissa ei vaadita, että avaruuden $X^*$ pisteen $\infty$ sisältävien avoimien joukkojen komplementit ovat avaruuden $X$ suljettuja joukkoja, vaan ainoastaan kompakteja. Tämä johtunee siitä, että usein vaaditaankin kompaktisoinnin maaliavaruuden olevan kompakti ja Hausdorff. Tälläisia kompaktisointeja sanotaan Hausdorff-kompaktisoinneiksi ja niillä on monia kiinnostavia ominaisuuksia. Myöhemmin todistetaan, että jos yhden pisteen kompaktisointi on Hausdorff-kompaktisointi, niin alkuperäinen avaruus $X$ on Hausdorff. Tällöinhän sen kompaktit osajoukot ovat siis automaattisesti suljettuja lauseen 1.10 nojalla. Kuitenkaan emme vaadi kompaktisoinnilta tätä Hausdorff-ominaisuutta, joten yhden pisteen kompaktisoinnissa vaaditaan, että pisteen $\infty$ avoimet ympäristöt ovat niitä, joiden komplementti on sekä kompakti että suljettu. Tämä vaatimus on hyvin perusteltu, sillä jos tutkimme kuvauksen $id_X$ homeomorfisuutta kuten yllä, emmekä vaadi että avaruuden $X^*$ pisteen $\infty$ sisältävien avoimien joukkojen komplementit ovat suljettuja avaruudessa $X$, niin saatamme "luoda" topologiaan $\tau_2$ (määritelty kuten yllä) avoimia joukkoja, jotka eivät kuulu topologiaan $\tau_1$. Tällöin kuvauksen $id_X$ jatkuvuus ei ole taattu.

Annetaan seuraavaksi aiemmin mainittu esimerkki kahdesta saman avaruuden kompaktisoinnista, jotka ovat toinen toistaan suurempia määritellyn relaation $\geq$ mielessä, mutta jotka eivät ole topologisesti ekvivalentit. Ideana on määritellä luonnollisten lukujen joukkoon kaksi eri topologiaa, minkä jälkeen syntyneitä avaruuksia laajennetaan samalla tavalla kaksi kertaa jolloin saadaan kaksi samaa joukkoa eri kompakteilla topologioilla. Lopuksi yksi pisteistä, joka on konstruktion aikana valittu tiheäksi, upotetaan kumpaankin näistä jolloin syntyy kaksi eri kompaktiointia jotka täyttävät yllä mainitut vaatimukset. Tämän esimerkin idean keksi Joonas Ilmavirta.

Esimerkki 3.8. Olkoon $Y, Z = \mathbb{N}$. Varustetaan $Y$ topologialla, jonka kantana on $\{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, ja $Z$ topologialla, jonka kantana on $\{\{3n-2, 3n-1, 3n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tällaiset kokoelmat tosiaankin ovat kantoja lauseen 1.15 nojalla, sillä kumpikin peittää joukon $\mathbb{N}$ ja kummankin sisältämät joukot ovat pareittain pistevieraita.

Määritellään kuvaus $f\colon Y \to Z$, $f(2n-1) = f(2n) = n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f$ on selvästikin surjektio. Lisäksi se on jatkuva: olkoon $U \subset Z$ avoin. Alkukuva $f^{-1}[\{z\}]$ on määritelmän nojalla avoin avaruudessa $Y$ kaikille $z \in U$. Siispä

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\left[\bigcup_{z\in U}\{z\}\right] = \bigcup_{z\in U} f^{-1}\left[\{z\}\right]$$

on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin avaruudessa $Y$. Siispä $f$ on jatkuva. Vastaavasti määritellään $g\colon Z \to Y$, $g(3n-2) = g(3n-1) = g(3n) = n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, jolloin vastaavalla päättelyllä $g$ on jatkuva surjektio.

Olkoon nyt $(id_Y, Y^*)$ ja $(id_Z, Z^*)$ vastaavasti avaruuksien $Y$ ja $Z$ yhden pisteen kompaktisoinnit käyttäen pistettä $-1 \notin \mathbb{N}$. Tällöin siis avaruudet $Y^* = Y \cup \{-1\}$ ja $Z^* = Z \cup \{-1\}$ ovat kompakteja. Määritellään lisäksi kuvauksien $f$ ja $g$ jatkeet $f^*$ ja $g^*$ kuvaamalla piste $-1$ itselleen, eli siis $f^*(y) = f(y)$ kaikille $y \in Y$, $g^*(z) = g(z)$ kaikille $z \in Z$ ja $f^*(-1) = g^*(-1) = -1$. Selvästikin kuvaukset $f^*$ ja $g^*$ ovat surjektiivisia. Osoitetaan, että ne ovat lisäksi jatkuvia. Muistetaan, että yhden pisteen kompaktisoinnissa uuden avaruuden $A^*$ avoimia joukkoja ovat alkuperäisen avaruuden

$A$ avoimien joukkojen lisäksi ne joukot, joiden komplementti on suljettu ja kompakti avaruudessa $A$. Lisäksi huomataan, että avaruuksissa $Y$ ja $Z$ kompakteja osajoukkoja ovat täsmälleen äärelliset osajoukot, sillä ääretöntä joukkoa ei voi peittää äärellisellä määrällä äärellisiä joukkoja, ja avaruuksien $Y$ ja $Z$ kantojen avoimet joukothan ovat kaikki äärellisiä. Kompaktisuutta tutkiessahan siis riittää tutkia vain peitteitä jonkin kannan alkiolla lauseen 1.14 mukaan.

Näytetään kuvauksen $f^*$ jatkuvuus. Kuvauksen $g^*$ jatkuvuus voidaan näyttää vastaavalla tavalla. Olkoon $U \subset Z^*$ avoin. Jos $U$ on avaruuden $Z$ avoin joukko, niin sen alkukuva on avoin, kuten aiemmin näytettiin. Olkoon siis $\{-1\} \in U$ ja $U^c \subset Z$ suljettu ja äärellinen (eli siis kompakti). Nyt

$$(f^*)^{-1}[U] = (f^*)^{-1}[(U^c)^c] = ((f^*)^{-1}[(U^c)])^c = (f^{-1}[(U^c)])^c,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $U^c \subset Z$ (vain alkio $-1$ kuvautuu alkioksi $-1$). Nyt joukko $f^{-1}[(U^c)]$ on suljetun joukon alkukuvana suljettu. Lisäksi kuvauksen $f$ määritelmän nojalla siinä on korkeintaan kaksi kertaa niin monta alkiota kuin joukossa $U^c$, eli äärellinen määrä. Siispä $f^{-1}[(U^c)]$ on kompakti. Lisäksi huomataan, että $\{-1\} \in (f^{-1}[(U^c)])^c$, eli $(f^{-1}[(U^c)])^c = (f^*)^{-1}[U]$ on avoin avaruudessa $Y^*$. Siispä $f^*$ on jatkuva. Vastaavasti $g^*$ on jatkuva.

Lisätään nyt vielä joukkoon $Y^*$ piste $0 \notin \mathbb{N}$. Lisäksi valitaan syntyvään uuteen joukkoon topologia siten, että $\{0\}$ on tiheä uudessa avaruudessa $Y^{**} := Y^* \cup \{0\}$. Tämä tapahtuu valitsemalla avaruuteen $Y^{**}$ topologia $\{U \cup \{0\} \mid U \text{ avoin avaruudessa } Y^*\} \cup \emptyset$ (tämän osoittaminen topologiaksi on hyvin helppoa). Huomataan, että avaruus $Y^{**}$ on kompakti, sillä jos $\{A_i \mid i \in I\}$ on avaruuden $Y^{**}$ avoin peite, niin $\{A_i \setminus \{0\} \mid i \in I\}$ on avaruuden $Y^*$ avoin peite, eli on olemassa äärellinen $J \subset I$ siten, että $\{A_i \setminus \{0\} \mid i \in J\}$. Nyt huomataan, että $\{A_i \mid i \in J\}$ on alkuperäisen avaruuden $Y^{**}$ peitteen äärellinen alipeite, sillä $\{0\} \in A_i$ kaikille $i \in I$. Siispä $Y^{**}$ on kompakti.

Vastaavalla tavalla määritellään kompakti topologinen avaruus $Z^{**}$, ja edelleen $\{0\}$ on tiheä tässä. Jatketaan nyt jatkuvaa surjektiota $f^*$ kuvaukseksi $f^{**} \colon Y^{**} \to Z^{**}$ asettamalla $f^{**}(y) = f^*(y)$ kaikille $y \in Y^*$ ja $f^{**}(0) = 0$. Nyt $f^{**}$ on edelleen surjektio. Osoitetaan lisäksi, että se on jatkuva. Olkoon $U \subset Z^{**}$ avoin. Nyt siis $0 \in U$, ja on olemassa avaruudessa $Z^*$ avoin $U'$ siten, että $U = U' \cap \{0\}$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}(f^{**})^{-1}[U] &= (f^{**})^{-1}[U' \cup \{0\}] \\ &= (f^{**})^{-1}[U'] \cup (f^{**})^{-1}[\{0\}] \\ &= (f^*)^{-1}[U'] \cup \{0\},\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa kuvauksen $f^{**}$ määritelmästä avaruuden $Y^*$ alkioille. Nyt huomataan, että $(f^*)^{-1}[U']$ on avoin, joten $(f^{**})^{-1}[U]$ on määritelmän mukaan avoin avaruudessa $Y^{**}$. Vastaavasti määritellään $g^{**} \colon Z^{**} \to Y^{**}$ ja huomataan sen olevan jatkuva surjektio.

Lopuksi määritellään $X := \{0\}$ ainoalla mahdollisella topologiallaan. Olkoon

$$id_{X,Y} \colon X \to X \subset Y^{**}, id_{X,Y}(0) = 0$$

ja

$$id_{X,Z} \colon X \to X \subset Z^{**}, id_{X,Z}(0) = 0$$

identtisiä kuvauksia. Nyt $(id_{X,Y}, Y^{**})$ ja $(id_{X,Z}, Z^{**})$ ovat kompaktisointeja, sillä kuvaukset $id_{X,Y}$ ja $id_{X,Z}$ ovat homeomorfismeja. Tämän huomaa siitä, että nämä kuvaukset säilyttävät joukot kuvassa ja alkukuvassa, ja $\{0\}$ on ainoa epätyhjä avoin joukko aliavaruudessa $\{0\} \subset Y^{**}$ (ja vastaavasti tapauksessa $Z^{**}$). Edelleen avaruuden $X$ kuva $\{0\}$ on tiheä kompakteissa avaruuksissa $Y^{**}$ ja $Z^{**}$. Lisäksi, koska $f^{**} \colon Y^{**} \to Z^{**}$ ja $g^{**} \colon Z^{**} \to Y^{**}$ ovat jatkuvia surjektioita jotka kuvaavat nollan nollaksi, pätee $id_{X,Z} = f^{**} \circ id_{X,Y}$ ja $id_{X,Y} = g^{**} \circ id_{X,Z}$. Tämä siis tarkoittaa, että $(id_{X,Y}, Y^{**}) \geq (id_{X,Z}, Z^{**}) \geq (id_X, Y^{**})$.

Kuitenkaan $(id_{X,Y}, Y^{**})$ ja $(id_{X,Z}, Z^{**})$ eivät ole topologisesti ekvivalentit, eli ei ole olemassa homeomorfismia $\phi \colon Y^{**} \to Z^{**}$ siten, että $id_{X,Z} = \phi \circ id_{X,Y}$. Olkoon $\phi \colon Y^{**} \to Z^{**}$ bijektio, joka täyttää topologisen ekvivalenssin vaatiman kuvausten kommutoinnin kuten edellä. Osoitetaan, että se ei ole avoin. Joukko $\{1, 2\}$ on avoin avaruudessa $Y$, joten se on avoin avaruudessa $Y^*$. Siispä joukko $U := \{0, 1, 2\}$ on avoin avaruudessa $Y^{**}$. Topologisesti ekvivalenttien kompaktisointien määritelmän mukaisen kuvausten kommutoinnin nojalla on oltava $0 \in \phi(U)$. Koska $\phi$ on bijektio, niin joukossa $\phi(U) \setminus \{0\}$ on vain kaksi alkiota avaruuteen $Z^*$ kuuluvaa alkiota. Jotta $\phi(U)$ olisi avoin avaruudessa $Z^{**}$, on joukon $\phi(U) \setminus \{0\}$ oltava avoin avaruudessa $Z^*$. Näin ei kuitenkaan ole, sillä avaruuden $Z^*$ avoimet joukot ovat joko sellasia, jotka sisältävät pisteen $\{-1\}$, ja joiden komplementti on äärellinen, tai sellaisia, jotka sisältävät kannan joukon, eli joukon jossa on kolme pistettä. Huomataan että $\phi(U) \setminus \{0\}$ ei täytä kumpaakaan näistä kriteereistä, sillä sen komplementti on ääretön, eikä se edes itse sisällä kolmea pistettä. Siispä $\phi(U) \setminus \{0\}$ ei ole avoin avaruudessa $Z^*$, joten $\phi(U)$ ei ole avoin avaruudessa $Z^{**}$, ja edelleen $\phi$ ei ole avoin eikä siten myöskään homeomorfismi.

Tämä esimerkki on hyvin abstrakti. Siinähän kompaktisoidaan jo valmiiksi kompaktia yhden pisteen avaruutta lisäämällä tähän kaikki luonnolliset luvut ja vielä yksi ylimääräinenkin luku. Kuitenkin esimerkin avaruudet ja kuvaukset täyttävät kaikki kompaktisoinnin vaatimukset. Tämä ominaisuus on eräässä mielessä hyvin epätoivottua, sillä avaruuden $X$ kompaktisointien joukko relaatiolla $\geq$ varustettuna ei ole osittain järjestetty. Tämä voidaan kuitekin korjata rajoittamalla kompaktisointeja.

## 3.3. Hausdorff-kompaktisointi

Haluaisimme siis, että relaatio $\geq$ olisi osittainen järjestys kompaktisointien välillä. Tämä onnistuu rajoittamalla tarkastelu Hausdorff-kompaktisointeihin. Hausdorff-kompaktisoinnit ovat erittäin hyödyllisiä, sillä kompakteilla Hausdorff-avaruuksilla on topologisessa mielessä hyviä ominaisuuksia. Tulemme myös tässä kappaleessa huomaamaan, että Hausdorff-kompaktisoinnit ovat eräässä mielessä järkeviä kompaktisointeja. Monissa lähteissä vain Hausdorff-kompaktisoinnit ovat kompaktisointeja. Tässä työssä ei kuitenkaan yleisesti vaadita kompaktisoinnilta, että maaliavaruus olisi Hausdorff.

Määritelmä 3.9. Kompaktisoinnin $(f, Y)$ sanotaan olevan **Hausdorff**, jos $Y$ on Hausdorff-avaruus.

Osoitetaan nyt, että Hausdorff-kompaktisointien joukossa toisiaan suuremmat kompaktisoinnit ovat topologisesti ekvivalentit, eli topologisessa mielessä samat. Tätä varten tarvitsemme kuitenkin lemman jonka mukaan kuvaukset topologiselta avaruudelta Hausdorff-avaruudelle ovat samat, jos niiden rajoittumat tiheään osajoukkoon ovat samat.

Lemma 3.10. *Olkoon $X$ topologinen avaruus ja $Y$ topologinen Hausdorff-avaruus. Olkoon lisäksi $A \subset X$ tiheä ja $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia siten, että $f(x) = g(x)$ kaikille $x \in A$. Tällöin $f(x) = g(x)$ kaikille $x \in X$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: $f(a) \neq g(a)$ jollekin $a \in X \setminus A$. Koska $Y$ on Hausdorff, löydämme avoimet joukot $U, V \subset Y$ siten, että $f(a) \in U$, $g(a) \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Lisäksi

$$a \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] =: W.$$

$W$ on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin, joten määritelmän 3.3 jälkeisen huomautuksen nojalla on olemassa $b \in A \cap W$. Nyt siis $f(b) = g(b)$, sillä $b \in A$ ja lisäksi $f(b) = g(b) \in U \cap V$, sillä $b \in W$, mikä on ristiriita, sillä $U$ ja $V$ valittiin Hausdorff-ehdon mukaisesti pistevieraiksi. Siispä $f(x) = g(x)$ kaikille $x \in X$. □

Lause 3.11. *Jos $(f, Y)$ ja $(g, Z)$ ovat Hausdorff-kompaktisointeja ja $(f, Y) \geq (g, Z) \geq (f, Y)$, niin $(f, Y)$ ja $(g, Z)$ ovat topologisesti ekvivalentit.*

Todistus. Olkoon $h\colon Y \to Z$ ja $k\colon Z \to Y$ kuvauksien $g \circ f^{-1}$ ja $f \circ g^{-1}$ jatkuvat surjektiiviset relaation $\geq$ määritelmän mukaiset jatkeet. Tällöin kuvauksen $h \circ k$ rajoittuma joukkoon $f(Y)$ on identtinen kuvaus, ja koska $f(Y)$ on tiheä Hausdorff avaruudessa $Y$, on $h \circ k$ identtinen kuvaus koko avaruudessa $Y$ lemman 3.10 nojalla. Vastaavalla päättelyllä $k \circ h$ on identtinen kuvaus koko avaruudessa $Z$. Tällöin siis $h$ ja $k$ ovat toistensa käänteiskuvaukset ja homeomorfismeja, sillä ne ovat jatkuvia. □

Hausdorff-kompaktisoinneilla on siis tämä hyvin miellyttävä ominaisuus. Nyt olemme valmiita osoittamaan, että avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisointien joukko varustettuna relaatiolla $\geq$ on osittain järjestetty.

Lause 3.12. *Olkoon $X$ topologinen avaruus. Kompaktisointien välinen relaatio $\geq$ osittain järjestää avaruuden $X$ kaikkien Hausdorff-kompaktisointien joukon*

Todistus. Osittaisen järjestyksen ehto (1) on triviaali. Lisäksi ehto (2) on todettu lauseessa 3.11, kun muistetaan, että samaistimme topologisesti ekvivalentit kompaktisoinnit. Osoitettavaksi jää siis ehto (3). Olkoon siis $(f, Y), (g, Z)$ ja $(\phi, H)$ avaruuden $X$ kompaktisointeja siten, että $(f, Y) \geq (g, Z)$ ja $(g, Z) \geq (\phi, H)$. Tällöin on siis olemassa jatkuvat surjektiot $h\colon Y \to Z$ ja $k\colon Z \to H$ siten, että $g = h \circ f$ ja $\phi = k \circ g$.

Nyt $k \circ h\colon Y \to H$ on selvästikin surjektiivinen ja lisäksi jatkuva lemman 1.6 nojalla. Lisäksi $\phi = k \circ g = (k \circ h) \circ f$, eli relaation $\geq$ määritelmän mukaisesti $(f, Y) \geq (\phi, H)$. Siispä $\geq$ on osittainen järjestys. □

Hausdorff-kompaktisointien joukko varustettuna relaatiolla $\geq$ ei kuitenkaan ole täysin järjestetty. Annetaan tästä esimerkki. Tarkoituksena on kompaktisoida kahden reaaliakselin avoimen välin yhdistelmää ensin kahdella "äärettömyyspisteellä" kuten yhden pisteen kompaktisoinnissa ja toiseksi lisäämällä toiseen väleistä toinen päätepiste ja tämän jälkeen tekemällä yhden pisteen kompaktisointi näin syntyneelle avaruudelle käyttäen saman välin, johon toinen päätepiste lisättiin, toista päätepistettä äärettömyytenä. Tällöin huomataan, etteivät syntyneet saman avaruuden kompaktisoinnit ole verrattavissa. Esimerkin idean antoi Joonas Ilmavirta.

Esimerkki 3.13. Olkoon $a < b < c < d$ reaalilukuja ja $X = (a, b) \cup (c, d)$ varustettuna tavallisella topologialla $\tau$. Ensin kompaktisoidaan $X$ kahdella "äärettömyyspisteellä". Olkoon $\infty_1 \notin X$ ja $\infty_2 \notin X$, $\infty_1 \neq \infty_2$. Määritellään $X^{**} = X \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ topologialla, jonka avoimia joukkoja ovat välien $(a, b)$ ja $(c, d)$ yhden pisteen kompaktisointien (pisteillä $\infty_1$ ja $\infty_2$ vastaavasti) avoimet joukot ja näiden yhdisteet. Tällöin pari $(id_X, X^{**})$ on kompaktisointi. Kahden kompaktin joukon yhdiste on kompakti. Lisäksi yhden pisteen kompaktisoinnin avoimien joukkojen määritelmän nojalla selvästikin $X$ on tiheä[2] avaruudessa $X^{**}$. Lisäksi samalla päättelyllä kuin yhden pisteen kompaktisoinnin tapauksessa $id_X$ on homeomorfismi.

Seuraavaksi kompaktisoidaan $X$ eri tavalla. Määritellään aluksi $X_d = (a, b) \cup (c, d]$ tavallisella topologiallaan. Olkoon nyt $(id_{X_d}, X_d^*)$ avaruuden $X_d$ yhden pisteen kompaktisointi pisteellä $c$. Tällöin siis $X_d^*$ on kompakti ja sen topologia sisältää muunmuassa topologian $\tau$ avoimet joukot. Lisäksi huomataan, että $X$ on tiheä avaruudessa $X_d^*$, sillä ainoat joukot avaruudessa $X_d^*$, jotka eivät leikkaa avaruutta $X$, ovat $\{c\}$ ja $\{d\}$ ja näiden yhdiste. Joukko $\{c\}$ ei ole avoin, sillä $X_d$ ei ole kompakti Heine-Borelin lauseen nojalla. Myöskään joukko $\{d\}$ ei selvästikään ole avoin, sillä se ei ole avaruuden $X_d$ avoin joukko, eikä sisällä äärettömyyspistettä $c$. Lopuksi huomataan, ettei näiden yhdistekään voi olla avoin, sillä jos $\{c, d\}$ olisi avoin, niin

$$\{c\} = ((a, b) \cup [c, d)) \cap \{c, d\}$$

olisi avoin kahden avoimen joukon leikkauksena. Siispä jotta pari $(id_X, X_d^*)$ olisi kompaktisointi, tulisi näyttää, että kuvaus

$$id_X : X \to X \subset X_d^*, id_X(x) = x$$

on homeomorfismi. Tässä siis maaliavaruudessa $X$ on topologisen avaruuden $X_d^*$ määräämä relatiivitopologia. Jos näytämme että tämä on sama kuin avaruuden $X$ topologia $\tau$, niin identtinen kuvaus on homeomorfismi. Yhden pisteen kompaktisointia tutkiessa huomasimme, että avaruuden $X_d$ topologia on sama kuin sen relatiivitopologia avaruuden $X_d^*$ aliavaruutena. Lisäksi huomaamme, että avaruuden $X$ topologia on sama kuin sen relatiivitopologia avaruuden $X_d$ aliavaruutena. Tästä seuraa, että $\tau$ on sama kuin avaruuden $X_d^*$ sen aliavaruuteen $X$ määräämä relatiivitopologia[3]. Siispä $(id_X, X_d^*)$ on avaruuden $X$ kompaktisointi.

Nyt siis olemme rakentaneet avaruudelle $X$ kaksi eri kompaktisointia $C_1 := (id_X, X^{**})$ ja $C_2 := (id_X, X_d^*)$. Näytetään ensin, ettei voi päteä $C_1 \geq C_2$. Olkoon $h : X^{**} \to X_d^*$ surjektiivinen siten, että $id_X = h \circ id_X$. Tämä selvästikin pätee jos, ja vain jos $h(x) = (x)$ kaikille $x \in X$. Siispä $f(\infty_1, \infty_2) = \{c, d\}$, sillä $f$ on surjektio. Tutkitaan avoimen joukon $U := (y, d] \subset X_d^*$ alkukuvaa, missä $c < y < d$. Tälle pätee

[2]Tässä on huomattava, että Heine-Borelin lauseen nojalla $X$ eikä kumpikaan sen muodostavista väleistä ole kompakti.

[3]Tässä käytetään tietoa siitä, että jos $A \subset B \subset X$, missä $X$ on topologinen avaruus, niin $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau_B\}$. Tämän näkee helposti relatiivitopologian määritelmästä.

$h^{-1}[U] = h^{-1}[(y,d)] \cup h^{-1}[\{d\}] = (y,d) \cup u$, missä $u = \infty_1$ tai $u = \infty_2$. Tapaus $u = \infty_1$ ei selvästikään kelpaa, sillä $\infty_1$ on väärän välin "äärettömyyspiste". Siispä $u = \infty_2$ ja pätee

$$((c,d) \cup \{\infty_2\}) \setminus h^{-1}[U] = (c,y].$$

Heine-Borelin lauseen nojalla $(c,y]$ ei ole kompakti, joten $h^{-1}[U]$ ei ole avoin avaruudessa $X^{**}$ yhden pisteen kompaktisoinnin määritelmän nojalla. Siispä $h$ ei ole jatkuva, eikä täten voi olla $C_1 \geq C_2$.

Osoitetaan seuraavaksi, ettei voi päteä $C_2 \geq C_1$. Olkoon $g\colon X_d^* \to X^{**}$ surjektiivinen siten, että $id_X = g \circ id_X$. Tällöin jälleen pätee $g(x) = x$ kaikille $x \in X$ ja $g(\{c,d\}) = \infty_1, \infty_2$. Tutkitaan nyt avoimen joukon $U = (a,b) \cup \{\infty_1\}$ alkukuvaa. Nyt siis kuten kuvauksen $h$ tapauksessa, pätee $g^{-1}[U] = (a,b) \cup \{u\}$, missä $u = c$ tai $u = d$. Joukko $(a,b) \cup \{d\}$ ei ole avoin, sillä ei selvästikään löydy avointa joukkoa, joka sisältää pisteen $d$ ja sisätyy joukkoon $(a,b) \cup \{d\}$. Siispä $u = c$. Nyt huomataan, että

$$X_d^* \setminus g^{-1}[U] = X_d^* \setminus ((a,b) \cup \{c\}) = (c,d].$$

Heine-Borelin lauseen nojalla $(c,d]$ ei ole kompakti, joten $g^{-1}[U]$ ei ole avoin avaruudessa $X_d^*$ yhden pisteen kompaktisoinnin määritelmän nojalla. Siispä $g$ ei ole jatkuva, eikä täten voi olla $C_2 \geq C_1$

Edellä ei missään oletettu, että Hausdorff-kompaktisointeja yleensä edes olisi olemassa. On olemassa avaruuksia joilla ei ole lainkaan Hausdorff-kompaktisointeja, kuten jatkossa tulemme huomaamaan. Tarkastellaan siis seuraavaksi minkälaisilla avaruuksilla yleensäkään voi olla Hausdorff-kompaktisointeja. Paljastuu, että tällaisia avaruuksia ovat niinsanotut Tihonov-avaruudet. Määritellään näitä varten muutama topologinen käsite.

Määritelmä 3.14. Olkoon $X$ topologinen avaruus. Sanotaan, että $X$ on **T1-avaruus**, jos yksiö $\{x\}$ on suljettu kaikille $x \in X$.

On helppo huomata, että Hausdorff-avaruus on $T_1$.

Lause 3.15. *Olkoon $X$ Hausdorff-avaruus. Tällöin $X$ on $T_1$.*

Todistus. Olkoon $x \in X$. Tulisi osoittaa, että $\{x\}$ on suljettu. Hausdorff-ehdon nojalla kaikille $y \in X \setminus \{x\}$ on olemassa $U_y$ siten, että $y \in U_y$ ja $x \notin U_y$. Nyt huomataan, että

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

on avoimen joukon komplementtina suljettu. Siispä $X$ on $T_1$. □

Määritelmä 3.16. Sanotaan, että topologinen avaruus $X$ on **täysin säännöllinen**, jos jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset X$ ja jokaiselle pisteelle $x \in X \setminus F$ on olemassa jatkuva kuvaus $f\colon X \to Q$ avaruudelta $X$ suljetulle yksikkövälille $Q$ siten, että $f(x) = 0$ ja $f(F) = \{1\}$.

Määritelmä 3.17. Topologinen avaruus $X$ on **Tihonov**, jos se on T1 ja täysin säännöllinen.

Tarkoituksena olisi nyt todistaa lause, jonka mukaan kompakti Hausdorff-avaruus on Tihonov, ja että Tihonov-avaruuden aliavaruus on Tihonov. Tällöinhän jos avaruudella $X$ on Hausdorff-kompaktisointi, niin se on kompaktin Hausdorff-avaruuden aliavaruutena Tihonov. Tämän todistusta varten tarvitaan kuitenkin vielä normaalin avaruuden käsite ja Urysohnin lemma, jota emme kuitenkaan todista.

MÄÄRITELMÄ 3.18. Topologinen avaruus $X$ on **normaali**, jos kaikille pistevieraille suljetuille joukoille $F_1$ ja $F_2$ on olemassa pistevieraat avoimet joukot $U_1$ ja $U_2$ siten, että $F_1 \subset U_1$ ja $F_2 \subset U_2$.

Todetaan seuraavaksi Urysohnin lemma. Todistuksen Urysohnin lemmalle löytää Väisälän teoksesta Topologia II [**2**, 19.2].

LEMMA 3.19 (Urysohnin lemma). *Topologinen avaruus $X$ on normaali jos, ja vain jos kaikille pistevieraille suljetuille joukoille $F_1$ ja $F_2$ on olemassa jatkuva kuvaus $f\colon X \to [0,1]$ siten, että $f(F_1) = \{0\}$ ja $f(F_2) = \{1\}$.*

Urysohnin lemmasta nähdään helposti, että normaali $T_1$-avaruus on Tihonov, sillä $T_1$ avaruudessa yksiö on suljettu joten täysin säännöllisen avaruuden vaaditut kuvaukset suljetulle joukolle ja sen ulkopuoliselle pisteelle löytyvät Urysohnin lemman nojalla.

LAUSE 3.20. *Kompakti Hausdorff-avaruus $X$ on Tihonov. Lisäksi Tihonov-avaruuden aliavaruus on Tihonov.*

TODISTUS. Lauseen 3.15 nojalla $X$ on $T_1$. Siispä jos osoitamme että $X$ on normaali, niin $X$ on Tihonov lemman 3.19 jälkeisen huomautuksen nojalla. Osoitetaan ensin, että jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset X$ ja pisteelle $x \in X \setminus F$ löydetään avoimet pistevieraat $U$ ja $U_F$ siten, että $x \in U$ ja $F \subset U_F$[4]. Olkoon siis $F \subset X$ suljettu ja $x \in X \setminus F$. Koska $X$ on Hausdorff, löydämme jokaiselle $y \in F$ avoimet joukot $U_{x,y}$ ja $U_y$ siten, että $x \in U_{x,y}$ ja $y \in U_y$. Nyt $\{U_y \mid y \in F\}$ on joukon $F \subset X$ peite kompaktin avaruuden $X$ avoimilla joukoilla, joten määritelmän 1.8 jälkeisen huomautuksen nojalla on olemassa äärellinen $F' \subset F$ siten, että $\{U_y \mid y \in F'\}$ edelleen peittää joukon $F$. Valitaan nyt

$$U = \bigcap_{y \in F'} U_{x,y}$$

ja

$$U_F = \bigcup_{y \in F'} U_y.$$

Nyt $U$ ja $U_F$ ovat topologian määritelmän nojalla avoimia ja lisäksi $x \in U$ ja $F \subset U_F$. Lisäksi jos olisi olemassa $z \in U \cap U_F$, niin pätisi $z \in U_{y'}$ jollekin $y' \in F'$. Lisäksi pätisi $z \in U_{x,y'}$, jolloin $z \in U_{x,y'} \cap U_{y'}$, mikä on ristiriita. Siispä on oltava $U \cap U_F = \emptyset$.

Osoitetaan nyt avaruus $X$ normaaliksi. Olkoot siis $S$ ja $F$ pistevieraat suljetut joukot avaruudessa $X$. Tulisi siis näyttää, että on olemassa pistevieraat avoimet joukot $U_S$ ja $U_F$ siten, että $S \subset U_S$ ja $F \subset U_F$. Tämän todistus menee hyvin analogisesti yllä olevan aputuloksen kanssa. Sen nojallahan siis jokaiselle $x \in S$ on olemassa avoimet joukot $U_x$ ja $U_{F,x}$ siten, että $x \in U_x$ ja $F \subset U_{F,x}$. Nyt $\{U_x \mid x \in S\}$ on joukon $S$ avoin

[4]Tällaista avaruutta $X$ sanotaan myös säännölliseksi.

peite, joten on olemassa äärellinen $S' \subset S$ siten, että $\{U_x \mid x \in S'\}$ edelleen peittää joukon $S$. Valitaan nyt

$$U_F = \bigcap_{x \in S'} U_{F,x}$$

ja

$$U_S = \bigcup_{x \in S'} U_x.$$

Nyt $U_F$ ja $U_S$ ovat avoimia, $S \subset U_S$, $F \subset U_F$ ja $U_S \cap U_F = \emptyset$ aivan samanlaisella päättelyllä kuin edellä joukoille $U$ ja $U_F$. Siispä $X$ on normaali ja Tihonov.

Osoitetaan vielä lopuksi että Tihonov-avaruuden $X$ aliavaruus $A \subset X$ on Tihonov. Olkoon $x \in A$. Tällöin $x \in X$ eli $\{x\}$ on suljettu avaruudessa $X$. Siispä $\{x\} = \{x\} \cap A$ on suljettu avaruudessa $A$, eli $A$ on $T_1$. Olkoon nyt $F \subset A$ suljettu avaruudessa $A$ ja $x \in A \setminus F$. Jotta $A$ olisi täysin säännöllinen, tulisi löytää jatkuva kuvaus $f \colon A \to [0,1]$ siten, että $f(x) = 0$ ja $f(F) = \{1\}$. Määritelmän 1.8 jälkeisen huomautuksen nojalla on olemassa avaruudessa $X$ suljettu $S \subset X$ siten, että $F = S \cap A$. Edelleenkin selvästi pätee $x \notin S$. Nyt koska $X$ on täysin säännöllinen, on olemassa jatkuva kuvaus $g \colon X \to [0,1]$ siten, että $g(x) = 0$ ja $g(S) = \{1\}$. Valitaan nyt

$$f \coloneqq g_{|A} \colon A \to [0,1],$$

Jolloin huomataan, että $f(x) = 0$ ja $f(F) = g(S \cap A) = \{1\}$. Enää tulisi näyttää että $f$ on jatkuva. Olkoon siis $U \subset [0,1]$ avoin. Tällöin $f^{-1}[U] = g^{-1}[U] \cap A$. Kuvauksen $g$ jatkuvuuden nojalla $g^{-1}[U]$ on avoin avaruudessa $X$, joten $g^{-1}[U] \cap A$ on avoin avaruudessa $A$, eli $f$ on jatkuva. Siispä $A$ on Tihonov. $\square$

Tämä lause siis sanoo, että jos avaruudella $X$ on Hausdorff-kompaktisointi, niin se on homeomorfinen kompaktin Hausdorff-avaruuden aliavaruuden kanssa, eli Tihonov-avaruuden kanssa. Tällöinhän siis $X$ on myös Tihonov-avaruus. Huomion arvoista on kuitenkin se, että on olemassa Hausdorff-avaruuksia joilla ei ole Hausdorff-kompaktisointia. Annetaan tästä esimerkki. Ideana on löytää topologinen Hausdorff-avaruus joka ei ole Tihonov. Lauseen 3.15 nojalla Hausdorff-avaruus on T1, joten vastaesimerkin avaruuden ei tulisi olla täysin säännöllinen.

Esimerkki 3.21. Määritellään reaaliakselille $\mathbb{R}$ niinsanottu $K$-topologia. Olkoon $K \coloneqq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $\tau$ se topologia, jonka eräänä kantana on

$$\{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

On helppo nähdä, että tätä muotoa olevien joukkojen leikkaus on joko tyhjä tai samaa muotoa, joten nämä joukot tosiaankin ovat kanta jollekin topologialle lauseen 1.15 nojalla. Nyt $(\mathbb{R}, \tau)$ on selvästikin Hausdorff, sillä kaksi eri pistettä voidaan oikein valitsemalla erotella pistevieraille muotoa $(a,b)$ olevilla väleillä kuten reaaliakselin tapauksessa. Tulisi siis näyttää, että $(\mathbb{R}, \tau)$ ei ole täysin säännöllinen. Aluksi huomataan, että

$$\mathbb{R} \setminus K = \bigcup_{n=2}^{\infty} ((-n,n) \setminus K)$$

on kannan avoimien joukkojen yhdisteenä avoin, joten $K$ on suljettu. Oletetaan, että on olemassa jatkuva kuvaus $f \colon (\mathbb{R}, \tau) \to [0,1]$ siten, että $f(K) = 1$ ja $f(0) = 0$. Olkoon lisäksi $A_0 \coloneqq [0, \frac{1}{3})$ ja $A_1 \coloneqq (\frac{2}{3}, 1]$. Tällöin $A_0$ ja $A_1$ ovat avoimia pistevieraita joukkoja avaruudessa $Q$, joten $f^{-1}[A_0]$ ja $f^{-1}[A_1]$ ovat avoimia pistevieraita joukkoja avaruudessa $(\mathbb{R}, \tau)$, sillä

$$f^{-1}[A_0] \cap f^{-1}[A_1] = f^{-1}[A_0 \cap A_1] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

Nyt lisäksi $0 \in f^{-1}[A_0]$ ja $K \subset f^{-1}[A_1]$ kuvauksen $f$ valinnan nojalla. Tällöin selvästikin $f^{-1}[A_1]$ sisältää jonkin muotoa $(0, a)$, $a < 0$, olevan välin. Lisäksi huomataan, että $f^{-1}[A_0]$ sisältää jonkin muotoa $(-b, b)$ tai muotoa $(-b, b) \setminus K$, $b > 0$ olevan välin. Nyt huomaamme, että $(-b, b) \cap (0, a) \neq \emptyset$ ja $((-b, b) \setminus K) \cap (0, a) \neq \emptyset$ kaikille $a, b > 0$, eli $f^{-1}[A_0] \cap f^{-1}[A_1] \neq \emptyset$, mikä on ristiriita. Jälkimmäisen näistä leikkauksista huomaa epätyhjäksi vaikkapa irrationaalilukujen tiheydestä. Siispä tällaista $f$ ei voi olla olemassa, eli $(\mathbb{R}, \tau)$ ei ole täysin säännöllinen eikä myöskään siis Tihonov. Tällöin lauseen 3.20 nojalla Hausdorff-avaruudella $(\mathbb{R}, \tau)$ ei ole Hausdorff-kompaktisointia. Huomaamme samasta lauseesta myös että $(\mathbb{R}, \tau)$ ei voi olla kompakti.

Myöhemmin tulemme määrittelemään jokaiselle Tihonov-avaruudelle Stone-Čech-kompaktisoinnin, joka on Hausdorff-kompaktisointi. Tällöin siis huomataan että avaruus $X$ on Tihonov jos, ja vain jos sillä on Hausdorff-kompaktisointi. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että jokainen Tihonov-avaruuden kompaktisointi olisi Hausdorff. Tästä esitetään esimerkki kunhan olemme tutkineet sitä, milloin yhden pisteen kompaktisointi on Hausdorff-kompaktisointi. Tätä varten tarvitaan lokaalisti kompaktin avaruuden määritelmä.

Määritelmä 3.22. Topologinen avaruus $X$ on **lokaalisti kompakti**, jos jokaisella $x \in X$ on olemassa avoin $U \subset X$ ja suljettu $F$ siten, että $x \in U \subset F$ ja $F$ on kompakti.

Lause 3.23. *Olkoon $X$ ei-kompakti topologinen avaruus ja $(id_X, X^*)$ tämän yhden pisteen kompaktisointi. Tällöin kompaktisointi $(id_X, X^*)$ on Hausdorff jos, ja vain jos $X$ on Hausdorff ja lokaalisti kompakti.*

Todistus. Oletetaan ensin että $X$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff. Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa että $X^*$ on Hausdorff-avaruus. Lisäksi tämän osoittamiseksi riittää näyttää että mielivaltaisella $x \in X$ ja pisteellä $\infty$ on olemassa avoimet $U, V \subset X$ siten, että $x \in U$, $\infty \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Avaruuden $X$ eri pisteille tällaiset joukot löytyy, sillä $X$ on Hausdorff. Olkoon siis $x \in X$. Tällöin on olemassa avoin $U \subset X$ ja kompakti $F \subset X$ siten, että $x \in U \subset F$. Valitaan nyt $V = X^* \setminus F$, jolloin $V$ on avoin, $\infty \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Siispä $X^*$ on Hausdorff.

Lauseen toinen suunta seuraa siitä että kompaktin Hausdorff-avaruuden avoin[5] aliavaruus $X$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff. Emme kuitenkaan todista tätä. Todistuksen löytää Väisälän teoksesta Topologia II [**2**, 17.3]. □

Tästä lauseesta saamme mielenkiintoisen seurauksen. Nimittäin lokaalisti kompaktilla Hausdorff-avaruudella on Hausdorff-kompaktisointi, yhden pisteen kompaktisointi. Tällainen avaruus on siis Tihonov lauseen 3.20 nojalla. Tämän tuloksen saamikseksi ei tarvitse olettaa ettei avaruus ole kompakti. Kompaktin avaruuden yhden pisteen ”kompaktisointi” ei ole kompaktisointi, sillä avaruuden kuva ei ole tiheä. Kuitenkin se on kompaktin Hausdorff-avaruuden aliavaruutena Tihonov.

[5] $X$ on avoin avaruudessa $X$ joten se on avoin myös avaruudessa $X^*$ määritelmän nojalla.

Annetaan nyt aiemmin mainittu esimerkki Tihonov-avaruuden kompaktisoinnista, joka ei ole Hausdorff. Ideana on löytää avaruus, jolla on olemassa yhden pisteen kompaktisointi, mutta jolle tämä ei ole Hausdorff-kompaktisointi. Siispä tulisi löytää täysin säännöllinen T1-avaruus (eli Tihonov-avaruus), joka ei ole Hausdorff, tai ei ole lokaalisti kompakti. Lisäksi haluamme ettei tämä löydetty avaruus ole kompakti, jotta sen yhden pisteen kompaktisointi oikeasti täyttää kompaktisoinnin vaatimukset. Tällöinhän yhden pisteen kompaktisointi on olemassa mutta ei ole Hausdorff-kompaktisointi lauseen 3.23 nojalla. Kuitenkin esimerkin 3.21 jälkeisen huomautuksen nojalla jokainen Tihonov-avaruus on Hausdorff-avaruuden aliavaruus, eli Hausdorff. Siispä ainoa mahdollisuus on löytää Tihonov-avaruus, joka ei ole kompakti eikä lokaalisti kompakti.

Esimerkki 3.24 (Sorgenfreyn suora). Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja määritellään joukkoon $X$ se topologia, jonka eräs kanta on $\beta := \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Selvästikin $\beta$ on jonkin topologian kanta lauseen 1.15 nojalla. Näin syntyvää topologista avaruutta kutsutaan Sorgenfreyn suoraksi. On helppo huomata, että jokainen kannan joukko $[a,b)$ on myös suljettu, sillä

$$R \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Joukon $[b,\infty)$ avoimuuden voi näyttää esimerkiksi sillä, että

$$[b,\infty) = \bigcup_{c>b} [b,c)$$

on kannan avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Vastaavalla tavalla joukon $(-\infty, a)$ näkee avoimeksi.

Osoitetaan aluksi että $X$ on Tihonov, eli $T1$ ja täysin säännöllinen. Olkoon siis $x \in X$. Tällöin on helppo huomata että

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x, x + \frac{1}{n}).$$

Siispä $\{x\}$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu, eli $X$ on $T1$.

Olkoon seuraavaksi $A \subset X$ suljettu ja $a \notin A$. Jotta $X$ olisi täysin säännöllinen, on löydettävä jatkuva kuvaus $f\colon X \to [0,1]$ siten, että $f(a) = 0$ ja $f(A) = \{1\}$. Nyt löydämme avoimen joukon $U$ siten, että $a \in U$ ja $U \cap A = \emptyset$, sillä jos jokainen pisteen $a$ sisältävä avoin joukko leikkaisi joukkoa $A$, niin määritelmän 3.1 jälkeisen huomautuksen nojalla olisi $a \in \bar{A}$. Lisäksi saman huomautuksen nojalla pätisi $a \in \bar{A} = A$, sillä $A$ on suljettu. Tämähän on ristiriita. Siispä tällainen $U$ löytyy, ja se sisältää jonkin kannan alkion $[a_0, b_0)$. Määritellään nyt $f\colon X \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus [a_0, b_0) \\ 0 & \text{jos } x \in [a_0, b_0) \end{cases}$$

Tällöin selvästikin $f(a) = 0$ ja $f(A) = \{1\}$. Tulee siis osoittaa, että $f$ on jatkuva. Olkoon $V \subset [0,1]$ avoin. Nyt jos

(1) $1, 0 \notin V$, niin $f^{-1}[V] = \emptyset$, joka on avoin
(2) $1 \in V$, $0 \notin V$, niin $f^{-1}[V] = \mathbb{R} \setminus [a_0, b_0)$, joka on avoin
(3) $0 \in V$, $1 \notin V$, niin $f^{-1}[V] = [a_0, b_0)$, joka on avoin
(4) $1, 0 \in V$, niin $f^{-1}[V] = \mathbb{R}$, joka on avoin.

Siispä $f$ on jatkuva ja $X$ on Tihonov.

Lopuksi osoitetaan ettei $X$ ole lokaalisti kompakti. Tällöinhän $X$ ei myöskään ole kompakti, sillä kompakti avaruus on lokaalisti kompakti, sillä onhan itse avaruus $X$ tällöin lokaalisti kompaktin avaruuden määritelmässä vaadittavata joukko jokaiselle pisteelle. Olkoon nyt $x \in X$. Tehdään antiteesi, että on olemassa avoin $U \subset X$ ja kompakti $F \subset X$ siten, että $x \in U \subset F$. Tällöin on olemassa jokin kannan alkio $[a, b) \subset U \subset F$, jolloin $[a, b)$ on kompaktin joukon $F$ suljettuna osajoukkona kompakti lauseen 1.9 nojalla. Nyt kokoelma

$$\{[a, b - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{b-a}\}$$

avaruuden $F$ avoimia joukkoja peittää avaruuden $F$, mutta sillä ei kuitenkaan ole äärellistä alipeitettä. Tämän huomaa valitsemalla äärellinen osakokoelma, jolloin on olemassa suurin indeksi $n_0$, ja joukko $[b - \frac{1}{n_0}, b) \neq \emptyset$ jää peittämättä. Siispä tällaisia $U$ ja $F$ ei ole olemassa, eikä siis $X$ ole lokaalisti kompakti. Edelleen siis Tihonov-avaruus $X$ ei ole kompakti, joten sillä on olemassa yhden pisteen kompaktisointi. Kuitenkaan tämä ei ole Hausdorff-kompaktisointi lauseen 3.23 nojalla.

Seuraavassa kappaleessa määrittelemme Tihonov-avaruuksien Stone-Čech-kompaktisoinnin ja osoitamme sen olevan suurempi kuin mikään muu Hausdorff-kompaktisointi. Osoitetaan kuitenkin ennen tätä tulos, jonka mukaan yhden pisteen kompaktisointi on pienempi kuin mikään Hausdorff-kompaktisointi. Jotta tässä väitteessä olisi järkeä, avaruus $X$ ei saa olla kompakti, jotta yhden pisteen kompaktisointi yleensäkään edes olisi kompaktisointi. Tässä vaatimuksessa on muutenkin järkeä, sillä jos $X$ olisi kompakti Hausdorff-avaruus, niin sen pienin kompaktisointi olisi tietenkin pari $(id_X, X)$.

Lause 3.25. *Olkoon $X$ ei-kompakti topologinen avaruus. Olkoon lisäksi $(f, Y)$ avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisointi. Tällöin $(f, Y) \geq (id_X, X^*)$.*

Todistus. Määritellään kuvaus $h: Y \to X^*$ asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \text{jos } x \in f(X) \\ \infty, & \text{jos } x \in Y \setminus f(X), \end{cases}$$

missä $f^{-1}$ on homeomorfismin $f$ käänteiskuvaus. Nyt $h$ on selvästikin surjektio ja pätee $id_X = h \circ f$ joten riittää osoittaa, että $h$ on jatkuva. Olkoon siis $U \subset X^*$ avoin. Jos $\infty \notin U$, niin $U \subset X$ ja $h^{-1}[U] = f(U)$ on avoin, sillä $f$ on homeomorfismina avoin kuvaus. Lisäksi tässä käytettiin tietoa siitä, että bijektion $f$ käänteiskuvauksen $f^{-1}$ alkukuva joukosta $U$ on $f(U)$.

Olkoon siis $\infty \in U$. Tällöin $X^* \setminus U$ on avaruuden $X$ kompakti osajoukko avaruuden $X^*$ topologian määritelmän nojalla, joten

$$h^{-1}[X^* \setminus U] = f(X^* \setminus U)$$

on kompakti kompaktin joukon $X^* \setminus U$ kuvana jatkuvassa kuvauksessa $f$. Siispä $h^{-1}[X^* \setminus U]$ on suljettu lauseen 1.10 nojalla, sillä $Y$ on Hausdorff. Tällöin siis

$$Y \setminus h^{-1}[X^* \setminus U] = h^{-1}[X^*] \setminus h^{-1}[X^* \setminus U] = h^{-1}[X^* \setminus (X^* \setminus U)] = h^{-1}[U]$$

on avoin avaruudessa $Y$. Tässä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa kuvauksen $h$ surjektiivisuudesta, ja toinen alkukuvan kommutoinnista komplementin ottamisen kanssa. Siispä $h$ on jatkuva ja väite pätee. $\square$

Tässä lauseessa on muutamia mielenkiintoisia ja huomion arvoisia seikkoja. Ensinnäkin avaruuden $X$ yhden pisteen kompaktisoinnin ei tarvitse itse olla Hausdorff-kompaktisointi, mutta se kuitenkin on pienempi kuin mikään avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisointi. Siispä $(id_X, X^*)$ on alaraja kaikille avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisoinneille. Muista kompaktisoinneista ei voida tämän perusteella sanoa mitään, sillä todistuksessa käytettiin oletusta että $Y$ on Hausdorff. Kuitenkin jos $X$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff, eli jos sen yhden pisteen kompaktisointi on Hausdorff-kompaktisointi, niin selvästikin $(id_X, X^*)$ on minimaalinen avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisointien joukossa. Lisäksi huomataan, että tällöin yhden pisteen kompaktisointi on ainoa[6] tällainen kompaktisointi topologisen ekvivalenssin tarkkuudella, sillä jos jollain muulla Hausdorff-kompaktisoinnilla $(g, Z)$ on sama ominaisuus, niin pätee $(id_X, X^*) \geq (g, Z) \geq (id_X, X^*)$, eli $(id_X, X^*) = (g, Z)$.

## 3.4. Stone-Čech-kompaktisointi

Määritellään nyt vastaavanlainen suurin Hausdorff-kompaktisointi. Tämä tulee olemaan niinsanottu Stone-Čech-kompaktisointi, joka on määritelty vain Tihonov-avaruuksille ja tulee aina olemaan itsekin Hausdorff-kompaktisointi. Tätä varten tarvitaan evaluaatiokuvauksen, joka tulee olemaan Stone-Čech-kompaktisoinnissa käytettävä upotuskuvaus, määritelmä. Lisäksi muutamia tuloksia tarvitaan ennen kuin Stone-Čech-kompaktisointi voidaan näyttää suurimmaksi Hausdorff-kompaktisoinniksi (tai yleensäkään edes kompaktisoinniksi).

Määritelmä 3.26. Olkoon $X$ topologinen avaruus ja $Q = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ suljettu yksikköväli tavallisella topologialla (eli avaruuden $\mathbb{R}$ euklidisen normin virittämän topologian määräämä relatiivitopologia). Olkoon lisäksi $F(X) = \{f : X \to Q \mid f \text{ jatkuva }\}$ kaikkien jatkuvien kuvauksien $f : X \to Q$ perhe ja $Q^{F(X)} = \{g : F(X) \to Q\}$ kaikkien kuvauksien $g : F(X) \to Q$ perhe. ($Q^{F(X)}$ on siis välin $Q$ tulo "$F(X)$ kertaa"). Määritellään **evaluaatiokuvaus** $e : X \to e(X) \subset Q^{F(X)}$ siten, että $P_f \circ e(x) = e(x)(f) = e(x)_f = f(x)$ kaikille $x \in X$ ja $f \in F(X)$, eli $e(x)$ on se avaruuden $Q^{F(X)}$ piste, jonka $f$:s komponentti on $f(x)$.

Haluaisimme evaluaatiokuvauksen olevan homeomorfismi, jotta sitä voitaisiin soveltaa kompaktisointiin. Tämä onnistuu valitsemalla $X$ Tihonov-avaruudeksi.

Lemma 3.27 (Upotuslemma). *Jos $X$ on Tihonov-avaruus, niin evaluaatiokuvaus $e : X \to e(X)$ on homeomorfismi.*

Todistus. On siis osoitettava, että $e$ on injektio, jatkuva ja avoin. Koska määritelmän mukaan $(P_f \circ e)(x) = f(x)$ kaikille $x \in X$ ja $f \in F(X)$, niin kuvauksen $e$ komponentit ovat jatkuvia. Siispä $e$ on jatkuva lauseen 1.28 nojalla.

Osoitetaan seuvaaksi injektiivisyys. Olkoon $x, y \in X$ eri pisteitä. Yksiö $\{y\}$ on suljettu, sillä $X$ on T1, joten on olemassa $f \in F(X)$ siten, että $f(x) = 0$ ja $f(\{y\}) = \{1\}$, joten $f(y) = 1$. Siispä $e(x)(f) \neq e(y)(f)$, eli $e(x) \neq e(y)$ ja $e$ on injektio.

Avoimuuden näyttämiseksi olkoon $U \subset X$. Tulisi osoittaa, että $e(U)$ on avoin avaruudessa $e(X)$, eli lauseen 1.2 mukaan, että jokaisella $e(x)$, $x \in U$, on olemassa avaruudessa $e(X)$ avoin $B$ siten, että $e(x) \in B \subset e(U)$. Tässä on huomattava että $e$

[6] Alarajan määritelmää tutkimalla itseasiassa huomaa, että jos osittain järjestetyn joukon alaraja kuuluu joukkoon itseensä, niin se on yksikäsitteinen tällainen.

on bijektio joten voidaan tarkastella ehtoa siis kaikille $e(x)$, $x \in U$. Olkoon siis $x \in U$. Koska $X$ on täysin säännöllinen, on olemassa kuvaus $g \in F(X)$ siten, että $g(x) = 0$ ja $g(X \setminus U) = \{1\}$. Oleellisesti siis $g(x) \notin \overline{g(X \setminus U)}$. Olkoon

$$A := \left\{ y \in Q^{F(X)} \mid y(g) \notin \overline{g(X \setminus U)} \right\}.$$

Joukko $A$ koostuu sellaisista pisteistä $\phi$ avaruudessa $Q^{F(X)}$, joille $\phi(g) \in [0,1)$. Eli toisin sanoen $A = P_g^{-1}[[0,1)]$, missä $P_g$ on $g$:s projektio avaruudelta $Q^{F(X)}$ komponentille $Q$. Lisäksi, koska $[0,1) \subset Q$ on avoin, niin $A$ on tulotopologian esikannan joukkona avoin. Tästä syystä

$$B := A \cap e(X) = \left\{ e(a) \in e(X) \mid e(a)(g) \notin \overline{g(X \setminus U)} \right\}$$

on avoin avaruudessa $e(X)$ ja $e(x) \in B$. Jos nyt näytämme, että $B \subset e(U)$, niin avoimuus on todistettu. Olkoon siis $y \in B$. Tällöin on olemassa $a \in X$ siten, että $e(a) = y$. Jos olisi $a \in X \setminus U$, niin pätisi $y(g) = e(a)(g) = g(a) = 1$, mikä on ristiriita. Siispä on oltava $a \in U$, jolloin $y = e(a) \in e(U)$, eli kuvaus $e$ on avoin. □

Nyt olemme valmiita määrittelemään Stone-Čech-kompaktisoinnin.

Määritelmä 3.28 (Stone-Čech-kompaktisointi). Olkoon $X$ Tihonov-avaruus. Avaruuden $X$ Stone-Čech-kompaktisointi on pari $(e, \beta(X))$, missä $e$ on evaluaatiokuvaus $e\colon X \to e(X)$ ja $\beta(X)$ on joukon $e(X)$ sulkeuma avaruudessa $Q^{F(X)}$.

On tärkeä huomata, että usein kirjallisuudessa määritellään Stone-Čech-kompaktisointi yleiselle topologiselle avaruudelle $X$, eikä vain Tihonov-avaruuksille. Tällöin tämä ei kuitenkaan välttämättä ole kompaktisointi. Kuitenkin Tihonov-avaruuksille näin on aina.

Lause 3.29. *Olkoon $X$ Tihonov-avaruus. Tällöin pari $(e, \beta(X))$ on Hausdorff-kompaktisointi.*

Todistus. Tulee siis näyttää, että $e$ on homeomorfismi, $e(X)$ on tiheä avaruudessa $\beta(X)$, ja että $\beta(X)$ on kompakti Hausdorff-avaruus. Lemman 3.27 nojalla $e$ on nyt homeomorfismi. Lisäksi $\beta(X)$ on joukon $e(X)$ sulkeuma, joten $e(X)$ on tiheä avaruudessa $\beta(X)$. Yksikköväli $Q$ on avaruuden $\mathbb{R}$ suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti, jolloin Tihonovin lauseen mukaan $Q^{F(X)}$ on myös kompakti. Edelleen $\beta(X)$ on kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti lauseen 1.9 nojalla. Lopuksi lauseen 1.27 mukaan tuloavaruus $Q^{F(X)}$ on Hausdorff-avaruuksien $Q$ tulona Hausdorff, eli sen aliavaruus $\beta(X)$ on Hausdorff määritelmän 1.4 jälkeisen huomautuksen nojalla. □

Nyt saimme myös todistettua sen, että avaruus $X$ on Tihonov jos, ja vain jos sillä on olemassa Hausdorff-kompaktisointi. Tämä ”jos”-suunta tulee lauseesta 3.20. Tarvitsemme vielä yhden lemman ennen luvun päätuloksen todistamista.

Lemma 3.30. *Jos $f\colon A \to B$ on kuvaus joukolta $A$ joukolle $B$, niin kuvaus $f^*\colon Q^B \to Q^A$, $f^*(b) = b \circ f$ kaikille $b \in Q^B$, on jatkuva.*

Todistus. Kuvaus $f^*$ on kuvaus tuloavaruuteen $Q^A$, joten jatkuvuuden osoittamiseksi riittää näyttää jokaisen komponenttikuvauksen $P_a \circ f^*, a \in A$, jatkuvuus lauseen 1.28 nojalla. Olkoon siis $a \in A$ ja $b \in Q^B$. Tällöin

$$(P_a \circ f^*)(b) \overset{(1)}{=} P_a(b \circ f) \overset{(2)}{=} (b \circ f)(a),$$

missä yhtälö (1) on kuvauksen $f^*$ määritelmä ja yhtälö (2) projektiokuvauksen $P_a$ määritelmä. Nyt $b(f(a)) = P_{f(a)}(b)$ on pisteen $b \in Q^B$ projektio komponenttiin $f(a)$, siispä myös jatkuva. □

Tämän lemman avulla saadaan avaruuksien $Q^{F(X)}$ ja $Q^{F(Y)}$ välille määrättyä jatkuva kuvaus. Tätä huomiota käytetään seuraavassa Stone-Čechin-lauseen todistuksessa.

Lause 3.31 (Stone-Čech). *Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus Tihonov-avaruudelta $X$ kompaktille Hausdorff-avaruudelle $Y$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $g\colon \beta(X) \to Y$ siten, että $g(x) = (f \circ e_X^{-1})(x)$ kaikille $x \in e_X(X)$.*

Todistus. Olkoon

$$f^*\colon F(Y) \to F(X), f^*(a) = a \circ f$$

kaikille $a \in F(Y)$ ja edelleen olkoon

$$f^{**}\colon Q^{F(X)} \to Q^{F(Y)}, f^{**}(b) = b \circ f^*$$

kaikille $b \in Q^{F(X)}$. Kuvaus $f^{**}$ on jatkuva lemman 3.30 nojalla. Avaruus $Y$ on myös kompaktina Hausdorff-avaruutena Tihonov lauseen 3.20 nojalla, joten evaluaatiokuvaus $e_Y\colon Y \to e_Y(Y)$ on homeomorfismi.

Nyt $g \coloneqq e_Y^{-1} \circ f^{**}_{|\beta(X)}$ on vaadittu jatkuva kuvaus $g\colon \beta(X) \to Y$. Tulee siis ensinnäkin näyttää, että $g$ on hyvin määritelty, eli, että $f^{**}(\beta(X)) \subset e_Y(Y)$. Tämä siis tarkoittaa että $f^{**}_{|\beta(X)}$ ei kuvaa mitään pistettä joukon $e_Y(Y)$ ulkopuolelle, sillä kuvaus $e_Y^{-1}$ on määritelty joukossa $e_Y(Y)$.

Tämän osoittamiseksi näytetään ensin, että $f^{**} \circ e_X = e_Y \circ f$, sillä tästä seuraa että $f^{**}(e_X(X)) \subset e_Y(Y)$, mistä väite $f^{**}(\beta(X)) \subset e_Y(Y)$ lopulta seuraa. Tämä siis pätee, jos kaikille $x \in X$ pätee $(f^{**} \circ e_X)(x) = (e_Y \circ f)(x)$. Edelleen, koska $(f^{**} \circ e_X)(x) \in Q^{F(Y)}$ ja $(e_Y \circ f)(x) \in Q^{F(Y)}$ (ovat kuvauksia avaruudelta F(Y) avaruudelle Q), niin $f^{**} \circ e_X = e_Y \circ f$ jos, ja vain jos $(f^{**} \circ e_X)(x)(h) = (e_Y \circ f)(x)(h)$ kaikille $x \in X$ ja $h \in F(Y)$. Näin on, sillä

$$\begin{aligned}
(f^{**} \circ e_X)(x)(h) &\overset{(1)}{=} (e_X(x) \circ f^*)(h) \\
&\overset{(2)}{=} e_X(x)(h \circ f) \\
&\overset{(3)}{=} (h \circ f)(x) \\
&\overset{(4)}{=} e_Y(f(x))(h) \\
&= (e_Y \circ f)(x)(h).
\end{aligned}$$

Tässä yhtäsuuruudet (1) ja (2) ovat kuvauksien $f^{**}$ ja $f^*$ määritelmät vastaavasti, ja yhtäsuuruudet (3) ja (4) ovat kuvauksien $e_X(x)$ ja $e_Y(f(x))$ määritelmät ($e_X(x)$ on se avaruuden $Q^{F(X)}$ piste, jonka $f$:s koordinaatti on $f(x)$) vastaavasti.

Nyt siis nähdään, että $f^{**}(e_X(X)) = e_Y(f(X)) \subset e_Y(Y)$, sillä $f(X) \subset Y$. Jotta $g$ olisi hyvin määritelty, tulee siis nähdä että $f^{**}(\beta(X)) \subset e_Y(Y)$. Joukko $e_Y(Y)$ on kompaktin joukon kuvana jatkuvassa kuvauksessa kompakti lauseen 1.12 nojalla.

Lisäksi kompakti joukko $e_Y(Y)$ on suljettu Hausdorff-avaruudessa $Q^{F(Y)}$ lauseen 1.10, siispä joukko $e_Y(Y)$ on oma sulkeumansa määritelmän 3.1 jälkeisen huomautuksen nojalla. Eli siis $e_Y(Y) = \beta(Y)$. Nyt $f^{**}(\beta(X)) \subset \beta(Y) = e_Y(Y)$, sillä joukon $e(X)$ sulkeuman $\beta(X)$ kuva sisältyy kuvan $e_Y(Y)$ sulkeumaan $\beta(Y)$ jatkuvassa kuvauksessa lauseen 3.2 nojalla. Siispä $g$ on hyvin määritelty kuvaus.

Lisäksi, jotta $g$ olisi kuten väitteessä, tulee näyttää että se on jatkuva. Näin on, sillä $g$ on yhdiste jatkuvista kuvauksista. Lopuksi tulee vielä näyttää, että $g(y) = (f \circ e_X^{-1})(y)$ kaikille $y \in e_X(X)$. Olkoon siis $y \in e_X(X)$ ja $x := e_X^{-1}(y)$. Tällöin yllä olevan laskun nojalla $f^{**}(y) = f^{**}(e_X(x)) = e_Y(f(x))$, eli erityisesti $e_Y^{-1}(f^{**}(y)) = f(x)$ kuvaamalla puolittain kuvauksen $e_Y$ käänteiskuvauksella $e_Y^{-1}$ vasemmalta. Siispä $f(e_X^{-1}(y)) = f(x) = e_Y^{-1}(f^{**}(y)) = g(y)$, ja väite on todistettu. □

Stone-Čechin lause ei suoraan näytä että Stone-Čech-kompaktisointi olisi yläraja kaikille Hausdorff-kompaktisoinneille. Eihän väitteen $f$ ollut edes kompaktisoinnin vaatimukset täyttävä kuvaus. Todistetaan nyt kuitenkin seuraus, jonka mukaan avaruuden $X$ Stone-Čech-kompaktisointi on osittaisen järjestyksen $\geq$ mielessä suurempi kuin mikään muu Hausdorff-kompaktisointi. Samalla todistetaan että muita ylärajoja ei ole, kun samaistetaan Stone-Čech-kompaktisoinnin kanssa topologisesti ekvivalentit kompaktisoinnit kuten aiemminkin.

SEURAUS 3.32. *Jos kuvaus $f$ kuten edellisessä lauseessa on lisäksi homeomorfismi $f\colon X \to f(X)$, missä $f(X) \subset Y$ on tiheä aliavaruus (t.s $(f, Y)$ on avaruuden $X$ Hausdorff-kompaktisointi), niin $(e, \beta(X)) \geq (f, Y)$. Lisäksi jos kompaktisoinnilla $(f, Y)$ on sama jatko-ominaisuus kuin kompaktisoinnilla $(e, \beta(X))$, niin $(e, \beta(X))$ ja $(f, Y)$ ovat topologisesti ekvivalentit.*

TODISTUS. Olkoon $g\colon \beta(X) \to Y$ edellisen lauseen mukainen. Tällöin $g(e(X)) = f(X)$, joten $f(X) \subset g(e(X)) \subset g(\beta(X))$. Siispä $g(\beta(X))$ on tiheä avaruudessa $Y$ ja lisäksi kompaktin joukon $\beta(X)$ jatkuvana kuvana kompakti avaruudessa $Y$. Avaruus $Y$ on Hausdorff, joten kompakti $g(\beta(X))$ on suljettu lauseen 1.10 nojalla ja täten oma sulkeumansa, eli $g(\beta(X)) = Y$. Nyt $g$ on kompaktisointien välisessä relaatiossa $\geq$ vaadittu jatkuva surjektio avaruudelta $\beta(X)$ avaruudelle $Y$. Lisäksi vaadittu kommutointi on jo osoitettu Stone-Čechin lauseen todistuksessa. Siispä $(e, \beta(X)) \geq (f, Y)$. Jos taas kompaktisoinnilla $(f, Y)$ on sama jatko-ominaisuus, niin $(f, Y) \geq (e, \beta(X))$, eli kompaktisoinnit ovat topologisesti ekvivalentit lauseen 3.11 mukaan. □

LUKU 4

# Merkintöjä ja kaavoja

| *Merkintä* | *Selitys* |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$ |
| $\mathbb{R}$ | Reaalilukujen joukko |
| $\mathcal{P}(X)$ | Joukon $X$ kaikkien osajoukkojen joukko $\{A \mid A \subset X\}$ |
| $f(A)$ | Joukon $A$ kuva kuvauksessa $f$, eli $\{f(a) \mid a \in A\}$ |
| $f^{-1}[B]$ | Joukon $B$ alkukuva kuvauksessa $f$, eli $\{b \in X \mid f(b) \in B\}$ |
| $B(x, r)$ | x-keskinen r-säteinen avoin pallo $\{y \in X \mid \lVert x - y \rVert < r\}$ |
| $X^Y$ | Joukon $X$ karteesinen tulo itsensä kanssa $Y$ kertaa $\{f \colon Y \to X\}$ |
| $\mathcal{C}$ | Cantorin joukko $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ |
| $Q$ | Suljettu yksikköväli tavallisella topologialla $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ |
| $F(X)$ | Jatkuvat kuvaukset avaruudelta $X$ joukkoon $Q$, eli $\{f \colon X \to Q \mid f \text{ jatkuva }\}$ |
| $e$ | Evaluaatiokuvaus $e\colon \to e(X) \subset Q^{F(X)}$ |
| $\beta(X)$ | Evaluaatiokuvauksen kuvan sulkeuma $\overline{e(X)}$ |

De Morganin kaavat:
Olkoon $X$ joukko ja $A_i \subset X$ kaikille $i \in I$. Tällöin

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

ja

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)\,.$$

# Kirjallisuutta

[1] John L. Kelley: *Graduate Texts in Mathematics 27: General Topology.* 2. laitos, Springer-Verlag, 1955.

[2] Jussi Väisälä: *Topologia II.* 1. laitos, Limes ry, 1999.

[3] Terence Tao - WordPress: *https://terrytao.wordpress.com/2009/02/09/245b-notes-10-compactness-in-topological-spaces.*

[4] $\pi$-base: *https://topology.jdabbs.com/spaces.*