

Matti Viljamaa

Katsaus muodon optimoinnin menetelmiin

Tietotekniikan kandidaatintutkielma

28. huhtikuuta 2017

Jyväskylän yliopisto

Tietotekniikan laitos

Tekijä: Matti Viljamaa

Yhteystiedot: `matti.v.viljamaa@gmail.com`

Työn nimi: Katsaus muodon optimoinnin menetelmiin

Title in English: A survey of shape optimization methods

Työ: Kandidaatintutkielma

Sivumäärä: 37+0

Tiivistelmä: Tutkielma esittelee muodon optimoinnin menetelmiä sekä niiden historiaa luoden katsauksen menetelmien kehittymiseen sekä niiden keskinäisiin suhteisiin. Tällaisia ovat esimerkiksi menetelmän matemaattisen teorian “kehittyneisyys” ja ratkaisemisen tehokkuus tai soveltuvuus. Tarkoituksena on muodostaa yleiskuva siitä, mitä menetelmiä muodon optimointiin on jo kehitetty, selvittää, miten ajankohtaisia eri menetelmät ovat, miten menetelmät vertautuvat toisiinsa ja selvittää, mihin eri menetelmät soveltuvat. Lukijan odotetaan selvittävän tarvittavat taustatiedot, sillä tutkielma ei juurikaan esittele muodon optimoinnin matematiikkaa.

Avainsanat: muodon optimointi, topologian optimointi, optimaalinen suunnittelu

Abstract: This thesis presents shape optimization methods, their history and creates an overview of the development of the methods and relationships between them. Such relationships include, for example, the sophistication of the mathematical theory and the efficiency and suitability of the solutions. The objective is to form an overview on what methods have already been developed to shape optimization, find out, how current different methods are, how the methods compare to each other and find out, what different methods are suited for. The reader is expected to find out the required mathematical background information, since the thesis hardly presents the mathematics of shape optimization.

Keywords: shape optimization, topology optimization, design optimization

Kuviot

Kuvio 1. Esimerkissä 2.3.1 käytetty laatikko (Tura & Dong 2014, 10).....	3
Kuvio 2. <i>CAD- ja CAD-Free -parametrisointi</i> . Vasemmassa kuvassa nähdään CAD-Free -parametrisoinnin nopeampi konvergoituvuus. Oikeassa kuvassa taas huomataan, että samalla määrällä iteraatiota CAD-parametrisointi ei vielä kykene huomioimaan muodon hienoja muutoksia, missä taas CAD-Free -parametrisointi mallintaa jo muodon vivahteita tarkemmin. (Mohammadi & Pironneau 2009, 119.).....	9
Kuvio 3. Tasa-arvojoukkomenetelmän visuaalinen havainnollistus (Pérez 2012, 3).	15
Kuvio 4. Hecht'n käyttämän vaihekenttämätömuotoilun visuaalinen havainnollistus (Hecht 2014, 3).....	18

Sisältö

1	JOHDANTO	1
2	MUODON OPTIMOINTITEHTÄVÄ	2
2.1	Yleinen muoto	2
2.2	Muodon optimointi	2
2.3	Koon optimointi	3
2.3.1	Esimerkki	3
2.4	Topologian optimointi	4
3	MUODON OPTIMOINNIN MENETELMÄT JA HISTORIALLINEN KE- HITYS.....	5
3.1	Muodon optimointimenetelmiä.....	5
3.1.1	Rajansiirtomenetelmä	5
3.2	Topologian optimointimenetelmiä.....	10
3.2.1	Materiaalijakauma -menetelmä	10
3.2.2	Level set -menetelmä	14
3.2.3	Vaihekenttämenetelmä.....	16
3.3	Koon optimoinnista erikoistapauksena	19
4	MENETELMIEN VERTAILU	20
4.0.1	Sovelluskelpoisuus	20
4.0.2	Matemaattinen ja numeerinen kompleksisuus	21
5	MENETELMIEN AJANKOHTAISUUS JA MUODON OPTIMOINNIN NYKYTRENDIT.....	23
5.1	Menetelmien ajankohtaisuudesta	23
5.2	Tulevaisuuden näkymiä	23
5.2.1	Isogeometrinen analyysi.....	23
5.2.2	Moderneja ongelmia ja ratkaisuja	27
6	YHTEENVETO	29
	KIRJALLISUUTTA	30

1 Johdanto

Muodon optimointi on matematiikan ja tietotekniikan (numeerinen analyysi) ala, joka yleisesti tutkii ongelmaa, jossa pyritään löytämään kappaleelle muoto, joka on *optimaalinen* siten, että se minimoi jonkin kustannus- tai tavoitefunktion samalla, kun se tyydyttää annetut rajoitteet. Kappaleen optimaalisen muodon löytäminen on ollut pitkään tai aina tavoitteellista insinööritieteissä, mutta matemaattinen tai tietotekninen muodon optimointi tarjoaa muodollisemman ja nopeammin toistettavan vaihtoehdon insinöörien yrityksen ja erehdyksen kautta tapahtuvalle kehitystoiminnalle. Muodon optimointi nousee myös ajankohtaiseksi tutkimusalaksi, kun esimerkiksi luonnonvarojen ehtyminen pakottaa muotoilemaan esim. mekaaniset kappaleet optimaalisesti jo esisuunnitteluvaiheessa. Muodon optimointi mahdollistaa mm. materiaalien säästämisen, optimaalisten elastisten ominaisuuksien, jäykkyyden tai rasituskestävyyden suunnittelun kappaleille. Sitä voidaan myös soveltaa optimaalisten virtauksien (sähkö, neste jne.) suunnitteluun kappaleissa. Lisäksi muodon optimointi on sen topologisten yhteyksien takia ylipäänsä keskeistä tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD, CAE jne.) ja reaali maailman ilmiöiden simuloinnissa.

Tämä tutkielma esittelee muodon optimoinnin menetelmiä ja historiaa. Tarkoituksena on muodostaa muodon optimoinnista metodologinen yleiskuva, mitä menetelmiä on olemassa, miten ne eroavat toisistaan ja mihin ne soveltuvat. Ensimmäisessä kappaleessa 2 esitetään lyhyesti muodon optimoinnin peruskonsepteja, jotta myöhemmille menetelmien käsittelylle on järkevä aihio. Toisessa kappaleessa 3 laajennetaan toisen kappaleen sisältöä esittelemällä yleiskuva eri menetelmien historiallisesta kehityksestä ja esitellään kukin menetelmä lyhyesti. Kolmannessa kappaleessa 4 suoritetaan eri menetelmien vertailua käyttäen kriteereinä matemaattisen teorian "kehittyneisyyttä", ratkaisujen käyttökelpoisuutta ja muita kriteerejä. Neljännessä ja viimeisessä kappaleessa 5 kategorisoidaan vielä menetelmiä pohtimalla eri menetelmien ajankohtaisuutta ja spekuloidaan hieman muodon optimoinnin menetelmien nykytrendejä.

2 Muodon optimointitehtävä

Tässä kappaleessa esitellään lyhyesti muodonoptimointitehtävien yleisiä malleja ja niiden ratkaisemisen matemaattista teoriaa. Esitys on yleisluontoinen ja kirjallisuudessa voi esiintyä hieman erilaista notaatiota. Lukija voi lukea mainituista lähteistä tarpeen mukaan lisääkin teoriaa.

2.1 Yleinen muoto

Yleinen muodon optimointitehtävä on minimointitehtävä, jossa minimoidaan kustannus- tai tavoitefunktiota $J(x)$, jolle on annettu joitain *rajoitteita* (yhtälöitä, epäyhtälöitä ja laatikkorajoitteita $l \leq x \leq u$). Tehtävä voidaan muotoilla seuraavasti:

$$\min_{\Omega \in K} J(\Omega)$$

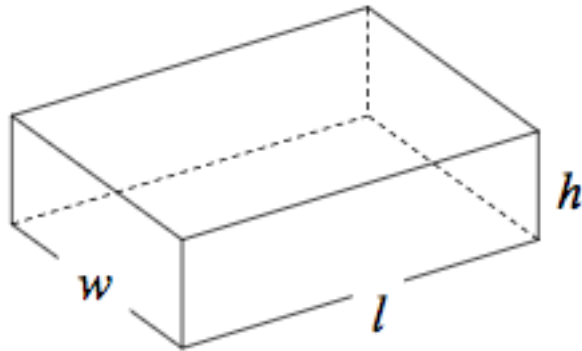
missä $K \subseteq V$ on joukko *sopivia muotoja* (engl. admissible shapes), jotka tyydyttävät rajoitteet, V on (äärellinen/diskreetti tai ääretön/jatkuva) Banachin avaruus ja funktionaali $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ on kustannusfunktio (Igbida, 1). Mikäli on $\Omega^* \in K$ siten, että

$$\min_{\Omega \in K} J(\Omega) = J(\Omega^*)$$

niin Ω^* :n sanotaan olevan optimaalinen muoto, optimaalinen lähtöjoukko tai optimaalinen joukko (Igbida, 2). Syy Banachin avaruuden käyttämiseen (joskin myös Banachia "korkeampia" avaruuksia voi käyttää) on selvä: vektorinormeja tarvitaan mittaamiseen ja täydellisyys (engl. completeness) tarkoittaa, että Cauchy-jono vektoreita (myös funktioita) suppenee aina hyvin määriteltyyn raja-arvoon tai -funktioon (Moslehian, Rowland & Weisstein).

2.2 Muodon optimointi

Muodon optimointi on muodon optimoinnin erikoistapaus. Muita erikoistapauksia ovat koon ja topologian optimointi. Muodon optimoinnissa on tarkoitus löytää jon-



Kuvio 1. Esimerkissä 2.3.1 käytetty laatikko (Tura & Dong 2014, 10).

kin lähtöjoukon optimaalinen muoto, joka minimoi kustannusfunktion. Tällöin siis *suunnittelumuuttuja* (engl. design variable) on lähtöjoukko Ω .

2.3 Koon optimointi

Koon optimointi on toinen muodon optimoinnin erikoistapaus. Koon optimoinnissa kappaleen muoto, ts. lähtöjoukko, ja *tilamuuttujat* (engl. state variables), esimerkiksi pellin taipuma, jos objektifunktiona on pellin paksuus, tiedetään jo ennen optimointia ja ne pysyvät muuttumattomina optimointiprosessin läpi (Bendsøe & Sigmund 2004, 1). Optimointia suoritetaan vain kokoon vaikuttavien parametrien suhteen.

2.3.1 Esimerkki

Esimerkiksi, olkoon laatikko, jolle on annettu tilavuus V ja korkeus H . Halutaan valita pituus l ja leveys w . Kun siis on annettu $lwh = V$ ja $h = H$ ja niin mahdolliset ratkaisut l, w toteuttavat $lw = \frac{V}{H}$. (Tura & Dong 2014, 10.)

Mikäli tavoitteeksi otetaan materiaalitulavuuden tai painon minimointi, niin saataisiin seuraavanlainen optimointitehtävä, missä T on "hyväksyttävä pieni arvo" eli eräs sopiva muoto seinän paksuudelle:

Minimize $J_m(w, l, h) = T(wl_{\text{bottom}}) + 2lh_{\text{sides}} + 2wh$ (tavoitefunktio)

$$\text{subject to } \begin{cases} lwh = V \\ h = H \\ l \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases} \quad (\text{rajoitteet})$$

suunnittelumuuttujat: w, l ja h .

(Tura & Dong 2014, 11).

2.4 Topologian optimointi

Topologian optimointi on kolmas muodon optimoinnin erikoistapaus. Topologian optimoinnissa kappaleen ulkomuoto tunnetaan, mutta halutaan selvittää optimaalinen muodon sisäpisteiden konnektiivisuus ja reikien lukumäärä ja sijainti (Deaton & Grandhi 2013, 1). Topologian optimointimenetelmissä yleensä muokataan jonkin "lukitun" alueen sisäpisteiden joukkoa esimerkiksi lisäämällä tai poistamalla materiaali"soluja" tai reikiä (Allaire, Jouve, Gournay & Toader 2005, 67). Jotkin topologian optimointimenetelmät sopivat myös muodon optimointiin, koska myös ne tuottavat optimoinnin tuloksena muodon, ja menetelmät saattavat joskus olla jopa tehokkaampia kuin muodon optimointiin tarkoitettut menetelmät.

3 Muodon optimoinnin menetelmät ja historiallinen kehitys

Muodon optimointiin on historiassa kehitetty jo monia menetelmiä, joilla on erilaisia ominaisuuksia. Tässä kappaleessa esitellään valikoimiani menetelmiä ja niiden historiaa. Esittelyssä kerron, mihin tarkoituksiin menetelmä on kehitetty, millaisessa suhteessa ko. menetelmä on toisiin menetelmiin ja miksi menetelmä on niin merkittävä, että valitsin sen esiteltäväksi. Neljännessä kappaleessa esitellään vielä rakenteellisempi näkemys esiteltyjen menetelmien ominaisuuksista ja suhteista toisiinsa.

Kannattaa huomata, että ei ole vain yhtä kategoriaa muodon optimointimenetelmiä. Vaan, kuten edellisessä luvussa esitettiin, niin muodon, koon ja topologian optimointi ovat erillisiä muodon optimoinnin alueita. Siten niille on myös omat menetelmänsä. Toisaalta, jotkin menetelmistä ovat yhdistettyjä (engl. combined), mikä tarkoittaa, että ne soveltuvat useampaan kuin yhteen muodon optimoinnin tehtävyyppiin.

3.1 Muodon optimointimenetelmiä

3.1.1 Rajansiirtomenetelmä

Rajansiirto- (engl. boundary variation) tai muodon herkkyys (engl. shape sensitivity) -menetelmä on ehkä intuitiivisimpia muodon optimoinnin menetelmiä, koska siinä nimensämukaisesti liikutellaan suoraan muotojen rajoja. Intuitiivisuutensa ja yleisyytensä takia sitä voidaan pitää eräänlaisena muodon optimoinnin referenssinä, johon verrata muita menetelmiä. Menetelmä pohjautuu variaatiolaskentaan (engl. calculus of variations), jossa siis tarkastellaan *funktionaalien ääriarvoja* (Juuti-
nen 2005, 2). Variaatiolaskenta on matematiikan alana vanha ja sen juuret ulottuvat ainakin 1600-1700 -luvuille ja sitä ovat kehittäneet monet matematiikan suuret nimet (katso esimerkiksi Goldstine 1980). Seuraavasta Kollmanin (2008) antamasta

muotoilusta rajansiirtomenetelmälle on helppo nähdä yhteys variaatiolaskentaan.

Rajansiirtomenetelmässä optimoinnin kohteeksi otetaan lähtöjoukon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ "geometriset muunnokset". Toisin sanoen, olkoon

$$T_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, t \in [0, \varepsilon),$$

perhe muunnoksia (eli funktioita), jotka kuvaavat Ω :n muutoksia:

$$X \in \Omega \rightarrow x = T_t(X) \equiv x(t, X).$$

"Muuntunut" geometria on tällöin:

$$\Omega_t = T_t(\Omega).$$

(Kollman 2008, 2.)

Yllä X voidaan mieltää Lagrangen koordinaatiksi ja x Eulerin koordinaatiksi (Kollman 2008, 2).

Muuttujan t rooli selviää, kun esitellään *Eulerin derivaatta* vektorikentän V suuntaan:

$$dJ(\Omega; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t},$$

joka on suuntaisderivaatta funktionaalille J ja samankaltainen muotoilu kuin usean muuttujan (vektori)funktioillekin. Edellä mainitussa Eulerin derivaatan muotoilussa kannattaa huomata, että $\lim_{t \rightarrow 0} \Omega_t = \Omega_0$ on siis lähtömuoto tai muodon alkuarvaus, joka tiedetään. Edellä $\Omega_t = T_t(V)(\Omega)$, ts. Ω_t on kuvaus $\Omega \rightarrow (V \rightarrow T_t(V))$. (Kollman 2008, 3.)

Edelleen, olkoon C^1 -lähtöjoukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C^1 -vektorikenttä V ja C^1 -funktio k . Tällöin

(muoto)funktionaali

$$J(k(\Omega_t)) = \int_{\Omega_t} k(\Omega_t) d\Omega_t$$

on differentioituva ja sen Eulerin derivaatta pisteessä $t = 0$ suuntaan V on:

$$\begin{aligned} dJ(\Omega; V) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} k(\Omega_t) d\Omega_t \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} k'(\Omega; V) d\Omega + \int_{\partial\Omega} k(\Omega) (V \cdot n) d\partial\Omega, \end{aligned}$$

Eulerin derivaatta yleistyy toki myös C^k -vektorikentille ja -funktioille. (Kollman 2008, 6, Sturm 2016, 4.)

Lisäksi, jos J täyttää miedot säännöllisyysominaisuudet, niin *Hadamardin rakenne-
lause* (engl. Hadamard structure theorem) antaa dJ :lle muotoilun:

$$dJ(\Omega; V) = \langle \nabla J, V \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \nabla J(s) V(s) ds,$$

(Schmidt & Schulz 2009, 6).

Edellä funktiota $k'(\Omega; V) = \dot{k}(\Omega; V) - \nabla k(\Omega) \cdot V(0)$ nimitetään *muotoderivaataksi* (engl. shape derivative). $\dot{k}(\Omega; V) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(\Omega_t) \circ T_t - y(\Omega)}{t}$ taas on *materiaaliderivaatta* (engl. material derivative). (Kollman 2008, 6, 8.)

Yllä on huomioitavaa, että muotofunktionaali siis "palautetaan" derivoimalla ongelmakeksi, jossa on muotoderivaatta. Tämä siksi, että muotoderivaattoja voidaan käyttää monissa, muualtakin tutuissa numeerisissa algoritmeissa, esimerkiksi myöhemmin esiteltävässä gradienttimenetelmässä, sekä koska derivaatat määritelmänsä mukaan soveltuvat *herkkyyden* eli *sensitiivisyyden* mittaamiseen. Eulerin derivaatalle on joitain muitakin muotoiluja, mutta niitä ei esitellä tässä. Lisäksi voidaan huomata, että yllä olevat muotoilut eivät sisällä mitään yllättäviä rakenteita, joten niitä voidaan ratkoa yleisillä numeerisilla differentiointiin ja/tai optimointiin tarkoitetuilla menetelmillä. Lisää teoriaa löytää lähteestä (Hiptmair & Jingzhi 2012), mutta sitä ei esitellä tässä, vaan tutkitaan, mitä rajansiirtomenetelmällä voidaan tehdä.

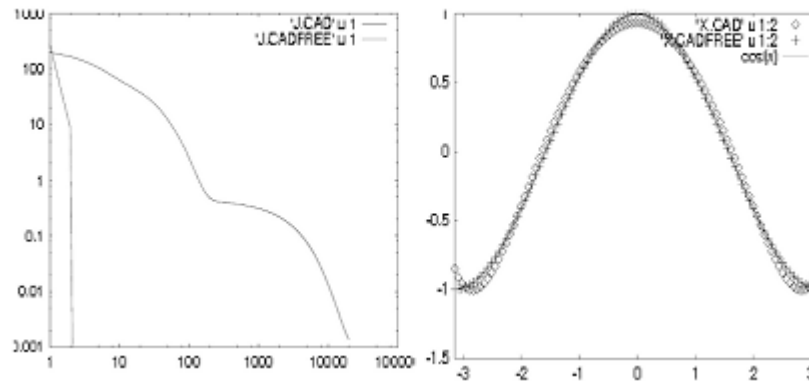
Muotoderivaatat esiintyvät yleensä differentiaaliyhtälöiden reuna-arvot tehtävien ratkaisussa, joskin myös alkuarvot tehtäviä voidaan ratkaista muotoderivaatoilla. Eri-tyisesti muotoderivaattoja esiintyy ainakin kahdelle luokalle funktionaaleja: lähtöjoukkointegraalit ja reunaintegraalit. (Hiptmair & Jingzhi 2012, 84) Kytkös osit-taisiin ja tavallisiin differentiaaliyhtälöihin mahdollistaa tälle menetelmälle laajan sovellusalueen. Edelleen, koska menetelmä kytkeytyy differentiaaliyhtälöihin, niin se kytkeytyy myös muun muassa niiden elementti- tai diskretisointimenetelmiin (BEM, FEM jne.). Eri-tyisesti rajansiirtomenetelmälle on olemassa myös elementtipe-rustaisia muotoiluja, joissa rajansiirtoa suoritetaan liikuttelemalla elementtimene-telmällä luotua verkkoa (engl. mesh) (Dogan, Morin, Nochetto & Verani).

Aiemmin esitelty gradientin ∇J sisältävä muotoilu Eulerin derivaatalle on tärkeä, koska siihen voidaan soveltaa iteratiivista ratkaisumenetelmää nimeltään *gradient-timenetelmä*, joka näyttää seuraavanlaiselta:

$$\Omega^{n+1} = \Omega^n - \alpha \nabla J(\Omega^n),$$

jollain muodon alkuarvauksella Ω_0 , ja missä reaalityyppinen $\alpha > 0$ on ”riittävän pieni” niin kutsuttu *pseudoaika-askel* ja $-\nabla J(\Omega^n)$ on (funktion J) jyrkin laskusuunta. (Al-laire & Pantz 2006, 2–3) Koska halutaan minimoida funktiota J , niin gradientti-menetelmässä pyritään konvergoitumaan kyseiseen minimiin. Eri-tyisesti siis jono (Ω^k) on tällöin Cauchy-jono. Gradientin laskemiseen voidaan tietysti soveltaa mo-nia numeerisen differentoinnin menetelmiä, erityisesti niistä tehokkaimpia tai kä-siteltävään ongelmaan parhaiten soveltuvia. Toki, jos rajansiirto on toteutettavissa ilman numeerisen differensoinnin menetelmiä, esimerkiksi lineaarisella ohjelmoin-nilla, niin muitakin kuin gradienttimenetelmää voidaan soveltaa. Gradienttimene-telmä on kuitenkin ”Eulerimainen” iteratiivinen algoritmi ja siten varsin yleiskäyt-töinen.

Rajansiirtomenetelmässä voidaan edelleen erottaa erilaisia reunan parametrisoin-timenetelmiä, joita tarvitaan menetelmän käytännön toteutuksessa, jotta rajansiir-toja voidaan suorittaa. Esimerkkijako parametrisoinneille on: CAD-parametrisointi



Kuvio 2. CAD- ja CAD-Free -parametrisointi. Vasemmassa kuvassa nähdään CAD-Free -parametrisoinnin nopeampi konvergoituvuus. Oikeassa kuvassa taas huomataan, että samalla määrällä iteraatiota CAD-parametrisointi ei vielä kykene huomioimaan muodon hienoja muutoksia, missä taas CAD-Free -parametrisointi mallintaa jo muodon vivahteita tarkemmin. (Mohammadi & Pironneau 2009, 119.)

ja CAD-free -parametrisointi (Andreoli, Janka, Desideri & Nguyen 2004, 2). Joskus CAD-free -parametrisointia nimitetään myös vapaamuotoiseksi epämuotoilemiseksi (engl Free-form deformation). Näistä CAD-parametrisoinnissa käytetään käyriä, esimerkiksi splinejä tai Bezier-käyriä, reunan muotoilemiseen (Andreoli, Janka, Desideri & Nguyen 2004, 2, 4). CAD-free -parametrisoinnissa reuna taas parametrisoidaan liikuteltavien *nodejen* avulla eli pisteittäisesti, jopa yksittäisen pisteen tarkkuudella (Andreoli, Janka, Desideri & Nguyen 2004, 3). Näistä CAD-free parametrusointi on intuitiivisesti tarkempi, mutta samalla laskennallisesti vaativampi. Käytännön toteutuksissa voikin täytyä tehdä kompromisseja näiden kahden muuttujan suhteen. Lisäksi menetelmissä on eroja konvergoitumisnopeudessa. CAD-free parametrusointi konvergoi usein varmemmin ja nopeammin (Mohammadi & Pironneau 2009, 119.) Tässä mainittuja eroja on havainnollistettu visuaalisesti kuviossa 2.

3.2 Topologian optimointimenetelmiä

3.2.1 Materiaalijakauma -menetelmä

Materiaalijakauma -menetelmä (engl. material distribution method tai material density method) on topologian optimointimenetelmä, joka pohjautuu aiempaan *kuvitteellinen lähtöjoukko* (engl. fictitious domain) -menetelmään (Kasolis 2014, 23). Ciarlettin (1998, 621) mukaan kuvitteellisen lähtöjoukon menetelmän esitteli Hyman vuonna 1952. Erityisesti menetelmää kehitettiin ratkaisemaan niin kutsuttuja *Dirichlet* -reuna-arvo-ongelmia. Tutkimusta menetelmän parissa ovat suorittaneet eri henkilöt aina 50-luvulta asti nykypäivään. (Ciarlet 1998, 621–622.) Bendsøen (1989, 194/2) mukaan Kohn ja Strang esittivät vuonna 1986 *”pisteittäistä materiaalia/ei materiaalia -muotoilua”* muodon optimointiin. Siten tätä voidaan pitää ensimmäisenä mainintana materiaalijakaumamenetelmästä. Edelleen Bendsøe ja Kikuchi tutkivat menetelmän käytännön mahdollisuuksia vuonna 1988 artikkelissaan *”Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”* (Bendsøe & Kikuchi 1988). Materiaalijakaumamenetelmää on tämän jälkeen kehitetty edelleen.

Materiaalijakaumamenetelmä on tärkeä sen takia, että se on esimerkki vaihtoehtoisesta lähestymistavasta topologian optimointiin. Toisin kuin rajansiirtomenetelmän raja- tai reunalähestymistapa, niin materiaalijakaumamenetelmässä tarkasteluun otetaan materiaalin määrä eli materiaalijakauma optimoitavan muodon eri osissa. Erityisesti tämä saavutetaan elementtimenetelmillä, jolloin elementtien jakauma on optimoinnin tavoitefunktiona. Bendsøe esittää myös, että rajansiirtomenetelmä sisältää ongelmia. Eräs rajansiirtomenetelmän ongelma on, että menetelmän toteutus elementtimenetelmällä vaatii muodon uudelleenverkottamista (engl. remeshing). Toinen ongelma on, että rajansiirtomenetelmä on sovelluksissaan rajoittunut, koska se vaatii aina jonkin muodon alkuarvauksen. Bendsøen mukaan materiaalijakaumamenetelmän lähestymistapa on hyvä laajennos aiempiin menetelmiin. (Bendsøe 1989, 194/2.)

Bendsøen esitys materiaalijakaumamenetelmälle on seuraavanlainen:

$$E_{ijkl}(x) = X(x)\bar{E}_{ijkl}$$

missä \bar{E}_{ijkl} on vakioarvoinen jäykkyystensori kappaleen materiaalille ja $X(x)$ on indikaattorifunktio osalle $\Omega^m \subset \Omega$, joka on materiaalin täyttämä. Lisäksi määritellään tilavuusrajoite. Optimointitehtävä on siten valita optimaalinen E_{ijkl} eli sellainen materiaalijakauma, jolla kappaleella on optimaaliset jäykkyyks- ja elastisuusominaisuudet, samalla kun materiaalijakauma tyydyttää tilavuusrajoitteen. Edellä annettu muotoilu on diskreetti versio materiaalijakaumamenetelmästä. Bendsøe antaa myös jatkuvan muotoilun, jossa $X(x)$ korvataan funktiolla $\mu(x)^p$, $0 \leq \mu(x) \leq 1$ ja $p \gg 1$. (Bendsøe 1989, 194/2.)

Gomes ja Senne (2012) puolestaan esittelevät joitain numeerisia ratkaisumenetelmiä materiaalijakaumamenetelmälle. He erottelevat ensin kaksi ongelmatyyppiä. Ensimmäinen on *pienet paikan siirtymät* ja toinen on *suuret paikan siirtymät* (Gomes & Senne 2012, 4). Pienissä paikan siirtymissä oletetaan, että rasiusten ja siirtymien suhde on lineaarinen. Suurissa paikan siirtymissä taas oletetaan, että rasiusten ja siirtymien suhde on epälineaarinen. Epälineaariset eli suurten siirtymien ratkaisumenetelmät ovat kuitenkin vaikeutensa takia vähemmän tunnettuja kuin lineaariset. (Gomes & Senne 2012, 4.)

He esittävät ylläoleville muotoiluille samankaltaisen optimointiongelman pienille siirtymille:

$$\begin{aligned} \min_p \quad & f^T u(p) \\ \text{s.t.} \quad & K(p)u(p) = f \\ & \sum_{i=1}^{n_{elem}} v_i p_i \leq V^* \\ & 0 < p_{\min} \leq p \leq 1, \end{aligned}$$

jossa siis minimoidaan tiheyttä eli materiaalin määrää mittaavaa funktiota p ja objektifunktiota $K^T(p)$, koska $f^T u(p) = K^T(p)$ (Gomes & Senne 2012, 5). Suurten siirty-

mien tapauksessa $K(p) = K(u(p), p)$. K on *globaali jäykkyyismatriisi* (engl. global stiffness matrix) ja u kuvaa siirtymiä (engl. displacement). Optimointiongelmassa pitää siis osaongelmana ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä $K(p)u(p) = f$. Gomes ja Senne (2012, 6) esittävät, että yleensä tämä ratkaistaan Choleskyn menetelmällä. Jatkuva versio $K(u(p), p)u(p) = f$ taas on epälineaarinen ja ratkaistaan esimerkiksi Newtonin menetelmällä (Gomes & Senne 2012, 7). Siirtymien tutkiminen tässä voi vaikuttaa oudolta, koska aiemmassa muotoilussa niitä ei näkynyt, mutta K ja u liittyvät jäykkyystensoriin E_{ijkl} . Gomes ja Senne antavat esityksessään vielä enemmänkin teoriaa. Erityisesti, koska kyseessä on kuitenkin lineaarinen ohjelma, niin Gomes ja Senne esittävät, että tämänkaltaisia monimutkaisia ongelmia voidaan ratkaista käyttäen toistetun lineaarisen ohjelmoinnin menetelmiä: toistettu neliöllinen ohjelmointi (SQP), toistettu neliöllinen ohjelmointi diagonaalilla Hessen matriisilla tai toistettu paloittainen lineaarinen ohjelmointi (SPLP). (Gomes & Senne 2012, 10.)

SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) -menetelmä on tehostus materiaalijakaumamenetelmään. Tehostus ratkaisee ongelman, että tiheysfunktion p arvoilla $]0, 1[$ ei ole rakenneoptimoinnissa fysikaalista tulkintaa (Bendsøe 1989, 195/3). Tai ongelman, että menetelmässä komputoidaan tarpeettoman paljon p :n väliarvoja (engl. intermediate values). SIMP:ia ei esitellä tässä, koska se on jokseenkin mekani- ninen tehostus, eikä niinkään mullistavasti muotoihin vaikuttava laajennos, mutta siitä voi halutessaan lukea esimerkiksi lähteestä (Cazacu & Grama 2014).

Edelleen materiaalijakaumamenetelmään liittyy myös homogenisointimenetelmä (engl. homogenization method), joka on syytä esitellä hyödyllisyytensä takia. Homogenisointimenetelmä on erityisesti materiaalien elastisuuden ongelmiin (esimerkiksi Bendsøe & Kikuchi 1988) kehitetty optimointitekniikka tai optimoinnin osana käytettävä tekniikka. Sitä voidaan toki soveltaa myös elastisuuden suhteen samankaltaisiin ongelmiin, kuten sähkön johtumiseen tai yleisesti myös virtausmekaniikkaan. Vaikka menetelmä esitetäänkin tässä "komputaationaalisenä", niin homogenisointiteoria esiintyy myös puhtaasti matemaattisena differentiaaliyhtälöille ja myös fysiikan teoriana (katso esimerkiksi Khruslov & Marchenko 2005).

Homogenisointimenetelmän intuitiivinen lähtökohta on, että reaalimaailman fysiik-

ka, esim. materiaalin elastisuus, noudattaa monimutkaisia mikrorakenteisia voimia, mutta mikrorakenteen tasolla suoritettava optimointi olisi laskennallisesti erittäin raskasta, teoreettisesti vaativaa ja lisäksi monissa sovelluksissa ei tarvita mikrorakenteen mallintamisesta saatavaa tarkkuutta, vaan suurpiirteisempi "makrotason" ilmiöiden ymmärtäminen riittää. Mikrotason teoria voidaan kuitenkin ottaa lähtökohdaksi, mutta homogenisointimenetelmän idea on vain yksinkertaistaa tai suurpiirteistää sitä, jotta saavutetaan helpompi muotoilu ongelmalle sekä tehokkuutta laskentaan.

Matemaattisesti homogenisointimenetelmässä lähtökohtana on, että mallinnettava fysiikka on jokin differentiaaliyhtälö, jossa on nopeasti oskilloivia osia. Nopeasti oskilloivat osat tuottavat intuitiivisesti suuren määrän ratkaisuja pienilläkin parametrien väleillä, joten siksi homogenisoimattomien yhtälöiden ratkaiseminen olisi työlästä. Tässä tulee muistaa myös, että materiaali jakaumamenetelmässä nimenomaan on funktio $p \in [0, 1]$, jonka väliarvot on jo aiemmin todettu vaikeuksia tuottavaksi. Homogenisointi tapahtuu matemaattisesti hieman erilailla riippuen tarkasteltavista yhtälöistä, mutta perusidea on sama.

Yksinkertainen esimerkki homogenisoinnista on seuraavanlainen yhtälö:

$$\nabla \cdot \left(A \left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f$$

missä ε on "erittäin pieni", \vec{x} on ilmiön "hidas" periodinen muuttuja (tai makroskooppinen muuttuja), $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\varepsilon}$ on "nopea" periodinen muuttuja (tai mikroskooppinen muuttuja) ja $A(\vec{y})$ on periodinen kerroin (Allaire 2010, 2). Huomaa muotoilun samankaltaisuus aiempaan muotoiluun $Ku = f$. Koska ε on nimittäjässä ja erittäin pieni, niin ylläoleva yhtälö "räjähtää" pienillä epsilonin arvoilla ja saa periodisesti suuresti vaihtelevia arvoja. Erityisesti homogenisointimenetelmä siis koskettaa aiemmassa muotoilussa matriisia K , koska ε olisi sen sisällä.

Mikäli tarkasteltavassa ilmiössä riittää kuitenkin tarkastella makroskooppisempia ilmiöitä, siis jos ratkaisu $u_\varepsilon \rightarrow u$, kun $\varepsilon \rightarrow 0$, niin edellämainittu yhtälö voidaan kor-

vata homogenisoidulla yhtälöllä:

$$\nabla \cdot (A^* \nabla u) = f$$

missä A^* on nyt vakioarvoinen, eikä oskilloiva, tensorikerroin (Allaire 2010, 12). Homogenisointimenetelmää voidaan siis käyttää materiaalijakaumamenetelmän osana, ennen varsinaista materiaalijakaumamenetelmää, yksinkertaistamaan ja tehostamaan ongelmaa.

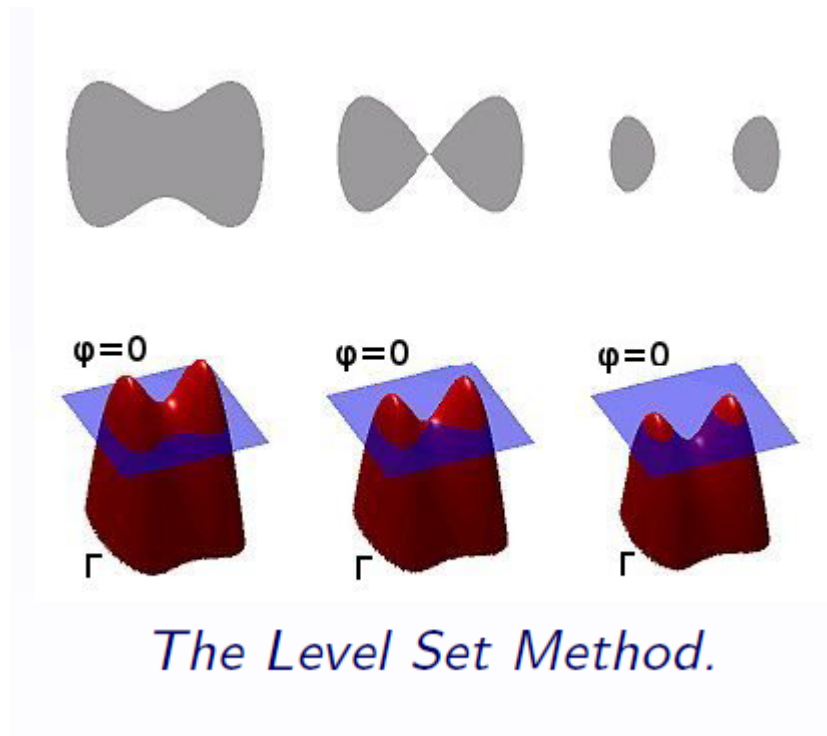
3.2.2 Level set -menetelmä

Tasa-arvojoukkomenetelmät (engl. level set methods) ovat joukko menetelmiä topologian optimointiin. Tasa-arvojoukkomenetelmä (engl. level set method) on tähän astisista menetelmistä selvästi vaativin. Se pohjautuu nimensämukaisesti tasa-arvojoukkoihin eli joukkoihin $f^{-1}(c) = \{x \in D : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n, f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Tasa-arvojoukkomenetelmän kehittivät matemaatikot Stanley Osher ja James Sethian 1980-luvulla tutkimusartikkelissaan "Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations" (Osher & Sethian 1988). Fedkiw ja Osher (2000) antavat artikkelissaan "Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results" esityksen tasa-arvojoukkomenetelmän käytännöstä. He esittävät (Fedkiw & Osher 2000, 3), että muodot Ω esitetään Lipschitz-jatkuvan funktion $\phi : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ välityksellä:

$$\Omega = \{x \in D : \phi(x, t) < 0\}, \partial\Omega = \{x \in D : \phi(x, t) = 0\}, (\Omega \cup \partial\Omega)^c = \{x \in D : \phi(x, t) > 0\}$$

Tasa-arvojoukoissahan siis muodostetaan tasa-arvokäyrä, jonka voi mieltää horisontaaliseksi viipaleeksi funktion graafista korkeudella c . Siten muodon optimointiin sovellettaessa on tehty oikeastaan vain huomio, että jokainen horisontaalinen viipale korkeudella c muodostaa muodon, jonka reunat ovat funktion graafin korkeudella c olevien reunojen mukaiset.



Kuvio 3. Tasa-arvojoukkomenetelmän visuaalinen havainnollistus (Pérez 2012, 3).

Muodon Ω muunnokset taas tapahtuvat ”normaalien suuntiin” eli reunan $\partial\Omega$ pisteet liikkuvat joko sisäänpäisen tai ulospäisen normaalin suuntaan nopeudella v (Pérez 2012, 5). v voi riippua paikasta, ajasta, pinnan geometriasta ja ulkoisista fyysikaalisista vaikutuksista (Fedkiw & Osher 2000, 3). Tasa-arvomenetelmässä onkin oleellista pyrkiä muotoilemaan sellainen ϕ , joka tuottaa muodonoptimoijan haluaamia muotoja. v :lle on myös esitys $v = \text{div} \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right)$ (Burger & Osher 2005, 10). Lisäksi ϕ toteuttaa *tasa-arvojoukkoyhtälö* (engl. level set equation) -nimisen *Hamilton-Jacobi* -yhtälön:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = v|\nabla\phi|,$$

jonka voi ratkaista numeerisesti esim. äärellisten differenssien menetelmällä (Pérez 2012, 5) ja joka siis johtaa myös muotojen Ω ratkaisuihin. Hamilton-Jacobin yhtälö on osittaisdifferentiaaliyhtälö, joiden numeerinen ratkaisu on kandidaattitasoa monimutkaisempi ongelma. Eräs esitys tasa-arvojoukkomenetelmän numeerisesta rat-

kaisemisesta löytyy kuitenkin esimerkiksi Herve Lombaert'n kotisivulta (Lombaert 2006). Lisää tasa-arvojoukkomenetelmien ja erityisesti Hamilton-Jacobin yhtälöiden numeerisista ratkaisumenetelmistä löytää halutessaan esimerkiksi lähteestä (Burger & Osher 2005).

Tasa-arvojoukkomenetelmällä on varsin laaja sovelluskelpoisuus. Tasa-arvojoukkomenetelmä löytää sovelluksia kuvankäsittelystä, konenäöstä, erilaisten materiaalien, esimerkiksi kristallien kasvun mallintamisessa (Fedkiw & Osher 2000, 31), jään sulamisessa (Fedkiw & Osher 2000, 28), virtauksen mallintamisessa (esimerkiksi Smereka, Sussman & Osher 1994) ja inversio-ongelmissa (Burger & Osher 2005).

Tasa-arvojoukkomenetelmän etuna voidaan pitää mahdollisuutta mallintaa todella monimutkaisia muotoja ja muodonmuutoksia. Tämä näkyy myös sovellusten laajuudessa. Huonona puolena taas voidaan pitää funktion ϕ ja nopeuksien v muotoilun vaikeutta ja usein korkeaa laskennan vaatimusta. Tosin Pérezin (2012, 3) mukaan tasa-arvojoukkomenetelmillä olisi laaja potentiaali laskennan rinnakkaistamiseen.

3.2.3 Vaihekenttämenetelmä

Vaihekenttämenetelmä (engl. phase field method) on hieman esoteerisempi lisäys kolmeen aiempaan ja hyvin laajalti sovellettuun muodon optimointimenetelmään. Vaihekenttämenetelmä sopii määritelmänsä takia erityisesti virtausten muodon optimointiin. Virtauksia ovat esimerkiksi sähkövirta ja erilaiset nesteet. Menetelmässä ei tosin tarvitse rajautua vain siihen, että pitäisi optimoida vain virtauksia, vaan virtaukset voidaan abstrahoida moneksi muuksikin materiaaliksi. Oleellista on, että vaihekenttämenetelmässä ajatellaan muodon optimointia ikään kuin elastisen materian, kuten nesteen, *järjestymisenä* johonkin optimaaliseen muotoon, kun se interaktoi sitä ympäröivän materian tai siihen kohdistettujen voimien kanssa.

Hecht (2014, 3–4) antaa erään esityksen vaihekenttämenetelmästä sovellettuna virtausmekaniikan muodon optimointitehtävään. Tehtävänmuotoilussa määritellään ensin säiliö (engl. container) $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$, reunadata (engl. boundary data) $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ja runkovoima $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Näiden käyttäytyminen on nähtävissä seu-

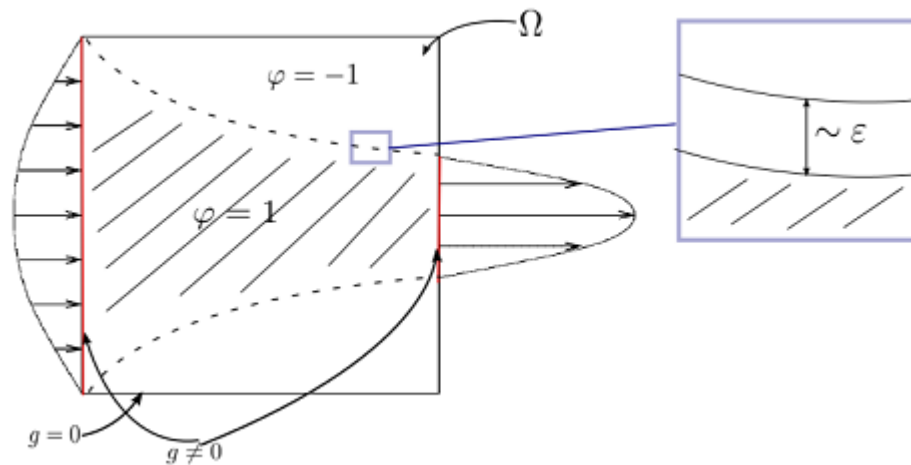
raavan sivun kuvasta. Säiliö on täytetty nesteellä E , jolla on nopeus $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Kun tämä kuvataan E :ssä Navier-Stokes'n yhtälöillä, niin $u = 0$, kun $u \in \Omega \setminus E$. Seuraavaksi idea on minimoida jokin funktionaali f varioimalla E :tä, esimerkiksi:

$$\min_{E \subset \Omega, u} \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx + c_0 |D\chi_E|(\Omega)$$

siten, että (u, E) tyydyttävät Navier-Stokes'n yhtälöt. Termille $|D\chi_E| \sim \mathcal{H}^{d-1}(\partial E \cap \Omega)$. Toisin sanoen, tämä termi approksimoi $d - 1$ ulottuvuuksista Hausdorff -ulkomittaa, joka sijaitsee ongelman niin kutsutussa *rajapinnassa* (engl. interface) eli optimoitavan alueen reunan ja koko alueen Ω leikkauksessa. Yllä oleva integraali voidaan siis tiivistää: optimoitava alue on $E \subset \Omega$, jonka yli halutaan minimoida jotain alueella tapahtuvaa fysiikkaa kuvaava f . f riippuu nesteen E nopeudesta ja sen derivaatista eli kiihtyvyydestä. Lisäksi, koska halutaan muokata E :n muotoa, niin lisätään integraaliin myös termi $c_0 |D\chi_E|(\Omega)$, joka määrittää E :n reunaa. Esimerkki f :stä on esimerkiksi tehon häviäminen (engl. dissipated power) $f(x, u, Du) = \frac{\mu}{2} |Du|^2 - f(x) \cdot u$. (Hecht 2014, 3–4.)

Lisäksi Hecht määrittelee *vaihekenttämäärittäjän* $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nesteessä $E = \{\phi = 1\}$ ja ϕ saa arvoja allaolevan kuvan mukaisella tavalla. Tällöin myös aiemman minimointi-integraalin $|D\chi_E|$ termi korvataan termillä $|D\chi_{E\phi}|$ eli nyt se riippuu myös vaihekenttämäärittäjästä. (Hecht 2014, 7–8.) Hecht antaa vielä lisääkin muotoiluja ja perusteluja, mutta mielestäni tässä esiteltyt riittävät tarpeisiimme ja loppuja lukija voi halutessaan katsella itse Hecht'n luentokalvoista.

Vaihemenetelmän voi todeta olevan matemaattisesti varsin vaativa muodon optimointimenetelmä, mikä voidaan laskea menetelmän huonoksi puoleksi. Lisäksi tämän muotoilun monimutkaisuuden luulisi heijastuvan myös numeerisen ratkaisemisen vaativuudeksi. Itseasiassa, tästä kohta lisää. Toisaalta, menetelmän sovellusmahdollisuudet näyttävät laajoilta, mikä on eräs menetelmän hyvä puoli. Tällä menetelmällä luulisi pystyvän mallintamaan varsin arbitraarisia muotoja ja lisäksi tämä menetelmä on Navier-Stokes'n yhtälöiden seurauksena tiukasti sidoksissa fysiikkaan ilmiöihin, joten se sopinee erityisesti virtauksia tai esimerkiksi sähkökent-



Kuvio 4. Hecht'n käyttämän vaihekenttämennetelmämuotoilun visuaalinen havainnollistus (Hecht 2014, 3).

tiä sisältäviin muodon optimointitehtäviin.

Menetelmän numeerisesta vaativuudesta saa osviittaa esimerkiksi Takadan, Misawan ja Tomiyaman paperista "A Phase-Field Method for Interface-Tracking Simulation of Two-Phase Flows" (Takada, Misawa & Tomiyama 2005), jossa he siis käyttivät vaihekenttämennetelmää mallintamaan niin kutsuttuja kaksivaiheisia virtauksia. Kappaleessa "Basis of Phase-Field Method (NS-PFM)" (Takada, Misawa & Tomiyama 2005, 2) he selittävät, että he sovelsivat ratkaisussa tavanomaisia numeerisia menetelmiä, joskin niiden määrä on suurehko. He käyttivät ensin diskretisointimenetelmiä, sitten kolmannen kertaluvun ylävirtakaavaa (engl. upwinding scheme), sitten neljännen kertaluvun keskeisdifferenssikaavaa. Lisäksi he käyttivät gradientien laskemiseen neljännen kertaluvun keskeisdifferenssikaavaa ja viskositeettitermiin toisen asteen keskeisdifferenssikaavaa. Aika-askellus (engl. time marching) toteutettiin perustuen toisen kertaluvun Runge-Kutta -menetelmään. Lisäksi he mainitsivat lämpötilalliseen kaksivaiheiseen virtaukseen sovelletun MacCormack -kaavaa. (Takada, Misawa & Tomiyama 2005, 2–3.) Tästä nähdään, että tarvittavien eri numeeristen menetelmien määrä voi olla varsin suuri, mikä tietysti lisää menetelmän ja simulointien kompleksisuutta.

3.3 Koon optimoinnista erikoistapauksena

Edellä ei esitelty koon optimointiin mitään erityisiä menetelmiä ja syy on, että koon optimointi voidaan nähdä edellisten erikoistapauksena. Kokoa optimoitaessa ainoastaan lukitaan osa muuttujista siten, että varioitavina muuttujina on ainoastaan kokoon vaikuttavia muuttujia. Koon optimointitehtävään voidaan sitten käyttää aiempia menetelmiä. Ainakin rajansiirtomenetelmä ja materiaali-jakaumamenetelmä voidaan jo intuitiivisestikin rajoittaa koon optimointiin. Esimerkiksi artikkeleissa (Grihon, Krog & Bassir 2009) ja (Tomšič & Duhovnik 2015) on sovellettu materiaali-jakaumamenetelmää koon optimointiin. Lisäksi Hoffmann'n (2015, 19) esityksestä löytyy maininta parametrisesta tasa-arvojoukkomenetelmästä, joka näyttäisi soveltuvan myös koon optimointitehtäviin.

4 Menetelmien vertailu

Aiemmissä kappaleissa on esitelty jo muodon optimointia ja sen menetelmiä, mutta tässä kappaleessa syvennyttään menetelmien vertailuun, jotta saadaan yksinkertainen yleiskuva siitä, miten eri menetelmät vertautuvat toisiinsa, missä niitä voi soveltaa, miten paljon ne vaativat matemaatikolta tai sovellusalan asiantuntijalta ja miten paljon tietokoneelta.

4.0.1 Sovelluskelpoisuus

Menetelmien tärkeimpänä ominaisuutena voidaan pitää niiden sovelluksia, koska muodon optimointi itsessään on melko turhaa, jos sitä ei sovelleta johonkin, esim. tekniikan, sovellukseen. Mikäli menetelmän sovellusalue on laaja, niin tämä on hyvä ominaisuus. Koska tällöin soveltaakseen muodon optimointia useampaan ongelmaan ei tarvitse opetella ja osata ammattitaitoisesti useampaa menetelmää.

Kolmesta esitellystä muodon optimoinnin perusmenetelmästä sovelluskelpoisimpana voidaan esittelyjen valossa pitää vaihekenttämenetelmää. Joskin vaihekenttämenetelmä on joillekin yksinkertaisemmille muodon optimointitehtäville yliampuvan kompleksinen. Myös tasa-arvojoukkomenetelmälle voisi löytää paljon sovelluksia. Muut kaksi menetelmää näyttävät olevan sovelluksissaan rajoitetumpia. Mitään yleistä menetelmää ei siis voi oikein suositella. Voidaan kuitenkin tutkia, mitä "level set method" ja "phase-field method" tuovat internetin hakukoneesta esiin. Hakutulosten avulla voidaan päätellä, että nämä kaksi menetelmää olisivat nykyään yleisimmin käytettyjä. Tämä johtunee yksinkertaisesti siitä, että menetelmiä pidetään rajansiirto- ja jopa materiaalijakaumamenetelmän parannuksina. Erityisesti vaihekenttämenetelmä löytyy monesta moderneja ja tulevaisuuden fysiikan ilmiöitä, kuten materiaalien järjestymistä, tutkivilta sovellusalueilta (katso esimerkiksi Lugino-va & Singer 2008, Elder & Provatas 2010 ja Faghihi 2012).

4.0.2 Matemaattinen ja numeerinen kompleksisuus

Toinen menetelmän tärkeä ominaisuus on sen matemaattinen ja numeerinen vaativuus. Matemaattisella vaativuudella tarkoitetaan, että kuinka vaativaa matematiikkaa ja algoritmiikkaa soveltaja joutuu käyttämään mallinnustehtävässä. Eli toisaalta, kuinka ammattitaitoinen matemaatikko tarvitaan käyttämään menetelmiä. Numeerisella kompleksisuudella taas tarkoitetaan sitä, että kuinka helppoja ja tehokkaita numeerisia ratkaisumenetelmiä optimointimenetelmälle on saatavilla ja kuinka robusteja ne ovat käytössä.

Allairen, Dapognyn ja Freyn tasa-arvojoukkomenetelmää koskevassa paperissa "Shape Optimization with a Level Set Based Mesh Evolution Method" (Allaire, Dapogny & Frey 2014) nähdään lajitelma menetelmiä, joita tasa-arvojoukkomenetelmässä voi joutua käyttämään. Paperissa mainitaan ensimmäisen kertaluvun Eulerin menetelmä, Runge-Kutta menetelmä ja äärellisten elementtien menetelmä (Allaire, Dapogny & Frey 2014, 10). Lisäksi Lassilan (2008) paperissa "Optimal Damping of a Membrane and Topological Shape Optimization" mainitaan jyrkimmän gradientin algoritmi (engl. descent gradient algorithm) (Lassila 2008, 6). Lisäksi Lassila viittaa toiseen paperiin, jossa käytettiin äärellisiä differenssejä (Lassila 2008, 2). Gradienttimenetelmillä ratkaistaviin ongelmiin löytyy usein tehokkaita menetelmiä, koska gradienteilla suoritettavilla ratkaisumenetelmillä on pitkä historia. Lisäksi gradienttimenetelmä ei ole kovin monimutkainen numeerinen menetelmä. Toisaalta, gradienttimenetelmä voi tuottaa virheellisiä tuloksia tai epäonnistua konvergoitumaan, koska usein tarkkuuttaa vaativissa sovelluksissa gradienttimenetelmää tehostetaan muilla menetelmillä. Lisäksi, tasa-arvojoukkomenetelmässä määriteltävä funktio ϕ ei muodostu vaikeudeksi, kun mallinnettava muoto on riittävän yksinkertainen, kuten Lassilan paperissa mallinnettava kalvo.

Vapnyarskii & Vatel (2017) puolestaan esittävät, että niin kutsutun *Pontryagin maksimiprinsiipin* seurauksena variationaaliset ongelmat, eli esimerkiksi rajansiirtomenetelmää soveltavat optimointiongelmat, redusoituvat erittäin usein reuna-arvotekäviksi (katso miten, esimerkiksi Belenky 1998, 288). Lisäksi he mainitsevat, että tällaiset reuna-arvotekävät ratkaistaan usein Newtonin menetelmällä osamääräisillä aske-

leilla. Newtonin menetelmä on yksinkertainen algoritmi. Toisaalta Schmitzin, Besnardin ja Hefazin (2004) paperista "Automated Hydrodynamic Shape Optimization Using Neural Networks" löytyy maininta neuroverkoista, joten rajansiirtomenetelmän voi vaatia kompleksisia numeerisia algoritmeja, joilla tosin saavutetaan myös esimerkiksi nopeuseroja.

Materiaalijakaumamenetelmässä todettiin monta numeerista algoritmia, mutta aivan yksinkertaisia nämä eivät ole. Mutta eivät myöskään kaikkein vaikeimmasta päästä. Koska ne ovat lineaarisia ohjelmia, niin niille luulisi löytyvän myös tehokkaita toteutuksia. Materiaalijakaumamenetelmän etuna voidaan myös pitää sitä, että testattuja menetelmiä ja lähdemateriaalia löytyy paljon. Toisaalta materiaalijakaumamenetelmään liittyy äärellisten elementtien menetelmä (FEM), joka ei ole kovin yksinkertainen menetelmä.

5 Menetelmien ajankohtaisuus ja muodon optimoinnin nykytrendit

Tässä viimeisessä kappaleessa olen pyrkinyt selvittämään, mitä nyky- ja tulevaisuudentrendejä liittyy muodon optimointiin. Alahan kuitenkin kehittyä edelleen ja siihen tulee uusia menetelmiä, joista osaa tutkitaan juuri tällä hetkellä. Esittely muokalee kolmannen kappaleen esittelytyyliä.

5.1 Menetelmien ajankohtaisuudesta

Tutkielmassa esitetyt menetelmät eivät suinkaan ole vanhentuneita, vaikka osan niistä historia onkin pitkä. Niiden muotoilut ovat perustavanlaatuisia, joten ne säilynevät vielä pitkään muodon optimoinnin standardityökaluina. Erityisesti jokaiselle menetelmälle voi edelleen löytää uudehkoja artikkeleita, joissa niitä on sovellettu. Toki menetelmissä on nähtävissä myös modernisaatiota, siinä mielessä, että vaihekkenttämennetelmä edustaa selvästi modernia näkökulmaa muodon optimointiin. Lisäksi vaihekkenttämennetelmä todettiin jo sovelluksissaan selvästi monipuolisimmaksi, joskin samalla melko raskaaksi menetelmäksi. Neljännen kappaleen päätteilyillä vaihekkenttämennetelmää ei silti voi pitää vanhempia menetelmiä korvaavana, vaan niitä komplementoivana. Edelleen myös vanhemmat menetelmät kehittyvät. Esimerkiksi niiden ratkaisumenetelmät kehittyvät ja osaa vanhempien muotoilujen ongelmista korjataan. Esimerkki tällaisesta kehitymisestä on esimerkiksi geneettisten algoritmien käyttö materiaalijakaumamenetelmässä (Tomšič & Duhovnik 2015).

5.2 Tulevaisuuden näkymiä

5.2.1 Isogeometrinen analyysi

Isogeometrinen analyysi on eräs tietokonemallintamisen moderni kehityskulku, jolla on vaikutusta myös muodon optimointiin. Isogeometrinen analyysi perustuu niin kutsuttuihin *NURBS* (Non-Uniform Rational B-Spline) -käyriin tai -splineihin. *NURBS*-

käyriä on käytetty jo pitkään CAD (Computer Aided Design) -ohjelmissa, mutta toisaalta NURBS-käyriä ei ole vielä hyödynnetty laajalti äärellisiin elementteihin perustuvissa simulointiohjelmistoissa (engl. Finite Element Analysis Software eli FEA software). CAD- ja FEA-ohjelmistot ovat siis käyttäneet erilaista geometriakuvausta ja näiden formaattien välillä on täytynyt muuntaa käyttäessään malliin toisen tyyppin ohjelmistoa. Isogeometrinen analyysi avaa FEA-ohjelmistoissa suoritettaviin muodon optimointitehtäviin uusia muotoilutapoja ja ratkaisukeinoja. (Hughes, Cottrell & Bazilevs 2004.)

Menetelmän kehittäjät Hughes, Cottrell ja Bazilevs esittävät artikkelissaan "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement" paitsi muotoiluja, niin myös syitä sille, miksi heidän mukaansa isogeometrinen analyysi on potentiaalinen vaihtoehto tavanomaiselle, polynomeihin pohjautuvalle äärellisten elementtien analyysille. He pyrkivät tekniikkaan, jossa muodostetaan FE-analyysia varten NURBS-pohjainen malli, jolloin CAD- ja FEA-geometriat vastaisivat suoraan toisiaan. (Hughes, Cottrell & Bazilevs 2004, 2/4136.) Heidän mukaansa isogeometrinen analyysi ei edes vaadi NURBS-käyriä, vaan yhtä hyvin voitaisiin käyttää esimerkiksi niin kutsuttuja *A-paikkoja* (engl. A-patches) tai *jakopintoja* (engl. subdivision surfaces). Heidän paperinsa kuitenkin esittelee NURBS-käyriin pohjautuvan version. (Hughes, Cottrell & Bazilevs 2004, 5/4139.)

Hughesin et al. menetelmän kasaaminen B-splineistä lähtien on annettu artikkelissa. Tässä rajoitutaan käsittelemään vain menetelmän sovellettavuutta muodon optimoinnin näkökulmasta. Oleellista on huomata, että isogeometrinen analyysi on äärellisten elementtien menetelmän kaltainen. Isogeometrisessa analyysissä muodostetaan analysoitavalle kappaleelle NURBS-pinta ja tälle luodaan verkko (engl. mesh), joka koostuu äärellisten elementtien kaltaisista elementeistä, jotka tosin nyt ovat *rationaalisten kantafunktioiden* (engl. rational basis functions) rakennepaloina. Lisäksi menetelmässä tarvitaan algoritmit artikkelissa esitellyille verkon hienonnuksille. Kirjoittajat mainitsevat myös *isoparametrisuuden* konseptin, joka tarkoittaa sitä, kun geometrialla tapahtuvat fysikaaliset kuvaukset esitetään samojen kantafunktioiden avulla kuin geometria. Tällöin äärellisiä elementtejä vastaava raken-

ne saadaan kasaamalla isoparametrisia NURBS-pintoja *globaaleihin taulukoihin* (engl. global arrays). (Hughes, Cottrell & Bazilevs 2004, 14/4148.)

NURBS-geometrialle saadaan myös reuna-arvot tehtävien kannalta tärkeät *Dirichlet'n reunaehdot*, jotka on helpointa asettaa NURBS-käyrien *kontrollipisteisiin*. Lisäksi kirjoittajat esittävät huomion siitä, että NURBS-käyrillä ei tapahdu äärellisten elementtien interpolointifunktiolla esiintyvää *Gibbs'n ilmiötä*, jossa sovitus oskilloi amplitudin suhteen, kun se on tehty epäjatkuvaan dataan. Jotta isoparametrisilla NURBS-pinnoilla voidaan viimein suorittaa analyysiä, niin niille luodaan äärellisten elementtien menetelmän kaltaisesti vielä lista "pintatestejä", joilla voidaan testata elementtien konvergoituvuutta sekä oikeellisuutta. Lisäksi kirjoittajat antavat liudan käytännön mallinnusesimerkkejä heidän menetelmällään. Tässä vaiheessa voidaan huomata, että käytännössä menetelmää käytetään hyvin samantapaisesti kuin äärellisten elementtienkin menetelmää. Kirjoittajat päättävät paperinsa kertamalla NURBS-menetelmän etuja verrattuna tavalliseen äärellisten elementtien menetelmään. (Hughes, Cottrell & Bazilevs 2004, 14–16/4148–4150.)

Menetelmä liittyy muodon optimointiin tietysti äsken tehdyn päättelyn perusteella siten kuin äärelliset elementitkin liittyvät, koska isogeometrinen analyysi on sovel- lus äärellisten elementtien menetelmään. Tutkielmassa on mainittu äärelliset ele- mentit aiemmin rajansiirtomenetelmän ja materiaalijakaumanmenetelmän yhtey- dessä. Siten isogeometrinen analyysi muokkaa ainakin näitä kahta menetelmää ja erityisesti se voi ratkaista monia niiden ongelmia.

Esimerkiksi Cyron, Frenzel & Wall (2008) antavat artikkelissaan "Isogeometric struc- tural shape optimization" esimerkin isogeometrisen analyysin soveltamisesta ra- kenneoptimointiin tasossa \mathbb{R}^2 . Yleinen rakenneanalyysitehtävä on seuraavanlainen:

$$\begin{aligned}
& \min_s && z(s, u(s)), s \in \mathbb{R}^n \\
& \text{subject to} && \underline{s}_i \leq s_i \leq \bar{s}_i \\
& && h_j(s, u(s)) = 0 \\
& && g_k(s, u(s)) \leq 0 \\
& \text{with} && i = 1, \dots, n \\
& && j = 1, \dots, \text{no. of equalities} \\
& && k = 1, \dots, \text{no. of inequalities}
\end{aligned}$$

(Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2977–2978.)

Tämä voitaisiin ratkaista monella matemaattisen ohjelmoinnin menetelmällä. Kun äärellisten elementtien sijaan käytetään ongelman diskretisointiin isogeometristä analyysiä, niin siirtymät (engl. displacements) $u(x) \in \mathbb{R}^2$ ja pisteet $x \in \Omega$ saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) &= RP \quad \xi, \eta \in \Omega_{patch} \\
u^h(\xi, \eta) &= Rd \quad \xi, \eta \in \Omega_{patch}
\end{aligned}$$

missä P on vektori NURBS-käyrien kontrollipisteitä, R sisältää rationaaliset kanta-funktiot ja d on vektori diskreettejä siirtymiä (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2979–2980). Yläindeksi $(\cdot)^h$ ei ole potenssiinkorotus, vaan sen puuttuminen ilmaisee, että geometria on esitetty *eksaktisti* (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2980).

Edelleen artikkelissa (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2981) on kuvattu, kuinka edellisistä päästään globaaliin jäykkyysmatriisiin:

$$K_{patch} = \int \int_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) \mathbb{C} B(\xi, \eta) \det J d\xi d\eta,$$

joka on aiemminkin Materiaalijakauma -menetelmä -luvussa mainittu matriisi K yhtälössä:

$$Ku = f,$$

mutta nyt NURBS-paikka (engl. NURBS patch) -kohtainen. \mathbb{C} on *konsistentti lineaarisointi* diskreetistä rasituksesta σ^h ja B on lineaarinen rasitusoperaattori (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2981).

Tähän viimeisimpään muotoiluun voi soveltaa monia optimoinnin menetelmiä. Cyron et al. käyttivät iteratiivista, gradienttiperustaista *liikkuvien asymptoottien menetelmää* (engl. Method of Moving Asymptotes) (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2982). Mutta yhtälöön voitaisiin soveltaa montaa muutakin, esimerkiksi muihin kuin gradientteihin perustuvia menetelmiä (Cyron, Frenzel & Wall 2008, 2983).

5.2.2 Moderneja ongelmia ja ratkaisuja

Koziel, Leifsson ja Yang esittävät artikkelissaan “Computational Optimization, Modelling and Simulation: Recent Trends and Challenges” näkemyksiä mallinnuksen nykyaikaisista ongelmista. He (Koziel et al. 2013, 859) listaavat seuraavat tämänhetkiseksi tutkimusalueiksi: luonnon inspiroimat metaheuristiset algoritmit, seulontamenetelmään perustuvat mallit (engl. surrogate models) ja optimointi, suurikokoiset ongelmat (engl. large-scale problems) sekä vihreä laskenta (engl. Green Computing) ja hilalaskenta. Lisäksi he listaavat näkemyksensä edellämainittuihin liittyvistä kysymyksistä. Kysymykset ovat: Mikä ohjaa metaheuristisen algoritmin suorituskykyä ja konvergoitumista? Miten tehdä algoritmista todella älykäs? Miten tasapainottaa optimaalisesti lokaaleja ja globaaleja hakuominaisuuksia algoritmissa? Skaalautuuko pienikokoisten ongelmien metodologia suuriin ongelmiin ja toimiiko se yhtä hyvin suuriin ongelmiin? Mikä on paras tapa rakentaa hyvä seulontamenetelmään perustuva malli annetulle tehtävälle? Miten valita parhaat algoritmit ja seulontamenetelmään perustuvat mallit annetulle ongelmalle? (Koziel et al. 2013, 859–860).

Kirjoittajat myös erottelevat yllämainittuja kysymyksiä hieman syvemmin. Heidän mukaansa metaheuristiset algoritmit ratkaisevat perinteisten menetelmien ongel-

mia, kuten konvergoitumisongelmia. Tämän ne saavuttavat tehostamalla iteratiivista hakualgoritmia stokastiikalla. Tällaisia hakualgoritmeja ovat esimerkiksi hiukkasfarmioptimointi, käkihaku ja tulikärpänen-algoritmi. (Koziel et al. 2013, 857.) On syytä huomata, että metaheuristiset menetelmät eivät siis ole täysin uusia menetelmiä sinänsä, vaan nimensä mukaisesti ne ovat *makrotason strategioita*, heuristiikkojen heuristiikkoja, joilla lähinnä ohjataan aiempien ja alempien menetelmien haun tai konvergoituvuuden ilmiöitä ongelman tai ratkaisun globaalista perspektiivistä. Näennäisestä kompleksisuudestaan huolimatta metaheuristiset menetelmät ovat kirjoittajien mukaan yksinkertaisia ja helppoja toteuttaa. (Koziel et al. 2013, 857.) Toisekseen kirjoittajat mainitsevat, että kehityksestä huolimatta menetelmien soveltamisen ja teorian välillä vallitsee aukkoja. Metaheuristiset algoritmit voivat toimia hyvin, mutta syytä siihen ei tunneta täysin. Lisää aukkoja vallitsee pienten ja suurten ongelmien välillä. Monia menetelmiä on tutkittu vain pienissä tai keskikokoisissa ongelmissa, joissa suunnittelumuuttujia on muutamasta kymmenestä muutamiin satoihin. Monet reaali maailman ongelmat ovat kuitenkin näitä paljon kompleksisempia ja suunnittelumuuttujien määrä voi kasvaa tuhansiin tai jopa miljooniin. (Koziel et al. 2013, 858.)

Toisaalta, kirjoittajien mukaan myös yleisemmällä tasolla mallinnuksessa ja simuloinnissa esiintyy ongelmia. He esittävät, että eräs tavanomainen ongelma on, että osittaisdifferentiaaliyhtälöihin perustuvia ongelmia ei voida ratkaista analyttisesti. Kun niitä taas ratkaistaan approksimatiivisesti, niin ellei ratkaisu käyttydy sileästi, niin ratkaisujen seuraaminen voi olla mahdotonta. (Koziel et al. 2013, 858.) Viime aikoina suosittu menetelmä ongelman ratkaisuun on ollut seulontamenetelmään perustuva optimointi, johon on esitelty monia menetelmiä. Lisäksi monet ovat tutki neet niin kutsuttuja matalan tarkkuuden (engl. low-fidelity) ja muuttuvan tarkkuuden (engl. variable-fidelity) malleja. (Koziel et al. 2013, 858.) Näiden menetelmien idea on nimienkin mukaisesti hyödyntää aiemmin tunnettuja menetelmiä, mutta sitten, että diskretisointia ja iteraatioita suoritetaan pienempi määrä. Toisin sanoen, malleissa käsitellään täyden ongelman redusoitua versiota. Menetelmiä pitäisi kuitenkin edelleen kehittää, jotta niistä saataisiin globaalisti tarkkoja, sileitä ja laskennallisesti vaatimattomia (Koziel et al. 2013, 858).

6 Yhteenveto

Tutkielmassa aikaansaatiin yleiskatsaus muodon optimointiin, sen menetelmiin sekä nykytrendeihin. Tutkielman esittelyillä on mahdollista ymmärtää, mistä muodon optimoinnissa on kyse ja miten muodon optimointia tehdään. Lisäksi tutkielmasta voi lukea, miten eri menetelmät vertautuvat toisiinsa ja missä ne sijaitsevat muodon optimoinnin aikajanalla. Edelleen tutkielman lähdeluettelo palvelee melko kattavana näkemyksenä alan kirjallisuuteen. Lisäksi tutkielman avulla voi alkeellisesti valikoida esitellyistä menetelmistä sopivan johonkin annettuun ongelmaan. Menetelmien esittely tehtiin kattavasti, mutta aivan syvälle niiden muotoiluissa ja esimerkiksi toteutuskäytäntöihin ei juurikaan menty. Toteutuspuolella esiintyy joidenkin menetelmien kohdalla aivan uudenlaista problematiikkaa, jota teoreettisella puolella ei vielä huomata. Erityisesti vertailu ei ollut kattavaa, vaan vertailua suoritettiin aika pintapuolisesti. Vertailua voitaisiin suorittaa paljon tarkemmalla ja käytännöllisellä tasolla. Annettu vertailu kuitenkin riittää yleiserojen havaitsemiseen. Lisäksi luotiin pieni katsaus siihen, mitä muodon optimoinnissa on nyt ja tulevaisuudessa tulossa. Tutkielman avulla pitäisi voida tutustua muodon optimointiin ja tutkielman pitäisi helpottaa syvempää itse- ja jatko-opiskelua aiheesta.

Kirjallisuutta

- Allaire, G. 2010. *Lecture 1: Introduction To Homogenization Theory*. Luentomoniste. Ecole Polytechnique.
- Allaire, G., Dapogny, C. & Frey, P. 2014. *Shape Optimization with a Level Set Based Mesh Evolution Method*. hal-00933545v1.
- Allaire, G. & Pantz, O. 2006. *Structural optimization with FreeFem++*. Structural and Multidisciplinary Optimization. Volume 32. Issue 3. pp. 173–181. DOI 10.1007/s00158-006-0017-y.
- Allaire, G., Gournay, F., Jouve, F., & Toader, A-M. 2005. *Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method*. Control and Cybernetics. Volume 34. Issue 1. pp. 59–80. Systems Research Institute of the Polish Academy of Sciences.
- Andreoli, M., Janka, A., Desideri, J-A. & Nguyen, T. 2004. *Free-form deformation for multi-level 3D parallel optimization in aerodynamics*. Konferenssiesitys. International Conference on Parallel CFD 2004.
- Bazilevs, Y., Cottrell, J. A. & Hughes T. J. R. 2004. *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanical Engineering. Volume 194. pp. 4135-4195.
- Belenky, A.S. 1998. *Operations Research in Transportation Systems: Ideas and Schemes of Optimization Methods for Strategic Planning and Operations Management*. Springer.
- Bendsøe, M. P. 1989. *Optimal shape design as a material distribution problem*. Structural Optimization. Volume 1. Issue 4. pp. 193–202. Springer-Verlag. DOI 10.1007/BF01650949.
- Bendsøe, M.P. & Kikuchi, N. 1988. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Volume 71. pp. 197-224.
- Bendsøe, M. P. & Sigmund, O. 2004. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. DOI 10.1007/978-3-662-05086-6.
- Bassir, D., Grihon, S. & Krog, L.. 2009. *Numerical Optimization applied to structure sizing at AIRBUS: a multi-step process*. International Journal for Simulation and

- Multidisciplinary Design Optimization. Volume 3. No. 4. pp. 432–442.
- Burger, M. & Osher, S. J. 2005. *A Survey on Level Set Methods for Inverse Problems and Optimal Design*. European Journal of Applied Mathematics. Volume 16. Issue 2. pp. 263–301. DOI <https://doi.org/10.1017/S0956792505006182>.
- Cazacu, R. & Grama, L. 2014. *Overview of Structural Topology Optimization Methods for Plane and Solid Structures*. Annals of the University of Oradea. Issue #3. Fascicle of Management and Technological Engineering.
- Ciarlet, P.G. 1988. *Handbook of Numerical Analysis Volume 6: Numerical Methods for Solids (Part 3) Numerical Methods for Fluids (Part 1)*. Elsevier Science.
- Cyron, C., Frenzel, M.A. & Wall, W. A. 2008. *Isogeometric structural shape optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Volume 197. pp. 2976–2988.
- Deaton, J.D. & Grandhi R.V. 2013. *A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000*. Structural and Multidisciplinary Optimization. Volume 49. Issue 1. pp 1–38. DOI 10.1007/s00158-013-0956-z.
- Dogan, G., Morin, P., Nochetto, R. H. & Verani, M. *Finite Element Methods for Shape Optimization and Applications*. Haettu 18.4.2017 osoitteesta <https://www.mate.polimi.it/biblioteca/add/qmox/mox72.pdf>.
- Elder, K. & Provatas, N. 2010. *Phase-Field Methods in Materials Science and Engineering*. Wiley-VCH.
- Faghihi, N. 2012. *Phase Field Crystal Approach to the Solidification*. Scholarship@Western. Väitöskirja.
- Fedkiw, R. P. & Osher, S. 2000. *Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results*. Journal of Computational Physics. Volume 169. pp. 475–502.
- Goldstine, H. H. 1980. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer.
- Gomes, F. & Senne, T. 2012. *A Sequential Piecewise Linear Programming Algorithm for Topology Optimization*. Luentokalvot. 3rd International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro.
- Hecht, C. 2014. *Shape optimization in fluid mechanics using a phase field approach*. Luen-

- tokalvot. University of Regensburg.
- Hiptmair, R. & Jinhgzi L. 2012. *Shape derivatives in differential forms I: an intrinsic perspective*. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Volume 192. Issue 6. pp. 1077–1098. DOI 10.1007/s10231-012-0259-9.
- Hoffmann, S. 2015. *Structural Optimization for Piezo-Electric Patches*. Luentokalvot. Luxembourg Institute of Science and Technology.
- Igbida, N. *Introduction to Shape optimization*. Luentokalvot. Institut de recherche XLIM, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges.
- Juutinen, P. 2005. *Variaatiolaskenta*. Luentomoniste. Jyväskylän Yliopisto.
- Kasolis, F. 2014. *Material Distribution Method: Analysis and Acoustics Applications*. Väitöskirja. Department of Computing Science, Umeå University.
- Marchenko, V. A. & Khruslov, E. Y. 2005. *Homogenization of Partial Differential Equations*. *Progress in Mathematical Physics*. Book 46. Birkhäuser.
- Kollman, Markus. 2008. *Shape Optimization with Shape Derivatives*. Kandidaatintutkielma. Johannes Kepler Universität. Institut für Numerische Mathematik.
- Koziel, S., Leifsson, L. & Yang X. S. 2013. *Computational Optimization, Modelling and Simulation: Recent Trends and Challenges*. *Procedia Computer Science*. Volume 18. pp. 855–860.
- Lassila, T. 2008. *Optimal Damping of a Membrane and Topological Shape Optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Volume 38. Issue 1. pp. 43–52.
- Lassila, T. 2010. *Model reduction and level set methods for shape optimization problems*. Väitöskirja. Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports. A593. ISBN 978-952-60-3402-7
- Lombaert, H. 2006. *Level set method: Explanation*. Haettu 19.4.2017 osoitteesta <http://profs.etsmtl.ca/hlombaert/levelset/>.
- Singer-Loginova, I. & Singer, H. M. 2008. *The phase field technique for modeling multiphase materials*. *Reports on Progress in Physics*. Volume 71. DOI: 10.1088/0034-4885/71/10/106501.
- Misawa, M., Takada, N. & Tomiyama, A. 2005. *A Phase-Field Method for Interface-Tracking Simulation of Two-Phase Flows*. *Proceedings of 2005 ASME Fluids Engineering Division Summer Conference*. DOI: 10.1115/FEDSM2005-77367]

- Mohammadi, B. & Pironneau, O. 2009. *Applied Shape Optimization for Fluids*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press.
- Moslehian, M. S., Rowland, T. & Weisstein, E. W. *Banach Space*. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Haettu 18.4.2017 osoitteesta <http://mathworld.wolfram.com/BanachSpace.html>.
- Osher, S. & Sethian, J. A. 1988. *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*. Journal of Computational Physics. 79. pp. 12–49.
- Pérez, D. 2012. *Level Set Method Applied to Topology Optimization*. Luentokalvot. <https://www.upct.es/goe/level-set-slides.pdf>
- Singer-Loginoca & Singer, H.M. 2008. *The phase field technique for modeling multiphase materials*. Reports on Progress in Physics. Volume 71. Number 10. DOI 10.1088/0034-4885/71/10/106501.
- Schmidt, S. & Schulz, V. 2009. *Shape Derivatives for General Objective Functions and the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Deutsche Forschungsgemeinschaft.
- Schmitz, A., Besnard, E. & Hefazi, H. 2004. *Automated Hydrodynamic Shape Optimization Using Neural Networks*. Mechanical and Aerospace Engineering Department, California State University Long Beach.
- Sturm, K. 2016. *A structure theorem for shape functions defined on submanifolds*. arXiv:1604.04840 [math.OC]
- Smereka, P., Sussman, M. & Osher, S. 1994. *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow*. Journal of Computational Physics. Volume 114. Issue 1. pp. 146–159.
- Tomšič, P. & Duhovnik, J. 2015. *Simultaneous Topology and Size Optimization of 2D and 3D Trusses Using Evolutionary Structural Optimization with regard to Commonly Used Topologies*. Advances in Mechanical Engineering. Volume 6. Issue January 1, 2014. DOI <https://doi.org/10.1155/2014/864807>.
- Tura, A. & Dong, Z. 2014. *Introduction to Design Optimization*. Luentokalvot (MECH410). University of Victoria, Engineering.
- Vapnyarskii, I.B & Vatel, I.A. *Numerical Methods of Variational Calculus*. Encyclopedia of Math. Haettu 8.4.2017 osoitteesta <http://www.encyclopediaofmath.com>.

org/index.php?title=Variational_calculus,_numerical_
methods_of&oldid=15104.