Kinemaattinen inversio-ongelma pallosymmetrisellä monistolla

Keijo Matti Tapani Mönkkönen

Ohjaaja: Joonas Ilmavirta

4.5.2017

Matematiikan sivuainetutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017

Tiivistelmä

Tutkielman pääaiheena on maanjäristysaaltoihin ja Maan sisärakenteen tutkimiseen liittyvä käänteinen kinemaattinen ongelma. Maapalloa mallinnetaan kolmiulotteisella kompaktilla reunallisella monistolla $\bar{B}^3(0,R)$, jonka säde normitetaan ykköseksi $R=1$. Aaltorintamat kulkevat pitkin geodeeseja, jotka sijaitsevat kokonaan avoimessa pallossa $B^3(0,1)$ lukuun ottamatta päätepisteitä, jotka ovat reunalla $S^2(0,1)$. Symmetrioiden nojalla tarkastelu voidaan siirtää tasoon $\mathbb{R}^2$, jossa riittää tutkia kiekon $\bar{B}^2(0,1)$ geodeeseja. Äänennopeus $v = v(r)$ oletetaan isotrooppiseksi ja aidosti positiiviseksi $C^{1,1}([0,1])$-funktioksi, jolle $v'(0) = 0$. Lisäksi siltä vaaditaan Herglotz-ehto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0$ kaikilla $r \in [0,1]$. Näiden oletusten vallitessa, Abel-integraalin kääntyvyyttä apuna käyttäen, todistetaan tutkielman päätulos: jos aaltojen matka-ajat reunapisteiden välillä tunnetaan kaikille saapumiskulmille ja reunanopeus $v(1)$ tiedetään, äänennopeus $v(r)$ määräytyy datasta yksikäsitteisesti. Maapallon sisärakenteesta saadaan siten tietoa pelkästään reunamittauksia tekemällä.

Abstract

The main subject of the thesis is the inverse kinematic problem related to seismic waves and the study of the inner structure of the Earth. The Earth is modelled by three-dimensional compact manifold with boundary $\bar{B}^3(0,R)$ whose radius is normed to one $R=1$. The wave fronts travel along geodesics which completely lie in the open ball $B^3(0,1)$ except the endpoints which are on the boundary $S^2(0,1)$. By symmetry arguments the treatment can be transferred to the plane $\mathbb{R}^2$, where it is enough to study the geodesics of the disk $\bar{B}^2(0,1)$. The speed of sound $v = v(r)$ is assumed to be isotropic and strictly positive $C^{1,1}([0,1])$-function for which $v'(0) = 0$. In addition it is required to satisfy the Herglotz-condition $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0$ for all $r \in [0,1]$. Under these assumptions, with the help of the invertibility of Abel-integral, we prove the main result of the thesis: if the travel-times between boundary points are known for all arrival angles and the boundary speed $v(1)$ is known, the speed of sound $v(r)$ is determined uniquely from the data. One can thus get information about the inner structure of the Earth by only doing boundary measurements.

Sisältö

1 Johdanto

Voiko maapallon sisärakennetta tutkia maanjäristysaaltojen kulkuaikoja mittaamalla? Tätä kutsutaan usein käänteiseksi kinemaattiseksi ongelmaksi, joka on tämän sivuainetutkielman pääaiheena. Kysymyksellä on pitkä historia ja sen matemaattisen täsmällinen käsittely alkoi jo 1900-luvun alkupuolella Gustav Herglotzin toimesta [1]. Lisäksi merkittävän kontribuution asiaan antoivat myös Emil Wiechert ja Karl Zoeppritz, joihin viitataan lähteissä [2, 3, 4]. Ongelma on mielenkiintoinen siksi, että maapallon sisusta ei voi nykyteknologian turvin tutkia suoraan kuin rajalliseen syvyyteen asti ($\sim$ 10 km). Tämän vuoksi tarvitaan epäsuoria metodeja sisärakenteen selvittämiseksi eli kyseessä on ns. inversio-ongelma. Kattava johdatus inversio-ongelmiin löytyy esimerkiksi lähteistä [2, 5]. Käänteiseen kinemaattiseen ongelmaan liittyviä viimeaikaisia tuloksia löytyy esimerkiksi lähteistä [3, 4, 6].

Tutkielmassa johdetut tulokset eivät ole uusia, mutta niitä ei ole tiedettävästi kirjoitettu vastaavalla tavalla puhtaaksi ainakaan julkaistuissa artikkeleissa tai muussa kirjallisuudessa. Tämän vuoksi työssä ei varsinaisesti seurata mitään kirjallisuuslähdettä. Aihetta on kuitenkin käsitelty ainakin Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen inversio-ongelmien yksikön seminaareissa [7, 8]. Kappaleessa 4 ja hieman myös kappaleessa 3 on sivuttu lähdettä [5], jossa tosin ongelman lähestymistapa on erilainen. Osoittautuu, että tiettyjen yksinkertaistuksien ja symmetriaoletusten vallitessa inversio-ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu. Päätulos on:

> ”Oletetaan, että Herglotz-ehto (15) on voimassa. Jos maanjäristysaaltojen kulkuajat reunapisteiden välillä tunnetaan kaikille saapumiskulmille ja aallon reunanopeus tiedetään, nopeus Maan sisällä määräytyy mittausdatasta yksikäsitteisesti”.

Tutkielman rakenne on seuraavanlainen. Aivan ensimmäiseksi kerrataan tarvittava määrä Riemannin geometriaa, jotta ongelman matemaattisen täsmällinen käsittely on mahdollista. Lisäksi varsinainen inversio-ongelma motivoidaan ja muotoillaan lähtien liikkeelle fysikaalisista periaatteista. Tämän jälkeen tarkastellaan pallon $\bar{B}^n(0,1)$, $n \geq 2$, geodeeseja sekä määritellään Herglotz-ehto, joka on keskeinen rajoite äänennopeudelle ongelman ratkeavuuden kannalta. Samalla tutkitaan, millaiset geodeesit toteuttavat ehdon, ja mikä on sen geometrinen tulkinta. Lopuksi todistetaan tutkielman päätulos käyttäen hyväksi Herglotz-ehtoa ja Abel-integraalin kääntyvyyttä sekä annetaan esimerkki, kuinka äänennopeus voidaan käytännössä konstruoida mittausdatasta yksinkertaisessa tapauksessa.

2 Lähtöasetelma

Muotoillaan kinemaattinen inversio-ongelma täsmällisesti Riemannin geometrian avulla. Sitä ennen kerrataan perusasioita differentiaaligeometriasta ja Riemannin geometriasta.

2.1 Riemannin geometriaa

Käydään läpi muutamia määritelmiä ja perustuloksia, joita työssä tarvitaan jatkossa. Tarvittavien tulosten todistukset löytyvät esimerkiksi lähteistä [9, 10, 11].

Määritelmä 2.1. Riemannin monisto on pari (M, g), jossa M on sileä n-ulotteinen monisto ja $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ on positiividefiniitti symmetrinen (0, 2)-tensorikenttä, jota kutsutaan Riemannin metriikaksi tai metriseksi tensoriksi. Tässä $\mathcal{X}(M)$ tarkoittaa vektorikenttien muodostamaa $\mathcal{F}(M)$-modulia ja $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ on } C^\infty\text{-funktio}\}$.

Metrinen tensori g on siis $\mathcal{F}(M)$-multilineaarikuvaus, joka liittää jokaisessa pisteessä $p \in M$ sisätulon g_p tangenttiavaruuteen T_pM. Lokaaleissa koordinaateissa g:llä on esitys

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j , \quad g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) , \quad i, j \in \{1, \ldots, n\} ,$$

missä $x : M \to \mathbb{R}^n$, $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, ovat lokaalit koordinaatit ja $\partial_1, \ldots, \partial_n$ niitä vastaavat koordinaattivektorikentät. Sanalla metriikka viitataan asiayhteydestä riippuen joko metriseen tensoriin g tai sen lokaaliin esitykseen g_{ij}. Huomaa, että saman sileän moniston M kaksi eri metriikkaa g_1 ja g_2 määräävät eri Riemannin monistot (M, g_1) ja (M, g_2).

Määritelmä 2.2. Olkoot (M, g_1) ja (M, g_2) Riemannin monistoja. Metriikkojen g_1 ja g_2 sanotaan olevan konformiset, jos on $f \in \mathcal{F}(M)$ siten, että $f(p) > 0$ kaikilla $p \in M$ ja $g_2 = f g_1$.

Tutkielmassa monistona M tulee lopulta olemaan suljettu yksikkökiekko $\bar{B}^2(0, 1)$ ja metriikkana on euklidisen metriikan kanssa konforminen metriikka $g = f g_E$, missä kerroinfunktio riippuu vain säteestä $f = f(r)$. Geometrisiin tarkasteluihin tarvitaan konnektiota ja Christoffelin symboleita.

Määritelmä 2.3. Olkoon $x^i : M \to \mathbb{R}$ lokaali koordinaatti. Christoffelin symbolit Γ^k_{ij} määritellään lausekkeella

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k ,$$

missä $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ on Levi-Civita-konnektio tai kovariantti derivaatta.

Lemma 2.4 ([9, propositio 3.13]). *Christoffelin symbolit voidaan lausua metriikan g_{ij} avulla muodossa*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) . \tag{1}$$

Lisäksi kovariantti derivaatta on lokaaleissa koordinaateissa

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_j X^j \partial_j Y^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \partial_i \ . \tag{2}$$

Tutkielman keskeisin käsite on geodeesi, joka on euklidisen avaruuden suoran yleistys. Kirjallisuudessa polun $\gamma : I \to M$ parametria merkitään usein kirjaimella t. Tutkielmassa osoittautuu myöhemmin, että parametrina voidaan itse asiassa käyttää aikaa, jota merkitään samalla symbolilla. Seuraavissa tarkasteluissa voikin t:tä ajatella joko mielivaltaisena parametrina tai fysikaalisena aikana.

Propositio 2.5 ([9, propositio 3.18])**.** *Olkoon $\gamma : I \to M$ polku ja $Z \in \mathcal{X}(\gamma)$ polulla γ määritelty vektorikenttä. Levi-Civita-konnektio ∇ indusoi kovariantin derivaatan $\frac{D}{dt}$ polkua γ pitkin ja lokaaleissa koordinaateissa pätee*

$$\frac{D}{dt} Z = \sum_k \left(\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} Z^j \right) \partial_k \ .$$

Vektorikentän Z sanotaan olevan yhdensuuntainen polkua γ pitkin, jos $\frac{D}{dt} Z = 0$.

Määritelmä 2.6. Polku $\gamma : I \to M$ on geodeesi, jos $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma} = 0$, kun $\dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$.

Geodeesi on siis polku, jonka tangenttivektorien $\dot{\gamma}$ suunta säilyy liikuttaessa polkua pitkin. Määritelmästä seuraa myös, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ eli geodeesin nopeus on vakio. Ekvivalentisti voi siis sanoa, että geodeesi on polku, jonka kiihtyvyys $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma}$ on nolla. Geodeesit riippuvat metriikasta Christoffelin symboleiden kautta.

Lemma 2.7 ([9, lemma 3.21])**.** *Lokaaleissa koordinaateissa geodeesiyhtälö on*

$$\ddot{x}^k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \ , \quad k \in \{1, \ldots, n\} \ , \tag{3}$$

missä on notaation lyhentämiseksi identifioitu $x^k \equiv x^k \circ \gamma$ ja $\dot{x}^k = dx^k/dt$.

Geodeeseille voidaan antaa myös kaksi muuta karakterisaatiota pituusfunktionaalin ja etäisyyksien minimoinnin avulla.

Propositio 2.8 ([9, seuraus 10.3])**.** *Vakiovauhtinen polku γ on geodeesi metriikan g suhteen jos ja vain jos γ on pituusfunktionaalin $L_g(\gamma) = \int_I \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt$ kriittinen piste.*

Propositio 2.9 ([9, lemma 5.14 ja seuraus 5.19])**.** *Geodeesit ovat lokaalisti etäisyydet minimoivia polkuja. Toisaalta, jos γ on etäisyydet minimoiva polku, niin γ on uudelleenparametrisointia vaille geodeesi.*

Seuraava lause on tärkeä geodeeseja koskeva tulos, jota käytetään tutkielmassa toistuvasti. Tulos perustuu tavallisten differentiaaliyhtälöiden olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseeseen ja on voimassa kaikille metriikoille g, joiden lokaali esitys $g_{ij} : M \to \mathbb{R}$ on vähintään Lipschitz-jatkuvasti derivoituva.

Lause 2.10 ([9, lemma 3.22 ja lemma 3.26]). *Jos $p \in M$ ja $v \in T_pM$, niin on olemassa avoin väli $I \ni 0$ ja yksikäsitteinen geodeesi $\gamma : I \to M$ siten, että $\gamma(0) = p$ ja $\dot{\gamma}(0) = v$. Lisäksi polku $\eta = \gamma \circ h : J \to M$, missä $h : J \to I$ on diffeomorfismi, on geodeesi jos ja vain jos $h(s) = as + b$ joillekin $a, b \in \mathbb{R}$.*

Huomautus 2.11. Pisteen p kautta suuntaan v kulkeva geodeesi on siis yksikäsitteinen. Lisäksi uudelleenparametrisoitu geodeesi säilyy geodeesina jos ja vain jos parametrisointi on affiini. Jos M on reunallinen monisto ja $p \in \partial M$, niin lause 2.10 on voimassa, kun monistolle M tehdään esimerkiksi ϵ-mittainen laajennus (ks. huomautus 3.1).

Seuraavaa tavallisia differentiaaliyhtälöitä koskevaa tulosta käytetään lauseen 3.21 todistuksessa.

Propositio 2.12 ([11, lause 17.4.1]). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-kuvaus. Olkoon $x : J \to \mathbb{R}^n$ alkuarvotehtävän $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0 \in U$, ratkaisu maksimaalisella määrittelyvälillä $J =]\alpha, \beta[\ni 0$. Jos $\beta < \infty$, niin $x(t)$ poistuu jokaisesta U:n kompaktista osajoukosta, kun $t \to \beta$. Vastaava pätee, jos $\alpha > -\infty$ ja $t \to \alpha$.*

Huomautus 2.13. Edellistä propositiota voi soveltaa myös geodeesien tapauksessa, sillä ne ovat tavallisen differentiaaliyhtälön (3) ratkaisuja. Toisen asteen differentiaaliyhtälön voi aina muuttaa ensimmäistä astetta olevaksi differentiaaliyhtälöpariksi määrittelemällä uudeksi muuttujaksi $y = \dot{x}$.

Määritelmä 2.14. Riemannin monistojen välinen diffeomorfismi $\phi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ on isometria, jos $\phi^*(g_N) = g_M$. Siis kaikille $p \in M$ ja $v, w \in T_pM$ pätee $g_N(\mathrm{d}\phi(v), \mathrm{d}\phi(w))|_{\phi(p)} = g_M(v, w)|_p$.

Isometriat ovat luonnollisia eri Riemannin monistot identifioivia kuvauksia, sillä ne säilyttävät metrisen struktuurin ennallaan. Seuraavaa tulosta käytetään geodeesien symmetria-argumenteissa pariin otteeseen.

Propositio 2.15 ([10, propositio 5.6]). *Isometria $\phi : M \to N$ kuvaa geodeesit geodeeseiksi: jos γ on geodeesi monistolla M ja kulkee hetkellä t_0 pisteen $p \in M$ kautta suuntaan $v \in T_pM$, niin $\phi \circ \gamma$ on geodeesi monistolla N ja kulkee hetkellä t_0 pisteen $\phi(p)$ kautta suuntaan $d\phi(v)$.*

Huomautus 2.16. Isometriat, joita tutkielmassa lähinnä tarvitaan, ovat rotaatiot sekä peilaukset origon kautta kulkevan tason tai suoran suhteen. Euklidisessa tapauksessa nämä kuvaukset tiedetään isometrioiksi. Koska työssä käytettävä metriikka on konforminen euklidisen metriikan kanssa ja konformikerroin riippuu vain radiaalikoordinaatista, ovat edellä mainitut kuvaukset isometrioita myös konformisessa tilanteessa.

Kappaleessa 3 tarvitaan hieman alimonistojen teoriaa. Käydään tässä läpi vain välttämättömät perusasiat.

Määritelmä 2.17. Olkoon M Riemannin monisto ja $N \subset M$ sen alimonisto. Tangenttiavaruus T_qM voidaan esittää summana $T_qM = T_qN \oplus T_qN^\perp$ kaikissa pisteissä $q \in N$. Jokaisella tangenttivektorilla $v \in T_qM$ on siten esitys $v = \tan v + \mathrm{nor}\ v$, missä $\tan v \in T_qN$ ja $\mathrm{nor}\ v \in T_qN^\perp$. Vastaavalla tavalla jokainen vektorikenttä $X \in \mathcal{X}(M)$ voidaan pisteittäin jakaa tangentiaali- ja normaaliosaan $X = \tan X + \mathrm{nor}\ X$, missä $\tan X \in \mathcal{X}(N)$, $\mathrm{nor}\ X \in \mathcal{X}(N)^\perp$ ja $\mathcal{X}(N)^\perp = \{X \in \mathcal{X}(M) : X_q \in T_qN^\perp \text{ kaikilla } q \in N\}$.

Eräs tärkeä käsite Riemannin alimonistojen tutkimisessa on toinen perusmuoto II.

Määritelmä 2.18. Olkoon M Riemannin monisto ja $N \subset M$ sen alimonisto. Toinen perusmuoto on kuvaus $\mathrm{II} : \mathcal{X}(N) \times \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(N)^{\perp}$ ja se määritellään lausekkeella

$$\mathrm{II}(V, W) = \mathrm{nor}\ \nabla_V^M W\ .$$

Tässä vektorikentät V ja W ajatellaan sileästi jatketuiksi monistolle M, jotta $\nabla_V^M W$ on määritelty. Kovariantti derivaatta ja siten $\mathrm{II}(V, W)$ ei kuitenkaan riipu valituista jatkoista [9, lemma 4.1].

Jos kyseinen alimonisto N on hyperpinta, voi toista perusmuotoa ajatella reaaliarvoisena bilineaarimuotona.

Määritelmä 2.19. Olkoon M Riemannin monisto ja $N \subset M$ hyperpinta eli $\dim T_q N^{\perp} = 1$. Olkoon $n \in \mathcal{X}(N)^{\perp}$ moniston N yksikkönormaalikenttä, jolloin $\mathrm{II}(V, W)(q)$ ja $n(q)$ ovat yhdensuuntaisia jokaisessa pisteessä $q \in N$. Reaalinen toinen perusmuoto $h : \mathcal{X}(N) \times \mathcal{X}(N) \to \mathbb{R}$ määritellään lausekkeella

$$h(V, W) = g(\mathrm{II}(V, W), n)$$

tai ekvivalentisti

$$\mathrm{II}(V, W) = h(V, W) n\ .$$

2.2 Inversio-ongelman muotoilu

Mallinnetaan maapallon sisusta euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoimella pallolla $B^3(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ ja pintaa pallon reunalla $\partial B^3(0, R) = S^2(0, R) \subset \mathbb{R}^3$. Kyseessä on siis kompakti pallosymmetrinen reunallinen monisto $\bar{B}^3(0, R)$. Tarkastelujen yksinkertaistamiseksi säde normalisoidaan ykköseksi $R = 1$. Geodeesit kulkevat aina avoimessa pallossa. Vain niiden päätepisteiden halutaan olevan pallon reunalla. Käsittely voidaan yleistää helposti myös n-ulotteiseen tilanteeseen, kuten seuraavassa kappaleessa nähdään.

Oletetaan, että pinnalla tapahtuu maanjäristys ja sen aiheuttama ääniaalto kulkee Maan sisuksen kautta toiseen pinnan pisteeseen. Oletus on siinä mielessä motivoitu, että kuoren paksuus on huomattavasti pienempi kuin maapallon säde. Oletetaan myös, että aalto kulkee mahdollisimman suoraa reittiä eli geodeesia pitkin. Tämä itse asiassa seuraa Fermat'n periaatteesta, mikä nähdään myöhemmin. Pinnalla mitataan aaltojen kulkuaikoja ja saapumiskulmia eri pisteiden välillä. Infinitesimaalinen aika $\mathrm{d}t$, joka aallolla kuluu matkatessaan infinitesimaalisen etäisyyden $\mathrm{d}s$, on

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v(r)}\ ,$$

missä $v(r)$ on aallon etenemisnopeus. Nopeusfunktio oletetaan isotrooppiseksi $v = v(r)$, Lipschitz-jatkuvasti derivoituvaksi $v \in C^{1,1}([0, 1])$ ja aidosti positiiviseksi $v(r) > 0$. Tästä seuraa myös, että se on alhaalta rajoitettu jollain positiivisella vakiolla $v(r) \geq c > 0$, sillä se on jatkuva funktio kompaktilla välillä $[0, 1]$ ja saavuttaa siten pienimmän arvonsa. Todellisuudessa aallot voivat taittua ja heijastua erilaisissa rajapinnoissa, jolloin nopeus voi muuttua epäjatkuvasti. Lisäksi Maan sisärakenteessa voi esiintyä anisotropioita nopeusfunktion näkökulmasta ja esimerkiksi poikittaiset aallot eivät voi edetä nestemäisessä ulkoytimessä. Näihin monimutkaisuuksiin ei tässä tutkielmassa kuitenkaan paneuduta.

Aallon matka-aika T voidaan lausua integraalina

$$T = \int \mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{v(r)} ,$$

missä integraali suoritetaan aallon kulkeman polun γ yli. Parametrisoimalla polku jollain parametrilla λ saadaan

$$T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\|\dot{\gamma}(\lambda)\|}{v(r(\lambda))} \mathrm{d}\lambda ,$$

missä $\|\dot{\gamma}(\lambda)\|$ on polun derivaatan euklidinen normi ja $[\lambda_1, \lambda_2]$ polun määrittelyväli. Riemannin geometrian termein $\|\dot{\gamma}(\lambda)\| = \sqrt{g_E(\dot{\gamma}(\lambda),\dot{\gamma}(\lambda))}$, kun $g_E = \sum_i (\mathrm{d}x^i)^2$ on tavallinen euklidinen metriikka. Määritellään konforminen metriikka $\tilde{g}$ lausekkeella

$$\tilde{g} = \frac{g_E}{v^2(r)} = \frac{\sum_i (\mathrm{d}x^i)^2}{v^2(r)} . \tag{4}$$

Jotta $\tilde{g}_{ij}$ olisi $C^{1,1}$-funktio ja ylipäätään derivoituva myös origossa, täytyy asettaa lisävaatimus $v'(0) = 0$ nopeusfunktiolle. Matka-aika T on nyt polun γ pituus metriikan $\tilde{g}$ suhteen

$$T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\tilde{g}(\dot{\gamma}(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda))} \mathrm{d}\lambda = L_{\tilde{g}}(\gamma) . \tag{5}$$

Määrittelemällä taitekerroin $n(r) = 1/v(r)$ konformaalinen metriikka on muotoa $\tilde{g} = n^2(r) \sum_i (\mathrm{d}x^i)^2$. Aallon voi siten ajatella kulkevan väliaineessa, jonka taitekerroin on paikan funktio. Fermat'n periaatteen nojalla aalto kulkee sellaista reittiä, jolla matka-aika on stationaarinen eli polku on pituusfunktionaalin (5) kriittinen piste. Kuitenkin Riemannin geometriasta tiedetään, että vakiovauhtinen polku, joka on pituusfunktionaalin T kriittinen piste, on väistämättä geodeesi. Koska säännöllinen polku voidaan aina parametrisoida kaarenpituudellaan ja uudelleenparametrisointi ei muuta polun pituutta, Fermat'n periaate takaa, että aaltorintamat kulkevat geodeeseja pitkin.

Lopuksi voidaan muotoilla täsmällisesti varsinainen inversio-ongelma. Jos tiedetään matka-aika T kaikille maanjäristysaalloille, joiden päätepisteet ovat reunalla $S^2(0,1)$, voidaanko rekonstruoida äänennopeus sisuksessa $B^3(0,1)$? Toisin sanoen, määräytyykö funktio $1/v(r)$ integraaleistaan kaikkien geodeesien yli? Ongelma on epälineaarinen, sillä geodeesit riippuvat funktiosta $v(r)$. Osoittautuu, että riittää olettaa Herglotz-ehdon (15) lisäksi sekä matka-aikojen tunteminen kaikille saapumiskulmille että reunanopeus $v(1)$, jotta funktio $v(r)$ pystytään konstruoimaan datasta. Ennen tämän tuloksen todistamista täytyy tutkia, miltä geodeesit näyttävät ja minkälaiset geodeesit kelpaavat ratkaisuiksi inversio-ongelman kannalta.

3 Geodeesit ja Herglotz-ehto

Koska tässä kappaleessa tarkastelut rajoittuvat euklidisiin avaruuksiin $\mathbb{R}^3$ ja $\mathbb{R}^2$, merkitään koordinaatteja tutummalla tavalla $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Aloitetaan geodeesien tutkiminen pallon $\bar{B}^3(0,1)$ tapauksessa, kun se varustetaan metriikalla

$$\tilde{g} = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{v^2(r)} \,. \tag{6}$$

Tehdään sitä ennen seuraava huomio.

Huomautus 3.1. Yleensä Riemannin geometriassa tarkastellaan vain reunattomia monistoja. Tässä tutkielmassa kiinnostuksen kohteena ovat reunalliset monistot $\bar{B}^3(0,1)$ ja $\bar{B}^2(0,1)$. Näille monistoille voi kuitenkin tarvittaessa tehdä ϵ-mittaisen laajennuksen ajattelemalla niitä $(1+\epsilon)$-säteisen avoimen pallon osajoukkoina $\bar{B}^n(0,1) \subset B^n(0, 1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$. Tällöin reunapisteet muuttuvat sisäpisteiksi ja geometriset tarkastelut onnistuvat "perinteisin" menetelmin laajennetulla monistolla $B^n(0, 1+\epsilon)$.

3.1 Geodeesit pallossa $\bar{B}^3(0,1)$

Osoitetaan symmetriasyihin ja geodeesien yksikäsitteisyyteen vedoten, että pallon $\bar{B}^3(0,1)$ ei-säteittäiset geodeesit sisältyvät yksikäsitteiseen tasoon, jonka määräävät geodeesin paikka- ja nopeusvektori. Tämän vuoksi tarkastelun voi aina siirtää kiekkoon $\bar{B}^2(0,1)$ yleisyyttä menettämättä. Muistetaan, että huomautuksen 2.16 nojalla rotaatiot ja peilaukset origon kautta kulkevan tason tai suoran suhteen ovat isometrioita. Näytetään ensin, että radiaaliset polut ovat geodeeseja.

Propositio 3.2. *Radiaalinen polku on geodeesi pallossa $\bar{B}^3(0,1)$.*

Todistus. Olkoon $p \in \bar{B}^3(0,1)$ ja $v \in T_p\bar{B}^3(0,1)$ siten, että liike on radiaalista. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla on olemassa geodeesi γ, joka kulkee pisteen p kautta suuntaan v. Olkoon S_v vektorin v määräämä suora. Tehdään kierto suoran S_v suhteen. Koska rotaatiot ovat isometrioita, kuvautuu geodeesi γ geodeesiksi η. Piste p ja vektori v eivät muutu kierrossa, joten yksikäsitteisyyden nojalla geodeesien täytyy olla samat $\gamma = \eta$. Siis γ on invariantti kierrossa S_v:n suhteen ja on siten radiaalinen. □

Lemma 3.3. *Pallon $\bar{B}^3(0,1)$ ei-radiaalinen geodeesi sisältyy aina yksikäsitteiseen tasoon.*

Todistus. Olkoon γ geodeesi, joka kulkee pisteen $p \in \bar{B}^3(0,1)$ kautta suuntaan $v \in T_p\bar{B}^3(0,1)$. Koska geodeesi ei ole radiaalinen, vektorit p ja v ovat lineaarisesti riippumattomat ja määräävät siten tason $T_{p,v}$. Peilataan geodeesi γ tason $T_{p,v}$ suhteen. Koska peilaukset origon kautta kulkevien tasojen suhteen ovat isometrioita, kuvautuu geodeesi γ geodeesiksi η. Piste p ja vektori v säilyvät peilauksessa ennallaan, joten yksikäsitteisyyden nojalla täytyy olla $\gamma = \eta$. Siis γ sisältyy tasoon $T_{p,v}$, jonka määräävät sen paikka- ja nopeusvektori. □

Huomautus 3.4. Edelliset tulokset eivät riippuneet millään tavalla siitä, että avaruus on kolmiulotteinen. Jos alkuperäinen monisto on n-ulotteinen pallo

$\bar{B}^n(0,1)$, $n \geq 3$, sisältyvät geodeesit yhä origon kautta kulkevaan tasoon ja tilanne palautuu kiekon $\bar{B}^2(0,1)$ tapaukseen. Tämän vuoksi tutkielman päätulos pätee myös yleisessä n-ulotteisessa tilanteessa.

3.2 Geodeesit kiekossa $\bar{B}^2(0,1)$

Koska geodeesit sisältyvät origon kautta kulkevaan tasoon, kiertosymmetrian vuoksi riittää tarkastella tapausta $z = 0$. Tällöin $\tilde{g}$ indusoi kiekkoon $\bar{B}^2(0,1)$ metriikan g, joka napakoordinaateissa lausuttuna on

$$g = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{v^2(r)} = \frac{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}{v^2(r)} \,. \tag{7}$$

Napakoordinaattien käyttö yksinkertaistaa geometrista käsittelyä huomattavasti, mutta sulkee origon pois tarkasteluista. Jatkossa täytyy siis muistaa, että $r > 0$.

Lemma 3.5. *Metriikkaa* (7) *vastaavat geodeesiyhtälöt ovat*

$$\ddot{r} - \frac{v'(r)}{v(r)}\dot{r}^2 + \left(r^2\frac{v'(r)}{v(r)} - r\right)\dot{\theta}^2 = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{\theta} + 2\left(\frac{1}{r} - \frac{v'(r)}{v(r)}\right)\dot{r}\dot{\theta} = 0 \,. \tag{9}$$

Todistus. Tähän tarvitsee käytännössä laskea vain Christoffelin symbolit Γ^i_{jk}. Metriikkaa (7) vastaava matriisi ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2(r)} & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{v^2(r)} \end{bmatrix} \,, \quad \mathrm{Mat}(g)^{-1} = \begin{bmatrix} v^2(r) & 0 \\ 0 & \frac{v^2(r)}{r^2} \end{bmatrix} \,,$$

kun koordinaattien järjestys on $(x^1, x^2) = (r, \theta)$. Käyttämällä lauseketta (1) Christoffelin symbolit ovat

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{v'(r)}{v(r)} \,, \quad \Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = 0 \,, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{r^2 v'(r) - r v(r)}{v(r)} \,,$$

$$\Gamma^\theta_{rr} = 0 \,, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{v(r) - r v'(r)}{r v(r)} \,, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \,.$$

Geodeesiyhtälöt saadaan sijoittamalla nämä lausekkeeseen (3). □

Huomataan, että yhtälöt (8)–(9) on hyvin määritelty, sillä oletusten nojalla $v(r) > 0$ ja $r > 0$. Geodeesiyhtälöistä ja geodeesien ominaisuuksista saadaan kaksi tärkeää säilyvää suuretta, joita käytetään jatkossa hyödyksi monissa todistuksissa.

Propositio 3.6. *Geodeesin liike-energia*

$$E = \frac{\dot{r}^2}{v^2(r)} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{v^2(r)} \tag{10}$$

on vakio. Erityisesti, jos geodeesi parametrisoidaan kaarenpituudellaan, $E = 1$.

Todistus. Merkitään $\gamma(\lambda) = (r(\lambda), \theta(\lambda))$. Tulos seuraa suoraan siitä, että geodeesin nopeuden neliö

$$g(\dot\gamma, \dot\gamma) = \sum_{i,j} g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = \frac{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2}{v^2(r)}$$

on vakio. Kaarenpituusparametrisoinnissa $\|\dot\gamma\|^2 = g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$. $\square$

Huomautus 3.7. Lauseketta (10) voi ajatella pistemäisen hiukkasen normitettuna liike-energiana. Jos γ ei ole vakiopolku, voidaan se aina parametrisoida kaarenpituudella, sillä nopeus $\dot\gamma$ ei ole koskaan nolla. Itse asiassa kaarenpituusparametri on nyt aika $t \in [0, T]$, joka on kulunut aallon lähdettyä reunalta. Jatkossa kaikkien geodeesien oletetaan parametrisoiduiksi kaarenpituudellaan eli $\gamma = \gamma(t)$.

Yhtälöstä (9) saadaan toinen tärkeä säilyvä suure.

Propositio 3.8. *Geodeesin pyörimismäärä*

$$L = \frac{r^2\dot\theta}{v^2(r)} \tag{11}$$

on vakio.

Todistus. Kerrotaan yhtälöä (9) termillä $v^2(r)r^2/v^4(r) > 0$, jolloin

$$\frac{v^2(r)(2r\dot r\dot\theta + r^2\ddot\theta) - 2v(r)v'(r)\dot r r^2\dot\theta}{v^4(r)} = 0\,.$$

Tästä saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r^2}{v^2(r)}\dot\theta\right) = 0\,.$$

$\square$

Huomautus 3.9. Lausekkeen (11) voi tulkita pistemäisen yksikkömassaisen hiukkasen pyörimismääräksi origon suhteen. Fysikaalisen intuition ja Noetherin teoreeman perusteella pyörimismäärän säilyminen on odotettavissa, sillä systeemissä on kiertosymmetria.

Vertailun vuoksi esitetään geodeesiyhtälöt vielä karteesisissa koordinaateissa.

Propositio 3.10. *Geodeesiyhtälöt ovat karteesisissa koordinaateissa*

$$\ddot x - \frac{v'(r)}{rv(r)}x\dot x^2 - 2\frac{v'(r)}{rv(r)}y\dot x\dot y + \frac{v'(r)}{rv(r)}x\dot y^2 = 0 \tag{12}$$

$$\ddot y + \frac{v'(r)}{rv(r)}y\dot x^2 - 2\frac{v'(r)}{rv(r)}x\dot x\dot y - \frac{v'(r)}{rv(r)}y\dot y^2 = 0\,. \tag{13}$$

Todistus. Suoraviivaisen laskun jälkeen Christoffelin symboleiksi tulee

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= -\frac{v'(r)}{rv(r)}x = -\Gamma^1_{22}\,, \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} &= -\frac{v'(r)}{rv(r)}y = -\Gamma^2_{11}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Symboleissa on nähtävissä nyt selvä symmetria. Geodeesiyhtälöt saadaan sijoittamalla nämä lausekkeeseen (3). $\square$

Napakoordinaattien hyödyllisyys geometrisessa mielessä nähdään vertaamalla geodeesiyhtälöitä (8)–(9) ja (12)–(13). Yhtälöistä (12)–(13) on vaikea päätellä, millä ehdoilla esimerkiksi ympyrä $r = r_0$ tai puolisuora $\theta = \theta_0$ olisivat geodeeseja.

3.3 Herglotz-ehto

Minkälaiset ratkaisut toteuttavat geodeesiyhtälöt (8)–(9)? Taustalla olevan symmetrian vuoksi voisi odottaa, että esimerkiksi ympyrät tai radiaaliset suorat olisivat geodeeseja. Ovatko nämä inversio-ongelman kannalta järkeviä ratkaisuja? Ainakaan ympyrät eivät sovi lähtöasetelmaan, sillä aalto jäisi kiertämään maapalloa ja ei siten saavuttaisi koskaan pintaa. Ongelman ratkeavuuden kannalta haluttaisiin, että geodeesi, jota pitkin aalto kulkee, yhdistäisi kaksi pinnan pistettä toisiinsa, jotta mittauksia voitaisiin tehdä. Edellisen motivoimina geodeeseille halutaan asettaa jokin rajoite. Tässä työssä rajoitteena käytetään ns. Herglotz-ehtoa.

Määritelmä 3.11. Herglotz-ehdolla tarkoitetaan rajoitetta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0 \quad \forall r \in [0,1] \tag{15}$$

funktiolle $v(r)$. Ehto voidaan lausua myös muodossa

$$v(r) - rv'(r) > 0 \quad \forall r \in [0,1]\ . \tag{16}$$

Herglotz-ehdolla on itse asiassa kolme ekvivalenttia määritelmää, kuten Lauseessa 3.28 nähdään.

Huomautus 3.12. Ehdossa (15) tapaus $r = 0$ pätee triviaalisti, sillä se antaa vain rajoitteen $1/v(0) > 0$. Koska Herglotz-ehdon derivaatta on jatkuva, saavuttaa se pienimmän arvonsa kompaktilla välillä $[0,1]$ ja on siten alhaalta rajoitettu jollain positiivisella vakiolla

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) \geq \min_{r\in[0,1]} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0\ .$$

Tarkastellaan seuraavaksi motivaatiota Herglotz-ehdolle. Mitä tapahtuu, jos derivaatta olisikin nolla tai negatiivinen?

Propositio 3.13. *Ympyrä $r = r_0$ on geodeesi jos ja vain jos $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} = 0$.*

Todistus. Tarkastellaan geodeesiyhtälöitä (8)–(9). Ympyrä $r = r_0$ on geodeesi jos ja vain jos

$$\begin{aligned}\left(r_0^2\frac{v'(r_0)}{v(r_0)} - r_0\right)\dot{\theta}^2 &= 0\\ \ddot{\theta} &= 0\ .\end{aligned}$$

Jälkimmäisen yhtälön nojalla $\theta(t) = at + b$. Siis $\dot{\theta} = a =$ vakio, joten $\dot{\theta} \neq 0$, sillä muuten kyseessä olisi vakiopolku. Nähdään, että

$$r = r_0 \text{ on geodeesi} \Leftrightarrow \left(r_0^2\frac{v'(r_0)}{v(r_0)} - r_0\right) = 0 \Leftrightarrow v(r_0) - r_0v'(r_0) = 0. \qquad \square$$

Herglotz-ehto (16) sulkee siten ympyrät pois mahdollisten geodeesien joukosta. Tutkitaan seuraavaksi, mitä tapahtuu, jos Herglotz-ehdon derivaatta olisi kaikkialla nolla.

Propositio 3.14. *Jos* $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right) = 0$ *kaikilla* $r \in [0,1]$*, punkteerattu kiekko* $\bar{B}^2(0,1)\backslash\{0\}$ *ja puolisylinteri* $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0\}$ *ovat isometriset.*

Todistus. Ensinnäkin huomataan, että $r/v(r) =$ vakio eli $v(r) = \alpha r,\ \alpha > 0$. Geodeesiyhtälöt redusoituvat muotoon

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{\dot{r}^2}{r} &= 0 \\ \ddot{\theta} &= 0\ , \end{aligned}$$

joiden ratkaisuiksi on helppo todeta

$$\begin{aligned} r(t) &= be^{at} \\ \theta(t) &= ct + d\ . \end{aligned}$$

Ratkaisukäyriä ovat ympyrät, spiraalit ja radiaaliset puolisuorat. Nähdään, että geodeesit muistuttavat tässä tapauksessa hyvin paljon sylinterin pinnalla kulkevia geodeeseja $(z(t),\phi(t)) = (\tilde{a}t + \tilde{b}, \tilde{c}t + \tilde{d})$, kun S^+:lla käytetään sylinterikoordinaatteja

$$\begin{aligned} x &= \cos\phi \\ y &= \sin\phi \\ z &= z\ . \end{aligned}$$

Määritellään kuvaus $f : \bar{B}^2(0,1)\backslash\{0\} \to S^+$, $f(r,\theta) = \frac{1}{\alpha}(-\log r, \theta)$, jonka käänteiskuvaus on $f^{-1} : S^+ \to \bar{B}^2(0,1)\backslash\{0\}$, $f^{-1}(z,\phi) = \alpha(e^{-z},\phi)$. Selvästi f on diffeomorfismi. Todetaan, että

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{d}f) = \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}f(u) = \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{u_r}{r}, u_\theta\right).$$

Metriikka, jonka S^+ perii ympäröivältä avaruudelta $\mathbb{R}^3$, on $h = \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}\phi^2$. Nyt

$$\begin{aligned} h(\mathrm{d}f(u),\mathrm{d}f(v))|_{f(r,\theta)} &= \frac{u_r v_r}{\alpha^2 r^2} + \frac{u_\theta v_\theta}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2 r^2}(u_r v_r + r^2 u_\theta v_\theta) \\ &= \frac{1}{v^2(r)}(u_r v_r + r^2 u_\theta v_\theta) = g(u,v)|_{(r,\theta)}\ . \end{aligned}$$

Tällöin f on isometria, joten $(\bar{B}^2(0,1)\backslash\{0\}, g)$ ja (S^+, h) ovat isometriset Riemannin monistot. □

Jos siis Herglotz-ehdon derivaatta on kaikkialla nolla, tarkasteltava monisto on geometriselta rakenteeltaan identtinen sylinterin kanssa. Seuraavaksi nähdään, että jos Herglotz-ehto ei ole voimassa, monistolla on aina geodeeseja, jotka eivät pääse reunalle asti.

Propositio 3.15. *Olkoon $r_0 < 1$. Jos geodeesi kulkee hetkellä t_0 pisteen (r_0, θ_0) kautta sädettä kohtisuoraan suuntaan $\dot{r}(t_0) = 0$ ja $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} \leq 0$, niin geodeesi ei koskaan saavuta reunaa.*

Todistus. Jos $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} = 0$, propositio 3.13:n ja geodeesien yksikäsitteisyyden nojalla kyseessä on ympyrä $r = r_0$, joten geodeesi ei saavuta koskaan reunaa. Voidaan siis olettaa, että epäyhtälö on aito. Merkitään $\rho(r) = r/v(r)$. Tarkastellaan geodeesia, joka kulkee hetkellä t_0 pisteen (r_0, θ_0) kautta siten, että $\dot{r}(t_0) = 0$. Olkoon $t_1 \neq t_0$ hetki, jolloin geodeesi on pisteessä (r_1, θ_1). Pyörimismäärän (11) säilymisen perusteella

$$\rho^2(r_0)\dot{\theta}(t_0) = \rho^2(r_1)\dot{\theta}(t_1)$$

ja liike-energian (10) säilymisen nojalla

$$\rho^2(r_0)\dot{\theta}^2(t_0) = 1\,, \quad \rho^2(r_1)\dot{\theta}^2(t_1) = 1 - \frac{\dot{r}^2(t_1)}{v^2(r_1)} \leq 1\,.$$

Näistä saadaan

$$\begin{aligned} \rho^2(r_0)\big(\rho^2(r_0)\dot{\theta}^2(t_0)\big) &= \rho^2(r_1)\big(\rho^2(r_1)\dot{\theta}^2(t_1)\big) \\ &\Rightarrow \rho(r_0) \leq \rho(r_1)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Koska $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\big|_{r=r_0} < 0$ ja ρ' on jatkuva, ρ on aidosti vähenevä jossain annuluksessa $]r_0 - \delta, r_0 + \delta[$. Tästä seuraa, että geodeesi jää loukkuun kiekkoon $\bar{B}^2(0, r_0)$. Jos olisi $t_1 > t_0$ siten, että $r_0 + \delta > r_1 > r_0$, niin pitäisi olla $\rho(r_1) \geq \rho(r_0)$, mikä ei voi pitää paikkansa, sillä ρ on aidosti vähenevä. Siispä $r_1 \leq r_0$. Vastaava päättely pätee myös ajanhetkille $t_1 < t_0$. □

Huomautus 3.16. Edellisen proposition nojalla Herglotz-ehto on välttämätön, jotta kaikki geodeesit saapuvat pinnalle asti. Lauseessa 3.21 nähdään, että ehto on myös riittävä.

Tehdään seuraava geometrinen havainto koskien Herglotz-ehdon derivaatan merkkiä.

Propositio 3.17. *Olkoon $r_0 < 1$ ja γ geodeesi, joka kulkee hetkellä t_0 pisteen (r_0, θ_0) kautta siten, että $\dot{r}(t_0) = 0$. Tällöin:*

1. *Jos $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} > 0$, niin γ kaartuu ulospäin ympyrään $r = r_0$ nähden.*
2. *Jos $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} < 0$, niin γ kaartuu sisäänpäin ympyrään $r = r_0$ nähden.*
3. *Jos $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Big|_{r=r_0} = 0$, niin γ parametrisoi ympyrän $r = r_0$.*

Todistus. Tapaus 3 on selvä proposition 3.13 ja yksikäsitteisyyden nojalla. Koska $\dot{r}(t_0) = 0$, liike-energian säilymisestä seuraa $\dot{\theta}(t_0) \neq 0$. Geodeesiyhtälön (8) nojalla hetkellä t_0 pätee

$$\ddot{r}(t_0) = \frac{r_0(v(r_0) - r_0 v'(r_0))}{v(r_0)}\dot{\theta}^2(t_0) = r_0 v(r_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\Bigg|_{r=r_0}\dot{\theta}^2(t_0)\,.$$

Herglotz-ehdon derivaatan merkistä riippuen kyseessä on joko lokaali maksimi tai minimi. Jos derivaatta on positiivinen, kyseessä on minimi ja geodeesi kaartuu ulospäin. Jos derivaatta on negatiivinen, kyseessä on maksimi ja geodeesi kaartuu sisäänpäin. $\square$

Huomautus 3.18. Propositio 3.17 pätee myös tapauksessa $r_0 = 1$, kun kiekolle $\bar{B}^2(0,1)$ tehdään ϵ-laajennus $\bar{B}^2(0,1) \subset B^2(0,1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$, jolloin ulospäin kaartuminen pisteessä (r_0, θ_0) on hyvin määritelty.

Tarkastellaan lopuksi radiaalisia geodeeseja. Tässä täytyy olla tarkkana, sillä napakoordinaatteja ei ole määritelty origossa.

Propositio 3.19. *Radiaaliset suorat* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx,\ k \in \mathbb{R}\}$ *ja* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ *ovat geodeeseja kiekossa* $\bar{B}^2(0,1)$ *ja yhdistävät reunan* $S(0,1)$ *antipodaaliset pisteet äärellisessä ajassa.*

Todistus. Huomataan aluksi, että puolisuora $\theta = \theta_0$ on geodeesi jos ja vain jos

$$\ddot{r} - \frac{v'(r)}{v(r)}\dot{r}^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{v(r)\ddot{r} - v'(r)\dot{r}^2}{v^2(r)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{r}}{v(r)}\right) = 0\,.$$

Siis $\dot{r} = dv(r)$, missä $d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Koska $v(r) \geq c > 0$, vakion d merkistä riippuen $\dot{r} \geq a > 0$ tai $\dot{r} \leq b < 0$ joillekin vakioille $a > 0$ ja $b < 0$. Tällöin geodeesin toinen pää lähestyy kiekon reunaa ja toinen pää origoa äärellisessä ajassa. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta tiedetään, että origon kautta kulkee suuntaan $\theta = \theta_0$ jokin geodeesi γ, joka on määritelty avoimella välillä. Tähän tarvitaan edellisessä kappaleessa esitettyä lisäehtoa $v'(0) = 0$, jotta g_{ij} on Lipschitz-jatkuvasti derivoituva myös origon ympäristössä. Peilaukset origon kautta kulkevien suorien suhteen ovat isometrioita, joten γ:n täytyy olla radiaalinen koko määrittelyvälillään. Koska puolisuorat $\theta_1(t) = \theta_0$ ja $\theta_2(t) = \pi + \theta_0$ pääsevät mielivaltaisen lähelle origoa, leikkaavat ne radiaalisen geodeesin γ kanssa. Yksikäsitteisyyden perusteella niiden täytyy olla yksi ja sama geodeesi, joten jokainen puolisuora voidaan jatkaa origon läpi kulkevaksi radiaaliseksi suoraksi. Kyseiset geodeesit yhdistävät kiekon antipodaaliset pisteet äärellisessä ajassa. $\square$

Huomautus 3.20. Herglotz-ehto (15) ei ole ristiriidassa radiaalisten geodeesien olemassaolon kanssa. Radiaaliset geodeesit täytyy siten erikseen sulkea pois tarkastelusta, jos niitä ei haluta ratkaisuiksi.

Propositiossa 3.15 nähtiin selkeä yhteys Herglotz-ehdon derivaatan merkin ja geodeesin loukkuun jäämisen välillä. Jos derivaatta on nolla tai negatiivinen jossain pisteessä, monistolla on geodeeseja, jotka jäävät loukkuun. Jos derivaatta kuitenkin on positiivinen kaikkialla, saavuttaa geodeesi aina reunan. Osoitetaan tämä seuraavaksi.

3.4 Loukuton monisto

Ongelman kannalta olisi suotavaa, että kiekon $\bar{B}^2(0,1)$ mielivaltaisen pisteen kautta kulkeva geodeesi saapuisi reunalle asti, kun aikaparametria t kasvatetaan tai vähennetään tarpeeksi. Tällöin maanjäristysaalto ei jäisi loukkuun Maan sisälle. Matemaattisesti muotoiltuna halutaan, että matka-aika T on äärellinen eli geodeesin maksimaalinen määrittelyväli kaarenpituusparametrisoinnissa on rajoitettu. Seuraavaksi nähdään, että Herglotz-ehdosta seuraa, että geodeesilla on yksikäsitteinen origoa lähinnä oleva piste. Toisin sanoen $\dot{r}$:llä on täsmälleen yksi nollakohta, joka on r:n minimi. Tämä riittää siihen, että yksikään geodeesi ei jää loukkuun kiekkoon.

Lause 3.21. *Jos Herglotz-ehto* (15) *on voimassa, jokaisella geodeesilla on yksikäsitteinen origoa lähinnä oleva piste ja kaikki geodeesit saavuttavat reunan äärellisessä ajassa.*

Todistus. Proposition 3.19 nojalla radiaaliset suorat saavuttavat reunan äärellisessä ajassa ja kulkevat origon kautta. Oletetaan, että kyseessä ei ole radiaalinen geodeesi. Tällöin $\dot{\theta}(t) \neq 0$ kaikilla t ja erityisesti $L \neq 0$. Jos olisi $\hat{t}$ siten, että $\dot{\theta}(\hat{t}) = 0$, niin pyörimismäärän säilymisen nojalla $\dot{\theta}(t) = 0$ kaikilla t ja geodeesi olisi radiaalinen. Huomataan, että kaikki derivaatan $\dot{r}(t)$ nollakohdat ovat minimejä, sillä geodeesiyhtälön (8) ja Herglotz-ehdon (16) nojalla

$$\ddot{r} = \frac{v'(r)}{v(r)}\dot{r}^2 + \frac{r(v(r) - rv'(r))}{v(r)}\dot{\theta}^2 = \frac{r(v(r) - rv'(r))}{v(r)}\dot{\theta}^2 > 0 \text{ , kun } \dot{r} = 0 \text{ .}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $\dot{r}$:llä on täsmälleen yksi nollakohta. Olkoon p piste, jossa pätee $\dot{r} = 0$. Käyttämällä pyörimismäärän ja liike-energian säilymistä saadaan

$$L = \frac{r_p^2\dot{\theta}_p}{v^2(r_p)} = \frac{1}{\dot{\theta}_p} \Leftrightarrow \frac{r_p}{v(r_p)} = |L| \text{ .}$$

Olkoot sitten $p_1 = (r_1, \theta_1)$ ja $p_2 = (r_2, \theta_2)$ eri pisteitä, joissa molemmissa pätee $\dot{r} = 0$. Edellisen laskun perusteella $r_1/v(r_1) = r_2/v(r_2)$. Herglotz-ehdosta seuraa, että $r/v(r)$ on aidosti kasvava, minkä nojalla $r_1 = r_2$. Jos $\theta_1 \neq \theta_2$, niin r:llä olisi kaksi eri minimiä, joten niiden välissä täytyisi olla maksimi. Tämä ei ole mahdollista, sillä kaikki kriittiset pisteet ovat minimejä. Siis $\theta_1 = \theta_2$ ja $p_1 = p_2$ eli $\dot{r}$:llä on korkeintaan yksi nollakohta. Jos $\dot{r}$:llä ei olisi yhtään nollakohtaa, niin Bolzanon lauseen nojalla $\dot{r}(t) < 0$ tai $\dot{r}(t) > 0$ kaikilla t. Riittää tarkastella tapausta $\dot{r} < 0$. Pyörimismäärän säilymisen perusteella

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v^4(r)}{r^4}L^2 \Rightarrow E = \frac{\dot{r}^2}{v^2(r)} + \frac{v^2(r)L^2}{r^2} = 1 \text{ .}$$

Energian säilymisestä seuraa, että r on alhaalta rajoitettu jollain positiivisella vakiolla

$$0 \leq \frac{\dot{r}^2}{v^2(r)} = 1 - \frac{v^2(r)L^2}{r^2} \Rightarrow r \geq v(r)|L| \geq \tilde{c} > 0 \text{ .}$$

Olkoon γ geodeesi, joka kulkee hetkellä $\tilde{t}$ pisteen $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ kautta, ja olkoon $]t_1, t_2[\ni \tilde{t}$ sen maksimaalinen määrittelyväli. Koska $\dot{r} < 0$, geodeesi pysyy kompaktissa joukossa $\bar{B}^2(0, \tilde{r}) \backslash B^2(0, \tilde{c})$ kaikilla ajanhetkillä $t_2 > t > \tilde{t}$. Proposition 2.12 nojalla täytyy olla $t_2 = \infty$. Koska r on alhaalta rajoitettu ja derivaatta negatiivinen, lähestyy r jotain positiivista arvoa $\lim_{t\to\infty} r(t) = a > 0$. Energian säilymislain nojalla myös derivaatalla on raja-arvo, joten täytyy päteä $\lim_{t\to\infty} \dot{r}(t) = 0$. Tällöin $a = v(a)|L|$ ja $\dot{\theta}^2 \to v^2(a)/a^2 > 0$. Geodeesiyhtälön (8) perusteella $\ddot{r}$:llä on olemassa raja-arvo $\lim_{t\to\infty} \ddot{r}(t) \in \mathbb{R}$. Koska myös

$\lim_{t\to\infty} \dot{r}(t)$ on olemassa, täytyy olla $\ddot{r} \to 0$. Tämä on kuitenkin vastoin Herglotz-ehtoa, sillä

$$\ddot{r} \to \frac{a(v(a) - av'(a))}{v(a)} \frac{v^2(a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right)\bigg|_{r=a} = 0\,.$$

Vastaava päättely pätee myös tapauksessa $\dot{r} > 0$ tarkastelemalla raja-arvoa $\lim_{t\to-\infty} r(t)$. Siispä $\dot{r}$:llä on täsmälleen yksi nollakohta, joka on r:n minimi.

Huomataan, että kulmanopeudelle pätee $\dot{\theta}^2 = (v^2(r)/r^2)^2 L^2 \geq c^4 L^2 = b > 0$ jollakin positiivisella vakiolla $b > 0$. Geodeesiyhtälön (8) ja Herglotz-ehdon avulla saadaan

$$v(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{r}}{v(r)}\right) = \ddot{r} - \frac{v'(r)}{v(r)}\dot{r}^2 = \frac{r(v(r) - rv'(r))}{v(r)}\dot{\theta}^2 \geq \alpha > 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{r}}{v(r)}\right) \geq \beta > 0$$

joillekin positiivisille vakioille $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Huomaa, että v on kompaktilla välillä $[0,1]$ jatkuva funktio ja siten rajoitettu, joten $1/v(r) \geq d > 0$ jollekin positiiviselle vakiolle $d > 0$. Olkoon t_0 ajanhetki, jolle $\dot{r}(t_0) = 0$. Analyysin peruslauseesta seuraa

$$\frac{\dot{r}(t)}{v(r(t))} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\dot{r}(s)}{v(r(s))}\right)\mathrm{d}s \geq \int_{t_0}^{t} \beta \mathrm{d}s = \beta(t - t_0)$$
$$\Rightarrow \dot{r}(t) \geq v(r(t))\beta(t - t_0) \geq \delta(t - t_0)$$

jollekin positiiviselle vakiolle $\delta > 0$. Jälleen analyysin peruslausetta käyttämällä

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{r}(s)\mathrm{d}s \geq r(t_0) + \frac{\delta}{2}(t - t_0)^2 = 1\,,\ \text{kun } t = t_0 \pm \sqrt{\frac{2}{\delta}(1 - r(t_0))}.$$

Geodeesi saavuttaa siten reunan molemmissa päätepisteissä äärellisessä ajassa. □

Huomautus 3.22. Englanninkielisessä kirjallisuudessa usein sanotaan, että monisto on loukuton (non-trapping), jos kaikki geodeesit saavuttavat reunan äärellisessä ajassa. Lauseen 3.21 nojalla Herglotz-ehdosta seuraa, että $\bar{B}^2(0,1)$ on loukuton. Proposition 3.15 nojalla loukuttomuudesta seuraa, että Herglotz-ehdon täytyy päteä kaikilla $r \in [0,1[$. Jotta ehto pätisi myös tapauksessa $r = 1$, täytyy loukuttomuuden lisäksi olettaa, että reuna $\partial\bar{B}^2(0,1)$ on aidosti konveksi (ks. lause 3.28). Pelkkä loukuttomuus ei yleisessä tapauksessa takaa vielä sitä, että Herglotz-ehto olisi voimassa reunalla (ks. huomautus 3.29).

Geodeesit, joilla on yksikäsitteinen origoa lähinnä oleva piste, ovat väistämättä symmetrisiä tietyssä mielessä. Radiaalisille geodeeseille tämä on selvää, sillä ne ovat symmetrisiä peilauksessa origon suhteen.

Lemma 3.23. *Jos ei-radiaalisella geodeesilla γ on yksikäsitteinen origoa lähinnä oleva piste p, niin γ on symmetrinen peilauksessa origon ja pisteen p välisen suoran suhteen.*

Todistus. Muodostetaan suora origon ja geodeesin γ origoa lähimmän pisteen p välille. Kiertosymmetrian nojalla piste p voidaan valita siten, että $p = (r_0, 0)$. Koska peilaus x-akselin suhteen $(r, \theta) \to (r, -\theta)$ on isometria, kuvaa se geodeesin γ geodeesiksi η. Muistetaan, että origoa lähin piste on r:n minimi eli $\dot{r}_p = 0$. Nyt peilaus säilyttää pisteen p ennallaan ja kuvaa γ:n tangenttivektorin $v = (\dot{r}_p, \dot{\theta}_p) = (0, \dot{\theta}_p) \in T_pM$ η:n tangenttivektoriksi $(0, -\dot{\theta}_p) = -v \in T_pM$. Geodeesien yksikäsitteisyyden nojalla täytyy kuitenkin olla $\eta(t) = \gamma(-t)$, joten η on vain uudelleenparametrisointi geodeesista γ. Siispä γ on symmetrinen peilauksessa origon ja pisteen p välisen suoran suhteen. □

Edellistä tulosta käytetään hyväksi kappaleessa 4, kun lasketaan geodeesien pituuksia. Symmetrian nojalla geodeesi koostuu kahdesta identtisestä osasta, joten riittää laskea vain toisen osan pituus.

3.5 Aidosti konveksit hyperpinnat

Osoittautuu, että on olemassa kolme ekvivalenttia karakterisaatiota Herglotz-ehdolle (15). Tämän todistamista varten tarvitaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.24. Hyperpinta $N \subset M$ on aidosti konveksi, jos reaalinen toinen perusmuoto on positiividefiniitti N:llä.

Huomautus 3.25. Reaalisella toisella perusmuodolla on erilaisia merkkikonventioita kirjallisuudessa. Tämä liittyy siihen, millä tavalla hyperpinta N suunnistetaan lokaalisti eli valitaanko käytettäväksi ulko- vai sisänormaalikenttä. Mielivaltaisella monistolla valinta ei ole itsestään selvä, mutta $\mathbb{R}^n$:ssä valinnan voi perustella geometriaan nojautuen.

Propositio 3.26. *Herglotz-ehto* (15) *on voimassa jos ja vain jos euklidiset ympyrät $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ ovat aidosti konvekseja kaikilla $r \in]0, 1]$, kun S_r suunnistetaan sisänormaalikentällä.*

Todistus. Tehdään vertailun vuoksi tarkastelu sekä napakoordinaateissa että karteesisissa koordinaateissa. Valitaan ensin karteesiset koordinaatit. Jokainen ympyräkehä S_r on kiekon $\bar{B}^2(0, 1)$ yksiulotteinen hyperpinta. Merkitään $M = \bar{B}^2(0, 1)$ ja $N = S_r$. Varustetaan N sisänormaalikentällä

$$n(x, y) = -\frac{v(r)}{r}(x, y) .$$

On helppo tarkistaa, että $g(n, n) = 1$ ja $g(X, n) = 0$ kaikilla $X \in \mathcal{X}(N)$. Olkoot $V, W \in \mathcal{X}(N)$ ja jatketaan ne sileästi moniston M vektorikentiksi. Muistetaan myös, että toinen perusmuoto ei riipu valituista jatkoista. Jaetaan $\nabla^M_V W$ tangentiaali- ja normaaliosaan $\nabla^M_V W = \tan \nabla^M_V W + \operatorname{nor} \nabla^M_V W$. Tällöin

$$g(\nabla^M_V W, n) = g(\operatorname{nor} \nabla^M_V W, n) = g(\mathrm{II}(V, W), n) ,$$

sillä g on lineaarinen ja $g(\tan \nabla^M_V W, n) = 0$. Merkitään $\tilde{n}(x, y) = (x, y)$. Tällöin

$$g(\nabla^M_V W, n) = g\left(\nabla^M_V W, -\frac{v(r)}{r}\tilde{n}\right) = -\frac{v(r)}{r} g(\nabla^M_V W, \tilde{n}) .$$

Metriikan ja kovariantin derivaatan yhteensopivuuden nojalla

$$g(\nabla^M_V W, \tilde{n}) = Vg(W, \tilde{n}) - g(W, \nabla^M_V \tilde{n}) = -g(W, \nabla^M_V \tilde{n}) ,$$

sillä $g(W, \tilde{n}) = 0$. Saatiin siis

$$g(\mathrm{II}(V, W), n) = g(\nabla^M_V W, n) = -\frac{v(r)}{r} g(\nabla^M_V W, \tilde{n}) = \frac{v(r)}{r} g(W, \nabla^M_V \tilde{n}) .$$

Käyttämällä Christoffelin symboleja (14) kovariantin derivaatan komponentit saadaan lausekkeesta (2). Ensimmäinen komponentti on

$$\begin{aligned}
(\nabla^M_V \tilde{n})^1 &= V^1 + \Gamma^1_{11} V^1 \tilde{n}^1 + \Gamma^1_{12} V^1 \tilde{n}^2 + \Gamma^1_{21} V^2 \tilde{n}^1 + \Gamma^1_{22} V^2 \tilde{n}^2 \\
&= V^1 - \frac{v'(r)}{rv(r)} V^1 x^2 - \frac{v'(r)}{rv(r)} V^1 y^2 - \frac{v'(r)}{rv(r)} V^2 xy + \frac{v'(r)}{rv(r)} V^2 xy \\
&= \frac{v(r) - rv'(r)}{v(r)} V^1 .
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla y-komponentti on

$$(\nabla^M_V \tilde{n})^2 = \frac{v(r) - rv'(r)}{v(r)} V^2 .$$

Reaalinen toinen perusmuoto on siten

$$\begin{aligned}
h(V, W) = g(\mathrm{II}(V, W), n) &= \frac{v(r)}{r} g(W, \nabla^M_V \tilde{n}) \\
&= \frac{v(r)}{r} \frac{1}{v^2(r)} (W^1 (\nabla^M_V \tilde{n})^1 + W^2 (\nabla^M_V \tilde{n})^2) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{r}{v(r)} \right) (V^1 W^1 + V^2 W^2) .
\end{aligned}$$

Nähdään, että $h(V, W)$ on positiividefiniitti jos ja vain jos Herglotz-ehto (15) on voimassa. Napakoordinaattien tapauksessa laskut yksinkertaistuvat huomattavasti. Sisänormaalikenttä on $n = -(v(r), 0)$ ja $\tilde{n} = (1, 0)$. Vektorikentillä V ja W ei ole nyt radiaalista osaa lainkaan, joten kovariantin derivaatan $\nabla^M_V \tilde{n}$ komponentit ovat

$$\begin{aligned}
(\nabla^M_V \tilde{n})^r &= \Gamma^r_{rr} V^r = 0 \\
(\nabla^M_V \tilde{n})^\theta &= \Gamma^\theta_{\theta r} V^\theta = \frac{v(r) - rv'(r)}{rv(r)} V^\theta .
\end{aligned}$$

Reaalinen toinen perusmuoto on siten

$$\begin{aligned}
h(V, W) &= g(\mathrm{II}(V, W), n) = v(r) g(W, \nabla^M_V \tilde{n}) \\
&= v(r) \frac{1}{v^2(r)} r^2 W^\theta (\nabla^M_V \tilde{n})^\theta = r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{r}{v(r)} \right) V^\theta W^\theta ,
\end{aligned}$$

joka on positiividefiniitti jos ja vain jos Herglotz-ehto on voimassa. □

Huomautus 3.27. Edellinen tulos kertoo, että Herglotz-ehdon ollessa voimassa punkteerattu kiekko $\bar{B}^2(0,1)\setminus\{0\}$ voidaan lausua erillisenä yhdisteenä aidosti konvekseista hyperpinnoista S_r. Tätä kutsutaan kirjallisuudessa usein foliaatioehdoksi. Aidolla konveksiudella on myös geometrinen tulkinta. Jos ympyrän S_r kaksi riittävän lähellä toisiaan olevaa pistettä yhdistää kiekon $\bar{B}^2(0,1)$ geodeesilla, pysyy geodeesi päätepisteitä lukuun ottamatta kokonaan kiekossa $B^2(0,r)$. Tämä seuraa suoraan siitä, että $\dot{r}$:llä on täsmälleen yksi nollakohta, joka on r:n minimi. Geodeesi kaartuu siis valitun normaalikentän osoittamaan suuntaan eli kulkee "sisäkautta" ympyrään S_r nähden.

Kootaan Herglotz-ehdon ekvivalentit muotoilut seuraavaksi lauseeksi.

Lause 3.28. *Olkoon $v \in C^{1,1}([0,1])$ funktio, jolle $v(r) > 0$ kaikilla $r \in [0,1]$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. $\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0$ *kaikilla* $r \in [0,1]$.
2. *Monisto $\bar{B}^2(0,1)$ on loukuton ja sen reuna $\partial\bar{B}^2(0,1)$ on aidosti konveksi.*
3. *Punkteerattu kiekko $\bar{B}^2(0,1)\setminus\{0\}$ voidaan lausua erillisenä yhdisteenä aidosti konvekseista hyperpinnoista $S_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2\}$, $r \in]0,1]$.*

Todistus. Seuraa suoraan propositiosta 3.15, lauseesta 3.21, propositiosta 3.26 ja siitä, että Herglotz-ehto toteutuu triviaalisti origossa. □

Huomautus 3.29. Pelkkä loukuttomuus ei riitä yleisessä tilanteessa. Olkoon $S^2_+(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ ylempi pallonkuori, jonka reuna on ekvaattori $S(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$. Euklidisessa tapauksessa pallonkuoren geodeesit ovat isoympyröitä, joten kaikki geodeesit saavuttavat reunan äärellisessä ajassa. $S^2_+(0,1)$ on siten loukuton reunallinen monisto, mutta Herglotz-ehto ei ole voimassa reunalla. Tämä johtuu siitä, että reuna $S(0,1)$ ei ole aidosti konveksi, sillä kahden reunapisteen välinen geodeesi kulkee kokonaan reunaa pitkin.

3.6 Vaihtoehtoiset koordinaatit

Herglotz-ehdon avulla voi myös määritellä vaihtoehtoiset koordinaatit, mutta tässä työssä näitä koordinaatteja ei käytetä. Merkitään $n(r) = 1/v(r)$ ja $\rho = r/v(r) = rn(r)$, jolloin ehdon (15) nojalla $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r > 0$ kaikilla $r \in]0,1]$. Käänteiskuvauslauseen mukaan ρ on tällöin diffeomorfismi eli $r = r(\rho)$. Nyt

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rn(r))\mathrm{d}r \Leftrightarrow \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}\rho}{(rn(r))'}$$

ja metriikka (7) muuttuu muotoon

$$g = w^2(\rho)\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2\,, \quad w(\rho) = \frac{n(r)}{(rn(r))'}\,. \tag{18}$$

Tässä kerroinfunktio $w(\rho)$ esiintyy vain termin $\mathrm{d}\rho^2$ edessä, joten konformisuus euklidisen metriikan kanssa ei ole itsestään selvää. Koordinaattia ρ voi ajatella redusoituna radiaalikoordinaattina.

Geodeesiyhtälöt (8)–(9) näyttävät nyt hieman yksinkertaisemmilta

$$\ddot{\rho} + \frac{w'(\rho)}{w(\rho)}\dot{\rho}^2 - \frac{\rho}{w^2(\rho)}\dot{\theta}^2 = 0 \tag{19}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta} = 0\ . \tag{20}$$

Suureita (10) ja (11) vastaavat säilymisyhtälöt ovat tässä tapauksessa

$$w^2(\rho)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 = 1\ . \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\theta}) = 0\ . \tag{22}$$

Etenkin yhtälöstä (22) näkee vielä selvemmin, että kyseessä on pyörimismäärän säilyminen, kun ρ tulkitaan etäisyydeksi origosta.

Huomautettakoon lopuksi, että ilman Herglotz-ehtoa vaihtoehtoisia koordinaatteja ei voi vastaavalla tavalla määritellä, sillä ρ ei välttämättä ole enää diffeomorfismi.

4 Inversiotulos

Tässä kappaleessa osoitetaan tutkielman päätulos, jonka mukaan äänennopeus $v(r)$ kiekossa $\bar{B}^2(0,1)$ määräytyy matka-aikamittauksista reunalla $S(0,1)$. Osa johdetuista tuloksista poikkeaa hieman lähteen [5] vastaavista tuloksista, sillä kyseisessä lähteessä on käytetty geodeesiyhtälöiden sijaan Hamiltonin formalismia maanjäristysaaltojen dynamiikalle. Jatkossa oletetaan aina implisiittisesti, että kyseessä on ei-radiaalinen geodeesi, ellei toisin mainita. Tämä tehdään sen vuoksi, että radiaaliset geodeesit ovat yksinkertaisia, mutta tuottavat ongelmia origossa, kun käytetään napakoordinaatteja.

4.1 Matka-aika ja avautumiskulma

Edellisessä kappaleessa osoitettiin, että jokaisella geodeesilla on yksikäsitteinen origoa lähinnä oleva piste p. Lisäksi radiaalikoordinaatin arvo tuossa pisteessä on aidosti positiivinen $r_p > 0$, kun kyseessä on ei-radiaalinen geodeesi. Radiaalisia geodeeseja voikin ajatella rajatapauksena $r_p \to 0$. Osoittautuu, että matka-aika riippuu vain arvosta r_p.

Huomautus 4.1. Seuraavassa propositiossa matka-ajalle käytetään merkintää $\tilde{T}$, sillä se riippuu nyt radiaalikoordinaatista. Jatkossa matka-ajalle saadaan toinen lauseke, joka riippuu eri argumentista, joten sekaannuksen mahdollisuuden vuoksi funktioita merkitään eri tavalla. Vastaavaa notaatiotapaa käytetään myös muille kuvauksille.

Propositio 4.2. *Kahden eri reunapisteen välillä kulkevan maanjäristysaallon matka-aika riippuu vain sen origoa lähinnä olevasta pisteestä. Matka-aika saadaan integraalista*

$$\tilde{T}(r_p) = 2\int_{r_p}^{1} \frac{dr}{v(r)\sqrt{1-\left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}} . \tag{23}$$

Todistus. Oletetaan aluksi, että kyseessä on ei-radiaalinen geodeesi. Koska geodeesit ovat symmetrisiä peilauksessa origon ja sitä lähimmän pisteen välisen suoran suhteen, koostuu matka-aika kahdesta identtisestä osasta. Riittää siis tarkastella tapausta, jossa geodeesi kulkee pisteestä p pinnalle, jolloin $\dot{r} > 0$ paitsi pisteessä p pätee $\dot{r}_p = 0$. Liike-energian säilymisestä seuraa

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v(r)\sqrt{1-\frac{r^2\dot{\theta}^2}{v^2(r)}} .$$

Pyörimismäärän säilymisen nojalla joko $\dot{\theta} < 0$ tai $\dot{\theta} > 0$, sillä geodeesi ei ole radiaalinen. Voidaan siis olettaa, että $\dot{\theta} > 0$, jolloin erityisesti $\dot{\theta}_p > 0$. Laskemalla pyörimismäärä syvimmässä pisteessä ja käyttämällä energian säilymislakia saadaan

$$\frac{r^2\dot{\theta}}{v^2(r)} = \frac{r_p^2\dot{\theta}_p}{v^2(r_p)} = \frac{1}{\dot{\theta}_p}\left(\frac{\dot{r}_p^2 + r_p^2\dot{\theta}_p^2}{v^2(r_p)}\right) = \frac{1}{\dot{\theta}_p} . \tag{24}$$

Tällöin

$$\frac{r^2\dot{\theta}}{v^2(r)}\dot{\theta} = \frac{r_p^2}{v^2(r_p)}\dot{\theta}_p\dot{\theta} = \frac{r_p^2 v^2(r)}{r^2 v^2(r_p)} .$$

Koska $\dot{r} > 0$, on $r(t)$ diffeomorfismi lukuun ottamatta pistettä p. Voidaan siis tehdä muuttujanvaihto $t \to t(r)$ siten, että

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \left(v(r)\sqrt{1 - \frac{r^2\dot{\theta}^2}{v^2(r)}}\right)^{-1} = \left(v(r)\sqrt{1 - \left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}\right)^{-1} . \tag{25}$$

Matka-aika riippuu tällöin vain r_p:stä ja sen lauseke on

$$\tilde{T}(r_p) = 2(t(1) - t(r_p)) = 2\int_{t(r_p)}^{t(1)} \mathrm{d}t = 2\int_{r_p}^{1} \frac{\mathrm{d}r}{v(r)\sqrt{1 - \left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}} .$$

Lopuksi huomataan, että radiaaliselle suoralle $\dot{r} = v(r)$ ja

$$\tilde{T}_{rad} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{v(r)} = \tilde{T}(r_p = 0) . \qquad \square$$

Toinen mielenkiintoinen geodeesin ominaisuus on sen avautumiskulma α. Tämä vastaa sitä kulmaa, jonka muodostavat origosta geodeesin reunalla oleviin pisteisiin kulkevat puolisuorat. Kyseessä on siis geodeesin päätepisteiden välinen kulmaetäisyys. Avautumiskulma saadaan nyt helposti, sillä muuttujanvaihto $t \to t(r)$ tunnetaan.

Propositio 4.3. *Ei-radiaalisen geodeesin avautumiskulma riippuu vain sen origoa lähimmästä pisteestä ja se saadaan integraalista*

$$\alpha(r_p) = 2\int_{r_p}^{1} \frac{r_p v(r)}{r^2 v(r_p)} \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}} . \tag{26}$$

Todistus. Kuten proposition 4.2 todistuksessa, pyörimismäärän säilymisen nojalla voidaan olettaa, että $\dot{\theta} > 0$. Kiertosymmetrian perusteella origoa lähimmän pisteen p kulmakoordinaatin arvoksi voi valita $\theta_p = 0$. Energian säilymisestä ja yhtälöstä (25) seuraa

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v(r)}{r}\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{v^2(r)}} = \frac{v(r)}{r}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_p^2 v^2(r)}{r^2 v^2(r_p)}\right)} = \frac{r_p v^2(r)}{r^2 v(r_p)} .$$

Jälleen yhtälön (25) ja ketjusäännön nojalla

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{r_p v(r)}{r^2 v(r_p)}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}\right)^{-1} .$$

Kun $r \in [r_p, 1]$, kulmakoordinaatin θ arvo on

$$\theta(r) = \theta(r) - \theta(r_p) = \int_{r_p}^{r} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \int_{r_p}^{r} \frac{r_p v(r)}{r^2 v(r_p)} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}} .$$

Geodeesin päätepisteiden välinen kulmaetäisyys on symmetrian nojalla

$$\alpha(r_p) = 2\theta(1) = 2\int_{r_p}^{1} \frac{r_p v(r)}{r^2 v(r_p)} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\left(\frac{r_p v(r)}{r v(r_p)}\right)^2}}$$

ja riippuu siten vain geodeesin origoa lähimmästä pisteestä p. $\square$

Huomautus 4.4. Taustalla olevan ongelman kannalta on motivoitua kysyä, voidaanko kaksi reunapistettä aina yhdistää toisiinsa geodeesilla. Kysymys palautuu lopulta siihen, saavuttaako avautumiskulma kaikki arvot välillä $[0, \pi]$. Erityisesti haluttaisiin tietää, kuinka sileän funktion lauseke (26) määrää, ja mitä saavutetaan rajoilla $r_p \to 1$ ja $r_p \to 0$. Näiden kysymysten käsittely ei ole helppoa, sillä argumentti r_p esiintyy sekä integroimisrajassa että integrandissa. Tässä tutkielmassa funktion α sileystarkasteluihin ei sen tarkemmin paneuduta, mutta esimerkiksi artikkelissa [12] käsitellään vastaavaa muotoa olevien funktioiden säännöllisyyttä.

4.2 Nopeusfunktion konstruointi

Muokataan seuraavaksi integraalia (23) hieman yksinkertaisempaan muotoon. Tämä antaa mahdollisuuden käyttää integraalimuunnosten teoriaa ja erityisesti Abelin integraalin kääntyvyyttä. Huomautettakoon vielä, että inversioprosessissa käytetään vain ei-radiaalisia geodeeseja, vaikka radiaaliset suorat otetaankin mukaan mittausdataan.

Propositio 4.5. *Matka-aika T voidaan lausua ns. Abelin integraalin avulla muodossa*

$$T(s) = \frac{2}{v(1)} \int_s^1 \frac{f(u)du}{\sqrt{u-s}}, \quad s = \frac{\dot{\theta}^2(0)}{v^2(1)}, \tag{27}$$

missä f on funktio

$$f(u) = \frac{dr}{du}\frac{u}{r},$$

kun määritellään muuttujanvaihto $r \to r(u)$ diffeomorfismin

$$u(r) = \frac{v^2(1) r^2}{v^2(r)}$$

avulla.

Todistus. Hetkillä $t = 0$ ja $t = T$ aaltorintama on kiekon reunalla, joten $r(0) = 1$. Pyörimismäärän säilymisen ja lausekkeen (24) nojalla

$$\frac{1}{\dot{\theta}_p} = \frac{r_p^2 \dot{\theta}_p}{v^2(r_p)} = \frac{r^2(0)\dot{\theta}(0)}{v^2(r(0))} = \frac{\dot{\theta}(0)}{v^2(1)} \Leftrightarrow \frac{r_p^2}{v^2(r_p)} = \frac{\dot{\theta}^2(0)}{v^4(1)}.$$

Määritellään funktio $u(r)$

$$u(r) = \frac{v^2(1)r^2}{v^2(r)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{2v^2(1)r}{v(r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{v(r)}\right) > 0,$$

missä on käytetty Herglotz-ehtoa (15). Siten u on diffeomorfismi ja määrää muuttujanvaihdon $r \to r(u)$. Integroimisrajat ovat

$$\begin{aligned} r = 1 &\Rightarrow u = 1 \\ r = r_p &\Rightarrow u = v^2(1)\frac{r_p^2}{v^2(r_p)} = \frac{\dot{\theta}^2(0)}{v^2(1)} =: s\,. \end{aligned}$$

Suorittamalla muuttujanvaihto integraaliksi (23) tulee

$$\begin{aligned} T(s) &= 2\int_s^1 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u\frac{1}{v(r)\sqrt{1-s/u}} = 2\int_s^1 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u\frac{\sqrt{u}}{v(r)}\frac{1}{\sqrt{u-s}} \\ &= \frac{2}{v(1)}\int_s^1 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{u}{r}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u-s}} = \frac{2}{v(1)}\int_s^1 \frac{f(u)\mathrm{d}u}{\sqrt{u-s}}\,, \end{aligned}$$

kun määritellään funktio $f = f(u)$ lausekkeella

$$f(u) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{u}{r}\,. \qquad \square$$

Parametrilla s on geometrisesti tärkeä tulkinta, sillä se riippuu aallon saapumiskulmasta, joka on mitattavissa oleva suure.

Propositio 4.6. *Parametrille s lausekkeessa* (27) *pätee* $s \in]0,1[$ *ja*

$$s = \sin^2\beta\,, \tag{28}$$

missä β on geodeesin tulokulma, kun se saavuttaa reunan.

Todistus. Energian säilymislain mukaan yleisesti pätee

$$0 \le \frac{\dot{\theta}^2(0)}{v^2(1)} = 1 - \frac{\dot{r}^2(0)}{v^2(1)} \le 1$$

eli $0 \le s \le 1$. Koska geodeesi ei ole radiaalinen, $\dot{\theta}^2(0) > 0$. Lisäksi Herglotz-ehdon nojalla $\dot{r}(0) \neq 0$, joten $0 < s < 1$. Olkoon β geodeesin γ tulokulma sen saavuttaessa reunan. Koska geodeesi on symmetrinen, tulokulma on sama kuin lähtökulma. Kyseessä on siis se kulma, jonka muodostavat origosta reunalle lähtevä radiaalinen suora ja reunapisteeseen asetettu geodeesin tangenttisuora. Normittamalla radiaalisen suoran määräävä vektori $w = (v(1), 0)$ saadaan kulma β sisätulosta

$$\frac{\dot{r}(0)}{v(1)} = \sum_{i,j} g_{ij}\dot{\gamma}^i w^i = \|\dot{\gamma}\|\|w\|\cos\beta = \cos\beta\,.$$

Energian säilymislain perusteella

$$1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta = \frac{\dot{r}^2(0)}{v^2(1)} = 1 - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{v^2(1)}\,.$$

Siispä parametri s on geodeesin tulokulman sinin neliö

$$s = \sin^2\beta\,. \qquad \square$$

Huomautus 4.7. Vaihtoehtoisesti aikaintegraali voidaan lausua pyörimismäärän $r_p/v(r_p) = |L|$ avulla tekemällä muuttujanvaihto $u = v^2(1)w$, jolloin

$$\hat{T}(L) = 2\int_{L^2}^{\frac{1}{v^2(1)}} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{\sqrt{w-L^2}} \ .$$

Seuraava tulos on erittäin tärkeä tutkielman kannalta, sillä sen avulla integraali (27) voidaan kääntää. Todistus vaikuttaa yksinkertaiselta, mutta ei ole triviaali. Hämmästyttävä asia on se, että integraaliydin $K(y,u)$ osoittautuu vakioksi.

Lemma 4.8. *Olkoon $f \in C([0,1])$. Abelin integraali*

$$g(s) = \int_s^1 \frac{f(u)du}{\sqrt{u-s}}$$

voidaan kääntää ja pätee

$$f(y) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_y^1 \frac{g(s)ds}{\sqrt{s-y}} \ . \tag{29}$$

Todistus. Sijoittamalla g:n lauseke integraaliin (29) saadaan

$$\int_y^1 \frac{g(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{s-y}} = \int_y^1 \left(\int_s^1 \frac{f(u)\mathrm{d}u}{\sqrt{u-s}}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s-y}} = \int_y^1\int_s^1 \frac{f(u)}{\sqrt{u-s}\sqrt{s-y}}\mathrm{d}u\mathrm{d}s \ .$$

Fubinin lauseen nojalla integroimisjärjestystä voi vaihtaa muuttamatta integraalin arvoa. Täytyy kuitenkin huomata, että integroimisrajat muuttuvat

$$u \in [s,1] \ , \ s \in [y,1] \Rightarrow s \in [y,u] \ , \ u \in [y,1] \ .$$

Tällöin

$$\int_y^1 \frac{g(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{s-y}} = \int_y^1 f(u)\mathrm{d}u \int_y^u \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(u-s)(s-y)}} = \int_y^1 K(y,u)f(u)\mathrm{d}u \ .$$

Tekemällä affiini muuttujanvaihto $s = y + x(u-y)$ nähdään, että integraaliydin $K(y,u)$ on itse asiassa vakio

$$K(y,u) = \int_y^u \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(u-s)(s-y)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)x}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}} = \pi \ ,$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus saadaan esimerkiksi neliöön täydentämällä ja skaalaamalla. Siispä

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_y^1 \frac{g(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{s-y}} = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\pi\int_1^y f(u)\mathrm{d}u = f(y) \ . \qquad \square$$

Huomautus 4.9. Integraalin kääntyvyysongelma juontaa juurensa 1800-luvun alkuun [13]. Tuolloin Abel pohti, voiko mäen korkeusprofiilin selvittää vierittämällä palloa mäkeä ylös eri alkunopeuksilla ja mittaamalla edestakaiseen matkaan kuluneet ajat. Maanjäristysaaltojen tilanteessa voi analogisesti ajatella, että aalto kulkee pinnalta ”mäkeä ylös” Maan sisukseen, saavuttaa käännepisteen ja ”vierii takaisin alas” pinnalle.

Abelin integraalin avulla voidaan nyt todistaa tutkielman päätulos.

Lause 4.10. *Nopeusfunktio $v(r)$ määräytyy mittausdatasta $T(s)$ yksikäsitteisesti lausekkeella*

$$v(r) = v(1) \cdot exp\left(\int_1^r h(x)dx \right), \tag{30}$$

missä

$$h(r) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2\tilde{f}(r)}\right), \quad \tilde{f}(r) = f(u(r)),$$

kun aallon pintanopeus $v(1)$ oletetaan tunnetuksi.

Todistus. Proposition 4.5 nojalla $T(s)$ saadaan integraalina funktiosta $f = f(u)$. Kirjoittamalla

$$g(s) = \frac{v(1)}{2}T(s) = \int_s^1 \frac{f(u)\mathrm{d}u}{\sqrt{u-s}}$$

voidaan integraali kääntää lemman 4.8 avulla

$$f(u) = -\frac{v(1)}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_u^1 \frac{T(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{s-u}}.$$

Tuntemalla matka-aika $T(s)$ tiedetään siis $f(u)$. Funktion f määritelmän avulla rekonstruoidaan $r = r(u)$ separoimalla differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} = \frac{rf(u)}{u} \Rightarrow \int_1^{r(u)} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_1^u \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y \Leftrightarrow r(u) = \exp\left(\int_1^u \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\right).$$

Koska $r(u)$ on diffeomorfismi, saadaan rekonstruoitua käänteisfunktio $u = u(r)$. Erityisesti nyt tiedetään datan avulla $\tilde{f}(r) = f(u(r))$. Lisäksi

$$\tilde{f}(r) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\frac{u(r)}{r} = \frac{v^3(r)}{2v^2(1)r(v(r) - rv'(r))}\frac{v^2(1)r}{v^2(r)} = \left(2\left(1 - \frac{rv'(r)}{v(r)}\right)\right)^{-1}.$$

Tästä voi ratkaista nopeuden $v(r)$ jälleen separoimalla differentiaaliyhtälö

$$1 - \frac{rv'(r)}{v(r)} = \frac{1}{2\tilde{f}(r)} \Leftrightarrow \frac{1}{v(r)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2\tilde{f}(r)}\right) =: h(r)$$
$$\int_{v(1)}^{v(r)} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_1^r h(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow v(r) = v(1)\exp\left(\int_1^r h(x)\mathrm{d}x\right).$$

Matka-aikamittauksista saadaan rekonstruktioketju $T(s) \Rightarrow f(u) \Rightarrow r(u) \Rightarrow u(r) \Rightarrow f(u(r)) \Rightarrow v(r)$. Nopeus $v(r)$ määräytyy siten matka-ajoista $T(s)$, kun pintanopeus $v(1)$ tunnetaan. □

Huomautus 4.11. On motivoitua olettaa reunanopeus $v(1)$ tunnetuksi, sillä aallon nopeus pintaa pitkin pystytään mittaamaan. Toisaalta pinta-aallot poikkeavat Maan sisällä kulkevista aalloista, joten niiden nopeusprofiilit voivat olla erilaiset. Ongelma on mahdollista kiertää, jos oletetaan lisää dataa tunnetuksi. Tässä tutkielmassa ongelmaan ei kuitenkaan sen tarkemmin paneuduta.

Lause 4.10 antaa keinon konstruoida nopeusfunktio, kun matka-ajat tunnetaan kaikille saapumiskulmille. Tiivistetään tämä seuraavaksi lauseeksi.

Lause 4.12. *Jos maanjäristysaaltojen matka-ajat tunnetaan kaikille saapumiskulmille ja pintanopeus $v(1)$ tiedetään, aallon nopeus Maan sisärakenteessa voidaan konstruoida yksikäsitteisesti.*

Todistus. Seuraa suoraan propositiosta 4.6 ja lauseesta 4.10. □

Demonstroidaan seuraavaksi inversiostrategiaa yksinkertaiselle nopeusprofiilille.

Esimerkki 4.13. Oletetaan, että äänennopeus tiedetään vakioksi eli $v(r) = v_0 > 0$ kaikilla $r \in [0,1]$. Käytetään lausetta 4.10 ja selvitetään, mitä saadaan tulokseksi inversioprosessia käyttäen. Tässä erityistapauksessa nopeusfunktio antaa yksinkertaisen eksplisiittisen lausekkeen matka-ajalle $T(s)$, jolloin prosessin välivaiheet voi laskea helpohkosti turvautumatta numeriikkaan. Koska nopeus on vakio, metriikka ei riipu tarkasteltavasta pisteestä $g = g_E/v_0^2$. Christoffelin symbolit ovat $\Gamma^k_{ij} = 0$ kaikilla $i,j,k \in \{1,2\}$, joten geodeesiyhtälöt ovat samat kuin euklidisessa tapauksessa $\ddot{x} = 0$ ja $\ddot{y} = 0$. Siis äänennopeuden ollessa vakio kiekon $\bar{B}^2(0,1)$ geodeesit ovat suorat $\gamma(t) = p + tv$, $p, v \in \mathbb{R}^2$. Matka-aika on nyt

$$T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda))} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{v_0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_E(\dot{\gamma}(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda))} \mathrm{d}\lambda = \frac{L_{g_E}(\gamma)}{v_0} \, ,$$

missä $L_{g_E}(\gamma)$ on polun euklidinen pituus. Koska geodeesit ovat suoria, geometrisesti on helppo todeta, että pituuden $L_{g_E}(\gamma)$ ja tulokulman β välillä on relaatio

$$\cos\beta = \frac{1}{2} L_{g_E}(\gamma) \Leftrightarrow L_{g_E}(\gamma) = 2\cos\beta = 2\sqrt{1 - \sin^2\beta} = 2\sqrt{1-s} \, .$$

Siispä matka-aika s:n funktiona on

$$T(s) = \frac{2\sqrt{1-s}}{v_0} \, .$$

Nyt erityisesti $v_0 = v(1)$, joten funktio f on

$$f(u) = -\frac{v(1)}{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_u^1 \frac{T(s)}{\sqrt{s-u}} \mathrm{d}s = -\frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_u^1 \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{s-u}} \mathrm{d}s \, .$$

Integraali voidaan laskea esimerkiksi tekemällä ensin sijoitus $s = x + u$, jolloin

$$\int_u^1 \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{s-u}} \mathrm{d}s = \int_0^{1-u} \frac{\sqrt{1-u-x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_0^{1-u} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{1-u}}}{\sqrt{\frac{x}{1-u}}} \mathrm{d}x \, .$$

Muuttujanvaihdon $y = \sqrt{\frac{x}{1-u}}$ avulla saadaan

$$\int_0^{1-u} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{1-u}}}{\sqrt{\frac{x}{1-u}}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} 2(1-u) y \mathrm{d}y = 2(1-u) \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \mathrm{d}y \, .$$

Tekemällä sijoitus $y = \sin z$ ja käyttämällä kaksinkertaisen kulman kaavaa $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$ integraaliksi tulee

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \cos^2 z\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2z}{2}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Siispä

$$f(u) = -\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_u^1 \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{s-u}}\mathrm{d}s = -\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\pi}{2}(1-u)\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Seuraavaksi ratkaistaan $r(u)$ lausekkeesta

$$r(u) = \exp\left(\int_1^u \frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_1^u \frac{\mathrm{d}y}{y}\right) = \big(\exp(\log u)\big)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}\,,$$

josta saadaan $u(r) = r^2$. Funktio $\tilde{f}$ on

$$\tilde{f}(r) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\frac{u(r)}{r} = \frac{1}{2r}\frac{r^2}{r} = \frac{1}{2}\,,$$

joten funktioksi h tulee

$$h(r) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2\tilde{f}(r)}\right) = 0\,.$$

Lopulta äänennopeuden lauseke on

$$v(r) = v(1)\exp\left(\int_1^r h(x)\mathrm{d}x\right) = v(1) = v_0\,.$$

Inversioprosessi antaa siten oikean tuloksen ainakin siinä tapauksessa, kun äänennopeus on vakio.

Viitteet

[1] Gustav Herglotz, Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte, Zeitschr. für Math. Phys., 52:275–299 (1905),

us.archive.org/22/items/zeitschriftfrma21runggoog.pdf.

[2] Gunther Uhlmann, Inverse problems: seeing the unseen, Bull. Math. Sci., 4(2):209-279 (2014),

link.springer.com/article/10.1007/s13373-014-0051-9.

[3] Plamen Stefanov, Gunther Uhlmann and Andras Vasy, Boundary rigidity with partial data, J. Amer. Math. Soc., 29:299-332 (2016),

arxiv.org/abs/1306.2995.

[4] Plamen Stefanov, Gunther Uhlmann and Andras Vasy, Local and global boundary rigidity and the geodesic X-ray transform in the normal gauge (2017),

arxiv.org/abs/1702.03638.

[5] Guillaume Bal, Introduction to Inverse Problems (2012),

columbia.edu/~gb2030/PAPERS/IntroductionInverseProblems.

[6] Leonid Pestov, Gunther Uhlmann and Hanming Zhou, An Inverse Kinematic Problem with Internal Sources, Inverse problems, 31(5):055006 (2014),

arxiv.org/abs/1409.7863.

[7] Inversio-ongelmien seminaari, syksy 2006, Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos (2006),

users.jyu.fi/~salomi/invsem/fall06/index.html.

[8] Inversio-ongelmien seminaari, kevät 2007, Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos (2007),

users.jyu.fi/~salomi/invsem/spring07/index.html.

[9] Barrett O'Neill, Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Press 1983.

[10] John M. Lee, Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature, Springer 1997.

[11] Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos, second edition, Academic Press 2004.

[12] Maarten V. de Hoop and Joonas Ilmavirta, Abel transforms with low regularity with applications to X-ray tomography on spherically symmetric manifolds (2017),

arxiv.org/abs/1702.07625.

[13] Peter M. Shearer, Introduction to Seismology, Second Edition, Cambridge University Press 2009.