Option deltan laskeminen diskreetin Malliavin-laskennan avulla

Timo Puustinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016

Tiivistelmä: Timo Puustinen, *Option deltan laskeminen diskreetin Malliavin-laskennan avulla* (engl. *Computation of option delta using discrete Malliavin calculus*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 42 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2016.

Tässä tutkielmassa esitellään tapa laskea diskreetti approksimaatio option deltalle. Approksimaatio saadaan diskreetin Malliavin-laskennan avulla ja tätä varten määritellään Malliavin-derivaatta sekä Skorohod-integraali sopivaan diskreettiin todennäköisyysavaruuteen. Tavoitteena on laskea eurooppalaisen osto-option ja binäärioption deltat.

Ensimmäisessä luvussa esitellään oleellisimpia määritelmiä, esimerkkejä ja aputuloksia, joita tarvitaan esitiedoiksi myöhempiä lukuja varten. Luvun määritelmiin ja aputuloksiin ei kuitenkaan syvennytä sen enempää. Heti toisen luvun alussa määritellään todennäköisyysavaruus diskreettiä satunnaiskävelyä varten. Satunnaiskävelyä käytetään diskreetissä optionhinnoittelumallissa Brownin liikkeen vastineena, siis mallinnettaessa option kohde-etuuden hintaa. Toisessa luvussa käsitellään myös diskreettiä Malliavin-laskentaa ja määritellään kaksi oleellista käsitettä: Malliavin-derivaatta ja diskreetti Skorohod-integraali. Malliavin-derivaatan määritelmän yhteydessä esitetään tulokset, joiden nojalla diskreetti Malliavin-derivaatta yhdistyy tietyin oletuksin tavalliseen derivaattaan. Vastaava tulos esitetään myös yhdistetyille funktioille. Toisen luvun lopussa määritellään Skorohod-integraali ja todistetaan diskreetin Malliavin-laskennan osittaisintegrointikaava.

Kolmas ja viimeinen luku käsittelee binomipuumallia ja option deltan laskemista diskreetin Malliavin-laskennan avulla. Luku rakentuu siten, että ensin määritellään binomipuumalli, jolla mallinnetaan option kohde-etuuden hintaa. Sen avulla saadaan diskreetit approksimaatiot Black-Scholes -mallin mukaiselle option hinnalle ja optiondeltalle. Tämän jälkeen option deltalle johdetaan muoto tilanteessa, jossa option tuottofunktio täyttää tietyt oletukset. Erityisesti tuottofunktion tulee olla rajoitettu, jatkuva ja derivoituva. Edeltäviä oletuksia voidaan kuitenkin lieventää. Option tuottofunktiolla voi olla pisteitä, joissa se ei ole derivoituva tai edes jatkuva. Viimeisessä ja tärkeimmässä lauseessa lasketaan delta optiolle ϕ, jolla on äärellinen määrä ongelmapisteitä ja jota voidaan approksimoida kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvalla funktiolla kaikkien ongelmapisteiden ympäristöissä.

Avainsanoja: binomipuumalli, diskreetti Malliavin-laskenta, Malliavin-derivaatta, Skorohod-integraali, diskreetti satunnaiskävely, option delta

Sisältö

Johdanto

Optio on sopimus, joka antaa haltijalleen oikeuden ostaa tai myydä sovitun määrän kohde-etuutta ennalta sovittuun hintaan. Eurooppalaisilla optioilla on yksi tietty lunastushetki, mutta on olemassa myös esimerkiksi amerikkalaisia optioita, jotka voidaan lunastaa koska vain option voimassaoloaikana. Option kohde-etuus voi olla mitä vain minkä hinta muuttuu ajan kuluessa, esimerkiksi osake tai valuutta.

Option hinnoittelussa kohde-etuuden hinnan mallintaminen on oleellista. Tunnetussa Black-Scholes -mallissa eurooppalaisen option kohde-etuuden hintaa mallinnetaan Brownin liikkeen avulla. Mallin kehittivät Robert Mertonin avustuksella Fischer Black ja Myron Scholes, ja se julkaistiin vuonna 1973. Vuonna 1997 työstä myönnettiin Mertonille ja Scholesille Ruotsin keskuspankin taloustieteen palkinto (The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel). Black-Scholes -malli antoi ratkaisun tärkeään käytännön ongelmaan, eurooppalaisen osto-option tasapuolisen hinnan laskemiseen. Myöhemmin Black-Scholes -mallia on yleistetty ja sen avulla voidaan hinnoitella myös muunlaisia optioita.

Käytännön sovelluksia varten Black-Scholes -mallista haluttiin kehittää yksinkertaistettu versio. Ensimmäisenä mallin diskreettiä vastinetta kehittivät 1970-luvun lopulla John Cox, Stephen Ross ja Mark Rubinstein sekä Richard Rendleman ja Brit Bartter. Syitä mallin diskretisoinnille ovat esimerkiksi se, että kaupankäynti ei oikeasti ole jatkuva-aikaista ja että tietokoneella ei voida laskea jatkuva-aikaisesti. Binomipuumalli on Black-Scholes -mallin diskreetti vastine ja siihen liittyvä laskenta on käytännön kannalta yksinkertaisempaa kuin jatkuva-aikainen. Binomipuumallilla approksimoidaan Brownin liikettä ja se pohjautuu Donskerin lauseeseen ja sopivasti skaalattuun Bernoulli-satunnaiskävelyyn.

Malliavin-laskenta on nykyään tärkeä työkalu rahoitusteoriassa ja sitä käytetään laskettaessa option herkkyysparametreja. Tässä tutkielmassa ei käsitellä jatkuva-aikaista Malliavin-laskentaa, mutta siitä ja sen sovelluksista löytyy lisätietoa lähteestä [**9**]. Tämä tutkielma pohjautuu monilta osin lähteeseen [**8**], joka on Yoshifumi Muroin ja Shintaro Sudan kirjoittama artikkeli diskreetistä Malliavin-laskennasta. Artikkelissa jatkuvaa Malliavin-laskentaa on pyritty yksinkertaistamaan määrittelemällä sen vastine diskreetille satunnaiskävelylle. Diskreettiä Malliavin-laskentaa on käytetty artikkelissa option herkkyysparametrien laskemiseen. Tässä tutkielmassa määritellään diskreetti Malliavin-derivaatta ja diskreetti Skorohod-integraali kuten edellämainitussa artikkelissa. Myös diskreettiin Malliavin-laskentaan liittyvät lauseet ja osa option deltan laskemista käsittelevästä luvusta pohjautuvat Muroin ja Sudan artikkeliin. Tutkielmassa kyseisiä tuloksia on kuitenkin täsmennetty ja yleistetty, ja niiden todistuksiin on lisätty yksityiskohtia. Erityisesti deltan laskemisessa esiintyy artikkelissa epätäsmällisyyttä, joten se osa on tehty tässä tutkielmassa eri tavalla.

Option hinta riippuu kohde-etuuden hinnasta. Delta määritellään option hintafunktion derivaattana kohde-etuuden hinnan suhteen. Tämä määritelmä johtaa option tuottofunktion derivaattaan. Eurooppalaisen osto-option tuottofunktiolla ei ole kuitenkaan olemassa derivaattaa lunastushinnassa ja binäärioption tuottofunktio ei ole kyseisessä pisteessä edes jatkuva. Tutkielman viimeisenä tuloksena esitellään keino määrittää delta optiolle, jonka tuottofunktiolla on äärellinen määrä vastaavia ongelmapisteitä. Eurooppalaisen osto-option ja binäärioption tuottofunktioista löytyy GeoGebralla piirretyt kuvat luvun 3 loppupuolelta.

LUKU 1

Käsitteitä ja määritelmiä

Tässä luvussa määritellään ja palautetaan mieleen tutkielman kannalta hyödyllisiä käsitteitä. Aloitetaan määrittelemällä todennäköisyysavaruus.

MÄÄRITELMÄ 1.1 (σ-algebra, mitallinen avaruus). Olkoon Ω epätyhjä joukko. Joukon Ω osajoukkojen kokoelmaa $\mathcal{F}$ sanotaan σ-algebraksi, jos se täyttää seuraavat kolme ehtoa:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$,
(2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
(3) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Paria $(\Omega, \mathcal{F})$ sanotaan mitalliseksi avaruudeksi.

MÄÄRITELMÄ 1.2 (Potenssijoukko). Olkoon Ω epätyhjä joukko. Joukon Ω kaikkien osajoukkojen kokoelmaa sanotaan potenssijoukoksi ja merkitään

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \colon A \subseteq \Omega\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.3 (Todennäköisyysmitta). Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Kuvaus $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0,1]$ on todennäköisyysmitta, jos seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
(2) Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ siten, että $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, niin

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Kolmikkoa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi.

Määritellään seuraavaksi filtraatio, joka kuvaa tietyllä ajanhetkellä käytössä olevaa informaatiota.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Filtraatio $(\mathcal{F}_i)_{i=0}^{\infty}$ on jono σ-algebroja siten, että

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}.$$

Myöhemmin tarvitaan myös ehdollisen odotusarvon käsitettä, joten määritellään se ja esitellään kaksi siihen liittyvää ominaisuutta. Määritelmä, ominaisuudet ja todistukset löytyvät esimerkiksi lähteestä [**12**] sivulta 213 alkaen.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. Satunnaismuuttujan $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ehdollinen odotusarvo σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen on $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, jolle

$$\int_B f d\mathbb{P} = \int_B g d\mathbb{P} \qquad \text{kaikilla } B \in \mathcal{G}.$$

Ehdolliselle odotusarvolle g käytetään merkintää

$$g = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}).$$

LEMMA 1.6. *Olkoot $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebroja. Tällöin seuraavat kaksi ominaisuutta ovat voimassa.*

(i) *Jos $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, niin melkein varmasti pätee*

$$\mathbb{E}(\lambda f + \mu g \mid \mathcal{G}) = \lambda \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}) + \mu \mathbb{E}(g \mid \mathcal{G}).$$

(ii) *Jos $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{G}$-mitallinen kuvaus ja $fh \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, niin melkein varmasti pätee*

$$\mathbb{E}(hf \mid \mathcal{G}) = h\mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}).$$

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**12**] sivulta 215 alkaen. □

MÄÄRITELMÄ 1.7 (Funktioiden luokka $\mathcal{C}^{1,\theta}$). Olkoon $\theta > 0$. Derivoituva kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuuluu luokkaan $\mathcal{C}^{1,\theta}$, jos on olemassa jatkuva funktio h siten, että $|f'(x)| \leq h(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa jatkuva kuvaus $R_{f,\epsilon}(x)$ siten, että kaikilla $x, \delta \in \mathbb{R}$

$$f(x + \delta) = f(x) + \delta f'(x) + R_f(x, \delta),$$

missä

$$|R_f(x, \delta)| \leq R_{f,\epsilon}(x) |\delta|^{1+\theta}, \qquad \text{kun } |\delta| < \epsilon.$$

MÄÄRITELMÄ 1.8 (Funktioiden luokka $\mathcal{C}^{1,1}_\infty$). Kuvaus $g \in \mathcal{C}^{1,1}$ kuuluu luokkaan $\mathcal{C}^{1,1}_\infty$, jos on olemassa $C > 0$ siten, että kaikilla $\epsilon > 0$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$R_{g,\epsilon}(x) = C.$$

HUOMAUTUS 1.9. Olkoon $g \in \mathcal{C}^{1,1}_\infty$. Tällöin

$$|g(x + \delta) - g(x) - \delta g'(x)| \leq C |\delta|^2.$$

ESIMERKKI 1.10. (1) Olkoon f kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jonka toinen derivaatta f'' on rajoitettu. Tällöin kuvaus f kuuluu joukkoon $\mathcal{C}^{1,1}_\infty$ Taylorin lauseen ja määritelmän 1.8 nojalla.

(2) Määritellään kuvaus $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$$

Tällöin kuvaus f on derivoituva ja f' on jatkuva, mutta toista derivaattaa f'' ei ole määritelty pisteessä $x = 0$. Kuvaus f kuuluu kuitenkin joukkoon $\mathcal{C}^{1,1}$. Nimittäin jos $\delta < 0$, niin

$$f(0+\delta) = 0 = f(0) + \delta f'(0) + 0.$$

Jos taas $\delta > 0$, saadaan

$$f(0+\delta) = \frac{1}{2}\delta^2 = f(0) + \delta f'(0) + \frac{1}{2}\delta^2.$$

(3) Olkoon $f(x) = e^x$. Tällöin $f''(x) = e^x$, joten tämän esimerkin kohdan (1) ehto ei täyty. Taylorin lauseen nojalla kaikille $\delta \in \mathbb{R}$ pätee kuitenkin

$$e^{x+\delta} = e^x + \delta e^x + \frac{e^\xi}{2}\delta^2,$$

missä $\xi \in [x, x+\delta]$ tai $\xi \in [x-\delta, x]$. Siis $f \in \mathcal{C}^{1,1}$.

Esimerkki 1.11. (1) Olkoon $\theta > 0$. Olkoot lisäksi $f, g \in \mathcal{C}^{1,\theta}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tällöin $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}^{1,\theta}$, koska

$$\begin{aligned}
&(\alpha f + \beta g)(x+\delta) \\
&= \alpha\left(f(x) + \delta f'(x) + R_f(x,\delta)\right) + \beta\left(g(x) + \delta g'(x) + R_g(x,\delta)\right) \\
&= (\alpha f + \beta g)(x) + \delta\left(\alpha f' + \beta g'\right)(x) + \alpha R_f(x,\delta) + \beta R_g(x,\delta).
\end{aligned}$$

Nyt kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa funktiot $R_{f,\epsilon}(x), R_{g,\epsilon}(x)$ siten, että

$$\left|\alpha R_f(x,\delta) + \beta R_g(x,\delta)\right| \le \left(\alpha R_{f,\epsilon}(x) + \beta R_{g,\epsilon}(x)\right)|\delta|^{(1+\theta)},$$

kun $|\delta| < \epsilon$.

(2) Olkoon $\theta > 0$. Jos $f, \varphi \in \mathcal{C}^{1,\theta}$ ja on olemassa vakio C_φ siten, että kaikilla $\epsilon > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$ pätee $R_{\varphi,\epsilon}(x) = C_\varphi$, niin $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^{1,\theta}$:

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x, \delta \in \mathbb{R}$ siten, että $|\delta| < \epsilon$. Kirjoitetaan

$$\varphi\left(f(x+\delta)\right) = \varphi\left(f(x) + \delta f'(x) + R_f(x,\delta)\right)$$

ja otetaan käyttöön merkintä $\hat{\delta} := \delta f'(x) + R_f(x,\delta)$. Nyt edelleen saadaan

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(f(x) + \hat{\delta}\right) \\
&= \varphi\left(f(x)\right) + \hat{\delta}\varphi'\left(f(x)\right) + R_\varphi\left(f(x), \hat{\delta}\right) \\
&= \varphi\left(f(x)\right) + \delta f'(x)\varphi'\left(f(x)\right) + \varphi'\left(f(x)\right)R_f(x,\delta) + R_\varphi\left(f(x), \hat{\delta}\right) \\
&= (\varphi \circ f)(x) + \delta(\varphi \circ f)'(x) + \left[\varphi'\left(f(x)\right)R_f(x,\delta) + R_\varphi\left(f(x), \hat{\delta}\right)\right].
\end{aligned}$$

Nyt viimeiselle termille saadaan

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi'\left(f(x)\right)R_f(x,\delta) + R_\varphi\left(f(x), \hat{\delta}\right)\right| \\
&\le \left[\left|\varphi'\left(f(x)\right)\right|R_{f,\epsilon}(x)\right]|\delta|^{1+\theta} + R_{\varphi,\hat{\epsilon}(x)}\left(f(x)\right)\left|\hat{\delta}\right|^{1+\theta}
\end{aligned}$$

$$\leq \left[\left|\varphi'\left(f\left(x\right)\right)\right| R_{f,\epsilon}\left(x\right)\right] \left|\delta\right|^{1+\theta} + C_\varphi \left[\left|\delta\right| \left|f'\left(x\right)\right| + R_{f,\epsilon}\left(x\right) \left|\delta\right|^{1+\theta}\right]^{1+\theta}$$

$$= \left[\left|\varphi'\left(f\left(x\right)\right)\right| R_{f,\epsilon}\left(x\right) + C_\varphi \left[\left|f'\left(x\right)\right| + R_{f,\epsilon}\left(x\right) \left|\delta\right|^{\theta}\right]^{1+\theta}\right] \left|\delta\right|^{1+\theta},$$

missä $\hat{\epsilon} := \epsilon \left|f'\left(x\right)\right| + R_{f,\epsilon}\left(x\right) \left|\epsilon\right|^{1+\theta}$.

LUKU 2

Diskreetti Malliavin-laskenta

Tässä luvussa määritellään Malliavin-derivaatan ja Skorohod-integraalin diskreetit versiot ja todistetaan niihin liittyviä tärkeitä tuloksia. Lähteessä [**9**] on esitelty vastaavia tuloksia jatkuvalle Malliavin-laskennalle. Luvun päätulos on osittaisintegrointikaava, jota käytetään laskettaessa option deltaa luvussa 3. Tutkielmassa käytetään binomipuumallia, joten määritellään aluksi sopiva todennäköisyysavaruus.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoot $N \in \mathbb{N}$ ja $T > 0$. Olkoon lisäksi $0 < p < 1$. Otetaan selvyyden vuoksi käyttöön merkintä $\Delta t := \frac{T}{N}$. Määritellään todennäköisyysavaruus $\left(\mathbb{D}_{N,T}, \mathcal{F}_N, \mu_N^{(p)}\right)$ siten, että

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{N,T} &:= \left\{ e_N = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N), \epsilon_i \in \left\{ -\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t} \right\} \right\}, \\ \mathcal{F}_N &:= \mathcal{P}\left(\mathbb{D}_{N,T}\right) \text{ ja} \\ \mu_N^{(p)}\left(\{e_N\}\right) &:= p^k \left(1-p\right)^{N-k}, \text{ missä } k = \# \left\{ i : \epsilon_i = \sqrt{\Delta t} \right\}. \end{aligned}$$

HUOMAUTUS 2.2. Tässä tutkielmassa käytetään avaruutta

$$\left(\mathbb{D}_{N,T}, \mathcal{F}_N, \mu_N\right) := \left(\mathbb{D}_{N,T}, \mathcal{F}_N, \mu_N^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right).$$

MÄÄRITELMÄ 2.3. Määritellään avaruuteen $\left(\mathbb{D}_{N,T}, \mathcal{F}_N, \mu_N^{(p)}\right)$ filtraatio $\left(\mathcal{F}_i\right)_{i=0}^N$ asettamalla

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \mathbb{D}_{N,T}\} \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{F}_i := \sigma\left(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i\right).$$

2.1. Diskreetti Malliavin-derivaatta

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoot $W_{j\Delta t} : \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia, joille

$$W_{j\Delta t}\left(e_N\right) := \sum_{i=1}^{j} \epsilon_i.$$

Stokastista prosessia $\left(W_{j\Delta t}\right)_{j=1}^N$ kutsutaan diskreetiksi satunnaiskävelyksi.

Edellä olevat määritelmät antavat diskreetin vastineen Brownin liikkeelle, jonka avulla mallinnetaan option kohde-etuuden hintaa jatkuva-aikaisessa Black-Scholes-mallissa. Perusjoukon alkioiden e_N skaalaus perustuu Donskerin lauseeseen. Donskerin lauseesta löytyy lisätietoa esimerkiksi lähteestä [**3**] luvusta 2. Tulos on lähteessä lause 4.20.

Määritelmä 2.5. Myöhemmin käytetään jonoja e_N, joissa alkio ϵ_i on kiinnitetty. Otetaan näille jonoille käyttöön merkinnät

$$\begin{aligned} e_N^{i+} &:= \left(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \sqrt{\Delta t}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_N\right) \text{ ja} \\ e_N^{i-} &:= \left(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, -\sqrt{\Delta t}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_N\right), \end{aligned}$$

missä $i \in \{1, \ldots, N\}$. Merkitään vastaavasti

$$\begin{aligned} W_{j\Delta t}^{i+} &:= W_{j\Delta t}\left(e_N^{i+}\right) \\ W_{j\Delta t}^{i-} &:= W_{j\Delta t}\left(e_N^{i-}\right), \end{aligned}$$

missä $i, j \in \{1, \ldots, N\}$.

Määritellään seuraavaksi diskreetti Malliavin-derivaatta, jota hyödynnetään luvussa 3 option deltaa laskettaessa.

Määritelmä 2.6. Satunnaismuuttujan $F\colon \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ Malliavin-derivaatta on prosessi $(D_{i\Delta t}F)_{i=1}^N$, missä

$$D_{i\Delta t}F\left(e_N\right) := \frac{F\left(e_N^{i+}\right) - F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}.$$

Lause 2.7. *Olkoot $\theta > 0$, prosessi $(W_{j\Delta t})_{j=1}^N$ diskreetti satunnaiskävely ja f kuvaus luokasta $\mathcal{C}^{1,\theta}$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus R_f^D siten, että kaikilla $i, k \in \{1, \ldots, N\}$ pätee*

$$D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right) = \left(f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right) 1_{k \leq i},$$

missä

$$\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| \leq R_f^D\left(W_{i\Delta t}\right) \sqrt{\Delta t}^{\,\theta}.$$

Todistus. Suoraan diskreetin Malliavin-derivaatan määritelmästä saadaan

$$D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right) = \frac{f\left(W_{i\Delta t}^{k+}\right) - f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}.$$

Tapaus $k > i$ on selvä, koska tällöin

$$W_{i\Delta t}^{k+} = W_{i\Delta t}^{k-} = W_{i\Delta t}$$

ja siten $D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) = 0$. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa $k \leq i$ ja $\epsilon_k = \sqrt{\Delta t}$. Tällöin

$$f\left(W_{i\Delta t}^{k+}\right) = f\left(W_{i\Delta t}\right)$$

ja

$$f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right) = f\left(W_{i\Delta t} - 2\sqrt{\Delta t}\right).$$

Olkoon $\xi := 2\sqrt{T}$. Nyt koska $f \in \mathcal{C}^{1,\theta}$, määritelmän 1.7 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $R_{f,\xi}$ siten, että

$$f\left(W_{i\Delta t} - 2\sqrt{\Delta t}\right) = f\left(W_{i\Delta t}\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)$$

ja

$$\left|R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right| \leq R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right) \Delta t^{\frac{1+\theta}{2}}.$$

Tällöin satunnaismuuttujan $f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin-derivaatalle $\left(D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)_{k=1}^{N}$ pätee

$$\begin{aligned} D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) &= \frac{f\left(W_{i\Delta t}\right) - \left(f\left(W_{i\Delta t}\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= \frac{2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) - R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= f'\left(W_{i\Delta t}\right) - \frac{R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Viimeinen tapaus, $k \leq i$ ja $\epsilon_k = -\sqrt{\Delta t}$, saadaan vastaavasti. Tällöin nimittäin

$$f\left(W_{i\Delta t}^{k+}\right) = f\left(W_{i\Delta t} + 2\sqrt{\Delta t}\right)$$

ja

$$f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right) = f\left(W_{i\Delta t}\right).$$

Jälleen määritelmän 1.7 nojalla kuvauksella $R_{f,\xi}$ pätee

$$f\left(W_{i\Delta t} + 2\sqrt{\Delta t}\right) = f\left(W_{i\Delta t}\right) + 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, 2\sqrt{\Delta t}\right)$$

ja

$$\left|R_f\left(W_{i\Delta t}, 2\sqrt{\Delta t}\right)\right| \leq R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right) \Delta t^{\frac{1+\theta}{2}}.$$

Tässä tapauksessa satunnaismuuttujan $f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin-derivaatalle

$$\left(D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)_{k=1}^{N}$$

pätee

$$\begin{aligned}D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right) &= \frac{f\left(W_{i\Delta t}\right)+2\sqrt{\Delta t}f'\left(W_{i\Delta t}\right)+R_f\left(W_{i\Delta t},2\sqrt{\Delta t}\right)-f\left(W_{i\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}\\ &= \frac{2\sqrt{\Delta t}f'\left(W_{i\Delta t}\right)+R_f\left(W_{i\Delta t},2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}\\ &= f'\left(W_{i\Delta t}\right)+\frac{R_f\left(W_{i\Delta t},2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}.\end{aligned}$$

Tällöin siis

$$D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right)=f'\left(W_{i\Delta t}\right)+R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right),$$

missä

$$R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right):=\frac{R_f\left(W_{i\Delta t},-2\epsilon_k\right)}{-2\epsilon_k}.$$

Nyt erityisesti

$$\begin{aligned}\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| &\leq \frac{R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right)}{2}\frac{\sqrt{\Delta t}^{1+\theta}}{\sqrt{\Delta t}}\\ &= \frac{R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right)}{2}\sqrt{\Delta t}^{\theta}.\end{aligned}$$

Nyt voidaan määritellä jatkuva kuvaus $R_f^D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$R_f^D(x):=\frac{R_{f,\xi}(x)}{2},$$

jolloin

$$\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right|\leq R_f^D\left(W_{i\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}^{\theta}. \qquad \square$$

LAUSE 2.8. *Olkoot $\theta>0$ ja f,g funktioita luokasta $\mathcal{C}^{1,\theta}$. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $C_g>0$, jolle $R_{g,\epsilon}(x)=C_g$ kaikilla $\epsilon>0$ ja kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $R_{g\circ f}$ siten, että satunnaismuuttujan $g\circ f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin-derivaatalle pätee*

$$D_{k\Delta t}g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)=\left(g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)\cdot D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right)+R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right)1_{k\leq i},$$

missä

$$\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right|\leq R_{g\circ f}\left(W_{i\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}^{\theta}.$$

TODISTUS. Tapauksessa $k > i$ väite pätee selvästi koska,

$$W_{i\Delta t}^{k+} = W_{i\Delta t}^{k-} = W_{i\Delta t}.$$

Kun $k \leq i$ ja $\epsilon_k = \sqrt{\Delta t}$, lauseen 2.7 todistusta jäljitellen saadaan funktiolle $g \circ f$

$$g\left(f\left(W_{i\Delta t}^{k+}\right)\right) = g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)$$

ja

$$\begin{aligned} g\left(f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right)\right) &= g\left(f\left(W_{i\Delta t} - 2\sqrt{\Delta t}\right)\right) \\ &= g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right). \end{aligned}$$

Nyt, koska myös $g \in \mathcal{C}^{1,\theta}$, voidaan edelleen kirjoittaa

$$\begin{aligned} g\left(f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right)\right) &= g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right) \\ &= g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) + \left(-2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) \\ &\quad + R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right) \\ &= g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) \\ &\quad + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) \\ &\quad + R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right). \end{aligned}$$

Tällöin satunnaismuuttujan $g \circ f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin-derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} D_{k\Delta t} g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) &= \frac{g\left(f\left(W_{i\Delta t}^{k+}\right)\right) - g\left(f\left(W_{i\Delta t}^{k-}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= \frac{g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) - \left(g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) - 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\quad - \frac{R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\quad - \frac{R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= f'\left(W_{i\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) \\ &\quad - \frac{R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right) g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\quad - \frac{R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Lauseen 2.7 nojalla funktiolle f pätee

$$D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) = f'\left(W_{i\Delta t}\right) - \frac{R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}},$$

mistä saadaan edelleen muoto

$$f'\left(W_{i\Delta t}\right) = D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) + \frac{R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}.$$

Sijoittamalla tämä satunnaismuuttujan $g \circ f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin-derivaatan yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} D_{k\Delta t} g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) &= g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) \\ &\quad - \frac{R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\sqrt{\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Täysin vastaavalla päättelyllä voidaan laskea satunnaismuuttujan $g \circ f\left(W_{i\Delta t}\right)$ Malliavin derivaatta, kun $k \leq i$ ja $\epsilon_k = -\sqrt{\Delta t}$. Tällöin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} D_{k\Delta t} g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) &= g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) \\ &\quad + \frac{R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), 2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, 2\sqrt{\Delta t}\right)\right)}{2\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Nyt voidaan yhdistää edelliset päätelmät, jolloin kaikilla $k \leq i$ pätee

$$D_{k\Delta t} g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) = g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) D_{k\Delta t} f\left(W_{i\Delta t}\right) + R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right),$$

missä

$$R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right) := \frac{R_g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right), -2\epsilon_k f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right)}{-2\epsilon_k}.$$

Jäännös $R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)$ on haluttua muotoa, koska

$$\begin{aligned} \left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| &\leq \frac{R_{g,\hat{\xi}(W_{i\Delta t})}\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)\left|-2\epsilon_k f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right|^{1+\theta}}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\leq \frac{C_g\left(\left|2\sqrt{\Delta t} f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right| + \left|R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right)\Delta t^{\frac{1+\theta}{2}}\right|\right)^{1+\theta}}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\leq \frac{C_g\left(\left|2f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right| + \left|R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}^{\theta}\right|\right)^{1+\theta}}{2}\sqrt{\Delta t}^{\theta}, \end{aligned}$$

missä $\xi := 2\sqrt{T}$ ja $\hat{\xi}\left(W_{i\Delta t}\right) := 2\sqrt{T}\left|f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right| + R_{f,\xi}\left(W_{i\Delta t}\right) T^{\frac{1+\theta}{2}}$. Edellä kuvaus $R_{f,\xi}$ on jatkuva. Lisäksi on olemassa jatkuva kuvaus h siten, että $\left|f'(x)\right| \leq h(x)$ kaikille

$x \in \mathbb{R}$. Siis kun määritellään

$$R_{g\circ f}(x) := \frac{C_g\left(|2h(x)| + \left|R_{f,2\sqrt{T}}(x)\sqrt{\Delta t}^{\theta}\right|\right)^{1+\theta}}{2},$$

alkuperäinen väite on saatu todistettua. □

Seuraavaa esimerkkiä hyödynnetään myöhemmin esimerkissä 2.14, jota taas käytetään myöhemmin laskettaessa option deltaa.

Esimerkki 2.9. Olkoot $s > 0$ ja $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Olkoot lisäksi $f(x) = se^{\mu T}e^{\sigma x}$ ja $g \in \mathcal{C}^{1,1}_{\infty}$.

Esimerkin 1.10 kohdan (3) nojalla $f \in \mathcal{C}^{1,1}$. Koska funktion f derivaatta $f'(x) = s\sigma e^{\mu T}e^{\sigma x}$ on jatkuva ja myös $g \in \mathcal{C}^{1,1}$, lauseen 2.8 todistuksen nojalla saadaan

$$D_{k\Delta t}g\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right) = \left(g'\left(f\left(W_{i\Delta t}\right)\right)\cdot D_{k\Delta t}f\left(W_{i\Delta t}\right) + R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right)1_{k\le i},$$

missä

$$\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| \le \frac{C\left|-2\epsilon_k f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right|^2}{2\sqrt{\Delta t}}.$$

Koska funktion f toinen derivaatta on $f''(x) = s\sigma^2 e^{\mu T}e^{\sigma x}$, jäännökselle $R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)$ pätee esimerkin 1.10 kohdan (3) nojalla

$$\begin{aligned}\left|R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right| \le& \frac{s|\sigma|^2 e^{\mu T}e^{\sigma\left(W_{i\Delta t}+2\sqrt{\Delta t}\right)}}{2}\left(2\sqrt{\Delta t}\right)^2 \\ &= 2s\sigma^2 e^{\mu T+2\sigma\sqrt{\Delta t}}e^{\sigma W_{i\Delta t}}\Delta t.\end{aligned}$$

Tätä arviota käyttäen voidaan edelleen kirjoittaa

$$\begin{aligned}\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| &\le \frac{C\left|-2\epsilon_k f'\left(W_{i\Delta t}\right) + R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right|^2}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\le \frac{C\left(\left|2\sqrt{\Delta t}f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right| + \left|R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right|\right)^2}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= 2C\sqrt{\Delta t}\left|f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right|^2 \\ &\quad + 2C\left|f'\left(W_{i\Delta t}\right)\right|\left|R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right| + \frac{C\left|R_f\left(W_{i\Delta t}, -2\epsilon_k\right)\right|^2}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &\le 2C\sqrt{\Delta t}\left(s|\sigma|e^{\mu T}e^{\sigma W_{i\Delta t}}\right)^2 \\ &\quad + 2C\left(s|\sigma|e^{\mu T}e^{\sigma W_{i\Delta t}}\right)\left(2s|\sigma|^2 e^{\mu T+2\sigma\sqrt{\Delta t}}e^{\sigma W_{i\Delta t}}\Delta t\right) \\ &\quad + \frac{C\left(2s|\sigma|^2 e^{\mu T+2\sigma\sqrt{\Delta t}}e^{\sigma W_{i\Delta t}}\Delta t\right)^2}{2\sqrt{\Delta t}} \\ &= 2C\left(s|\sigma|e^{\mu T}\right)^2 e^{2\sigma W_{i\Delta t}}\sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 4C\left(s^2|\sigma|^3 e^{2\mu T + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) e^{2\sigma W_{i\Delta t}} \Delta t \\
&+ 2C\left(s|\sigma|^2 e^{\mu T + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^2 e^{2\sigma W_{i\Delta t}} \Delta t^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Nyt voidaan selkeyden vuoksi määritellä

$$
\alpha := 2C\left(s|\sigma|e^{\mu T}\right)^2,
$$

$$
\beta_N := 4C\left(s^2|\sigma|^3 e^{2\mu T + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)
$$

ja

$$
\gamma_N := 2C\left(s|\sigma|^2 e^{\mu T + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^2,
$$

jolloin

$$
\left|R_{i,k}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| \leq \alpha \cdot e^{2\sigma W_{i\Delta t}} \sqrt{\Delta t} + \beta_N \cdot e^{2\sigma W_{i\Delta t}} \Delta t + \gamma_N \cdot e^{2\sigma W_{i\Delta t}} \Delta t^{\frac{3}{2}}.
$$

Erityisesti $\alpha < \infty$ ja yllä määritellyt jonot $(\beta_N)_{N\geq 1}, (\gamma_N)_{N\geq 1}$ suppenevat:

$$
\beta_N \to 4C\left(s^2|\sigma|^3 e^{2\mu T}\right), \qquad \text{kun } N \to \infty
$$

ja

$$
\gamma_N \to 2C\left(s|\sigma|^2 e^{\mu T}\right)^2 \qquad \text{kun } N \to \infty.
$$

Koska jonot $(\beta_N)_{N\geq 1}, (\gamma_N)_{N\geq 1}$ suppenevat, niille on olemassa myös ylärajat β ja γ.

2.2. Diskreetti Skorohod-integraali

Määritellään seuraavaksi Skorohod-integraali. Se on keskeinen käsite diskreetissä Malliavin-laskennassa ja sitä käytetään luvussa 3 laskettaessa option deltaa.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Olkoot $F_{i\Delta t} \colon \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia, missä $i \in \{1, \ldots, N\}$. Prosessin $(F_{i\Delta t})_{i=1}^N$ Skorohod-integraali on

$$
\delta\left(F_{\cdot\Delta t}\right) := \sum_{i=1}^{N} \left(F_{i\Delta t}\left(e_N\right)\epsilon_i - D_{i\Delta t} F_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right).
$$

Malliavin-derivaatalla ja Skorohod-integraalilla on seuraavan lauseen mukainen yhteys, joka vastaa osittaisintegrointikaavaa. Lauseen todistuksessa käytetään ehdollista odotusarvoa. Tarvittavat ominaisuudet on esitelty lemmana 1.6. Lausetta käytetään todistettaessa tämän luvun päätulosta, lausetta 2.12.

LAUSE 2.11. *Olkoon $F \colon \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja ja $(U_{i\Delta t})_{i=1}^N$ stokastinen prosessi, missä $U_{i\Delta t} \colon \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ kaikilla i. Tällöin*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \left(D_{i\Delta t} F\right) U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right] = \mathbb{E}\left[F\delta\left(U_{\cdot\Delta t}\right)\right].
$$

Todistus. Aloitetaan väitteen vasemmasta puolesta. Se voidaan kirjoittaa odotusarvon lineaarisuuden ja Malliavin-derivaatan määritelmän nojalla muotoon

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(D_{i\Delta t}F\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right]=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)-F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right]\Delta t. \tag{2.1}$$

Määritellään nyt jokaiselle $1\leq k\leq N$ uusi σ-algebra $\mathcal{F}_{N\Delta t}^{k}$ siten, että

$$\mathcal{F}_{N\Delta t}^{k}:=\sigma\left(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{k-1},\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_N\right).$$

Avaruus $\left(\mathbb{D}_{N,T},\mathcal{F}_N,\mu_N\right)$ on diskreetti ja äärellinen, joten satunnaismuuttujan $U_{i\Delta t}$ ehdollinen odotusarvo σ-algebran $\mathcal{F}_{N\Delta t}^{i}$ suhteen on

$$\mathbb{E}\left[U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}_{N\Delta t}^{i}\right]=\frac{U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)+U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{2}. \tag{2.2}$$

Jatketaan tarkastelemalla yhtälön (2.1) oikealla puolella olevaa odotusarvoa. Seuraavissa yhtälöissä käytetään lemman 1.6 kohtia (i) ja (ii), sekä yhtälöä (2.2). Edellämainitulle odotusarvolle pätee

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)-F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)-F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}_{N\Delta t}^{i}\right]\right]\\
\overset{(ii)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)-F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}\left[U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}_{N\Delta t}^{i}\right]\right]\\
\overset{(2.2)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)-F\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}\cdot\frac{U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)+U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{2}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\right.\\
&\left.-\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}-\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{-\sqrt{\Delta t}}\right)\right.\\
&-\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\\
&\left.-\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\right].
\end{aligned}$$

Nyt edelleen yhtälön (2.2) ja lemman 1.6 kohtien (i) ja (ii) nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{-\sqrt{\Delta t}}\right)-\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{F\left(e_N^{i+}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}-\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}+\frac{F\left(e_N^{i-}\right)U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{4\sqrt{\Delta t}}\right]\\
\overset{(2.2)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(F\left(e_N^{i+}\right)+F\left(e_N^{i-}\right)\right)\left(\frac{U_{i\Delta t}\left(e_N^{i+}\right)-U_{i\Delta t}\left(e_N^{i-}\right)}{2\sqrt{\Delta t}}\right)\right]\\
\overset{(2.2)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]-\mathbb{E}\left[F\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right]\\
\overset{(ii)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]-\mathbb{E}\left[F\left(e_N\right)D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]\right]\\
\overset{(i)}{=}\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}-F\left(e_N\right)D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\middle|\mathcal{F}^i_{N\Delta t}\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}-F\left(e_N\right)D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right].
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla edellä saatu tulos alkuperäisen väitteen vasempaan puoleen saadaan

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(D_{i\Delta t}F\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right]\\
&=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\frac{F\left(e_N\right)U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}-F\left(e_N\right)D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right]\Delta t\\
&=\mathbb{E}\left[F\left(e_N\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{U_{i\Delta t}\left(e_N\right)}{\epsilon_i}-D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\right)\right]\Delta t\\
&=\mathbb{E}\left[F\left(e_N\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t}{\epsilon_i}-D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right)\right]\\
&\overset{(a)}{=}\mathbb{E}\left[F\left(e_N\right)\sum_{i=1}^{N}\left(U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\epsilon_i-D_{i\Delta t}U_{i\Delta t}\left(e_N\right)\Delta t\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left(F\delta\left(U_{\cdot\Delta t}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Edellä yhtälö (a) seuraa siitä, että $\epsilon_i^2=\Delta t$ kaikilla i. □

Todistetaan seuraavaksi luvun 2 tärkein lause, joka antaa keinon yhdistää diskreetin Malliavin-laskennan ja option deltan määritelmän luvussa 3.

LAUSE 2.12. *Olkoot $\theta > 0$ sekä f ja g funktioita luokasta $\mathcal{C}^{1,\theta}$. Olkoot lisäksi $Y : \mathbb{D}_{N,T} \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja ja $(H_{i\Delta t})_{i=1}^N$ stokastinen prosessi siten, että*

$$\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N) D_{j\Delta t} f(W_{N\Delta t}) \neq 0 \qquad \textit{kaikilla } e_N \in \mathbb{D}_{N,T}.$$

Merkitään

$$U_{i\Delta t}(e_N) := \frac{Y H_{i\Delta t}(e_N)}{\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N) D_{j\Delta t} f(W_{N\Delta t}) \Delta t}.$$

Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $R_{g\circ f}$ siten, että

$$\left|\mathbb{E}\left[g'\left(f\left(W_{N\Delta t}\right)\right)Y\right] - \mathbb{E}\left[g\left(f\left(W_{N\Delta t}\right)\right)\delta\left(U_{\cdot\Delta t}\right)\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right]\right|$$

ja termille $R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)$ pätee

$$R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) \leq R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}^{\theta}.$$

TODISTUS. Aloitetaan kirjoittamalla

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[g(f(W_{N\Delta t}))\delta\left(U_{\cdot\Delta t}\right)\right] \\
&\overset{(i)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N D_{i\Delta t} g(f(W_{N\Delta t})) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right] \\
&\overset{(ii)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \left(g'(f(W_{N\Delta t}))\cdot D_{i\Delta t} f(W_{N\Delta t}) + R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N g'(f(W_{N\Delta t}))\cdot D_{i\Delta t} f(W_{N\Delta t}) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t + \sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=1}^N g'(f(W_{N\Delta t}))\cdot D_{i\Delta t} f(W_{N\Delta t}) \frac{Y H_{i\Delta t}(e_N)}{\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N) D_{j\Delta t} f(W_{N\Delta t})\Delta t}\Delta t \\
&\quad + \sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[g'(f(W_{N\Delta t}))Y \frac{\sum_{i=1}^N D_{i\Delta t} f(W_{N\Delta t}) H_{i\Delta t}(e_N)}{\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N) D_{j\Delta t} f(W_{N\Delta t})\Delta t}\Delta t \\
&\quad + \sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[g'(f(W_{N\Delta t}))Y\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right].
\end{aligned}$$

Kohta (i) seuraa lauseesta 2.11 ja kohta (ii) seuraa lauseesta 2.8. Lauseen 2.8 nojalla pätee lisäksi

$$R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) \leq R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}^{\theta},$$

missä $R_{g\circ f}$ on jatkuva kuvaus. □

Seuraava huomautus ja sitä seuraava esimerkki ovat valmistelua lukua 3 varten. Siellä niitä käytetään jäännöstermin arvioinnissa laskettaessa option deltaa.

Huomautus 2.13. Oletetaan, että on olemassa vakiot $C, \eta > 0$ siten, että edellisen lauseen 2.12 prosessille $(U_{i\Delta t})$ pätee kaikilla i

$$U_{i\Delta t} \leq C, \qquad \text{kun } \sqrt{\Delta t} < \eta.$$

Nyt edelleen, kun $\sqrt{\Delta t} < \eta$, saadaan

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right]\right| &\leq \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{N} R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)U_{i\Delta t}(e_N)\Delta t\right|\right]\\
&\leq \mathbb{E}\left[N\cdot\left|R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\right|\sqrt{\Delta t}^{\theta}\cdot C\cdot\Delta t\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left|R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\right|\right]CT\sqrt{\Delta t}^{\theta}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.14. Olkoot $s > 0$ ja $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ sekä $f(x) = se^{\mu T}e^{\sigma x}$ ja $g \in \mathcal{C}_{\infty}^{1,1}$. Arvioidaan lauseessa 2.12 esiintyvää jäännöstermiä $R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)$. Esimerkkiä 2.9 soveltamalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\left|R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\right| &\leq \alpha\cdot e^{2\sigma W_{N\Delta t}}\sqrt{\Delta t} + \beta_N\cdot e^{2\sigma W_{N\Delta t}}\Delta t + \gamma_N\cdot e^{2\sigma W_{N\Delta t}}\Delta t^{\frac{3}{2}}\\
&= \left(\alpha + \beta_N\cdot\sqrt{\Delta t} + \gamma_N\cdot\Delta t\right)e^{2\sigma W_{N\Delta t}}\sqrt{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Määritellään nyt

$$R_{g\circ f}(x) := \left(\alpha + \beta_N\cdot\sqrt{\Delta t} + \gamma_N\cdot\Delta t\right)e^{2\sigma x},$$

jolloin saadaan edelleen

$$\mathbb{E}\left[\left|R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\right|\right] \leq \left(\alpha + \beta\cdot\sqrt{\Delta t} + \gamma\cdot\Delta t\right)\cdot\mathbb{E}\left[e^{2\sigma W_{N\Delta t}}\right].$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Nyt satunnaismuuttujat ϵ_i ovat riippumattomia, joten pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{aW_{N\Delta t}}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N} e^{a\epsilon_i}\right]\\
&= \prod_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[e^{a\epsilon_i}\right]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \left(e^{a\sqrt{\Delta t}} + e^{-a\sqrt{\Delta t}} \right)$$
$$= \left(\frac{e^{a\sqrt{\Delta t}} + e^{-a\sqrt{\Delta t}}}{2} \right)^N .$$

Taylorin lauseen nojalla

$$e^{a\sqrt{\Delta t}} = 1 + a\sqrt{\Delta t} + \frac{e^{\xi_1}}{2} a^2 \Delta t, \qquad \text{missä } \xi_1 \in \left[0, a\sqrt{\Delta t}\right].$$

Vastaavasti

$$e^{-a\sqrt{\Delta t}} = 1 - a\sqrt{\Delta t} + \frac{e^{\xi_2}}{2} a^2 \Delta t, \qquad \text{missä } \xi_2 \in \left[-a\sqrt{\Delta t}, 0\right].$$

Tällöin

$$\mathbb{E}\left[e^{aW_{N\Delta t}}\right] = \left(\frac{1 + a\sqrt{\Delta t} + \frac{e^{\xi_1}}{2} a^2 \Delta t + 1 - a\sqrt{\Delta t} + \frac{e^{\xi_2}}{2} a^2 \Delta t}{2} \right)^N$$
$$= \left(\frac{2 + \frac{a^2 \Delta t}{2} \left(e^{\xi_1} + e^{\xi_2} \right)}{2} \right)^N$$
$$\leq \left(1 + \frac{\frac{a^2 T}{2N} \cdot 2e^{a\sqrt{\Delta t}}}{2} \right)^N$$
$$= \left(1 + \frac{\frac{a^2 T}{2} e^{a\sqrt{\Delta t}}}{N} \right)^N$$
$$\overset{N \geq 1}{\leq} \left(1 + \frac{\frac{a^2 T}{2} e^{a\sqrt{T}}}{N} \right)^N .$$

Koska

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n ,$$

niin

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{aW_{N\Delta t}}\right] \leq e^{\frac{a^2 T}{2} e^{a\sqrt{T}}} < \infty.$$

Nyt jos prosessi $U_{i\Delta t}$ on kuten huomautuksessa 2.13, niin

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) U_{i\Delta t}(e_N) \Delta t \right] \right|$$
$$\leq \limsup_{N\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\left| R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right) \right| \right] CT\sqrt{\Delta t} \right)$$
$$= CT \limsup_{N\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\left| R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right) \right| \right] \sqrt{\Delta t} \right)$$
$$\leq CT \limsup_{N\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\left| R_{g\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right) \right| \right] \right) \limsup_{N\to\infty} \left(\sqrt{\Delta t} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CT \limsup_{N\to\infty} \left(\left(\alpha + \beta \cdot \sqrt{\Delta t} + \gamma \cdot \Delta t \right) \cdot \mathbb{E}\left[e^{2\sigma W_{N\Delta t}} \right] \right) \limsup_{N\to\infty} \left(\sqrt{\Delta t} \right) \\
&\leq CT\alpha \cdot \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{2\sigma W_{N\Delta t}} \right] \limsup_{N\to\infty} \left(\sqrt{\Delta t} \right) \\
&\leq CT\alpha \cdot e^{\frac{(2\sigma)^2 T}{2}} e^{2\sigma\sqrt{T}} \cdot \limsup_{N\to\infty} \left(\sqrt{\Delta t} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

LUKU 3

Option deltan laskeminen

3.1. Diskreettiaikainen optionhinnoittelumalli

Aloitetaan tämä luku rakentamalla binomipuumalli, jossa on N aika-askelta. Binomipuumalleja hyödyntäviä diskreettejä optionhinnoittelumalleja ovat kehittäneet ensimmäiseksi Cox, Ross ja Rubinstein sekä Rendleman ja Bartter.

Tarkastellaan eurooppalaisia optioita, joiden maturiteettihetki on $T = N\Delta t$ ja tuottofunktio on ϕ. Oletetaan, että on olemassa riskitön korko r. Olkoon $S_{i\Delta t}$ option kohde-etuuden hinta hetkellä $i\Delta t$, missä $i \in \{0, \dots, N-1\}$. Olkoon $p \in (0,1)$ ja $u > e^{r\Delta t} > d > 0$. Kohde-etuuden hinta hetkellä $(i+1)\Delta t$ on

- $uS_{i\Delta t}$ todennäköisyydellä p
- $dS_{i\Delta t}$ todennäköisyydellä $1-p$.

Olkoon $\sigma > 0$. Tarkastellaan tilannetta, jossa

$$u := e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d := e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{ja} \quad p := \frac{1}{2}.$$

Tässä parametrit on valittu lähteestä [**5**] löytyvän RB-mallin mukaan. Jatkossa käytetään aina kyseistä RB-mallia.

Oletetaan, että kohde-etuuden hinta liikkuu hetkeen $n\Delta t$ mennessä ylöspäin j kertaa ja alaspäin $n-j$ kertaa. Kun merkitään $S_{0\Delta t} =: s$, saadaan kohde-etuuden hinnaksi hetkellä $n\Delta t$

$$\begin{aligned} S_{n\Delta t} &= su^j d^{n-j} \\ &= se^{j((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})}e^{(n-j)((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})} \\ &= se^{n((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)}e^{\sigma(2j-n)\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Olkoon $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ jono satunnaismuuttujia, joille pätee

$$\epsilon_i = \begin{cases} \sqrt{\Delta t}, & \text{jos kohde-etuuden hinta nousee hetkellä } i \\ -\sqrt{\Delta t}, & \text{jos kohde-etuuden hinta laskee hetkellä } i. \end{cases}$$

Käytetään luvusta 2 tuttua satunnaiskävelyn merkintää

$$W_{n\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i.$$

Edellä tarkastellussa tilanteessa kohde-etuuden hinta nousi j kertaa ja laski $n-j$ kertaa, joten

$$W_{n\Delta t} = j\sqrt{\Delta t} - (n-j)\sqrt{\Delta t} = (2j-n)\sqrt{\Delta t}.$$

Näiden merkintöjen ja yhtälön (3.1) avulla saadaan seuraava määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Option kohde-etuuden hinta hetkellä $n\Delta t$, $n \in \{1, \dots, N\}$ on

$$S_{n\Delta t} := se^{n((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)}e^{\sigma W_{n\Delta t}}.$$

MÄÄRITELMÄ 3.2. Option hinta riippuu ajanhetkestä $n\Delta t$, $n \in \{0, \dots, N\}$, ja kohde-etuuden hinnasta $x > 0$ kyseisellä ajanhetkellä. Olkoon $i \in \{0, \dots, N-1\}$. Määritellään option hintafunktio

$$C(x, N\Delta t) := \phi(x), \tag{3.2}$$

$$C(x, i\Delta t) := \frac{1}{2}\left[C(ux, (i+1)\Delta t) + C(dx, (i+1)\Delta t)\right]e^{-r\Delta t}. \tag{3.3}$$

Edellisen määritelmän kohta (3.2) perustuu ajatukseen, että option hinta ja tuotto ovat tasapainossa lunastushetkellä, jolloin ei ole riskittömän voiton mahdollisuutta. Kohta (3.3) taas pohjautuu siihen, että optio hinnoittautuu kullakin ajan hetkellä vastaamaan tulevan hetken odotettua hintaa riskitön korko huomioituna. Option alkuperäinen hinta voidaan laskea ehtojen (3.2) ja (3.3) avulla käänteisellä induktioalgoritmilla. Seuraava lause on tärkeä tulos ja sitä hyödynnetään käytännössä laskettaessa option hintaa.

LAUSE 3.3. *Olkoot $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio ja $C(s) := C(S_{0\Delta t}, 0\Delta t)$ option hinta hetkellä 0. Hinnalle $C(s)$ pätee*

$$\begin{aligned} C(s) &= e^{-rN\Delta t}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\phi(su^j d^{N-j}) \\ &= \mathbb{E}[e^{-rT}\phi(S_{N\Delta t})]. \end{aligned}$$

TODISTUS. Tässä todistuksessa käytetään määritelmän 3.2 avulla rakennettua käänteistä induktioalgoritmia. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että kaikilla $i \in \{0, \dots, N\}$ pätee

$$C\left(x, (N-i)\Delta t\right) = \frac{e^{-ir\Delta t}}{2^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i-k}x\right). \tag{3.4}$$

Ehdon (3.2) nojalla väite (3.4) pätee, kun $i = 0$. Oletetaan nyt, että väite pätee jollain luvulla $i \in \{0, \dots, N-1\}$, ja osoitetaan, että se pätee myös luvulle $i+1$.

$$\begin{aligned} &C\left(x, [N-(i+1)]\Delta t\right) \\ \overset{(3.3)}{=}\quad &\frac{1}{2}\left[C\left(ux, [N-i]\Delta t\right) + C\left(dx, [N-i]\Delta t\right)\right]e^{-r\Delta t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{ind.ol.}{=} && \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-ir\Delta t}}{2^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i-k} ux\right)\right. \\
& && \left. +\frac{e^{-ir\Delta t}}{2^i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i-k} dx\right)\right] e^{-r\Delta t} \\
&= && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\left[\phi\left(u^{k+1}d^{i-k}x\right)+\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)\right] \\
&= && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\left[\sum_{k=1}^{i+1}\binom{i}{k-1}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)+\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)\right] \\
&= && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\left[\sum_{k=1}^{i}\binom{i}{k-1}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)+\phi\left(u^{i+1}x\right)\right. \\
& && \left. +\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)\right] \\
&= && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\left[\sum_{k=1}^{i}\binom{i}{k-1}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)+\sum_{k=1}^{i}\binom{i}{k}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)\right. \\
& && \left. +\phi\left(u^{i+1}x\right)+\phi\left(d^{i+1}x\right)\right] \\
&\overset{\text{Lemma } A.1}{=} && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\left[\sum_{k=1}^{i}\binom{i+1}{k}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)+\phi\left(u^{i+1}x\right)+\phi\left(d^{i+1}x\right)\right] \\
&= && \frac{e^{-(i+1)r\Delta t}}{2^{i+1}}\left[\sum_{k=0}^{i+1}\binom{i+1}{k}\phi\left(u^k d^{i+1-k}x\right)\right].
\end{aligned}
$$

Nyt siis väite (3.4) pätee kaikilla $i \in \{0, \dots, N\}$ ja siten valitsemalla $i = N$ saadaan tästä suoraan lauseen varsinainen väite:

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{e^{-Nr\Delta t}}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\phi\left(u^k d^{N-k}s\right) \\
&= \mathbb{E}[e^{-rT}\phi(S_{N\Delta t})].
\end{aligned}
$$

□

3.2. Option delta

Aiemmin esiteltyjä tuloksia voidaan soveltaa laskiessa option herkkyysparametria delta. Option delta kertoo kuinka herkästi option hinta reagoi kohde-etuuden hinnan muutoksiin. Seuraavaksi lasketaan eurooppalaisen option delta aiemmin määritellyssä binomipuumallissa. Oletetaan, että option tuotto-funktio ϕ on derivoituva ja sen derivaatta ϕ' on jatkuva. Delta on option alkuperäisen hinnan määrävän funktion C ensimmäinen derivaatta kohde-etuuden hinnan s suhteen. Siis

$$\begin{aligned}\Delta_N :=& C'(s)\\ =& \frac{d}{ds}\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(se^{N((r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t)}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right)\right]\\ =& e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right]\\ =& e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right].\end{aligned}$$

Otetaan vielä käyttöön merkintä $\mu := r - \frac{1}{2}\sigma^2$, jolloin diskreetti option delta voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Delta_N = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right].$$

Jatkossa tutkitaan jonon $(W_{N\Delta t})$ käyttäytymistä, kun $N \to \infty$. Tätä varten tarvitaan heikon suppenemisen käsitettä, joka on liitteessä määritelmä A.4. Tähän liittyy vahvasti keskeinen raja-arvolause, joka on liitteessä tulos A.6. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla

$$\frac{W_{N\Delta t}}{\sqrt{T}} \implies g' \sim N(0,1), \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

Tällöin

$$W_{N\Delta t} \implies g \sim N(0,T), \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

Luvun 3 lopullinen tavoite on osoittaa, että eurooppalaiselle osto-optiolle ja binäärioptiolle pätee

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N = \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right], \tag{3.5}$$

missä yhtälön oikea puoli on lähteessä [**9**] luvussa 6.2.1 laskettu Black-Scholes -malliin perustuva option delta. Seuraavassa lauseessa option diskreetti delta kirjoitetaan hieman erilaiseen muotoon, jonka myötä päästään hyödyntämään Malliavin-laskentaa.

Lause 3.4. *Olkoot $f(x) = se^{\mu T}e^{\sigma x}$ ja $\phi \in \mathcal{C}^{1,1}_{\infty}$. Tällöin*

$$\Delta_N = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] + Q_N,$$

missä $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono reaalilukuja ja

$$\lim_{N\to\infty} Q_N = 0.$$

TODISTUS. Huomataan aluksi, että $f(W_{N\Delta t}) = S_{N\Delta t}$. Esimerkin 1.10 kohdan 3 nojalla $f \in \mathcal{C}^{1,1}$. Kun $(H_{i\Delta t})_{i=1}^N$ on stokastinen prosessi, jolla

$$\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N) D_{j\Delta t} f(W_{N\Delta t}) \neq 0 \quad \text{kaikilla } e_N \in \mathbb{D}_{N,T},$$

lausetta 2.12 soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
&e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right]\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}H_{\cdot\Delta t}}{\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N)D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}H_{i\Delta t}(e_N)}{\sum_{j=1}^N H_{j\Delta t}(e_N)D_{j\Delta t}(S_{N\Delta t})\Delta t}\Delta t\right],
\end{aligned}$$

missä

$$R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right) \leq R_{\phi\circ f}\left(W_{N\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t}$$

ja kuvaus $R_{\phi\circ f}$ on jatkuva. Valitsemalla $H_{i\Delta t} = 1$ kaikilla i, saadaan

$$\begin{aligned}
&e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right]\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^N D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^N D_{j\Delta t}(S_{N\Delta t})\Delta t}\Delta t\right].
\end{aligned}$$

Huomataan, että $e^{\sigma W_{N\Delta t}} = \prod_{j=1}^N e^{\sigma\epsilon_j}$, joten Malliavin-derivaatan määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
D_{i\Delta t}(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}) &= se^{\mu T}\prod_{j\neq i} e^{\sigma\epsilon_j}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}}\right)\\
&= se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}}\right)e^{-\sigma\epsilon_i}.
\end{aligned}$$

Tällöin käyttämällä lauseen 2.12 merkintää $U_{i\Delta t}\left(e_N\right)$, kaikille $i \in \{1, \ldots, N\}$ pätee

$$\begin{aligned}
U_{i\Delta t}\left(e_N\right) &= \frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^N D_{j\Delta t}(S_{N\Delta t})\Delta t}\\
&= \frac{1}{s\Delta t\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}}\sum_{j=1}^N e^{-\sigma\epsilon_j}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s\Delta t}\frac{2\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} \\
&\leq \frac{N}{sT}\frac{2\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\frac{1}{Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\
&= \frac{1}{sT}\frac{2\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.
\end{aligned}
$$

Eksponenttifunktion Taylorin kehitelmän avulla nähdään, että

$$\frac{2\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \to \frac{1}{\sigma}, \qquad \text{kun } \sqrt{\Delta t} \to 0.$$

Lisäksi tiedetään, että

$$\frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \to 1, \qquad \text{kun } \sqrt{\Delta t} \to 0.$$

Edelliset päätelmät yhdistämällä saadaan

$$\frac{1}{sT}\frac{2\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \to \frac{1}{sT\sigma}, \qquad \text{kun } \sqrt{\Delta t} \to 0.$$

Näin ollen $U_{i\Delta t}$ täyttää huomautuksen 2.13 ehdon kaikilla i ja esimerkin 2.14 nojalla

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} R_{N,i}\left(\sqrt{\Delta t}\right)\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}(S_{N\Delta t})\Delta t}\Delta t\right]\right| = 0$$

ja siten

$$
\begin{aligned}
\Delta_N &= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] + Q_N,
\end{aligned}
$$

missä

$$\lim_{N\to\infty} Q_N = 0.$$

$\square$

Option diskreetti delta saadaan siis esitettyä Malliavin-derivaatan ja Skorohod-integraalin avulla. Seuraava tavoite on osoittaa, että rajoitetulle funktiolle ϕ pätee

$$\left|e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right| \underset{N}{\to} 0.$$

Tämä tulos muotoillaan lauseeksi 3.7 ja sen todistuksessa tarvitaan aputuloksia, jotka todistetaan seuraavaksi.

LEMMA 3.5. *On olemassa jonot* $(\gamma_N)_{N\geq 1}$ *ja* $(\eta_N)_{N\geq 1}$ *positiivisia reaalilukuja siten, että* $\lim_{N\to\infty}\gamma_N = 0$*,* $\lim_{N\to\infty}\eta_N = 0$ *ja*

$$\begin{aligned}
&\left|\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right) - \frac{1}{sT\sigma}W_{N\Delta t}\right| \\
&\leq \frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} - 1\right)W_{N\Delta t}\right| + \left|\frac{1}{Nse^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right| \\
&\leq \gamma_N\left|W_{N\Delta t}\right| + \eta_N.
\end{aligned}$$

TODISTUS. Kirjoitetaan aluksi

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right) &= \delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}N}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right)T}\right) \\
&= \frac{1}{sT}\delta\left(\frac{e^{\sigma W_{N\Delta t}}N}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{sT}\delta\left(\frac{e^{\sigma W_{N\Delta t}}N}{\sum_{j=1}^{N} e^{\sigma W_{N\Delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}}\right)e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) \\
&= \frac{1}{sT}\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}}\right)e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) \\
&= \frac{1}{sT\sigma}\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right).
\end{aligned}$$

Nyt siis väitteen vasen puoli saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{sT\sigma}\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) - \frac{1}{sT\sigma}W_{N\Delta t}\right| \\
&= \frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right)\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) - W_{N\Delta t}\right|
\end{aligned}$$

Skorohod-integraalin määritelmän nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\epsilon_i - D_{i\Delta t}\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right)\Delta t\right] \\
&= \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}W_{N\Delta t} - \sum_{i=1}^{N} D_{i\Delta t}\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right)\Delta t
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(i)}{=} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} W_{N\Delta t} - \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}} \sum_{i=1}^{N} \frac{T}{(\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\epsilon_i})}.$$

Edellä viimeinen yhtälö (i) saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
D_{i\Delta t}\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right)\Delta t &= D_{i\Delta t}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right)T \\
&= \frac{T}{2\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{1}{\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} - \frac{1}{\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right) \\
&= \frac{T}{2\sqrt{\Delta t}} \frac{\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - \sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\sqrt{\Delta t}})} \\
&= \frac{T}{2\sqrt{\Delta t}} \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\sqrt{\Delta t}})} \\
&= \frac{T}{2\sqrt{\Delta t}} \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{(\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\epsilon_i})}.
\end{aligned}$$

Edellä tehtyjen laskujen nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{sT\sigma}\left|\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}\delta\left(\frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}}\right) - W_{N\Delta t}\right| \\
&= \frac{1}{sT\sigma}\left|\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} W_{N\Delta t}\right. \\
&\quad \left. - \frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2\sqrt{\Delta t}} \sum_{i=1}^{N} \frac{T}{(\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\epsilon_i})} - W_{N\Delta t}\right| \\
&= \frac{1}{sT\sigma}\left|\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} W_{N\Delta t}\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{N} \frac{T\sigma}{(\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\epsilon_i})} - W_{N\Delta t}\right| \\
&\stackrel{(i)}{\leq} \frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} - 1\right) W_{N\Delta t}\right| \\
&\quad + \frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j})(\sum_{j\neq i} e^{-\sigma\epsilon_j} + e^{\sigma\epsilon_i})}\right| \\
&\stackrel{(ii)}{\leq} \frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} - 1\right) W_{N\Delta t}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\cdot Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right| \\
&=\frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}\frac{N}{\sum_{j=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_j}}-1\right)W_{N\Delta t}\right|+\frac{1}{s}\left|\frac{N}{N^2e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right| \\
&=\frac{1}{sT\sigma}\left|\left(\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}\frac{N}{\sum_{j=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_j}}-1\right)W_{N\Delta t}\right|+\left|\frac{1}{Nse^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right|.
\end{aligned}
$$

Edellä epäyhtälö (i) saadaan termejä siirtämällä ja kolmioepäyhtälöä käyttämällä. Epäyhtälössä (ii) käytetään arviota

$$\left|\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_j}}\right|\leq\left|\frac{1}{Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right|.$$

Nyt voidaan määritellä

$$\eta_N:=\left|\frac{1}{Nse^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}}\right|\to 0,\text{ kun } N\to\infty.$$

Eksponenttifunktion Taylorin kehitelmän avulla nähdään, että

$$\alpha_N:=\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\to 1,\text{ kun } N\to\infty.$$

Koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava ja $-\sqrt{\Delta t}\leq-\epsilon_i\leq\sqrt{\Delta t}$, saadaan

$$Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\leq\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_i}\leq Ne^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

ja edelleen

$$\frac{N}{Ne^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}\leq\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_i}}\leq\frac{N}{Ne^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.$$

Nyt edellisissä epäyhtälöissä pätee

$$\frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}\to 1\text{ ja }\frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\to 1,\text{ kun } N\to\infty,$$

joten myös

$$\beta_N:=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}e^{-\sigma\epsilon_i}}\to 1.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$|\alpha_N\beta_N-1|=|\alpha_N\beta_N-\alpha_N+\alpha_N-1|$$

$$
\begin{aligned}
&\le |\alpha_N||\beta_N - 1| + |\alpha_N - 1| \\
&\le |\sup_{N'} \alpha_{N'}||\beta_N - 1| + |\alpha_N - 1| \\
&\le |1 + \sup_{N'} \alpha_{N'}| \left[|\beta_N - 1| + |\alpha_N - 1|\right] \\
&\underset{N}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Tällöin siis

$$
\frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}}{\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)} \frac{N}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\sigma\epsilon_j}} \to 1.
$$

Nyt tiedetään, että on olemassa jono $(\gamma_N)_{N\ge 1}$ positiivisia reaalilukuja, joille

$$
\frac{1}{sT\sigma} |\alpha_N \beta_N - 1| \le \gamma_N \quad \text{ja} \quad \lim_{N\to\infty} \gamma_N = 0.
$$

Lisäksi tiedetään, että $\lim_{N\to\infty} \eta_N = 0$. Tästä seuraa väite

$$
\left| \delta\left(\frac{e^{\mu T} e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t} \right) - \frac{1}{sT\sigma} W_{N\Delta t} \right| \le \gamma_N \left|W_{N\Delta t}\right| + \eta_N.
$$

□

Lauseen 3.7 todistamiseksi tarvitaan vielä arvio odotusarvolle $\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right|$. Lasketaan se seuraavaksi.

Lause 3.6. *Olkoon $\left(W_{N\Delta t}\right)_{N\ge 0}$ diskreetti satunnaiskävely. Tällöin kaikilla $N \in \mathbb{N}$*

$$
\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right| \le \left(\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}.
$$

Todistus. Hölderin epäyhtälöstä saadaan

$$
\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right| \le \left(\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k\right|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k\right)\left(\sum_{l=1}^{N} \epsilon_l\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \epsilon_k \epsilon_l\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[\epsilon_k^2\right] + \sum_{k\ne l} \mathbb{E}\left[\epsilon_k \epsilon_l\right] \\
&= T.
\end{aligned}
$$

□

Nyt ollaan saatu todistettua tarvittavat aputulokset ja voidaan todistaa tavoitteena ollut lause.

LAUSE 3.7. *Olkoon ϕ rajoitettu funktio. Tällöin*

$$\lim_{N\to\infty}\left|e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]-\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right|=0.$$

TODISTUS. Lemmasta 3.5 saadaan arvio

$$\left|\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)-\frac{1}{sT\sigma}W_{N\Delta t}\right|\leq\gamma_N\left|W_{N\Delta t}\right|+\eta_N,$$

missä $\gamma_N \underset{N}{\longrightarrow} 0$ ja $\eta_N \underset{N}{\longrightarrow} 0$. Oletuksen mukaan kuvaus ϕ on rajoitettu, joten on olemassa $M<\infty$ siten, että $|\phi(x)|\leq M$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]-\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right|\\
&=\left|e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\left(\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)-\frac{1}{sT\sigma}W_{N\Delta t}\right)\right]\right|\\
&\leq e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\right|\left|\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)-\frac{1}{sT\sigma}W_{N\Delta t}\right|\right]\\
&\leq e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\right|\left(\gamma_N\left|W_{N\Delta t}\right|+\eta_N\right)\right]\\
&\leq e^{-rT}\mathbb{E}\left[M\left(\gamma_N\left|W_{N\Delta t}\right|+\eta_N\right)\right]\\
&\leq e^{-rT}M\left(\gamma_N T^{\frac{1}{2}}+\eta_N\right)\underset{N}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}$$

Edellä viimeinen epäyhtälö seuraa lauseesta 3.6. □

Seuraava tavoite on osoittaa, että yhtälö (3.5) pätee, kun kuvaus ϕ täyttää lauseen 3.4 oletukset ja on lisäksi rajoitettu. Tätä tulosta varten tarvitaan seuraava lause.

LAUSE 3.8. *Jatkuvalle ja rajoitetulle funktiolle ϕ pätee*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]=\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right],$$

missä $g\sim N\left(0,T\right)$.

TODISTUS. Ehto

$$\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t}\right|^2=T$$

takaa, että perhe $(W_{N\Delta t})_{N\geq1}$ on tasaisesti integroituva. Tasaisen integroituvuuden määritelmä ja tarvittava tulos löytyvät liitteestä A. Olkoon $c>0$. Määritellään funktio $T_c\colon\mathbb{R}\to[-c,c]$ seuraavasti:

$$T_c(x) = \begin{cases} c, & \text{kun } x > c \\ x, & \text{kun } x \in [-c, c] \\ -c, & \text{kun } x < -c. \end{cases}$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})W_{N\Delta t}\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&= |\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] + \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})\left(W_{N\Delta t} - T_c(W_{N\Delta t})\right)\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})\left(W_{N\Delta t} - T_c(W_{N\Delta t})\right)\right]\right|.
\end{aligned}$$

Koska $|\phi(x)| \leq M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jälkimmäiselle termille pätee

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})\left(W_{N\Delta t} - T_c(W_{N\Delta t})\right)\right]\right| &\leq M\mathbb{E}\left|W_{N\Delta t} - T_c(W_{N\Delta t})\right| \\
&\leq M \sup_{N' \geq 1} \mathbb{E}\left|W_{N'\Delta t} 1_{\{|W_{N'\Delta t}| > c\}}\right|.
\end{aligned}$$

Vastaavasti ensimmäiselle termille pätee

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right] + \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right]\right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right]\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right]\right| + M\mathbb{E}\left|g 1_{\{g > c\}}\right|.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset päätelmät saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})W_{N\Delta t}\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right]\right| + M\mathbb{E}\left|g 1_{\{g > c\}}\right|. \\
&\quad + M \sup_{N' \geq 1} \mathbb{E}\left|W_{N'\Delta t} 1_{\{|W_{N'\Delta t}| > c\}}\right|.
\end{aligned}$$

Keskeisen raja-arvolauseen nojalla tiedetään, että

$$W_{N\Delta t} \implies g, \text{ missä } g \sim N(0, T).$$

Lisäksi kuvaukset ϕ ja T_c ovat jatkuvia ja rajoitettuja, joten

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}})T_c(W_{N\Delta t})\right] - \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})T_c(g)\right]\right| \underset{N}{\rightarrow} 0.$$

Perhe $(W_{N\Delta t})_{N \geq 1}$ on tasaisesti integroituva, joten

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{N'\geq 1}\mathbb{E}\left|W_{N'\Delta t}1_{\{|W_{N'\Delta t}|>c\}}\right| = 0.$$

Lisäksi

$$M\mathbb{E}\left|g1_{\{g>c\}}\right| \to 0, \quad \text{kun } c\to\infty.$$

Tällöin siis

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] = \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]. \qquad \square$$

SEURAUS 3.9. *Jatkuvalle ja rajoitetulle funktiolle ϕ pätee*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] = \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right].$$

TODISTUS. Lauseista 3.7 ja 3.8 saadaan

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N}D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right| \\
&+ \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\underset{N}{\to} 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nyt seurauksesta 3.9 ja lauseesta 3.4 saadaan tulos, jonka mukaan diskreetti delta suppenee Black-Scholes -mallin mukaiseen deltaan, kun option tuottofunktio ϕ täyttää lauseen 3.4 oletukset ja on lisäksi rajoitettu.

SEURAUS 3.10. *Olkoot $f(x) = se^{\mu T}e^{\sigma x}$ ja $\phi \in \mathcal{C}_{\infty}^{1,1}$ rajoitettu kuvaus. Tällöin $S_{N\Delta t} = f\left(W_{N\Delta t}\right)$ ja option $\phi\left(S_{N\Delta t}\right)$ diskreetille deltalle Δ_N pätee*

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N = \lim_{N\to\infty}e^{-rT}\mathbb{E}\left[\phi'\left(S_{N\Delta t}\right)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}\right] = \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right].$$

3.3. Eurooppalainen osto-optio ja binäärioptio

Aiemmin option tuottofunktion on oletettu olevan derivoituva ja rajoitettu. Esimerkiksi eurooppalaisen osto-option tuottofunktio ja binäärioption tuottofunktio eivät täytä näitä oletuksia.

MÄÄRITELMÄ 3.11 (C^2-approksimaatio). Olkoot $L\in\mathbb{N}$ ja $\phi\colon\mathbb{R}\to[0,\infty]$ mitallinen kuvaus. Olkoot lisäksi $0<K_1<K_2<\cdots<K_L<M<\infty$. Määritellään kaikille $\eta>0$

$$I_i^{\eta} := \left]K_i-\eta, K_i+\eta\right[\quad \text{ja} \quad I^{\eta} := \bigcup_{i=1}^{L}I_i^{\eta}.$$

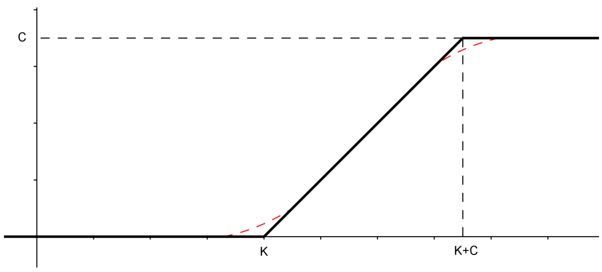
Sanotaan että kuvaukselle ϕ on olemassa yksinkertainen C^2-approksimaatio, jos seuraavat ehdot pätevät:

- $0 \leq \phi(x) \leq M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja kuvaus ϕ on vakio väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[M, \infty[$.
- Kaikille $\eta \in \left]0, \frac{K_1}{2}\right[$, joilla
$$I_i^{2\eta} \cap I_j^{2\eta} = \emptyset \text{ kun } i \neq j,$$
on olemassa kuvaus $\phi_\eta \in C^2(\mathbb{R})$, jolle pätee $0 \leq \phi_\eta(x) \leq M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja
$$\phi_\eta(x) = \phi(x) \quad \text{kaikilla } x \notin I^\eta.$$

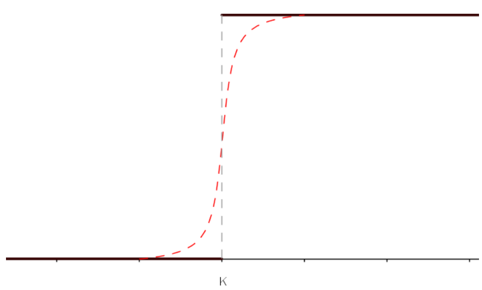
Tarkastellaan tässä luvussa eurooppalaisia osto-optiota, jotka ovat muotoa

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < K \\ x - K, & \text{kun } K \leq x < K + C \\ C, & \text{kun } K + C < x. \end{cases}$$

Kaikilla $\eta > 0$ eurooppalaiselle osto-optiolle on olemassa yksinkertainen C^2-approksimaatio väleillä $]K - \eta, K + \eta[$ ja $]K + C - \eta, K + C + \eta[$, missä $0 < 2\eta < C$.



KUVA 3.1. Eurooppalainen osto-optio



KUVA 3.2. Binäärioptio

Binäärioption tapauksessa tuottofunktio on

$$\phi(x) = 1_{\{x > K\}}.$$

Funktio on rajoitettu ja sille on olemassa yksinkertainen C^2-approksimaatio välillä $]K - \eta, K + \eta[$. Seuraava lause on yleisempi versio seurauksesta 3.9 ja sen avulla voidaan laskea delta esimerkiksi edellä mainituille eurooppalaiselle osto-optiolle ja binäärioptiolle.

LAUSE 3.12. *Olkoon $\phi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ mitallinen kuvaus, jolle on olemassa yksinkertainen C^2-approksimaatio. Tällöin*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] = \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right].$$

TODISTUS. Arvioidaan aluksi erotusta lisäämällä termejä ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right| \\
&\quad + \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right| \\
&\quad + \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\quad + \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right|.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan epäyhtälön oikeaa puolta pala kerrallaan. Otetaan käyttöön selkeyttävät merkinnät

$$\begin{aligned}
A_N &:= \left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right|, \\
B_{N,\eta} &:= \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right]\right|, \\
C_{N,\eta} &:= \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right)W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right|, \\
D_\eta &:= \left|\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right|.
\end{aligned}$$

Funktiolle ϕ pätee $0 \leq \phi(x) \leq M$ kaikilla x. Tällöin lauseen 3.7 nojalla

$$A_N = \left| \mathbb{E}\left[e^{-rT} \phi\left(S_{N\Delta t}\right) \delta \left(\frac{e^{\mu T} e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right) \Delta t} \right) \right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right) W_{N\Delta t}\right] \right|$$
$$\underset{N}{\longrightarrow} 0.$$

Kuvaus ϕ_η on jatkuva ja rajoitettu, joten se täyttää lauseen 3.8 oletukset ja siten kaikilla η

$$C_{N,\eta} = \left| \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right) W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T} e^{\sigma g}) g\right] \right|$$
$$\underset{N}{\longrightarrow} 0.$$

Funktiot ϕ ja ϕ_η ovat rajoitettuja. Tällöin

$$\begin{aligned} D_{N,\eta} &= \left| \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\phi_\eta(se^{\mu T} e^{\sigma g}) g\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T} e^{\sigma g}) g\right] \right| \\ &= \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \left| \mathbb{E}\left[\left(\phi_\eta(se^{\mu T} e^{\sigma g}) - \phi(se^{\mu T} e^{\sigma g}) \right) g \right] \right| \\ &\leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} \mathbb{E}\left[\left| \phi_\eta(se^{\mu T} e^{\sigma g}) - \phi(se^{\mu T} e^{\sigma g}) \right| |g| \right]. \end{aligned}$$

Oletusten mukaan $(\phi_\eta - \phi)(x)$ voi erota nollasta vain kun $x \in I_i^\eta$ jollain $i \in \{1, \dots, L\}$. Määritellään

$$a_i^\eta := \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K_i - \eta}{se^{\mu T}} \right)$$

ja

$$b_i^\eta := \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K_i + \eta}{se^{\mu T}} \right).$$

Nyt siis $(\phi_\eta - \phi)(se^{\mu T} e^{\sigma g})$ voi erota nollasta vain kun $g \in [a_i^\eta, b_i^\eta]$ jollain $i \in \{1, 2, \dots, L\}$. Tällöin saadaan edelleen

$$\begin{aligned} D_{N,\eta} &\leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} M \sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}\left[|g| \, 1_{\left\{ g \in \left[a_i^\eta, b_i^\eta\right] \right\}} \right] \\ &\leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} M \sup_{i \in \{1,\dots,L\}} \max\left\{ |a_i^\eta|, |b_i^\eta| \right\} \sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}\left[1_{\left\{ g \in \left[a_i^\eta, b_i^\eta\right] \right\}} \right]. \end{aligned}$$

Nyt

$$\lim_{\eta \to 0} a_i^\eta = \lim_{\eta \to 0} b_i^\eta = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{K_i}{se^{\mu T}} \right),$$

joten satunnaismuuttujan g tiheysfunktion jatkuvuuden nojalla

$$\mathbb{E}\left[1_{\{g\in]a_i^\eta,b_i^\eta[\}}\right] \to 0, \text{ kun } \eta \to 0.$$

Edelleen kaikilla N pätee

$$D_{N,\eta} \to 0, \quad \text{kun } \eta \to 0.$$

Viimeiselle termille $B_{N,\eta}$ pätee

$$\begin{aligned}
B_{N,\eta} &= \left| \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi\left(S_{N\Delta t}\right) W_{N\Delta t}\right] - \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right) W_{N\Delta t}\right] \right| \\
&\leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(S_{N\Delta t}\right) - \phi_\eta\left(S_{N\Delta t}\right)\right| \left|W_{N\Delta t}\right|\right] \\
&\leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} M\mathbb{E}\left[\left|W_{N\Delta t} 1_{\{S_{N\Delta t}\in I^\eta\}}\right|\right].
\end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälöllä saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|W_{N\Delta t} 1_{\{S_{N\Delta t}\in I^\eta\}}\right|\right] &\leq \left(\mathbb{E}\left[\left|W_{N\Delta t}\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\left|1_{\{S_{N\Delta t}\in I^\eta\}}\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[1_{\{S_{N\Delta t}\in I^\eta\}}\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nyt kaikille K_i löytyy C^2-funktio $\varphi_{K_i,\eta}$, jolle pätee

- $\varphi_{K_i,\eta}(x) \leq 1$ kaikilla x,
- $1_{\{x\in I_i^\eta\}}(x) \leq \varphi_{K_i,\eta}(x)$ ja
- $\varphi_{K_i,\eta}(x) = 0$ kaikilla $x \notin]K_i - 2\eta, K_i + 2\eta[$.

Nyt edellisten ominaisuuksien ja heikon suppenemisen nojalla kaikille $i = 1, \ldots, L$ saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{\{S_{N\Delta t}\in I_i^\eta\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(S_{N\Delta t})\right] \\
&\underset{N}{\to} \mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(se^{\mu T}e^{\sigma g})\right].
\end{aligned}$$

Tällöin satunnaismuuttujan g tiheysfunktion jatkuvuuden nojalla tiedetään erityisesti, että

$$\begin{aligned}
\limsup_N \mathbb{E}\left[1_{\{S_{N\Delta t}\in I_i^\eta\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(se^{\mu T}e^{\sigma g})\right] \\
&\to 0, \quad \text{kun } \eta \to 0.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset päättelyt saadaan arvio

$$B_{N,\eta} \leq \frac{e^{-rT}}{sT\sigma} M T^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(S_{N\Delta t})\right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyt pätee

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]-\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq A_N + B_{N,\eta} + C_{N,\eta} + D_{N,\eta} \\
&\leq A_N + \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}MT^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(S_{N\Delta t})\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_{N,\eta} + \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}M\sup_{i\in\{1,\ldots,L\}}\max\left\{|a_i^\eta|,|b_i^\eta|\right\}\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[1_{\left\{g\in]a_i^\eta,b_i^\eta[\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Nyt kaikki epäyhtälön oikealla puolella olevat jonot ovat rajoitettuja, joten yläraja-arvon ominaisuuksien nojalla

$$
\begin{aligned}
&\limsup_N\left|\mathbb{E}\left[e^{-rT}\phi\left(S_{N\Delta t}\right)\delta\left(\frac{e^{\mu T}e^{\sigma W_{N\Delta t}}}{\sum_{j=1}^{N} D_{j\Delta t}\left(S_{N\Delta t}\right)\Delta t}\right)\right]-\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}\mathbb{E}\left[\phi(se^{\mu T}e^{\sigma g})g\right]\right| \\
&\leq \limsup_N\left(A_N\right) + \limsup_N\left(\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}MT^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(S_{N\Delta t})\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad + \limsup_N\left(C_{N,\eta}\right) + \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}M\sup_{i\in\{1,\ldots,L\}}\max\left\{|a_i^\eta|,|b_i^\eta|\right\}\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[1_{\left\{g\in]a_i^\eta,b_i^\eta[\right\}}\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}MT^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(se^{\mu T}e^{\sigma g})\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}M\sup_{i\in\{1,\ldots,L\}}\max\left\{|a_i^\eta|,|b_i^\eta|\right\}\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[1_{\left\{g\in]a_i^\eta,b_i^\eta[\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Lauseen alkuperäinen väite seuraa tästä, koska

$$
\begin{aligned}
&\frac{e^{-rT}}{sT\sigma}MT^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[\varphi_{K_i,\eta}(se^{\mu T}e^{\sigma g})\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{e^{-rT}}{sT\sigma}M\sup_{i\in\{1,\ldots,L\}}\max\left\{|a_i^\eta|,|b_i^\eta|\right\}\sum_{i=1}^{L}\mathbb{E}\left[1_{\left\{g\in]a_i^\eta,b_i^\eta[\right\}}\right] \\
&\to 0, \qquad \text{kun } \eta\to 0.
\end{aligned}
$$

□

LIITE A

1.1. Binomikertoimet

Lemma A.1. *Olkoot $N, k \in \mathbb{N}$ ja $0 < k \leq N$. Tällöin*

$$\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}.$$

1.2. Tasainen integroituvuus

Määritelmä A.2. Satunnaismuuttujaperhe $\{X_i\}_{i\geq 1}$ on tasaisesti integroituva, jos

$$\sup_i \mathbb{E}\left[|X_i|\, 1_{\{|X_i|>c\}}\right] \to 0, \qquad \text{kun } c \to \infty.$$

Lemma A.3. *Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ jono satunnaismuuttujia ja $G\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ kasvava funktio, jolle pätee*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$$

ja

$$\sup_i \mathbb{E}\left[G(|X_i|)\right] < \infty.$$

Tällöin perhe $\{X_i\}_{i\geq 1}$ on tasaisesti integroituva.

Lisää tietoa tasaisesta integroituvuudesta löytyy lähteestä [**12**] sivulta 188 alkaen.

1.3. Heikko suppeneminen

Määritelmä A.4. Olkoot $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ ja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruuksia sekä $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia. Jono $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee heikosti satunnaismuuttujaan X, jos kaikille jatkuville ja rajoitetuille kuvauksille $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(X_n\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X\right)\right).$$

Heikolle suppenemiselle käytetään merkintää $X_n \implies X$.

Lemma A.5. *Olkoot* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *ja* X *satunnaismuuttujia sekä* F_n *ja* F *vastaavat kertymäfunktiot. Tällöin*

$$X_n \implies X$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

kaikilla funktion F *jatkuvuuspisteillä* x.

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [**1**] sivulta 24 alkaen. □

Lause A.6 (Keskeinen raja-arvolause). *Olkoon* $\{X_1, X_2, \dots\}$ *jono riippumattomia ja samoinjakautuneita satunnaismuuttujia, joilla*

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu \quad ja \quad 0 < \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)^2 = \sigma^2 < \infty.$$

Merkitään lisäksi $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

eli jono $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$ *suppenee heikosti kohti nomaalijakautunutta satunnaismuuttujaa* $g \sim N(0,1)$.

Todistus. Todistus löytyy lähteestä [**12**] sivulta 326. □

Lähdeluettelo

[1] Patrick Billingsley: *Convergence of Probability Measures.* John Wiley & Sons, Inc., 1999.
[2] Richard Courant and Fritz John: *Introduction to Calculus and Analysis I.* Springer, 1999.
[3] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 1991.
[4] Anthony W. Knapp: *Basic Real Analysis.* Birkhäuser Boston, 2005.
[5] Ralf Korn and Stefanie Müller: *Binomial Trees in Option Pricing - History, Practical Applications and Recent Developments.* In: L. Devroye et al. (eds.), Recent Developments in Applied Probability and Statistics (2010) 59-77.
[6] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre: *Intoduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman & Hall, 1996.
[7] Martin Leitz-Martini: *A discrete Clarck-Ocone formula.* MaPhySto Research Report, 2000. http://www.maphysto.dk/publications/MPS-RR/2000/29.pdf (luettu 19.11.2015).
[8] Yoshifumi Muroi and Shintaro Suda: *Discrete Malliavin calculus and computations of greeks in the binomial tree.* European Journal of Operational Research 231 (2013) 349-361.
[9] David Nualart: *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer, 2006.
[10] Nicolas Privault: *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings.* Springer, 2009.
[11] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, Inc. 1974.
[12] Al'bert Nikolaevich Shiryaev: *Probability.* Springer, 1996.
[13] Steven Shreve: *Stochastic Calculus for Finance I - The Binomial Asset Pricing Model.* Springer, 2004.