Dynaamisen matematiikan ohjelmiston hyödyntäminen analyysin peruskäsitteiden opetuksessa

Mikko Iltanen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016

Tiivistelmä

Iltanen, Mikko. 2016. Dynaamisen matematiikan ohjelmiston hyödyntäminen analyysin peruskäsitteiden opetuksessa. Matematiikan pro gradu -työ, 36 sivua. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Tämän tutkielman tarkoitus oli tuottaa tehtäviä sekä niihin liittyviä GeoGebra-applikaatioita Jyväskylän yliopiston "Johdatus matemaattiseen analyysiin 1"-kurssin käytettäväksi. Tutkielmassa käytettävä GeoGebra-sovellus on ilmainen visuaalisen käyttöliittymän dynaaminen matematiikkaohjelma. Dynaamisuuden etuna on, että käyttäjän tekemät muutokset esimerkiksi funktioihin ovat nähtävissä reaaliajassa. GeoGebran avulla luotiin valmiit sovellukset, joita opiskelijat pystyvät käyttämään ilman aiempaa tuntemusta GeoGebrasta.

Tehtävät jaoteltiin aihealueittain siten, että kurssin keskeiset asiat tulisivat mahdollisimman laajasti esiteltyä. Nämä aihealueet ovat vaikeat funktiot, supremum ja infimum, epsilon-delta-menetelmä, matemaattiset jonot sekä konvergenssikriteeriot.

Vaikeat funktiot -osio käsittelee analyysin kurssilla esiintyviä funktioita, jotka ovat abstraktin luonteensa vuoksi vaikeita hahmottaa. Tutkielman tehtävissä opiskelijat pääsevät käsittelemään GeoGebralla funktioita reaaliajassa. Tehtävät visualisoivat vaikeat funktiot konkreettisiksi kuvaajiksi. Kun tehtävien funktioita myöhemmin käytetään analyysin opetuksen yhteydessä, opiskelijoilla on paremmat valmiudet ymmärtää opetettava asia.

Supremum ja infimum -osio käsittelee kurssilla keskeisessä osassa olevia käsitteitä pienin yläraja (supremum) ja suurin alaraja (infimum). Näiden opiskelussa käytetään yleensä abstrakteja joukkoja, joiden supremumia ja infimumia tutkitaan. Tällaisten abstraktien joukkojen ymmärtäminen voi olla opiskelijoille vaikeaa. Tutkielman tehtävissä käytetäänkin joukkoja, joilla on selkeä geometrinen tulkinta. Tämän ansiosta opiskelijat voivat tutkia niitä GeoGebran avulla ja konkreettisesti nähdä miten supremum ja infimum muodostuvat.

Epsilon-delta-määritelmä on yksi analyysin perusteiden vaikeimmista aiheista. Määritelmän sisällä on lukuisia yksityiskohtia, jotka kaikki tulee ymmärtää, jotta määritelmän kokonaisuuden voi sisäistää. Tutkielman tehtävissä visualisoidaan määritelmän osia ja johdatellaan opiskelijoita tutkimaan määritelmää GeoGebran avulla. Dynaamisen ohjelman ansiosta opiskelijat voivat esimerkiksi raahamalla ruudulla näkyviä objekteja havainnoida epsilonin ja deltan suhdetta, sekä tehdä muita määritelmän kannalta oleellisia huomioita.

Matemaattisia jonoja käsittelevässä luvussa jonoja havainnollistetaan aluksi funktioiden kautta. Lukion käyneille opiskelijoille funktiot ovat tuttuja ja tällä lähestymistavalla pyritään helpottamaan jonojen tutkimisen aloittamista. Varsinaista jonojen analyysiä päästään tekemään jonojen raja-arvoa käsittelevässä tehtävässä. Myös osajonoja käsitellään omassa tehtävässään, jossa opiskelija pääsee GeoGebran avulla itse tuottamaan niitä valmiiksi annetuista jonoista.

Tutkielman viimeisessä luvussa käsitellään konvergenssikriteerioita, jotka ovat ehtoja jonon suppenemiselle. Tutkielma käsittelee näistä kahta, suppiloperiaatetta sekä monotonisten jonojen suppenevuusehtoa. Ehtojen avulla suppeneminen voidaan todistaa ilman raskasta epsilon-delta-menetelmää. Luvun tehtävissä visualisoidaan jonoja GeoGebralla ja kannustetaan opiskelijoita omaan ajatteluun.

Sisältö

1. Johdanto

Tietotekniikan käyttäminen opetusvälineenä on saanut runsaasti huomiota viime aikoina ja se on noussut yhdeksi painopisteeksi uusissa opetussuunnitelmissa, niin peruskoulussa kuin ylemmilläkin asteilla. Esimerkiksi lukion opetussuunnitelmaan 2015 [**5**][s. 15] on kirjattu: ”Opiskelijoita ohjataan hyödyntämään digitaalisia opiskeluympäristöjä, oppimateriaaleja ja työvälineitä eri muodossa esitetyn informaation hankintaan ja arviointiin sekä uuden tiedon tuottamiseen ja jakamiseen.” Tätä taustaa vasten myös opetusmenetelmiä on syytä päivittää digitaalisempaan suuntaan kaikilla koulutusasteilla.

Matematiikassa opiskelijoilla on jo kymmeniä vuosia ollut käytössään graafisia laskimia, joiden avulla opiskelijat voivat itse piirtää alkeisfunktioiden kuvaajia. Merkittävänä kehityksenä viime vuosina ovat yleistyneet ns. dynaamiset ohjelmistot, jotka mahdollistavat reaaliaikaiset muutokset tuotetuissa kuvissa. Tällaisia on esimerkiksi uudenaikaisissa CAS-laskimissa, sekä tämän tutkimuksen käyttämässä GeoGebrassa.

Tietotekniikan hyödyntämistä opetuksessa on tutkittu runsaasti. Vuonna 2011 julkaistussa Coryn ja Garafalon tutkimuksessa [**4**] tutkittiin erityisesti dynaamisen ohjelmiston vaikutusta opetukseen. Tutkimuksen mukaan dynaamista ohjelmistoa käyttäneet opiskelijat kykenivät tarjotun sovelluksen avulla tutkimaan omia näkemyksiään tutkittavasta aiheesta. Tämän ansiosta opiskelijat kykenivät muokkaamaan oletuksiaan ja vahvistamaan oppimistaan. Tutkimus myös tuki sitä näkemystä, että opiskelija kykenee dynaamisen ohjelmiston avulla yhdistämään visuaalisen esityksen teoreettisiin määritelmiin, vaikka määritelmät olisivat abstrakteja.

Tämän tutkielman tarkoituksena on luoda tehtäviä yliopistotason analyysin alkeiden opetuksen tueksi visualisoimaan ja antamaan erilaisia lähestymistapoja käsiteltäviin aiheisiin. Keskeisenä työkaluna tehtävissä käytetään GeoGebra ohjelmaa, jonka avulla tuotettiin matemaattiset sovellukset tehtävien tueksi. Sovellukset löytyvät GeoGebraTubesta linkistä https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4. Lisäksi jokaisen tehtävän yhteydessä on linkki vastaavaan GeoGebra-sovellukseen.

Sovelluksista on tehty yksinkertaisia ja käyttäjäystävällisiä. Tällöin myös digitaalisiin tehtäviin ja ohjelmiin perehtymättömät opiskelijat pystyvät käyttämään sovelluksia ilman suurta kynnystä. Lisäksi tehtäviin käytettävästä ajasta mahdollisimman suuri osa jää varsinaiseen matemaattiseen analyysiin, teknisten yksityiskohtien harjoittelun sijaan. Tehtävät on suunniteltu erityisesti Jyväskylän yliopistoa ajatellen ja niiden sisältö noudattelee Jyväskylän yliopiston ”Johdatus matemaattiseen analyysiin 1”-kurssin sisältöä. Myös tehtävien järjestys on samankaltainen kuin kurssilla. Kaikki tehtävät ovat erillisiä ja käytettävissä ilman muita tehtäviä.

2. GeoGebra

2.1. Mikä on GeoGebra? GeoGebra on matemaattiseen työskentelyyn tarkoitettu ilmainen sovellus, jota voi käyttää tietokoneella, tabletilla tai jopa älypuhelimella. GeoGebrassa on dynaaminen ohjelmisto, jonka avulla voi esittää algebraa ja geometriaa havainnollisesti. GeoGebra sisältää myös taulukkolaskentaosion sekä CAS-laskentaan tarkoitetun osion, mutta niitä ei tässä tutkielmassa käsitellä. GeoGebran voi ladata ilmaiseksi osoitteesta www.geogebra.org. Kyseiseltä sivulta löytyy myös paljon valmiita GeoGebra-sovelluksia, sekä laaja valikoima käyttöohjeita.

GeoGebra on suunniteltu tekemään matematiikan oppimisesta visuaalista ja motivoivaa. Kaikkia GeoGebran avulla luotuja objekteja voi lähes vapaasti raahata ja muokata näytöllä, olivatpa ne sitten funktioita tai geometrisia kappaleita. Erityisen kätevän tästä ominaisuudesta tekee se, että GeoGebra seuraa reaaliaikaisesti esimerkiksi funktioiden muutosta. Voit esimerkiksi aloittaa piirtämällä paraabelin $y = x^2+2$. Tämän jälkeet voit raahata paraabelia pitkin näyttöä ja katsoa reaaliajassa miten paraabelin yhtälö muuttuu. Tässä pääsee vielä pidemmälle, jos ensin luo parametrit a, b ja c ja sen jälkeen paraabelin $y = ax^2 + bx + c$. Tällöin paraabelin raahaaminen johtaa automaattisesti parametrien a, b ja c muutoksiin. Voit myös muokata parametreja ja paraabeli muuttuu sen mukaan. Tällainen on erittäin havainnollistavaa ja selventääkin tehokkaasti muuttujien vaikutusta paraabelin muotoon ja sijaintiin.

2.2. Miksi GeoGebra? GeoGebra valikoitui käytettäväksi ohjelmaksi varsin helposti. Tarkoituksena oli tuottaa visuaalista materiaalia matemaattisen analyysin tarkoituksiin ja GeoGebran vahvuus on erityisesti visuaalisuudessa. Toisaalta ohjelma on ilmainen, monipuolinen ja helposti muokattavissa. Esimerkiksi valmiiden sovellusten tuottamisessa alkuun pääsee helposti.

Opettajan näkökulmasta GeoGebra on käytännöllinen työkalu. GeoGebra mahdollistaa valmiiden sovellusten luomisen, jotka opiskelijat voivat avata omilta laitteiltaan. Tällöin vältytään tarpeettomilta teknisiltä yksityiskohdilta, joiden opettaminen veisi ylimääräistä aikaa. Pienelläkin vaivalla saa käteviä sovelluksia GeoGebran omalla ohjelmointityökalulla, joka on varsin käyttäjäystävällinen. Kokeneemmille ohjelmoijille on myös mahdollisuus käyttää JavaScript pohjaista ohjelmointia, joka mahdollistaa huomattavasti monimutkaisempien sovellusten luomisen.

GeoGebraa on suosittu myös monissa muissa tutkimuksissa. Jyväskylän yliopistolla aihetta ovat viime vuosina pro gradu -tutkielmissaan käsitelleet mm. Antti Laitamäki (GeoGebra-ohjelma kostruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen matematiikanopetuksen tukena) ja Marjo Yli-Tokola (Lukiolaisten matemaattinen päättely GeoGebra-avusteisessa tutkivassa matematiikassa).

2.3. GeoGebran ongelmia ja ratkaisuja. GeoGebran hienouksiin kuuluu sen eräänlainen sisäinen tarkkailija-malli (eng. observer). Tämän avulla käyttäjä voi luoda vaikkapa suoran $ax+b$ ja muuttamalla vakiota a hän näkee suoran kulmakertoimen muuttuvan. Tämä ominaisuus aiheuttaa kuitenkin jonkin verran ongelmia valmiiden sovellusten luonnin kannalta. Tutkielmaa tehtäessä havaittiin, että esimerkiksi perinteisesti ohjelmoinnissa käytettäviä for-silmukoita ei GeoGebran omasta ohjelmointikielestä löytynyt.

Esimerkiksi for-silmukoiden puuttuminen ratkaistiin käyttämällä JavaScript-ohjelmointikieltä niissä kohdissa, joissa GeoGebran oma ohjelmointikieli ei ollut riittävää. JavaScriptiin voi GeoGebrassa vaihtaa yhdellä klikkauksella. Valmiiden metodien avulla voidaan tämän jälkeen antaa käskyjä GeoGebralle. Tämä on melko kömpelöä ja aikaa vievää, mutta mahdollistaa todella monipuolisten sovellusten luomisen.

3. Analyysin peruskäsitteiden matemaattista teoriaa

Tässä luvussa esitetään muutamia keskeisimpiä määritelmiä ja lauseita, joihin tutkielmassa viitataan. Tutkielman tarkoitus on esittää tehtäviä analyysin ensimmäisen kurssin asioista, joten koko teorian läpikäyminen edes tiivistetysti yhdessä luvussa olisi mahdotonta. Siispä keskitytään aivan oleellisempiin asioihin. Aiheesta kiinnostuneille suositellaan kirjallisuutta, jota löytyy paljon. Esimerkiksi tämän tutkielman lähteet ([**1**] ja [**2**]) ovat helppolukuisia ja laajoja.

Matematiikan yksi keskeinen piirre on, että kaikki tulokset perustuvat annettuihin aksioomiin, määritelmiin ja näistä johdettuihin lauseisiin. Tutkielmassa analyysin perusteina käytetyt lähdeteokset ([**1**] ja [**2**]) esittävät aluksi reaalilukuaksioomat, joiden perusteelta lähdetään analyysiä tekemään. Nämä aksioomat löytyvät esimerkiksi koottuna Spivakin kirjasta Calculus ([**1**, s.9]). Listauksesta puuttuu täydellisyysaksiooma, joka otetaan esille vasta useita lukuja myöhemmin.

3.1. Funktiot. Tärkeä osa analyysistä käsittelee funktioita. Näitä on ennen analyysin kurssia käsitelty lukiossa runsaasti. Tämän tutkielman kannalta riittää tieto, että funktio liittää määrittelyjoukon jokaiseen pisteeseen täsmälleen yhden maalijoukon pisteen. Calculuksessa funktiot määritellään myös täsmällisesti relaationa ([**1**, s.47]), mutta tuota määritelmää ei alkeellisessa analyysissä vielä käytetä.

3.2. Raja-arvot ja jatkuvuus funktioille. Funktiolle määritellään raja-arvo pisteessä x_0 ns. epsilon-delta-määritelmällä

Määritelmä 3.1. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, $x_0 \in I$ ja $f : I \to \mathbb{R}$. Funktiolla f on raja-arvo a pisteessä x_0, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon, \quad \text{kun } x \in I \text{ ja } |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Jatkuvuus voidaan määritellä hyödyntäen raja-arvoa.

Määritelmä 3.2. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jatkuville funktioille pätee muutamia keskeisiä lauseita. Näistä tunnetuin lienee Bolzanon lause.

Lause 3.3 (Bolzano). *Olkoon f suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, jolle pätee $f(a) < 0 < f(b)$. Tällöin on olemassa $x \in [a, b]$ siten, että $f(x) = 0$.*

Todistus. [**1**, s.143-144]

3.3. Supremum ja täydellisyys. Reaalilukujen määrittelyvaiheessa Calculus käsittelee kaksitoista reaalilukuaksioomaa ([**1**, s.9]). Näistä ei kuitenkaan seuraa reaalilukujen joukon täydellisyys ja tarvitaankin ns. täydellisyysaksiooma. Täydellisyysaksiooman voi esittää useassa erilaisessa muodossa, kuten vaikkapa sisäkkäisten välien periatteella. Tässä tutkielmassa noudatetaan kuitenkin Calculuksen esimerkkiä ja täydellisyysaksiooma perustuu supremumiin.

Supremumin määritelmää varten tarvitaan ylärajan käsite.

Määritelmä 3.4. Joukko A on ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa x, jolle

$$x \geq a \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Tällöin sanotaan, että x on joukon A yläraja.

Nyt voidaan määritellä supremum pieninpänä mahdollisena ylärajana.

Määritelmä 3.5. Luku x on joukon A pienin yläraja, jos

$$\text{(1) } x \text{ on joukon } A \text{ yläraja}$$

$$\text{ja (2) jos } y \text{ on joukon } A \text{ yläraja, niin } x \leq y.$$

Tällöin sanotaan, että x on joukon A supremum.

Supremumin avulla täydellisyysaksiooma voidaan kirjoittaa seuraavasti

Aksiooma 3.6 (Täydellisyysaksiooma). *Olkoon A epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja. Tällöin joukolla A on pienin yläraja.*

3.4. Jonot. Jonot ovat funktioiden ohella tärkeä osa matemaattista analyysiä. Itse asiassa jonot määritellään täsmällisesti funktioiden avulla seuraavasti.

Määritelmä 3.7. Reaalilukujono on funktio

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Huomautus 3.8. Tässä tutkielmassa käsitellään vain reaalilukujonoja ja niistä puhutaan yksinkertaistuksen vuoksi vain jonoina.

Myös jonoja tutkittaessa ollaan kiinnostuneita raja-arvoista. Jonon raja-arvo määritellään hyvin samaan tapaan kuin funktion raja-arvo.

Määritelmä 3.9. Reaalilukujono a_n suppenee kohti raja-arvoa L, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N_ϵ, jolle

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{kun } n \geq N_\epsilon$$

Tällöin merkitään $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, tai $a_n \to L$, kun $n \to \infty$.

3.5. Konvergenssikriteeriot. Jonoja käsiteltäessä ollaan yleensä kiinnostuneita siitä suppeneeko jono. Suurinta osaa jonoista on kuitenkin hankalaa tai jopa mahdotonta tarkastella pelkästään määritelmän avulla. On olemassa muutamia ehtoja, joiden avulla suppenevuus voidaan todistaa ilman määritelmää. Ehkä tunnetuin ehto on Cauchyn ehto.

Määritelmä 3.10 (Cauchy-jonot). Jono a_n on Cauchy-jono, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa N_ϵ, jolle pätee

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad , \text{kun } n \geq N_\epsilon \text{ ja } m \geq N_\epsilon.$$

Osoittautuu, että jono suppenee täsmälleen silloin kun se on Cauchy-jono.

LAUSE 3.11. *Jono suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono.*

TODISTUS. [**2**, s.85-86]

HUOMAUTUS 3.12. Cauchyn ehto ei kerro mitään varsinaisesta raja-arvosta. Lauseen avulla voidaan vain todistaa, että raja-arvo on olemassa.

Toinen suppenemisen tutkimiseen käytettävä työkalu on ns. suppiloperiaate.

LAUSE 3.13. *Olkoon suppenevat jonot a_n ja b_n, sekä tutkittava jono x_n joille pätee*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ja

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin myös x_n suppenee ja lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

TODISTUS. [**2**, s.63]

Viimeisenä konvergenssiehtona on ns. monotonisten jonojen konvergenssiehto. Tätä varten tarvitaan määritelmä monotonisille jonoille.

MÄÄRITELMÄ 3.14. Jono a_n on kasvava, jos

$$a_i \leq a_{i+1} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Jono on vähenevä, jos

$$a_i \geq a_{i+1} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Jono on monotoninen, jos se on kasvava tai vähenevä.

Monotonisuus on hyvin vahva ehto ja raja-arvon olemassaoloon riittää, että monotoninen jono on rajoitettu.

LAUSE 3.15. *Rajoitettu monotoninen jono suppenee.*

TODISTUS. [**2**, s.68]

3.6. Osajonot. Joissain tilanteissa ollaan kiinnostuneita jonojen osista. Seuraava määritelmä kertoo täsmällisesti, mitä tarkoitetaan termillä ”osajono”.

MÄÄRITELMÄ 3.16. Olkoon a_n jono. Jonon a_n osajono on jono

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_3}, \ldots \quad \text{, jossa } n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Osajonoille tämän tutkielman kannalta tärkein tulos on Bolzano-Weierstrassin lause.

LAUSE 3.17. *Rajoitettulla jonolla on suppeneva osajono.*

TODISTUS. [**2**, s.80]

4. Aihepiirit ja tehtävät

4.1. Aihepiirit. Tutkielman tehtävät on jaettu aihepiireittäin siten, että kukin aihepiiri sisältää kahdesta viiteen tehtävää. Aihepiirit puolestaan valittiin Jyväskylän yliopiston "Johdatus matemaattiseen analyysiin 1"-kurssin aiheiden pohjalta. Valinnat tehtiin siten, että ne kattaisivat kurssin keskeisimmät asiat mahdollisimman hyvin.

Ensimmäiseksi aihepiiriksi valikoitui vaikeita funktioita käsittelevä osio. Osio on siinä mielessä poikkeuksellinen, että se ei varsinaisesti ole osa analyysin kurssia sellaisenaan. Sen sijaan osiossa käsitellään useita kurssilla esiintyviä haastavampia funktioita. Näitä funktioita käsitellään kurssin eri vaiheissa, yleensä esimerkeissä. Opiskelijan on helpompi seurata esimerkkien matemaattiseen analyysiin liittyvää sisältöä, kun funktiot on etukäteen käyty GeoGebra-avusteisesti läpi.

Loput aihealueet olivat tutkielman kirjoittajan ja ohjaajien näkemyksiä kurssin keskeisistä teemoista. Näistä ensimmäisenä mukaan valikoitui raja-arvon ja jatkuvuuden kannalta keskeinen epsilon-delta-määritelmä. Tämä on todennäköisesti kurssin haastavin ja keskeisin asia. Jatkuvuuden täsmällisen määritelmän jälkeen aletaan etsiä keinoja käsitellä ja osoittaa jatkuvuutta helpommalla tavalla. Tästä päästään konvergenssikriteerioihin, joita käsitellään viimeisessä aihepiirissä.

Yhtenä aihepiirinä mukaan valittiin supremum ja infimum. Osa analyysin kursseista pitää supremumia keskeisesti esillä, jolloin sitä käytetään erityisesti täydellisyysaksiooman muotoiluun. Toisissa tapauksissa supremum voidaan jopa jättää pois ja esittää täydellisyysaksiooma esimerkiksi sisäkkäisten välien periaatteella. Supremum on kuitenkin hyödyllistä osata molemmissa tapauksissa.

Matemaattisia jonoja käsitellään kurssilla jonkin verran. Tähän tutkielmaan valittiin aihepiiri matemaattiset jonot, joka on varsin laaja kokonaisuus. Tässä aihepiirissä käsitellään jonojen muodostamista sekä osajonoja. Muitakin matemaattisten jonojen osa-alueita käsitellään muissa luvuissa, esimerkiksi konvergenssikriteerioissa.

4.2. Tehtävät. Tutkielma sisältää 16 tehtävää sekä tehtäviin liittyviä GeoGebra-sovelluksia. Tehtävät on suunniteltu siten, että ne on mahdollista tehdä itsenäisesti ilman aiempaa kokemusta GeoGebran käytöstä. Tehtiinpä tehtävät itsenäisesti tai opettajajohtoisesti, ne on syytä käydä opettajajohtoisesti läpi. Tehtävien yhteydessä suositellaan ajankohtaa, jolloin tehtävä on suunniteltu tehtäväksi. Kuitenkin tehtäviä voi käyttää missä tahansa vaiheessa, jossa tehtävän yhteydessä mainitut esitietovaatimukset täyttyvät.

Tehtävien suunnitteluvaiheessa tärkein lähtökohta oli käyttäjäläheisyys. Kunkin tehtävän oli oltava ratkaistavissa ilman erillistä perehdytystä GeoGebran käyttöön. Kaikkia tehtävien GeoGebroja olisi pystyttävä käsittelemään nappien painalluksilla, täyttöaluiden syötteillä (esim funktiot ja jonot), raahaamalla ja klikkailemalla ruudun objekteja tai muilla yksinkertaisilla menetelmillä. Tämä sulkee pois esimerkiksi tutkivan matematiikan menetelmän, jossa opiskelijoille annetaan vain täsmälliset ohjeet ja he esimerkiksi GeoGebran avulla päätyvät ratkaisuun. Tällaisessa menetelmässä on välttämätöntä, että opiskelijoiden tekniset taidot ovat riittävät tai heillä on mahdollisuus saada välittömästi apua esimerkiksi ohjaajalta.

Tutkielman tehtävissä yhtenä haasteena oli luoda riittävä vaikeustaso huolimatta helposta käyttöliittymästä. Tällöin tehtävänantojen rooli korostuu. Suurin osa tehtävistä perustuu johonkin vaikeaan aiheeseen, jota opiskelijat tarkastelevat GeoGebran avulla tehtävänannon ohjeiden mukaan. Vaikeustaso seuraa näissä tapauksissa aiheen vaikeudesta.

Coryn ja Gaffalon artikkelissa todetaan, että dynaamisen ohjelmiston tarjoamat mahdollisuudet ohjelman fyysiseen muokkaamiseen (raahaaminen, valitseminen, osoittaminen) tavallisen kuvan tuottamisen sijaan (esim. graafiset laskimet) tarjoavat opiskelijoille mahdollisuuden visualisoida ja tutkia parametrien välisiä yhteyksiä [**4**][s.66-67]. Artikkelissa käsitellään dynaamista ohjelmistoa vain epsilon-delta-menetelmän kautta. Tämän tutkielman epsilon-delta-tehtävät tarjoavatkin paljon samaa kuin artikkelissa käytetty ohjelmisto. Artikkelissa mainittuja dynaamisen ohjelmiston mahdollisuuksia (raahaaminen, valitseminen, osoittaminen) hyödynnetään tutkielman kaikissa tehtävissä.

Jonathan Borwein listaa kahdeksan tietokoneen mahdollista hyödyntämismahdollisuutta matematiikan opetukseen artikkelissaan [**6**][s.76].

(1) Saavuttaa oivalluksia ja intuitioita
(2) Löytää uusia malleja ja suhteita
(3) Kuvata matemaattiset periaatteet graafisesti
(4) Testataan päätelmiä, erityisesti osoittaen virheelliset päätelmät epätosiksi
(5) Tutkitaan mahdollista tulosta ja tarkastellaan kannattaako sitä todistaa
(6) Tarjoamaan lähestymistapaa täsmälliseen todistukseen
(7) Korvataan raskaat käsin tehtävät operaatiot tietokoneella
(8) Varmistamaan analyyttisesti johdettuja tuloksia

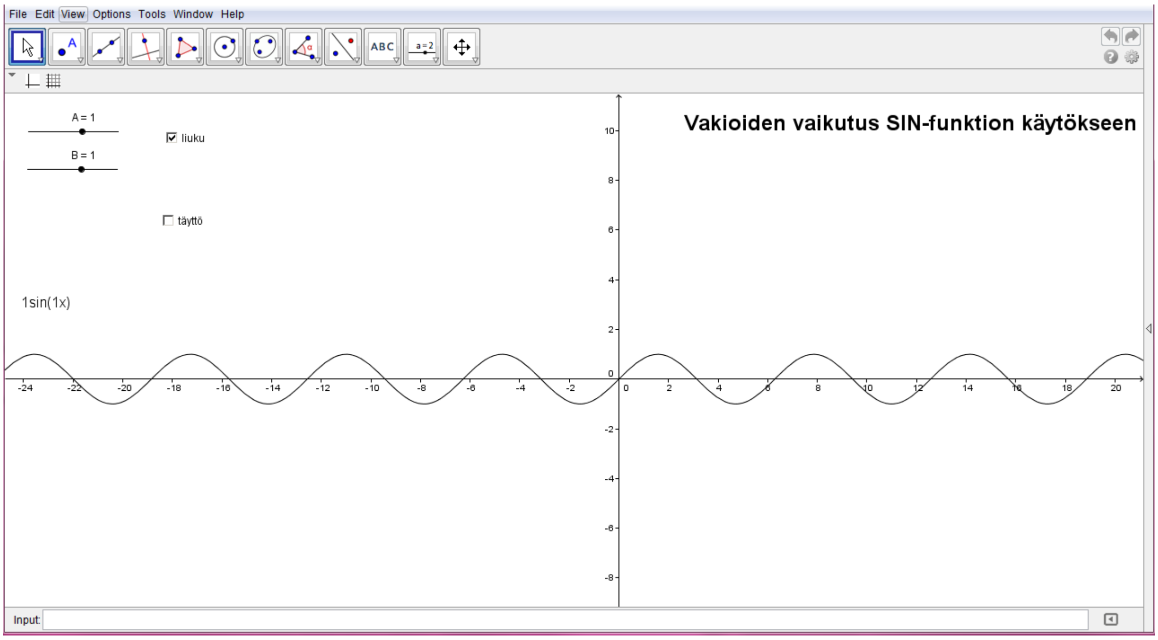
Näitä kohtia on löydettävissä myös tutkielman tehtävistä. GeoGebran avulla saadaan tutkielman jokaisessa tehtävässä kuvattua matemaattisia periaatteita graafisesti. Lisäksi jokainen tehtävä pyrkii saamaan opiskelijoissa aikaan oivalluksia ja intuitioita. Muutkin Borwein luettelemista kohdista tulevat esille yksittäisissä tehtävissä. Esimerkiksi raskaiden käsin tehtävien operaatioiden korvaamista löytyy Collatzin konjektuuria käsittelevässä tehtävässä 8.3, jossa yhdellä klikkauksella voidaan suorittaa jopa tuhansia iteraatioita.

5. Vaikeat funktiot dynaamisen matematiikan ohjelmalla

Funktiot ovat keskeisessä osassa matemaattista analyysiä. Toisaalta opiskelijoilla on vahva kokemus funktioiden käytöstä, sillä suurin osa lukion pitkästä matematiikasta keskittyy nimenomaan funktioihin. Lukio kuitenkin myös muokkaa opiskelijoiden käsitystä funktioista käsittelemällä lähinnä jatkuvia ja derivoituvia funktioita. Tämän osion tarkoitus on esitellä muutamia vaikeampia funktioita, joita käytetään myöhemmin esimerkiksi jatkuvuutta käsiteltäessä.

Paras tapa ymmärtää funktioiden luonnetta on piirtää funktion kuvaaja eli graafi. Graafien avulla funktioiden luonne selkeytyy ja niiden avulla päästään myös helposti kiinni funktion ominaisuuksiin kuten jatkuvuuteen. Graafit voivat kuitenkin myös synnyttää virhekäsityksiä. Erityisen yleinen virhekäsitys on, että funktio on jatkuva, jos sen voi piirtää nostamatta kynää paperista. Tämänkaltainen ajattelu toimii lähes kaikille lukion pitkän matematiikan esittämille funktioille. On kuitenkin olemassa lukuisia funktioita, joita ei edes voida täsmällisesti piirtää. Yksi tällainen funktio on rajua heilahtelua sisältävä $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

5.1. Raju heilahtelu. Seuraavassa tehtävässä aloitetaan tutkimalla, miten vakiot A ja B vaikuttavat funktion $A\sin(Bx)$ käytökseen. Vakioiden roolin ymmärtäminen on välttämätöntä, jotta voidaan käsitellä monimutkaisempia funktioita kuten $\sin(\frac{1}{x})$. GeoGebra-sovelluksen avulla vakioiden vaikutuksen seuraaminen on yksinkertaista, sillä vakion muuttaminen vaikuttaa reaaliajassa funktion kuvaajaan.



Kuva 1. Raju heilahtelu: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 5.1. a) Tutki GeoGebralla, miten vakiot A ja B vaikuttavat funktion

$$f(x) = A\sin(Bx)$$

kuvaajaan. Mitä tapahtuu, jos korvaat vakiot funktioilla? Voit tutkia esimerkiksi funktioita $f(x) = x\sin(x)$ ja $f(x) = \sin(x^2)$.

b) Hahmottele ilman GeoGebraa seuraavien funktioiden kuvaajat hyödyntämällä a-kohtaa:

$$g(x) = \sin(\frac{1}{x})$$

ja

$$h(x) = x\sin(\frac{1}{x})$$

Perustele funktion kuvaajan muoto edellisen tehtävän pohjalta, tarkista lopuksi GeoGebralla (erityisesti tarkkaile funktiota origon lähellä venyttämällä x-akselia).

c) Pohdi onko mahdollista määritellä funktioita $g(x)$ ja $h(x)$ nollassa siten, että niistä tulisi jatkuvia?

5.1.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/ZZ3GP94r

5.1.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on tarkoitus tehdä hyvin alkuvaiheessa analyysin opintoja, eikä esitietoina vaadita kuin lukiotiedot. Mikäli tehtävästä haluaa laajemman, voi a-kohtaan lisätä kysymyksen ”Miksi vakiot vaikuttavat tällä tavalla?”.

5.1.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän ensimmäinen ja tärkein tavoite on, että opiskelija saavuttaa syvempää ymmärrystä sinifunktion käyttäytymisestä. Vakioiden A ja B rooli tehtävän a-kohdassa voi olla tuttu etenkin fysiikkaa opiskelleille, mutta monelle niiden vaikutus funktion kuvaajan muotoon on epäselvää. Tavoitteena onkin, että opiskelija ymmärtäisi a-kohdan tehtyään, miten A ja B vaikuttavat. GeoGebran avulla opiskelija näkee nopeasti vakion A vaikuttavan pystysuuntaiseen heilahteluun ja vakion B vaakasuuntaiseen heilahteluun.

Tehtävässä tapahtuu vaikeustasolla melkoinen hyppäys, kun siirrytään a-kohdasta b-kohtaan. Monille opiskelijoille on a-kohdan jälkeen selvää, että funktion $\sin(\frac{1}{x})$ kuvaaja venyy rajusti, kun siirrytään kauaksi nollasta. Origon lähellä käytös on kuitenkin varmasti haaste. Tehtävän kannalta onkin tärkeää, että opiskelijat korjaavat omaa käsitystään katsomalla funktion oikean muodon GeoGebralla.

Lopuksi c-kohdassa johdatellaan jo hieman tulevaisuuteen puhumalla jatkuvuudesta. Tehtävän funktio pyrkii murtamaan virhekäsitystä jatkuvien funktioiden piirtämisestä. Tehtävän käsittelyn yhteydessä on hyvä korostaa sitä, ettei funktioita voi käytännön tasolla täsmällisesti piirtää äärettömän voimakkaan heilahtelun johdosta. Tästä ei kuitenkaan seuraa sitä, etteivät funktiot voisi olla jatkuvia.

5.2. Tiheyden ongelmat. Lukiotasolla käsitellään yleensä lähinnä alkeisfunktioita. Paloittain määritellyt funktiot ovatkin monille vieraampia. Tällaisista paloittain määritellyistä funktioista saadaan vielä haastavampia määrittelemällä palat erillisissä tiheissä joukoissa, kuten rationaali- ja irrationaalilukupisteissä. Tällaisten funktioiden piirtäminen on täysin mahdotonta minkään pisteen ympäristössä (vrt. $\sin(\frac{1}{x})$.

Tehtävässä käsiteltävä funktio on opiskelijoille vaikea, etenkin jatkuvuustarkastelun osalta.

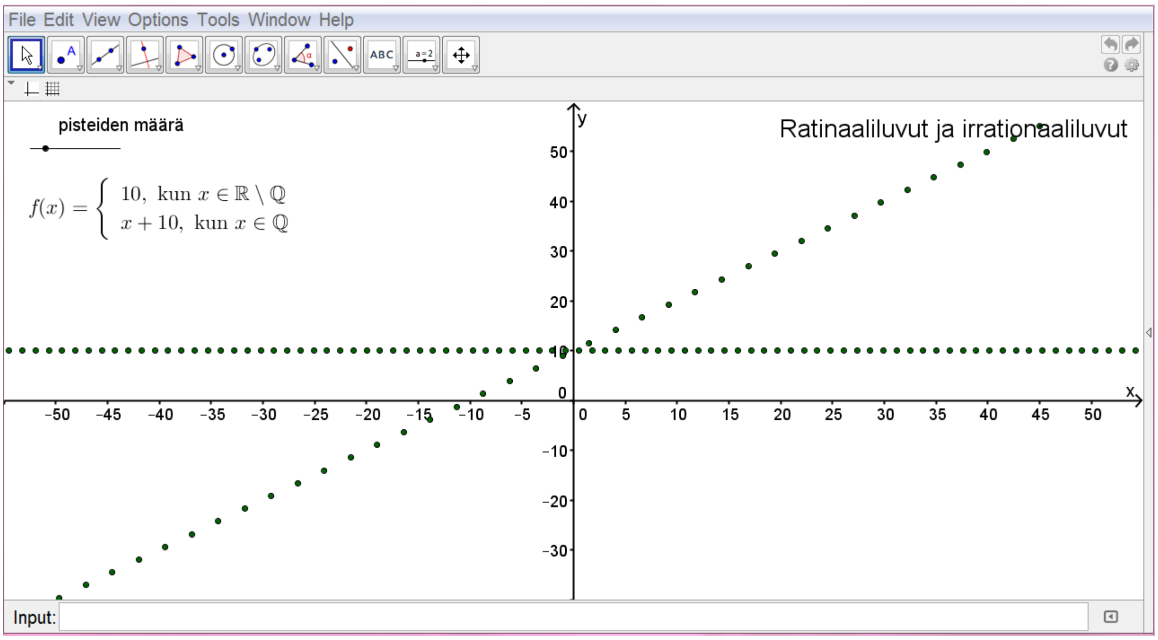
Tehtävä 5.2. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 10, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x + 10, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Laske funktion $f(x)$ arvot viidessä välin $[0, 1]$ rationaalipisteessä, sekä viidessä irrationaalipisteessä. Hahmottele funktion kuvaaja koko määrittelyjoukossa laskemiasi arvoja hyödyntäen.
b) Funktion kuvaajaa ei voi täsmällisesti piirtää. Oheisessa sovelluksessa voit kasvattaa piirrettävien pisteiden määrää korkeaksi, jolloin saat käsityksen siitä, miten funktio käyttäytyy. Pohdi sovelluksen avulla, onko funktio jatkuva missään pisteessä?

5.2.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/UzhQHDc2

5.2.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on tarkoitettu esitettäväksi samaan aikaa yllä olevan funktiota $\sin(\frac{1}{x})$ käsittelevän tehtävän kanssa. Esitietoina riittävät lukiotiedot.

5.2.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tässä tehtävässä pyritään poikkeuksellisesti jopa luomaan virhekäsityksiä. Riittävällä pisteiden tihentämisellä saadaan kuva näyttämään



KUVA 2. Tiheyden ongelmat: GeoGebra-applikaatio

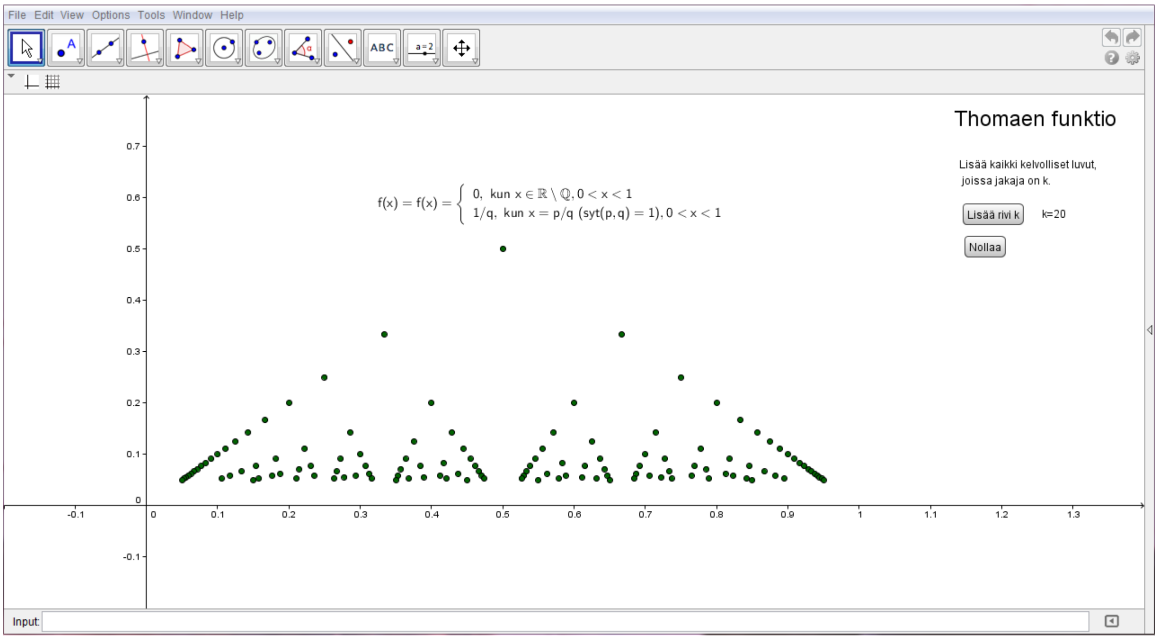
kahdelta suoralta ja suorathan tunnetusti ovat jatkuvien funktioiden kuvaajia. Toisaalta tehtävässä pyritään myös kiinnittämään opiskelijan huomio siihen, että kyseessä on joukko pisteitä, joiden väliin jää aina tilaa. Riippumatta siitä, kuinka paljon lisäämme pisteiden määrää, jää kahden pisteen väliin aina äärettömän monta pistettä joita emme voi saada mukaan. Jatkuvuutta ei vielä tässä vaiheessa kurssia ole käsitelty. Voidaan kuitenkin perustella, ettei tällaisia aukkoja saa jatkuvaan funktioon jäädä. Ainoa kohta johon aukkoja ei jää on suorien leikkauskohta. Tästä seuraa, että funktio on jatkuva ainoastaa muuttujan x arvolla 0.

Calculus käyttää tehtävän funktiota hieman erilaisessa muodossa jatkuvuuden määritelmän yhteydessä [**1**, s.94]. Kirjassa funktiot ovat $y = x$ ja vakiofunktio $y = 0$. Tehtävässä näitä funktioita on muokattu, koska x-akselin päällä funktio on hieman epäselvä. Tehtävän tarkoituksena on luoda opiskelijoille riittävä ymmärrys funktion käytöksestä, jolloin jatkuvuuden määritelmän opiskeluvaiheessa opiskelijat pystyvät keskittymään paremmin itse määritelmään. Jatkuvuuden määritelmän avulla funktion jatkuvuuden tarkastelu on suoraviivaista, etenkin jos funktion käyttäytymisen ymmärtää.

Tehtävä yhdessä edellä olleen funktiota $\sin(\frac{1}{x})$ käsitelleen tehtävän kanssa pyrkii tuomaan opiskelijoiden tietoisuuteen hieman erilaisia funktioita. Opiskelijoille tällaiset funktiot, joita ei voi täsmällisesti esittää graafisesti voivat olla hyvinkin vieraita ja vaikeita. Matemaattisessa analyysissä tällaiset funktiot ovat kuitenkin mielenkiintoisia ja niitä käytetään esimerkkeinä tärkeissä aiheissa kuten jatkuvuus.

Tehtävä myös huomaamattomasti lähestyy raja-arvon ja jatkuvuuden ajattelua. Tehtävässä voi "tarkentaa" kuvaajaa niin tarkaksi kuin haluaa. Käytännössä siis opiskelijoille selvenee, että vaikka funktion kuvaajaa ei voi täsmällisesti piirtää, voimme piirtää kuvaajan joka on lähes oikea ja voimme tarkentaa kuvaajaa niin paljon kuin haluamme.

5.3. Thomaen funktio. Raja-arvoja käsiteltäessä käytetään yleensä esimerkkinä varsin monimutkaista funktiota. Tämä ns. Thomaen funktio rakennetaan rationaaliluvuista siten, että kullekin luonnolliselle luvulle n etsitään kaikki luvut $k < n$, joille $\text{syt}(n, k) = 1$. Jokaiselle löydetylle luvulle k lasketaan osamäärä k/n. Näissä kohdissa funktio saa arvon $1/n$. Tällä tavoin määritelty funktio on opiskelijoille todella haastava, koska on hyvin vaikeaa hahmottaa funktion luonnetta. Seuraavassa tehtävässä pyritään selventämään funktion rakennusprosessia ja muodostamaan visuaalinen kuva funktiosta.



KUVA 3. Thomaen funktio: GeoGebra-applikaatio

TEHTÄVÄ 5.3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, 0 < x < 1 \\ 1/q, \text{ kun } x = p/q \ (\text{syt}(p, q) = 1), 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Hahmottele funktion kuvaaja.
b) Tutki funktiota sovelluksen avulla. Pohdi funktion raja-arvoa irrationaalipisteissä, eli mikä on raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x)$, kun a on irrationaalinen.
c) Entä jos a on rationaalinen?

5.3.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/YqeGgzah

5.3.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on tarkoitettu käytäväksi ennen raja-arvon esittelyä, jolloin tehtävän funktiota voidaan hyödyntää raja-arvojen laskemisesta harjoittavissa esimerkeissä. Esitietoina riittävät lukiotiedot.

5.3.3. *Tehtävän tavoitteet.* Funktio on yksi vaikeimmista Calculuksen esimerkkifunktioista. Funktion käyttäytymisen ymmärtäminen vie reilusti aikaa, eikä välttämättä selkeydy kaikille opiskelijoille edes ajan kanssa. Tehtävän tavoite on ennen kaikkea saada jonkinlainen käsitys funktion käyttäytymisestä tutkimalla sovellusta. Sovelluksessa "kerrokset" lisätään yksi kerrallaan. Tällä tavoin havainnollistetaan opiskelijalle miten funktio rakentuu. Kun kerroksia lisätään riittävästi, saadaan varsin hyvä kuva funktiosta.

Tehtävän b- ja c-kohdat ovat tarkoitettu haastavaksi raja-arvo tehtäviksi, jotka saavat opiskelijat pohtimaan mitä raja-arvo oikeastaan tarkoittaa. Tavoitteena on, että opiskelija myöntäisi kohtia tehdessään, ettei hänen tämän hetkinen pohjatietonsa riitä tällaisen funktion raja-arvon tutkimiseen. Kun funktioon on etukäteen tutustuttu, sitä voidaan hyödyntää raja-arvon määritelmän yhteydessä esimerkkinä. Tällöin opiskelijoille jää hieman enemmän aikaa miettiä raja-arvoa, koska kaikki aika ei mene funktion käyttäytymisen miettimiseen. Raja-arvon määritelmän avulla funktiolle saadaan b- ja c-kohtien raja-arvoja koskevat havainnot perusteltua helposti.

6. Supremum ja infimum dynaamisen matematiikan ohjelmalla

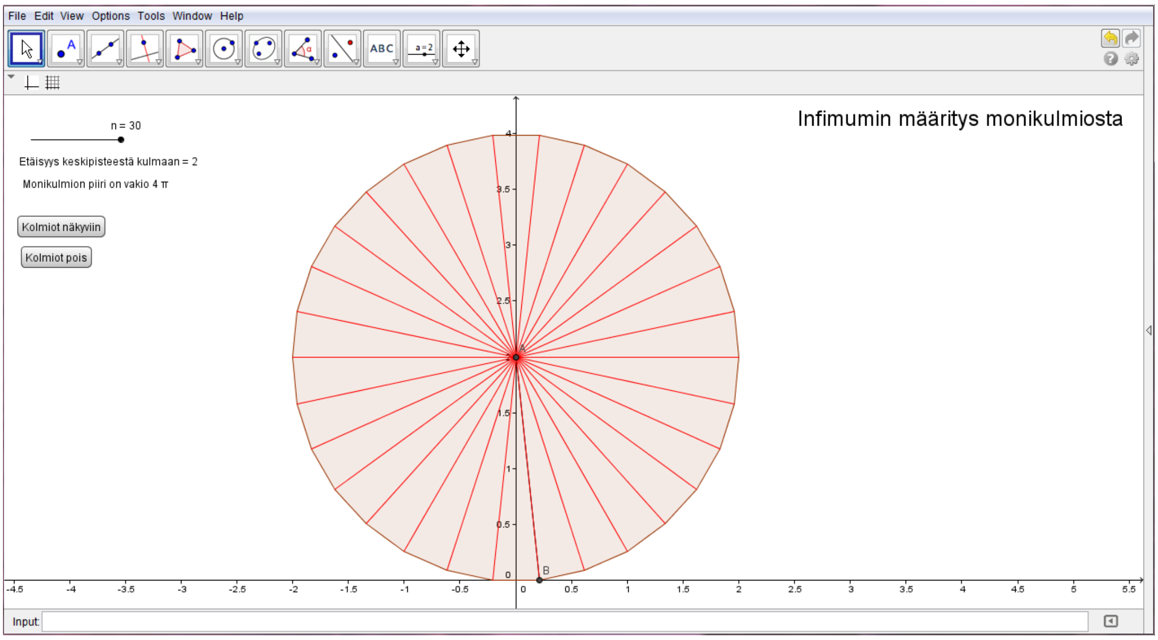
Supremum eli pienin mahdollinen yläraja on matemaattinen käsite (3.5), jonka avulla on mahdollista esittää reaalilukujen täydellisyysaksiooma(3.6). Esimerkiksi Calculus esittää täydellisyysaksiooman supremumin avulla ja kirja myös pitää täydellisyyttä reaalilukujen tärkeimpänä ominaisuutena [**1**, s.131-133]. On syytä huomata, että täydellisyysaksiooman voi muotoilla lukuisilla tavoilla, joista supremumin käyttäminen on vain yksi. Jos täydellisyys muotoillaan esimerkiksi sisäkkäisten välien periaatteen avulla, on supremumin merkitys kurssilla huomattavasti vähäisempi. Tässä luvussa käsitellään supremumia lähtien siitä oletuksesta, että sitä käytetään täydellisyysaksiooman muodostamiseen ja se on näin ollen keskeisessä osassa kurssia.

Supremumin käsittely yliopistotasolla perustuu yleensä siihen, että pohditaan valmiiksi konstruoidun joukon supremumia ja infimumia. Samalla pohditaan, ovatko nämä mahdollisesti joukon maksimi tai minimi. Tällaisten tehtävien ongelmaksi osoittautuu yleensä se, että joukoista joudutaan tekemään varsin monimutkaisia riittävän vaikeusasteen aikaansaamiseksi. Abstraktien joukkojen ymmärtäminen voi olla osalle opiskelijoista jo valmiiksi haastavaa. Tällöin opiskelijoille voi osoittautua vaikeaksi ymmärtää joukkoa ja toisaalta sen ylä- tai alarajoja.

6.1. Supremumin määrittäminen geometrian avulla. Seuraavassa tehtävässä pyritään luomaan joukko, jolla on selkeä geometrinen tulkinta. Tällöin joukon voi konkreettisesti mallintaa GeoGebran avulla. Tehtävässä pyritään muodostamaan selkeä visuaalinen käsitys joukosta ja erityisesti siitä, miten joukko käyttäytyy mentäessä lähemmäksi äärettömyyttä. Vaikka joukon määritelmä on edelleen abstrakti, voi visualisointi auttaa osaa opiskelijoista ymmärtämään joukkoa paremmin.

Tehtävä 6.1. Olkoon p_n säännöllisen n-kulmion piiri, jonka keskipisteen etäisyys kärjistä on 1. Tarkastellaan kaikkien tällaisten monikulmioiden piirien muodostamaa joukkoa, eli joukkoa $A = \{p_n \colon n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$.

a) Tutki oheisen sovelluksen avulla, mikä on joukon A supremum. Saavutetaanko supremumia, eli onko kyseessä myös joukon maksimi?



Kuva 4. Supremumin määrittäminen monikulmiosta: GeoGebra-applikaatio

Olkoon r_n keskipisteen etäisyys säännöllisen n-kulmion kärjestä, jonka piiri on 4π. Tarkastellaan kaikkien tällaisten etäisyyksien joukkoa, eli joukkoa $B = \{r_n \colon n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$.

b) Mikä on joukon B infimum? Saavutetaanko infimumia, eli onko kyseessä myös joukon minimi?
c) On selvää, että joukossa B monikulmion sivun pituus lyhenee, kun sivujen määrä kasvaa. Selitä omin sanoin, miten on mahdollista, että sivun pituus lähestyy nollaa, vaikka piiri on koko ajan vakio.

6.1.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/YyevrzgK

6.1.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on suunniteltu ajoittuvan hieman supremumin esittelyn jälkeiselle ajalle. Pohjatietoina vaaditaan lukiotason geometriset taidot sekä supremumin ja infimumin käsitteet.

6.1.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävässä on tarkoituksena saada opiskelijoille visuaalinen käsitys siitä, miltä joukot näyttävät. Sekä a-, että b-kohdassa saadaan selkeä geometrinen tulkinta joukoille. Tehtävissä kappale muuttaa muotoaan sivujen lisääntyessä ja opiskelijat huomaavat GeoGebran avulla kappaleen muodon ”lähestyvän” ympyrän muotoa. Tällöin supremum ja infimum voidaan yhdistää aiemmin opittuun ympyröiden geometriaan. Geometria on lukion käyneille opiskelijoille tutumpaa kuin abstrakti todistaminen, joten tehtävä mahdollisesti helpottaa supremumin käsittelyn aloittamista.

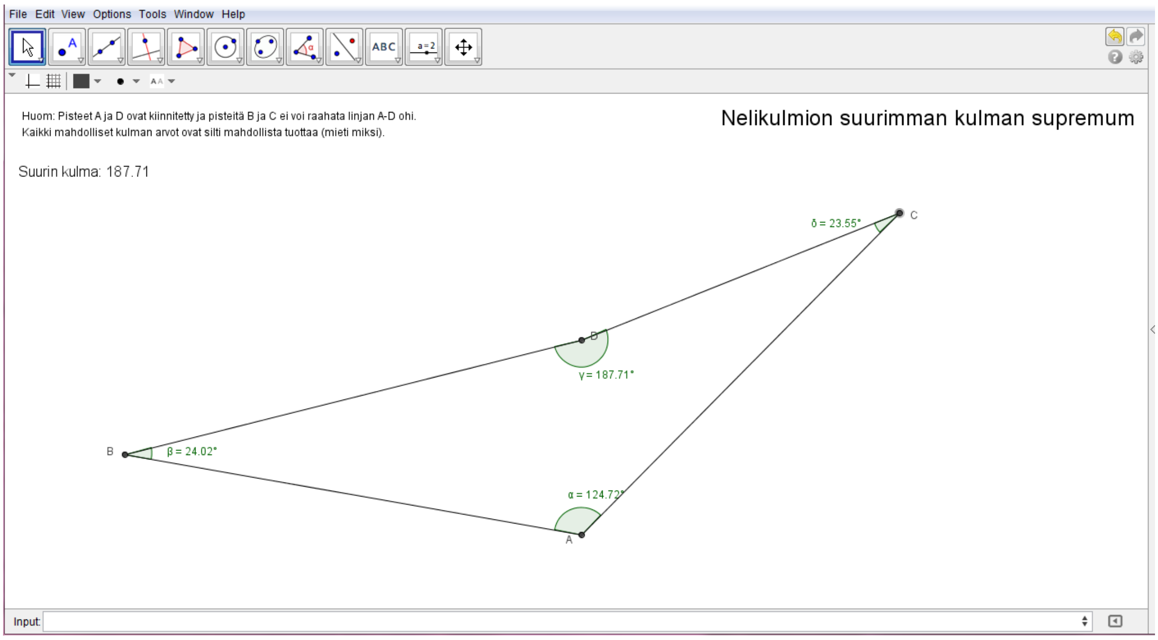
Tehtävän b-kohdassa käytetään infimumia eli suurinta mahdollista alarajaa. Määritelmältään se on hyvin supremumin kaltainen. Supremumia käytetään näistä yleensä enemmän matemaattisisissa teksteissä, erityisesti todistuksissa ja määritelmissä.

Esimerkiksi täydellisyysaksiooma määritellään Calculuksessa nimenomaan supremumin avulla. Kuitenkin myös infimumin määritelmä on analyysissä oleellinen ja aihetta käsittelevissä harjoituksissa kysytään samalle joukolle usein molempia.

Sekä a-, että b-kohdassa supremumia ja infimumia ei voida saavuttaa, mikä on helppo osoittaa geometrisellä päättelyllä. Tämä on syytä ottaa esille tehtävää käsiteltäessä. Molempien joukkojen käsittelyssä likiarvo saavutetaan GeoGebralla pyöristysteknisistä syistä. Tämän takia tehtävän läpikäynti on tärkeää, sillä muuten opiskelijalle voi jäädä virhekäsitys.

Tehtävän c-kohta on jo hieman johdattelua raja-arvoihin. Tehtäväähän voisi muutenkin käsitellä myös raja-arvon näkökulmasta pienillä muutoksilla. Tämän tehtävän yhteydessä ei ole tarkoituskaan päästä raja-arvon kannalta täsmällisiin vastauksiin, vaan tavoite on johdatella opiskelijoita raja-arvon käsitteeseen.

6.2. Monikulmion suurimman kulman supremum. Seuraavassa tehtävässä supremumia tutkitaan hieman erilaisessa ympäristössä. Tehtävässä pyydetään etsimään nelikulmion suurimman kulman supremum, eli valmiiksi konstruoidun joukon sijaan tutkitaan geometrista kappaletta. Nelikulmio on opiskelijoille entuudestaan tuttu ja kun tehtävässä havaitaan, että supremum on 360° niin päästään johtopäätökseen ettei yksi kulma voi sitä saavuttaa.



Kuva 5. Monikulmion suurimman kulman supremum: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 6.2. a) Päättele GeoGebran avulla mikä on nelikulmion suurimman kulman supremum asteina. Perustele sanallisesti, miksi kyseessä on supremum.
b) Johda vastaavalla päättelyllä supremum n-kulmaisen monikulmion kulmalle, kun $n \geq 3$. Todista havaintosi käyttäen suppremumin määritelmää.

6.2.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/bFcsQ8pj

6.2.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä soveltuu supremumin opetuksen yhteyteen. Pohjatietoina vaaditaan supremumin määritelmä, lisäksi b-kohdassa täsmälliseen todistamiseen tarvitaan epsilonin käyttöä.

6.2.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävä on siitä poikkeuksellinen, että siinä ei anneta joukkoa, jonka supremumia haetaan, vaan pelkkä kappale. Toki tehtävässä oltaisiin voitu luoda joukko periaatteella "kaikki mahdolliset nelikulmion kulman arvot", mutta tehtävässä päätettiin tietoisesti olla antamatta joukkoa. Tehtävän yhteydessä voidaan kuitenkin pohtia, miten tällainen joukko voitaisiin konstruoida.

Tehtävän a-kohta käsittelee yleistä nelikulmiota, jonka suurimman kulman supremum halutaan määrittää. Tarkoitus on, että opiskelijat GeoGebralla kokeilevat, kuinka suureksi he voivat tuon kulman saada. Ajatus kuperasta kulmasta nelikulmiossa voi olla osalle opiskelijoista vieras, joten he saattavat ajatella supremumin olevan oikokulma eli 180°. GeoGebran avulla päästään kuitenkin helposti suurempiin kulmiin. Kun opiskelija saa kulman yli oikokulmasta, hän voi muokata kärkipisteitä siten, että muut kulmat menevät aina vain pienemmiksi ja lähestytään 360° kulmaa. Tehtävän vastausta käsiteltäessä on syytä kiinnittää huomiota siihen, että nelikulmion jokaisen kulman on oltava aidosti suurempaa kuin nolla. Tämä ei kuitenkaan ole ristiriita, sillä pääsemme aina niin lähelle täyttä kulmaa kuin haluamme.

Tehtävän b-kohta on lähinnä matemaattinen yleistys. Tehtävän tarkoitus on motivoida opiskelijoita tutkimaan myös muita kuin valmiiksi luotuja tilanteita. Kolmiolle toivottavasti löytyy vastaavalla tavalla kuin a-kohdassa 180° supremum. Tämän jälkeen opiskelijoiden toivotaan kokeilevan muutamaa isompaa nelikulmiota ja rakentavan niihin samalla tavalla yhden suuren kulman. Tämä on jopa helpompaa, kuin a-kohdassa, sillä kaikkien muiden kulmien ei tarvitse mennä lähelle nollaa.

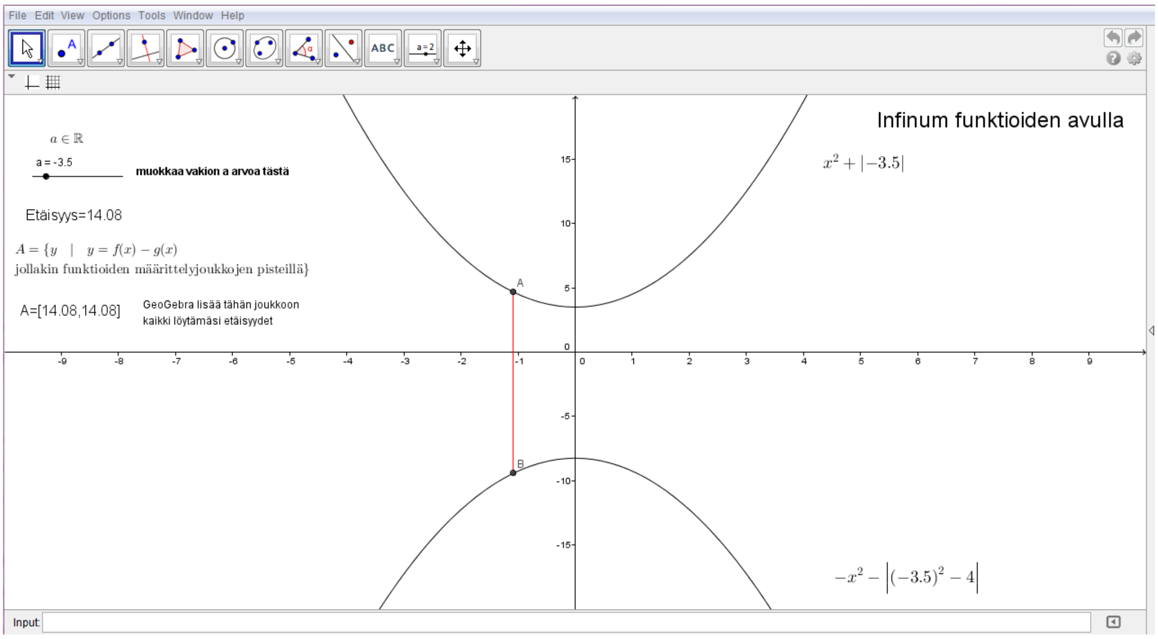
6.3. Vaihtoehtoinen tehtävänanto. Nelikulmion kulman supremum voidaan kysyä suoraan supremumin määritelmän jälkeen, mutta pienillä muutoksilla tehtävänantoon siitä saadaan johdatteleva tehtävä supremumin käsittelyyn. Seuraavan tehtävänannon oletuksena on, ettei supremumia ole vielä määritelty, vaan tehtävän on tarkoitus motivoida supremumin tarpeellisuuteen.

Tehtävä 6.3. Piirrä GeoGebralla nelikulmio ja tutki, kuinka suureksi saat sen suurimman kulman (asteina). Löytyykö tälle kulmalle ylärajaa? Mikä on pienin yläraja jonka löydät? Entä löytyykö maksimiarvoa (ylärajaa, joka voidaan saavuttaa)?

6.3.1. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on tarkoitettu motivaatioksi juuri ennen supremumin käsittelyä. GeoGebran perushallinta on hyvä olla, muutoin liikaa resursseja kuluu GeoGebran käytön harjoitteluun analyysin harjoittelun sijaan.

6.3.2. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävä johdattelee opiskelijoita supremumin määrittelyyn. Tehtävässä itse asiassa jopa piilovihjataan tulevaan supremumin määritelmään pyytämällä opiskelijoita löytämään pienin yläraja. Opiskelijat luultavasti löytävät 360 asteen ylärajan GeoGebran avulla. Tällöin geometrian avulla voidaan helposti perustella, että kulma ei voi olla näin suuri (muutoin muut nelikulmion kulmat olisivat samalla suoralla). Tästä päästään tulokseen, ettei tällaista suurinta mahdollista kulmaa ole olemassa, mutta sen sijaan sillä on kyllä yläraja. Lisäksi voidaan perustella, että kulma saadaan niin lähelle tätä ylärajaa kuin halutaan. Määritelmän esittelyn jälkeen voitaisiin jatkotehtävänä pyytää opiskelijoita todistamaan tulos määritelmän avulla.

6.4. Infimum funktioiden avulla. Yksi lukion pitkän matematiikan tärkeimmistä aiheista on funktiot ja niiden käsittely. Joukko-oppiakin lukiossa muutamalla kurssilla sivutaan, mutta joukot ovat lukiolaisille huomattavan paljon vieraampi käsite. Joukkojen esittäminen graafisesti on vaikeaa, toisin kuin esimerkiksi funktioiden. Seuraavassa tehtävässä yhdistellään joukkoja ja funktioita käsittelemällä joukkoa, joka muodostetaan kahden funktion avulla.



Kuva 6. Infimum funktioiden avulla: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 6.4. Olkoon f ja g funktioita. Määritellään joukko A seuraavasti: $A = \{y \mid y = f(x) - g(x)$ jollakin funktioiden yhteisen määrittelyjoukon pisteillä$\}$. Eli $y \in A$ täsmälleen, jos on olemassa x siten, että $y = f(x) - g(x)$.
Määritä perustellen joukon A infimum, kun funktiot ovat:

a) $f(x) = x^2 + a, a \in \left]\sqrt{2}, 5\right[$ ja $g(x) = -1$

b) $f(x) = x^2 + |a|$ ja $g(x) = -x^2 - |a^2 - 4|, a \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ja $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + a}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Millä parametrin a arvolla infimum saavutetaan kussakin kohdassa?

6.4.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/jEZF4C8F

6.4.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on suunniteltu supremumin ja infimumin määritelmän jälkeiseksi helpohkoksi johdattelutehtäväksi. Tehtävän funktioiden käsittely onnistuu lukiotiedoilla.

6.4.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävässä pyritään jälleen visuaalisuuteen, jonka avulla päästään abstrakteista joukoista konkreettisiin kuviin. Tehtävässä myös käsitellään joukkoja funktioiden kautta. Tämän tarkoitus on auttaa opiskelijoita, joille lukion funktioista abstrakteihin käsitteisiin siirtyminen on vaikeaa. GeoGebran avulla opiskelijat voivat konkreettisesti nähdä ja päätellä, mikä joukon infimumiksi tulee. Tällainen kuvan kautta tehtävä päättely auttaa myös keksimään varsinaiset todistukset, jotka voidaan helposti tehdä myös tehtävän joukoille.

Tehtävän a-kohdassa on tarkoitus lähinnä havainnollistaa paraabelin käyttäytymistä, etenkin parametrin a ja huipun suhdetta. Koska paraabelissa ei ole ensimmäisen asteen termiä, huipun x-koordinaatti on välttämättä nolla ja y-koordinaatiksi jää parametrin a arvo. Tämän jälkeen tehtävässä riittää havaita, että huippu on alimmillaan välin pienemmässä päätepisteessä. Kohta on tarkoituksellisen helppo ja se on muotoiltu helpottamaan sellaisenaan kenties liian vaikeaa b-kohtaa.

Tehtävän b-kohdassa jatketaan a-kohdassa harrastettua ajattelua paraabelin huipuista. Nyt kuitenkin käsitellään kahta paraabelia ja paraabelien termejä on muokattu hieman haastavammaksi. Kuitenkin edelleen paraabelien huiput ovat x-akselilla nollassa, jolloin etäisyys on helppo laskea. Opiskelijan on tarkoitus päästä GeoGebran avulla helpohkosti oikeaan tulokseen. Tulokseen pääsyn jälkeen onkin oleellista kannustaa opiskelijaa perustelemaan saatu tulos analyysin työkalujen avulla.

Tehtävän c-kohdassa käsitellään tyypillisiä rationaalifunktioita. Eräs tärkeä huomio on, että riippumatta parametrin a arvosta erotus menee aina lähelle nollaa, kun x kasvaa tai pienenee rajatta. Opiskelijat todennäköisesti huomaavat tämän helposti kokeilemalla muutamia parametrin arvoja. Tässä kohtaa tehtävän ohjeistaja voi kannustaa opiskelijoita keksimään yleinen perustelu, miksi tämä tosiaan toimii kaikilla parametrin arvoilla. Perusteeksi voi todeta, että vaikka opiskelija kokeilisi kymmentä, sataa tai tuhatta parametrin arvoa, on edelleen äärettömän monta, joita ei olla kokeiltu.

Tehtävän jokaisessa kohdassa esiintyvällä parametrillä a on merkittävä rooli GeoGebrojen kannalta. Termiä muuttamalla opiskelija saa aikaan erilaisia tilanteita, joita tutkia. Näin tehtävästä tulee mielenkiintoisempi kuin tilanteessa, jossa tutkittaisiin vain kahta paikallaan olevaa funktiota. Tehtävän c-kohdassa parametrin tarkoitus on saada opiskelija huomaamaan, että lähestyttäessä äärettömyyttä funktio käyttäytyy samalla tavalla riippumatta parametrin a arvosta.

7. Epsilon-delta-menetelmä dynaamisen matematiikan ohjelmalla

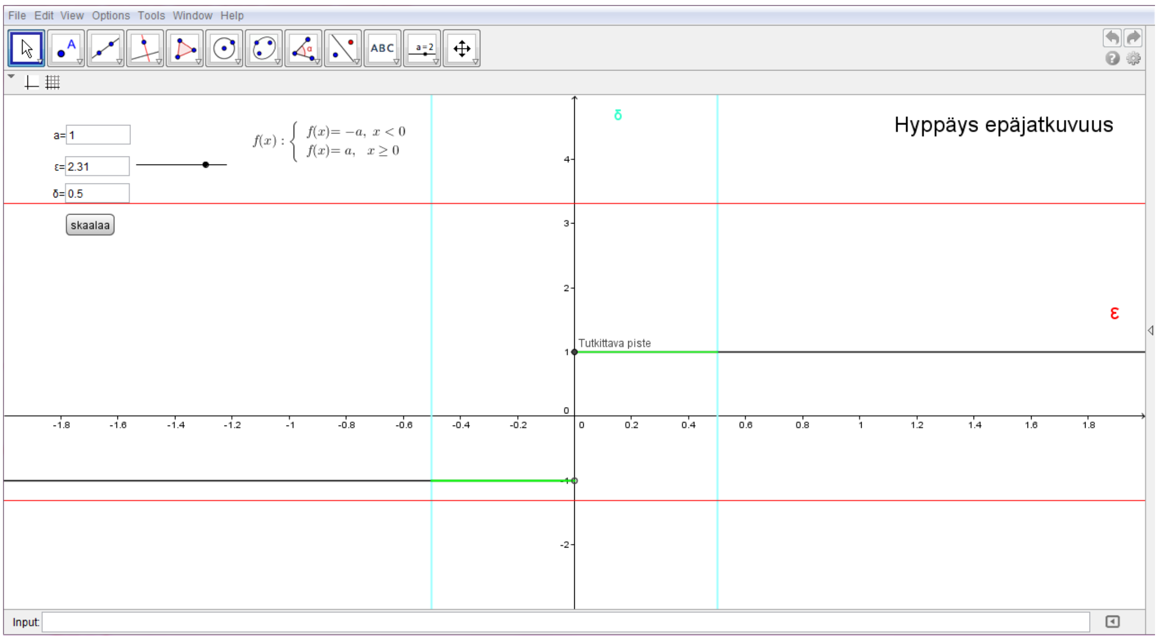
Raja-arvo ja siihen läheisesti liittyvä jatkuvuus ovat analyysin keskeisiä työkaluja. Jatkuvuudesta seuraa todella keskeisiä tuloksia kuten Bolzanon lause (3.3) sekä tulos, jonka mukaan suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa minimi- ja maksimiarvonsa. Näihin tuloksiin pääseminen edellyttää täsmällistä määritelmää, joka on yksi vaikeimmista alkeellisessa analyysissä. Tässä luvussa paneudutaankin tähän vaikeaan epsilon-delta-määritelmään.

Epsilon-delta-määritelmä (3.1) on yksi haastavampia alkeellisen analyysin työkaluja. Siinä on lukuisia kohtia, jotka opiskelijan tulee sisäistää, jotta määritelmän voi ymmärtää. Ensimmäinen haaste on kahden tuntemattoman käsittely samanaikaisesti. Lisähaastetta tuo se, että epsilon ja delta riippuvat toisistaan. Moni opiskelija saattaa kysyä voisiko tätä tehdä yksinkertaisemmin. Tämän luvun keskeinen tavoite on havainnollistaa kaikkia määritelmän osia ja visuaalisin esimerkein osoittaa niiden tarpeellisuus.

7.1. Hyppäysepäjatkuvuus. Jatkuvuuden todistaminen epsilon-delta-määritelmän avulla on opiskelijoille yleensä hankalaa. Hieman helpompaa on määritelmän käyttö epäjatkuvuuden todistamiseen. Seuraavassa tehtävässä käsitellään yksinkertaisinta ja tutuinta epäjatkuvuuden muotoa eli hyppäysepäjatkuvuutta. Nimitys tulee siitä, että funktion arvo ”hyppää” eli muuttuu arvosta toiseksi saavuttamatta niiden välissä olevia arvoja. Tällaista epäjatkuvuutta esiintyy jo lukion matematiikassa ja tehtävän tarkoitus onkin tuoda epsilon-delta ajattelua tuttuun ympäristöön.

Matemaattisessa mielessä hyppäysepäjatkuvuutta esiintyy silloin, kun funktion toispuoleiset raja-arvot ovat äärellisiä ja erisuuret tarkastelupisteessä. Funktion arvolla tarkastelupisteessä ei tällöin ole merkitystä. Kun lähestytään tarkastelupistettä vasemmalta, päädytään siis eri arvoon kuin lähestyttäessä tarkastelupistettä oikealta. Tällöin näiden arvojen välissä on hyppy, joka aiheuttaa epäjatkuvuuden.

Hyppäysepäjatkuvuuden todistaminen epsilon-delta-määritelmän avulla on melko yksinkertaista. Hyppy on aina suurudeltaan positiivinen, joten epsiloniksi voidaan valita esimerkiksi puolet hypyn korkeudesta. Tehtävän tärkein tavoite onkin saada opiskelija huomaamaan tämä. GeoGebra ympäristö tarjoaa visuaalisen näkökulman tähän, jolloin opiskelijalle selvenee hypyn ja epsilonin suhde. Toisaalta tehtävä myös pyrkii kiinnittämään opiskelijan huomion siihen, miten deltaa tulee tällaisessa yhteydessä käsitellä.



Kuva 7. Hyppäysepäjatkuvuus: GeoGebra-applikaatio

TEHTÄVÄ 7.1. Osoita epsilon-delta-määritelmän avulla, että seuraavat funktiot eivät ole jatkuvia:

a) $f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -a, x < 0 \\ a, \ x \geq 0 \end{cases}$

c) Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktiot ovat jatkuvia kohdassa $x = 0.1$. Pohdi miten osoittaisit, että ne ovat jatkuvia kun $x \neq 0$.

7.1.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/FRJ4eSKe

7.1.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä vaatii luonnollisesti epsilon-delta-määritelmän pohjakseen. Tehtävä on suunniteltu helpoksi tehtäväksi, joten se soveltuu käytettäväksi välittömästi määritelmän esittelyn jälkeen.

7.1.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän ensisijainen tavoite on selventää, miten hyppäysepäjatkuvuus havaitaan epäjatkuvaksi epsilon-delta-määritelmän avulla. Erityisesti tarkoituksena on linkittää epsilon tähän hyppäykseen. Tätä havainnollistetaan visuaalisesti GeoGebran avulla.

Tehtävän a-kohta on lähinnä johdatteleva erikoistapaus ennen b-kohdan yleistystä. Jo tässä vaiheessa opiskelijalle voi huomata epsilonin ja hypyn suhteen, mutta tässä tärkeintä on löytää mikä tahansa kelvollinen epsilon. Erityisesti on syytä korostaa deltan roolia. Epäjatkuvuus todistuksessa delta saa roolin "mikä tahansa", eli väitteen tulee olla voimassa kaikilla deltan arvoilla. Tämä on kuitenkin helppo osoittaa kun tutkitaan hyppäyskohtaa. Tässä kohtaa ohjaaja voi osoittaa c-kohdan ja kehoittaa opiskelijaa pohtimaan miksi deltaa tarvitaan.

Tehtävän varsinainen tavoite on b-kohdassa. Tarkoituksena on löytää yleistys tämän tyyppisille funktioille. Erityisen toivottavaa olisi, että opiskelijat havaitsisivat hypyn suhteen epsiloniin. Tämän avulla opiskelija kykenisi todistamaan yksinkertaiset hyppäysepäjatkuvat funktiot epäjatkuviksi. Tässäkin kohdassa on hyvä huomata deltan rooli. Ohjaaja voi rohkaista opiskelijoita miettimään toimiiko tämä kaikilla deltan positiivisilla arvoilla.

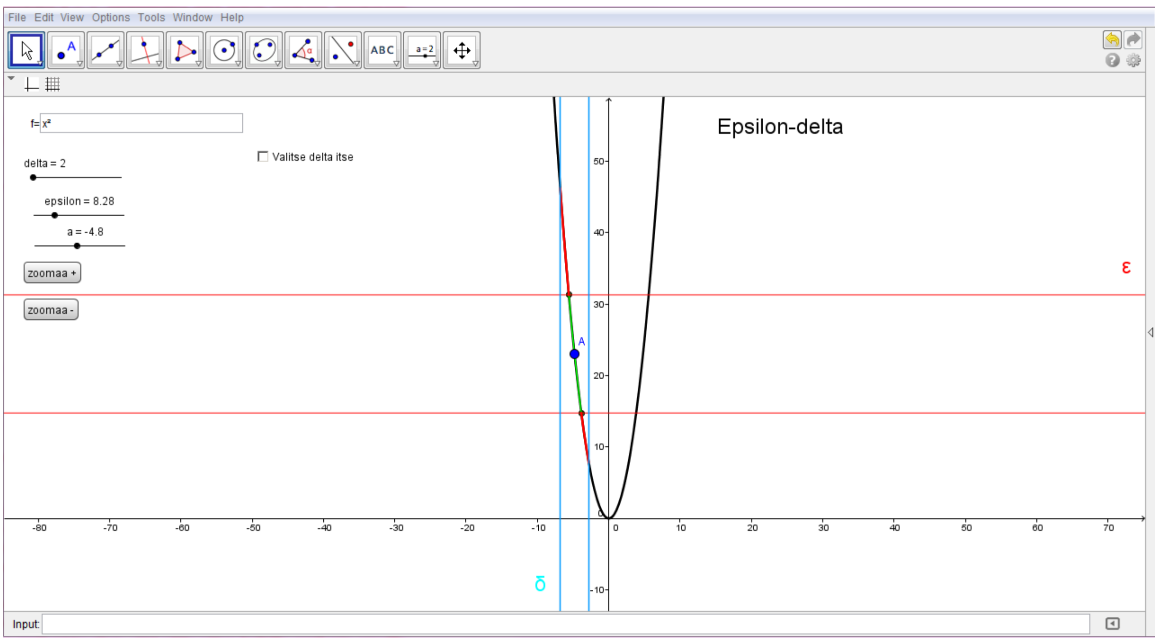
Tehtävän c-kohdassa opiskelijan on tarkoitus pohtia funktion jatkuvuutta muissa pisteissä. Kohta on suunniteltu siten, että opiskelijat pohtisivat sitä jo a- ja b-kohdissa. Tässä korostuu deltan rooli. Funktio on epäjatkuva vain yhdessä pisteessä, koska deltaa voidaan pienentää pienemmäksi kuin etäisyys hyppäyskohtaan. Tässä ohjaaja voi johdatella opiskelijaa tiedustelemalla esimerkiksi: "Entä jos valitaan piste hyvin läheltä tuota hyppäyskohtaa?".

7.2. Epsilon-delta yleisessä tapauksessa. Tässä luvussa on tarkoitus päästä yleiseen todistamiseen epsilon-delta-määritelmän avulla. Tavoite on haastava, sillä kyseinen aihe on yksi vaikeimpia yliopistotasolla. Tässä luvussa lähdettiin tutkielman kannalta poikkeuksellisesti rakentamaan ensin GeoGebra-ohjelmistoa. Tavoite oli luoda ohjelma, jonka avulla opiskelija voisi tutkia lähes mitä tahansa funktiota epsilon-delta-määritelmän kannalta.

Ensimmäinen tavoite oli mahdollistaa epsilonin ja deltan muuttaminen reaaliajassa siten, että muutokset olisivat välittömästi opiskelijoiden nähtävissä. Erityisesti tavoite oli konkreettisesti näyttää, milloin kaikki on jatkuvuuden määritelmän kannalta kunnossa ja milloin ei. Ohjelmiston avulla haluttuun funktioon tarkasteltavan pisteen ympärille muodostettiin suorakaide siten, että sivut muodostuivat deltan ja epsilonin päässä pisteestä olevista suorista. Tällöin funktio on jatkuva, jos mille tahansa positiiviselle epsilonille on olemassa delta siten, että funktion kuvaaja pysyy laatikon sisällä. GeoGebran avulla ohjelmisto näyttää visuaalisesti kaikki muutokset reaaliajassa, olivatpa ne muutoksia funktioon, tutkittavaan pisteeseen, epsiloniin tai deltaan. Ohjelmistoon lisättiin ominaisuus, joka maalaa funktion laatikon ylittävät kohdat punaisella ja sisällä olevat vihreällä. Tällöin opiskelija voi epsilonia ja deltaa muokkaamalla havaita, milloin ollaan sallitulla alueella. Erityisesti toivottavaa olisi, että opiskelija havaitsisi tätä kautta epsilonin ja deltan suhteen. Mitä pienemmäksi epsilon asetetaan, sitä pienemmäksi on yleensä deltakin valittava.

Yksi merkittävä tekijä jatkuvuuden todistuksissa on löytää suhde epsilonin ja deltan välillä. Monissa todistuksissa tutkitaan epäyhtälöitä ja saadaan deltalle muotoilu epsilonin avulla, esimerkiksi $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Myös tällainen haluttiin mahdollistaa, joten ohjelmistoon luotiin mahdollisuus asettaa delta riippumaan epsilonista. Tällöin ohjelmistoa voi käyttää myös todistuksen jälkeen havainnollistamaan, kuinka funktio tosiaan pysyy laatikossa kun esimerkiksi $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, riippumatta siitä miten epsilonia muutetaan.

Tämä ohjelmisto on siitä poikkeuksellinen, että sitä ei suunniteltu minkään valmiiksi keksityn tehtävän tutkimiseen, vaan tavoite oli luoda yleisesti epsilonin ja deltan tutkimista palveleva ohjelmisto. Ohjelmiston käyttö jää näin kunkin oman harkinnan varaan. Alla kuitenkin esimerkkejä ohjelmiston mahdolliseen käyttöön.



Kuva 8. Epsilon-delta: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 7.2. Tutki GeoGebra-sovelluksen avulla funktiota $f(x) = 2x$
a) Aseta epsiloniksi arvo 0.5 ja etsi delta, jonka etäisyydellä tarkastelupisteestä funktion arvot eivät karkaa yli epsilonin päähän funktion arvosta pisteessä. Tällöin GeoGebrassa funktio mahtuu laatikkoon, joka muodostuu epsilonin ja deltan päässä olevista suorista (tällöin $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$).
b) Kokeile useita epsilonin arvoja, toimiiko sama delta näille kaikille? Minkä suuruinen delta voi korkeintaan olla, jotta funktio mahtuu laatikkoon?
c) Aseta delta riippumaan epsilonista siten, että väite pätee kaikilla epsilonin arvoilla.
d) Kokeile jyrkentää suoraa, eli aseta funktioksi $f(x) = 5x$, $f(x) = 10x$, $f(x) = 100x$ jne. Mitä havaitset deltan ja epsilonin suhteesta?

7.2.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/JTQxFwjs

7.2.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tämä esimerkki on suunnattu aivan epsilon-delta-määritelmän läpikäynnin yhteyteen. Tällaisenaan tehtävä soveltuu käytettäväksi määritelmän esittelyn jälkeen. Pienellä pohjustuksella ja täsmällisillä ohjeilla voisi harkita tehtävän käyttöä myös ennen määritelmän esittelyä.

7.2.3. *Esimerkin tavoitteet.* Tässä esimerkissä pyritään avaamaan deltan riippuvuutta epsilonista. Tehtävän tärkein opetustarkoitus onkin juuri deltan ja epsilonin suhteen esittely. Tehtävän a- ja b-kohdissa aloitetaan tutkimalla yksittäisiä epsilonin arvoja, tällöin jatkuvalle funktiolle löydetään delta, joka toteuttaa ehdon. Toisaalta b-kohdassa pyritään jo kiinnittämään opiskelijan huomio siihen, ettei sama delta toimi kaikille epsiloneille (tällaiselle suoralle voidaan aina valita epsilon s.e. funktio ei mahdu positiivisen deltan kokoiseen laatikkoon, jos delta on annettu). Tehtävän b-kohdassa kysytään myös suurinta mahdollista deltaa, jolle väite pätee. Tällaisen löytäminen pitäisi olla helppo tehtävä, koska kyseessä on yksinkertaisin mahdollinen nouseva suora.

Tehtävän c-kohdassa on tarkoitus esitellä todistuksissakin tuttua käytäntöä, eli asettaa delta riippumaan epsilonista. Opiskelija todennäköisesti huomasi b-kohdassa epsilonin ja deltan riippuvuuden. Yksinkertaisimmillaan epsilon-delta todistuksissa riittää valita delta pienemmäksi kuin epsilon ja tämän jälkeen todistaa väite. Usein kuitenkin tarvitaan monimutkaisempia riippuvuuksia, jotka yleensä johdetaan analyyttisesti epäyhtälöiden avulla. Tehtävän d-kohdassa tutkitaan erilaisia suoria, jossa tarkoitus on havaita suoran kulmakertoimen ja tarvittavan deltan välinen yhteys. Luonnollisesti mitä jyrkempi kulma on, sitä pienemmäksi delta on valittava.

Tehtävän kannalta oleellinen huomio on, että erilaisille funktioille tarvitaan erilaisia epsilonin ja deltan suhteita. Opiskelijan on d-kohdassa tarkoitus havaita se, että delta voidaan joutua rajaamaan hyvinkin paljon pienemmäksi kuin epsilon. Tämä ei kuitenkaan ole jatkuvuuden kannalta ongelma. Tehtävään valittiin yksinkertaisia suorien yhtälöitä juurikin siksi, että opiskelijat ovat käsitelleet niitä lukiossa ja tietävät ne jatkuviksi. Toki d-kohdassa voidaan esittää mielenkiintoinen kysymys, mitä tapahtuu kun suoran jyrkkyys lähestyy äärettömyyttä. Tällöinhän kyseessä ei ole enää funktio, joten jatkuvuudestakaan ei ole mieltä puhua.

Huomautus 7.3. GeoGebra-sovelluksessa käytetään raskasta leikkauspisteitä etsivää apuohjelmaa, jonka avulla päivitetään funktion värit punaiseksi tai vihreiksi sen mukaan ovatko ne sallitulla alueella vai eivät. Kun sovellusta käytetään siten, että leikkauspisteiden määrä muuttuu, voidaan hetkellisesti saada värit väärin. Tämä johtuu siitä, että ohjelma suorittaa asioita dynaamisesti, eikä järjestyksessä, eli värit asetetaan ennen kuin ohjelma ehtii laskea uudet leikkauspisteet. Tällaisen ongelman sattuessa värit saa oikein muokkaamalla epsilonia hieman.

Raskaudesta johtuen sovellus ei myöskään välttämättä toimi selaimessa kovinkaan hyvin. Tällöin sovellus kannattaa ladata omalle koneelle. Lataamisen ohjeet löytyvät GeoGebraTubessa olevan tehtävän yhteydestä.

Tehtävä 7.4. Mikko on tutkinut funktion $f(x) = x^2$ jatkuvuutta pisteessä $x_0 = 2$. Hän on päätynyt tulokseen, jonka mukaan mille tahansa $\epsilon > 0$ voidaan valita $\delta = \epsilon/5$, jolloin jatkuvuuden määritelmän ehto täyttyy.
a) Tutki GeoGebran avulla, milloin Mikon löytämä delta toimii.
b) Millä yksinkertaisella muutoksella saadaan δ, joka toimii kaikille positiivisille epsilonin arvoille?

7.2.4. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä soveltuu käytäväksi jatkuvuuden määritelmän esittämisen jälkeen, ennen em. funktion jatkuvuuden todistusta (todistuksessa b-kohdan vastaus tulee esiin). Esimerkkiä voi myös hyödyntää demonstraatiotyökaluna todistuksen läpikäynnin yhteydessä (perustellaan miksi deltan lausekkeen pitää olla kaksiosainen).

7.2.5. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän tavoitteena on havainnollistaa epsilon-delta-määritelmää ja osoittaa oppilaille, että deltan valinnan kanssa on hyvä olla tarkkana. Tehtävän a-kohta on lähinnä määritelmän graafista havainnollista edellisen tehtävän tapaan laatikoiden avulla. Ohjelman avulla opiskelijan on tarkoitus havaita, että pienillä epsilonin arvoilla väite kyllä pätee, mutta suurilla arvoilla ei.

Tehtävän b-kohdassa opiskelijan on tarkoitus oivaltaa, että epsilon-delta-määritelmän kannalta suuret epsilonit eivät ole ongelma vaan pienet. Koska delta on asetettu riippumaan epsilonista, voi suurilla epsilonin arvoilla määritelmän ehto jäädä toteutumatta. Tämä voidaan korjata yksinkertaisesti asettamalla deltalle maksimi, eli muotoilemalla delta esimerkiksi $\delta = \max\{1, \epsilon/5\}$.

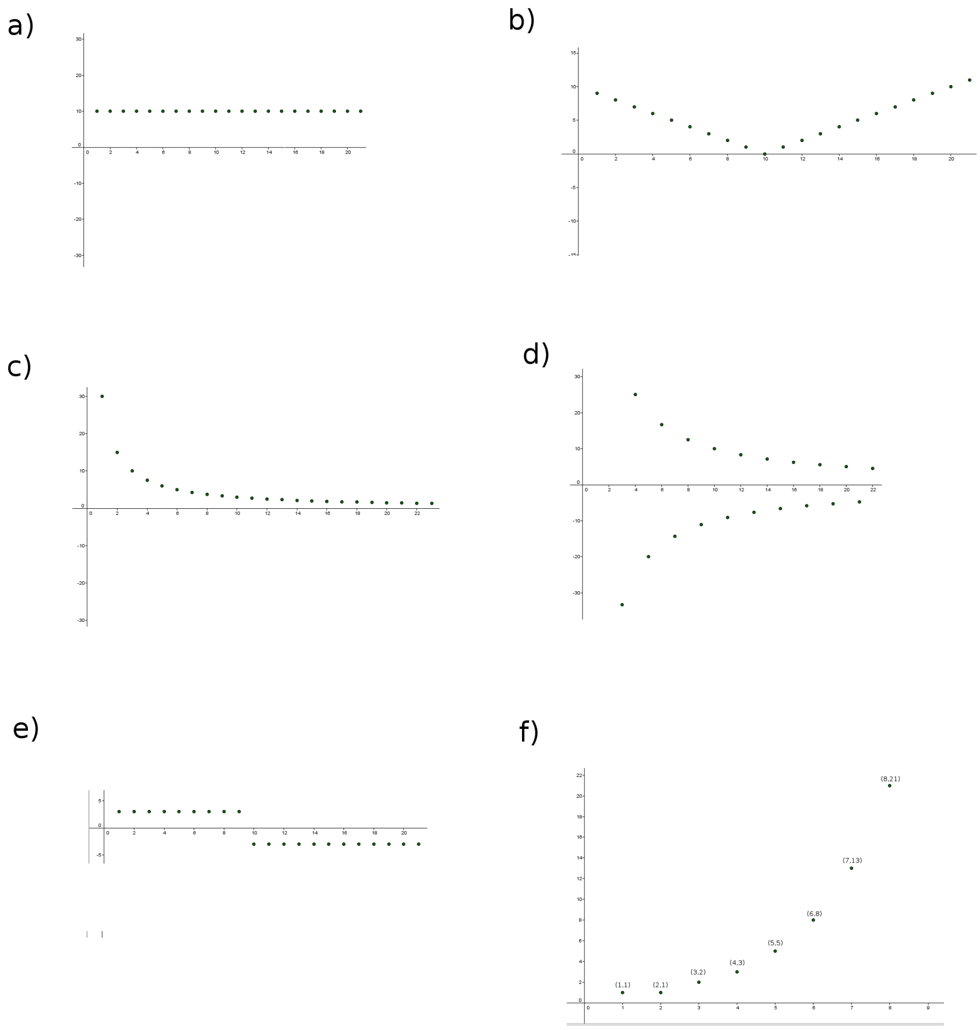
8. Matemaattiset jonot dynaamisen matematiikan ohjelmalla

Matemaattiset jonot ovat äärettömän pitkiä lukujonoja. Näiden määrittelyksi asetetaan yleensä jokin sääntö, jota jonon termit noudattavat. Esimerkiksi aritmeettiset ja geometriset jonot ovat opiskelijoille tuttuja jo lukiosta. Jonot voidaan täsmällisesti määritellä funktioiden avulla (3.7) ja seuraavassa tehtävässä tämän avulla johdatellaan opiskelijat jonojen maailmaan.

8.1. Funktioista jonoihin. Matemaattiset jonot aiheuttavat toisinaan hankaluuksia opiskelijoille. Jonoilla on arkikielessä hyvin erilainen merkitys, kuin matemaattisella jonolla. Arkikielessä jono on kokoelma peräkkäisiä objekteja, joita on oleellisesti äärellinen määrä. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jonolla täytyy olla viimeinen alkio. Matemaattisen jonon yksi ominaisuus on, ettei viimeistä alkiota ole, vaan jono on äärettömän pitkä. Seuraavassa tehtävässä esitellään matemaattisen jonon ominaisuuksia ja käyttäytymistä mainitsematta sanaa jono.

Tehtävä 8.1. Muodosta GeoGebraa apunasi käyttäen funktioita, jotka saavat arvoja vain positiivisissa kokonaislukupisteissä (eli $x \in \mathbb{N}$) ja joiden kuvaaja on mahdollisimman lähellä kuvan 9 funktioita:

Näyttävätkö funktion arvot lähestyvän jotain lukua järjestysnumeron kasvaessa?



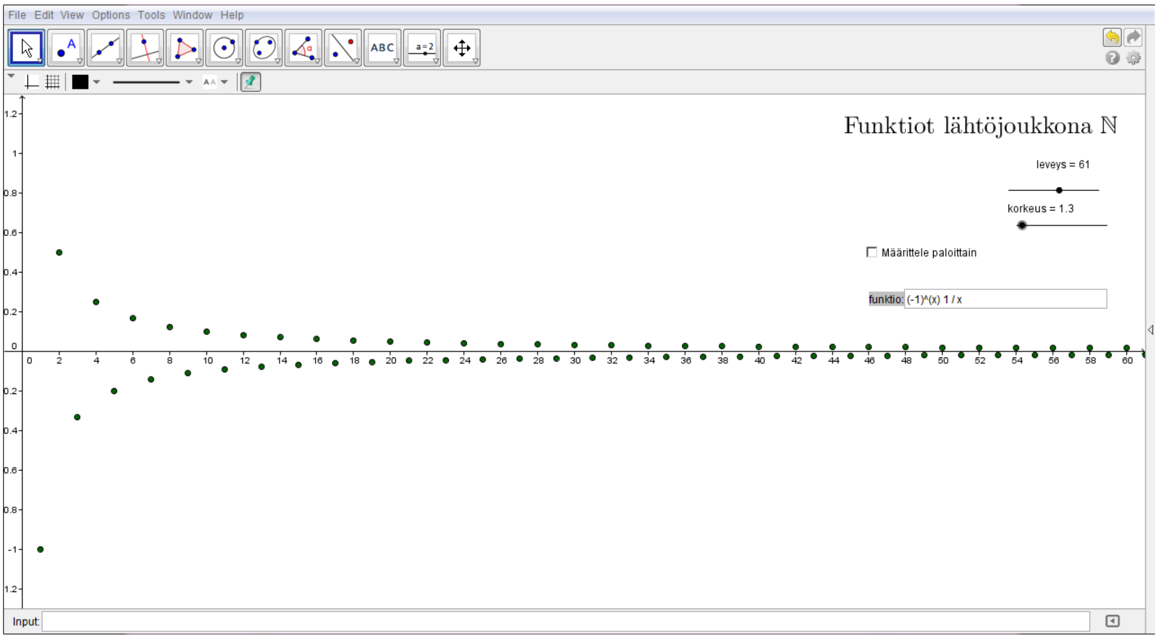
KUVA 9. Muodostettavien jonojen kuvat

8.1.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/uTrFraMD

8.1.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävän rooli on johdatella matemaattisten jonojen käsittelyyn, joten olisi tärkeää sijoittaa tehtävän käsittely hieman ennen matemaattisten jonojen määrittelyä. Esitiedoiksi vaaditaan lukiotiedot.

8.1.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän ensisijainen tavoite on tuoda esille matemaattisia jonoja ja niiden kanssa työskentelyä ilman jono-sanan suoranaista käyttämistä. Jonoille annetaan tehtävässä hyvin funktiomainen luonne, koska funktioiden käyttö on opiskelijoille tuttua. Toisaalta matemaattinen jono voidaan määritellä yksinkertaisesti funktiona, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{N}$.

Tehtävän GeoGebra-sovelluksessa opiskelijalle annetaan yksinkertainen täyttöruutu, johon hän voi kirjoittaa haluamansa funktion. GeoGebra muokkaa tämän jälkeen funktiosta sellaisen, että määrittelyjoukkona on vain luonnolliset luvut. Tehtävän tekemisen on tarkoitus olla melko helppoa ja suoraviivaista. Suurin osa tehtävän kuvien funktioista on tuttuja ja samankaltaisten kuvien saaminen onnistunee lukion käyneiltä opiskelijoilta nopeasti. Sen sijaan tehtävän sisällön ymmärtämisen kannalta on todella suuri merkitys sillä, että tehtävä käydään huolellisesti läpi. Tehtävässä pyritäänkin ennen kaikkea antamaan työkaluja läpikäynnin helpottamiseksi.



Kuva 10. Funktioista jonoihin: GeoGebra-applikaatio

Tehtävän a-kohdassa esitetään yksinkertainen vakiojono, jonka luomisen pitäisi funktioiden avulla olla helppoa. Vakiojonot ovat yksi tapa lähestyä virhekäsitystä, että jono ei voi saavuttaa raja-arvoaan. A-kohdan yhteydessä onkin hyvä korostaa, että kyseinen vakiojono tosiaan suppenee ja raja-arvo on 10.

Kohdat b- ja c-kohdat ovat varsin tuttuja ja toivottavasti yksinkertaisia. Tarkoituksena on vahvistaa ajattelua funktioiden kautta ja samalla tuoda esille jonojen monimuotoisuutta. Kohdassa c on tärkeää huomata, että jono suppenee kohti nollaa, vaikka kaikki jonon termit ovat positiivisia.

Tehtävän d-kohta on hyvin samankaltainen tehtävän c-kohdan kanssa ja on itse asiassa täsmälleen sama funktio sillä erotuksella, että d-kohdassa joka toinen alkio on negatiivinen. Tällaisen funktion luominen ei välttämättä ole itsestäänselvää ja tässä yhteydessä tarkkojen ohjeiden sijaan on tarkoituksenmukaisenpaa antaa opiskelijoiden itse kehittää tapoja luoda heilahtelua. Toki tehtävää läpikäytäessä on hyvä korostaa, että yleensä tällainen saadaan aikaan kertoimella $(-1)^n$.

Tehtävän e-kohta on jälleen verrattaen yksinkertainen ja sisältää vain yksinkertaisen paloittain määritellyn funktion. Tämä tukee jälleen sitä ajatusta, että jonoja voi tehdä mielivaltaisen monenlaisia, aivan kuten funktioitakin. Tehtävän appletti tarjoaa opiskelijalle painikkeen, jonka avulla hän voi siirtyä normaalin funktion sijaan määrittelemään funktion kahdessa osassa. Paloittain määrittely on toteutettu siten, että funktio on tietynlainen ennen opiskelijan määräämää arvoa ja toisenlainen sen jälkeen.

Viimeisenä tehtävässä on f-kohdan eksponentiaalisesti kasvava jono, joka saattaa aueta opiskelijoille Fibonaccin lukuina. Fibonaccin luvut määritellään yleisesti $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, mutta tehtävän kannalta tällaista määrittelyä ei voida tehdä. Esimerkiksi lyhyen internethaun avulla voidaan löytää yleinen muoto $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$. Tämä yleinen muoto on hyvä esittää opiskelijoille tehtävän läpikäynnin yhteydessä ja näin motivoida myös rekursiivisen määrittelyn hyötyjä.

8.2. Jonojen raja-arvon määritelmä. Raja-arvon määritelmä muuttuu oleellisesti, kun puhutaan jonoista. Määritelmässä on paljon samaa kuin jatkuvuuden epsilon-delta-määritelmässä. Nämä kaksi määritelmää ovat niin lähellä toisiaan, että toisen osaaminen helpottaa merkittävästi toisen oppimista. Yleensä analyysin kursseilla aloitetaan jommasta kummasta, käydään se varsin tarkasti ja toinen esitellään myöhemmin huomattavasti lyhyemmin. Tässä tutkielmassa käytiin melko tarkasti epsilon-delta-määritelmä jatkuvuudelle ja seuraavaksi käydään lyhyt versio siitä, miten vastaavaa voi tehdä jonojen raja-arvon määritelmän kannalta.

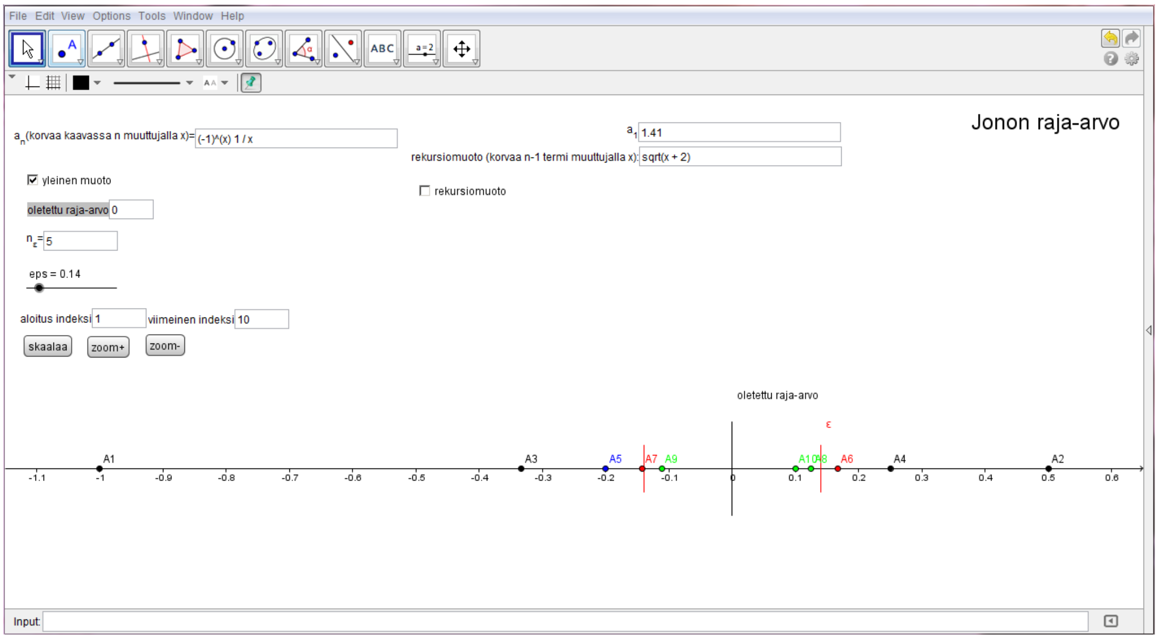
Jonojen raja-arvon määritelmässä (3.9) deltan korvaa n_ϵ, joka on indeksi, josta eteenpäin jonon alkioiden tulee olla korkeintaan epsilonin päässä toivotusta raja-arvosta. Ero funktioiden jatkuvuuteen on merkittävä. Jono voi käyttäytyä lähes mielivaltaisesti, kunhan jonon "häntä" asettuu lähelle raja-arvoa. Toisaalta vastaava pätee myös kääntäen, jono on suppeneva jos ja vain jos sen "häntä" asettuu lähelle raja-arvoa. Jono voi saada saman arvon ensimmäiset sata, miljoona tai kymmenen miljoonaa termiä, jonka jälkeen jono alkaa esimerkiksi kasvaa. Tällöin vaikka jonon alkupäätä tarkasteltaessa jono näyttää oikeinkin siistiltä, ei jonolla kuitenkaan ole raja-arvoa.

Seuraavassa tehtävässä on tarkoitus tarkastella jonojen raja-arvon määritelmää. Tehtävässä pyritään havainnollistamaan opiskelijoille sopivan indeksin valintaa, sekä jonon "hännän" roolia määritelmän kannalta.

Tehtävä 8.2. Tutki GeoGebralla seuraavia jonoja: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ja $b_n = \cos(n)$
a) Mikä on jonon a_n raja-arvo? Miten n_ϵ tulee valita, jotta tästä indeksistä eteenpäin jonon alkiot ovat korkeintaan epsilonin etäisyydellä raja-arvosta? Kokeile ensin etsiä sopiva n_ϵ muutamalle epsilonille, esimerkiksi $\epsilon = 0,5$ ja $\epsilon = 0,2$. Yritä sen jälkeen asettaa n_ϵ riippumaan epsilonista (viittaa epsiloniin merkinnällä eps), siten että se toimii kaikille epsilonin arvoille.
b) Mitä voit sanoa jonon b_n raja-arvosta ?

8.2.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/K74DKjtQ

8.2.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tämä tehtävä on suunniteltu siten, että raja-arvon epsilon-delta-määritelmä on käyty ja on siirrytty puhumaan jonoista. Tehtävää varten suunniteltu GeoGebra ohjelmisto mahdollistaa myös muunlaisten tehtävien käsittelyn, mutta ne jätetään tässä tutkielmassa lukijan itsensä mietittäviksi.



KUVA 11. Jonojen raja-arvo: GeoGebra-applikaatio

8.2.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän tarkoituksena on havainnollistaa jonon raja-arvon määritelmää tarjoamalla opiskelijalle ohjelmisto, jonka avulla he voivat konkreettisesti piirtää jonon pisteitä. Erityisesti ohjelmistolla halutaan visualisoida pisteiden kelpaavuus valitun epsilonin ja indeksin n_ϵ kannalta. Kelpaavat pisteet värjätään vihreällä, määritelmän toteuttamatta jättävät pisteet punaisella. Koska olemme kiinnostuneita vain indeksin n_ϵ jälkeisistä arvoista, ennen sitä esiintyvät indeksit värjätään mustiksi. Lisäksi indeksi n_ϵ värjätään siniseksi erottuvuuden takia.

Tehtävässä käytetään edellisestä tehtävästä poiketen yksiulotteista mallia, jossa kaikki jonon arvot ovat x-akselilla. Tätä esittämistapaa käytetään yleisesti matemaattisia jonoja esitettäessä. Yksiulotteisuus on hieman epäselvää, etenkin suppeneville jonoille, koska jonon arvot menevät joko päällekkäin tai hyvin lähelle toisiaan. GeoGebra-sovelluksessa tätä pyritään vähentämään antamalla opiskelijalle mahdollisuuden valita piirrettävien pisteiden määrä. Opiskelija voi myös aloittaa haluamastaan indeksistä, jolloin hän voi tietoisesti jättää alkua pois ja keskittyä ”häntään”.

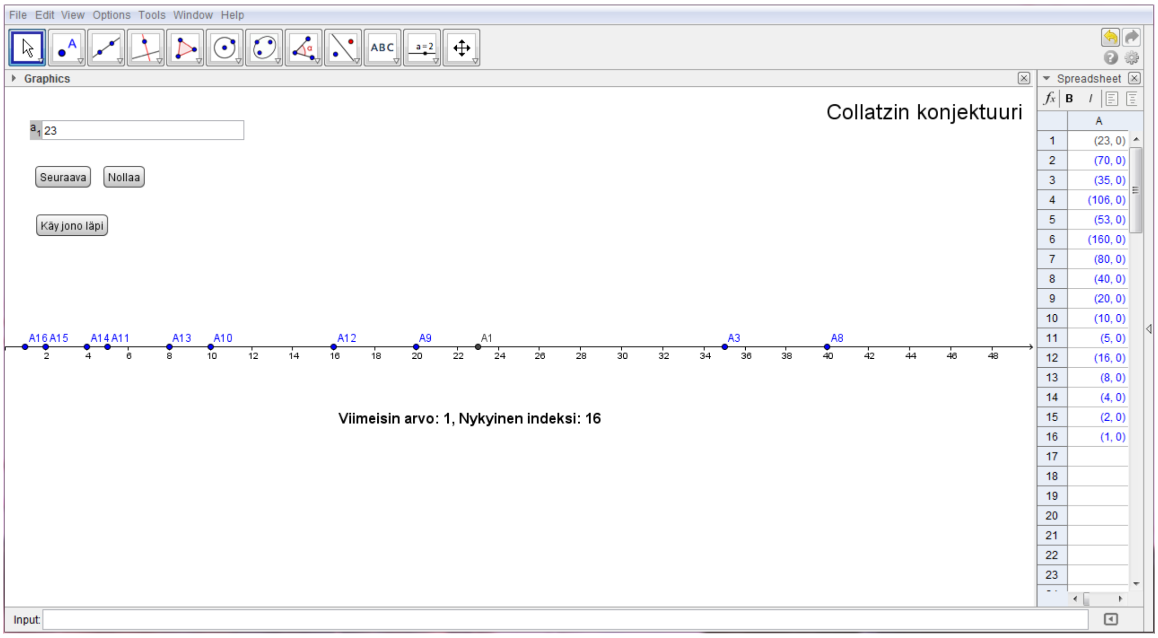
Tehtävän a-kohdassa käsitellään analyysin kursseilla usein vastaan tulevaa jonoa. Kyseinen jono muistuttaa tuttua jonoa $a_n = \frac{1}{n}$, sillä muutoksella, että joka toinen alkio on negatiivinen. Tästä huolimatta jono tietenkin suppenee nollaan ja tämä opiskelijoiden on tarkoitus huomata. Toisaalta tarkoitus on myös havainnollistaa sitä, että indeksi n_ϵ riippuu epsilonista. Ohjeessa opiskelijaa pyydetään ensin etsimään erillisille epsiloneille sopiva n_ϵ, jonka jälkeen tarkoitus on löytää yleinen sääntö. Tehtävässä oletetaan, että tällaisten sääntöjen löytäminen on tuttua epsilon-delta todistuksista.

Tehtävän b-kohta on tarkoitettu lähinnä herättämään opiskelijassa se ajatus, ettei pidä tuijottaa koko jonoa. Tämä jono käyttäytyy melko satunnaisesti, siten, että kaikki jonon alkiot jäävät välille $[-1, 1]$. Tällöin jos piirretään runsaasti alkioita, saadaan tämä väli täyteen pisteitä. Tässäkin korostuu värityksen rooli, joka osoittaa välittömästi, että punaisia pisteitä on tällöin runsaasti, riippumatta miten indeksi

n_ϵ valitaan. Toki jono on myös siitä mielenkiintoinen, ettei sitä suoraan voi osoittaa hajaantuvaksi jonoksi satunnaisen käytöksen vuoksi.

GeoGebra-ohjelmistossa käyttäjä voi itse valita, millä välillä hän jonoa haluaa tutkia. Tämä on toki käytännön kannalta välttämättömyys, sillä jonot tunnetusti jatkuvat äärettömyyksiin. Tällä on kuitenkin myös käytännön sovellus. Ominaisuuden avulla voidaan tutkia vain jonon häntäpäätä ja erityisesti voidaan asettaa indeksointi alkamaan indeksistä n_ϵ. Tällöin jos n_ϵ on valittu hyvin, kaikki jonon alkiot jäävät muodostuvaan laatikkoon. Toki ominaisuudella on myös kääntöpuoli, joka on hyvä ottaa esille tehtävää käsiteltäessä. Koska tässä piirretään aina vain äärellinen määrä pisteitä, ei tämän ohjelmiston perusteella voi tehdä suoria johtopäätöksiä jonon suppenemisesta. Erityisesti b-kohdassa ei voida osoittaa, että jono hajaantuu, vaikka se toki siltä näyttää.

8.3. Collatzin konjektuuri. Seuraava tehtävä esittelee erään matemaattisesti mielenkiintoisen jonoihin liittyvän konjektuurin. Collatzin konjektuurin mukaan mistä tahansa luonnollisesta luvusta päästään ykköseen kahdella hyvin yksinkertaisella säännöllä. Aina jos käsiteltävä luku n on pariton, seuraava luku on $3n + 1$. Jos luku n on parillinen, seuraava luku on $n/2$ [**3**, s.1]. Näin jatkaen saavutetaan ykkönen jossain vaiheessa (tätä ei ole todistettu, mutta tietokoneiden avulla on todettu, että väite pätee hyvin suurille luvuille [**3**, s.6]). Tehtävässä konjektuuriin on lisätty ehto, että jonon jäsen on 1, mikäli edellinen jäsen on 1. Normaali konjektuuri jää ikuiseen silmukkaan $1, 4, 2, 1, \ldots$. Lisäyksen avulla jonosta saadaan suppeneva kaikille GeoGebran puitteissa mahdollisille alkuarvoille.



Kuva 12. Collatzin konjektuuri: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 8.3. Olkoon meillä seuraavanlainen jono:

$$a_1 \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{, kun } a_{n-1} = 1 \\ 3a_{n-1} + 1 & \text{, kun } a_{n-1} \text{ on pariton} \\ a_{n-1}/2 & \text{, kun } a_{n-1} \text{ on parillinen} \end{cases}$$

Tutki jonoa oheisen GeoGebra-sovelluksen avulla. Valitse mieleisesi alkuarvo ja tutki suppeneeko jono tällä alkuarvolla. Kokeile myös muita alkuarvoja, mitä huomaat? Lisätietoja aiheesta löytyy hakusanoilla ”Collatz conjecture”.

8.3.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/nz2Aappf

8.3.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävän tekoon riittää periaatteessa lukiotiedot, koska suppenemiseen ei vaadita perusteluja. Tehtävän voi sijoittaa kurssin alkupuolelle motivaatioksi, kurssin loppupuolelle herättämään mielenkiintoa jatkaa aiheesta eteenpäin tai esimerkiksi jonojen läpikäynnin yhteyteen hieman erilaisena jonona.

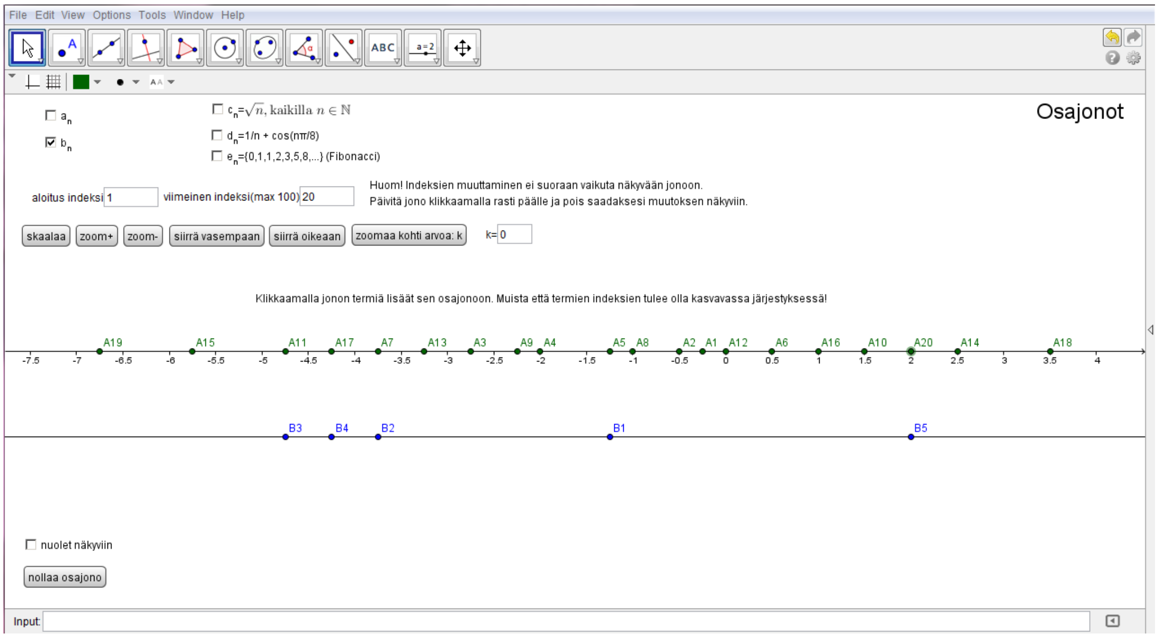
8.3.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävässä lähinnä tutustutaan Collatzin konjektuuriin, jolloin suurin tavoite on saada opiskelija kiinnostumaan aiheesta. GeoGebran avulla opiskelija saa selkeän kuvan jonon käyttäytymisestä, joka alkuun näyttää satunnaiselta hyppäilyltä edestakaisin. Joissain vaiheissa jopa näyttää, että jono karkaa liian kauas, jolloin voi kuvitella jonon hajaantuvan. Kuitenkin väistämättä kaikilla GeoGebran mahdollistamilla alkuarvoilla jono saavuttaa ykkösen ennemmin tai myöhemmin. Tämä on uskomattomuudessaan varsin kiehtovaa matematiikkaa ja tehtävä toivottavasti herättää tällaisia ajatuksia myös opiskelijassa.

GeoGebra-sovelluksessa löytyy kaksi tapaa käydä jonoa läpi. Ensimmäinen tapa on käydä jonoa alkio kerrallaan. Tätä on tarkoitus käyttää alkuvaiheessa. Tämän avulla saadaan selkeämpi käsitys siitä, miten arvot käyttäytyvät. Toinen vaihtoehto on käydä koko jono läpi, eli jatkaa kunnes saavutetaan arvo 1. Tämän tarkoitus on nopeuttaa prosessia, jos haluaa käydä läpi paljon erilaisia alkuarvoja. Useiden erilaisten alkuarvojen läpikäyminen oli ainakin ohjelmaa tehtäessä addiktoivaa ja läpikäynnin nopeus teki siitä mielekästä. Jopa suurilla alkuarvoilla tietokone laskee jonon suhteellisen nopeasti läpi.

GeoGebra seuraa myös indeksiä, joten jonon läpikäynnillä nähdään välittömästi, montako askelta tarvittiin ykköseen pääsyyn. Myös tämän seuraaminen on varsin kiehtovaa. Nopea päätelmä olisi, että suuret alkuarvot tuottavat selvästi suurempia askelmääriä. Tämä ei kuitenkaan ainakaan lyhyen kokeilun pohjalta ollut totta. Esimerkiksi luku 13421 päätyy ykköseen 95 askeleen jälkeen, kun taas esimerkiksi luku 55 vaatii 113 askelta. Tottakai alkuarvon kasvattaminen keskimäärin nostaa tarvittavaa askelmäärää, mutta hitaasti (jos esimerkiksi ajatellaan, että luku n vaatii k askelta, niin luku $2 \cdot n$ vaatii vain yhden askeleen enemmän, sillä ensimmäisen askeleen jälkeen ollaan arvossa n).

8.4. Osajonot. Osajonolla tarkoitetaan matematiikassa jonoa, joka muodostetaan toisesta jonosta valitsemalla termejä kasvavassa järjestyksessä. Osajonoilla on mielenkiintoisia ominaisuuksia, kuten Bolzano-Weierstrassin lause (3.17).

Osajonojen opetuksen aloittamisen yhteydessä suurin ongelma tulee yleensä merkintätavoissa. Yleisesti indeksointi menee varsin monimutkaiseksi, jolloin varsinaisen asian omaksuminen voi olla haasteellista. Seuraavassa tehtävässä pohjustetaan osajonojen käyttöä ja indeksointia GeoGebran avulla.



KUVA 13. Osajonot: GeoGebra-applikaatio

TEHTÄVÄ 8.4. Joissain tilanteissa jonon sisältä löytyy kiinnostavia jonoja. Esimerkiksi jono $a_n = -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ voidaan jakaa kahteen varsin yksinkertaiseen jonoon $b_n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $c_n = -1, -2, -3, \ldots$, käsittelemällä erikseen parillisia ja parittomia termejä.

Määritellään jonolle a_n *osajono* a_{n_i}. Jonon a_n osajono saadaan valitsemalla alkuperäisestä jonosta termejä $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ siten, että järjestysnumerot $n_1, n_2, \ldots$ muodostavat kasvavan jonon. Esimerkiksi yllä jono b_n saatiin valitsemalla $b_i = a_{n_i}$, kun $n_i = 2 \cdot i, i \in \mathbb{R}$.

GeoGebra-sovelluksella voit jonon termejä klikkailemalla asettaa ne osajonon termeiksi (huom! muista että valittavien termien järjestysnumerot on oltava kasvavassa järjestyksessä). Tee sovelluksen avulla seuraavat tehtävät:

(a) Muodosta:
  (i) Jonolle a_n kasvava osajono
  (ii) Jonolle b_n vähenevä osajono
(b) Muodosta:
  (i) Jonolle $c_n = \sqrt{n}$ osajono, jossa on vain kokonaislukuja.
  (ii) Jonolle $d_n = \frac{1}{n} + \cos \frac{n\pi}{8}$ osajono, joka suppenee kohti lukua $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  (iii) Fibonaccin jonolle $e_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ osajono, joka sisältää kaikki kolmella jaolliset luvut alkuperäisestä jonosta.

8.4.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/TR2Zj2FS

8.4.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on tarkoitettu ennen osajonojen käsittelyä, minkä vuoksi siinä on pieni pohjustus. Kuitenkin jonoihin liittyvät käsitteet, mukaanlukien jonon suppeneminen oletetaan tunnetuksi.

8.4.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän tavoitteena on esitellä osajonoja sekä niiden indeksointia. Ensimmäisessä kohdassa keskitytään osajonojen muodostamiseen. Toisessa kohdassa aletaan jo pohtia osajonojen indeksointia. Kohdan jonot on valittu siten, että indeksointi onnistuu loogisesti, jottei tähän mene liikaa aikaa.

Tehtävän a-kohta on lähinnä johdattelua, joka ei vaadi paljoa aikaa. Tärkeintä tässä on, että opiskelija ymmärtää miten osajonot muodostetaan. Erityisesti GeoGebra pyrkii korostamaan kasvavassa järjestyksessä tapahtuvaa indeksien valintaa. Mikäli opiskelija yrittää valita laittoman termin jonosta, GeoGebra kehoittaa häntä valitsemaan osajonon termin uudestaan. Tehtävän a-kohta myös johdattelee tekemään myös b-kohdan osat GeoGebraa klikkailemalla puhtaan päättelyn sijaan.

Tehtävän b-kohdassa aloitetaan valitsemaan osajonoja valmiiksi annetuista jonoista. Tällöin erityisesti indeksointi korostuu. Kohdassa i osajonoksi saadaan $1, 2, 3, 4, \ldots$, kunhan osataan valita oikeat indeksit. Helpoin valinta on $i = n^2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kohdan oleellisin opetustarkoitus on selventää, etteivät kaikki osajonot ole valittavissa ”joka kolmas” periaatteella. Tehtävän yhteydessä on hyvä selventää opiskelijoille, että osajonot voidaan valita missä tahansa kasvavassa järjestyksessä, periaatteessa jopa ilman loogista kaavaa.

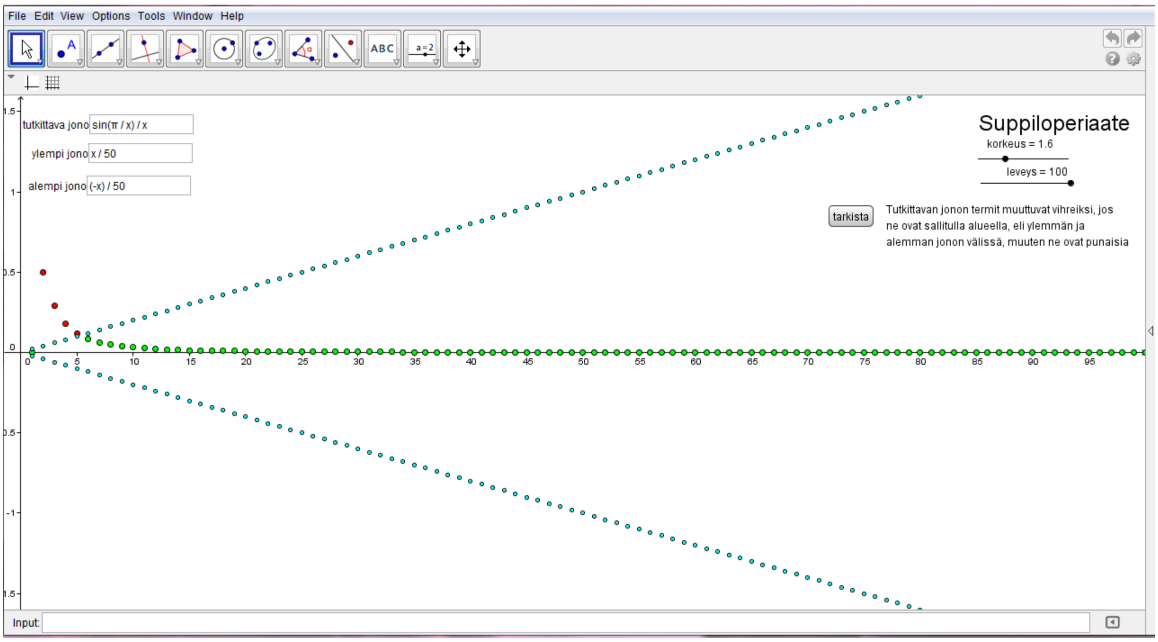
Tehtävän b-kohdassa ii vaaditaan ensimmäistä kertaa hieman ajattelua. Toki lyhyellä MAOL-taulukkokirjan selauksella opiskelija pääsee ratkaisuun nopeasti. Toinen tapa on tutkia jonoa GeoGebran avulla. Jono sisältää termin $\frac{1}{n}$ siksi, että muutoin GeoGebrassa kaikki pisteet olisivat monikertoja (eli pisteitä olisi 9 ja jokainen toistuisi useaan kertaan). Tällä valinnalla jonosta saadaan selkeämpi katsoa ja suppeneminenkin saadaan konkreettisesti aikaan (toki valitsemalla sama piste joka kerta saadaan suppeneva jono, mutta tällainen on opiskelijalle vaikeampi käsittää suppenevana jonona).

Kohta iii on jo hieman hankalampi ja vaatii Fibonaccin jonon tutkimista. Tässä GeoGebran avulla voi nopeasti nähdä, että joka neljäs termi on jaollinen kolmella (todistusta ei vaadita). Jos tehtävään haluaa lisää haastetta, voi tämän jälkeen kysyä, voiko tätä tulosta yleistää. Fibonaccin jonossa joka ks termi on jaollinen luvulla F_k, eli esim. joka neljäs termi on jaollinen luvulla $F_4 = 3$

9. Konvergenssikriteeriot dynaamisen matematiikan ohjelmalla

Yksi merkittävä tekijä tutkittaessa jonoja ja funktioita, on kysymys raja-arvojen olemassa olosta. Funktioiden raja-arvoja voidaan tarkastella missä tahansa pisteessä, mutta jonojen raja-arvot ovat aina äärettömyyksissä. Raja-arvojen todistaminen epsilon-delta-määritelmien avulla on yleisesti työlästä ja siksi matematiikkaan on muovautunut useita työkaluja raja-arvojen käsittelyyn. Tässä luvussa käsitellään näistä muutamia, jotka esiintyvät analyysin kurssilla.

9.1. Suppiloperiaate. Yksi käytännöllinen ehto jonon raja-arvon määrittämiseen on suppiloperiaate (3.13). Nimensä mukaisesti tutkittavalle jonolle etsitään ”suppilo”, joka on käytännössä kaksi muuta jonoa, jotka suppenevat kohti samaa raja-arvoa. Lisäksi näiltä vaaditaan ominaisuus, että niiden jäsenet rajaavat tutkittavan jonon kutakin jäsentä ylhäältä ja alhaalta. Suppiloperiaatteen avulla voidaan siis todistaa raja-arvon olemassaolo ja saadaan jopa tietoon itse raja-arvo. Suurin ongelma on löytää suppenevat jonot, jotka rajaavat tutkittavan jonon. Yleisimmin suppiloperiaatetta käytettäessä käytetään yksinkertaisia jonoja, kuten $b_n = \frac{1}{n}$. Näin myös seuraavassa tehtävässä, jossa tutkitaan jonoa $\frac{\sin(\pi n)}{n}$.



Kuva 14. Suppiloperiaate: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 9.1. Osoita suppiloperiaatetta käyttäen, että jono $a_n = \frac{\sin(\pi n)}{n}$ suppenee. Käytä apunasi oheista GeoGebra-sovellusta.

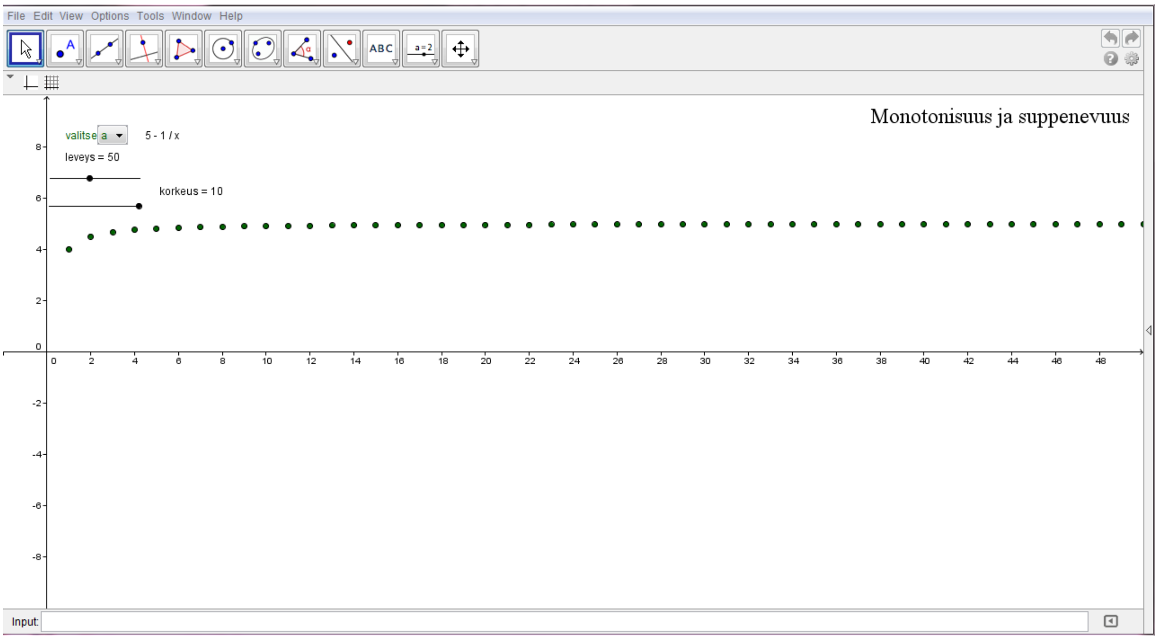
9.1.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/VDMhUzVY

9.1.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä soveltuu käsiteltäväksi suppiloperiaatteen esittelyn jälkeen. Vaatimuksena on myös, että tiedetään jonojen $\frac{1}{n}$ ja $-\frac{1}{n}$ suppenevuus.

9.1.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävän ensisijainen tavoite on tuoda suppiloperiaate konkreettisena oppilaan silmien eteen. Erona tavallisiin taululle piirrettyihin kuviin verrattuna on, että GeoGebra mahdollistaa reaaliajassa tehtävät muutokset. Jonon piirrettyään opiskelija toivottavasti näkee jonon suppenevan nopeasti kohti nollaa. Tavoitteena on että opiskelija keksii, että sopivat ylä- ja alarajajonot ovat $\frac{1}{n}$ ja $-\frac{1}{n}$.

Ratkaisun jälkeen voidaan opiskelijaa kehoittaa kokeilemaan toisia tunnetusti suppenevia jonoja $\frac{1}{n^2}$ ja $-\frac{1}{n^2}$. Sovelluksen avulla huomataan, että nämä eivät täytä suppiloperiaatteen vaatimusta, vaan ovat pienenpiä kuin tehtävän jono. Toisaalta tällainen jono voidaan osoittaa suppenevaksi samalla tavalla kuin tehtävän jono (samat ylä- ja alaraja jonot käyvät).

9.2. Monotonisuus ja suppenevuus. Yksi yksinkertaisimmista konvergenssiehdoista saadaan monotonisille jonoille. Monotoniset jonot suppenevat, jos ja vain jos ne ovat rajoitettuja (3.15). Seuraavassa tehtävässä tutustutaan hieman monotoonisuuden käsitteeseen ja pohditaan myös raja-arvoja.



Kuva 15. Monotonisuus ja suppenevuus: GeoGebra-applikaatio

Tehtävä 9.2. Tutki seuraavia jonoja ja päättele/arvaa ovatko ne monotonisia, rajoitettuja tai suppenevia. Lopuksi tarkista syöttämällä GeoGebraan. Täsmällisiä todistuksia ei vaadita.
a) $a_n = 5 - \frac{1}{n}$
b) $c_n = \frac{n^2+3}{2n^2-1}$
c) $d_n = \frac{n^2-5}{3n^2-2}$
d) $(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$
e) $(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n-1}$
f) $h_1 = \sqrt{2}$ ja $h_n = \sqrt{2 + h_{n-1}}$
Pohdi vielä voidaanko ominaisuuksista monotoninen, rajoitettu ja suppeneva johtaa toisiaan (kiinnitä huomiota suuntiin esim. rajoitettu jono suppenee vs suppeneva jono on rajoitettu).

9.2.1. *Linkki sovellukseen.*
https://www.geogebra.org/m/x9ybumg4#material/bDNhM4Rd

9.2.2. *Esitiedot ja ajankohta.* Tehtävä on suunniteltu pohjustukseksi monotonisten jonojen konvergenssikriteerion esittelyyn ja käyttöön. Tehtävä on tarkoitettu käytäväksi läpi monotonisuuden määritelmän jälkeen, muttei ennen monotonisuuden konvergenssiehdon läpikäyntiä. Yleensä nämä kuitenkin halutaan esitellä samalla kertaa. Tällöin tehtävää voi halutessaan käyttää siten, että antaa tehtävää ennen monotonisuuden määritelmän. Kasvavuus ja vähenevyys on esitelty lukiossa, joten tehtävän pitäisi tällöin olla tehtävissä, sillä tarkoitus ei vielä tässä vaiheessa ole saada aikaan täsmällisiä todistuksia.

9.2.3. *Tehtävän tavoitteet.* Tehtävä on suunniteltu pohjustamaan monotonisten jonojen suppenemista koskevaa lausetta ja myös valmistella opiskelijaa todistuksiin. Erityisesti tehtävässä keskitytään kolmeen asiaan, monotonisuuteen, rajoitettuihin jonoihin ja raja-arvoihin. Tarkoitus on, että opiskelija huomaisi monotonisen rajoitetun jonojen suppenevan. Toisaalta huomion voi tehdä myös eri järjestyksessä. Tehtävässä on ainakin yksi jono (a_n), josta opiskelija todennäköisesti keksii suppenevuuden ennen rajoittuneisuutta. Tällöin havaitaan, että lause pätee myös toiseen suuntaan.

Tehtävän a-kohta on varsin selkeä ja todennäköisesti sen suoritus sujuu opiskelijalta nopeasti. Jono on ensimmäinen esimerkki kasvavasta jonosta, joka on rajoitettu ja suppeneva. Tässä opiskelija todennäköisesti tajuaa suppenevuuden välittömästi, koska $\frac{1}{n}$ on tuttu jo lukiotasolta. Tässä tehtävän tavoite olisi, että rajoittuneisuuden keksimiseksi opiskelija toteaa jonon olevan kasvava. Tällöin suppenevuudesta seuraa, että raja-arvo on myös jonon jäsenten pienin yläraja.

Tehtävän b- ja c-kohdat ovat lukiosta tuttua raja-arvolaskentaa. Molemmissa opiskelija saa lukiotiedoilla raja-arvon varsin nopeasti, jolloin jäljelle jää kysymys monotonisuudesta. Molemmat kohdat ovat monotonisia, toinen kasvava ja toinen vähenevä. Kohtien lausekkeet ovat sellaisia, että epsilon-delta-määritelmää käyttäen niiden suppeniviksi osoittaminen olisi varsin työlästä, joten jälleen havaitaan kätevämpien työkalujen tarpeellisuus. Kohtien jonot ovat hyvin samankaltaisia, mutta kuitenkin täysin erilaisia (kasvava ja vähenevä). Tämä toivottavasti herättää opiskelijassa motivaation käyttää tällaisissa tilanteissa analyyttistä tulkintaa sen sijaan että vain arvaisi jonon olevan esimerkiksi vähenevä.

Kohdissa d ja e jonoissa esiintyy uusi termi $(-1)^n$. Tämä on varsin yleinen analyysin kursseilla esiintyvä termi, joka vaihtaa jonon parittomien termien merkin. Tällöin lähes aina kyseessä on ei-monotoninen jono. Kohdassa f on kyseessä kohtuullisen tavallinen suppeneva jono, joka heilahtelee nollan molemmin puolin. Kohdan myötä huomataan, että jonon ei tarvitse olla monotoninen supetakseen. Kohta f esittelee jonon, joka suppenisi ilman termiä $(-1)^n$, mutta kyseisen termin avulla jää heilahtelemaan ykkösen ja miinus ykkösen väliin (näitä kuitenkaan saavuttamatta). Opiskelijan on tarkoitus huomata, että vaikka jono olisi rajoitettu, niin se ei välttämättä suppene.

Viimeiseksi säästetty jono on lähdeteoksessa [**2**, s.69-70] esiintyvä rekursiivisesti määritelty jono, joka todistetaan suppenevaksi monotonisuuden avulla. Opiskelijan ei tehtävää tehdessä ole tarkoitus osata päätellä jonosta paljoakaan, vaan kohdan tarkoitus on olla johdantoa myöhemmin tulevalle todistukselle. Lyhyen pähkäilyn jälkeen opiskelija syöttää jonon GeoGebraan, joka varsin selkeästi paljastaa jonon käytöksen. GeoGebran avulla voidaan jopa lukea jonon raja-arvo, mitä ei suoraan monotonisten jonojen konvergenssikriteeriolla saada. Kuitenkin matematiikassa kuvien avulla ei todistella mitään ja kohta toivottavasti herättää opiskelijassa mielenkiintoa, miksi jono käyttäytyy näin.

Lähdeluettelo

[1] Micheal Spivak: *Calculus.* Third edition, 1994.

[2] Brian Thomson, Judith Bruckener, Andrew Bruckener: *Elementary Real Analysis.* Second edition, 2008.

[3] Jeffrey Lagarias: *The 3x + 1 Problem And Its Generalizations.* American Mathematics Monthly 92(1), 1985.

[4] Beth L. Cory, Joe Garafalo: *Using Dynamic Sketches to Enhance Preservise Secondary Mathematics Teachers' Understanding of Limits of Sequences.* Journal for Research in Mathematics Education vol. 42, no. 1 (January 2011).

[5] Opetushallitus Lukion opetussuunntielman perusteet www.oph.fi, 2015.

[6] Jonathan Borwein: *The Experimental Mathematician: The Pleasure Of Discovery And The Role Of Proof.* Internal Journal of Computers for Mathematical Learning, 10: 75-108 (2005).