Yleistettyjen jonojen käyttö topologiassa

Antti Karvinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2016

Tiivistelmä: Antti Karvinen, *Yleistettyjen jonojen käyttö topologiassa* (engl. *Use of generalized sequences in topology*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 33 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, elokuu 2016.

Tämä tutkielma käsittelee verkkoja ja filttereitä, joiden avulla voidaan yleistää jonon käsite topologisiin avaruuksiin. Metrisissä avaruuksissa suppenevat jonot määräävät täysin avaruuden topologian, jatkuvat funktiot sekä kompaktit joukot. Yleisissä topologisissa avaruuksissa tilanne on toisenlainen: on olemassa avaruuksia, joissa jonot eivät toteuta näitä hyödyllisiä ominaisuuksia. Tämän vuoksi on tarve kehittää parempia käsitteitä, jotka toteuttaisivat nämä ominaisuudet.

Verkko konstruoidaan korvaamalla jonon määrittelyjoukkona toimiva luonnollisten lukujen joukko suunnatulla joukolla. Verkko on funktio suunnatulta joukolta topologiseen avaruuteen. Verkoille määritellään suppeneminen samalla tavalla kuin jonoille: verkko suppenee pisteeseen a, jos se on lopulta kaikissa pisteen a ympäristöissä. Tärkeimpinä verkkoihin liittyvinä tuloksina esitetään, että toisin kuin jonot topologisissa avaruuksissa, suppenevat verkot määräävät täysin avaruuden topologian, jatkuvat funktiot ja kompaktit joukot. Lisäksi verkot ovat myös käyttökelpoisia yksinkertaisimmissa avaruuksissa: funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemannin integraali voidaan esittää verkon raja-arvona.

Filtteri on joukkokokoelma, joka toteuttaa tietyt ehdot. Tutkielmassa esitetyt filttereihin liittyvät päätulokset osoittavat, että niin kuin verkot, myös filtterit määräävät täysin topologisen avaruuden topologian, jatkuvat funktiot sekä kompaktit joukot. Tutkielmassa käytetään useassa todistuksessa apuvälineenä filtterikantoja. Filtterikantoja käyttämällä päästään yksinkertaisempaan esitykseen, sillä ne ovat usein pienempiä joukkoja kuin filtterit. Niitä hyödynnetään myös, kun tutkitaan jonojen ja filtterien yhteyttä. Osoittautuu, että jonosta voidaan aina konstruoida filtteri. Näin konstruoitu jonoon liitetty alkeisfiltteri osoittautuu mielekkääksi, sillä kyseinen filtteri suppenee johonkin pisteeseen täsmälleen silloin, kun alkuperäinen jono suppenee samaan pisteeseen.

Verkot ja filtterit ovat yhteydessä toisiinsa: verkosta voidaan aina konstruoida filtteri, ja vastaavasti filtteristä voidaan aina konstruoida verkko. Näiden konstruktioiden järkevyys todistetaan näyttämällä, että näin kehitetyt verkot ja filtterit suppenevat johonkin pisteeseen täsmälleen silloin, kun alkuperäiset suppenevat samaan pisteeseen.

Sisältö

Johdanto

Jono on varmasti kaikille matematiikkaa tunteville tuttu käsite. Matematiikan yliopistotason peruskursseilla opetetaan, miten metristen avaruuksien jonoilla on ehkä hieman yllättäviäkin yhteyksiä muihin, avaruuden rakenteisiin liittyviin tärkeisiin käsitteisiin. Topologiaan aiemmin perehtyneelle lukijalle lienee tuttua, että jonojen käyttämisessä topologisissa avaruuksissa tulee vastaan eräitä ongelmia. Tämän tutkielman tavoitteena onkin esittää, miten nämä ongelmat voidaan kiertää määrittelemällä jonoille kaksi vaihtoehtoista yleistystä topologisiin avaruuksiin.

Lukijan esitiedoiksi suositellaan topologian tuntemusta. Tutkielman edetessä tärkeimpiä käsitteitä käydään läpi, mutta mikäli nämä eivät ole ennestään tuttuja, vaaditaan lukijalta hieman enemmän paneutumista asian omaksumiseksi.

Ensimmäisessä luvussa kerrataan jonoihin liittyviä käsitteitä ja johdatellaan lukijaa topologian alkeisiin siirtymällä euklidisista avaruuksista topologisiin avaruuksiin. Luvussa on käyty läpi yksinkertaisia jonoihin liittyviä todistuksia metrisissä avaruuksissa, jotta lukija voisi myöhemmin vertailla näitä erityisesti verkkoihin liittyviin vastaaviin todistuksiin. Jonojen ja verkkojen samankaltaisuus korostuu huomatessa, että monet todistuksista eroavat ainoastaan avaruuden rakenteiden osalta – esimerkiksi metrisissä avaruuksissa käytetään yleensä palloympäristöjä, joita ei yleisiin topologisiin avaruuksiin voida edes määritellä. Luvun tärkein osuus käsittelee ongelmia, joita tulee vastaan, kun jonoja käytetään topologisissa avaruuksissa.

Tutkielman toisessa ja kolmannessa luvussa konstruoidaan jonoja topologisissa avaruuksissa yleistävät verkot ja filtterit. Luvuissa esiteltävä sisältö on pyritty esittämään yhteensopivasti molemmissa luvuissa, niin että verkkoja ja filttereitä voisi helpommin vertailla. Lisäksi viimeinen luku on omistettu verkkojen ja filtterien yhteyden tutkimiseen.

Tutkielman lähteinä on käytetty pääasiassa teoksia [**1**] ja [**3**]. Verkkoja koskeva osuus on koottu suurimmilta osin teoksesta [**3**], mutta myös lähteitä [**2**] ja [**4**] on hyödynnetty. Filttereitä koskevaa osuutta kirjoitettaessa teos [**1**] on ollut korvaamaton. Lähdekirjallisuutta ei ole seurattu orjallisesti: tutkielman sisältö on valikoitu siten, että halutut tulokset saadaan todistettua. Tutkielmassa käsitellyt todistukset on pääasiassa kirjoitettu lähteitä mukaillen, tosin paikoitellen todistuksia on täydennetty. Osaa todistuksista ei ole esitetty lähteissä lainkaan, jolloin ne on kirjoitettu itse.

LUKU 1

Jonot

Jonot ovat tärkeitä monella matematiikan osa-alueella, kuten analyysissä ja topologiassa. Epävirallisesti jonot voidaan määritellä järjestetyksi joukoksi, jossa sama alkio voi toistua moneen kertaan. Täsmällisemmin jono on kuvaus luonnollisten lukujen joukosta $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ johonkin joukkoon. Jono on siis funktio $x\colon \mathbb{N} \to X$, missä X voi siis olla mikä tahansa joukko. Yleisemmin käytetään tiiviimpää merkintätapaa (x_n), missä $x_n = x(n)$.

Jonoihin liittyy monia tärkeitä käsitteitä, joista merkittävin lienee *suppeneminen*. Jotta suppenemisesta olisi mielekästä puhua, täytyy jonon maalijoukoon liittää ylimääräistä rakennetta, jonka avulla voidaan ilmaista milloin kaksi pistettä ovat lähellä toisiaan. Tällöin puhutaan *avaruuksista*. Yleisimpiä esimerkkejä avaruuksista ovat euklidiset avaruudet, metriset avaruudet ja topologiset avaruudet.

Jonon suppeneminen jonon rajapisteeseen tarkoittaa, että jonon alkiot saadaan mielivaltaisen lähelle jonon rajapistettä. Toisin sanoen, jos suppeneva jono halutaan jostain alkiosta lähtien tietylle etäisyydelle jonon rajapisteestä, tämä voidaan saavuttaa kasvattamalla jonon indeksiä tarpeeksi suureksi. Vaaditaankin, että jonon indeksin kasvaessa suppenevan jonon alkiot ovat tietyllä tavalla yhä lähempänä rajapistettä. Pelkästään tämä ehto ei kuitenkaan ei riitä. Esimerkiksi jono (x_n), missä

$$x_n = \begin{cases} \frac{2n-2}{n}, & \text{jos } n \text{ on parillinen} \\ 3, & \text{jos } n \text{ on pariton} \end{cases},$$

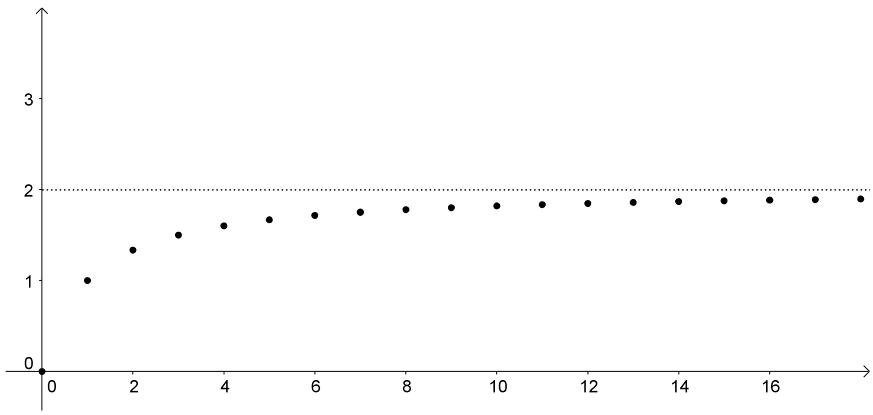
ei selvästikään suppene pisteeseen 2, vaikka osa jonon alkioista saadaankin mielivaltaisen lähelle kyseistä pistettä. Kuva 1.1b havainnollistaa tilannetta. Pisteellä 2 on kuitenkin erityinen merkitys kyseiselle jonolle, se on jonon eräs *kosketuspiste*[1].

Euklidisessa avaruudessa kahden pisteen $a, b \in \mathbb{R}^n$ välinen etäisyys määritellään pisteiden a ja b erotuksen normina[2] $\|a - b\|$. Näin suppeminen tarkoittaa seuraavaa: *jono* (x_n) *suppenee pisteeseen* a, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_n - a\| < \epsilon$ aina, kun $n \geq N$.

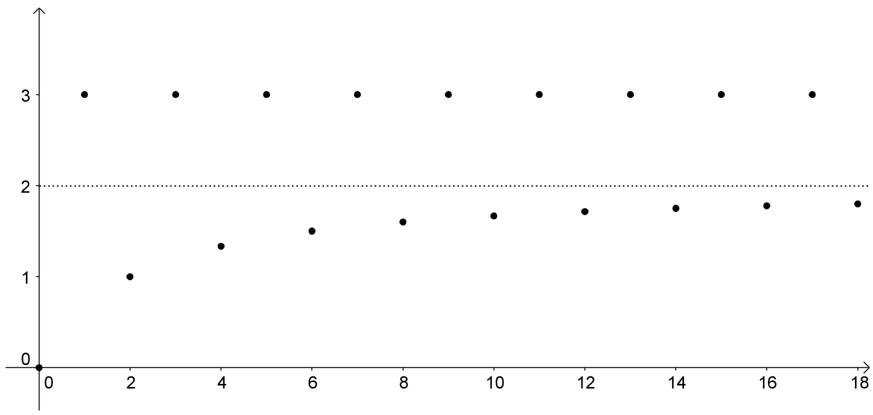
Metriset avaruudet ovat yleistyksiä euklidisista avaruuksista. Kuten yllä todettiin, euklidisessa avaruudessa etäisyyttä mitataan euklidisen normin avulla. Kuitenkaan yleisesti ottaen kaikkia normin ominaisuuksia ei tarvita, jotta päästään mielekkääseen teoriaan. Euklidisessa avaruudessa kahden pisteen välinen etäisyys on aina vähintään nolla (ja nolla vain, kun pisteet ovat samat), pisteiden a ja b välinen etäisyys on sama kuin pisteiden b ja a välinen etäisyys ja lisäksi kolmioepäyhtälö pätee. On luonnollista vaatia nämä samat ominaisuudet myös yleisempään avaruuteen. Näin

[1] Kosketuspiste määritellään verkkojen yhteydessä (määritelmä 2.16).

[2] $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, kun $x = (x_1, \dots, x_n)$



(A) Jono suppenee.



(B) Jono hajaantuu.

Kuva 1.1. Esimerkkejä jonoista.

saadaan metrinen avaruus: pari (X, d), missä X on joukko ja d joukossa X määritelty *metriikka* tai etäisyysfunktio, joka täyttää seuraavat ominaisuudet kaikille pisteille $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$,
(2) $d(y, x) = d(x, y)$ ja
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Metrisen avaruuden jonon suppeneminen voidaan ilmaista luonnollisesti käyttämällä kyseisen avaruuden metriikkaa: metrisen avaruuden *jono* (x_n) *suppenee pisteeseen* a, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, a) < \epsilon$ aina, kun $n \geq N$.

Edellä mainitut jonon suppenemisen määritelmät ovat hyvin samankaltaiset – ainoa poikkeava seikka niissä on kunkin avaruuden etäisyysfunktio. Helposti nähdään, että suppenemisen idea säilyy, kun siirrytään abstraktiotasolla ylöspäin.

Osa metristen avaruuksien teoriasta pohjautuu avoimiin joukkoihin. Topologisten avaruuksien lähtökohtana on luopua kokonaan metriikan olemassaolon vaatimisesta. Sen sijaan määritellään suoraan avaruuden avoimet joukot. *Pari* (X, τ) *on topologinen avaruus*, missä X on joukko ja τ on kokoelma joukon X osajoukkoja, kun

(1) $X \in \tau$ ja $\emptyset \in \tau$,
(2) kokoelman τ joukkojen äärelliset leikkaukset ovat kokoelmassa τ ja
(3) kokoelman τ joukkojen yhdisteet ovat kokoelmassa τ.

Joukkokokoelmaa τ kutsutaan *avaruuden X topologiaksi*. Edelliset ominaisuudet ovat valikoituneet sen vuoksi, että avoimet joukot täyttävät ne metrisissä avaruuksissa. Niiden avulla saadaan järkevästi määriteltyä avoimuuteen pohjautuvat käsitteet, joita ovat esimerkiksi jatkuvuus, yhtenäisyys ja kompaktius.

Osa metristen avaruuksien käsitteistä voidaan määritellä topologisissa avaruuksissa pitkälti samankaltaisesti. Eräs ongelma kuitenkin nousee esille: miten jonojen suppeneminen yleistyy topologisiin avaruuksiin, joissa etäisyysfunktion olemassaololle ei ole taetta (sillä avaruus voi olla metrisoitumaton)? Pulmaa voidaan lähestyä tutkimalla tarkemmin aiempia määritelmiä. Ehto "kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, a) < \epsilon$ aina, kun $n \geq N$" voidaan ilmaista myös "kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in B(a, \epsilon)$, kun $n \geq N$", missä $B(a, \epsilon)$ on pallo, jonka keskipiste on a ja säde ϵ. Topologisessa avaruudessa ei ole mieltä puhua palloista (sillä pallot liittyvät etäisyysfunktioon, jota ei välttämättä voida määritellä), joten ehtoa täytyy vielä muokata. Järkevään määritelmään päästään, kun pallot korvataan ympäristöillä[3]. Yleisessä topologisessa avaruudessa *jono (x_n) suppenee pisteeseen a*, jos kaikille pisteen a ympäristöille U on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in U$ aina, kun $n \geq N$.

Suppenemisen käsite on metrisissä avaruuksissa siinä mielessä intuitiivinen, että metristen avaruuksien jono voi supeta korkeintaan yhteen pisteeseen. Yleisessä topologisessa avaruudessa näin ei välttämättä ole: esimerkiksi avaruudessa varustettuna triviaalilla topologialla (jossa vain tyhjä joukko ja koko avaruus ovat avoimia) kaikki jonot suppenevat kaikkiin avaruuden pisteisiin! Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen vain Hausdorffin avaruuksissa. Avaruus on Hausdorffin avaruus, jos sen millä tahansa kahdella eri pisteellä on pistevieraat ympäristöt (katso kuva 1.2). Metriset avaruudet ovat aina Hausdorffin avaruuksia. Todistetaan malliksi tuloksen toinen puoli reaalilukujen tapauksessa.

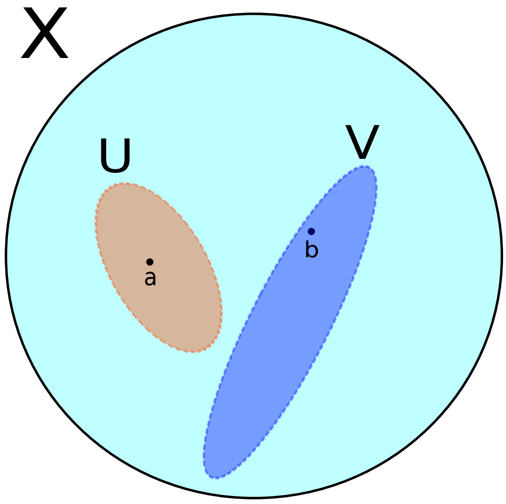
Lause 1.1. *Reaalilukujono suppenee korkeintaan yhteen pisteeseen.*

Todistus. Olkoon (x_n) reaalilukujono. Oletetaan, että lause ei pidä paikkaansa. Tällöin on olemassa $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a \neq b$, mutta (x_n) suppenee molempiin pisteisiin. Olkoon $0 < \epsilon < |b - a|$. Koska (x_n) suppenee pisteeseen a, on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ aina, kun $n \geq N_1$. Vastaavasti, koska (x_n) suppenee pisteeseen b, on olemassa $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ aina, kun $n \geq N_2$. Olkoon nyt $N_3 \in \mathbb{N}$ siten, että $N_3 > N_1$ ja $N_3 > N_2$. Tällöin, kun $n > N_3$, on $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ ja $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Kolmioepäyhtälön nojalla on siis

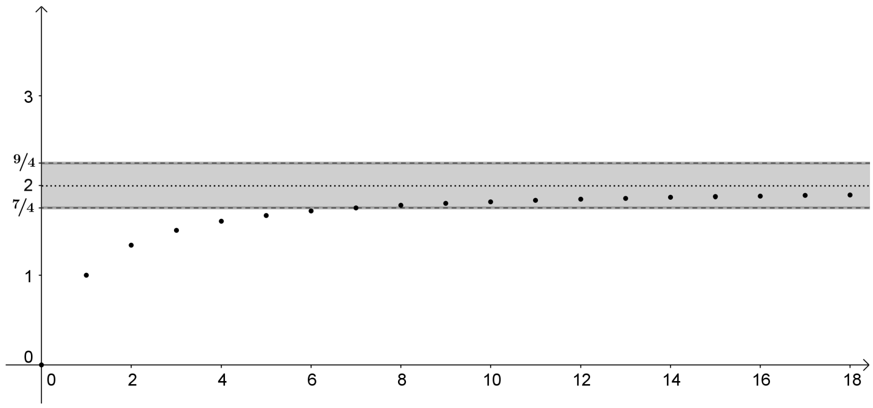
$$|b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa luvun ϵ valinnan kanssa. □

[3]Tässä tutkielmassa pisteen ympäristöksi määritellään joukko, joka sisältää jonkin kyseisen pisteen sisältävän avoimen joukon. Huomaa, että kirjallisuudessa käytetään toisinaan myös niin sanottuja avoimia ympäristöjä, jolloin pisteen ympäristö on mikä tahansa kyseisen pisteen sisältävä avoin joukko.



Kuva 1.2. Hausdorffin avaruudessa X pisteillä a ja b on pistevieraat ympäristöt U ja V.



Kuva 1.3. Jono on lopulta joukossa $(\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$.

Topologisen avaruuden jonon suppenemisen määritelmässä on melko paljon merkintöjä, ja suppenemisen perusajatus voi jäädä piiloon. Ajatus voidaan tuoda selkeämmin esille ottamalla käyttöön uusi apukäsite.

Määritelmä 1.2. Jono (x_n) *on lopulta joukossa* A, jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $n \in \mathbb{N}$, joille $n \geq N$, pätee $x_n \in A$.

Edellinen määritelmä tarkoittaa käytännössä sitä, että jostain indeksistä lähtien koko jonon "häntä" on annetussa joukossa. Esimerkiksi kuvan 1.3 jono on lopulta joukossa $(\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$, sillä indeksistä 8 lähtien kaikki jonon alkiot kuuluvat kyseiseen joukkoon. Kun yhdistetään tämä aiemmin saatuun määritelmään, päästään seuraavaan:

Lause 1.3. *Avaruuden X jono (x_n) suppenee pisteeseen $a \in X$, jos se on lopulta kaikissa pisteen a ympäristöissä.*

Todistus. Helposti johdettavissa suppenemisen määritelmästä ja määritelmästä 1.2. $\square$

1.1. Jonot metrisissä avaruuksissa

Jonot ovat hyödyllisiä työkaluja metrisissä avaruuksissa, sillä suppenevilla jonoilla on yhteyksiä moniin muihin avaruuteen liittyviin ominaisuuksiin. Seuraavassa lauseessa on nostettu näistä esille muutamia.

LAUSE 1.4. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia.*

(1) *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva pisteessä a, jos ja vain jos jonon (x_n) supetessa pisteeseen a, jono $(f(x_n))$ suppenee pisteeseen $f(a)$.*
(2) *Osajoukko $A \subset X$ on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikkien suppenevien jonojensa rajapisteet.*
(3) *Metrinen avaruus X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella avaruuden X jonolla on osajono, joka suppenee johonkin avaruuden X pisteeseen.*

TODISTUS. Todistetaan lauseen ensimmäinen kohta.
Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, (x_n) jono avaruudessa X ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.
Oletetaan ensin, että f on jatkuva pisteessä $a \in X$ ja että (x_n) suppenee pisteeseen $a \in X$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä a, on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikille x, joille $d_X(x, a) < \delta$, on $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Koska (x_n) suppenee pisteeseen a, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että jos $n \geq N$, pätee $d_X(x_n, a) < \delta$. Näin ollen $d_Y(f(x_n), f(a)) < \epsilon$, kun $n \geq N$. Siispä jono $(f(x_n))$ suppenee pisteeseen $f(a)$.
Oletetaan seuraavaksi, että jonon (x_n) supetessa pisteeseen $a \in X$, jono $(f(x_n))$ suppenee pisteeseen $f(a)$. Nyt, jos f ei ole jatkuva pisteessä a, on olemassa $\epsilon > 0$, jolle ei ole olemassa lukua $\delta > 0$ siten, että kaikille $x \in X$, joille $d_X(x, a) < \delta$, on $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Erityisesti luku $\delta = 1$ ei käy, joten on olemassa piste x_1, jolle $d_X(x_1, a) < 1$, mutta $d_Y(f(x_1), f(a)) \geq \epsilon$. Samoin luku $\delta = \frac{1}{2}$ ei käy, joten on olemassa piste x_2, jolle $d_X(x_2, a) < \frac{1}{2}$, mutta $d_Y(f(x_1), f(a)) \geq \epsilon$. Jatkamalla näin saadaan jono $(x_1, x_2, \dots)$, jolle $d_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$, mutta $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä jono (x_n) suppenee pisteeseen a, mutta jono $(f(x_n))$ ei suppene pisteeseen $f(a)$. □

Miksi edellistä lausetta ei ole muotoiltu vielä yleisempään muotoon, niin että X ja Y voisivat olla mitä tahansa topologisia avaruuksia? Tähän on yksinkertainen syy: mikään lauseen kohdista ei päde mielivaltaisessa topologisessa avaruudessa. Tämä voi olla yllättävää. Jonojen määritelmä ei ole muuttunut siirryttäessä abstraktimpaan avaruuteen, ja myös topologisen avaruuden jonon suppeneminen on sama kuin metrisissä avaruuksissa. Nostetaan esiin muutama esimerkki avaruuksista, joissa lause 1.4 ei toteudu.

ESIMERKKI 1.5.

(1) Olkoon $X = \mathbb{R}$ varustettuna topologialla $\tau_X = \{A \subset X \mid X \setminus A$ on numeroituva tai $A = \emptyset\}$, $Y = \mathbb{R}$ varustettuna diskreetillä topologialla (jolloin kaikki avaruuden Y osajoukot ovat avoimia) ja (x_n) jono avaruudessa X. Olkoon lisäksi $f\colon X \to Y$ identtinen kuvaus. Näytetään, että nyt ehdosta $x_n \to a$ seuraa $f(x_n) \to f(a)$, mutta f ei ole jatkuva missään avaruuden pisteessä.

Osoitetaan ensin, että $f(x_n) \to f(a)$ aina, kun $x_n \to a$. Oletetaan, että $a \in X$ ja $x_n \to a$. Osoitetaan, että (x_n) on jostain indeksistä lähtien vakiojono. Olkoon $V = \{x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ja } x_n \neq a\}$. Koska $X \setminus (X \setminus V) = V$ on numeroituva, on $X \setminus V$ avoin joukko, joka lisäksi sisältää pisteen a. Koska $x_n \to a$, jono on lopulta joukossa $X \setminus V$. Kuitenkin, jonon ainoa alkio, joka on joukossa $X \setminus V$ on jonon rajapiste a, ja näin ollen jonon täytyy olla lopulta vakio[4]. Selvästi siis myös $f(x_n) \to f(a)$.

Kuitenkaan f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in X$, sillä muutoin $\{x\}$ olisi joukon X avoin osajoukko (mikä ei ole mahdollista, sillä $X \setminus \{x\}$ ei ole numeroituva).

(2) Olkoon taas $X = \mathbb{R}$ ja $\tau_X = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ on numeroituva tai } A = \emptyset\}$. Näytetään, että lauseen 1.4 kohta (2) ei päde.

Olkoon $U = X \setminus \{0\}$. Joukko U ei ole suljettu, sillä $X \setminus U = \{0\}$ ei ole avoin. Jos lause 1.4 pätisi, pitäisi olla olemassa joukon U jono (x_n), joka suppenee pisteeseen 0. Näytetään, että tämä ei pidä paikkaansa.

Olkoon $V = X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Joukko V on avoin ja sisältää alkion 0 mutta ei yhtään jonon (x_n) alkiota. Näin ollen (x_n) ei voi olla lopulta joukossa V, ja siispä (x_n) ei voi supeta pisteeseen 0. Siten U ei ole suljettu, mutta jokainen joukon U suppeneva osajono suppenee johonkin joukon U pisteeseen.

(3) $[0,1]^{[0,1]}$ varustettuna tulotopologialla[5] on kompakti, muttei jonokompakti[6]. Todistus sivuutetaan: todistukseen voi perehtyä teoksen [**5**] sivulla 127.

Edellisessä esimerkissä näytettiin, että joissain avaruuksissa lauseen 1.4 topologinen vastine ei päde. On kuitenkin olemassa myös topologisia avaruuksia, joissa se pitää paikkansa. Esimerkiksi *N1-avaruuksissa* (engl. first-countable spaces) kyseiset ominaisuudet pätevät. N1-avaruus on avaruus, jossa jokaisella pisteellä on olemassa numeroituva ympäristökanta[7]. Voidaan näyttää, että kaikki metriset avaruudet ovat N1-avaruuksia. Toisaalta esimerkin 1.5 nojalla on olemassa topologisia avaruuksia, jotka eivät ole N1-avaruuksia.

Olisi mukavaa, jos jonojen hyvät ominaisuudet säilyisivät myös yleisiin avaruuksiin siirryttäessä. Kuitenkin esimerkki 1.5 osoittaa, että jonojen käyttämisessä yleisessä topologisessa avaruudessa on ongelmia. On siis todettava, että jonot eivät ole riittävä käsite topologisessa avaruudessa, vaan tarvitaan jotain enemmän – jotain, mikä toimisi kaikilla topologisilla avaruuksilla. Tätä varten seuraavassa luvussa esitellään verkot.

[4] Huomaa: jono on lopulta vakio, jos se on lopulta jossakin yhden alkion kokoisessa joukossa.

[5] Tulotopologialla tarkoitetaan avaruuksien karteesisen tulon standarditopologiaa.

[6] Avaruuden $[0,1]^{[0,1]}$ alkiot ovat funktioita $[0,1] \to [0,1]$.

[7] Avaruuden X pisteellä x on numeroituva ympäristökanta, jos on olemassa jono ympäristöjä $N_1, N_2, \ldots$ siten, että mille tahansa pisteen x ympäristölle N on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolle $N_i \subset N$.

LUKU 2

Jonoista verkkoihin

Edellisessä luvussa annettujen esimerkkien avulla huomattiin, että jonot eivät ole riittävä käsite yleisesti topologisissa avaruuksissa: jonojen avulla ei voida määritellä yksikäsitteisesti avoimia ja suljettuja joukkoja, jatkuvuutta tai kompaktiutta ilman, että avaruudelle asetetaan ylimääräisiä vaatimuksia.

Tässä luvussa esitellään verkot, jotka voidaan mieltää topologisiin avaruuksiin yleistetyiksi jonoiksi. Jonot voidaan yleistää verkkojen lisäksi myös filtterien avulla, jotka esitellään luvussa 3. Verkkojen ja filtterien yhteyttä tutkitaan luvussa 4.

2.1. Verkot

Edellisen luvun esimerkissä 1.5 esiteltiin avaruuksia, joissa jonot eivät kuvaa avaruuden topologiaa. Tämä ei ole toivottu tilanne, joten pyritään nyt määrittelemään uusi käsite, jonka tarkoituksena on yleistää jonot. Toiveena on, että kyseinen käsite käyttäytyisi niin kuin jonot, jotta suppenemisen määritelmään (ks. luku 1) ei tarvitsisi tehdä muutoksia. Jono on funktio luonnollisten lukujen joukosta johonkin avaruuteen. Jos halutaan saada aikaiseksi uusi jononkaltainen käsite, on luonnollista, että sekin olisi funktio. Funktion maalijoukko on kiinnitetty topologiseksi avaruudeksi, joten näillä tavoitteilla uuden käsitteen määrittelemisessä se, mihin voidaan puuttua, on määrittelyjoukko.

Luonnollinen tapa yleistää jonot topologisiin avaruuksiin on siis muokata jonojen määrittelyjoukkoa. Mitä luonnollisten lukujen ominaisuuksia jonojen tapauksessa itse asiassa tarvitaan? Kun tutkitaan jonojen ja niiden suppenemisen määritelmiä, voidaan havaita, että luonnolliset luvut itsessään eivät ole oleellisia. Määritelmissä käytetään lähinnä luonnollisten lukujen järjestysrelaatiota $\geq$. Sallitaan nyt siis määrittelyjoukon olla mikä tahansa joukko, jossa on määritelty uusi relaatio $\geq$ sopivilla ominaisuuksilla. Jo merkinnän vuoksi relaation vaaditaan olevan refleksiivinen. Transitiivisuusehto vaaditaan myös, sillä halutaan, että relaation suuntaisi joukon jollakin tavalla, jotta se käyttäytyisi kuten luonnolliset luvut jonojen tapauksessa.

Refleksiivisyyden ja transitiivisuuden lisäksi tarvitaan vielä eräs tärkeä ominaisuus. Lauseessa 1.1 osoitettiin, että reaalilukujono voi supeta korkeintaan yhteen pisteeseen. Lauseen todistuksessa on eräs huomionarvoinen virke: "Olkoon nyt $N_3 \in \mathbb{N}$ siten, että $N_3 > N_1$ ja $N_3 > N_2$". Myöhemmin, kun käsitellään verkkoja Hausdorffin avaruuksissa, kyseistä ominaisuutta tarvitaan, mutta refleksisyys ja transitiivisuus eivät takaa tällaisen alkion N_3 olemassaoloa. Lisätään tämäkin siis relaation $\geq$ vaadittuihin ominaisuuksiin.

Määritelmä 2.1. Sanotaan, että *relaatio $\geq$ suuntaa joukon D*, jos $D \neq \emptyset$ ja seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) jos $a \in D$, niin $a \geq a$, (*refleksiivisyys*)
(2) jos $a, b, c \in D$, $a \geq b$ ja $b \geq c$, niin $a \geq c$ ja (*transitiivisuus*)
(3) jos $a, b \in D$, niin on olemassa $c \in D$ siten, että $c \geq a$ ja $c \geq b$.

Kutsutaan paria $(D, \geq)$, missä relaatio $\geq$ suuntaa joukon D, *suunnatuksi joukoksi.* Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan relaatio jättää pois merkinnöistä ja sanoa, että joukko D on suunnattu joukko, jos on olemassa jokin relaatio, joka suuntaa sen.

Esimerkki 2.2.
(1) Olkoon $D = \mathbb{N}$ ja $\geq$ joukon $\mathbb{N}$ tavallinen järjestysrelaatio. Tällöin $(D, \geq)$ on suunnattu joukko.
(2) Olkoon (X, τ) topologinen avaruus, $a \in X$ ja D pisteen a kaikkien ympäristöjen kokoelma. Asetetaan relaatio $\geq$ joukkoon D siten, että joukoille $D_1, D_2 \in D$ pätee $D_1 \geq D_2$, jos $D_1 \subset D_2$ [1]. Tällöin pari $(D, \geq)$ on suunnattu joukko: Edellisen määritelmän ehdot (1) ja (2) toteutuvat selvästi. Ehdon (3) todentamiseksi riittää huomata, että mikäli joukot $D_1, D_2 \in D$ eli ne ovat pisteen a ympäristöjä, niin myös niiden leikkaus $D_1 \cap D_2$ on pisteen a ympäristö. Lisäksi $D_1 \cap D_2 \subset D_1$ ja $D_1 \cap D_2 \subset D_2$. Voidaan siis asettaa $C = D_1 \cap D_2$, jolloin $C \geq D_1$ ja $C \geq D_2$.

Muistetaan, että jono on kuvaus $x : \mathbb{N} \to X$ luonnollisten lukujen joukosta avaruuteen X. Edellä kehitettiin jonojen määrittelyjoukon $\mathbb{N}$ korvaajaksi käsite suunnattu joukko. Kun jonojen määritelmässä korvataan luonnolliset luvut suunnatulla joukolla, saadaan uusi käsite. Kutsutaan syntynyttä käsitettä verkoksi. Miksi näin outo nimi? Annettu nimi on perusteltavissa ainakin suppenemisen kautta (suppenemisen käsite määritellään seuraavassa luvussa): verkko vangitsee rajapisteensä.

Määritelmä 2.3. Olkoon X topologinen avaruus ja $(D, \geq)$ suunnattu joukko. *Verkko* avaruudessa X on funktio $x\colon D \to X$. Verkkoa merkitään usein $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, missä $x_\alpha = x(\alpha)$.

Esimerkin 2.2(1) avulla on helppo huomata, että jonot toteuttavat verkon määritelmän.

2.2. Suppeneminen

Metrisissä avaruuksissa tärkein jonoihin liittyvä yksittäinen käsite on suppeneminen. Jonojen tapauksessa suppeneminen tarkoittaa intuitiivisesti, että suppeneva jono saadaan mielivaltaisen lähelle kyseisen jonon rajapistettä, kun jonon indeksi on tarpeeksi suuri.

Suppenemisessa on siis kyse kahdesta käsitteestä. Kun suppeneminen yleistetään verkoille, pitäisi ilmeisesti olla jokin tapa, jolla voidaan ilmaista, että verkko on lähellä pistettä, jota kohti se suppenee. Toisaalta tämä pitäisi saada tapahtumaan, kun verkon indeksi on tarpeeksi suuri.

Ennen kuin määritellään verkkojen suppeneminen, määritellään hyödyllinen apukäsite: avaruuden X *verkko* $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ *on lopulta joukossa* $A \subset X$, jos on olemassa

[1] Huomaa, että näin määriteltynä relaatio $\geq$ ei järjestä joukkoja intuition mukaisesti. Yleensä, jos joukoille A ja B pätee $A \subset B$, niin B on vähintään yhtä suuri kuin A.

$\beta \in D$ siten, että kaikille $\alpha \in D$, joille $\alpha \geq \beta$, pätee $x_\alpha \in A$. Huomaa, että sama esitettiin ensimmäisessä luvussa jonoille määritelmässä 1.2.

Nyt verkkojen suppeneminen voidaan määritellä luonnollisella tavalla.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon X topologinen avaruus, $(D, \geq)$ suunnattu joukko ja $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ verkko. *Verkko* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *suppenee pisteeseen* $a \in X$, jos $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on lopulta jokaisessa pisteen a ympäristössä. Usein merkitään $x_\alpha \to a$, ja pistettä a kutsutaan *verkon rajapisteeksi.*

HUOMAUTUS 2.5. Edellinen määritelmä sanoo, että verkko suppenee pisteeseen $a \in X$, jos se on lopulta kaikissa pisteen a ympäristöissä. Jos siis halutaan osoittaa, että verkko suppenee pisteeseen a, riittää valita mielivaltainen pisteen a ympäristö, ja osoittaa, että verkko on lopulta kyseisessä ympäristössä.

Suppenemisen käsite on siis verkoilla intuitiivisesti sama kuin jonoilla. Kun käsitellään verkkoja topologisessa avaruudessa, suppenemisessa on kuitenkin yksi merkittävä ero metristen avaruuksien jonoihin verrattuna. Verkolla saattaa nimittäin olla monta rajapistettä.

ESIMERKKI 2.6. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus.

(1) Olkoon τ triviaali topologia. Topologia on triviaali, jos avaruuden ainoat avoimet joukot ovat $\emptyset$ ja koko avaruus. Koko avaruus on aina jokaisen pisteensä ympäristö, ja tässä tapauksessa jokaisen pisteen ainut ympäristö. Näin ollen kaikki avaruuden verkot ovat lopulta kaikkien pisteiden kaikissa (ainoassa) ympäristössä. Määritelmän mukaisesti kaikki avaruuden verkot suppenevat kaikkiin avaruuden X pisteisiin.

(2) Olkoon τ diskreetti topologia. Topologia on diskreetti, jos kaikki avaruuden osajoukot ovat avoimia. Erityisesti, jos $a \in X$, niin $\{a\}$ on pisteen a ympäristö. Määritelmän mukaisesti $\{a\}$ on pisteen a minkä tahansa ympäristön osajoukko. Näin ollen avaruuden X verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ suppenee pisteeseen a, jos ja vain jos $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on lopulta joukossa $\{a\}$.

Ensimmäisessä luvussa todettiin, että Hausdorffin avaruuksissa jonolla voi olla korkeintaan yksi rajapiste. Kerrataan vielä Hausdorffin avaruuden määritelmä: Hausdorffin avaruus on avaruus, jonka millä tahansa kahdella eri pisteellä on olemassa pistevieraat ympäristöt. Hausdorffin avaruudessa ympäristöjä voidaan siis käyttää avaruuden pisteiden erottamiseksi toisistaan. Kaikki metriset avaruudet ovat Hausdorffin avaruuksia, kun taas esimerkiksi ääretön joukko X varustettuna topologialla

$$\tau = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ tai } X \setminus A \text{ on äärellinen}\}$$

ei ole Hausdorffin avaruus.

Verkkojen käyttäytyminen muistuttaa jonojen käyttäytymistä. Seuraava lause nimittäin osoittaa, että Hausdorffin avaruuksissa myös verkoilla on korkeintaan yksi rajapiste.

LAUSE 2.7. *Avaruus X on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos avaruuden X verkoilla on korkeintaan yksi rajapiste.*

TODISTUS. Olkoon X avaruus ja $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ verkko kyseisessä avaruudessa.

Oletetaan ensin, että X on Hausdorffin avaruus ja että $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ suppenee pisteisiin a ja b. Osoitetaan, että $a = b$. Jos näin ei ole, koska X on Hausdorffin avaruus, on olemassa pisteiden a ja b ympäristöt U ja V, joille $a \in U$, $b \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Koska $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ suppenee pisteisiin a ja b, on olemassa β_1, β_2 siten, että kaikille $\alpha \geq \beta_1$ pätee $x_\alpha \in U$ ja kaikille $\alpha \geq \beta_2$ pätee $x_\alpha \in V$. Koska D on suunnattu joukko, on olemassa α_0 siten, että $\alpha_0 \geq \beta_1$ ja $\alpha_0 \geq \beta_2$. Tällöin kuitenkin $x_{\alpha_0} \in U \cap V$, mikä on ristiriita. Näin ollen $a = b$.

Oletetaan seuraavaksi, että X ei ole Hausdorffin avaruus. Siispä on olemassa pisteet $a, b \in X$ siten, että kaikki pisteen a ympäristöt leikkaavat kaikkia pisteen b ympäristöjä. Olkoon $\mathcal{A}$ pisteen a kaikkien ympäristöjen kokoelma ja vastaavasti $\mathcal{B}$ pisteen b kaikkien ympäristöjen kokoelma. Tällöin esimerkin 2.2(2) nojalla joukot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat suunnattuja relaatiolla $\subset$. Suunnataan tulojoukko $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ määräämällä relaatio $\geq$ joukoille $(U_1, V_1) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ja $(U_2, V_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ seuraavasti: $(U_1, V_1) \geq (U_2, V_2)$, jos $U_1 \subset U_2$ ja $V_1 \subset V_2$. Tällöin tulojoukko on tosiaan suunnattu, sillä relaatio $\geq$ toteuttaa selvästi määritelmän 2.1 kohdat (1), (2) ja (3).

Oletuksen nojalla kaikille $(U, V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ pätee $U \cap V \neq \emptyset$. Valinta-aksiooman[2] nojalla voidaan valita piste $x_{(U,V)} \in U \cap V$ ja määritellä verkko $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$. Olkoon nyt U_β pisteen a ympäristö ja V_β pisteen b ympäristö, jolloin $(U_\beta, V_\beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Tällöin, kun $(U_\alpha, V_\alpha) \geq (U_\beta, V_\beta)$, on $x_{(U_\alpha, V_\alpha)} \in U_\alpha \cap V_\alpha \subset U_\beta \cap V_\beta$. Erityisesti verkko $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ on lopulta sekä joukossa U_β että joukossa V_β. Koska joukot U_β, V_β valittiin mielivaltaisesti, tarkoittaa tämä, että verkko $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ suppenee sekä pisteeseen a että pisteeseen b. □

Huomautus 2.8. Vertaamalla todistuksen ensimmäistä puolta lauseen 1.1 todistukseen voidaan havaita, että jonot ja verkot ovat käsitteellisesti hyvin lähellä toisiaan. Ero todistuksissa syntyy lähinnä siitä, että lauseen 1.1 todistuksessa voidaan käyttää ympäristöinä avoimia välejä, kun taas edellisessä lauseessa on pitäydyttävä yleisimmissä ympäristöissä. Jos edellisen lauseen rajoittaisi reaalilukujen joukkoon, voisi todistuksessa korvata sanan verkot jonoilla ja todistus olisi edelleen pätevä.

2.3. Riemannin integraali

Hyvä käytännön esimerkki verkkojen sovelluskohteista on Riemannin integraali. Tavallisesti Riemannin integraali esitetään jonkinlaisena raja-arvona, kun integroitavan välin jakopisteiden määrä kasvaa rajatta. Mutta minkälaisesta raja-arvosta itseasiassa onkaan kyse? Käsitettä voidaan avata verkkojen avulla: rajoitetun funktion Riemann-integroituvuus voidaan ilmaista tietyn verkon raja-arvona.

Huomautus 2.9. Tässä Riemannin integraali esitetään Riemannin summien avulla. Toisinaan Riemannin integraali kuitenkin muodostetaan ylä- ja alaintegraalien avulla. Molemmilla tavoilla päästään kuitenkin yhtenevään integraalin käsitteeseen.

Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Muodostetaan ensin välin $[a, b]$ jako. Jaolla tarkoitetaan joukkoa $\{[x_{k-1}, x_k] \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Jako on siis äärellinen kokoelma päätepisteitä lukuunottamatta pistevieraita suljettuja välejä, joiden yhdisteenä saadaan koko integroitava väli.

Olkoon $\mathcal{P}$ välin $[a, b]$ kaikkien jakojen kokoelma. Sanotaan, että jako $P_1 \in \mathcal{P}$ on hienompi kuin jako $P_2 \in \mathcal{P}$, jos kaikki välit $I \in P_2$ voidaan ilmaista muodossa $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, missä $I_j \in P_1$. Toisin sanoen, jako P_1 on hienompi kuin jako P_2, jos

[2]Valinta-aksiooma: jokaisella joukkokokoelmalla epätyhjiä joukkoja on olemassa valintafunktio.

kaikki jaon P_2 suljetut välit voidaan ilmaista äärellisinä yhdisteinä jaon P_1 väleistä. Lisäksi, jos $P \in \mathcal{P}$, muodostetaan jaon P jakopisteistä vektori $P^\star$, jossa jakopisteet ovat kasvavassa järjestyksessä.

Jaon hienous muodostaa itseasiassa suunnan joukkoon $\mathcal{P}$: Olkoon $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Asetetaan $P_1 \geq P_2$, jos P_1 on hienompi jako kuin P_2. Tällöin pätee:

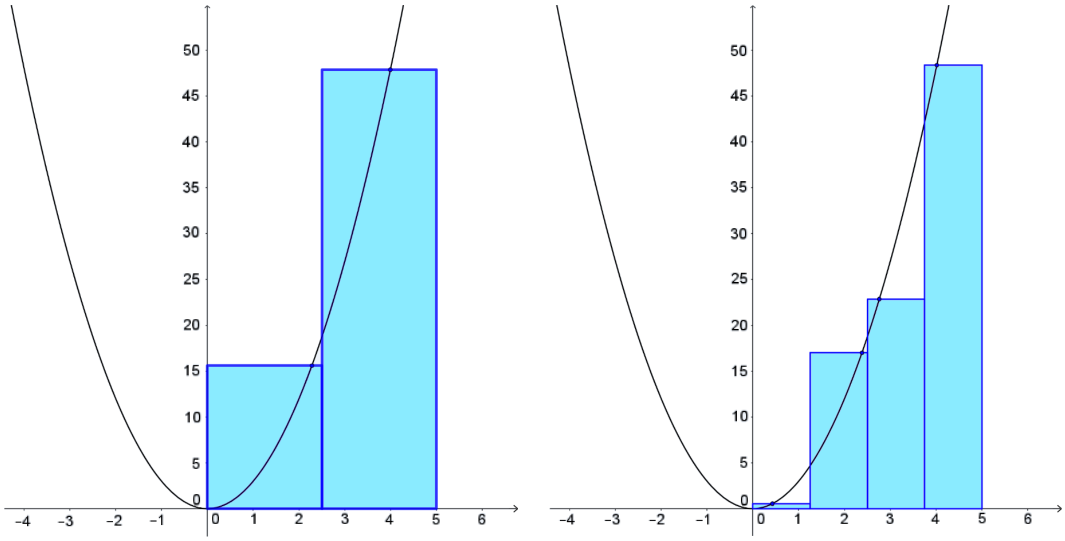
(1) Olkoon $P_1 \in \mathcal{P}$. Tällöin P_1 voidaan luonnollisesti ilmaista yhdisteenä joukon P_1 suljetuista väleistä, sillä P_1 on tietysti yhdiste omista alkioistaan.
(2) Olkoon $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$ siten, että $P_1 \geq P_2$ ja $P_2 \geq P_3$. Tällöin siis kaikki jaon P_2 väleistä voidaan ilmaista äärellisinä yhdisteinä jaon P_1 väleistä. Samoin kaikki jaon P_3 välit voidaan ilmaista äärellisinä yhdisteinä jaon P_2 väleistä. Tällöin, koska äärellinen yhdiste äärellisiä yhdisteitä on edelleen äärellinen yhdiste, voidaan kaikki jaon P_3 välit ilmaista äärellisinä yhdisteinä jaon P_1 väleistä. Näin ollen $P_1 \geq P_3$.
(3) Olkoon $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Muodostetaan uusi jako jakojen P_1 ja P_2 jakopisteistä. Olkoon siis $P_3^\star = P_1^\star \cup P_2^\star$. Merkitään jakopistevektoria $P_3^\star$ vastaavaa jakoa P_3. Jos nyt $I_1 \in P_1$, voidaan I_1 esittää äärellisenä yhdisteenä kokoelman P_3 välejä, sillä jakopistejoukossa $P_3^\star$ on mukana välin I_1 päätepisteet ja mahdollisesti pisteitä, jotka ovat näiden välissä. Tällöin I_1 voidaan muodostaa näistä pisteistä muodostuneiden suljettujen välien yhdisteenä. Siispä $P_3 \geq P_1$. Samankaltaisella päättelyllä saadaan $P_3 \geq P_2$.

Näin ollen relaatio $\geq$ täyttää määritelmän 2.1 kohdat (1)–(3), joten $\mathcal{P}$ on suunnattu joukko.

Lisätään jaon P jokaiseen suljettuun väliin merkki, jolla tarkoitetaan mielivaltaista pistettä kyseiseltä väliltä. Näin saadaan merkitty jako $M = \{([x_{k-1}, x_k], t_k) \mid k \in \ \{1, \ldots, n\}\}$, missä $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ja $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Olkoon $\mathcal{M}$ kaikkien välin $[a, b]$ merkittyjen jakojen joukko. Tällöin $\mathcal{M}$ voidaan suunnata vastaavalla tavalla kuin tavallinen jako: määritellään relaatio $\geq$ joukkoon $\mathcal{M}$ siten, että $M_1 \geq M_2$, jos merkittyä jakoa M_1 vastaava tavallinen jako on hienompi kuin merkittyä jakoa M_2 vastaava tavallinen jako. Edellä tavallisella jaolla tarkoitetaan merkittyä jakoa, josta merkit on jätetty pois.

Esimerkki 2.10. $P_1 = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ ja $P_2 = \{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ ovat välin $[0, 1]$ jakoja. Jaoista voidaan muodostaa esimerkiksi merkityt jaot $M_1 = \{([0, \frac{1}{2}], \frac{1}{3}), ([\frac{1}{2}, 1], \frac{2}{3})\}$ ja $M_2 = \{([0, \frac{1}{4}], \frac{1}{4}), ([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \frac{1}{3}]), ([\frac{1}{2}, 1], \frac{3}{4})\}$. Näille merkityille jaoille pätee $M_2 \geq M_1$, sillä $[0, \frac{1}{2}] = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ja $[\frac{1}{2}, 1]$ on molemmille jaoille yhteinen.

Muodostetaan välin $[a, b]$ merkitty jako M. Tällöin *Riemannin summat* ovat muotoa $S_f(M) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. Riemannin summalla approksimoidaan vaaka-akselin ja funktion kuvaajan väliin jäävää pinta-alaa erikorkuisilla suorakulmioilla (kuvassa 2.1 on piirretty erään funktion Riemannin summia). Koska kaikkien välin $[a, b]$ jakojen joukko $\mathcal{M}$ on suunnattu joukko, muodostavat Riemannin summat verkon $(S_f(M))_{M \in \mathcal{M}}$. Kyseinen verkko on siis indeksoitu välin $[a, b]$ merkityillä jaoilla. Nyt voidaan määritellä Riemannin integraali $\int_a^b f(x)dx$: Jos verkko $(S_f(M))_{M \in \mathcal{M}}$ suppenee pisteeseen $J \in \mathbb{R}$, kutsutaan tätä arvoa Riemannin integraaliksi $\int_a^b f(x)dx$. Toisin sanoen $\int_a^b f(x)dx = J$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa merkitty jako M_ϵ siten, että $\left|S_f(M) - J\right| < \epsilon$ kaikille M, joille $M \geq M_\epsilon$.



(A) Jako kahdella osavälillä. (B) Hienompi jako neljällä osavälillä.

KUVA 2.1. Riemannin summia (graafisesti) funktiolle $f(x) = 3x^2$.

2.4. Avoimien joukkojen ja jatkuvuuden karakterisointi verkoilla

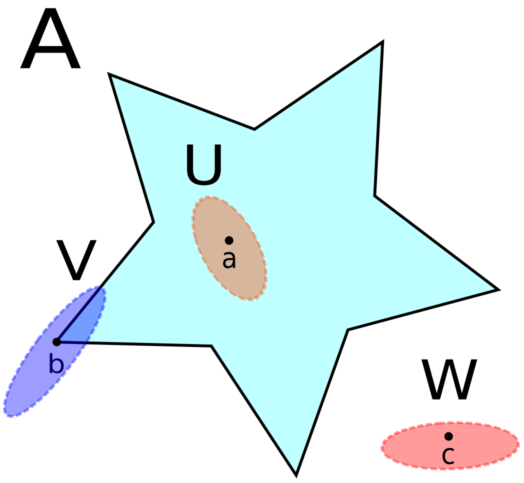
Motivaatio verkkojen kehittämiseen syntyi siitä, että jonoilla ei päästy topologisissa avaruuksissa samoihin tuloksiin kuin metrisissä avaruuksissa. Verkkojen suppeneminen liittyy kuitenkin olennaisesti tärkeisiin topologisiin käsitteisiin: avaruuden topologiaan, funktioiden jatkuvuuteen ja kompaktiuteen. Näytetään seuraavaksi, että avaruuden topologia (eli sen avoimet joukot) ja funktioiden jatkuvuus voidaan karakterisoida täysin suppenevien verkkojen avulla. Myöhemmin näytetään, että myös kompaktius on täysin määriteltävissä verkkojen avulla. Nämä tulokset vahvistavat, että verkot tosiaan ovat jonojen järkevä yleistys topologisessa avaruudessa, sillä jonot toteuttavat edellä mainitut ominaisuudet metrisissä avaruuksissa mutta eivät yleisissä topologisissa avaruuksissa.

Osoitetaan ensin, että avaruuden suljetut joukot ovat karakterisoitavissa verkkojen avulla. Tämän näyttämiseksi todistetaan ensin hyödyllinen lemma. Lemmassa tarvitaan kosketuspisteen käsitettä, joten nostetaan ensin tämä esille: piste a on joukon A kosketuspiste, jos pisteen a jokainen ympäristö leikkaa joukkoa A. Jotta piste siis olisi joukon kosketuspiste, täytyy sen jokaisessa ympäristössä olla jokin kyseisen joukon piste. Kuvassa 2.2 on havainnollistettu kosketuspisteen käsitettä.

LEMMA 2.11. *Olkoon X avaruus, $A \subset X$ ja $a \in X$. Tällöin a on joukon A kosketuspiste, jos ja vain jos on olemassa joukon A verkko, joka suppenee pisteeseen a.*

TODISTUS. Olkoon X avaruus, $A \subset X$ ja $a \in X$.

Oletetaan ensin, että piste a on joukon A kosketuspiste. Tällöin pisteen a jokaisessa ympäristössä U on piste $x_U \in U \cap A$. Esimerkin 2.2 kohdan (2) nojalla pisteen a kaikkien ympäristöjen kokoelma $\mathcal{U}$ on suunnattu relaatiolla $\subset$. Tällöin verkko $(x_U)_{U \in \mathcal{U}}$ suppenee pisteeseen a, sillä jos U_a ja V_a ovat pisteen a ympäristöjä ja $V_a \subset U_a$, pätee $x_{V_a} \in V_a \subset U_a$.



KUVA 2.2. Pisteet a ja b ovat joukon A kosketuspisteitä, kun taas piste c ei ole.

Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa joukon A verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, joka suppenee pisteeseen a. Olkoon $U \subset X$ pisteen a ympäristö. Koska verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ suppenee pisteeseen a, on verkko lopulta joukossa U. Siispä $U \cap A \neq \emptyset$ ja a on joukon A kosketuspiste. □

Varsinainen tulos saadaan edellisen lemman seurauksena.

LAUSE 2.12. *Avaruuden X osajoukko A on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikkien suppenevien verkkojensa rajapisteet.*

TODISTUS. Olkoon X avaruus ja $A \subset X$.

Oletetaan ensin, että A on suljettu ja että on olemassa joukon A verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, joka suppenee johonkin pisteeseen $b \in X \setminus A$. Lemman 2.11 mukaan tällöin $b \in \overline{A}$.[3] Kuitenkin, koska A on suljettu, on $A = \overline{A}$. Siispä pitäisi olla $b \in A$ ja $b \in X \setminus A$, mikä ei ole mahdollista. Täten yksikään joukon A verkko ei voi supeta mihinkään joukon $X \setminus A$ pisteeseen.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikki joukon A suppenevat verkot suppenevat johonkin joukon A pisteeseen ja että A ei ole suljettu. Tällöin siis yksikään joukon A verkko ei suppene joukon $X \setminus A$ pisteeseen. Koska A ei ole suljettu, on olemassa $b \in X \setminus A$, jolle $b \in \overline{A}$. Tällöin lemman 2.11 mukaan on olemassa joukon A verkko, joka suppenee pisteeseen b. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa, sillä $b \in X \setminus A$. □

Edellisen lauseen nojalla verkot määrävät topologisen avaruuden suljetut joukot. Koska avoimet joukot saadaan suljettujen joukkojen komplementtina, määräävät verkot itseasiassa avaruuden topologian.

Näytetään seuraavaksi, että verkot määrävät myös funktion jatkuvuuden.

Jos $f\colon X \to Y$ on kuvaus avaruudesta X avaruuteen Y, niin on hyvä muistaa, että f on jatkuva pisteessä $a \in X$, jos ja vain jos kaikille pisteen $f(a) \in Y$ ympäristöille $A \subset Y$ alkukuva $f^{-1}(A) \subset X$ on pisteen a ympäristö. Kuvaus f on jatkuva, jos

[3]Joukon A sulkeuma $\overline{A}$ koostuu joukon A kosketuspisteistä.

se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Seuraavassa lauseessa on myös hyvä huomata, että jos $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on verkko avaruudessa X, niin $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ on verkko avaruudessa Y.

Huomaa, että lauseen jonovastineen ensimmäinen puoli todistettiin lauseen 1.4 kohdassa (1). Verrattaessa todistuksia toisiinsa, voidaan huomata, että ne ovat hyvin samankaltaisia. Ero on lähinnä siinä, että metriset käsitteet ovat vaihtuneet topologisiin vastaaviin, esimerkiksi pallot yleisiin ympäristöihin.

LAUSE 2.13. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ avaruudesta X avaruuteen Y on jatkuva pisteessä $a \in X$, jos ja vain jos verkon $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ supetessa pisteeseen a, verkko $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ suppenee pisteeseen $f(a) \in Y$.*

TODISTUS. Olkoot X ja Y avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.

Oletetaan ensin, että f on jatkuva ja $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ avaruuden X verkko, joka suppenee pisteeseen $a \in X$. Olkoon V pisteen $f(a) \in Y$ ympäristö. Koska f on jatkuva, on $f^{-1}(V)$ pisteen a ympäristö. Verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ suppenee pisteeseen a, joten on olemassa $\beta \in D$ siten, että $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ kaikille $\alpha \in D$, joille $\alpha \geq \beta$. Siispä $f(x_\alpha) \in V$ kaikille $\alpha \in D$, joille $\alpha \geq \beta$. Koska V on pisteen $f(a)$ mielivaltainen ympäristö, tarkoittaa tämä, että $f(x_\alpha) \to f(a)$.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikille verkoille $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, joille $x_\alpha \to a$, pätee $f(x_\alpha) \to f(a)$. Jos f ei ole jatkuva, on olemassa avoin joukko $V \subset Y$, jolle $f^{-1}(V)$ ei ole avoin. Siispä määritelmän mukaan $X \setminus f^{-1}(V)$ ei ole suljettu. Koska $X \setminus f^{-1}(V)$ ei ole suljettu, on lauseen 2.12 nojalla olemassa joukon $X \setminus f^{-1}(V)$ verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$, joka suppenee pisteeseen $y \in f^{-1}(V)$. Koska joukko V on avoin, on $Y \setminus V$ suljettu. Verkko $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ on joukossa $Y \setminus V$, joten lauseen 2.12 mukaan se ei suppene mihinkään joukon V pisteeseen, ja erityisesti $f(x_\alpha)$ ei suppene pisteeseen $f(y)$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten kuvauksen f on oltava jatkuva. □

2.5. Kompaktiuden karakterisointi verkoilla

Kompaktius on kolmas tärkeistä topologisista käsitteistä, joita ei voi karakterisoida yleisessä topologisessa avaruudessa tavallisten jonojen avulla. Näytetään seuraavaksi, että verkkojen avulla se on mahdollista. Tätä ennen esitellään tulokselle oleellinen aliverkon käsite, jota ei vielä olla nostettu esille.

Kerrataan ensin osajonon käsitettä. Jono $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono, jos on olemassa aidosti kasvava funktio $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $y_k = x_{N_k}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen, jono $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono, jos alkuperäinen jono voidaan ilmaista yhdistettynä funktiona $y = x \circ N$. Funktion N roolina on päättää, mitkä indeksit alkuperäisestä jonosta otetaan mukaan osajonoon. Esimerkiksi käyttämällä funktiota $N(k) = 2k$ osajonoon tulisi mukaan vain alkuperäisen jonon parilliset indeksit. Huomaa, että N voidaan tulkita myös jonona, ja usein käytetäänkin jonomaista notaatiota $N(k) = N_k$.

Verkkoja määriteltäessä korvattiin jonon määrittelyjoukko suunnatulla joukolla. Aliverkkoa määriteltäessä olisi toivottavaa päästä samanlaiseen muotoiluun kuin osajonolla. Niinpä korvataan nyt osajonon määritelmässä funktion N määrittely- ja maalijoukot suunnatuilla joukoilla. Ehto "funktio N on aidosti kasvava" korvataan vähemmän rajoittavalla ehdolla: kun α on suuri, myös N_α on suuri.

MÄÄRITELMÄ 2.14. Verkko $(y_\beta)_{\beta\in E}$ on *verkon* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *aliverkko*, jos on olemassa funktio $N : E \to D$ siten, että

(1) $y = x \circ N$ (tai $y_\alpha = x_{N_\alpha}$ kaikille $\alpha \in E$) ja
(2) kaikille $\beta \in D$ on olemassa $\alpha \in E$ siten, että ehdosta $\omega \geq \alpha$ seuraa $N_\omega \geq \beta$.

HUOMAUTUS 2.15. Aiemmin todettiin, että kaikki jonot ovat verkkoja. Nyt voidaan selvästi nähdä, että jonon osajono on aina aliverkko. Käänteinen tulos ei päde: aliverkko ei ole aina osajono. Esimerkiksi $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$ on jonon $(1, 2, 3, \dots)$ aliverkko mutta ei osajono: Funktio $N \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, N(k) = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, missä $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ tarkoittaa luvun $\frac{k}{2}$ kokonaisosaa, toteuttaa edellisen määritelmän ensimmäisen ehdon, joka on sama myös osajonon määritelmässä. Selvästi se ei kuitenkaan ole aidosti kasvava, mutta se toteuttaa ehdon (2) aliverkon määritelmässä.

Aliverkon määritelmästä seuraa tärkeä ominaisuus: jos verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ suppenee pisteeseen a, niin myös kaikki sen aliverkot suppenevat pisteeseen a.

Varsinaisen tuloksen todistamiseen tarvitaan vielä kolme lemmaa. Lisäksi tarvitaan verkon kosketuspisteen käsitettä. Ennen tämän määrittelemistä otetaan käyttöön apukäsite: sanotaan, että avaruuden X verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on *toistuvasti joukossa* $A \subset X$, jos kaikille $\beta \in D$ on olemassa $\alpha \in D$ siten, että $\alpha \geq \beta$ ja $x_\alpha \in A$.

MÄÄRITELMÄ 2.16. Olkoon X avaruus. Piste $a \in X$ on *verkon* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *kosketuspiste*, jos verkko $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on toistuvasti kaikissa pisteen a ympäristöissä.

Verkon kosketuspiste on siis piste, joka on äärettömän lähellä verkkoa siinä mielessä, että verkko saadaan mielivaltaisen lähelle kyseistä pistettä. Verkon kosketuspiste on siis verrattavissa aiemmin määriteltyyn joukon kosketuspisteeseen. Kosketuspiste eroaa verkon rajapisteestä, sillä verkon indeksin kasvaessa verkon alkioiden ei tarvitse olla vähintään yhtä lähellä kosketuspistettä. Toisin sanoen verkko voi välillä karata kosketuspisteen läheisyydestä, kunhan se jollain suuremmalla indeksillä palaa takaisin. Kuvassa 1.1b esitettiin jono, jolla on kosketuspiste 2, mutta jono ei kuitenkaan suppene tähän pisteeseen.

LEMMA 2.17. *Olkoot* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *verkko avaruudessa* X *ja* $\mathcal{A}$ *joukkokokoelma siten, että verkko* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *on toistuvasti kaikissa kokoelman* $\mathcal{A}$ *joukoissa ja minkä tahansa kahden kokoelman* $\mathcal{A}$ *joukon leikkaus sisältää jonkin kokoelman* $\mathcal{A}$ *joukon. Tällöin on olemassa verkon* $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *aliverkko, joka on lopulta kaikissa kokoelman* $\mathcal{A}$ *joukoissa.*

TODISTUS. Olkoon $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ verkko avaruudessa X ja $\mathcal{A}$ joukkokokoelma siten, että väitteessä esitetyt ehdot toteutuvat.

Koska kokoelman $\mathcal{A}$ minkä tahansa kahden joukon leikkaus sisältää jonkin kokoelman $\mathcal{A}$ joukon, on kokoelma $\mathcal{A}$ suunnattu relaatiolla $\subset$. Olkoon $E = \{(\alpha, A) \mid \alpha \in D, A \in \mathcal{A}$ ja $x_\alpha \in A\}$. Suunnataan joukko E seuraavasti: $(\alpha, A) \geq (\beta, B)$, jos $\alpha \geq \beta$ ja $A \subset B$. Tällöin joukko E tosiaan on suunnattu joukko, sillä määritelmän 2.1 kohdat (1) ja (2) toteutuvat selvästi, ja kohdan (3) todentamiseksi riittää huomata, että jos $(\alpha, A), (\beta, B) \in E$, niin on olemassa $\omega \in D$ ja $C \in \mathcal{A}$, joille $\omega \geq \alpha$, $\omega \geq \beta$ ja $C \subset A \cap B$. Tällöin $(\omega, C) \geq (\alpha, A)$ ja $(\omega, C) \geq (\beta, B)$.

Määritellään seuraavaksi funktio $N \colon E \to D, N(\alpha, A) = \alpha$. Näytetään, että $x \circ N$ on verkon N aliverkko. Määritelmän 2.14 kohta (1) on triviaalisti totta, joten riittää todentaa määritelmän kohta (2). Olkoot tätä varten $\beta \in D$ ja $A \in \mathcal{A}$. Oletuksen nojalla verkko x_α on toistuvasti joukossa A, joten on olemassa $\alpha \in D$ siten, että $\alpha \geq \beta$ ja $x_\alpha \in A$. Näin ollen joukon E määritelmän nojalla $(\alpha, A) \in E$. Olkoon nyt $(\omega, U) \in E$ siten, että $(\omega, U) \geq (\alpha, A)$. Tällöin siis määritelmän mukaisesti $\omega \geq \alpha$ ja $U \subset A$. Tästä seuraa, että $N(\omega, U) = \omega \geq \alpha \geq \beta$. Näin ollen määritelmän 2.14 kohdat (1) ja (2) pätevät, ja $x \circ N$ on verkon x_α aliverkko.

Olkoon seuraavaksi $A_0 \in \mathcal{A}$. Oletuksen nojalla verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ on toistuvasti joukossa A_0, joten on olemassa $\alpha_0 \in D$ siten, että $x_{\alpha_0} \in A_0$. Näin ollen $e_0 = (\alpha_0, A_0) \in E$. Olkoon nyt $e = (\alpha, A) \in E$ ja $e \geq e_0$. Tällöin

$$(x \circ N)(e) = x(N(\alpha, A)) = x(\alpha) \in A \subset A_0.$$

Toisin sanoen $x \circ N$ on lopulta joukossa A_0. □

Lemma 2.18. *Avaruuden X piste a on verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ kosketuspiste, jos ja vain jos jokin verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ aliverkko suppenee pisteeseen a.*

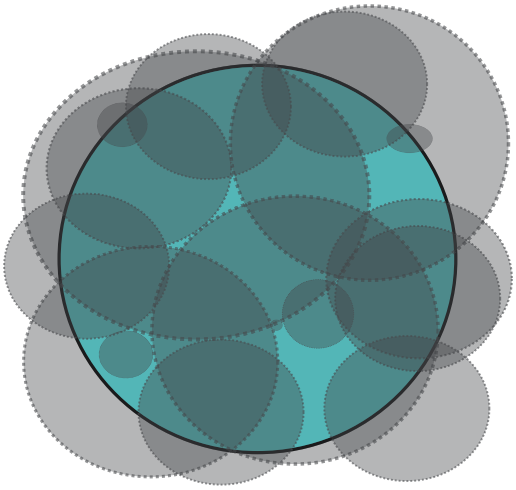
Todistus. Olkoon $a \in X$ ja $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ verkko avaruudessa X.

Oletetaan ensin, että a on verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ kosketuspiste. Olkoon $\mathcal{U}$ pisteen a kaikkien ympäristöjen kokoelma. Tällöin joukoille $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ pätee $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Lisäksi, koska a on verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ kosketuspiste ja kokoelman $\mathcal{U}$ joukot ovat pisteen a ympäristöjä, on verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ toistuvasti jokaisessa kokoelman $\mathcal{U}$ joukossa. Edellisen lemman ehdot toteutuvat, ja saadaan, että verkolla $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ on olemassa aliverkko, joka on lopulta kaikissa kokoelman $\mathcal{U}$ joukoissa. Koska kokoelma $\mathcal{U}$ on pisteen a kaikkien ympäristöjen joukko, tarkoittaa tämä, että aliverkko suppenee pisteeseen a.

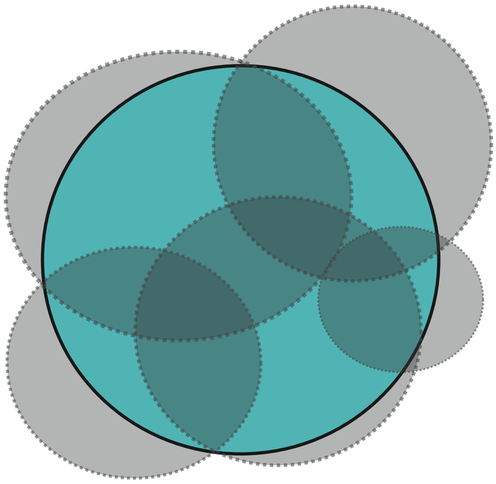
Oletetaan seuraavaksi, että jokin verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ aliverkko suppenee pisteeseen a. Jos a ei ole verkon kosketuspiste, on olemassa pisteen a ympäristö U siten, että verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ei ole toistuvasti joukossa U. Edellinen on yhtäpitävää sen kanssa, että verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ on lopulta joukossa $X \setminus U$. Näin ollen myös verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ jokainen aliverkko on lopulta joukossa $X \setminus U$ ja siten a ei voi olla minkään aliverkon rajapiste. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten pisteen a on oltava verkon kosketuspiste. □

Seuraava lemma käsittelee avaruuden kompaktiutta, joten kerrataan lyhyesti, mitä kompaktiudella tarkoitetaan. Euklidisissa avaruuksissa joukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Yleisessä topologisessa avaruudessa suljettu ja rajoitettu joukko ei välttämättä ole kompakti. Tämän vuoksi kompaktius määritellään yleensä avoimien peitteiden avulla: avaruus (tai joukko) on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Toisin sanoen, jos kompakti avaruus peitetään avoimilla joukoilla, voidaan jollakin tavalla valikoiden osa näistä jättää pois, kunnes jäljellä on äärellinen määrä peittäviä joukkoja. Näin saadaan aikaan osapeite, joka edelleen peittää koko avaruuden. Kuva 2.3 havainnollistaa tilannetta. Tässä on tosin huomattava, että peittäviä joukkoja voi olla myös ääretön määrä.

Edellä kompaktiutta karakterisoi avaruuden avoin peite, siis kokoelma avoimia joukkoja. Koska avoimet ja suljetut joukot ovat tiivisti yhteydessä toisiinsa, voi juolahtaa mieleen, miten kompaktius liittyy suljettuihin joukkoihin. Yhteys todella on olemassa, ja se nostetaan esille seuraavassa lemmassa. Ensin kuitenkin määritelmä: sanotaan, että joukkokokoelmalla $\mathcal{F}$ on *äärellisten leikkausten ominaisuus*, jos kokoelman $\mathcal{F}$ jokaisen äärellisen alikokoelman sisältämien joukkojen leikkaus on epätyhjä. Näin saadaan:



(A) Avoin peite.



(B) Avoimen peitteen äärellinen osapeite.

KUVA 2.3. Kompakti avaruus.

LEMMA 2.19. *Avaruus X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella avaruuden X äärellisten leikkausten ominaisuuden toteuttavalla kokoelmalla suljettuja joukkoja on epätyhjä leikkaus.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että avaruus X on kompakti ja että $\mathcal{F}$ on kokoelma suljettuja joukkoja, joiden leikkaus on tyhjä. Koska leikkaus on tyhjä, saadaan De Morganin lakien nojalla $X = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}}(X \setminus F)$. Koska joukot $F \in \mathcal{F}$ ovat suljettuja, ovat joukot $X \setminus F, F \in \mathcal{F}$, avoimia. Näin ollen $\bigcup_{F \in \mathcal{F}}(X \setminus F)$ on avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti, on tällä peitteellä olemassa äärellinen osapeite, eli toisin sanoen on olemassa äärellinen määrä joukkoja $F_1, \ldots, F_n$ siten, että $\bigcup_{i=1}^n (X \setminus F_i) = X$. De Morganin laeista saadaan $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, eli kokoelmalla $\mathcal{F}$ ei ole äärellisten leikkausten ominaisuutta.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikilla avaruuden X äärellisten leikkausten ominaisuuden toteuttavalla kokoelmalla suljettuja joukkoja on epätyhjä leikkaus. Olkoon $\mathcal{C}$ avaruuden X avoin peite, jolloin $\mathcal{F} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{C}\}$ on kokoelma suljettuja joukkoja. Koska $\mathcal{C}$ on avaruuden X peite, on $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, joten De Morganin lakien avulla saadaan $\bigcap_{C \in \mathcal{C}}(X \setminus C) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Oletuksen nojalla kokoelmalla $\mathcal{F}$ ei ole äärellisten leikkausten ominaisuutta, joten on olemassa äärellinen määrä joukkoja $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ siten, että $\bigcap_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus U_i) = \emptyset$. De Morganin laeista saadaan $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$, eli toisin sanoen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ on alkuperäisen peitteen äärellinen osapeite, joka edelleen peittää koko avaruuden X. Siispä X on kompakti. □

Näin voidaan lopulta esittää itse päätulos:

LAUSE 2.20. *Avaruus X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella avaruuden X verkolla on aliverkko, joka suppenee johonkin avaruuden X pisteeseen.*

TODISTUS. Olkoon X avaruus. Lemman 2.18 nojalla riittää todistaa, että X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella verkolla avaruudessa X on kosketuspiste.

Oletetaan ensin, että X on kompakti. Olkoon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ verkko avaruudessa X. Olkoon $M_\alpha = \{x_\beta \mid \beta \geq \alpha\} \subset X$ kaikille $\alpha \in D$. Koska D on suunnattu relaatiolla $\geq$, on kokoelmalla $\{M_\alpha \mid \alpha \in D\}$ äärellisten leikkausten ominaisuus, ja siten myös kokoelmalla $\{\overline{M_\alpha} \mid \alpha \in D\}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Koska X on kompakti ja koska kokoelmalla $\{\overline{M_\alpha} \mid \alpha \in D\}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus, on lemman 2.19 nojalla olemassa $p \in \bigcap_{\alpha \in D} \overline{M_\alpha}$. Näytetään seuraavaksi, että p on verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ kosketuspiste. Olkoon U pisteen p ympäristö ja $\alpha_0 \in D$. Koska $p \in \bigcap_{\alpha \in D} \overline{M_\alpha}$, on $p \in \overline{M_{\alpha_0}}$. Siispä $M_{\alpha_0} \cap U \neq \emptyset$, joten on olemassa $\beta \in D$ siten, että $\beta \geq \alpha_0$ ja $x_\beta \in U$. Täten verkko $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ on toistuvasti pisteen p jokaisessa ympäristössä eli p on verkon $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ kosketuspiste.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikilla avaruuden X verkoilla on kosketuspiste. Olkoon $\mathcal{F}$ suljettujen joukkojen kokoelma, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus. Olkoon $\mathcal{G}$ kokoelma kaikista kokoelman $\mathcal{F}$ joukkojen äärellisistä leikkauksista. Tällöin myös kokoelmalla $\mathcal{G}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Koska $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, riittää näyttää, että $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \neq \emptyset$. Kahden kokoelman $\mathcal{G}$ joukon leikkaus kuuluu kokoelmaan $\mathcal{G}$, joten $\mathcal{G}$ on suunnattu relaatiolla $\subset$. Määritellään verkko $(x_G)_{G \in \mathcal{G}}$ siten, että piste $x_G \in G$ jokaiselle $G \in \mathcal{G}$ [4]. Oletuksen nojalla verkolla $(x_G)_{G \in \mathcal{G}}$ on kosketuspiste $p \in X$. Olkoot nyt $G_0, G \in \mathcal{G}$ siten, että $G \subset G_0$. Tällöin $x_G \in G \subset G_0$. Siispä $(x_G)_{G \in \mathcal{G}}$ on lopulta joukossa G_0. Koska G_0 on suljettu, on lauseen 2.12 nojalla oltava $p \in G_0$. Koska G_0 valittiin mielivaltaisesti, on siis p kaikissa kokoelman $\mathcal{G}$ joukoissa ja siten $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \neq \emptyset$. Lemman 2.19 nojalla X on kompakti. □

[4]Valinta-aksiooma mahdollistaa alkioiden x_G valinnan.

LUKU 3

Filtterit

Edellisessä luvussa esitellyiksi tulleet verkot paikkaavat puutteita, joita tavallisilla jonoilla on topologisissa avaruuksissa. Verkot eivät kuitenkaan ole ainoa jonojen yleistys. Filtterien avulla päästään pitkälti samoihin tuloksiin kuin verkkoilla. Tutustutaan seuraavaksi filtterien teoriaan.

Filtterit yleistävät edelleen jonon käsitettä. Kun siirryttiin jonoista verkkoihin, havaittiin, että määrittelyjoukko ja sen järjestysrelaatio voitiin vaihtaa yleisempään, ja näin saatiin käsite, joka käyttäytyy jononkaltaisesti. Verkkojen tapauksessa erityisen kiinnostuksen kohteena on siis indeksijoukko. Kuitenkin tärkein verkkoihin liittyvä käsite lienee suppeneminen, ja verkon suppeneminen taas liittyy potentiaalisen rajapisteen ympäristöihin: verkko suppenee pisteeseen, jos se on lopulta kaikissa kyseisen pisteen ympäristöissä. Miksei siis nostettaisi ympäristöjä suurempaan rooliin?

Filtterit pohjautuvat juuri tähän ajatukseen. Unohdetaan indeksijoukko ja keskitytään sen sijaan ympäristöihin. Muodostetaan joukkokokoelma, jonka joukot toteuttavat tietyt ympäristöjenkin toteuttamat ominaisuudet: mille tahansa pisteen ympäristöille on totta, että kahden ympäristön leikkaus on edelleen ympäristö, ja jos jokin ympäristö on jonkin joukon osajoukko, niin myös tämä joukko on pisteen ympäristö. Lisäksi luonnollisesti tyhjä joukko ei ole minkään pisteen ympäristö. Nyt voidaan verrata tätä kokoelmaa pisteen ympäristöjen joukkoon: jos pisteen kaikki ympäristöt ovat tässä kokoelmassa, niin tällöin voidaan hyvin ajatella, että tämä kokoelma "suppenee" kyseiseen pisteeseen.

Määritelmä 3.1. Kokoelma $\mathcal{F}$ joukon X osajoukkoja on *filtteri joukossa* X, jos
(1) $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, kun $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
(2) $G \in \mathcal{F}$, kun $F \in \mathcal{F}$ ja $F \subset G$ ja
(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Esimerkki 3.2.
(1) Olkoon X avaruus ja $x \in X$. Tällöin kaikki pisteen x sisältävät joukot muodostavat kokoelman, joka on selvästi filtteri.
(2) Pisteen a kaikkien ympäristöjen kokoelma $\mathcal{N}_a$ muodostaa filtterin, jota kutsutaan pisteen *a ympäristöfiltteriksi.* Kokoelman $\mathcal{N}_a$ osoittaminen filtteriksi on triviaalia: kuten yllä todettiin, ympäristöt toteuttavat määritelmän 3.1 ehdot (1)–(3).
(3) Luonnollisten lukujen joukossa kokoelma $\{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\mathsf{C}} \text{ on äärellinen}\}$ muodostaa filtterin, jota kutsutaan *Fréchet'n filtteriksi.* Osoitetaan, että kyseinen kokoelma tosiaan on filtteri. Jos $F_1, F_2 \in \hat{\mathcal{F}} := \{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\mathsf{C}} \text{ on äärellinen}\}$, niin myös $F_1 \cap F_2 \in \hat{\mathcal{F}}$, sillä yhtälöstä $(F_1 \cap F_2)^{\mathsf{C}} = F_1^{\mathsf{C}} \cup F_2^{\mathsf{C}}$ seuraa, että $(F_1 \cap F_2)^{\mathsf{C}}$ on äärellinen (kahden äärellisen joukon yhdiste on aina äärellinen). Jos taas $F \in \hat{\mathcal{F}}$ ja $F \subset G$ jollain joukolla G, niin tällöin myös $G \in \hat{\mathcal{F}}$, sillä

yhtälöstä $G^{\mathsf{C}} \subset F^{\mathsf{C}}$ seuraa, että G^{C} on äärellinen (äärellisen joukon osajoukko on aina äärellinen). Lopuksi voidaan todeta, että $\emptyset^{\mathsf{C}} = \mathbb{N}$ ei ole äärellinen, joten $\emptyset \notin \hat{\mathcal{F}}$.

Vaikka filtterin käsite voi ensi näkemältä tuntua oudolta, soveltuu käsite kuitenkin topologisiin avaruuksiin hyvin. Avaruuden topologia on määritelty kokoelmaksi eräänlaisia joukkoja, samoin kuin filtteritkin. Idea näiden käsitteiden takana on siis samankaltainen.

Filtterien määritelmän perusajatuksena oli unohtaa verkkojen indeksijoukot ja keskittyä ympäristöihin. Näin ollen ei välttämättä ole heti selvä, miten filtterit liittyvät verkkoihin tai jonoihin. Tätä kuitenkin tarkastellaan myöhemmin. Filtterien yhteyttä jonoihin tutkitaan aliluvussa 3.3. Lisäksi luvussa 4 tutkitaan yleisemmin verkkojen ja filtterien yhteyttä.

3.1. Suppeneminen ja avoimuus

Jotta filttereistä voisi olla hyötyä (erityisesti: jotta ne olisivat jonojen järkeenkäypä yleistys) täytyy niille määritellä suppenemisen käsite. Kerrataan vielä, mitä vastaava käsite tarkoittaa verkoilla: mikäli verkko suppenee johonkin pisteeseen, täytyy kyseisen verkon olla lopulta jokaisessa rajapisteen ympäristössä. Filtteri puolestaan määriteltiin kokoelmaksi joukkoja, jotka jollain lailla muistuttavat ympäristöjä. Nyt voidaan verrata tätä kokoelmaa pisteen ympäristöjen joukkoon: jos pisteen kaikki ympäristöt ovat tässä kokoelmassa, niin sanotaan, että tämä kokoelma suppenee kyseiseen pisteeseen.

Määritelmä 3.3. Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri joukossa X. *Filtteri $\mathcal{F}$ suppenee pisteeseen $a \in X$*, jos pisteen a jokainen ympäristö kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}$. Usein merkitään $\mathcal{F} \to a$, ja pistettä a kutsutaan *filtterin rajapisteeksi*.

Aiemmin ollaan näytetty, miten jonot liittyvät tärkeisiin topologisiin käsitteisiin metrisissä avaruuksissa. Verkot toteuttivat samat ominaisuudet myös metrisoitumattomissa avaruuksissa. Tässä luvussa näytetään, että näin käy myös filttereillä. Koska jatkossa tutkitaan pääasiassa samoja ominaisuuksia kuin mitä jo verkkojen yhteydessä tehtiin, on lemmat ja lauseet pyritty muutamaa poikkeusta lukuunottamatta esittämään samanlaisessa muodossa kuin verkkojen yhteydessä samankaltaisten kohtien vertailtavuuden parantamiseksi.

Aloitetaan näyttämällä, miten avaruuden topologia liittyy suppeneviin filttereihin. Tätä varten otetaan esille seuraava hyödyllinen lemma[1]:

Lemma 3.4. *Olkoot X topologinen avaruus, $A \subset X$ ja $\mathcal{N}_a$ pisteen a ympäristöfiltteri kaikille $a \in X$. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitävät:*

(1) *Joukko A on avoin.*
(2) *Kaikille $a \in A$ on olemassa ympäristö $N_a \in \mathcal{N}_a$ siten, että $N_a \subset A$.*
(3) *$A \in \mathcal{N}_a$ kaikille $a \in A$.*

Edellinen lemma käy hyvin yhteen intuition kanssa. Lemman tärkein sanoma on, että joukko on avoin, jos ja vain jos se on kaikkien pisteidensä ympäristö. Tätä faktaa hyödynnetään lauseen 2.12 filtterivastineen todistuksessa:

[1] Todistus on yksinkertainen (seuraa määritelmistä), ja tämän vuoksi se sivuutetaan.

LAUSE 3.5. *Avaruuden X osajoukko A on avoin, jos ja vain jos kaikille $a \in A$ ja filttereille $\mathcal{F}_a$, joille $\mathcal{F}_a \to a$, pätee $A \in \mathcal{F}_a$.*

TODISTUS. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$.

Oletetaan ensin, että A on avoin. Olkoot $a \in A$ ja $\mathcal{F}_a \to a$. Koska A on avoin, on lemman 3.4 nojalla $A \in \mathcal{N}_a$. Koska $\mathcal{F}_a \to a$, on $\mathcal{N}_a \subset \mathcal{F}_a$. Näin ollen $A \in \mathcal{N}_a \subset \mathcal{F}_a$, eli erityisesti $A \in \mathcal{F}_a$.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikille pisteille $a \in A$ ja filttereille $\mathcal{F}_a$, joille $\mathcal{F}_a \to a$, pätee $A \in \mathcal{F}_a$. Jos A ei ole avoin, niin lemman 3.4 nojalla on olemassa $\hat{a} \in A$ siten, että $A \notin \mathcal{N}_{\hat{a}}$. Selvästi $\mathcal{N}_{\hat{a}} \to \hat{a}$. Tällöin oletuksen nojalla pitäisi olla $A \in \mathcal{N}_{\hat{a}}$, mikä on ristiriidassa aiemmin päätellyn kanssa. $\square$

3.2. Hausdorff-ominaisuus ja jatkuvuus filttereillä

Näytetään seuraavaksi, että funktioiden jatkuvuus topologisessa avaruudessa on yhteydessä suppeneviin filttereihin. Ensimmäinen ajatus voisi olla muotoilla lause suoraviivaisesti kuten verkoille tehtiin (ks. lause 2.13). Tässä kuitenkin ilmenee ongelma: jos $f : X \to Y$ on funktio ja $\mathcal{F}$ filtteri, niin $f(\mathcal{F}) = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ei välttämättä ole filtteri. Ongelman ratkaisemiseksi nostetaan esille filtterikannan käsite. Myöhemmin todistettavan lemman 3.14 avulla päästään lausetta 2.13 vastaavaan muotoiluun.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Kokoelma $\mathcal{B}$ on *filtterikanta*, jos

(1) kaikille $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ on olemassa $B_3 \in \mathcal{B}$ siten, että $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ ja
(2) $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

ESIMERKKI 3.7. Eräs esimerkki filtterikannasta on Fréchet'n filtterin kanta[2]. Se koostuu joukoista $B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$, missä $k \in \mathbb{N}$.

Näytetään, että kokoelma $\mathcal{B} = \{B_k\}$ tosiaan muodostaa filtterikannan. Olkoot tätä varten $C, D \in \mathcal{B}$, jolloin $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\}$ jollain $i \in \mathbb{N}$ ja vastaavasti $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq j\}$ jollain $j \in \mathbb{N}$. Valitsemalla $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$, missä $k = \max(i, j)$, pätee $E \subset B \cap C$. Määritelmän 3.6 kohdan (2) ehdot toteutuvat selvästi.

Filtterikannan hyöty on siinä, että sen avulla on helpompi ilmaista, mitkä joukot muodostavat filtterin: yleensä filtterikanta on pienempi joukko kuin sen muodostama filtteri. Esimerkki 3.7 valaisee tilannetta: Aiemmin esitelty Fréchet'n filtteri muodostuu kaikista niistä luonnollisten lukujen osajoukoista, joiden komplementti on äärellinen. Tarkastelemalla sen sijaan tämän filtterin kantaa, voidaan osa näistä joukoista karsia pois. Esimerkin 3.7 mukaisesti eräs tämän filtterin kanta muodostuu joukoista, jotka sisältävät jostain luonnollisesta luvusta lähtien kaikki loput (eivätkä muita lukuja). Tätä kokoelmaa on helpompi käsitellä, ja on myös helpompi ymmärtää, minkälaisista joukoista kokoelma itseasiassa koostuu.

Jotta filtterikannan käsitteestä olisi hyötyä, täytyy kuitenkin olla jokin tapa muodostaa filtteri sen kannasta. Tapa on yksinkertainen: filtterikannan muodostama filtteri koostuu täsmälleen niistä joukoista, jotka sisältävät jonkin filtterikannan joukon.

[2]Filtterikannan virittämän filtterin määritelmä annetaan huomautuksessa 3.9. Tässä vaiheessa tämän kannan nimeen ei tarvitse kiinnittää enempää huomiota.

Lause 3.8. *Jos $\mathcal{B}$ on filtterikanta avaruudessa X, niin*

$$\mathcal{F} = \{F \mid F \subset X, B \subset F \text{ jollekin } B \in \mathcal{B}\}$$

on filtteri avaruudessa X.

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ filtterikanta avaruudessa X ja $\mathcal{F} = \{F \mid F \subset X, B \subset F$ jollekin $B \in \mathcal{B}\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{F}$ on filtteri avaruudessa X.

Olkoon $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Tällöin siis on olemassa joukot $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, joille $B_1 \subset F_1$ ja $B_2 \subset F_2$. Koska $\mathcal{B}$ on filtterikanta, on olemassa $B_3 \in \mathcal{B}$ siten, että $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Koska $B_1 \cap B_2 \subset B_1 \subset F_1$ ja $B_1 \cap B_2 \subset B_2 \subset F_2$, on $B_3 \subset F_1$ ja $B_3 \subset F_2$. Siispä myös $B_3 \subset F_1 \cap F_2$ ja täten $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Olkoon sitten $F \in \mathcal{F}$ ja $F \subset G \subset X$. Tällöin on olemassa $B \in \mathcal{B}$ siten, että $B \subset F \subset G$. Tällöin myös $G \in \mathcal{F}$.

Lopuksi voidaan todeta, että koska $\emptyset \notin \mathcal{B}$, on myös $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Määritelmän 3.1 kaikki ehdot pätevät, joten $\mathcal{F}$ on filtteri avaruudessa X. □

Huomautus 3.9. Edellisen lauseen mukaista filtteriä $\mathcal{F}$ kutsutaan *filtterikannan $\mathcal{B}$ virittämäksi filtteriksi.* Huomaa, että filtterin filtterikanta ei välttämättä ole uniikki: monikin filtterikanta voi virittää saman filtterin.

Esimerkki 3.10. Aiemmin esille nostettu Fréchet'n filtterin kanta on järkevästi nimetty, sillä se virittää esimerkissä 3.2 mainitun Fréchet'n filtterin[3]. Näytetään tämä seuraavaksi. Halutaan siis osoittaa, että yhtälö

$$\{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\complement} \text{ on äärellinen}\} = \{F \mid F \subset X, B \subset F \text{ jollekin } B \in \mathcal{B}\},$$

missä $\mathcal{B}$ on esimerkissä 3.7 esitelty Fréchet'n filtterin kanta, on tosi. Todistetaan väite osoittamalla, että inkluusio pätee molempiin suuntiin.

Olkoon ensin $\hat{A} \in \{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\complement}$ on äärellinen$\}$. Tällöin $\hat{A}^{\complement}$ on äärellinen, joten on selvää, että joukon $\hat{A}$ on jostain luonnollisesta luvusta lähtien sisällettävä kaikki loput. Siis on olemassa $B_k \in \mathcal{B}$ siten, että $B_k \subset \hat{A}$. Näin ollen $\hat{A} \in \{F \mid F \subset X, B \subset F$ jollekin $B \in \mathcal{B}\}$.

Olkoon sitten $\hat{F} \in \{F \mid F \subset X, B \subset F$ jollekin $B \in \mathcal{B}\}$. Tällöin on olemassa $B_k \in \mathcal{B}$ siten, että $B_k \subset \hat{F}$. Tämä tarkoittaa, että joukko $\hat{F}$ sisältää kaikki luonnolliset luvut jostain luonnollisesta luvusta k lähtien. Näin ollen joukon $\hat{F}^{\complement}$ on oltava äärellinen. Siispä $\hat{F} \in \{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\complement}$ on äärellinen$\}$.

Tästä lähtien melkein kaikki filttereitä koskevat lauseet esitetään pääasiassa filtterikantojen avulla. Tämä tehdään sen vuoksi, että näin päästään aavistuksen verran kätevämpään esitykseen. Tästä ei muodostu ongelmaa, sillä filtterikannoista päästään helposti vastaaviin filttereihin[4]. Kun puhutaan filtterikannan suppenemisesta, tarkoitetaan sillä itseasiassa vain filtterikannan virittämän filtterin suppenemista.

Määritelmä 3.11. Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{B}$ filtterikanta joukossa X. *Filtterikanta $\mathcal{B}$ suppenee pisteeseen $a \in X$*, jos filtterikannan $\mathcal{B}$ virittämä filtteri suppenee pisteeseen a. Usein merkitään $\mathcal{B} \to a$, ja pistettä a kutsutaan filtterikannan rajapisteeksi.

[3]Tosin tässäkin pitää muistaa, että kyseinen kanta ei ole Fréchet'n filtterin ainoa mahdollinen kanta.

[4]Lisäksi on hyvä huomata, että jokainen filtteri on myös filtterikanta.

Huomautus 3.12. Edellisen määritelmän kanssa on yhtäpitävää, että filtterikanta $\mathcal{B} \to a$, jos jokaiselle pisteen a ympäristölle U on olemassa joukko $B \in \mathcal{B}$ siten, että $B \subset U$.

Hausdorffin avaruuksien yhteyttä filttereihin ei tähän mennessä olla vielä tutkittu, sillä tuloksen todistuksessa hyödynnetään filtterikantoja. Otetaan tulos tässä vaiheessa esille. Näin saadaan samalla esimerkki filtterikantojen käytöstä.

Lause 3.13. *Avaruus X on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos avaruuden X filttereillä on korkeintaan yksi rajapiste.*

Todistus. Olkoon X avaruus.

Oletetaan ensin, että X on Hausdorffin avaruus ja että on olemassa filtteri $\mathcal{F}$, jolle $\mathcal{F} \to a$ ja $\mathcal{F} \to b$ siten, että $a \neq b$. Koska X on Hausdorffin avaruus, on olemassa pisteiden a ja b ympäristöt U ja V, joille $a \in U, b \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$. Koska $\mathcal{F}$ suppenee sekä pisteeseen a että pisteeseen b, pätee $U, V \in \mathcal{F}$. Näin ei voi kuitenkaan olla, sillä muutoin $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{F}$, mikä ei voi pitää paikkansa, sillä $\mathcal{F}$ on filtteri. Siispä kaikilla avaruuden X filttereillä on korkeintaan yksi rajapiste.

Oletetaan sitten, että X ei ole Hausdorffin avaruus. Näytetään, että tällöin on olemassa avaruuden X filtteri, joka suppenee ainakin kahteen pisteeseen. Koska avaruus X ei ole Hausdorffin avaruus, on olemassa pisteet $a, b \in X$ siten, että kaikki pisteen a ympäristöt leikkaavat kaikkia pisteen b ympäristöjä. Olkoon $\mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \text{ on pisteen } a \text{ ympäristö ja } V \text{ on pisteen } b \text{ ympäristö}\}$. Tällöin $\mathcal{B}$ on filtterikanta, sillä jos $U_1 \cap V_1 \in \mathcal{B}, U_2 \cap V_2 \in \mathcal{B}$, niin $(U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}$, koska pisteen a ympäristöjen U_1 ja U_2 leikkaus on pisteen a ympäristö ja vastaavasti pisteen b ympäristöjen V_1 ja V_2 leikkaus on pisteen b ympäristö.

Koska mille tahansa pisteen a ympäristölle U pätee $U = U \cap X$ ja X on pisteen b ympäristö, sisältyvät pisteen a kaikki ympäristöt kokoelmaan $\mathcal{B}$. Täten siis filtterikannan $\mathcal{B}$ virittämä filtteri suppenee pisteeseen a. Vastaava päättely voidaan esittää myös pisteen b suhteen. Näinpä filtterikannan $\mathcal{B}$ virittämä filtteri suppenee sekä pisteeseen a että pisteeseen b. □

Palataan nyt jatkuvuuden ja filtterien suppenemisen yhteyden tutkimiseen. Todistetaan ensin lemma, jonka vuoksi filtterikannat alunperin esiteltiin, ja tämän jälkeen siirrytään varsinaiseen tulokseen.

Lemma 3.14. *Jos $f\colon X \to Y$ on funktio ja $\mathcal{B}$ on filtterikanta avaruudessa X, niin $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ on filtterikanta avaruudessa Y.*

Todistus. Olkoon $f : X \to Y$ funktio avaruudesta X avaruuteen Y ja $\mathcal{B}$ filtterikanta avaruudessa X. Koska $\mathcal{B}$ on filtterikanta, on $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Näin ollen myös $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$.

Olkoon $F_1, F_2 \in f(\mathcal{B})$. Tällöin on olemassa joukot $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, joille $f(B_1) = F_1$ ja $f(B_2) = F_2$. Koska $\mathcal{B}$ on filtterikanta, on olemassa $B_3 \in \mathcal{B}$ siten, että $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Näin ollen $f(B_3) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$. Määritelmän 3.6 ehdot toteutuvat, joten $f(\mathcal{B})$ on filtterikanta. □

Lause 3.15. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ avaruudesta X avaruuteen Y on jatkuva pisteessä $a \in X$, jos ja vain jos filtterikannan $\mathcal{B}$ supetessa pisteeseen a, filtterikanta $f(\mathcal{B})$ suppenee pisteeseen $f(a) \in Y$.*[5]

[5]Funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukonsa pisteissä.

TODISTUS. Olkoon f kuvaus avaruudesta X avaruuteen Y.

Oletetaan ensin, että f on jatkuva ja $\mathcal{B}$ filtterikanta, joka suppenee pisteeseen $a \in X$. Olkoon $U \subset Y$ pisteen $f(a)$ ympäristö. Funktion f jatkuvuuden nojalla $f^{-1}(U)$ on tällöin pisteen a ympäristö. Koska $\mathcal{B}$ suppenee pisteeseen a, on huomautuksen 3.12 nojalla olemassa joukko $B \in \mathcal{B}$ siten, että $B \subset f^{-1}(U)$. Nyt siis $f(B) \in f(\mathcal{B})$ ja $f(B) \subset U$. Näin ollen huomautuksen 3.12 nojalla filtterikanta $f(\mathcal{B})$ suppenee pisteeseen $f(a)$.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikille $a \in X$ ja filtterikannoille $\mathcal{B}$ avaruudessa X ehdosta $\mathcal{B} \to a$ seuraa $f(\mathcal{B}) \to f(a)$ ja osoitetaan, että f on jatkuva. Olkoon $V \subset Y$ avoin ja $a \in f^{-1}(V)$. Pisteen a ympäristöfiltteri[6] $\mathcal{N}_a$ suppenee pisteeseen a, joten oletuksen nojalla $f(\mathcal{N}_a)$ suppenee pisteeseen $f(a)$. Joukko V on avoimena joukkona pisteen $f(a)$ ympäristö. Näin ollen huomautuksen 3.12 nojalla on olemassa joukko $B \in f(\mathcal{N}_a)$ siten, että $B \subset V$. Koska $B \in f(\mathcal{N}_a)$, on olemassa $N \in \mathcal{N}_a$ siten, että $B = f(N)$. Siten $f(N) \subset V$ ja $N \subset f^{-1}(V)$. Niinpä kaikilla joukon $f^{-1}(V)$ pisteillä on joukkoon $f^{-1}(V)$ sisältyvä ympäristö, ja lemman 3.4 kohdan (2) nojalla $f^{-1}(V)$ on avoin. Näin ollen f on jatkuva. □

3.3. Jonot ja filtterit

Pysähdytään hetkeksi miettimään tarkemmin, mistä filttereistä on itseasiassa kysymys. Verkkoja konstruoidessa yhteys jonoihin tuli selvästi ilmi: tuolloin riitti muokata jonojen määrittelyjoukkoa yleisemmäksi, ja näin saatiin käsite, joka näyttää jonolta ja käyttäytyy kuin jonot. Filtterit puolestaan määriteltiin abstraktimmin: filtteri on joukkokokoelma, joka täyttää tietyt ehdot. Vaikka filtteri on abstraktimpi käsite kuin jono, on yhteys jonoihin kuitenkin olemassa. Tarkastellaan lyhyesti tätä yhteyttä ennen kuin siirrytään tutkimaan, miten kompaktius liittyy filttereihin.

Tätä varten tarvitaan aiemmin esimerkkinä (esimerkki 3.2 kohta (3)) käytettyä Fréchet'n filtteriä, joten kerrataan ensin sen määritelmä: luonnollisten lukujen Fréchet'n filtteri on kokoelma $\{A \subset \mathbb{N} \mid A^{\complement} \text{ on äärellinen}\}$. Kyseinen filtteri koostuu siis joukoista, jotka sisältävät jostain luonnollisesta luvusta lähtien kaikki loput luonnolliset luvut (ja mahdollisesti myös muita pisteitä, vertaa esimerkissä 3.7 esitettyyn Fréchet'n filtterin kantaan).

Nostetaan vielä esiin huomio: jos $\mathcal{F}$ on filtteri avaruudessa X ja $f\colon X \to Y$ funktio, niin $f(\mathcal{F})$ on filtterikanta avaruudessa Y. Tämä seuraa suoraan lemmasta 3.14 ja yksinkertaisesta havainnosta, että filtteri on aina myös filtterikanta. Tästä päästään alkeisfiltterin määritelmään:

MÄÄRITELMÄ 3.16. Olkoot $x\colon \mathbb{N} \to X$ jono avaruudessa X ja $\hat{\mathcal{F}}$ luonnollisten lukujen Fréchet'n filtteri. Tällöin *jonoon* (x_n) *liitetty alkeisfiltteri* $x(\hat{\mathcal{F}})^{\dagger}$ on filtterikannan $x(\hat{\mathcal{F}})$ virittämä filtteri.

Mitä edellinen määritelmä kertoo? Ensinnäkin, määritelmässä jono (x_n) pitää ajatella funktiona $x\colon \mathbb{N} \to X$. Niinpä filtterikanta $x(\hat{\mathcal{F}})$ koostuu joukoista $x(A)$, missä $A \subset \mathbb{N}$ ja $A^{\complement}$ on äärellinen. Filtterikanta koostuu siis joukoista jonon (x_n) pisteitä, siten että jostakin indeksistä lähtien kaikki loput jonon (x_n) pisteet (ja mahdollisesti myös muita jonon pisteitä) ovat mukana. Tämän filtterikannan virittämä filtteri

[6]Huomaa: pisteen ympäristöfiltteri on myös filtterikanta.

koostuu kaikista joukoista, jotka sisältävät jonkin filtterikannan joukon. Näin ollen päädytään siihen, että jonoon (x_n) liitetyllä alkeisfiltterillä tarkoitetaan kokoelmaa

$$\begin{aligned} x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger = \{M \subset X \mid &\text{ jonon } (x_n) \text{ alkioille pätee } x_n \in M \text{ kaikilla paitsi} \\ &\text{äärellisen monella } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Lisäksi havaitaan, että ehto "jonon alkioille pätee $x_n \in M$ kaikilla paitsi äärellisen monella $n \in \mathbb{N}$" on ekvivalentti jonojen ja verkkojen yhteydessä käytetyn "lopulta"-käsitteen kanssa[7]. Näin ollen edellinen voidaan tiivistää muotoon

$$x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger = \{M \subset X \mid \text{jono } (x_n) \text{ on lopulta joukossa } M\}.$$

Mitä hyötyä jonoon liitetystä alkeisfiltteristä sitten on? Edellä päädyttiin vaihtoehtoiseen määritelmään käsitteelle. "Lopulta"-muotoilusta voidaan päätellä, että jonoon liitetty alkeisfiltteri on yhteydessä jonon suppenemiseen. Seuraava lause onkin ilmeinen:

Lause 3.17. *Jonoon liitetty alkeisfiltteri suppenee pisteeseen $a \in X$, jos ja vain jos vastaava jono suppenee pisteeseen $a \in X$.*

Todistus. Olkoon (x_n) jono avaruudessa X ja $x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger$ jonoon liitetty alkeisfiltteri.

Oletetaan ensin, että (x_n) suppenee pisteeseen $a \in X$. Tällöin määritelmän mukaisesti (x_n) on lopulta pisteen a jokaisessa ympäristössä, ja näinpä pisteen a kaikki ympäristöt ovat kokoelmassa $x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger = \{M \subset X \mid \text{jono } (x_n) \text{ on lopulta joukossa } M\}$. Näin ollen $x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger \to a$.

Oletetaan seuraavaksi, että $x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger$ suppenee pisteeseen $a \in X$. Tällöin pisteen a kaikki ympäristöt ovat kokoelmassa $x(\hat{\mathcal{F}})^\dagger$. Siten jono (x_n) on lopulta kaikissa pisteen a ympäristöissä eli $x_n \to a$. □

Edellisen lauseen mukaisesti jonoilla ja filttereillä on selkeä yhteys. Annetusta jonosta voidaan konstruoida filtteri (jonoon liitetty alkeisfiltteri), jonka suppenemiskäyttäytyminen on sama kuin alkuperäisellä jonolla. Vaikka siis filtterin määritelmä vaikuttaa abstraktilta, on käsite kuitenkin käyttökelpoinen myös yksinkertaisemmissa avaruuksissa, kuten luonnollisten lukujen joukossa.

3.4. Kompaktius filttereillä

Jätetään jonot hetkeksi sikseen ja palataan vielä filtterien käsittelyyn. Viimeisenä tutkitaan kolmatta tärkeää yhteyttä filtterien ja topologisten avaruuksien välillä: kompaktiutta. Tätä ennen tarvitaan kuitenkin vielä muutamaa filttereihin liittyvää tulosta sekä filtterikannan kosketuspisteen määritelmää.

Lemma 3.18. *Kaikilla filtterikannoilla on äärellisten leikkausten ominaisuus.*

Todistus. Filtterikannan määritelmän nojalla kahden filtterikantaan kuuluvan joukon leikkaus on epätyhjä. Haluttu tulos saadaan induktiolla. □

Lemma 3.19. *Jos avaruuden X kokoelmalla $\mathcal{A}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus, niin kokoelma $\mathcal{B} = \{\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \mid A_\alpha \in \mathcal{A}, I \text{ on äärellinen}\}$ on filtterikanta.*

[7]Katso määritelmä 1.2.

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus, ja $\mathcal{B} = \{\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \mid A_\alpha \in \mathcal{A}, I \text{ on äärellinen}\}$. Koska kokoelmalla $\mathcal{A}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus, on $\emptyset \notin \mathcal{B}$, ja lisäksi jos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, on $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Koska lisäksi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, voidaan määritelmän 3.6 merkinnöin valita $B_3 = B_1 \cap B_2$. Kokoelma $\mathcal{B}$ on siis filtterikanta. □

Määritelmä 3.20. Olkoon $\mathcal{B}$ filtterikanta avaruudessa X. Tällöin piste $a \in X$ on *filtterikannan $\mathcal{B}$ kosketuspiste*, jos kokoelman $\mathcal{B}$ jokainen joukko leikkaa jokaista pisteen a ympäristöä.

Filtterikannan kosketuspiste on siis käsitteenä samankaltainen kuin aiemmin esiin nousseet joukon ja verkon kosketuspisteet. Filtterikannan kosketuspiste on piste, joka on mielivaltaisen lähellä filtterikantaa.

Nyt voidaan vihdoin esittää tämän luvun päätulos.

Lause 3.21. *Avaruus X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella avaruuden X filtterikannalla on kosketuspiste.*

Todistus. Olkoon X avaruus.

Oletetaan ensin, että X on kompakti. Olkoon $\mathcal{B}$ filtterikanta avaruudessa X. Osoitetaan, että filtterikannalla $\mathcal{B}$ on kosketuspiste. Koska $\mathcal{B}$ on filtterikanta, on sillä äärellisten leikkausten ominaisuus lemman 3.18 nojalla. Näin ollen myös kokoelmalla $\mathcal{C} = \{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$, joka sisältää filtterikannan $\mathcal{B}$ joukkojen sulkeumat, on myös äärellisten leikkausten ominaisuus. Lisäksi kokoelman $\mathcal{C}$ joukot ovat suljettuja, joten lemman 2.19 nojalla $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$, erityisesti on olemassa piste $a \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$. Näin ollen kokoelman $\mathcal{B}$ jokainen joukko leikkaa jokaista pisteen a ympäristöä, joten a on filtterikannan $\mathcal{B}$ kosketuspiste.

Oletetaan seuraavaksi, että avaruuden X jokaisella filtterikannalla on kosketuspiste. Olkoon $\mathcal{S}$ äärellisten leikkausten ominaisuuden toteuttava kokoelma suljettuja joukkoja. Avaruuden X kompaktiuden osoittamiseksi riittää lemman 2.19 nojalla osoittaa, että kokoelman $\mathcal{S}$ joukkojen leikkaus on epätyhjä. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että kokoelman $\mathcal{B}_S = \{\cap_{\alpha \in I} S_\alpha \mid S_\alpha \in \mathcal{S}, I \text{ on äärellinen}\}$ joukkojen leikkaus on epätyhjä. Koska lemman 3.19 nojalla $\mathcal{B}_S$ on filtterikanta, on sillä oletuksen nojalla kosketuspiste a. Toisin sanoen jokainen kokoelman $\mathcal{B}_S$ joukko leikkaa pisteen a jokaista ympäristöä, eli $U \cap B \neq \emptyset$ kaikille pisteen a ympäristöille U ja joukoille $B \in \mathcal{B}_\mathcal{S}$. Näin ollen a on kaikkien joukkojen $B \in \mathcal{B}_S$ kosketuspiste. Koska joukot $B \in \mathcal{B}_S$ ovat äärellisinä leikkauksina suljetuista joukoista suljettuja, sisältävät ne kaikki kosketuspisteensä, erityisesti pisteen a. Näin ollen $\cap_{B \in \mathcal{B}_S} B \neq \emptyset$. □

Edellä on lyhyesti käyty läpi filtterien ominaisuuksista johtuvia tuloksia. Tähän tutkielmaan päätyneet tulokset ovat valikoituneet niin, että saataisiin paljolti samat tulokset kuin verkkojen tapauksessa. Filtterien hyödyllisyys ei kuitenkaan rajoitu vain näihin tuloksiin. Niiden avulla saadaan esimerkiksi kohtuullisen yksinkertaisesti todistus Tihonovin lauseelle: kompaktien avaruuksien mielivaltainen tulo on kompakti. Tavallisesti kyseisen lauseen todistus vaatii huomattavasti enemmän työtä. Kiinnostunut lukija voi perehtyä lauseen todistukseen filttereillä lähteestä [**1**] sivulta 88.

LUKU 4

Filtterien ja verkkojen yhteys

Verkkoihin ja filttereihin jonojen yleistyksinä tutustuttiin luvuissa 2 ja 3. Molempien avulla päästiin samoihin tuloksiin: niin kuin jonot metrisissä avaruuksissa, verkot ja filtterit määräävät yleisessä topologisessa avaruudessa avaruuden topologian, funktioiden jatkuvuuden sekä avaruuden kompaktiuden. Koska nämä molemmat ovat jonojen yleistyksiä ja niillä ollaan saatu esitettyä samat tulokset, on perusteltua pohtia, onko niillä jokin yhteys toisiinsa.

Vilkaisemalla määritelmiä 2.4 ja 3.3 voidaan vakuuttua siitä, että jonkinlainen yhteys tosiaan on olemassa. Suppeneminen määritellään sekä verkoille että filttereille hyvin samankaltaisesti. Lisäksi aiemmin luvussa 3.3 löydettiin ensimmäinen yhteys jonojen ja filtterien väliltä: annetusta jonosta voidaan konstruoida filtteri, jonka suppeneminen vastaa annetun jonon suppenemista. Koska verkko on käsitteenä yleistys jonosta, olisi hyvin luontevaa, että vastaavanlainen yhteys olisi myös verkkojen ja filtterien välillä.

Luvussa 3.3 havaittiin, että annetusta jonosta (x_n) voidaan konstruoida jonoon liitetty alkeisfiltteri. Tämä filtteri saatiin kuvaamalla luonnollisten lukujen Fréchet'n filtteriä kuvauksella x, ja näin muodostuneen filtterikannan virittämää filtteriä kutsutaan jonoon liitettyksi alkeisfiltteriksi. Luvussa todettiin, että edellinen havainto voidaan tiivistää seuraavasti: jonoon liitetty alkeisfiltteri on kokoelma $\{M \subset X \mid \text{ jono } (x_n) \text{ on lopulta joukossa } M\}$. Ilmenee, että vastaava konstruktio toimii myös, jos verkosta halutaan muodostaa filtteri.

Lause 4.1. *Jos D on suunnattu joukko ja $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on verkko avaruudessa X, niin kokoelma $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid (x_\alpha)_{\alpha\in D} \text{ on lopulta joukossa } A\}$ on filtteri avaruudessa X.*

Todistus. Olkoon X avaruus, $D \subset X$ suunnattu joukko ja $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid (x_\alpha)_{\alpha\in D} \text{ on lopulta joukossa } A\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{F}$ on filtteri.

Olkoon $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Tällöin $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on lopulta molemmissa joukoissa F_1 ja F_2. Toisin sanoen on olemassa $\beta_1, \beta_2 \in D$ siten, että kaikille $\alpha \geq \beta_1$ pätee $x_\alpha \in F_1$ ja kaikille $\alpha \geq \beta_2$ pätee $x_\alpha \in F_2$. Koska D on suunnattu joukko, on olemassa $\beta \in D$, jolle $\beta \geq \beta_1$ ja $\beta \geq \beta_2$. Siispä kaikille $\alpha \geq \beta$, on $x_\alpha \in F_1 \cap F_2$. Näin ollen $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on lopulta joukossa $F_1 \cap F_2$ ja siten $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Olkoon seuraavaksi $F \in \mathcal{F}$ ja $F \subset G \subset X$. Tällöin $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ on lopulta joukossa F. Koska $F \subset G$, on $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ lopulta myös joukossa G. Siispä $G \in \mathcal{F}$.

Lopuksi todetaan, että $\emptyset \neq \mathcal{F}$, sillä yksikään verkko ei voi olla lopulta joukossa $\emptyset$.

Koska määritelmän 3.1 ehdot (1) – (3) toteutuvat, on $\mathcal{F}$ filtteri avaruudessa X. $\square$

Edellisen lauseen mukaisesti annettu verkko on aina muunnettavissa filtteriksi. Tässä kohtaa on myös hyvä huomata, että annettu muunnos on siinä mielessä järkevä, että alkuperäisen verkon ja tästä saadun filtterin suppeneminen ovat tiukasti yhteydessä toisiinsa: alkuperäinen verkko suppenee, jos ja vain jos verkosta saatu filtteri suppenee. Toisin sanoen lauseen 3.17 verkkovastine on tosi. Tämän todistaminen on yksinkertaista: riittää korvata lauseen 3.17 todistuksessa jono (x_n) verkolla $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$.

Intuitiivisesti voisi ajatella, että vastaava muunnos onnistuisi myös toiseen suuntaan, eli annetusta filtteristä voidaan muodostaa verkko. Näin myös onkin. Verkkoa muodostettaessa tosin tulee eteen pieni ongelma: tulisi määritellä suunnattu joukko, jolla verkko on määritelty. Suunnatun joukon voi muodostaa monella eri tavalla, joten annetusta filtteristä voidaankin muodostaa useita erilaisia verkkoja. Kaikki näin muodostetuista verkoista eivät tosin välttämättä ole järkeviä. Jos filtteristä halutaan muodostaa verkko, on loogisesti järkevää vaatia, että näin muodostettu verkko suppenee täsmälleen silloin, kun alkuperäinen filtteri suppenee.

Annetaan seuraava lauseessa eräs konstruktio filtteristä verkoksi. Lauseen kohta (2) osoittaa konstruktion järkevyyden: muodostetusta verkosta saadaan alkuperäinen filtteri toistamalla lauseessa 4.1 esitettyä tapaa. Lisäksi filtteristä rakennetun verkon suppeneminen riippuu alkuperäisen filtterin suppenemisesta (ja toisinkin päin): alkuperäinen filtteri suppenee, jos ja vain jos siitä rakennettu verkko suppenee.

LAUSE 4.2. *Olkoot $\mathcal{F}$ filtteri avaruudessa X ja $D = \{(x,F) \mid x \in F, F \in \mathcal{F}\}$. Suunnataan D määrittelemällä $(x_1,F_1) \geq (x_2,F_2)$, kun $F_1 \subset F_2$. Olkoon vielä $f\colon D \to X$ funktio, jolle $f(x,F) = x$ kaikille $(x,F) \in D$. Tällöin*

(1) *$(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on verkko avaruudessa X ja*
(2) *$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid (f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa $A\}$.*

TODISTUS. Olkoot $\mathcal{F}$ filtteri avaruudessa X ja $D = \{(x,F) \mid x \in F, F \in \mathcal{F}\}$. Määrätään joukkoon D suunta asettamalla kaikille $(x_1,F_1),(x_2,F_2) \in D$ relaatio $\geq$ siten, että $(x_1,F_1) \geq (x_2,F_2)$, kun $F_1 \subset F_2$. Olkoon $f\colon D \to X$ funktio, jolle $f(x,F) = x$ kaikille $(x,F) \in D$.

(1) Esimerkin 2.2 kohdan (2) nojalla D on suunnattu joukko. Siispä $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on verkko avaruudessa X.
(2) Väite on mielekäs, sillä lauseen 4.1 nojalla kokoelma $\{A \subset X \mid (f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa $A\}$ on ainakin filtteri. Todistetaan väite joukkoinkluusion avulla.

Olkoon ensin $F \in \mathcal{F}$. Osoitetaan, että $F \in \{A \mid (f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa $A \subset X\}$. Olkoon $x \in F$. Tällöin $\beta = (x,F) \in D$. Nyt kaikille $\alpha = (y,G) \in D$, joille $\alpha \geq \beta$, pätee $G \subset F$. Siispä $f_\alpha = f(y,G) = y \in G \subset F$, joten verkko $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa F.

Olkoon sitten $G \in \{A \mid (f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa $A \subset X\}$. Tällöin $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa G, eli on olemassa $\beta = (x,F) \in D$ siten, että kaikille $\alpha = (x_1,F_1) \in D$, joille $\alpha \geq \beta$ eli $F_1 \subset F$ pätee $f_\alpha = f(x_1,F_1) = x_1 \in G$. Kaikille pisteille $y \in F$ pätee $\alpha_y = (y,F) \geq (x,F) = \beta$, joten $f_{\alpha_y} = y \in G$ kaikilla $y \in F$. Näin ollen $F \subset G$. Koska $\mathcal{F}$ on filtteri, $F \in \mathcal{F}$ ja $F \subset G$, niin myös $G \in \mathcal{F}$. $\square$

LAUSE 4.3. *Olkoot $\mathcal{F}$ filtteri avaruudessa X ja $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ lauseen 4.2 mukaisesti filtteristä $\mathcal{F}$ rakennettu verkko. Tällöin $\mathcal{F}$ suppenee pisteeseen $a \in X$, jos ja vain jos $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ suppenee pisteeseen $a \in X$.*

TODISTUS. Olkoot X avaruus sekä $\mathcal{F}$, D ja $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ määritelty samoin kuin lauseessa 4.2.

Oletetaan ensin, että $\mathcal{F} \to a \in X$. Olkoon B pisteen a ympäristö. Lauseen 4.2 kohdan (2) mukaisesti $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid (f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa $A\}$. Koska $\mathcal{F} \to a \in X$, on $B \in \mathcal{F}$. Siispä $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa B. Täten $(f(x,F))_{(x,F)\in D} \to a$.

Oletetaan seuraavaksi, että $(f(x,F))_{(x,F)\in D} \to a \in X$. Olkoon B pisteen a ympäristö. Tällöin $(f(x,F))_{(x,F)\in D}$ on lopulta joukossa B, ja siispä $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: *Elements of mathematics: General topology. [Pt 1], Chapters 1-4.* Addison-Wesley, 1966. (Uusimmat laitokset: Springer)

[2] Sze-Tsen Hu: *Elements of general topology.* Holden-Day, toinen painos, 1965.

[3] John L. Kelley: *General topology.* Van Norstrand, 1955; Graduate texts in mathematics 27, Springer, 1975.

[4] Michael Reed ja Barry Simon: *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis.* Academic Press, 1972.

[5] Lynne A. Steen ja J. Arthur Seebach: *Counterexamples in Topology.* Holt, Rinehart and Winston, toinen painos, 1970.

[6] Kalevi Suominen ja Klaus Vala: *Topologia.* Gaudeamus, 2. korjattu painos, 1977.