Lebesguen integraali - Rieszin määritelmä

Taru Lehtonen

Matematiikan pro gradu-tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2016

Tiivistelmä

Jyväskylän Yliopisto
Lehtonen, Taru Pauliina: Lebesguen integraali - Rieszin määritelmä
Pro gradu-tutkielma, 44 sivua
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Maaliskuu 2016

Tutkielmassa tarkastellaan ensin Riemannin integraalia ja sen ongelmia rajankäyntitilanteissa. Suurin ongelma rajankäynnissä on, että Riemann-integraalien jonon raja-arvo ei välttämättä aina ole sama kuin rajafunktion Riemann-integraali. Lisäksi todetaan, että Riemann-integroituvien funktioiden joukko on melko pieni. Seuraavana esitellään porrasfunktioiden integraali ominaisuuksineen. Tämän jälkeen perehdytään Riemann-integroituvien funktioiden luokkaa suurempaan yläfunktioiden luokkaan L^+ ja lisäksi osoitetaan, että Riemann-integroituvat funktiot kuuluvat yläfunktioiden luokkaan.

Yläfunktioiden luokan esittelyn jälkeen määritellään Lebesguen integraali ja perehdytään sen ominaisuuksiin. Lebesguen integraali määritellään Rieszin määritelmän mukaan, sillä se on tiivistetympi, suoraviivaisempi ja johtaa nopeammin asian ytimeen kuin Lebesguen alkuperäinen määritelmä. Lisäksi laajennetaan yläfunktioiden luokka Lebesgue-integroituvien funktioiden luokkaan L ja osoitetaan tämän olevan selvästi suurempi kuin yläfunktioiden luokka.

Viimeisessä kappaleessa perehdytään Lebesguen integraalin rajankäyntiin monotonisen konvergenssin lauseen ja dominoidun konvergenssin lauseen avulla. Dominoidun konvergenssin lause on yksi Lebesguen integraalin tärkeimmistä tuloksista. Tiivistetysti konvergenssilauseiden sanoma on, että integroinnin ja rajankäynnin järjestystä voidaan vaihtaa.

Sisältö

1 Johdanto

Saksalainen matemaatikko **Bernard Riemann** (1826-1866) havaitsi vuonna 1854 tutkimuksessaan, että *Cauchyn integraalin* määritelmän jatkuvuusehto voidaan korvata sellaisella hieman heikommalla vaatimuksella, että kaikkien *Cauchyn summien* tulee supeta yksikäsitteisesti raja-arvoon. Tässä tutkielmassa *Riemann-integraalin* määritelmä esitetään kuitenkin hieman nykyaikaisemmassa muodossa *ylä- ja alasummien* avulla, tällaisessa muodossa sen ensikertaa julkaisi vuonna 1875 ranskalainen matemaatikko **Gaston Darboux** (1842-1917). Vuonna 1902 ranskalainen matemaatikko **Henri Lebesgue** (1875-1941) esitti täydentävän luonnehdinnan Riemann-integroituville funktioille. Tämä *Lebesguen ehtona* tunnettu lause kuuluu seuraavasti:
Välillä $[a, b]$ *määritelty rajoitettu reaaliarvoinen funktio* f *on Riemann-integroituva jos ja vain jos funktio* f *on jatkuva melkein kaikkialla.*

Riemannin integraalin määritelmä osoittautui kuitenkin yleisemmin tarkasteltuna riittämättömäksi. *Riemannin integraalin* puutteet voi karkeasti tiivistää kahteen pääkohtaan. Ensinnäkin Riemannin integraalin määritelmä soveltuu vain harvoin käyttöön, toisin sanoen Riemann-integroituvien funktioiden luokka on pieni. Toinen hieman haasteellisempi ongelma havaitaan rajankäynnissä. Nimittäin jos funktiot $f_1, f_2, \ldots$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ välillä $[a, b]$ niin yhtälö

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

ei välttämättä pidä paikkaansa.

Vuonna 1902 väitöskirjassaan **Henri Lebesgue** esitti oman versionsa integraalista; *Lebesguen integraalin.* Suurin ero Lebesguen integraalilla verrattuna aiempiin integrointimenetelmiin on, että Lebesguen integraali tarkastelee integroituvuutta maalijoukon perusteella, kun taas aiemmissa integroituvuutta on tarkasteltu lähtöjoukon perusteella. Lebesguen integraali nojaa vahvasti **Lebesguen** kehittämään käsitteeseen *Lebesguen mitta*, mikä loikin pohjaa uudelle matematiikan osa-alueelle, *mittateorialle.* Unkarilainen matemaatikko **Frigyes Riesz** (1880-1956) esitti vuonna 1920 oman, tässä tutkielmassakin käytetyn, version Lebesguen integraalista. **Rieszin** menetelmän käytön perustana on, että se on tiivistetympi, suoraviivaisempi ja johtaa nopeammin asian ytimeen, kuin **Lebesguen** esittämä muoto. Lisäksi **Rieszin** menetelmässä ei tarvitse vedota mittateoriaan, vaan se vaatii vain perustiedot pistejoukoista.

Lebesguen integraalin rajankäyntiä tarkastellaan konvergenssilauseiden avulla. *Monotonisen konvergenssin lauseella* on selviä yhteneväisyyksiä *yläfunktioiden luokan* L^+ integraalin määritelmän kanssa ja voidaankin olettaa, että määritelmä on kehitetty kyseisen lauseen avulla. Monotonisen konvergenssin lauseen todisti vuonna 1906 italialainen matemaatikko **Beppo Levi** (1875-1961) ja siksi lause tunnetaan myös *Beppo Levin lauseena*. Monotonisen konvergenssin lauseen vaatimus jonon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ monotonisesta kasvamisesta osoittautuu välillä todella hankalaksi ja siksi Lebesguen integraalin tärkeimpänä ominaisuutena pidetäänkin **Lebesguen** vuonna 1908 todistamaa *dominoidun konvergenssin lausetta*. Tässä lauseessa funktiojonolla ei ole monotonisen kasvamisen vaatimusta, vaan ei-monotonisen jonon funktioiden on oltava rajoitettuja integroituvalla funktiolla melkein kaikkialla. Tätä lausetta kutsutaan toisinaan myös *Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseeksi*. [4]

2 Riemannin integraali

Tässä luvussa kerrataan ensin tarvittavia määritelmiä ja merkintöjä, jotta voidaan päätyä *Riemannin integraalin* määritelmään. Tämän jälkeen käydään läpi tutkielmassa tarvittavia Riemannin integraalin ominaisuuksia ja lopuksi tarkastellaan Riemannin integraaliin liittyviä epäkohtia. Kappaleen kahdessa ensimmäisessä osiossa lähteenä käytetään pääasiassa lähdettä [1] ja kahdessa jälkimmäisessä lähdettä [4].

2.1 Ylä- ja alaintegraali

Määritellään ensin välin *jako* sekä välin jakoa vastaavat *ylä-* ja *alasumma*, jonka jälkeen kerrataan *ylä-* ja *alaintegraalin* määritelmät. Näiden määritelmien oletetaan olevan lukijalle tuttuja, mutta merkinnät vaihtelevat usein kirjoittajan mukaan, joten määritelmät ovat lähinnä selvennys tutkielmassa käytettävistä merkinnöistä.

Määritelmä 2.1. Olkoon $[a, b]$ suljettu ja rajoitettu väli reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Välin $[a, b]$ *jaoksi* sanotaan äärellistä ja järjestettyä joukkoa

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\},$$

missä pisteet $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ovat välin $[a, b]$ *jakopisteitä*. Tällöin jaon P *normi* on

$$|P| = \sup\{x_j - x_{j-1} : 1 \leq j \leq n\}.$$

Määritelmä 2.2. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ määritelty ja rajoitettu suljetulla välillä $[a, b]$ ja olkoon $P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ välin $[a, b]$ jako. Nyt kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$ on

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{ja} \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Tällöin funktion f jakoa P vastaava *yläsumma* on

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Vastaavasti funktion f jakoa P vastaava *alasumma* on

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Huomautus 2.3. Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja P välin $[a,b]$ jako. Tällöin funktion f jakoa P vastaavalle *ylä-* ja *alasummalle* pätee

$$U(f,P) \geq L(f,P).$$

Määritelmä 2.4. Olkoon $\mathcal{P}$ kokoelma suljetun välin $[a,b]$ jakoja. Rajoitetun funktion f *yläintegraali* yli välin $[a,b]$ on

$$\textit{ylä-}\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Vastaavasti määritellään funktion f *alaintegraali* yli välin $[a,b]$

$$\textit{ala-}\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Huomautus 2.5. Suljetun välin $[a,b]$ rajoitetulle funktiolle f pätee aina *ylä-*$\int_a^b f(x)\,dx \geq$ *ala-*$\int_a^b f(x)\,dx$.

2.2 Riemannin integraali

Seuraavaksi määritellään *Riemannin integraali* ja joitakin tutkielmassa tarvittavia Riemannin integraalin ominaisuuksi. Näiden ominaisuuksien oletetaan olevan lukijalle tuttuja **Analyysin** kursseista, joten todistukset sivuutetaan.

Määritelmä 2.6 (*Riemannin integraali*)**.** Välillä $[a,b]$ määritelty rajoitettu funktio f on *Riemann-integroituva*, jos funktion f *ylä-* ja *alaintegraalit* ovat yhtäsuuret. Riemannin integraalista käytetään merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{tai} \qquad \int_a^b f.$$

Toisin sanoen jos

$$\textit{ylä-}\int_a^b f(x)\,dx = \textit{ala-}\int_a^b f(x)\,dx,$$

niin funktion f *Riemann-integraali* yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f = \textit{ylä-}\int_a^b f(x)\,dx = \textit{ala-}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lisäksi määritellään

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Lemma 2.7. Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja olkoon c jokin piste avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin funktio f on *Riemann-integroituva* välillä $[a,b]$ jos ja vain jos funktio f on *Riemann-integroituva* väleillä $[a,c]$ ja [c,b]. Jos nämä ehdot toteutuvat, niin tällöin funktion f Riemann-integraali yli välin $[a,b]$ on yhtäsuuri kuin summa funktion f Riemann-integraaleista yli välien $[a,c]$ ja $[c,b]$, toisin sanoen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Katso lähteestä [1] lause 7.4.1.

□

Lause 2.8 (*Analyysin peruslause*)**.**

(1) Olkoot funktiot $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja olkoon f *Riemann-integroituva* välillä $[a,b]$. Jos kaikilla välin $[a,b]$ pisteillä x funktion F *derivaatta* $F'(x)$ on yhtä suurta kuin funktio $f(x)$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(2) Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integroituva* välillä [a,b] ja olkoon

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy,$$

kaikilla välin $[a,b]$ pisteillä x. Tällöin funktio F on *jatkuva* välillä [a,b]. Mikäli funktio f on *jatkuva* jossakin välin $[a,b]$ pisteessä c, niin funktio F on *derivoituva* pisteessä c ja funktion F *derivaatta* pisteessä c on yhtä suuri kuin funktion f arvo samassa pisteessä, toisin sanoen $F'(c) = f(c)$.

Todistus. Katso lähteestä [1] lause 7.5.1.

□

2.3 Lebesguen ehto

Määritellään aluksi *nollamittaisuus*. Nollamittaisuutta tarvitaan muotoiltaessa *Lebesguen ehtoa Riemann-integroituvuudelle*. Tämän jälkeen todistetaan, että nollamittaisten joukkojen yhdiste on nollamittainen. Seuraavaksi määritellään funktion *yläraja-arvo*, *alaraja-arvo* ja *heilahtelu* tietyssä pisteessä. Lisäksi todistetaan kaksi heilahteluun liittyvää lemmaa, joista jälkimmäinen tiivistetysti sanoo, että kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva. Näitä lemmoja tarvitaan *Lebesguen ehdon* todistamiseen. Lopuksi todistetaan *Lebesguen ehto Riemann-integroituvuudelle*.

Määritelmä 2.9. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *nollamittainen*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa jono rajoitettuja avoimia välejä $I_k \subset \mathbb{R}$, kun $k \in \mathbb{N}$, jotka peittävät joukon A ja joiden *välinpituuksien* $|I_k|$ *summa* on pienempi tai yhtäsuuri kuin ε. Toisin sanoen jos

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Lemma 2.10. *Nollamittaisten joukkojen numeroituva yhdiste* on *nollamittainen.*

Todistus. Olkoon yhdiste $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, missä kaikki joukot A_n ovat nollamittaisia. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska joukko A_n on nollamittainen kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, on olemassa sellaiset rajoitetut avoimet välit I_{nk}, missä $k = 1, 2, \ldots$, että

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Tällöin

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk} = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} I_{nk} \qquad \text{ja}$$

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} |I_{nk}| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Siis joukko A on myös nollamittainen.

□

Määritelmä 2.11. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja olkoon piste $c \in [a, b]$. Tällöin funktion f *yläraja-arvo* on

$$\limsup_{x \to c} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup\{f(x) : [a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]\}$$

ja *alaraja-arvo* on

$$\liminf_{x \to c} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf\{f(x) : [a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]\}.$$

Lisäksi funktion f *heilahtelu* pisteessä c on

$$\omega(f; c) = \limsup_{x \to c} f(x) - \liminf_{x \to c} f(x).$$

Tällöin on aina $\omega(f; c) \geq 0$.

Lemma 2.12. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä $x \in [a, b]$, jos ja vain jos $\omega(f; x) = 0$.

Todistus. Oletetaan, että funktio f on jatkuva pistessä x. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on sellainen $\delta > 0$, että kaikille $y \in [a, b]$, joille $|x - y| < \delta$, on

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Näin ollen $\sup f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + f(x)$ ja $\inf f(x) > -\frac{\varepsilon}{2} + f(x)$, missä pienin yläraja ja suurin alaraja ovat väliltä $[a, b] \cap [x - \delta, x + \delta]$. Tällöin $0 \leq \omega(f; x) < \varepsilon$ ja koska ε on mielivaltainen, niin $\omega(f; x) = 0$.

Oletetaan, että $\omega(f; x) = 0$. Kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $\delta > 0$, että $\sup f(z) - \inf f(z) < \varepsilon$, missä pienin yläraja ja suurin alaraja ovat väliltä $[a, b] \cap [x - \delta, x + \delta]$. Nyt kun $y \in [x - \delta, x + \delta]$, niin $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Joten funktio f on jatkuva pisteessä x.

$\square$

Lemma 2.13. Jos kaikilla suljetun välin $[a, b]$ pisteillä c pätee

$$\omega(f; c) = \limsup_{x \to c} f(x) - \liminf_{x \to c} f(x) < \varepsilon,$$

niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla välin $[a, b]$ pisteillä x ja y, joille $|x - y| < \delta$ on

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Todistus. Kaikilla $c \in [a,b]$ on olemassa sellainen $\delta_c > 0$, että

$$\sup f(x) - \inf f(x) < \varepsilon,$$

missä pienin yläraja ja suurin alaraja ovat välilllä $[a,b] \cap [c - 2\delta_c, c + 2\delta_c]$. Siis, jos $x, y \in [a,b] \cap [c - 2\delta_c, c + 2\delta_c]$, niin

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Koska väli $[a,b]$ on kompakti, se voidaan peittää äärellisellä määrällä avoimia välejä $]c_k - \delta_{c_k}, c_k + \delta_{c_k}[$, missä $k = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Jos nyt $x, y \in [a,b]$ ovat sellaiset, että $|x - y| < \delta$ ja $x \in]c_k - \delta_{c_k}, c_k + \delta_{c_k}[$, niin $y \in]c_k - 2\delta_{c_k}, c_k + 2\delta_{c_k}[$. Tällöin epäyhtälöstä (1) seuraa, että $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. □

Lause 2.14 (*Lebesguen ehto*)**.** Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja olkoon joukko D funktion f epäjatkuvuuskohtien joukko välillä $[a,b]$. Funktio f on *Riemann-integroituva* jos ja vain jos joukko D on *nollamittainen.*

Todistus. Nyt siis joukko D on funktion f epäjatkuvuuskohtien joukko välillä $[a,b]$ eli lemman 2.12 nojalla voidaan kirjoittaa, että $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, missä

$$D_m = \left\{ x \in [a,b] : \omega(f;x) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

ja $\omega(f;x) = \limsup_{c \to x} f(c) - \liminf_{c \to x} f(c)$.

Osoitetaan, että joukko D_m on nollamittainen kaikilla luonnollisilla luvuilla m, jos funktio f on Riemann-integroituva. Koska funktio f on Riemann-integroituva, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen välin $[a,b]$ jako $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, että

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Tällöin avoimet välit $]x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \ldots,]x_{n-1}, x_n[$ voidaan jakaa kahteen ryhmään, niihin jotka leikkaavat joukkoa D_m ja niihin, jotka eivät leikkaa joukkoa D_m. Käytetään näistä ryhmistä jatkossa sellaisia nimityksiä, että ryhmä 1 ovat ne avoimet välit, jotka leikkaavat joukkoa D_m ja ryhmä 2 ovat välit, jotka eivät leikkaa joukkoa D_m. Tällöin, kun $M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ ja $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$ niin

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum\nolimits_1 (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\quad + \sum\nolimits_2 (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{m}, \end{aligned}$$

missä summa $\sum_1$ tarkoittaa ryhmään 1 kuuluvien välien pituuksien summaamista ja summa $\sum_2$ tarkoittaa vastaavasti ryhmään 2 kuuluvien välien pituuksien summaamista. Ryhmän 1 väleille pätee $M_j - m_j \geq \frac{1}{m}$, joten

$$\frac{1}{m}\sum\nolimits_1 (x_j - x_{j-1}) \leq \sum\nolimits_1 (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Niinpä ryhmän 1 välinpituuksien summa on pienempää kuin ε, toisin sanoen $\sum_1 (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon$. Toisaalta taas ryhmän 1 avoimet välit peittävät joukon D_m. Tällöin joukko D_m on nollamittainen ja edelleen lemmasta 2.10 seuraa, että yhdiste D on myös nollamittainen.

Oletetaan, että joukko D on nollamittainen. Tällöin myös jokainen joukko D_m, missä m on luonnollinen luku, on nollamittainen. Osoitetaan, että joukko D_m on kompakti. Koska joukko D_m on kompaktin joukon $[a,b]$ osajoukko, riittää näyttää, että joukko D_m on suljettu välillä $[a,b]$. Yhtäpitävästi riittää näyttää, että joukon D_m komplementti $[a,b]\backslash D_m$ on avoin välillä [a,b]. Olkoon $t \in [a,b]\backslash D_m$. Tällöin joukon D_m määritelmän perusteella

$$\omega(f;t) = \limsup_{x\to t} f(x) - \liminf_{x\to t} f(x) < \frac{1}{m}.$$

Ylä- ja alaraja-arvojen määritelmien perusteella, kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, että jos $z \in [a,b] \cap]t - \delta_1, t + \delta_1[$, niin

$$f(z) < \limsup_{x\to t} f(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ja jos $z \in [a,b] \cap]t - \delta_2, t + \delta_2[$ niin

$$f(z) > \liminf_{x\to t} f(x) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon nyt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ja $z \in [a,b] \cap]t - \delta, t + \delta[$. Tällöin

$$\liminf_{x\to t} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(z) < \limsup_{x\to t} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Näin ollen jokaiselle $y \in [a,b] \cap]t-\delta, t+\delta[$ on

$$\liminf_{x\to t} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le \limsup_{z\to y} f(z) \le \limsup_{x\to t} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\liminf_{x\to t} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le \liminf_{z\to y} f(z) \le \limsup_{x\to t} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siispä, jos $y \in [a,b] \cap]t-\delta, t+\delta[$ niin

$$\omega(f;y) = \limsup_{z\to y} f(z) - \liminf_{z\to y} f(z) \le \omega(f;t) + \varepsilon.$$

Olkoon nyt $\varepsilon < \frac{1}{m} - \omega(f;t)$. Tällöin $\omega(f;y) < \frac{1}{m}$ ja siten $y \in [a,b] \setminus D_m$. Siispä $[a,b] \setminus D_m$ on avoin.

Koska joukko D_m on kompakti ja nollamittainen, niin on olemassa sellainen välin $[a,b]$ ositus $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, että $\sum_1 (x_j - x_{j-1}) < \frac{1}{m}$, missä $\sum_1$ on kuten edellä. Olkoot ryhmät 1 ja 2 joukolle D_m kuten edellä ja olkoon joukko K ryhmän 2 avoimien välien yhdiste. Tällöin jos piste x kuuluu yhdisteeseen K, niin $\omega(f;x) < \frac{1}{m}$. Nyt lemman 2.13 perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos pisteet x ja y kuuluvat joukkoon K ja $|x-y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{m}$. Olkoon välin $[a,b]$ osituksen P hienonnus ositus $P' = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_k = b\}$, jonka normi $|P'|$ on pienempi kuin δ. Tällöin

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &= \sum\nolimits_1 (M_j - m_j)(y_j - y_{j-1}) + \sum\nolimits_2 (M_j - m_j)(y_j - y_{j-1}) \\ &< 2M \sum\nolimits_1 (x_j - x_{j-1}) + \frac{b-a}{m} \\ &< \frac{2M + b - a}{m}, \end{aligned}$$

missä $\sum_1$ ja $\sum_2$ ovat kuten edellä ja M on suurempi itseisarvoista $|M_j|$ ja $|m_j|$ summassa $\sum_1$. Koska tämä on totta kaikilla $m \in \mathbb{N}$, niin funktio f on Riemann-integroituva.

□

2.4 Riemannin integraalin ongelmat

Seuraavaksi tarkastellaan joitain Riemannin integraaliin liittyviä ongelmatilanteita. Aluksi todetaan, että Riemann-integroituvien funktioiden joukko on kohtalaisen pieni. Tätä ilmennetään *Dirichlet-funktion* avulla. Riemann-integroituvia funktioita tarkasteltaessa ilmenee myös rajankäyntiongelmia. Jonolle $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ Riemann-integroituvia funktioita ei välttämättä aina ole totta, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Rajankäyntiongemia havainnollistetaan neljän esimerkin avulla. Ensimmäisen esimerkin avulla todetaan, että Riemann-integraalien jonon raja-arvo ei välttämättä aina ole sama kuin rajafunktion Riemann-integraali. Toisessa esimerkissä havaitaan, että rajafunktio $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ei ole Riemann-integroituva, vaikka funktio f_n on kaikilla arvoilla n. Viimeisissä rajankäyntiongelmiin liittyvissä esimerkeissä huomataan, että Riemann-integraalien jonolla $(\int_a^b f_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ ei ole raja-arvoa. Lopuksi tarkastellaan ongelmia *analyysin peruslauseessa* ja löydetään funktio, joka on rajoitettu, mutta ei Riemann-integroituva.

Esimerkki 2.15. Olkoon funktio $g(x)$ *Dirichlet-funktio*; $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Näytetään että, Dirichlet-funktio ei ole Riemann-integroituva.
Olkoon $P = \{0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = 1\}$ välin $[0,1]$ jako. Nyt kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$ on

$$m_k = \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0$$

ja

$$M_k = \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1.$$

Tällöin funktion g jakoa P vastaava yläsumma on

$$U(g,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

ja alasumma on

$$L(g,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

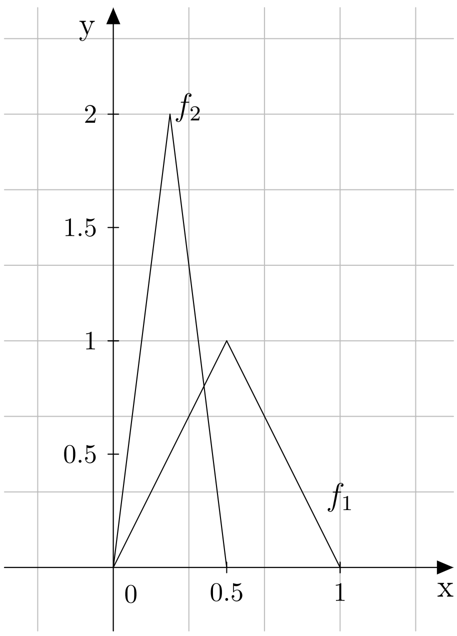
Joten funktion g yläintegraali yli välin $[0,1]$ on 1 ja alaintegraali on 0. Koska funktion g ylä- ja alaintegraalit ovat erisuuret, funktio g ei ole Riemann-integroituva.

Funktion g integroitumattomuus voidaan todistaa myös *Lebesguen ehdon* (lause 2.14) avulla, sillä funktio g on epäjatkuva kaikilla $x \in [0,1]$. Myöhemmin huomataan, että vaikka *Dirichlet-funktio* ei ole Riemann-integroituva on se kuitenkin *Lebesgue-integroituva* ja Lebesgue-integroituvien funktioiden joukko on siis suurempi kuin Riemann-integroituvien funktioiden joukko.

Seuraavat neljä esimerkkiä ilmentävät Riemannin integraalin rajankäyntiongelmia:

Esimerkki 2.16. Olkoon $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, kun $n = 1, 2, \dots$ ja

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{, kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{, kun } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{, kun } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Kuvassa funktio f_n, kun $n = 1, 2$.

Funktioiden f_n Riemann-integraalien jonon raja-arvo ei ole sama kuin rajafunktion Riemann-integraali, toisin sanoen

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Näytetään, että funktiot f_n lähestyvät nollaa kaikilla välin $[0,1]$ pisteillä x. Kun $x=0$, niin $f_n(0)=0$ kaikilla arvoilla n. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0.$$

Olkoon nyt $0<x\leq 1$ ja $\varepsilon>0$. Kun $x\geq \frac{1}{n}$, niin $f_n(0)=0$ kaikilla arvoilla n. Kun valitaan sellainen luonnollinen luku N, että $N\geq \frac{1}{x}$, niin

$$|f_n(x)-0|=0<\varepsilon$$

aina, kun $n\geq N$. Tällöin kaikilla välin $[0,1]$ pisteillä x funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti nollaa. Siis

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

kaikilla $x\in[0,1]$ ja tällöin

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=0.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2n}} 2n^2x\,dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n-2n^2x\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\,dx\\
&= \Big/_{0}^{\frac{1}{2n}} n^2x^2+\Big/_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}\left(2nx-n^2x^2\right)\\
&= n^2\cdot\frac{1}{4n^2}+2n\cdot\frac{1}{n}-n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(2n\cdot\frac{1}{2n}-n^2\cdot\frac{1}{4n^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}+2-1-1+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

jolloin

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

toisin sanoen funktioiden f_n integraalien jonon raja-arvo ei ole sama kuin rajafunktion integraali.

Esimerkki 2.17. Olkoot $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ välin $[a, b]$ rationaaliluvut ja olkoon

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x = r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{, muulloin.} \end{cases}$$

Funktion f_n epäjatkuvuuspisteiden joukko $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ on nollamittainen, joten funktio $f_n(x)$ on Riemann-integroituva *Lebesguen ehdon* (lause 2.14) nojalla ja $\int_a^b f_n(x)\,dx = 0$.
Toisaalta funktio

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

on *Dirichlet-funktio* ja esimerkin 2.15 perusteella funktion yläintegraali on 1 ja alaintegraali on 0. Koska yläintegraali on erisuuri kuin alaintegraali, niin funktio f ei ole Riemann-integroituva.

Esimerkki 2.18. Olkoon funktio $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, kun $n = 1, 2, \ldots$ ja

$$f_n(x) = \begin{cases} n\frac{1}{b-a} & \text{, kun } x \in [a, b] \\ 0 & \text{, muulloin.} \end{cases}$$

Nyt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on siis jono Riemann-integroituvia funktioita. Kuitenkin

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b n\frac{1}{b-a} = n\frac{1}{b-a}(b-a) = n$$

ja tällöin

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \infty,$$

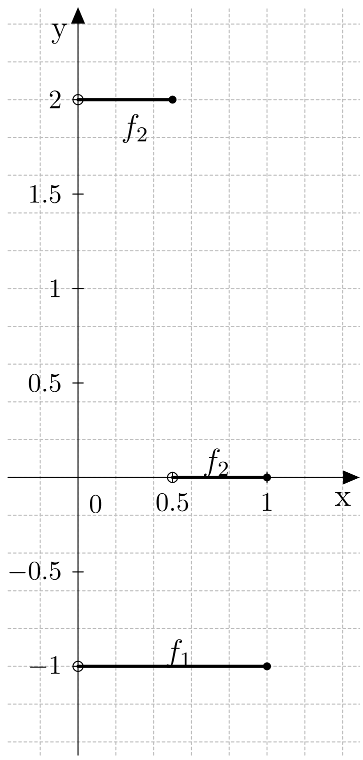
toisin sanoen jono $(\int_a^b f_n)_{n=1}^{\infty}$ hajaantuu. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

ei ole voimassa.

Esimerkki 2.19. Olkoon funktio $f_n : [0,1] \to [0,\infty[$, kun $n = 1, 2, \ldots$ ja

$$f_n(x) = (-1)^n n \chi_{]0,\frac{1}{n}]}(x).$$



Kuvassa funktio f_n, kun $n = 1, 2$.

Kun n lähestyy ääretöntä, niin funktion arvo $f_n(x)$ lähestyy nollaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 (-1)^n n \chi_{]0,\frac{1}{n}]}(x)\,dx \\ &= (-1)^n.\end{aligned}$$

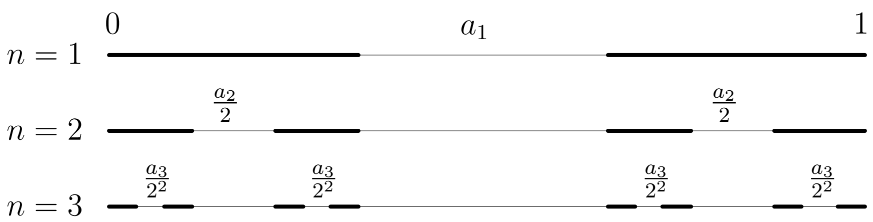
Jonolla $(\int_0^1 f_n)_{n=1}^{\infty}$ ei siis ole raja-arvoa ja yhtälö

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

ei ole totta.

Osion viimeisessä esimerkissä esitetään eräs *Riemannin integraalin* ongelmista *analyysin peruslauseessa*. Ensin kuitenkin määritellään *yleinen Cantorin joukko* E.

Määritelmä 2.20 (*Yleinen Cantorin joukko*)**.** Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen jono positiivisia reaalilukuja, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \varepsilon < 1$. Poistetaan välin $[0, 1]$ keskeltä termin a_1 mittainen avoin väli, jolloin saadaan kaksi suljettua väliä. Tämän jälkeen poistetaan näiden kahden suljetun välin keskeltä termin $\frac{a_2}{2}$ pituiset avoimet välit, jolloin saadaan 2^2 suljettua väliä. Nyt kaikkien 2^2 suljetun välin keskeltä poistetaan termin $\frac{a_3}{2^2}$ pituiset avoimet välit, jolloin saadaan 2^3 suljettua väliä. Näin jatketaan, kunnes on 2^{n-1} suljettua väliä, joiden jokaisen välin keskeltä poistetaan termin $\frac{a_n}{2^{n-1}}$ pituiset avoimet välit. Tällöin saadaan suljettu joukko $E = \cap_{i=1}^{\infty} E_i$, missä E_i ovat vaiheen i suljetut välit. Joukko E ei siis sisällä yhtään avointa väliä. Tätä joukkoa E kutsutaan *yleiseksi Cantorin joukoksi.*



Kuvassa näkyvät kolme ensimmäistä vaihetta avoimien välien poistamisesta eli tilanteet, kun $n = 1, 2, 3$.

Yleinen Cantorin joukko E ei voi olla *nollamittainen*, sillä poistettujen välien yhteenlaskettu pituus on

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{a_i}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \varepsilon < 1.$$

Toisin sanoen väli [0,1] olisi peitetty numeroituvalla määrällä välejä, joiden yhteispituus on pienempi kuin 1, mikä ei voi pitää paikkaansa.

Esimerkki 2.21. Olkoon E *yleinen Cantorin joukko* välillä $[0,1]$, joka ei ole nollamittainen. Oletetaan, että avoin väli $]a,b[$ on poistettu väliltä $[0,1]$ muodostettaessa joukkoa E. Määritellään funktio f_a seuraavasti

$$f_a(x) = (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a}.$$

Derivoimalla funktio f_a saadaan

$$f_a'(x) = 2(x-a)\sin\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a}.$$

Tällöin $f_a'(x) = 0$ äärettömän monessa pisteessä $x \in]a,b[$. Olkoon sellainen luku c, että

$$a + c = \sup\left\{x : a < x \le \frac{a+b}{2}, f_a'(x) = 0\right\}.$$

Määritellään sellainen funktio $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, että $F(x) = 0$ jokaisessa joukon E pisteessä ja jokaisella avoimella välillä $]a,b[$, joka on poistettu väliltä $[0,1]$ muodostettaessa joukkoa E, on

$$F(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{, kun } a < x \le a+c \\ f_a(a+c) & \text{, kun } a+c \le x \le b-c \\ -f_b(x) & \text{, kun } b-c \le x \le b. \end{cases}$$

Tällöin funktio F on jatkuva ja derivoituva kaikkialla välillä $[a,b]$. Nyt derivaatta F' on rajoitettu, sillä $|f_a'(x)| \le 3$ ja näin ollen $|F'(x)| \le 3$. Derivaatan F' määrittelyn ja tunnetun raja-arvon $\lim_{y\to 0} y \sin\frac{1}{y} = 0$ perusteella $F'(x) = 0$, kun $x \in E$. Jos $x \in E$, niin piste x on joukon $[a,b]\backslash E$ kasautumispiste. Kasautumispisteen ja yleisen Cantorin joukon määritelmien perusteella jokaisella joukon $[a,b]\backslash E$ kasautumispisteellä $x \in E$ ja kaikille $\varepsilon > 0$ on sellainen $y \notin E$, jolle $|x-y| < \varepsilon$ ja $|F'(y)| = 1$. Näin ollen derivaatta F' ei voi olla jatkuva missään joukon E pisteessä. Siten derivaatan F' epäjatkuvuuspisteiden joukko on E, joka ei ole nollamittainen. Siksi *Lebesguen ehdon* (lause 2.14) perusteella derivaatta F' ei ole Riemann-integroituva.

3 Lebesguen integraali

Tässä kappaleessa perehdytään ensin *porrasfunktioiden integraaliin* ja sen ominaisuuksiin. Tämän jälkeen määritellään Riemann-integroituvien funktioiden luokkaa suurempi *yläfunktioiden luokka* L^+ sekä *Lebesguen integraali.* Osoitetaan myös, että yläfunktioiden luokka L^+ on todella suurempi kuin Riemann-integroituvien funktioiden luokka. Lopuksi laajennetaan luokka L^+ *Lebesgue-integroituvien funktioiden luokkaan* L, joka sisältää sekä negatiivisella luvulla kerrottuja, että toisistaan vähennettyjä yläfunktioita. Tässä kappaleessa pääasiallisena lähteenä on lähde [4], mutta jonkin verran käytetään myös lähteitä [2] ja [5].

3.1 Porrasfunktio

Kappaleen ensimmäisessä osiossa määritellään *porrasfunktio* ja sen *integraali.* Lisäksi esitellään porrasfunktion integraalin perusominaisuuksia ja määritellään mitä tarkoittaa, kun jokin ominaisuus pätee *melkein kaikkialla.* Tämän jälkeen todistetaan *ensimmäinen ja toinen peruslause* sekä lemma, joihin viitataan myöhemmin esiintyvien lauseiden todistuksissa.

Määritelmä 3.1. Olkoon joukko E joukon X osajoukko. Tällöin joukon E *karakteristinen funktio*, on

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x \in E \\ 0 & \text{, kun } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Määritelmä 3.2. Reaaliarvoista funktiota s sanotaan *porrasfunktioksi,* jos on olemassa sellainen suljetun välin $[a, b]$ jako

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\},$$

että jokaisella avoimella osavälillä $I_k =]x_{k-1}, x_k[$ funktio s on vakio. *Porrasfuktio* s voidaan esittää muodossa

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k}(x),$$

missä χ_{I_k} on joukon $\{I_k : k = 1, \dots, n\}$ *karakteristinen funktio* ja jono $(a_k)_{k=1}^n$ on reaalilukujen joukon osajoukko. *Porrasfunktion s integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^n a_k |I_k|,$$

missä $|I_k|$ on välin $]x_{k-1}, x_k[$ pituus, toisin sanoen $|I_k| = x_{k-1} - x_k$.

Lause 3.3. Olkoot funktiot s ja t välin $[a, b]$ *porrasfunktioita* ja olkoon luku c reaaliluku. Tällöin myös funktiot $s + t$ ja cs ovat *porrasfunktioita* ja niillä on seuraavat ominaisuudet

(1) $\int_a^b s(x) + t(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx$ (*additiivisuus*),

(2) $\int_a^b cs(x)\, dx = c \int_a^b s(x)\, dx$ (*homogeenisuus*) ja

(3) jos $s \geq 0$, niin $\int_a^b s(x)\, dx \geq 0$ (*positiivisuus*).

Todistus. Voidaan olettaa, että P on yhteinen osavälijako funktioille s ja t. Olkoon $s(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{I_k}(x)$ ja $t(x) = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{I_k}(x)$.

(1)

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) + t(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n \big(a_k + b_k\big)|I_k| \\ &= \sum_{k=1}^n a_k |I_k| + \sum_{k=1}^n b_k |I_k| \\ &= \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_a^b cs(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n c a_k |I_k| \\ &= c \sum_{k=1}^n a_k |I_k| \\ &= c \int_a^b s(x)\, dx \end{aligned}$$

(3) Olkoon $s(x) \geq 0$. Toisin sanoen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k}(x) \geq 0$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin $a_k \geq 0$ kaikilla arvoilla k ja

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k |I_k| \geq 0.$$

□

Kohdasta (3) saadaan seuraavat seuraukset:

Seuraus 3.4. Olkoot s ja t *porrasfunktioita* välillä $[a,b]$. Kun

$$s^+(x) = \begin{cases} s(x) & \text{, kun } s(x) \geq 0 \\ 0 & \text{, kun } s(x) < 0 \end{cases}$$

ja

$$s^-(x) = \begin{cases} -s(x) & \text{, kun } s(x) \leq 0 \\ 0 & \text{, kun } s(x) > 0, \end{cases}$$

niin

(1) $\int_a^b s(x)\,dx \leq \int_a^b t(x)\,dx$, jos $s \leq t$

(2) $|\int_a^b s(x)\,dx| \leq \int_a^b |s(x)|\,dx$

(3) $\int_a^b s^+(x)\,dx \leq \int_a^b |s(x)|\,dx$

(4) $\int_a^b s^-(x)\,dx \leq \int_a^b |s(x)|\,dx$.

Huomautus 3.5. Huomataan, että *porrasfunktion integraali* onkin itseasiassa sen *Riemann-integraali.*

Määritelmä 3.6. Olkoon joukko A reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko ja olkoon piste x joukossa A. Ominaisuuden $P(x)$ sanotaan pätevän *melkein kaikkialla* joukossa A, jos se pätee kaikkialla joukossa A, paitsi joukon A *nollamittaisella osajoukolla* N. Toisin sanoen $P(x)$ on totta *melkein kaikkialla* joukossa A, jos joukko $N = \{x \in A : P(x) \text{ on epätosi}\}$ on *nollamittainen.* Tämä lyhennetään usein

$$P(x) \quad \text{m.k.} \quad \text{joukossa } A.$$

Jos joukko A on asiayhteydestä tuttu, voidaan käyttää edelleen lyhyempää versiota

$$P(x) \quad \text{m.k.}$$

Lause 3.7 (*Ensimmäinen peruslause*)**.** Olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vähenevä jono suljetulla välillä $[a,b]$ määriteltyjä ei-negatiivisia *porrasfunktioita*. Tällöin jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vähenee monotonisesti kohti nollaa melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx = 0.$$

Todistus. Oletetaan, että jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ vähenee kohti arvoa 0 melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Olkoon D_n porrasfunktioiden s_n epäjatkuvuuspisteiden joukko kaikilla arvoilla n ja olkoon D_0 joukko, jossa porrasfunktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene kohti nollaa, toisin sanoen

$$D_0 = \{x \in [a,b] : \lim_{n\to\infty} s_n(x) \neq 0\}.$$

Tällöin joukko D_0 on nollamittainen. Olkoon $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$. Nyt lemman 2.10 perusteella joukko D on nollamittainen, sillä se on numeroituva yhdiste nollamittaisia joukkoja. Kaikilla $\varepsilon > 0$ on siis olemassa sellainen jono rajoitettuja avoimia välejä I_n, että se peittää joukon D ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Jos piste ξ ei kuulu joukkoon D, niin $\lim_{n\to\infty} s_n(\xi) = 0$ ja on siis olemassa sellainen luonnollinen luku $m = m(\xi)$, että $s_m(\xi) < \varepsilon$. Koska funktio s_m on porrasfunktio, niin on olemassa avoin väli $I(\xi)$, joka sisältää pisteen ξ ja jossa funktion s_m arvo on vakio $s_m(\xi)$. Suljettu väli $[a,b]$ on siis peitetty väleillä $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $\{I(\xi) : \xi \notin D\}$. Yhdiste $\{I_1, I_2, \dots\} \cup \{I(\xi) : \xi \notin D\}$ on siis kompaktin joukon avoin peite. Välin $[a,b]$ kompaktiuden nojalla äärellinen määrä välejä peittää välin $[a,b]$. Olkoon nyt $p = \max\{m(\xi_1), ..., m(\xi_q)\}$. Jos $r \geq p$, niin $s_r < \varepsilon$ joukossa $A = I(\xi_1) \cup I(\xi_2) \cup \cdots \cup I(\xi_q)$, sillä joukon D komplementtijoukossa D^C funktio s_n vähenee kohti arvoa 0. Reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ avoimena joukkona A voidaan esittää pistevieraiden välien

$I'_1, \dots, I'_m$ äärellisenä yhdisteenä. Edelleen, jos $M = \sup\{s_1(x) : x \in [a,b]\}$, niin $s_r(x) \le s_1(x) \le M$ ja siksi

$$\begin{aligned}\int_a^b s_r(x)\,dx &\le M(|I_{n_1}| + \dots + |I_{n_k}|) + \varepsilon(|I'_1| + \dots + |I'_m|)\\ &\le M\varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon(M + b - a).\end{aligned}$$

Koska tämä on totta kaikille $\varepsilon > 0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = 0.$$

Olkoon $\int_a^b s_n(x)\,dx \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska $s_n \ge 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on vähenevä, niin kaikilla suljetun välin $[a,b]$ pisteillä x on olemassa raja-arvo $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Määritellään sellainen funktio $f : [a,b] \to [0,\infty[$, että $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ja näytetään, että $f(x) = 0$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$, toisin sanoen että joukko $P = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$ on nollamittainen.

Olkoon $P_m = \{x \in [a,b] : f(x) \ge \frac{1}{m}\}$ ja $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$. Joukon P nollamittaisuuden osoittamiseksi riittää näyttää, että jokainen P_m on nollamittainen. Olkoon n luonnollinen luku. Koska $s_n \ge f$, niin funktion arvo $s_n(x) \ge \frac{1}{m}$, kun piste x kuuluu joukkoon P_m. Porrasfunktion määritelmän perusteella joukko P_m voidaan peittää äärellisellä määrällä sellaisia välejä, että jokaisella välillä s_n on vakio ja suurempi tai yhtä suuri kuin $\frac{1}{m}$. Olkoon näiden välien kokonaispituus l_n. Tällöin

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \ge \frac{l_n}{m}.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska integraalin $\int_a^b s_n(x)$ arvo lähestyy nollaa, kun n lähestyy ääretöntä, niin riittävän suurella arvolla n integraali $\int_a^b s_n(x)$ on pienempi kuin $\frac{\varepsilon}{m}$ ja siis välien kokonaispituus l_n on pienempi kuin ε. Näin ollen joukko P_m on peitetty äärellisellä määrällä välejä, joiden kokonaispituus on pienempi kuin ε. Tällöin joukko P_m on nollamittainen.

$\square$

Lause 3.8 (*Toinen peruslause*)**.** Olkoon jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava jono suljetulla välillä $[a,b]$ määriteltyjä *porrasfunktioita*. Jos on olemassa sellainen luku A, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $\int_a^b s_n(x)\,dx \leq A$, niin jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein kaikkialla suljetulla välillä $[a, b]$.

Todistus. Oletetaan, että kaikki funktiot s_n ovat ei-negatiivisia, muutoin voidaan tarkastella jonoa $(s_n - s_1)_{n=1}^{\infty}$, näin voidaan tehdä sillä jono$(s_n - s_1)_{n=1}^{\infty}$ on myös kasvava ja jos väite pätee jonolle $(s_n - s_1)_{n=1}^{\infty}$, niin myös alkuperäinen jono suppenee melkein kaikkialla :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_1 + s_1) = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_1) + s_1.$$

Olkoon $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ja kasvavuuden perusteella $f(x) \in [0, \infty]$. Osoitetaan, että funktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein kaikkialla välillä $[a, b]$. Yhtäpitävästi riittää osoittaa, että joukko $E = \{x \in [a, b] : f(x) = \infty\}$ on nollamittainen, sillä jos $f(x) = \infty$ ei ole totta millään arvolla $x \in [a, b]$, niin jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kaikkialla välillä $[a, b]$. Jokaisessa joukon E pisteessä x funktion arvo $s_n(x)$ lähestyy ääretöntä, kun n lähestyy ääretöntä. Koska funktion s_n epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen kaikilla n, on epäjatkuvuuspisteiden joukko numeroituva. Voidaan siis olettaa, että kaikilla n funktio s_n on jatkuva kaikkialla joukossa E. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $E_n = \{x \in [a, b] : s_n > \frac{A}{\varepsilon}\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin joukko E on yhdisteen $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ osajoukko. Koska funktio s_n on porrasfunktio, niin joukko E_n on yhdiste on äärellisestä määrästä välejä. Joukon E_n välien kokonaispituus l_n on pienempi kuin ε, koska

$$\frac{Al_n}{\varepsilon} \leq \int_a^b s_n(x)\,dx \leq A.$$

Pyritään siis osoittamaan, että yhdiste $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ voidaan peittää numeroituvalla määrällä välejä, joiden kokonaispituus on pienempi kuin ε. Koska joukko E_n on joukon E_{n+1} osajoukko, niin erotus $E_{n+1} \backslash E_n$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä väleistä, joita on äärellinen määrä, sillä kuten edellä todettiin, niin joukko E_n on yhdiste on äärellisestä määrästä välejä, koska funktio s_n on porrasfunktio. Koska $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1) \ldots$, niin yhdiste $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ voidaan esittää yhdisteenä numeroituvasta määrästä erillisiä välejä. Ensin otetaan välit joukosta E_1, sitten välit joukosta $E_2 \backslash E_1$, tämän jälkeen välit jotka kuuluvat joukkoon $E_3 \backslash E_2$ ja niin edelleen. Jos joukko $E_{n+1} \backslash E_n$

on tyhjä, niin tarkastellaan tyhjää joukkoa kuten väliä. Tämän jonon ensimmäiset n väliä kuuluvat joukkoon E_n, joten niiden kokonaispituus on oltava pienempi kuin l_n, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin ε. Koska $\varepsilon > 0$, on mielivaltainen, niin joukko E on nollamittainen.

□

3.2 Luokka L^+ ja Lebesguen integraali

Tämän osion alussa määritellään *yläfunktioiden luokka* L^+ sekä *Lebesguen integraali*. Tämä Lebesguen integraalin määritelmä, ei ole **Henri Lebesguen** alkuperäinen 1900-luvun alussa esitelemä määritelmä vaan hieman myöhemmin **Frigyes Rieszin** esittämä versio. Tämän jälkeen esitellään Lebesguen integraalin ominaisuuksia ja lopuksi osoitetaan, että yläfunktioiden luokka L^+ on vähintään yhtäsuuri kuin Riemann-integroituvien funktioiden luokka ja jopa selvästi suurempi.

Määritelmä 3.9. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}^*$, missä $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, kuuluu *luokkaan* L^+, toisin sanoen funktio f on *yläfunktio*, jos on olemassa sellainen *kasvava jono* välillä $[a, b]$ määriteltyjä *porrasfunktioita* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, että

(1) jono $(\int_a^b s_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ on *rajoitettu* ja

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ *melkein kaikkialla* välillä $[a, b]$.

Huomautus 3.10.

(1) Jos funktio f kuuluu *luokkaan* L^+, niin *toisesta peuslauseesta* (lause 3.8) seuraa, että funktio f on äärellinen melkein kaikkialla välillä $[a, b]$. Toisin sanoen joukko $\{x \in [a, b] : f(x) = \pm\infty\}$ on *nollamittainen.*

(2) Olkoon $f \in L^+$ ja olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvava jono porrasfunktioita*, jotka määrittävät funktion f kuten edellisessä määritelmässä. Tällöin

$$\int_a^b s_1(x)\,dx \le \int_a^b s_2(x)\,dx \le \cdots \le \int_a^b s_n(x)\,dx \le ... \le A,$$

jollain vakiolla A. Siksi $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx$ on olemassa ja äärellinen. Tämän vuoksi *Lebesguen integraali* $\int_a^b f(x)\,dx$ määritellään *porrasfunktion integraalin* $\int_a^b s_n(x)\,dx$ *raja-arvona.*

Määritelmä 3.11 (*Lebesguen integraali*)**.** Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, joka kuuluu *luokkaan* L^+. Funktion f *Lebesguen integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx,$$

missä $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on *kasvava jono* välillä $[a, b]$ määriteltyjä *porrasfunktioita.*

Huomautus 3.12.

(1) *Porrasfunktiot* kuuluvat *luokkaan* L^+.

(2) Tästä eteenpäin tutkielmassa käytettävillä merkinnöillä $\int_a^b f(x)\,dx$ ja $\int_a^b f$ tarkoitetaan *Lebesguen integraalia.*

Lause 3.13. Olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvava porrasfunktiojono*, joka määrää *yläfunktion* f ja olkoon $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvava porrasfunktiojono*, joka määrää *yläfunktion* g. Oletetaan lisäksi, että jonot $(\int_a^b s_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ ja $(\int_a^b t_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ ovat *rajoitettuja* ja että $f = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ja $g = \lim_{n\to\infty} t_n(x)$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$. Jos $f \le g$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan vähenevää jonoa $(s_m - t_n)_{n=1}^{\infty}$. Nyt

$$\lim_{n\to\infty} (s_m - t_n) = s_m - \lim_{n\to\infty} t_n \le f - g \le 0$$

melkein kaikkialla välillä $[a, b]$. Siksi ei-negatiivisten funktioiden vähenevä jono $(s_m - t_n)^+$, jossa siis aina $s_m - t_n > 0$, suppenee kohti nollaa melkein kaikkialla välillä $[a, b]$. *Ensimmäisen peruslauseen* (lause 3.7) perusteella saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (s_m - t_n)^+(x)\,dx = 0.$$

Koska $s_m - t_n \le (s_m - t_n)^+$ niin seurauksen 3.4 nojalla on

$$\int_a^b (s_m - t_n)(x)\,dx \le \int_a^b (s_m - t_n)^+(x)\,dx.$$

Siten lausetta 3.3 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b s_m(x)\,dx &\le \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b (s_m - t_n)^+(x)\,dx + \int_a^b t_n(x)\,dx\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nyt, kun annetaan luvun m lähestyä ääretöntä, saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx.$$

□

Seuraus 3.14. Olkoon funktiot f ja g *yläfunktioita* ja olkoon $f = g$ melkein kaikkialla suljetulla välillä $[a, b]$, tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Lause 3.15. Olkoon funktiot f ja g *yläfunktioita* ja olkoon luku c positiivinen reaaliluku. Tällöin

(1) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,

(2) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ ja

(3) jos $f \ge 0$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$, niin $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Todistus. Olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ monotonisesti kasvava porrasfunktiojono, joka määrää yläfunktion f ja olkoon $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ monotonisesti kasvava porrasfunktiojono, joka määrää yläfunktion g. Oletetaan lisäksi, että jonot $(\int_a^b s_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ ja $(\int_a^b t_n(x)\,dx)_{n=1}^{\infty}$ ovat rajoitettuja ja että $f = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ja $g = \lim_{n\to\infty} t_n(x)$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$.

(1) Nyt $f(x) + g(x) = \lim_{n\to\infty}[s_n(x) + t_n(x)]$, joten Lebesguen integraalin

määritelmän (määritelmä 3.11) ja lauseen 3.3 (1) avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)+g(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b s_n(x)+t_n(x)\,dx\right] \\
&\overset{L.3.3\,(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b s_n(x)\,dx+\int_a^b t_n(x)\,dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

(2) Nyt $cf(x)=\lim_{n\to\infty} cs_n(x)$, joten Lebesguen integraalin määritelmän (määritelmä 3.11) ja lauseen 3.3 (2) avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_a^b cf(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b cs_n(x)\,dx \\
&\overset{L.3.3\,(2)}{=} \lim_{n\to\infty} c\int_a^b s_n(x)\,dx \\
&= c\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx \\
&= c\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

(3) Olkoon funktio g nollafunktio ja olkoon $f\geq g$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Tällöin

$$\int_a^b g(x)\,dx=0$$

Nyt seurauksen 3.13 perusteella

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx=0.$$

$\square$

Osoitetaan seuraavan lauseen avulla, että yläfunktioiden luokka L^+ on vähintään yhtä suuri kuin Riemann-integroituvien funktioiden luokka.

Lause 3.16. Jokainen välillä $[a,b]$ Riemann-integroituva funktio kuuluu yläfunktioiden luokkaan L^+. Lisäksi Riemannin integraali sekä integraali luokassa L^+ ovat samat.

Todistus. Olkoon P_n sellainen välin $[a,b]$ jako, että

$$P_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2^n} = b\},$$

ja

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Määritellään porrasfunktio s_n, joka liitetään tähän ositukseen eli olkoon

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \chi_{I_k},$$

missä $m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$ ja $I_k =]x_{k-1}, x_k[$. Tällöin kasvava porrasfunktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti funktioita f melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan funktio f on yläfunktio ja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Toisaalta

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \textit{ala-}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Näin ollen Riemann-integraali on yhtäsuuri kuin luokan L^+ integraali.

□

Osoitetaan seuraavan esimerkin avulla, että yläfunktioiden luokka L^+ on selvästi suurempi kuin Riemann-integroituvien funktioiden luokka.

Esimerkki 3.17. Olkoon funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Dirichlet funktio* eli olkoon

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Muistetaan esimerkistä 2.15, että Dirichlet-funktio ei ole Riemann-integroituva. Tällöin riittää osoittaa, että funktio g on kuuluu luokkaan L^+. Koska irrationaalilukujen joukko on nollamittainen, niin $g = 0$ melkein kaikkialla. Luokan L^+ määritelmässä voidaan siis valita $s_n = 0$ kaikilla n.

3.3 Luokka L

Vaikka funktiot u ja v kuuluvat *luokkaan* L^+, niin funktiot $u - v$ ja $-u$ eivät välttämättä kuulu. Toisaalta voi olla myös seuraavan esimerkin kaltainen tilanne.

Esimerkki 3.18. Olkoon F *yleinen Cantorin joukko*, joka ei ole nollamittainen. Tällöin joukon F karakteristinen funktio χ_F ei kuulu luokkaan L^+, mutta $1 - \chi_F$ kuuluu luokkaan L^+.

Todistus. Olkoon $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ jono erillisiä välin $[0, 1]$ avoimia välejä, jotka on poistettu muodostettaessa yleistä Cantorin joukoa F. Oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \frac{1}{2}$. Osoitetaan ensin, että $1 - \chi_F \in L^+$. Olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava jono porrasfunktioita välillä $[0, 1]$ ja olkoon

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x).$$

Koska $F = \cap_{i=1}^{\infty} E_i$, missä välit E_i ovat suljetut välit yleisen Cantorin joukon konstruktiossa, niin $F^C = \cup_{i=1}^{\infty} E_i^C = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, jolloin $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1 - \chi_F$ ja $\int_0^1 s_n(x)\,dx \leq \frac{1}{2}$. Tällöin määritelmän 3.9 perusteella funktio $1 - \chi_F$ kuuluu luokkaan L^+ ja Lebesguen integraalin määritelmän (määritelmä 3.11) perusteella $\int_0^1 1 - \chi_F(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Väitetään nyt, että $\chi_F \in L^+$. Tällöin Lebesguen integraalin määritelmän (määritelmä 3.11) perusteella $\int_0^1 \chi_F(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Olkoon $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen kasvava jono porrasfunktioita välillä $[0, 1]$, että $s_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \chi_F$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx = \int_0^1 \chi_F(x)\,dx.$$

Koska funktion χ_F integraali on positiivinen, on oltava porrasfunktio s_n, jonka integraali on positiivinen. Olkoon I sellainen avoin väli, että $I \subset I_k$ ja porrasfunktio s_n on positiivinen välillä I. Tällöin $I \cap F = \emptyset$ ja siis $\chi_F(x)\chi_I(x) = 0$ välillä $[0, 1]$. Näin ollen

$$0 < \int_0^1 s_n(x)\chi_I(x)\,dx \leq \int_0^1 \chi_F(x)\chi_I(x)\,dx = 0.$$

Tämä ei ole totta, sillä yhtälö väittää, että $0 < 0$. Siis $\chi_F \notin L^+$.

$\square$

Tarkastellaan yläfunktioiden luokkaa L^+ laajempaa Lebesgue-integroituvien funktioiden luokkaa L, joka sisältää sekä negatiivisella luvulla kerrottuja, että toisistaan vähennettyjä yläfunktioita.

Määritelmä 3.19. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funktion f sanotaan olevan *Lebesgue-integroituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa sellaiset *yläfunktiot* u ja v, että $f = u - v$. Tällöin *Lebesguen integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f = \int_a^b u - \int_a^b v.$$

Välillä $[a, b]$ määriteltyjen *Lebesgue-integroituvien funktioden joukosta* käytetään merkintää L.

Esitellään seuraavaksi Lebesgue-integroituvien funktioiden ominaisuuksia.

Lemma 3.20. Olkoot funktiot f ja g *Lebesgue-integroituvia* ja olkoon c reaaliluku. Tällöin myös funktiot $f + g$, cf, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+ ja f^- ovat *Lebesgue-integroituvia*

Todistus. Olkoot $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^+$ fuktioita, joille $f = f_1 - f_2$ ja $g = g_1 - g_2$.

(1) Nyt

$$f + g = f_1 - f_2 + g_1 - g_2 = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2),$$

ja koska $f_1 + g_1 \in L^+$ ja $f_2 + g_2 \in L^+$, niin $f + g \in L$.

(2) Jos $c \geq 0$, niin

$$cf = cf_1 - cf_2,$$

ja $cf_1 - cf_2 \in L^+$, joten $cf \in L$. Jos $c < 0$, niin $-c > 0$ ja

$$cf = -cf_2 - (-c)f_1,$$

joten $cf \in L$.

(3) Koska $f_1, f_2 \in L^+$ niin $\max\{f_1, f_2\} \in L^+$ ja $\min\{f_1, f_2\} \in L^+$ ja näin ollen

$$|f| = \max\{f_1, f_2\} - \min\{f_1, f_2\}$$

on Lebesgue-integroituva.

(4) Koska

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

ja

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

niin molemmat $\max\{f, g\}$ ja $\min\{f, g\}$ kuuluvat lemman aiempien kohtien perusteella luokkaan L. Itse asiassa saadaan myös, että $f^+, f^- \in L$.

□

Lemma 3.21. Olkoot funktiot f ja g *Lebesgue-integroituvia* ja olkoon c reaaliluku. Tällöin

(1) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$ (*additiivisuus*),

(2) $\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$ (*homogeenisuus*) ja

(3) jos $f \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ (*positiivisuus*).

Todistus. Nyt $f = f_1 - f_2$ ja $g = g_1 - g_2$, missä $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^+$.

(1) Tällöin lemman 3.20 kohdan (1) perusteella $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ ja määritelmän 3.19 ja lauseen 3.15 perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx \\
&\qquad = \int_a^b [f_1(x) + g_1(x)]\, dx - \int_a^b [f_2(x) + g_2(x)]\, dx \\
&\qquad = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b g_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx - \int_a^b g_2(x)\, dx \\
&\qquad = \left[\int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx \right] + \left[\int_a^b g_1(x)\, dx - \int_a^b g_2(x)\, dx \right] \\
&\qquad = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

(2) Jos $c \geq 0$, niin lemman 3.20 kohdan (2) perusteella $cf = cf_1 - cf_2$ ja lausetta 3.15 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= \int_a^b cf_1(x)\,dx - \int_a^b cf_2(x)\,dx \\ &= c\int_a^b f_1(x)\,dx - c\int_a^b f_2(x)\,dx \\ &= c\Big[\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx\Big] \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Jos $c < 0$, niin lemman 3.20 kohdan (2) perusteella $cf = (-c)f_2 - (-c)f_1$ ja tällöin lauseen 3.15 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= \int_a^b (-c)f_2(x)\,dx - \int_a^b (-c)f_1(x)\,dx \\ &= (-c)\int_a^b f_2(x)\,dx - (-c)\int_a^b f_1(x)\,dx \\ &= c\Big[\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx\Big] \\ &= c\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(3) Olkoon $f = f_1 - f_2 \geq 0$. Tällöin $f_1 \geq f_2$ ja seurauksen 3.13 perusteella saadaan

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geq \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Siis $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

□

Seuraus 3.22. Jos $f \in L$, niin $|f| \in L$ ja

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx.$$

Lemma 3.23. Jos funktio f on *Lebesgue-integroituva*, niin on olemassa sellainen jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ välin $[a,b]$ *porrasfunktioita*, että $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ melkein kaikkialla ja

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Olkoon $f = f_1 - f_2$, missä $f_1, f_2 \in L^+$. Määritelmän 3.9 mukaan on olemassa sellaiset kasvavat porrasfunktiojonot $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(t'_n)_{n=1}^{\infty}$, että $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f_1(x)$ ja $\lim_{n\to\infty} t'_n(x) = f_2(x)$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Olkoon

$$s_n = t_n - t'_n.$$

Tällöin myös porrasfunktiojono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti funktiota f melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Nyt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_a^b \big[f(x) - s_n(x)\big]\,dx \right| \\
&= \left| \int_a^b \big[f_1(x) - f_2(x) - t_n(x) + t'_n(x)\big]\,dx \right| \\
&\overset{L.\,3.21\text{ ja }L.\,3.3}{=} \left| \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b t_n(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b t'_n(x)\,dx \right| \\
&\overset{\triangle-ey}{\leq} \left| \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b t_n(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b t'_n(x)\,dx \right|.
\end{aligned}$$

Luokan L^+ integraalin määritelmän (määritelmä 3.11) mukaan epäyhtälön viimeiset termit lähestyvät nollaa, kun n lähestyy ääretöntä. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Lemma 3.24. Olkoon funktio f *Lebesgue-integroituva* välillä $[a,b]$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa

(1) sellaiset välin $[a,b]$ *yläfunktiot* u ja v, että $f = u - v$, *yläfunktio* v on ei-negatiivinen melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ ja $\int_a^b v < \varepsilon$.

(2) sellainen *porrasfunktio* s ja välillä $[a, b]$ *Lebesgue-integroituva* funktio g, että $f = s + g$ ja $\int_a^b |g| < \varepsilon$.

Todistus.

(1) Koska funktio f on Lebesgue-integroituva, on olemassa sellaiset yläfunktiot u_1 ja v_1, että $f = u_1 - v_1$. Olkoon $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava jono porrasfunktioita, jolle $\lim_{n\to\infty} f_n = v_1$. Koska $\int_a^b t_n \to \int_a^b v_1$, kun $n \to \infty$, niin on olemassa sellainen luonnollinen luku N, että lauseen 3.15 nojalla

$$0 \leq \int_a^b (v_1 - t_N) < \varepsilon.$$

Olkoon nyt $v = v_1 - t_N$ ja $u = u_1 - t_N$. Tällöin funktiot u ja v ovat yläfunktioita välillä $[a, b]$ ja $u - v = u_1 - v_1 = f$. Lisäksi yläfunktio v on ei-negatiivinen melkein kaikkialla joukossa $[a, b]$ ja $\int_a^b v < \varepsilon$.

(2) Olkoon funktiot u ja v sellaiset välin $[a, b]$ yläfunktiot, että $v \geq 0$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$,

$$f = u - v \qquad \text{ja} \qquad 0 \leq \int_a^b v < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Valitaan sellainen porrasfunktio s, että $0 \leq \int_a^b (u - s) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$f = u - v = s + (u - s) - v = s + g,$$

missä $g = (u - s) - v$. Siispä funktio g on Lebesgue-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g| &= \int_a^b |(u - s) - v| \\
&\overset{\triangle-ey}{\leq} \int_a^b \big(|u - s| + |v|\big) \\
&\overset{L.\,3.15\,(1)}{\leq} \int_a^b |u - s| + \int_a^b |v| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4 Lebesguen integraalin konvergenssilauseet

Tutkielman viimeisessä kappaleessa todistetaan *Lebesguen integraaliin* liittyvät *konvergenssilauseet*. Aluksi kuitenkin palataan hieman takaisinpäin ja todistetaan *monotonisen konvergenssin lause yläfunktioille*, sillä tätä tulosta tarvitaan monotonisen konvergenssin lauseen sarjoille todistamiseen. *Monotonisen konvergenssin lause sarjoille* käydään läpi ennen monotonisen konvergenssin lausetta, sillä edeltävää tulosta tarvitaan jälkimmäisen todistamiseen. *Monotonisen konvergenssin lause* on italialaisen matemaatikon **Beppo Levin** tulos vuodelta 1906 ja tunnetaankin myös *Beppo Levin lauseena*.

Seuraavaksi todistetaan *ylä- ja alaraja-arvoihin* liittyvä lemma, jota tarvitaan dominoidun konvergenssin lauseen todistamiseen. *Dominoidun konvergenssin lause* on Lebesguen integraalin tärkeimpiä tuloksia. Dominoidun konvergenssin lauseen todisti **Henri Lebesgue** vuonna 1908 ja tämän vuoksi lauseesta käytetään toisinaan nimeä *Lebesguen dominoidun konvergenssin lause*. Tiivistettynä konvergenssilauseet kertovat, että integroinnin ja rajankäynnin järjestyksen saa vaihtaa. Tässä kappaleessa lähteenä on käytetty enimmäkseen lähteitä [2] ja [5], mutta myös lähdettä [4].

Lause 4.1 (*Monotonisen konvergenssin lause yläfunktioille*)**.** Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvava jono* välin $[a,b]$ *yläfunktioita* ja olkoon $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x) \le A$, missä $A \in [0,\infty[$. Tällöin funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* kohti *rajafunktiota* $f \in L^+$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

Todistus. Jokaiselle luonnolliselle luvulle k on kasvava porrasfunktiojono $(s_{n,k})_{n=1}^{\infty}$, joka suppenee funktioon f_k. Olkoon t_n sellainen porrasfunktio välillä $[a,b]$, että

$$t_n(x) = \max\{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \ldots, s_{n,n}(x)\}.$$

Porrasfunktiojono $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava välillä $[a,b]$, sillä

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) &= \max\{s_{n+1,1}(x),\ldots,s_{n+1,n+1}(x)\} \\ &\geq \max\{s_{n,1}(x),\ldots,s_{n,n+1}(x)\} \\ &\geq \max\{s_{n,1}(x),\ldots,s_{n,n}(x)\} = t_n(x). \end{aligned}$$

Toisaalta $s_{n,k}(x) \leq f_k(x)$ ja funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ on kasvava melkein kaikkialla välillä $[a,b]$, joten

$$t_n(x) \leq \max\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\} = f_n(x) \qquad \text{m.k. } x \in [a,b]. \tag{2}$$

Tällöin lauseen 3.13 perusteella

$$\int_a^b t_n \leq \int_a^b f_n. \tag{3}$$

Nyt koska jono $(\int_a^b f_n)_{n=1}^{\infty}$ on ylhäältä rajoitettu, niin myös kasvava jono $(\int_a^b t_n)_{n=1}^{\infty}$ on ylhäältä rajoitettu ja siis suppenee. *Toisen peruslauseen* (lause 3.8) perusteella porrasfunktiojono $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ kohti rajafunktiota $f \in L^+$ ja tällöin $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$.

Näytetään seuraavaksi, että $f_n \to f$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Porrasfunktion $t_n(x)$ määritelmän mukaan $t_n(x) \geq s_{n,k}(x)$ kaikilla välin $[a,b]$ arvoilla x, kun $n \geq k$. Kun n lähestyy ääretöntä, niin saadaan epäyhtälö

$$f_k(x) \leq f(x) \qquad \text{m.k. } x \in [a,b]. \tag{4}$$

Tällöin kasvava funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ on ylhäältä rajoitettu funktiolla f melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ ja näin ollen suppenee melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ kohti rajafunktiota g, jolle $g \leq f$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Kuitenkin epäyhtälön (2) mukaan $t_n \leq f_n$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ joten, kun n lähestyy ääretöntä, niin $f \leq g$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Toisin sanoen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{m.k. } x \in [a,b].$$

Lopuksi osoitetaan, että $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$. Koska $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$, niin epäyhtälöstä (3) ja integraalin ominaisuuksista (lause 3.13) seuraa, että

$$\int_a^b f \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \tag{5}$$

Epäyhtälöstä (4) saadaan lausetta 3.13 käyttäen epäyhtälö $\int_a^b f_k \leq \int_a^b f$, josta seuraa, että $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k \leq \int_a^b f$. Tämä yhdessä epäyhtälön (5) kanssa antaa

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

□

Lause 4.2 (*Monotonisen konvergenssin lause sarjoille*)**.** Olkoon $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jono ei-negatiivisia *Lebesgue-integroituvia* välin $[a, b]$ funktioita ja oletetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n < \infty$. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *suppenee* kohti funktiota g *melkein kaikkialla* välillä $[a, b]$, niin $g \in L$ ja

$$\int_a^b g = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n. \tag{6}$$

Todistus. Koska funktiot g_n ovat Lebesque-integroituvia, niin lemman 3.24 perusteella kaikille $\varepsilon > 0$ ja jokaiselle $n = 1, 2, ...$ on sellaiset yläfunktiot u_n ja v_n, että

$$g_n = u_n - v_n, \qquad v_n \geq 0 \quad \text{m.k. välillä } [a, b]$$
$$\text{ja} \quad \int_a^b v_n < \varepsilon.$$

Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$. Tällöin on sellaiset yläfunktiot u_n ja v_n, että

$$u_n = g_n + v_n \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b v_n < \frac{1}{2^n}.$$

Epäyhtälön $\int_a^b v_n < \frac{1}{2^n}$ perusteella summa $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n$ suppenee, sillä geometrinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ suppenee. Koska $u_n \geq 0$ melkein kaikkialla välillä $[a, b]$, niin osasummat

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

muodostavat yläfunktioiden jonon $(U_n)_{n=1}^{\infty}$, joka on kasvava melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_a^b U_n &= \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k \\
&\overset{L.\,3.15\,(1)}{=} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k \\
&= \sum_{k=1}^n \int_a^b \big(g_k + v_k\big) \\
&\overset{L\,3.15\,\text{ja}\,L.\,3.21}{=} \sum_{k=1}^n \int_a^b g_k + \sum_{k=1}^n \int_a^b v_k
\end{aligned}$$

ja koska molemmat sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b g_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b v_k$ suppenevat, niin myös integraalien jono $(\int_a^b U_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee. *Monotonisen konvergenssin lauseen yläfunktioille* (lause 4.1) perusteella yläfunktioiden jono $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ kohti rajafunktiota $U \in L^+$ ja $\int_a^b U = \lim_{n\to\infty} \int_a^b U_n$. Nyt

$$\int_a^b U_n = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k,$$

joten

$$\int_a^b U = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k.$$

Vastaavasti osasummien jono $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, missä

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x),$$

suppenee melkein kaikkialla välillä I kohti rajafunktiota $V \in L^+$ ja

$$\int_a^b V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b v_k.$$

Nyt määritelmän 3.19 mukaan funktio $U - V$ on Lebesgue-integroituva välillä $[a,b]$ ja jono $(\sum_{k=1}^n g_k)_{n=1}^{\infty} = (U_n - V_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee melkein kaikkialla välillä

$[a,b]$ kohti funktiota $U-V$. Olkoon $g = U-V$. Tällöin funktio g on Lebesgue-integroituva välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b g \overset{M.3.19}{=} \int_a^b U - \int_a^b V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (u_k - v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b g_k.$$

□

Lause 4.3 (*Monotonisen konvergenssin lause*)**.** Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *kasvava jono Lebesgue-integroituvia* välin $[a,b]$ funktioita ja olkoon $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Jos $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n < \infty$, niin $f \in L$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Todistus. Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava jono Lebesgue-integroituvia välin $[a,b]$ funktioita ja olkoon $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Olkoon $g_1 = f_1$ ja $g_n = f_n - f_{n-1}$, kun $n \geq 2$. Tällöin

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k.$$

Soveltamalla *monotonisen konvergenssin lausetta sarjoille* (lause 4.2) jonoon $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ huomataan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ suppenee melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ kohti summafunktiota $g \in L$ ja *monotonisen konvergenssin lauseen sarjoille* (lause 4.2) yhtälö (6) toteutuu. Tämän vuoksi $f_n \to g$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

□

Huomautus 4.4. Soveltamalla *monotonisen konvergenssin lausetta* jonoon $(-f_n)_{n=1}^{\infty}$, lause toimii myös väheneville jonoille. Tällöin tulos voidaan esittää seuraavasti:

Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen *vähenevä jono Lebesgue-integroituvia* välin $[a,b]$ funktioita, että $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n > -\infty$ ja olkoon $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Tällöin funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee kohti rajafunktiota* $f \in L$ *melkein kaikkialla* välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Esimerkki 4.5. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} x^s & \text{, kun } x > 0 \\ 0 & \text{, kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoitetaan, että Lebesguen integraali $\int_0^1 f(x)\,dx$ on olemassa ja että se saa arvon $\frac{1}{s+1}$, jos $s > -1$.

Jos $s \geq 0$, niin funktio f on rajoitettu ja Riemann-integroituva välillä $[0,1]$ ja

$$\begin{aligned} \textit{Riemann-}\int_0^1 f(x)\,dx &= \textit{Riemann-}\int_0^1 x^s\,dx \\ &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Näin ollen lauseen 3.16 nojalla funktio f on myös Lebesgue-integroituva välillä $[0,1]$ ja

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{s+1}.$$

Jos $s < 0$, niin funktio f ei ole rajoitettu ja näin ollen ei myöskään Riemann-integroituva välillä $[0,1]$. Olkoon nyt $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, kun $n = 1, 2, \dots$ ja

$$f_n(x) = \begin{cases} x^s & \text{, kun } x \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{, kun } 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Tällöin funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava ja $f_n \to f$ kaikkialla välillä $[0,1]$. Jokainen funktio f_n on Riemann-integroituva ja tällöin lauseen 3.16 nojalla myös Lebesgue-integroituva välillä $[0,1]$ ja

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_{\frac{1}{n}}^1 x^s\,dx \\ &= \frac{1}{s+1}\left(1 - \frac{1}{n^{s+1}}\right). \end{aligned}$$

Jos $s+1>0$, niin $\int_0^1 f_n \to \frac{1}{s+1}$. Tällöin *monotonisen konvergenssin lause* (lause 4.3) nojalla Lebesguen integraali $\int_0^1 f(x)\,dx$ on olemassa ja saa arvon $\frac{1}{s+1}$, jos $s>-1$.

Esimerkki 4.6.

(1) Olkoon $f_n(x) = nx^n$, kun $x \in [0,1]$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ melkein kaikkialla ja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx.$$

(2) Olkoon $f_n(x) = n^2x^n$, kun $x \in [0,1]$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ melkein kaikkialla ja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty$. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx.$$

Edeltävässä esimerkissä kumpikaan jonoista ei ollut monotoniseti kasvava eikä rajoitettu melkein kaikkialla. Tämän vuoksi onkin luonnollista seuraavaksi tarkastella ei-monotonisia jonoja, jotka ovat integroituvalla funktiolla rajoitettuja melkein kaikkialla, eli todistetaan dominoidun konvergenssin lause (lause 4.8). Tätä ennen kuitenkin todistetaan eräs aputulos:

Lemma 4.7. Olkoon jono $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Tällöin

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} \big(-x_n\big).$$

Todistus. Nyt jono $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, joten

$$\sup_{k\geq n} x_k = -\inf_{k\geq n} \big(-x_k\big)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt kun otetaan raja-arvot ja käytetään ylä- ja alaraja-arvojen määritelmiä (määritelmä 2.11) saadaan

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = -\lim_{n\to\infty}\left[\inf_{k\geq n}\big(-x_k\big)\right] = -\liminf_{n\to\infty}\big(-x_n\big).$$

□

Lause 4.8 (*Dominoidun konvergenssin lause*)**.** Olkoon $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jono *Lebesgue-integroituvia* välin $[a,b]$ funktioita. Oletetaan, että on olemassa sellainen funktio f, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Oletetaan myös, että on olemassa sellainen *Lebesgue-integroituva* funktio g, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on $|f_n(x)| \leq g(x)$ melkein kaikkialla $x \in [a,b]$. Tällöin funktio f on *Lebesgue-integroituva* välillä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Todistus. Kun $1 \leq k \leq m$, määritellään funktiot

$$g_{k,m}(x) = \min\{f_n(x) : k \leq n \leq m\}$$

ja

$$g_k(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq k\} \tag{7}$$

Tällöin lemman 3.20 perusteella funktio $g_{k,m}$ on Lebesgue-integroituva välillä $[a,b]$ ja vähenevä jono $(g_{k,m})_{m=k}^{\infty}$ suppenee kohti funktiota g_k melkein kaikkialla välillä $[a,b]$. Lisäksi $g_{k,m} \geq -g$ melkein kaikkialla välillä $[a,b]$, joten lauseen 3.13 nojalla on

$$\int_a^b g_{k,m} \geq \int_a^b (-g) > -\infty.$$

Huomautuksesta 4.4 seuraa, että funktio g_k on Lebesgue-integroituva välillä $[a,b]$ ja kaikilla $k \geq 1$

$$\int_a^b g_k = \lim_{m\to\infty} \int_a^b g_{k,m} \leq \int_a^b g < \infty.$$

Alaraja-arvon määritelmän (määritelmä 2.11) mukaan

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{m.k. } x \in [a,b].$$

Koska $g_k \leq f_k$ kaikilla arvoilla k ja jono $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ on kasvava, niin *monotonisen konvergenssin lauseen* (lauseen 4.3) perusteella saadaan, että funktio f on Lebesgue-integroituva välilä $[a,b]$ ja

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k \overset{(7)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Soveltamalla tätä päättelyä jonoon $(-f_n)_{n=1}^{\infty}$, saadaan

$$-\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \liminf_{k\to\infty} -\int_a^b f_k \overset{L.\,4.7}{=} -\limsup_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Siksi

$$\int_a^b f \leq \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \limsup_{k\to\infty} \int_a^b f_k \leq \int_a^b f.$$

Raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k$ on siis olemassa ja

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b f.$$

□

Seuraava esimerkki osoittaa, että *dominoidun konvergenssin lauseen* (lause 4.8) dominoiva funktio g on tarpeellinen.

Esimerkki 4.9.

(1) Olkoot sellaiset $f, f_n : [a,b] \to [0,1]$, että $f(x) = 0$ ja $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$, missä $n = 1, 2, \ldots$ ja $[n, n+1] \subset \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in [a,b]$, mutta

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(2) Olkoot sellaiset $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, että $f(x) = 0$ ja $f_n(x) = n\chi_{]0,\frac{1}{n}]}(x)$, missä $n = 1, 2, \ldots$ ja $]0, \frac{1}{n}] \subset [a,b]$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in [a,b]$, mutta

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lähdeluettelo

[1] Stephen Abbott: *Understanding analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] Tom M. Apostol: *Mathematical analysis*. Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts,1974.

[3] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner ja B. S. Thomson: *Elementary Real Analysis*. Second edition, 2008.

[4] Soo Bong Chae: *Lebesgue Integration*. Second edition, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] Karl R. Stromberg: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth International Mathematics Series, Wadsworth International, Belmont, California 1981.