Pintojen perusryhmistä

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Tekijä:
Timo Mikael Schultz

Ohjaaja:
Pekka Pankka

11. 2015

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto

Tiivistelmä

Schultz, Timo Mikael
Pintojen perusryhmistä
Matematiikan pro gradu -tutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, 2015, 73 sivua

Tässä tutkielmassa osoitetaan ennestään tunnettu pintoihin liittyvä tulos, jonka mukaan epäkompaktin pinnan perusryhmä on vapaa. Todistus pohjautuu tietoon siitä, että jokaisella pinnalla on olemassa niin sanottu kolmiointi. Pinnan kolmiointia hyödyntäen pinta tyhjennetään sopivilla sisäkkäisillä kompakteilla reunallisilla pinnoilla siten, että pinnan perusryhmä saadaan näiden kompaktien reunallisten pintojen sisäkkäisten perusryhmien yhdisteenä. Kompakti reunallinen pinta osoitetaan homotopiaekvivalentiksi graafin kanssa deformaatioretraktoimalla reunallinen pinta graafiksi reunallisen pinnan kolmiointia hyödyntäen. Koska homotopiaekvivalenttien avaruuksien perusryhmät ovat isomorfiset, saadaan kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä osoitettua vapaaksi osoittamalla, että graafin perusryhmä on vapaa ryhmä. Graafin perusryhmä osoitetaan vapaaksi ryhmäksi käyttäen tietoa niin sanotun maksimaalisen puun olemassaolosta. Todistuksessa käytetään lisäksi Van Kampenin teoreemaa, joka myös todistetaan. Tutkielman tulos sanoo, että esimerkiksi poistamalla kompaktilta pinnalta topologinen Cantorin joukko saadaan pinta, jonka perusryhmä on vapaa, mikä itsessään ei ole intuitiivisesti selvää.

Avainsanat: pinta, graafi, perusryhmä, vapaa ryhmä, homotopia, topologia, algebrallinen topologia

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa todistetaan seuraava lause, jonka todistuksen lienee ensimmäisenä esittänyt Johansson kirjassaan *Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsfläche* [6].

Lause. *Olkoon F epäkompakti pinta, jonka topologialla on numeroituva kanta. Tällöin perusryhmä $\pi_1(F)$ on vapaa ryhmä, jolla on äärellinen tai numeroituvasti ääretön kanta.*

Todistus rakentuu kolmesta osasta. Aluksi osoitetaan, että yhtenäisen graafin perusryhmä on vapaa. Tämän jälkeen osoitetaan, että kompakti reunallinen pinta on homotopiaekvivalentti graafin kanssa ja siten kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä on vapaa. Lopuksi osoitetaan, että epäkompakti N_2-pinta voidaan tyhjentää sisäkkäisillä kompakteilla reunallisilla pinnoilla siten, että epäkompaktin pinnan perusryhmä voidaan nähdä kyseisten epäkompaktien pintojen (sisäkkäisten) perusryhmien yhdisteenä. Näin saadaan osoitettua, että epäkompaktin pinnan perusryhmä on vapaa.

Kyseinen tulos todistuksineen löytyy muun muassa Stillwellin kirjasta *Classical topology and combinatorial group theory* [6]. Tässä tutkielmassa esitetty todistus mukailee Masseyn kirjassaan *Algebraic topology: an introduction* esittämää runkoa [4].

Yhtenäisen graafin perusryhmä osoitetaan vapaaksi ryhmäksi seuraavalla tavalla. Aluksi osoitetaan, että jokainen yhtenäinen graafi sisältää maksimaalisen puun. Tämä tehdään laajentamalla mielivaltainen graafin sisältämä puu maksimaaliseksi puuksi. Kun tiedetään, että yhtenäisellä graafilla X on olemassa maksimaalinen puu T, niin osoitetaan, että graafi X on homotopiaekvivalentti tekijäavaruuden X/T kanssa. Intuitiivisesti tämä tuntuu selvältä, sillä tekijäkuvauksessa $X \to X/T$ luhistetaan graafista yhdeksi pisteeksi sellainen osa, jossa ei ole "epätriviaaleja silmukoita". Tarkka todistus tehdään hyödyntämällä parin (X,T) niin sanottua *homotopian laajennusominaisuutta.* Tekijäavaruus X/T osoitetaan homeomorfiseksi tason ympyröiden yhden pisteen yhdisteen kanssa. Kun nämä väitteet on todistettu, jäljelle jää osoittaa, että ympyröiden yhden pisteen yhdisteen perusryhmä on vapaa ryhmä. Soveltamalla Van Kampenin teoreemaa kyseiseen yhden pisteen yhdisteeseen sopivalla tavalla saadaan osoitettua, että ympyröiden yhden pisteen yhdisteen perusryhmä on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän kopioiden vapaan tulon kanssa, joka edelleen on vapaa ryhmä. Myös Van Kampenin teoreema todistetaan.

Kompakti reunallinen pinta osoitetaan homotopiaekvivalentiksi graafin kanssa. Itseasiassa kyseessä ei ole mikä tahansa graafi, vaan graafi, joka muodostuu reunallisen pinnan kolmioinnin 0- ja 1-simplekseistä. Todistus on suoraviivainen deformaatioretraktion konstruktio.

Epäkompaktin pinnan tyhjennyksessä hyödynnetään tietoa pinnan kolmionnin olemassaolosta [1]. Kolmionnin olemassaoloa ei tässä tutkielmassa todisteta. Pinnan tyhjennys tehdään induktiivisesti lähtien liikkeelle yksittäisestä kolmiointiin sisältyvästä 2-simpleksistä ja yhdistämällä siihen sopivasti ympäröiviä 2-simpleksejä kolmioinnin hienonnuksesta. Tyhjennyksessä pidetään huoli siitä, että konstruoidut sisäkkäiset reunalliset pinnat sopivat perusryhmän mielessä hyvin yhteen eli että pienemmän reunallisen pinnan perusryhmän kanta on osa suuremman reunallisen pinnan perusryhmän kantaa. Täsmällisemmin sanottuna todistetaan seuraava lause, joka varmistaa, että edellä mainittu perusryhmien yhteensopivuus toteutuu. Pinnan kolmiointi (K,Λ) määritellään luvussa 3.2.

Lause. *Olkoon F epäkompakti pinta, jolla on kolmiointi (K,Λ). Tällöin on olemassa sellaiset kompaktit reunalliset pinnat $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, joille pätee*

(i) $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$,

(ii) $F_i \subset \operatorname{int} F_{i+1}$ *kaikilla* $i \in \mathbb{N}$,

(iii) jokainen joukon $F_{i+1} \setminus F_i$ komponentti kohtaa joukon F_{i+1} reunan kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja

(iv) jokaisella reunallisella pinnalla F_i on olemassa sellainen kolmiointi (K_i,Λ_i), jolle pätee $\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$.

Tutkielman päätulos on itsessään hyvin mielenkiintoinen, ehkä osin siksi, ettei väite ole mitenkään intuitiivisesti selvä. Kun tietää, että kerran punkteeratun tason $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ perusryhmä on kokonaislukujen ryhmä – siis yhden alkion virittämä vapaa ryhmä – ja kahdesti punkteeratun tason perusryhmä on kahden alkion virittämä vapaa ryhmä, on helppo uskoa, että poistamalla tasosta äärellinen määrä pisteitä, saadaan avaruus, jonka perusryhmä on vapaa ryhmä. Jatkamalla pisteiden poistoa edelleen on jokseenkin helppo uskoa, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ on numeroituvasti äärettömän joukon suhteen vapaa ryhmä. Tutkielman päätulos kuitenkin sanoo jotain vielä enemmän. Soveltamalla tulosta avaruuteen $\mathbb{R}^2 \setminus C$, missä C on topologinen Cantorin joukko, saadaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus C$ perusryhmä on vapaa ryhmä. Itseasiassa kyseinen perusryhmä on vieläpä numeroituvan joukon virittämä. Vastaavaan tapaan on helppo keksiä muita mielenkiintoisia esimerkkejä poistamalla sopivia suljettuja joukkoja miltä tahansa pinnalta.

Tässä tutkielmassa osoitetaan niin epäkompaktin pinnan kuin kompaktin reunallisen pinnan perusryhmät vapaiksi. Onkin luonnolista kysyä, onko myös kompaktin (reunattoman) pinnan perusryhmä aina vapaa. Näin ei kuitenkaan ole, sillä esimerkiksi toruksen $S^1 \times S^1$ perusryhmä on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, joka ei ole vapaa ryhmä.

Tutkielma on jaettu kolmeen lukuun. Ensimmäisessä luvussa esitellään tutkielmassa käytettäviä merkintöjä ja käsitteitä sekä tarvittavaa topologista ja algebrallista teoriaa. Siinä määrin kuin on ollut mahdollista on keskeiset määritelmät ja niitä koskevat aputulokset kuitenkin esitelty vasta juuri ennen niiden käyttöä. Kuten todettu, todistus rakentuu kolmesta osasta. Luvussa 2 esitetään näistä ensimmäinen, eli todistus graafin perusryhmän vapaudesta. Myös Van Kampenin teoreema todistetaan luvussa 2. Koska todistus epäkompaktin pinnan perusryhmän vapaudesta nivoutuu vahvasti todistukseen kompaktin reunallisen pinnan perusryhmän vapaudesta, niin kummatkin näistä on esitetty luvussa 3.

1 Merkintöjä ja esitietoja

1.1 Merkintöjä ja termejä

Tässä tutkielmassa käytetään enimmäkseen standardimerkintöjä. Matemaattisissa merkintätavoissa on kuitenkin jonkin verran vaihtelua, joten esitellään joitakin keskeisimpiä merkintöjä. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avointa yksikköpalloa merkitään symbolilla $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Vastaavaa suljettua yksikköpalloa merkitään $\bar{B}^n$ ja yksikköpallon reunaa $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|= 1\}$. Tässä tutkielmassa yksikköväliä [0,1] merkitään symbolilla I.

Joukko-opin merkinnöistä käytetään standardisymboleja. Merkintä $A \subset B$ kuitenkin pitää sisällään tapauksen, jossa $A = B$. Samaan tapaan algebrallisella merkinnällä $H < G$ tarkoitetaan, että H on ryhmän G aliryhmä, mutta ei välttämättä aito aliryhmä. Vastaavasti normaalin aliryhmän merkintä $H \lhd G$ pitää sisällään tapauksen $H = G$. Lisäksi merkinnällä $X \bigcup_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ tarkoitetaan joukkoa $X \cup (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha)$.

Tutkielmassa käsitellään topologisten avaruuksien perusryhmiä. Tämän vuoksi käsitteet homeomorfisuus, homotopiaekvivalenttius ja isomorfisuus ovat oleellisia. Merkitään $A \approx B$, jos topologinen avaruus A on homeomorfinen avaruuden B kanssa, $A \simeq B$, jos A on homotopiaekvivalentti avaruuden B kanssa ja $G \cong G'$, jos ryhmä G on isomorfinen ryhmän G' kanssa. Merkitään edelleen ryhmän G neutraalialkiota 1_G tai lyhyemmin 1.

Topologian termeistä mainittakoon, että pisteen ympäristöllä tarkoitetaan avointa joukkoa, joka sisältää kyseisen pisteen.

1.2 Esitiedoista

Lukijan oletetaan tuntevan topologian peruskäsitteet, kuten jatkuvuus, topologia ja kompaktisuus. Myös perustiedot algebrasta, kuten ryhmän ja aliryhmän määritelmät, oletetaan tunnetuiksi. Tässä alaluvussa esitellään tutkielman kannalta keskeisimpiä määritelmiä muun muassa algebrallisen topologian ja ryhmäteorian alueilta. Näitä ovat muun muassa perusryhmän ja vapaan ryhmän käsitteet. Joitakin tutkielman kannalta oleellisia tuloksia esitellään ja todistetaan. Tässä tutkielmassa valinta-aksioomaa käytetään sitä erikseen mainitsematta.

1.2.1 Yleistä topologiaa

Kuten todettu, lukijan oletetaan tuntevan topologian peruskäsitteet. Näitä lukija voi halutessaan kerrata esimerkiksi J. Väisälän kirjasta Topologia II [8]. Esitellään kuitenkin tekijätopologian määritelmä.

Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X. Ekvivalenssirelaatio määrittelee joukon X osituksen seuraavasti. Olkoon $x \in X$. Alkion x ekvivalenssiluokka on joukko $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. Olkoon $O \subset P(X)$ ekvivalenssiluokkien joukko. Kokoelmalle O pätee, että $X = \bigcup_{A \in O} A$, $A \neq \varnothing$ ja $A \cap A' = \varnothing$ kaikilla $A,A' \in O$, $A \neq A'$. Siis O on joukon X ositus.

Määritellään kuvaus $\pi \colon X \to O$, $x \mapsto [x]$. Määritellään joukkoon O kuvauksen π (ko)indusoima topologia, toisin sanoen joukko $U \subset O$ on avoin, jos ja vain jos $\pi^{-1}U$ on avoin avauudessa X. Kuvauksen π indusoimaa topologiaa sanotaan *tekijätopologiaksi* ja näin saatua topologista avaruutta $X/{\sim} := O$ avaruuden X *tekijäavaruudeksi*. Usein myös sanotaan, että pisteet, jotka kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan *samaistetaan* tekijäkuvauksessa π.

Jos osituksessa ainoastaan yhdessä ekvivalenssiluokassa $A \in O$ on enemmän kuin yksi alkio, merkitään tekijäavaruutta usein $X/A = X/{\sim}$. Edellä tekijäavaruus määriteltiin lähtien liikkeelle ekvivalenssirelaatiosta. Ekvivalenssirelaatiolla ja joukon X osituksilla on kuitenkin yksi-yhteenvastaavuus, joten myös jokainen joukon X ositus määrittelee tekijäavaruuden. Tekijätopologia on määritelmänsä perusteella hienoin topologia, jolla kuvaus π on jatkuva. Tekijätopologian toteaminen topologiaksi jätetään lukijalle [8].

Esimerkki 1.1. Seuraavat avaruudet ovat esimerkkejä tutuista avaruuksista, jotka ovat (homeomorfismia vaille) tekijäavaruuksia. Homeomorfisuuden tarkastaminen jätetään lukijalle. Mikäli tekijäavaruudet eivät ole lukijalle tuttuja, on homeomorfisuuksien tarkastaminen suositeltavaa.

1. Ympyrä S^1 on homeomorfinen tekijäavaruuden $I/\{0,1\}$ kanssa.
2. Pallo $\bar{B}^2$ on homeomorfinen avaruuden $(I \times S^1)/(\{0\} \times S^1)$ kanssa.
3. Pallopinta S^2 on homeomorfinen avaruuden $\bar{B}^2/S^1$ kanssa.
4. Torus $S^1 \times S^1$ saadaan avaruuden $I \times I$ tekijäavaruutena seuraavasti. Määritellään joukkoon $I \times I$ ekvivalenssirelaatio asettamalla $(0,x) \sim$

$(1,x)$ ja $(x,0) \sim (x,1)$ kaikilla $x \in I$.[1] Tällöin torus on homeomorfinen avaruuden $(I \times I)/\!\sim$ kanssa.

Huomautus 1.1. Topologisessa kontekstissa merkinnällä X/A tarkoitetaan edellä esiteltyä tekijäavaruutta. Algebrassa vastaavaa merkintää käytetään vasempien sivuluokkien joukosta $\{xA\}_{x \in X}$, kun A on ryhmän X aliryhmä. Erityisesti, kun A on ryhmän X normaali aliryhmä, merkinnällä tarkoitetaan sivuluokkien muodostamaa tekijäryhmää. On hyvä huomata, että sivuluokat muodostavat luonnollisella tavalla ryhmän X osituksen. Näin ollen mikäli ryhmässä X on myös topologia, on tekijäryhmä X/A myös topologisen avaruuden X tekijäavaruus. Tässä tutkielmassa merkintää X/A käytetään sekä algebrallisessa että topologisessa merkityksessä.

1.2.2 Homotopia, homotopiaekvivalenssi ja perusryhmä

Homotopia muuntaa kuvauksen toiseksi jatkuvalla tavalla. Homotopian avulla tarkasteltavaa kysymystä voidaan mahdollisesti helpottaa siirtymällä vaikeasti käsiteltävästä kuvauksesta helpommin käsiteltävään kuvaukseen homotooppisesti. Esimerkiksi kompleksianalyysissä analyyttisen funktion integraalit yli homotooppisten (suoristuvien) polkujen ovat yhtäsuuret. Tässä tutkielmassa homotopiaa käytetään muun muassa osoittamaan, että avaruus on homotopiaekvivalentti jonkin aliavaruutensa kanssa. Homotopian käsite antaa siis keinon samaistaa eri objekteja keskenään tietyissä konteksteissa.

Määritelmä 1.1 (Homotopia)**.** Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoot $f\colon X \to Y$ sekä $g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Kuvaus $H\colon X \times I \to Y$ on *homotopia kuvauksesta f kuvaukseen g*, jos se on jatkuva ja jos lisäksi $H(\cdot,0) = f$ ja $H(\cdot,1) = g$. Sanotaan, että kuvaukset f ja g ovat *homotooppisia*, $f \simeq g$, jos on olemassa homotopia kuvauksesta f kuvaukseen g.

Huomautus 1.2. Homotopia määrittelee ekvivalenssirelaation jatkuvien kuvausten $C(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ jatkuva}\}$ joukkoon.

Esimerkki 1.2. (1) Jatkuvat kuvaukset f ja g topologiselta avaruudelta X normiavaruudelle Y ovat homotooppisia.

(2) Identtinen kuvaus $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ ja kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ ovat homotooppisia.

[1] Tarkemmin sanottuna haluttu ekvivalenssirelaatio on tämän relaation virittämä ekvivalenssirelaatio.

Joissain tapauksissa kuvausten homotooppisuus on liian lievä vaatimus sille, että saataisiin jotain tietoa tarkasteltavista avaruuksista. Esimerkiksi kaikki polut ovat keskenään homotooppisia. Homotopialle voidaankin asettaa lisävaatimuksia, esimerkiksi että se pitää jotkin pisteet paikallaan. Seuraavassa määritellään erikoistapauksina tällaisista rajoituksista polku- ja silmukkahomotopiat.

Määritelmä 1.2 (Polku- ja silmukkahomotopia)**.** Olkoot $f,g\colon I \to X$ polkuja siten, että $f(0) = g(0)$ ja $f(1) = g(1)$. Tällöin homotopia $H\colon I \times I \to X$ on *polkuhomotopia*, jos $H(0,t) = f(0)$ ja $H(1,t) = f(1)$ kaikilla $t \in I$. Kun sanotaan, että polut ovat homotooppisia, ja merkitään $f \simeq g$, tarkoitetaan, että ne ovat polkuhomotooppisia. Jos edelleen f ja g ovat silmukoita, toisin sanoen $f(0) = f(1)$, niin tällöin H on *silmukkahomotopia* ja sanotaan, että f ja g ovat homotooppisia silmukoita.

Huomautus 1.3. Polkuhomotopia määrittelee ekvivalenssirelaation joukkoon $\{\gamma\colon I \to X : \gamma \text{ jatkuva}, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}$. Vastaavasti silmukkahomotopia määrittelee ekvivalenssirelaation joukkoon $\{\gamma\colon I \to X : \gamma \text{ jatkuva}, \gamma(0) = a = \gamma(1)\}$. Kyseisten ekvivalenssirelaatioiden määräämiä ekvivalenssiluokkia sanotaan homotopialuokiksi ja polun γ homotopialuokkaa merkitään symbolilla $[\gamma]$.

Usein polkuja on luonnollista ketjuttaa. Jos $f\colon I \to X$ on polku pisteestä a pisteeseen b ja $g\colon I \to X$ on polku pisteestä b pisteeseen d, niin määritellään *yhdistetty polku* $fg\colon I \to X$,

$$t \mapsto \begin{cases} f(2t), & \text{kun } t \in [0,1/2], \\ g(2t-1), & \text{kun } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Vastaava määritelmä toimii myös silmukoiden tapauksessa. On syytä huomauttaa, että polun parametrisoinnilla ei ole merkitystä homotopian kannalta. Esimerkiksi polut $(\alpha\beta)\gamma$ ja $\alpha(\beta\gamma)$ ovat homotopisia keskenään. Yhdistetyn polun määritelmässä siis sillä, että polut kulkevat kaksinkertaisella nopeudella ei ole merkitystä. Yhtä hyvin voitaisiin määritellä esimerkiksi ensimmäinen polku kulkemaan kolminkertaisella nopeudella ja toinen polku puolitoistakertaisella nopeudella.

Silmukoiden tapauksessa edellä määritelty polkujen yhdistäminen indusoi laskutoimituksen homotopialuokkien joukkoon.

Määritelmä 1.3 (Perusryhmä)**.** Olkoon X topologinen avaruus ja $x_0 \in X$. Avaruuden X *perusryhmä kantapisteessä* x_0 on homotopialuokkien joukko $\pi_1(X,x_0) = \{[\alpha] : \alpha \text{ on silmukka avaruudessa } X, \text{ jolle } \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}$ varustettuna laskutoimituksella $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$.

Esitellään seuraavaksi joitakin perusryhmän ominaisuuksia, joiden todistaminen jätetään lukijalle (ks. esim. [3]).

Huomautus 1.4. Olkoon $\pi_1(X,x_0)$ avaruuden X perusryhmä kantapisteessä $x_0 \in X$.

(1) Perusryhmän $\pi_1(X,x_0)$ laskutoimitus $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ on hyvin määritelty. Lisäksi perusryhmä on ryhmä.

(2) Vakiosilmukan e_{x_0}, $t \mapsto x_0$, homotopialuokka on perusryhmän neutraalialkio.

(3) Homotopialuokan $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ käänteisalkio on luokka $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$.

(4) Jos X on polkuyhtenäinen ja $x \in X$, niin $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x)$. Polkuyhtenäisen avaruuden tapauksessa kantapiste saatetaan jättää merkitsemättä.

(5) Olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f *indusoi* (hyvin määritellyn) homomorfismin $f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$, jolle pätee $f_\#[\alpha] = [f \circ \alpha]$ kaikilla silmukoilla $\alpha\colon I \to X$, joilla $\alpha(0) = x_0$.

Määritellään seuraavaksi homotopiaekvivalenssi. Homotopiaekvivalenssin käsite on tärkeä, sillä keskenään homotopiaekvivalenttien avaruuksien perusryhmät ovat isomorfiset. Näin ollen monien avaruuksien perusryhmä voidaan selvittää löytämällä homotopiaekvivalentti avaruus, jonka perusryhmä on jo tunnettu.

Määritelmä 1.4 (Homotopiaekvivalenssi)**.** Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Jatkuva kuvaus $f\colon X \to Y$ on *homotopiaekvivalenssi*, jos on olemassa jatkuva kuvaus $g\colon Y \to X$, jolle pätee sekä $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ että $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Kuvausta g sanotaan kuvauksen f *homotopiakäänteiskuvaukseksi* ja avaruuksia X ja Y *homotopiaekvivalenteiksi*. Tällöin merkitään $X \simeq Y$.

Avaruuksien välinen homeomorfismi on aina homotopiaekvivalenssi. Käänteinen tulos ei kuitenkaan päde. Esimerkiksi avaruudet S^1 ja $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ovat keskenään homotopiaekvivalentteja, mutteivät homeomorfisia.

Lause 1.1. *Olkoot X ja Y homotopiaekvivalentteja topologisia avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi. Tällöin kuvauksen f indusoima homomorfismi $f_\#\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$ on isomorfismi.*

Todistus. Olkoon $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi, $g : Y \to X$ homotopiakäänteiskuvaus ja $H\colon X \times I \to X$ homotopia kuvauksesta $g \circ f$ kuvaukseen id_X. Olkoon $\alpha : I \to X$ silmukka pisteessä x_0. Merkitään $y_0 := f(x_0)$. Määritellään polku $\gamma : I \to X$, $t \mapsto H(x_0,t)$. Tällöin $\gamma(0) = g \circ f(x_0) = g \circ f \circ \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = x_0 = \alpha(0)$.

Määritellään $F\colon I \times I \to X$ kaavalla $F = H \circ (\alpha \times \mathrm{id}_I)$. Nyt $F(s,0) = H(\alpha(s),0) = g \circ f \circ \alpha(s)$ ja $F(s,1) = H(\alpha(s),1) = \alpha(s)$ kaikilla $s \in I$. Siten F on homotopia (muttei silmukkahomotopia) kuvauksesta $g \circ f \circ \alpha$ kuvaukseen α. Osoitetaan, että $g \circ f \circ \alpha$ ja $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ ovat homotooppisia silmukoita. Olkoon $A := \{(s,t) \in I \times I : s \in [1/3t, 1 - 1/3t]\}$. Määritellään $\psi\colon A \to I$ kaavalla

$$(s,t) \mapsto \frac{(s - \frac{1}{3}t)}{(1 - \frac{2}{3}t)},$$

ja edelleen kuvaus $h\colon A \to I \times I$, $(s,t) \mapsto (\psi(s,t),t)$. Näin määritelty kuvaus h on homeomorfismi. Lisäksi pätee, että $h(s,0) = (s,0)$ ja $F(h(s,1)) = \alpha(3(s - 1/3))$ kaikilla $s \in I$. Edelleen $F(h(1/3t,t)) = \gamma(t)$ ja $F(h(1 - 1/3t,t)) = \gamma(t)$ kaikilla $t \in I$. Määritellään nyt $G\colon I \times I \to X$ kaavalla

$$(s,t) \mapsto \begin{cases} \gamma(3s), & \text{kun } s \in [0, 1/3t], \\ F(h(s,t)), & \text{kun } s \in [1/3t, 1 - 1/3t], \\ \gamma^{-1}(3(s-1)+1), & \text{kun } s \in [1 - 1/3t, 1]. \end{cases}$$

Kuvaus on jatkuva, sillä se on paloittain jatkuva ja hyvin määritelty joukossa $\{(s,t) \in I \times I : s = 1/3t \text{ tai } s = 1 - 1/3t\}$. Lisäksi pätee

$$\begin{aligned} &G(0,t) = x_0 = G(1,t), \\ &G(s,0) = F(s,0) = g \circ f \circ \alpha(s) \text{ ja} \\ &G(s,1) = \gamma\alpha\gamma^{-1}(s). \end{aligned}$$

Näin ollen kuvaus G on homotopia silmukasta $g \circ f \circ \alpha$ silmukkaan $\gamma\alpha\gamma^{-1}$. Polun γ määritelmä ei riippunut silmukasta α, joten $[g \circ f \circ \alpha] = [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$ kaikilla silmukoilla $\alpha\colon I \to X$ pisteessä x_0. Erityisesti siis kuvauksen $g \circ f$ indusoima homomorfismi on kantapisteen siirron indusoima homomorfismi, joka on isomorfismi. Siis homomorfismi $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ on isomorfismi. Näin ollen $g_\#$ on surjektio ja $f_\#$ on injektio. Toisaalta, koska myös $g : Y \to X$ on homotopiaekvivalenssi, jolle f on homotopiakäänteiskuvaus, saadaan vastaavalla päättelyllä, että $f_{\#_2} \circ g_\#\colon \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(Y,f(g(y_0)))$ on isomorfismi, missä $f_{\#_2}$ on kuvauksen f indusoima homomorfismi perusryhmältä $\pi_1(X,g(y_0))$ perusryhmälle $\pi_1(Y,f(g(y_0)))$. Näin ollen $f_{\#_2} : \pi_1(X,g(y_0)) \to \pi_1(Y,f(g(y_0)))$ on surjektio. Toisaalta kaikilla $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ pätee

$$\begin{aligned}(f \circ g)_{\#}^{-1} \circ f_{\#_2} \circ (g \circ f)_{\#}[\alpha] &= (f \circ g)_{\#}^{-1}[f \circ g \circ f \circ \alpha] \\ &= (f \circ g)_{\#}^{-1}(f \circ g)_{\#}[f \circ \alpha] \\ &= [f \circ \alpha] = f_{\#}[\alpha],\end{aligned}$$

joten $f_{\#} = (f \circ g)_{\#}^{-1} \circ f_{\#_2} \circ (g \circ f)_{\#}$. Koska kuvaukset $(f \circ g)_{\#}^{-1}$, $f_{\#_2}$ ja $(g \circ f)$ ovat surjektioita, on myös kuvaus $f_{\#}$ surjektio. Näin ollen $f_{\#}$ on isomorfismi.

□

Kuten jo aiemmin todettiin, avaruus S^1 ja punkteerattu taso $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ovat keskenään homotopiaekvivalentteja. Edellisen lauseen nojalla niiden perusryhmät ovat siten isomorfisia. Näin ollen selvittämällä ensin ympyrän S^1 perusryhmä, joka on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän kanssa, saadaan, että $\pi_1(R^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. Tässä tutkielmassa oletetaan ympyrän perusryhmä tunnetuksi. Lukija voi halutessaan löytää tuloksen $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ todistuksen esimerkiksi kirjasta [3].

Eräs erikoistapaus homotopiaekvivalenssista saadaan niin sanotun deformaatioretraktion avulla. Deformaatioretraktio on homotopia, joka kutistaa avaruuden joksikin aliavaruudekseen. Tällöin kyseinen aliavaruus on homotopiaekvivalentti alkuperäisen avaruuden kanssa. Itseasiassa ympyrä $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ on punkteeratun tason $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ deformaatioretrakti.

Määritelmä 1.5 (Deformaatioretraktio)**.** Olkoon X topologinen avaruus, $A \subset X$ aliavaruus ja $\iota \colon A \hookrightarrow X$ inkluusiokuvaus. Jatkuva kuvaus $r \colon X \to A$ on *retraktio*, jos $r|_A = \mathrm{id}_A$. Jos edelleen $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$, niin avaruus A on avaruuden X *deformaatioretrakti*. Vastaavaa homotopiaa sanotaan *deformaatioretraktioksi*.

Huomautus 1.5. (1) Kirjallisuudessa saatetaan deformaatioretraktiolla tarkoittaa edellisessä määritelmässä esiintyvää retraktiota r.

(2) Mikäli $A \subset X$ on deformaatioretrakti, on retraktio r homotopiaekvivalenssi.

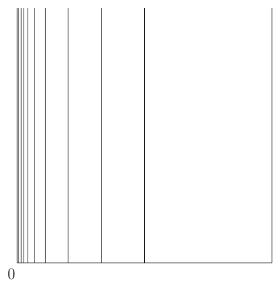
(3) Edellisessä määritelmässä voidaan yhtä hyvin retraktion maaliavaruudeksi valita koko avaruus X ja vaatia, että $r(X) \subset A$. Tällöin deformaatioretraktio määriteltäisiin vastaavasti homotopiana kuvauksesta id_X kuvaukseen r.

(4) Jossakin kirjallisuudessa (esim. [3]) deformaatioretkraktiolta $H : X \times I \to X$ vaaditaan lisäksi, että $H(\cdot, t)|_A = \mathrm{id}_A$ kaikilla $t \in I$. Tällä lisäominaisuudella varustettua deformaatioretraktiota voidaan myös kutsua *vahvaksi deformaatioretraktioksi*. On syytä huomata, että deformaatioretraktion ja vahvan deformaatioretraktion määritelmien ero on merkittävä. Seuraava esimerkki näyttää, että on olemassa deformaatioretrakteja, jotka eivät ole vahvoja deformaatioretrakteja.

Esimerkki 1.3. Olkoon $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n\} \times [0,1])$ ja olkoon $A = \{0\} \times [0,1]$. Määritellään kuvaus $d \colon X \times I \to X$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} (x_1,(1-3t)x_2), & \text{kun } t \in [0,1/3], \\ ((1-3(t-1/3))x_1,0), & \text{kun } t \in [1/3,2/3] \text{ ja} \\ (0,3(t-2/3)x_2), & \text{kun } t \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Kuvaus d on deformaatioretraktio avaruudesta X avaruuteen A.



Kuva 1.1: Avaruus $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n\} \times [0,1])$

Olkoon nyt d' mielivaltainen deformaatioretraktio avaruudesta X avaruuteen A. Osoitetaan, että d' ei ole vahva deformaatioretraktio. Olkoon $0 \neq a = (0,a_2) \in A$ ja olkoon $i \in \mathbb{N}$. Määritellään $x_i := (1/i,a_2)$. Tällöin jono (x_i) suppenee pisteeseen a. Kuvaukset $t \mapsto d'(x_i,t)$ ovat polkuja pisteestä x_i pisteeseen $d'(x_i,1) \in A$, joten jokaisella i on olemassa t_i siten, että $d'(x_i,t_i) = 0$. Koska väli I on kompakti, on olemassa osajono t_{i_j} siten, että $t_{i_j} \to t$ jollakin $t \in I$. Tällöin $(x_{i_j},t_{ij}) \to (a,t)$, kun $j \to \infty$. Erityisesti siis $d'(a,t) = \lim_{j \to \infty} d'(x_{i_j},t_{i_j}) = 0 \neq a$. Siis d' ei ole vahva deformaatioretraktio.

Määritelmä 1.6 (Kutistuva avaruus)**.** Avaruus X on *kutistuva*, jos on olemassa piste $x_0 \in X$ siten, että $\{x_0\}$ on avaruuden X deformaatioretrakti.

Koska deformaatioretraktio indusoi homotopiaekvivalenssin kutistuvan avaruuden ja pisteen välille, on kutistuvan avaruuden perusryhmä *triviaali*[2]. Kuitenkaan kaikki avaruudet, joiden perusryhmä on triviaali, eivät ole kutistuvia. Esimerkiksi pallopinta S^2 on yhtenäinen avaruus, jonka perusryhmä on triviaali, mutta joka ei ole kutistuva [3].

1.2.3 Vapaa ryhmä

Tässä alaluvussa esitellään eri määritelmiä vapaalle ryhmälle. Lisäksi tutkielmassa käytettävät määritelmät osoitetaan ekvivalenteiksi. Määritellään ensin vapaa ryhmä hyvin luonnollisella, joskin konstruktiivisella tavalla aakkoston ja sen aakkosista muodostettujen sanojen kautta [2].

Esimerkiksi kahden alkion vapaa ryhmä voidaan määritellä seuraavalla tavalla. Olkoon $S = \{a,b\}$ *aakkosto*. Kaikkia muotoa $s_1 \cdots s_n$ olevia formaaleja tuloja, missä $s_i \in \{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$, sanotaan *sanoiksi*. *Kirjainta* a ja symbolia a^{-1} sanotaan toistensa vastakirjaimiksi. Vastaavasti b ja b^{-1} ovat toistensa vastakirjaimia. Sanaa sanotaan *supistetuksi*, jos siinä ei esiinny kahta vierekkäistä kirjainta, jotka ovat toistensa vastakirjaimia. Mikäli sana ei ole supistettu, voidaan se aina palauttaa *supistettuun muotoon* supistamalla sanassa esiintyvät kirjain-vastakirjainparit. Kahden alkion vapaa ryhmä on laskutoimituksella varustettu joukko, joka sisältää kaikki kirjaimista a ja b sekä niiden vastakirjaimista muodostuvat supistetut sanat. Lisäksi niin sanottu tyhjä sana kuuluu vapaaseen ryhmään. Sitä merkitään symbolilla 1. Tyhjä sana on muun muassa sanojen $a^{-1}a$ ja bb^{-1} supistettu muoto. Supistettujen sanojen joukkoon määritellään laskutoimitus seuraavalla tavalla. Olkoot $s_1 \cdots s_n$ ja $s'_1 \cdots s'_m$ supistettuja sanoja. Tällöin niiden tulo $(s_1 \cdots s_n)(s'_1 \cdots s'_m)$ on sanan $s_1 \cdots s_n s'_1 \cdots s'_m$ supistettu muoto. Näin määritelty kahden alkion vapaa ryhmä on ryhmä. Sitä merkitään symbolilla $\mathbb{F}_2$.

Määritellään seuraavaksi mielivaltaisen joukon virittämä vapaa ryhmä. Tämä tehdään kuten edellä kahden alkion vapaan ryhmän tapauksessa, mutta täsmällisemmin. Ennen varsinaista määritelmää esitellään tarvittavia merkintöjä, joukkoja ja kuvauksia.

Olkoon S mielivaltainen joukko ja olkoon $k \in \mathbb{N}$. Määritellään $A_k := \{1, \ldots, k\}$, jos $k > 0$, ja $A_0 := \varnothing$. Kuvausta $s : A_k \to S$ sanotaan *sanaksi*, jonka *pituus* on k. Joukkoa S sanotaan *aakkostoksi* ja sen alkioita *kirjaimiksi*. Merkitään $s_j := s(j)$ jokaisella $j \in A_k$. Merkintää $s_1 \cdots s_k$ kutsutaan sanan $s \colon A_k \to S$ esitykseksi. Tyhjän sanan $\emptyset \colon \varnothing \to S$ esitykseksi

[2] Ryhmää, jossa on vain yksi alkio, sanotaan triviaaliksi ryhmäksi

asetetaan 1.

Määritellään joukkoon $W(S) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{s\colon A_k \to S\}$ luonnollinen laskutoimitus, joka on sanojen yhdistäminen. Olkoot $s\colon A_k \to S$ ja $t\colon A_m \to S$ sanoja. Tällöin st on sana $st\colon A_{k+m} \to S$, joka määritellään kaavalla

$$i \mapsto \begin{cases} s_i, & \text{kun } i \leqslant k \text{ ja} \\ t_{i-k}, & \text{kun } i > k\ . \end{cases} \tag{1.1}$$

Toisin sanoen $st = (s_1 \cdots s_k)(t_1 \cdots t_m) = s_1 \cdots s_k t_1 \cdots t_m$. Kaava (1.1) määrittelee laskutoimituksen joukkoon $W(S)$. Kyseisellä laskutoimituksella on neutraalialkio $\varnothing = 1$. Vaikka laskutoimitus on liitännäinen, $W(S)$ ei kuitenkaan ole ryhmä (paitsi tapauksessa $S = \varnothing$), sillä neutraalialkio on ainoa alkio, jolla on käänteisalkio.

Jotta saataisiin määriteltyä ryhmä, täytyy joukon $W(S)$ alkioille määritellä käänteisalkiot. Olkoon $\psi : S \to S \times \{0\} =: S'$ bijektio ja olkoot $v,t \in W(S \bigcup S')$ sanoja. Sana v on sanan t *supistuma*, jos on olemassa kirjain $s \in S$ ja sanat $u_1,u_2 \in W(S \bigcup S')$, joilla on seuraavat ominaisuudet

(i) $v = u_1u_2$ ja

(ii) $t = u_1 s\psi(s)u_2$ tai $t = u_1\psi(s)su_2$.

Huomaa, että supistuman v pituus on pienempi kuin sanan t. Sana v on sanan t *supistettu muoto*, jos sanalla v ei ole olemassa supistumaa, ja jos on olemassa sanat $\{w_i\}_{i=1}^n \subset W(S \bigcup S')$, joille w_i on sanan w_{i+1} supistuma kaikilla $i < n$, ja jos lisäksi $v = w_1$ ja $t = w_n$. Jos sanalla ei ole supistumaa, on se itsensä supistettu muoto. Osoitetaan, että jokaisella sanalla on yksikäsitteinen supistettu muoto.

Apulause 1.2. *Olkoon $t \in W(S \bigcup S')$ sana. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi $v \in W(S \bigcup S')$, joka on sanan t supistettu muoto.*

Todistus. Olkoon $t \in W(S \bigcup S')$ sana ja olkoot $w,v \in W(S \bigcup S')$ sen supistettuja muotoja. Osoitetaan, että $v = w$ induktiolla sanan t pituuden suhteen. Merkitään $s^{-1} = \psi(s)$ kaikilla $s \in S$ ja $\psi(s)^{-1} = s$ kaikilla $\psi(s) \in S'$.

Olkoon sanan t pituus 0 tai 1. Tällöin sanalla t ei ole supistumaa ja sanan t ainoa supistettu muoto on sana t itse. Oletetaan seuraavaksi, että jokaisella sanalla t, jonka pituus on k, on yksikäsitteinen supistettu muoto. Olkoon $t = t_1 \cdots t_{k+2}$ sana, jonka pituus on $k + 2$, ja olkoot w ja v sen supistettuja muotoja. Olkoot $w_1, \ldots, w_m$ sanoja, joille pätee, että w_1 on sanan t supistuma ja sana w_{i+1} on sanan w_i supistuma kaikilla $i < m$, ja

$w_m = w$. Olkoon $(v_1, \ldots, v_n)$ jono supistumia sanasta t sanaan v vastaavalla tavalla. Jos $v_1 = w_1$, niin tällöin v ja w ovat sanan v_1 supistettuja muotoja. Lisäksi sanan v_1 pituus on k, joten sillä on yksikäsitteinen supistettu muoto. Siis $v = w$.

Olkoon nyt $v_1 = v_1'v_2' \neq w_1'w_2' = w_1$, joille $t = v_1'h_1h_1^{-1}v_2' = w_1'h_2h_2^{-1}w_2'$ jollain $h_1,h_2 \in S \bigcup S'$. Nyt $h_1 = t_i$ jollakin $i \leqslant k+2$ ja $h_2 = t_j$ jollakin $j \leqslant k+2$. Voidaan olettaa, että $i < j$. Tällöin $i < j-1$, sillä muuten $v_1 = w_1$. Siis t_j sisältyy sanaan v_2' ja t_i sisältyy sanaan w_1'. Siispä sana $y = t_1 \cdots t_{i-1}t_{i+2} \cdots t_{j-1}t_{j+2} \cdots t_{k+2}$ on sanojen v_1 ja w_1 supistuma. Toisaalta sanan y supistettu muoto on myös sanan v_1 supistettu muoto, joten se on yksikäsitteinen. Näin ollen sanojen v_1 ja w_1 supistetut muodot v ja w ovat samat. □

Koska jokaisella joukon $W(S \bigcup S')$ sanalla on yksikäsitteinen supistettu muoto, voidaan samaistaa sanat, joilla on sama supistettu muoto. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla sanat $s,t \in W(S \bigcup S')$ ekvivalenteiksi, $s \sim t$, jos niillä on sama supistettu muoto. Näin määritelty relaatio on ekvivalenssirelaatio. Merkitään sanan t ekvivalenssiluokkaa symbolilla $[t]$. Määritellään seuraavaksi joukon S virittämä vapaa ryhmä.

Määritelmä 1.7A (Vapaa ryhmä)**.** Olkoon S mielivaltainen joukko. Joukon S *virittämä vapaa ryhmä* on joukko $\mathbb{F}_S := W(S \bigcup S')/\sim$ varustettuna laskutoimituksella $[s][t] = [st]$.

Huomautus 1.6.

1. Edellä määritelty laskutoimitus on hyvin määritelty.
2. Vapaa ryhmä $\mathbb{F}_S$ on ryhmä.
3. Määritelmä ei riipu bijektiosta ψ, vaan eri bijektioilla saadut vapaat ryhmä ovat keskenään isomorfiset. Tämä seuraa myöhemmin todistettavista lauseista 1.3 ja 1.4.
4. Alkion $[s]$ käänteisalkio on $[s^{-1}]$.
5. Kuten usein samankaltaisten tekijäavaruuksien tapauksissa, saatetaan merkitä $s \in \mathbb{F}_s$, vaikka todella tarkoitetaan, että $s \in [s] \in \mathbb{F}_S$.
6. Jos joukko S on äärellinen, merkitään yleensä $\mathbb{F}_{\#S}$. Esimerkiksi merkitään $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

Edellä esitetty vapaan ryhmän määritelmä on hyvin luonnollinen. Ensin valitaan aakkosto, muodostetaan niistä sanat ja määritellään laskutoimitukseksi sanojen yhdistäminen. Lisätyötä vaatii se, että esimerkiksi sanojen $aa^{-1}b$ ja b halutaan edustavan samaa ryhmän alkiota.

Seuraava määritelmä (ks. [7]) on ekvivalentti määritelmän 1.7A kanssa. Näiden määritelmien ekvivalenttius osoitetaan myöhemmin.

Määritelmä 1.7B (Vapaa ryhmä)**.** Ryhmä F on *vapaa ryhmä*, jos on olemassa joukko S ja kuvaus $\psi\colon S \to F$, jolla on seuraava ominaisuus. Olkoon G mielivaltainen ryhmä ja olkoon $\phi\colon S \to G$ kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $h\colon F \to G$, jolle $\phi = h \circ \psi$;

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Tällöin sanotaan, että F *on vapaa joukon* S *suhteen.*

Huomautus 1.7. Tässä tutkielmassa joukkoa $S \subset F$ sanotaan vapaan ryhmä F *kannaksi*, mikäli F on vapaa joukon S suhteen siten, että inkluusiokuvaus $S \hookrightarrow F$ on määritelmän 1.7B mukainen kuvaus ψ.

On hyvä huomata, että määritelmä 1.7B pitää sisällään tapauksen, jossa F on yksiö. Tällöin valitaan joukoksi S tyhjä joukko ja kuvaus ψ tyhjäksi kuvaukseksi.

Osoitetaan seuraavaksi, että määritelmän joukko S itseasiassa karakterisoi täysin ryhmän F, toisin sanoen osoitetaan, että kaikki ryhmät, jotka ovat vapaita joukon S suhteen ovat isomorfisia.

Lause 1.3. *Olkoon S joukko ja olkoot F ja F' ryhmiä, jotka ovat vapaita joukon S suhteen. Tällöin F ja F' ovat keskenään isomorfisia.*

Todistus. Olkoot F ja F' vapaita ryhmiä joukon S suhteen, ja olkoot $\psi : S \to F$ ja $\psi' : S \to F'$ määritelmän 1.7B mukaiset kuvaukset. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset homomorfismit $h\colon F \to F'$ ja $h'\colon F' \to F$, joille kaaviot

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\ & F' \end{tikzcd} \quad \text{ja} \quad \begin{tikzcd} & F \\ S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\ & F' \arrow[uu, "h'"'] \end{tikzcd}$$

kommutoivat. Koska $\psi = h' \circ \psi' = h' \circ h \circ \psi$ ja $\psi' = h \circ h' \circ \psi'$, niin homomorfismit $h' \circ h$ ja $h \circ h'$ ovat vapaan ryhmän määritelmän perusteella yksikäsitteiset homomorfismit, joille kaaviot

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h' \circ h"] & & & F' \arrow[dd, "h \circ h'"] \\ S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \text{ja} & S \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\ & F & & & F' \end{tikzcd}$$

kommutoivat. Toisaalta edellä olevat kaaviot kommutoivat myös, jos $h' \circ h$ ja $h \circ h'$ korvataan homomorfismeilla id_F ja $\mathrm{id}_{F'}$. Näin ollen homomorfismin yksikäsitteisyydestä seuraa, että $h' \circ h = \mathrm{id}_F$ ja $h \circ h' = \mathrm{id}_{F'}$. Siis h on haluttu isomorfismi ja h' sen käänteiskuvaus. $\square$

Edellisen tuloksen nojalla tiedetään, että saman joukon suhteen vapaat ryhmät ovat keskenään isomorfiset. Lause ei kuitenkaan sano mitään siitä, milloin kahden eri joukon suhteen vapaat ryhmät ovat keskenään isomorfisia. Osoittautuu, että kahden eri joukon S ja S' suhteen vapaat ryhmät ovat keskenään isomorfisia täsmälleen silloin, kun joukkojen S ja S' mahtavuudet ovat samat [4].

Määritelmästä 1.7B tai lauseesta 1.3 ei suoraan seuraa, että mielivaltaisella joukolla S olisi olemassa ryhmä, joka on vapaa tämän joukon S suhteen. Osoitetaan seuraavaksi, että määritelmän 1.7A vapaa ryhmä $\mathbb{F}_S$ on vapaa joukon S suhteen. Näin saadaan osoitetuksi lausetta 1.3 hyödyntäen, että kyseiset määritelmät ovat ekvivalentteja. Näin ollen myös jokaiselle joukolle S löytyy ryhmä, joka on joukon S suhteen vapaa.

Lause 1.4. *Olkoon S joukko ja $\mathbb{F}_S$ joukon S virittämä vapaa ryhmä. Tällöin $\mathbb{F}_S$ on vapaa joukon S suhteen.*

Todistus. Olkoon S mielivaltainen joukko ja olkoon $\mathbb{F}_S$ joukon S virittämä vapaa ryhmä. Tapaus $S = \varnothing$ on selvä, joten oletetaan, että $S \neq \varnothing$. Määritellään kuvaus $\psi\colon S \to \mathbb{F}_S$ kaavalla $s \mapsto s$. Osoitetaan, että ψ toteuttaa määritelmän 1.7B ehdon.

Olkoon G ryhmä ja olkoon $\phi\colon S \to G$ kuvaus. Jokaisella $[w] \in \mathbb{F}_S$ on yksikäsitteinen supistettu esitys $w = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_m^{\varepsilon_m}$, jossa $m \in \mathbb{N}$, $s_i \in S$ ja $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$. Määritellään kuvaus $h\colon \mathbb{F}_S \to G$ kaavalla

$$[w] = [s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_m^{\varepsilon_m}] \mapsto \begin{cases} 1, & \text{kun } s = 1 \text{ ja} \\ \phi(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \phi(s_m)^{\varepsilon_m}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Kuvaus on hyvin määritelty homomorfismi, sillä edellisen kaavan mukainen kuvaus kuvaa samoiksi alkioiksi sanat, joilla on sama supistettu muoto. Lisäksi $\phi = h \circ \psi$.

Osoitetaan, että homomorfismi h on ainoa, jolle kaavio

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F}_S \arrow[dd, "h"] \\ S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

kommutoi. Olkoon $h' \colon F \to G$ homomorfismi, jolle $\phi = h' \circ \psi$, ja olkoon $[w] = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_m^{\varepsilon_m} \in \mathbb{F}_S$. Tällöin

$$\begin{aligned} h'([w]) &= h'(s_1^{\varepsilon_1}) \cdots h'(s_m^{\varepsilon_m}) = h'(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots h'(s_m)^{\varepsilon_m} \\ &= \big(h' \circ \psi(s_1)\big)^{\varepsilon_1} \cdots \big(h' \circ \psi(s_m)\big)^{\varepsilon_m} \\ &= \phi(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \phi(s_m)^{\varepsilon_m} = h([w]) \ . \end{aligned}$$

Siis $h = h'$. Näin ollen ryhmä $\mathbb{F}_S$ on vapaa joukon S suhteen. $\square$

2 Graafin[1] perusryhmä

Tässä luvussa osoitetaan, että yhtenäisen graafin perusryhmä on vapaa. Aluksi osoitetaan, että jokaisesta graafista löytyy maksimaalinen puu. Samaistamalla maksimaalisen puun pisteet saadaan tekijäavaruus, joka on homotopiaekvivalentti alkuperäisen graafin kanssa. Tämä tekijäavaruus on edelleen homeomorfinen ympyröiden yhden pisteen yhdisteen kanssa. Soveltamalla Van Kampenin teoreemaa osoitetaan, että ympyröiden yhden pisteen yhdisteen perusryhmä on ympyrän perusryhmien vapaa tulo. Koska ympyrän perusryhmä on isomorfinen kokonaislukujen additiivisen ryhmän kanssa, on graafin perusryhmä täten vapaa ryhmä. Myös Van Kampenin teoreema todistetaan. Tämän luvun todistukset mukailevat Hatcherin kirjassaan esittämiä todistuksia [3].

Intuitiivisesti ajateltuna graafi on joukko pisteitä, jotka yhdistetään viivoilla. Täsmällisemmin sanottuna (topologinen) graafi on CW-kompleksi, joka on enintään 1-ulotteinen.

Määritelmä 2.1 (CW-kompleksi)**.** Topologinen Hausdorff-avaruus X on CW-kompleksi[2], mikäli on olemassa osajoukot $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots$, joilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) Avaruus X on joukkojen X^0, X^1, $\ldots$ yhdiste eli $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$.

(ii) Joukko X^0 on diskreetti joukko[3].

(iii) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa perhe jatkuvia kuvauksia $\{\psi_\alpha : \bar{B}^n \to X\}_{\alpha\in\Lambda_n}$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

a) $X^n = X^{n-1} \bigcup_\alpha e^n_\alpha$, missä $e^n_\alpha = \psi_\alpha(B^n)$,

[1] Usein graafi eli verkko määritellään puhtaan kombinatorisesti parina (V,E), jossa V on mielivaltainen joukko, ns. *kärkipisteiden joukko*, ja E on kokoelma kärkipisteistä muodostuvia pareja. Kokoelman E alkioita kutsutaan *sivuiksi.* Tässä tutkielmassa kuitenkin lähestytään graafia topologisesta näkökulmasta, toisin sanoen graafi on topologinen avaruus. Topologisessa graafissa abstraktit sivut saavat rakenteen: ne ovat homeomorfisia avoimen välin (0,1) kanssa.

[2] Täsmällisemminen sanottuna topologinen avaruus X yhdessä kiinnitetyn solurakenteen X^0,X^1,$\ldots$ kanssa muodostaa CW-kompleksin.

[3] Topologisen avaruuden X osajoukko A on *diskreetti*, jos avaruudelta X periytyvä relatiivitopologia on diskreetti topologia.

b) rajoittuma $\psi_\alpha|_{B^n}\colon B^n \to e^n_\alpha$ on homeomorfismi,

c) $\psi_\alpha(\partial \bar{B}^n) \subset X^{n-1}$,

d) $e^n_\alpha \bigcap X^{n-1} = \varnothing$, sekä

e) $e^n_\alpha \bigcap e^n_\beta = \varnothing$

kaikilla $\alpha, \beta \in \Lambda_n$ ja $\alpha \neq \beta$.

(iv) Avaruuden X topologialle pätee, että joukko $A \subset X$ on suljettu, jos ja vain jos $A \bigcap X^n$ on suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Joukon X^0 alkioita sanotaan 0-*soluiksi*. Joukkoa X^n sanotaan n-*rangoksi* ja avaruudessa X^n avoimia joukkoja e^n_α n-*soluiksi*.

Huomautus 2.1. CW-kompleksin määritelmä on mielekäs; sellaisia on olemassa. Monet tutut topologiset avaruudet ovat CW-komplekseja. Esimerkiksi yksikköympyrä $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ saadaan valitsemalla joukoksi X^0 piste $(-1{,}0)$ ja 1-soluksi avoimen välin $(-1{,}1)$ kuva kuvauksessa $t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$.

Ympyrä S^1 voidaaan myös konstruoida seuraavalla tavalla käyttäen tekijäavaruuksia. Olkoon $X^0 = \{x_0\}$ yksiö. Määritellään kuvaus $\phi\colon S^0 \to X^0$ ja asetetaan $X^1 = X^0 \bigsqcup [-1{,}1]/\sim$, jossa ekvivalenssirelaatio $\sim$ määräytyy samaistamalla pisteet $x \in \partial[-1{,}1]$ kuvapisteidensä kanssa. Toisin sanoen pisteet $x_0, -1$ ja 1 samaistetaan. Tällöin $S^1 \approx X^1$. Tekijäavaruudet antavat keinon konstruioida (abstrakteja) CW-komplekseja.

Vastaava pätee yleisemmin CW-kompleksille. CW-kompleksin n-ranko on homeomorfinen tekijäavaruuden $\left(X^{n-1} \bigsqcup_\alpha \bar{B}^n_\alpha\right)/\sim$ kanssa, missä pallon $\bar{B}^n_\alpha$ reunapisteet samaistetaan kuvapisteidensä kanssa jatkuvissa kuvauksissa $\phi_\alpha\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$. Näitä kuvauksia vastaa edellisessä määritelmässä kuvausten ψ_α rajoittuma pallon $\bar{B}^n$ reunalle.

Seuraava aputulos antaa useisiin tilanteisiin luonnollisen tavan käsitellä CW-kompleksin topologiaa. Sen sijaan, että joukon sulkeutuneisuutta tarkastellaan n-rangoissa, voidaan sitä tarkastella suljetuissa n-soluissa $\bar{e}^n_\alpha := \overline{e^n_\alpha}$. Lisäksi osoitetaan, että $\bar{e}^n_\alpha = \psi_\alpha(\bar{B}^n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \Lambda_n$.

Apulause 2.1. *Olkoon $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ CW-kompleksi. Tällöin $\bar{e}^n_\alpha = \psi_\alpha(\bar{B}^n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $\alpha \in \Lambda_n$. Lisäksi seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) Joukko $A \subset X$ on suljettu.

(ii) Joukko $A \bigcap \bar{e}^n_\alpha$ on suljettu avaruudessa $\bar{e}^n_\alpha$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \Lambda_n$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\bar{e}_\alpha^n = \psi_\alpha(\bar{B}^n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $\alpha \in \Lambda_n$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \Lambda_n$. Kuvaus $\psi_\alpha \colon \bar{B}^n \to X$ on jatkuva, joten joukko $C = \psi_\alpha(\bar{B}^n)$ on kompakti. Koska X on Hausdorff-avaruus, joukko C on myös suljettu. Siten $\bar{e}_\alpha^n \subset C$. Riittää siis osoittaa, että jokainen piste $y \in \psi_\alpha(\partial \bar{B}^n)$ on joukon e_α^n kasautumispiste. Olkoon $x \in \partial \bar{B}^n$ ja olkoon $U \subset X$ pisteen $\psi_\alpha(x)$ ympäristö. Koska ψ_α on jatkuva, on olemassa pisteen x ympäristö V siten, että $\psi_\alpha(V) \subset U$. Erityisesti, koska $x \in \partial \bar{B}^n$, on olemassa $a \in V \bigcap B^n$, jolle $\psi_\alpha(a) \in U$. Siis $\psi_\alpha(x)$ on joukon e_α^n kasautumispiste. Näin ollen $\psi_\alpha(\bar{B}^n) = \bar{e}_\alpha^n$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \Lambda_n$. Jos joukko $A \subset X$ on suljettu, niin tällöin joukko $A \bigcap \bar{e}_\alpha^n$ on suljettu avaruudessa $\bar{e}_\alpha^n$ relatiivitopologian määritelmän perusteella.

Olkoon $A \bigcap \bar{e}_\alpha^n$ suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \Lambda_n$. Osoitetaan, että $A \subset X$ on suljettu eli osoitetaan, että $A \bigcap X^n \subset X^n$ on suljettu avaruudessa X^n kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Joukko $A \cap X^0$ on suljettu avaruudessa X^0, koska X^0 on diskreetti. Oletetaan, että $A \cap X^{n-1}$ on suljettu avaruudessa X^{n-1}. Olkoon $a \in X^n$ joukon $A \cap X^n$ kasautumispiste. Jos $a \in X^{n-1}$, niin a on joukon $A \cap X^{n-1}$ kasautumispiste avaruudessa X^{n-1}. Tällöin $a \in A \cap X^{n-1}$ induktio-oletuksen nojalla. Oletetaan nyt, että $a \notin X^{n-1}$. Tällöin $a \in e_\alpha^n$ jollakin $\alpha \in \Lambda_n$. Olkoon U pisteen a ympäristö avaruudessa $\bar{e}_\alpha^n$. Koska e_α^n on avoin avaruudessa X^n, on joukko $V := U \cap e_\alpha^n$ avoin joukko avaruudessa X^n. Lisäksi $a \in V$. Näin ollen on olemassa piste $x \in A \cap V \subset A \cap U$, joka ei ole piste a. Siis a on joukon $A \cap \bar{e}_\alpha^n$ kasautumispiste avaruudessa $\bar{e}_\alpha^n$. Oletuksen nojalla $A \cap \bar{e}_\alpha^n$ on suljettu avaruudessa $\bar{e}_\alpha^n$, joten $a \in A$. Siis $A \cap X^n$ on suljettu. □

Mikäli avaruus X on CW-kompleksi, jolle $X = X^n$ jollain $n \in \mathbb{N}$ ja $X \neq X^m$ kaikilla $m < n$, niin sanotaan, että X on *n-ulotteinen CW-kompleksi.*

Graafi on siis oleellisesti yhdiste eristetyistä pisteistä ja väleistä I_α, $\alpha \in \Lambda$, missä jokainen välin päätepiste samaistetaan jonkin edellä mainitun eristetyn pisteen kanssa. Erityisesti graafi on muotoa $X^0 \bigcup_\alpha e_\alpha$, jossa X^0 on diskreetti joukko, jokainen e_α on avoin ja $\bar{e}_\alpha$ on homeomorfinen joko välin [0,1] tai ympyrän S^1 kanssa. Joukon X^0 pisteitä kutsutaan *kärkipisteiksi* ja avoimia joukkoja e_α *sivuiksi.*

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisella yhtenäisellä graafilla on maksimaalinen puu. Tätä varten tarvitaan aligraafin, puun ja maksimaalisen puun käsitteet. Graafin $X = X^0 \bigcup_\alpha e_\alpha$ osajoukkoa Y kutsutaan *aligraafiksi*, jos ehdosta $e_\alpha \bigcap Y \neq \varnothing$ seuraa, että $\bar{e}_\alpha \subset Y$. *Puu* on kutistuva graafi.

Jos puu sisältyy graafiin X ja sisältää graafin jokaisen kärkipisteen, sitä sanotaan *maksimaaliseksi puuksi.*

Apulause 2.2. *Olkoon X graafi ja $Y_0 \subset X$ puu, joka on graafin X aligraafi. Tällöin on olemassa graafin X maksimaalinen puu T, joka sisältää puun Y_0 eli $Y_0 \subset T$.*

Todistus. Olkoon $X = X^0 \bigcup_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha$ yhtenäinen graafi ja olkoon $Y_0 \subset X$ aligraafi, joka on puu. Määritellään $Y_1 = Y_0 \bigcup_{\beta\in J_1} \overline{e}_\beta$, missä $J_1 = \{\beta \in \Lambda : e_\beta \subset X \setminus Y_0$ ja $Y_0 \bigcap \overline{e}_\beta \neq \varnothing\}$. Määritellään induktiivisesti $J_n = \{\beta \in \Lambda : e_\beta \subset X \setminus Y_{n-1}$ ja $Y_{n-1} \bigcap \overline{e}_\beta \neq \varnothing\}$ ja $Y_n = Y_{n-1} \bigcup_{\beta\in J_n} e_\beta$ jokaisella $n \geqslant 2$.

Osoitetaan, että joukko $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ on avoin. Olkoon $x \in Y$ ja joukko $U = \{x\} \bigcup_{\alpha\in\mathcal{U}} e_\alpha$, missä $\mathcal{U} = \{\alpha \in \Lambda : x \in \overline{e}_\alpha\}$. Tällöin U on pisteen x ympäristö graafissa X ja lisäksi $U \subset Y$.

Osoitetaan, että Y on myös suljettu. Olkoon x joukon Y kasautumispiste avaruudessa X. Tällöin on olemassa piste $y \in Y$ siten, että $y \in e_\alpha$ ja $x \in \overline{e}_\alpha$ jollakin indeksillä $\alpha \in \Lambda$. Joukon Y konstruktiosta seuraa, että $\overline{e}_\alpha \subset Y_n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti siis $x \in Y_n \subset Y$. Näin ollen Y on suljettu. Koska X on yhtenäinen ja Y on epätyhjä, avoin ja suljettu, niin $X = Y$.

Konstruoidaan seuraavaksi maksimaalinen puu, jonka deformaatioretrakti Y_0 on. Olkoon $T_0 = Y_0$. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukko $A_n = X^0 \bigcap (Y_n \setminus Y_{n-1})$. Toisin sanoen A_n on niiden kärkipisteiden joukko, jotka lisätään joukkoon Y_{n-1} joukkoa Y_n määriteltäessä. Määritellään T_n induktiivisesti seuraavalla tavalla. Jokaiselle $a \in A_n$ valitaan sivu e_{α_a} siten, että $a \in \overline{e}_{\alpha_a}$ ja $\overline{e}_{\alpha_a} \bigcap T_{n-1} \neq \varnothing$. Asetetaan $T_n = T_{n-1} \bigcup_{a\in A_n} \overline{e}_{\alpha_a}$. Näin jatkamalla saadaan graafin X aligraafi $T = \bigcup_n T_n$.

Graafin T konstruktiosta seuraa, että $X^0 \subset T$ eli T sisältää kaikki alkuperäisen graafin kärkipisteet. Näin ollen T on maksimaalinen puu, mikäli se on puu. Osoitetaan, että T on kutistuva.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in A_n$. Olkoon kuvaus $h_a \colon \overline{e}_{\alpha_a} \to I$ homeomorfismi, jolle $h_a(a) = 1$ ja olkoon $\hat{H} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ homotopia kuvauksesta $\mathrm{id}_{[0,1]}$ vakiokuvaukseen $x \mapsto 0$. Määritellään kuvaus $H_n \colon T_n \times [0,1] \to T_n$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} x, & \text{kun } x \in T_{n-1} \\ h_a^{-1} \circ \hat{H}(h_a(x),t), & \text{kun } x \in \overline{e}_{\alpha_a} \end{cases}.$$

Näin määritelty kuvaus H_n määrittää homotopian identtisestä kuvauksesesta id_{T_n} retraktioon $\pi \colon T_n \to T_n$,

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{kun } x \in T_{n-1} \\ h_a^{-1}(x), & \text{kun } x \in \overline{e}_{\alpha_a}, \end{cases}$$

jonka kuvajoukko on T_{n-1}.

Haluttu deformaatioretraktio joukosta T joukkoon T_0 saadaan asettamalla $H\colon T \times [0,1] \to T$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto H_n(\cdots(H_{m-1}(H_m(x,1),1),\cdots),2^n(t-2^{-n})),$$

kun $x \in T_m$, $t \in [2^{-n},2^{-n+1}]$ ja $m \geqslant n$, sekä kaavalla

$$(x,t) \mapsto x,$$

kun $x \in T_n$ ja $t < 2^{-n}$. Näin määritelty kuvaus oleellisesti ketjuttaa homotopioita H_n: joukko T_n pysyy paikoillaan aikavälillä $t \in [0,2^{-n}]$, jonka jälkeen aikavälillä $[2^{-n},2^{-n+1}]$ se kutistuu joukoksi T_{n-1} homotopiassa H_n, siitä edelleen joukoksi T_{n-2} ja näin jatkaen lopulta puuksi T_0.

Osoitetaan, että kuvaus H on jatkuva. Olkoon $x \in T$ ja $t \in (0,1]$. Osoitetaan, että H on jatkuva pisteessä (x,t). Olkoon V pisteen $H(x,t)$ ympäristö. Olkoon $m \in \mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku jolle pätee, että $x \in T_m$, ja olkoon $n \in \mathbb{N}$ pienin luonnollinen luku jolle pätee, että $t \in [2^{-n},2^{-n+1}]$. Jos $n = m$, niin tällöin on olemassa pisteen $(x,2^n(t-2^{-n})$ ympäristö $U' = U'_x \times ((c,b) \cap [0,1])$ siten, että $H_n(U') \subset V$. Olkoot $c_n := 2^{-n}c + 2^{-n}$ ja $b_n := 2^{-n}b + 2^{-n}$. Tällöin on olemassa korkeintaan yksi $a \in A_{n+1}$ siten, että $x \in \bar{e}_{\alpha_a}$. Jos tällainen a on olemassa, asetetaan

$$U := (e_{\alpha_a} \cup U'_x) \times \left(\left((c_n,b_n) \cap [2^{-n},2^{-n+1}]\right) \cup (2^{-n-1},2^{-n})\right),$$

muuten asetetaan

$$U := U'_x \times \left(\left((c_n,b_n) \cap [2^{-n},2^{-n+1}]\right) \cup (2^{-n-1},2^{-n})\right).$$

Tällöin joukko U on avoin ja lisäksi $H(U) \subset V$. Tapaukset $m > n$ saadaan vastaavaan tyyliin hyödyntäen induktiota luvun m suhteen.

Jos $m < n$, niin tällöin V on pisteen (x,t) ympäristö. Tällöin joukko $U := ((V \cap T_n) \cup e_{\alpha_a}) \times [0,2^{-n})$ on avoin ja pätee $H(U) = V \cap T_n \subset V$. Siis H on jatkuva pisteessä (x,t).

Osoitetaan, että kuvaus H on jatkuva pisteessä $(x,0) \in T \times \{0\}$. Olkoot $x \in T$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in T_n$. Valitaan $t_0 < 2^{-n-2}$ ja pisteen x ympäristö U siten, että $U \subset T_{n+1}$. Näin saadaan pisteen $(x,0)$ ympäristö $V = U \times [0,t_0)$, jolle $H(y,t) = x$ kaikilla $(y,t) \in V$.

Kuvaus H on siis jatkuva ja määrää deformaatioretraktion avaruudesta T avaruuteen T_0. Graafi T on siis maksimaalinen puu, jonka deformaatioretrakti puu $Y_0 = T_0$ on. $\square$

Esimerkki 2.1. Kokonaislukuhila $X = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ on yhtenäinen graafi. Sen eräs maksimaalinen puu on $T = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

Edellä osoitettiin, että jokainen graafin aligraafi, joka on puu, sisältyy maksimaaliseen puuhun. On kuitenkin hyvä huomata, että mikään maksimaalinen puu ei sisällä kaikkia graafin puita, jos graafi ei itsessään ole puu.

Tavoitteena on tarkastella graafin perusryhmää hyödyntämällä tietoa maksimaalisen puun olemassaolosta. Sitä varten tarvitaan kaksi teknistä aputulosta, joiden avulla voidaan osoittaa, että graafi ja tekijäavaruus, jossa maksimaalisen puun alkiot samaistetaan yhdeksi pisteeksi, ovat homotopiaekvivalentteja.

Ensimmäinen aputuloksista antaa tiedon, että parilla (X,T), jossa X on graafi ja T on maksimaalinen puu, on niin sanottu homotopian laajennusominaisuus.

Määritelmä 2.2 (Homotopian laajennusominaisuus)**.** Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Parilla (X,A) sanotaan olevan *homotopian laajennusominaisuus*, jos jokaisella jatkuvalla kuvauksella $\hat{H}\colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ on olemassa jatkuva kuvaus $H\colon X \times I \to Y$ siten, että $H|_{(X\times\{0\})\cup(A\times I)} = \hat{H}$.

Huomautus 2.2. Edellisessä määritelmässä on todella kyse homotopian laajentamisesta. Olkoon $\hat{H}\colon A \times I \to Y$ homotopia kuvauksesta $f_1\colon A \to Y$ kuvaukseen $f_2\colon A \to Y$. Jos lisäksi on olemassa jatkuva kuvaus $g_1\colon X \to Y$, jolle $g|_A = f_1$, niin tällöin parin (X,A) homotopian laajennusominaisuuden nojalla on olemassa homotopia $H\colon X \times I \to Y$ kuvauksesta g kuvaukseen $H(\cdot,1)$, jolle rajoittumakuvaus $H|_{A\times I} = \hat{H}$. Siis H on homotopian $\hat{H}$ laajennus.

Osoitetaan vielä ennen varsinaisia aputuloksia seuraava tulos, joka kertoo, milloin avaruudella ja sen aliavaruudella on homotopian laajennusominaisuus.

Apulause 2.3. *Parilla* (X,A) *on homotopian laajennusominaisuus, jos ja vain jos* $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ *on avaruuden* $X \times I$ *retrakti.*

Todistus. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$ osajoukko siten, että parilla (X,A) on homotopian laajennusominaisuus. Olkoon $\mathrm{id}\colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, $x \mapsto x$. Tällöin homotopian laajennusominaisuudesta seuraa, että on olemassa jatkuva kuvaus $H\colon X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, jolle $H|_{(X\times\{0\})\cup(A\times I)} = \mathrm{id}$. Siis avaruus $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ on avaruuden $X \times I$ retrakti.

Olkoon nyt $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ avaruuden $X \times I$ retrakti ja olkoon $r\colon X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ retraktio. Olkoon lisäksi Y topologinen avaruus ja $\hat{H}\colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ jatkuva kuvaus. Nyt kuvaus $\hat{H} \circ r\colon X \times I \to Y$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva ja siten parilla (X,A) on homotopian laajennusominaisuus. $\square$

Seuraavaa tulosta varten tarvitaan CW-parin määritelmä. Olkoon X CW-kompleksi ja $A \subset X$ suljettu joukko. Pari (X,A) on *CW-pari*, jos A on yhdiste CW-kompleksin X soluista.

Apulause 2.4. *Olkoon (X,A) CW-pari. Tällöin $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ on kompleksin X deformaatioretrakti. Erityisesti parilla (X,A) on homotopian laajennusominaisuus.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että joukko $\big(\bar{B}^n \times \{0\}\big) \cup (S^{n-1} \times I)$ on avaruuden $\bar{B}^n \times I$ deformaatioretrakti, toisin sanoen osoitetaan, että on olemassa retrakti $r\colon \bar{B}^n \times I \to \bar{B}^n \times I$ avaruudesta $\bar{B}^n \times I$ avaruuteen $\big(\bar{B}^n \times \{0\}\big) \cup (S^{n-1} \times I)$ ja homotopia $H\colon \big(\bar{B}^n \times I\big) \times I \to \bar{B}^n \times I$ kuvausten r ja $\mathrm{id}_{\bar{B}^n \times I}$ välillä. Avaruudet $\bar{B}^n$ ja $[-1,1]^n$ ovat homeomorfisia, joten $\bar{B}^n \times I \approx [-1,1]^n \times I$. Homeomorfismi $h\colon \bar{B}^n \times I \to [-1,1]^n \times I$ voidaan valita siten, että $h\left(\big(\bar{B}^n \times \{0\}\big) \cup (S^{n-1} \times I)\right) = ([-1,1]^n \times \{0\}) \cup (\partial[-1,1]^n \times I)$. Näin ollen riittää osoittaa, että $([-1,1]^n \times \{0\}) \cup (\partial[-1,1]^n \times I)$ on avaruuden $[-1,1]^n \times I$ deformaatioretrakti.

Määritellään kuvaus $r_1\colon [-1,1]^n \times I \to [-1,1]^n \times I$ kaavalla $(x,t) \mapsto (x,t|x|_{\infty,n})$, missä $|\cdot|_{\infty,n}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ maksiminormi. Määritellään kuvaus $r_2\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ kaavalla $x \mapsto (0,1) + \frac{x-(0,1)}{|x-(0,1)|_{\infty,n+1}}$. Kuvaukset r_1 ja r_2 ovat jatkuvia ja yhdisetty kuvaus $r = r_2 \circ r_1$ on retrakti avaruudesta $[-1,1]^n \times I$ avaruuteen $([-1,1]^n \times \{0\}) \cup (\partial[-1,1]^n \times I)$. Edelleen määrittelemällä $H_n\colon ([-1,1]^n \times I) \times I \to ([-1,1]^n \times I) \times I$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto (1-t)\mathrm{id}_{([-1,1]^n \times I)}(x) + tr(x)$$

saadaan haluttu deformaatioretraktio. Näin määritelty kuvaus todella on mielekäs, koska joukko $[-1,1]^n \times I$ on konveksi.

Olkoon $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ CW-kompleksi ja olkoon $A \subset X$ alikompleksi, eli suljettu osajoukko, joka koostuu kompleksin X soluista. Osoitetaan ensin, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ joukko $(X^n \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A^n) \times I)$ on joukon $X \times I$ retrakti.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Avaruuden X n-rangolle pätee $X^n = X^{n-1} \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} \bar{e}^n_\alpha = X^{n-1} \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} \psi_\alpha(\bar{B}^n_\alpha)$, jossa kuvaukset $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ ovat kuten CW-kompleksin määritelmässä. Olkoon $A^{n-1} = A \cap X^{n-1}$. Tällöin on olemassa indeksijoukko $\tilde{\Lambda}_n \subset \Lambda_n$ siten, että $A^n = A^{n-1} \bigcup_{\alpha \in \tilde{\Lambda}_n} \bar{e}^n_\alpha = A^{n-1} \bigcup_{\alpha \in \tilde{\Lambda}_n} \psi_\alpha(\bar{B}^n)$. Määritellään kaikilla $\alpha \in \Lambda$ kuvaus $\Phi_\alpha \colon \bar{B}^n \times I \to X^n \times I$ kaavalla $(x,t) \mapsto (\psi_\alpha(x),t)$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} X^n \times I &= \left(X^n \times \{0\} \bigcup \left(X^{n-1} \cup A^n\right) \times I\right) \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n \setminus \tilde{\Lambda}_n} (\psi_\alpha(\bar{B}^n) \times I) \\ &= \left(X^n \times \{0\} \bigcup \left(X^{n-1} \cup A^n\right) \times I\right) \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n \setminus \tilde{\Lambda}_n} (\Phi_\alpha(\bar{B}^n \times I)). \end{aligned}$$

Määritellään kuvaus $d_n \colon (X^n \times I) \times I \to X^n \times I$ kaavalla

$$(x,t,s) \mapsto \begin{cases} (x,t), & \text{kun } (x,t) \in (X^n \times \{0\}) \bigcup ((X^{n-1} \cup A^n) \times I) \\ \Phi_\alpha(H_n(y,s)), & \text{kun } (x,t) = \Phi_\alpha(y). \end{cases}$$

Kuvaus on hyvin määritelty, sillä kaikilla $y \in \partial \bar{B}^n \times I$ ja kaikilla $s \in I$ pätee $H_n(y,s) = (y,s)$. Näin ollen kuvaus d_n on myös jatkuva, sillä se on jatkuvien kuvausten (äärellisenä) paloittaisena yhdisteenä paloittain jatkuva ja määritelmät yhtenevät eri määrittelyjoukkojen yhteisillä reunoilla. Lisäksi pätee

$$\begin{aligned} d_n(\cdot,\cdot,0) &= \mathrm{id}_{X^n \times I}, \\ d_n(\cdot,\cdot,1)|_{X^n \times \{0\} \bigcup (X^{n-1} \cup A^n) \times I} &= \mathrm{id}_{X^n \times \{0\} \bigcup (X^{n-1} \cup A^n) \times I} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} d_n(x,t,\cdot) \in & \left(X^n \times \{0\} \bigcup \left(X^{n-1} \cup A^n\right) \times I\right) \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n \setminus \tilde{\Lambda}_n} \Phi_\alpha(\bar{B}^n \times \{0\} \bigcup \partial \bar{B}^n \times I) \\ & \subset (X^n \times \{0\}) \bigcup \left(\left(X^{n-1} \cup A^n\right) \times I\right) \end{aligned}$$

kaikilla $(x,t) \in (X^n \times \{0\}) \bigcup ((X^{n-1} \cup A^n) \times I)$. Kuvaus d_n on näin ollen vahva deformaatioretraktio avaruudesta $X^n \times I$ avaruuteen

$$(X^n \times \{0\}) \bigcup \left(\left(X^{n-1} \cup A^n\right) \times I\right).$$

Ketjuttamalla homotopiat d_n määritellään kuvaus $d_\infty \colon X \times I \times I \to X \times I$ seuraavalla tavalla. Olkoot $x \in X \times I$ ja $t \in I$. Määritellään $m := \min\{n \in \mathbb{N} \colon x \in X^n \times I\}$ ja asetetaan

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} x, & \text{kun } t < 2^{-m} \text{ ja} \\ d_m(x,2^m t - 1), & \text{kun } t \in [2^{-m},2^{-m+1}]. \end{cases}$$

Oletetaan nyt induktiivisesti, että

$$d'_{x,m-k+1} := d_{m-k+1}(\cdots(d_{m-1}(d_m(x,1),1),\cdots),1) \in X^{m-k} \times I.$$

Asetetaan tällöin

$$(x,t) \mapsto d_{m-k-1}(d_{m-k}(d'_{x,m-k+1},1), 2^{m-k-1}t - 1),$$

kun $t \in [2^{-m-k-1}, 2^{-m-k}]$ ja $d_{m-k}(d'_{x,m-k+1},1) \in X^{m-k-1} \times I$, sekä

$$(x,t) \mapsto d_{m-k}(d'_{x,m-k+1},1),$$

kun $t \in [2^{-m-k-1}, 2^{-m-k}]$ ja $d_{m-k}(d'_{x,m-k+1},1) \notin X^{m-k-1} \times I$.

Näin määritellyn kuvauksen d_∞ jatkuvuus seuraa kuvausten d_n jatkuvuudesta ja siitä, että joukot $X^n \times I$ ovat suljettuja; joukon $U \in X \times I$ alkukuvan leikkaus joukon $X^n \times I \times I$ kanssa on $d_\infty^{-1}(U) \cap (X^n \times I \times I) = \bigcup_{i=1}^n d_i^{-1}(U \cap X^i \times I)$.

Osoitetaan, että näin saatu homotopia on deformaatioretraktio avaruudesta $X \times I$ avaruuteen $(X \times \{0\}) \cup ((X^0 \cup A) \times I)$. Olkoon $x \in X \times I$ ja olkoon n siten, että $x \in X^n \times I$. Nyt $d_\infty(x,2^{-(n-1)}) \in (X^n \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A^n)\times)$. Jos $d_\infty(x,2^{-(n-1)}) \notin X^{n-1} \times I$, niin tällöin $d_\infty(x,1) = d_\infty(x,2^{-(n-1)}) \in (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Jos taas $d_\infty(x,2^{-(n-1)}) \in X^{n-1} \times I$, niin tällöin $d_\infty(x,2^{-(n-2)}) \in (X^{n-1} \times \{0\}) \cup ((X^{n-2} \cup A^{n-1}) \times I)$. Näin jatkamalla saadaan, että $d_\infty(x,1) \in (X \times \{0\}) \cup ((X^0 \cup A) \times I)$. Osoitetaan edelleen $d_\infty(x,t) = x$ kaikilla $x \in (X \times \{0\}) \cup ((X^0 \cup A) \times I)$. Tarkastellaan kolmea tapausta:

(i) Olkoon $x \in X \times \{0\}$ ja olkoon $m = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in X^n \times I\}$. Tällöin $x \in X^n \times I$ kaikilla $n \geqslant m$ ja siten $d_\infty(x,t) = x$, kun $t \leqslant 2^{-(m-1)}$. Toisaalta $x \notin X^n \times I$ millään $n < m$, joten $d_\infty(x,t) = x$, kun $t > 2^{-(m-1)}$.

(ii) Olkoon $x \in X^0 \times I$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $x \in X^{n-1} \times I$, joten $d_\infty(x,t) = x$ kaikilla $t \in I$.

(iii) Olkoon $x \in A \times I$. Jos $x \in X^n \times I$, niin $x \in A^n \times I$. Siten $d_\infty(x,t) = x$ kaikilla $t \in I$.

Siis kuvaus d_∞ on vahva deformaatioretraktio avaruudesta $X \times I$ aliavaruuteen $(A \times \{0\}) \cup ((X^0 \cup A) \times I)$. Edelleen $X^0 \times \{0\}$ on avaruuden $X^0 \times I$ deformaatioretraktio esimerkiksi kuvauksella $r : (X^0 \times I) \times I \to X^0 \times I$, $(x,s,t) \mapsto (x,s(1-t))$. Ketjuttamalla edelleen kuvaukset d_∞ ja r saadaan deformaatioretraktio avaruudesta $X \times I$ avaruuteen $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.

$\square$

Seuraava aputulos kertoo, että jos parilla (X,A) on homotopian laajennusominaisuus ja lisäksi A on kutistuva, niin tällöin avaruudet X ja X/A ovat homotopiaekvivalentteja. Erityisesti siis graafi X, jolla on maksimaalinen puu T, on homotopiaekvivalentti tekijäavaruuden X/T kanssa ja siten niiden perusryhmät ovat isomorfiset.

Apulause 2.5. *Olkoon (X,A) pari, jolla on homotopian laajennusominaisuus. Olkoon lisäksi A kutistuva. Tällöin tekijäkuvaus $\pi : X \to X/A$ on homotopiaekvivalenssi.*

Todistus. Olkoon $H_1 \colon A \times I \to A$ homotopia identtisestä kuvausesta id_A vakiokuvaukseen x_0. Määritellään $\hat{H}_1 \colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to X$, $\hat{H}_1(x,t) = H_1(x,t)$, kun $x \in A$ ja $\hat{H}_1(x,t) = x$ muuten. Homotopian laajennusominaisuudesta seuraa, että on olemassa kuvauksen $\hat{H}_1$ laajennus $H \colon X \times I \to X$. Joukon $A \times I$ kuva sisältyy joukkoon A kuvauksessa H, joten $\pi \circ H(A,t) = \pi(A)$ kaikilla $t \in I$. Näin ollen voidaan määritellä kuvaus $G \colon X/A \times I \to X/A$ asettamalla $G(\pi(x),t) = \pi \circ H(x,t)$, kun $x \notin A$, ja $G(x,t) = \pi(A)$, kun $x = \pi(A)$. Tällöin $\pi \circ H(x,t) = G(\pi(x),t)$ kaikilla $(x,t) \in X \times I$. Osoitetaan, että G on jatkuva. Olkoon $U \subset X/A$ avoin. Joukon U alkukuva kuvauksessa G on $G^{-1}(U) = (\pi \times \mathrm{id})(H^{-1}(\pi^{-1}(U)))$. Olkoon $t \in I$. Jos leikkaus $(A \times \{t\}) \cap H^{-1}(\pi^{-1}(U))$ on epätyhjä, on se silloin koko joukko $A \times \{t\}$. Siten $\pi^{-1}(\pi(H^{-1}(\pi^{-1}(U)))) = H^{-1}(\pi^{-1}(U))$ ja joukko $G^{-1}(U)$ on avoin, jos ja vain jos $H^{-1}(\pi^{-1}(U))$ on avoin. Kuvaus G on siis jatkuva, sillä kuvaukset H ja π ovat jatkuvia. Kuvauksen G määritelmän perusteella kaavio

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi \times \mathrm{id}"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/A \times I \arrow[r, "G"'] & X/A \end{tikzcd}$$

kommutoi. Koska $H(\cdot,1)|_A$ on vakiokuvaus x_0, on $H(A,1) = x_0$ ja siten löytyy kuvaus $g \colon X/A \to X$, jolle $g \circ \pi = H(\cdot,1)$. Kuvauksen g jatkuvuus saadaan vastaavalla päättelyllä kuin kuvauksen G tapauksessa. Nyt kaikilla $x \in X/A$

$$\pi \circ g(x) = \pi \circ g \circ \pi(\hat{x}) = \pi \circ H(\hat{x},1) = G(\pi(\hat{x}),1) = G(x,1),$$

missä $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$. Täten kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H(\cdot,1)"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/A \arrow[r, "G(\cdot,1)"'] \arrow[ur, "g"] & X/A \end{tikzcd}$$

kommutoi. Siis $\pi \circ g = G(\cdot,1)$. Kuvaus g on kuvauksen π homotopiakäänteiskuvaus, sillä $\pi \circ g = G(\cdot,1) \simeq G(\cdot,0) = \mathrm{id}_{X/A}$ ja $g \circ \pi = H(\cdot,1) \simeq H(\cdot,0) = \mathrm{id}_X$. Kuvaus π on siis homotopiaekvivalenssi. $\square$

Tähänastisten tulosten avulla voimme jo osoittaa, että graafin X perusryhmä on isomorfinen tekijäavaruuden X/T perusryhmän kanssa, missä T on graafin X maksimaalinen puu. Jotta voimme osoittaa, että graafin perusryhmä on vapaa, täytyy vielä tunnistaa, mikä avaruus X/T on, ja osoittaa, että sen perusryhmä on vapaa ryhmä.

2.1 Van Kampenin teoreema

Van Kampenin teoreema antaa yhteyden topologisen avaruuden perusryhmän ja sen osien perusryhmien vapaan tulon välille. Sen avulla esimerkiksi kahdesti punkteeratun tason perusryhmän selvittäminen saadaan palautettua kerran punkteeratun tason perusryhmän selvittämiseen. Van Kampenin teoreeman muotoilemiseksi tarvitaan ryhmien vapaan tulon käsite.

Olkoon $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kokoelma ryhmiä. Määritellään $S := \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Kuten vapaan ryhmän tapauksessa määritellään kaikkien sanojen joukkoon $W(S)$ ekvivalenssirelaatio seuraavalla tavalla.

Olkoot $w_1,w_2 \in W(S)$ sanoja ja olkoot $g_1,g_2 \in G_\alpha$ alkioita jollakin $\alpha \in \Lambda$. Merkitään $h = g_1g_2 \in G_\alpha$ ja sanotaan, että sana w_1hw_2 on sanan $w_1g_1g_2w_2$ *supistuma*. Edelleen sana w_1w_2 on sanan $w_1 1_{G_\alpha} w_2$ supistuma kaikilla $\alpha \in \Lambda$. Sana v on *supistetussa muodossa*, mikäli ei ole olemassa sanaa, joka olisi sanan v supistuma. Muokkaamalla hieman apulauseen 1.2 todistusta voidaan osoittaa, että jokaisella sanalla $v \in W(S)$ on yksikäsitteinen supistettu muoto.

Kuten vapaan ryhmän tapauksessa, asetetaan joukkoon $W(S)$ ekvivalenssirelaatio $\sim_*$, jossa kaksi sanaa ovat ekvivalentteja, mikäli niillä on sama supistettu muoto. Nyt voidaan määritellä ryhmien vapaa tulo.

Määritelmä 2.3 (Vapaa tulo)**.** Olkoon $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kokoelma ryhmiä. *Ryhmien* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *vapaa tulo* $\ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ on joukko $W(\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha)/\sim_*$ varustettuna laskutoimituksella $[v][t] = [vt]$.

Huomautus 2.3. Vapaan tulon määritelmässä esiintyvä laskutoimitus on hyvin määritelty. Tämä seuraa yksikäsitteisen supistetun muodon olemassaolosta.

Huomautus 2.4. Ryhmien vapaa tulo voidaan myös nähdä eräänä vapaan ryhmän tekijäryhmänä. Olkoon $S := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Sanotaan, että sana $v_1 \cdots v_{n-1} h v_{n+2} \cdots v_m \in W(S)$ on saatu sanasta $v_1 \cdots v_n v_{n+1} \cdots v_m \in W(S)$ *supistamalla*, jos $v_n, v_{n+1} \in G_\alpha$ jollakin $\alpha \in \Lambda$ ja $h = v_n v_{n+1}$. Määritellään edelleen joukko $\hat{S} \subset S$ valitsemalla jokaisesta alkio-vasta-alkioparista toinen. Lisäksi vaaditaan, että $1_{G_\alpha} \notin \hat{S}$ millään $\alpha \in \Lambda$. Asetetaan kaksi sanaa ekvivalenteiksi ryhmässä $\mathbb{F}_{\hat{S}}$, $x \sim y$, jos x saadaan sanasta y äärellisellä määrällä supistuksia ja sen käänteisoperaatioita. Tällöin $\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = \mathbb{F}_{\hat{S}}/\!\sim$. On hyvä huomata, että ekvivalenssirelaation $\sim$ määritelmässä täytyy käyttää apuna joukkoa $W(S)$, jotta esimerkiksi sanat 1 ja abc ovat ekvivalentteja, mikäli $a^{-1} = bc$.

Osoitetaan seuraavaksi, että ryhmien vapaan tulon määritelmä on mielekäs, eli se todella määrittelee ryhmän. Todistuksessa käytetään hyödyksi niin sanottua *permutaatioryhmää*, joka määritellään seuraavasti. Olkoon S epätyhjä joukko. Tällöin joukko $\mathrm{Perm}(S) := \{f\colon S \to S : f \text{ on bijektio}\}$ varustettuna kuvausten yhdistämisellä on permutaatioryhmä. Permutaatioryhmä on todella ryhmä, kuten lukija voi helposti tarkistaa.

Apulause 2.6. *Ryhmien vapaa tulo on ryhmä.*

Todistus. Olkoon $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kokoelma ryhmiä ja olkoon $\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ niiden vapaa tulo. Tyhjä sana 1 on laskutoimituksella varustetun joukon $\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ neutraalialkio. Jokaisella alkiolla $(g_1 \cdots g_n) \in \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ on käänteisalkio $(g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}) \in \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$.

Osoitetaan, että laskutoimitus on assosiatiivinen. Todistetaan assosiatiivisuus käyttäen hyödyksi tietoa, että joukon $\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ permutaatioiden joukko varustettuna kuvausten yhdistämisellä muodostaa ryhmän. Kaikilla $\alpha \in \Lambda$ ja kaikilla $g \in G_\alpha$ määritellään kuvaus $L_g\colon \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \to \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, $(g_1 \cdots g_n) \mapsto g(g_1 \cdots g_n)$. Koska G_α on ryhmä kaikilla $\alpha \in \Lambda$, pätee kaikille $g, g' \in G_\alpha$, että $L_g \circ L_{g'} = L_{gg'}$. Siten $L_g \circ L_{g^{-1}} = \mathrm{id}_{\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha} = L_{g^{-1}} \circ L_g$ kaikilla $\alpha \in \Lambda$ ja kaikilla $g \in G_\alpha$. Siis kuvaus $L_g \in \mathrm{Perm}(\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Määritellään kuvaus $L\colon \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \to \mathrm{Perm}(\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$, $(g_1 \cdots g_n) \mapsto L_{g_1} \cdots L_{g_n}$. Osoitetaan, että L on injektiivinen kuvaus, jolle pätee $L(ww') = L(w)L(w')$ kaikilla $w, w' \in \ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, jolloin assosiatiivisuus periytyy permutaatioryhmän assosiatiivisuudesta.

Olkoot $g_1 \cdots g_n \neq g'_1 \cdots g'_m$ joukon $\ast_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ eri alkioita. Koska

$$L(g_1 \cdots g_n)(1) = g_1 \cdots g_n \neq g'_1 \cdots g'_m = L(g'_1 \cdots g'_m)(1),$$

niin $L(g_1 \cdots g_n) \neq L(g'_1 \cdots g'_m)$. Näin ollen kuvaus L on injektio. Osoitetaan edelleen, että $L(ww') = L(w)L(w')$ kaikilla $w,w' \in \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Tämä seuraa tiedosta $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ kaikille $g,g' \in G_\alpha$. Olkoot $g_1 \cdots g_m, h_1 \cdots h_m \in \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ supistettuja sanoja sekä

$$g_1 \cdots g_{m-k} f h_{1+k} \cdots h_n = (g_1 \cdots g_n)(h_1 \cdots h_m)$$

supistettu muoto, missä $f \in G_\alpha$ jollakin $\alpha \in \Lambda$. Tässä $g^{-1}_{m-i} = h_{1+i}$ kaikilla $0 \leqslant i < k$, ja f on kirjain $g_{m-k+1}h_k$. Jos $g_{m-k+1}h_k = 1$, jätetään f merkisemättä. Nyt $L_f = L_{g_{m+k+1}} L_{h_k}$. Koska $h_i = g^{-1}_{n+1-i}$ kaikilla $i \leqslant k-1$, niin pätee

$$\begin{aligned}
&L\left((g_1 \cdots g_n)(h_1 \cdots h_m)\right) = L(g_1 \cdots g_{m-k} f h_{1+k} \cdots h_n)\\
=&L_{g_1} \cdots L_{g_{m-k}} L_f L_{h_{1+k}} \cdots L_{h_n}\\
=&L_{g_1} \cdots L_{g_{m-k}} L_{g_{m-k+1}} L_{h_k} L_{h_{1+k}} \cdots L_{h_n}\\
=&L_{g_1} \cdots L_{g_{m-k}} L_{g_{m-k+1}} L_{g_{m-k+2}} \cdots L_{g_m} L_{g_m^{-1}} \cdots L_{g^{-1}_{m-k+2}} L_{h_k} L_{h_{1+k}} \cdots L_{h_n}\\
=&L(g_1 \cdots g_n) L(h_1 \cdots h_m m)\ .
\end{aligned}$$

Kuvaus L on siis injektio, jolle pätee $L(ww') = L(w)L(w')$ kaikilla $w, w' \in \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Siten joukon $\ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ laskutoimitus on assosiatiivinen. Näin ollen $\ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ on ryhmä. □

Vapaan tulon muodostuksessa esiintyvät ryhmät $G_\beta \in \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ voidaan samaistaa aliryhmiksi $G_\beta < \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ samaistamalla alkio $g \in G_\beta$, $g \neq 1$, yksikirjaimiseksi sanaksi $g \in \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ ja neutraalialkio 1_{G_β} tyhjäksi sanaksi $1_{\ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha}$.

Huomautus 2.5. Ryhmien vapaa tulo määriteltiin samankaltaisesti kuin vapaa ryhmä. Näin ollen on luonnollista kysyä, onko ryhmien vapaa tulo myös vapaa. Näin ei kuitenkaan ole. Esimerkiksi vapaa tulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ei ole vapaa ryhmä. Tämä nähdään esimerkiksi seuraavasta huomiosta. Olkoot G_1 ja G_2 ryhmiä, jotka ovat isomorfisia ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kanssa ja olkoot $a \in G_1$ ja $b \in G_2$ niiden virittäjät. Tällöin ryhmässä $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pätee, että $a^2 = 1 = b^2$. Näin ollen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ei ole vapaa ryhmä, sillä $a \neq 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \neq b$.

Kuitenkin ryhmän $\mathbb{Z}$ mielivaltainen vapaa tulo itsensä kanssa on vapaa; olkoon Λ joukko. Tällöin $\ast_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_\Lambda$. Tämän todistaminen jätetään lukijalle.

Ennen Van Kampenin teoreeman muotoilua tarvitaan vielä yksi vapaan tulon ominaisuus.

Apulause 2.7. *Olkoon* $\{\psi_\alpha\colon G_\alpha \to H\}_{\alpha\in\Lambda}$ *kokoelma ryhmähomomorfismeja. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen ryhmähomomorfismi* $\psi\colon \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \to H$*, jolle pätee* $\psi|_{G_\alpha} = \psi_\alpha$.

Todistus. Olkoon $\{\psi_\alpha\colon G_\alpha \to H\}_{\alpha\in\Lambda}$ kokoelma ryhmähomomorfismeja. Määritellään kuvaus $\psi\colon \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \to H$ kaavalla

$$\psi(g_1\cdots g_n) = \psi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\psi_{\alpha_n}(g_n),$$

missä $g_i \in G_{\alpha_i}$. Olkoot $g_1\cdots g_n, g'_1\cdots g'_m \in \ast_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ sanoja, joille g_n,$g'_1 \in G_\alpha$ samalla $\alpha\in\Lambda$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\psi(g_1\cdots g_n)\psi(g'_1\cdots g'_m)\\ &= \psi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\psi_{\alpha_n}(g_n)\psi_{\alpha_1}(g'_1)\cdots\psi_{\alpha_m}(g'_m)\\ &= \psi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\psi_{\alpha_{n-1}}(g_{n-1})\psi_{\alpha_n}(g_ng'_1)\psi_{\alpha_2}(g'_2)\cdots\psi_{\alpha_m}(g'_m).\end{aligned}$$

Näin ollen induktiolla sananpituuden suhteen saadaan, että kuvaus ψ homomorfismi. Yksikäsitteisyys seuraa välittömästi homomorfisuudesta ja ehdosta $\psi|_{G_\alpha} = \psi_\alpha$ kaikilla $\alpha\in\Lambda$. □

Van Kampenin teoreeman asetelmana on topologinen avaruus, joka on peitetty polkuyhtenäisillä avoimilla joukoilla siten, että jokainen joukoista sisältää saman kantapisteen.

Määritellään Van Kampenin teoreemaa varten kuvauksia. Olkoon X topologinen avaruus ja kokoelma $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ avoimia ja polkuyhtenäisiä joukkoja $A_\alpha \subset X$ siten, että $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Olkoon lisäksi kantapiste $x_0 \in X$ siten, että $x_0 \in A_\alpha$ kaikilla $\alpha\in\Lambda$. Inkluusiokuvaus $\iota_\alpha\colon A_\alpha \hookrightarrow X$ indusoi homomorfismin $\iota_{\alpha\#}\colon \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Apulauseen 2.7 vapaan tulon ominaisuuden nojalla homomorfismit $\{\iota_{\alpha\#}\}_{\alpha\in\Lambda}$ laajenevat homomorfismiksi $\Phi\colon \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Merkitään edelleen $\iota_{\alpha\beta\#}\colon \pi_1(A_\alpha\cap A_\beta, x_0) \to \pi_1(A_\alpha, x_0)$ inkluusion $A_\alpha\cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ indusoimaa homomorfismia.

Van Kampenin teoreeman muotoilu ja väitteiden todistukset ovat melko teknisiä, joten se on purettu lauseiksi 2.8A ja 2.8B. Lause 2.8A sanoo, että jokainen silmukka voidaan homotopiaa vaille nähdä tulona silmukoista, joista jokainen on silmukka jossakin edellä mainittuun avoimeen peitteeseen kuuluvassa joukossa. Lause 2.8B taas karakterisoi avaruuden perusryhmän täysin, kun avoimelta peitteeltä vaaditaan tiettyjä lisäominaisuuksia lauseeseen 2.8A verrattuna.

Lause 2.8A. *Olkoon X topologinen avaruus ja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ avaruuden X avoin peite polkuyhtenäisillä joukoilla, jolle pätee $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \varnothing$. Olkoon lisäksi kantapiste $x_0 \in X$, joka sisältyy jokaiseen joukkoon A_α. Olkoon edelleen leikkaus $A_\alpha \cap A_\beta$ polkuyhtenäinen kaikilla $\alpha,\beta \in \Lambda$. Tällöin homomorfismi $\Phi\colon \ast_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ on surjektio.*

Kuvauksen Φ surjektiivisuuden todistuksen ideana on ensin jakaa mielivaltainen silmukka äärellisen moneen osaan siten, että jokainen osapolku sisältyy kokonaan johonkin joukoista A_α. Tämän jälkeen jokainen osapolku laajennetaan silmukaksi samaan osajoukkoon A_α. Ensin päätepiste yhdistetään polulla avaruuden X kantapisteeseen sopivien joukkojen $A_\alpha \cap A_\beta$ sisällä. Kun osapolun lähtöpisteeseen liitetään edellisen osapolun päätepisteen kantapisteeseen yhdistävän polun käänteispolku, saadaan aikaiseksi silmukka, joka on homotooppinen alkuperäisen silmukan kanssa, ja joka on tulo silmukoista, joista jokainen sisältyy kokonaisuudessaan johonkin joukkoon A_α.

Lauseen 2.8A todistus. Osoitetaan, että kuvaus Φ on surjektio. Olkoon $f\colon I \to X$ silmukka ja olkoon $s \in I$. Nyt $f(s) \in A_{\alpha_s}$ jollakin $\alpha_s \in \Lambda$. Koska A_α on avoin ja f jatkuva, niin on olemassa pallo $B(s,r_s)$ siten, että $f\left(\bar{B}(s,r_s)\right) \subset A_{\alpha_s}$. Koska $\{B(s,r_s)\}_{s\in I}$ on välin I avoin peite ja I on kompakti, on olemassa äärellinen kokoelma palloja $\{B(s_i,r_i)\}_{i=1}^n \subset \{B(s,r_s)\}_{s\in I}$, jotka peittävät välin I. Valitsemalla pallojen $B(s_i,r_i) = (s_i - r_i, s_i + r_i)$ päätepisteet, saadaan välin I ositus $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$ siten, että $f\left([t_i,t_{i+1}]\right) \subset A_{\alpha_i}$ kaikilla $i \in \{1,\cdots,m-1\}$ ja $\alpha_i \in \Lambda$.

Merkitään jokaisella $i \in \{1,\ldots,n\}$ $A_i := A_{\alpha_i}$ ja $f_i\colon I \to X$ polkua $f_i(t) = f\left(t(s_{i+1} - s_i) + s_i\right)$. Toisin sanoen f_i on polku, joka vastaa silmukan f rajoittumaa välille $[s_i,s_{i+1}]$. Oletuksen nojalla joukko $A_i \cap A_{i+1}$ on polkuyhtenäinen, joten kaikilla $i \in \{1,\cdots,m-2\}$ on olemassa polku g_i joukossa $A_i \cap A_{i+1}$ siten, että $g_i(0) = x_0$ ja $g_i(1) = f(s_{i+1}) \in A_i \cap A_{i+1}$. Yhdistetty polku

$$(f_1 g_1^{-1})(g_1 f_2 g_2^{-1})(g_2 f_3 g_3^{-1}) \cdots (g_{m-2}^{-1} f_{m-1})$$

on homotooppinen polun f kanssa. Siten

$$\begin{aligned}[f] &= [(f_1 g_1^{-1})(g_1 f_2 g_2^{-1})(g_2 f_3 g_3^{-1}) \cdots (g_{m-2}^{-1} f_{m-1})] \\ &= [(f_1 g_1^{-1})][(g_1 f_2 g_2^{-1})][(g_2 f_3 g_3^{-1})] \cdots [(g_{m-2}^{-1} f_{m-1})].\end{aligned}$$

Siis $[f]$ on tulo kuvausten $\iota_{\alpha_i\#}\colon \pi_1(A_i, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ kuvia ja siten $[f] \in \Phi(\ast_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(A_\alpha))$. Kuvaus Φ on näin ollen surjektio. □

Lause 2.8B. *Olkoot X, x_0 ja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kuten lauseessa 2.8A. Oletetaan lisäksi, että $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ on polkuyhtenäinen kaikilla $\alpha,\beta,\gamma \in \Lambda$. Olkoon*

$$N := \langle\{\, \iota_{\alpha\beta\#}(\xi)\iota_{\beta\alpha\#}(\xi)^{-1} : \alpha,\beta \in \Lambda,\ \xi \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)\}\rangle^{*_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha,x_0)}$$

ryhmän $*_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)$ pienin normaali aliryhmä, joka sisältää kaikki alkiot, jotka ovat muotoa $\iota_{\alpha\beta\#}(\xi)\iota_{\beta\alpha\#}(\xi)^{-1}$. Tällöin lauseen 2.8A homomorfismille $\Phi\colon *_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ pätee $\ker(\Phi) = N$. Erityisesti Φ indusoi isomorfismin $\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)/N$.

Kuvauksen Φ surjektiivisuuden todistuksesta nähdään, että kaikilla $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ on olemassa luokat $\{[f_i] \in \pi_1(A_i, x_0)\}_{i=1}^n$ (ja niille edustajat) siten, että silmukka f on homotooppinen silmukan $f_1 \cdots f_n$ kanssa avaruudessa X. Sanotaan, että $[f_1]\cdots[f_n] \in W(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0))$ on luokan $[f]$ *tekijöinti.*

Asetetaan kaksi luokan $[f]$ tekijöintiä ekvivalenteiksi, $[f_1]\cdots[f_n] \sim [f'_1]\cdots[f'_m]$, jos $[f'_1]\cdots[f'_m]$ saadaan tekijöinnistä $[f_1]\cdots[f_n]$ toistamalla äärellinen määrä seuraavia operaatioita tai niiden käänteisoperaatioita:

1. Kaksi peräkkäistä termiä $[f_i][f_{i+1}]$ yhdistetään yhdeksi termiksi $[f_i f_{i+1}]$, jos $[f_i],[f_{i+1}] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$ jollakin $\alpha \in \Lambda$.

2. Vaihdetaan tekijä $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$ tekijäksi $[f_i] \in \pi_1(A_\beta, x_0)$, jos jollakin $f_i \in [f_i]$ pätee, että f_i on silmukka avaruudessa $A_\alpha \cap A_\beta$.

Apulause 2.9. *Olkoon $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ ja olkoot $[f_1]\cdots[f_n],[f'_1]\cdots[f'_m] \in W\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)\right)$ luokan $[f]$ ekvivalentteja tekijöintejä. Olkoot*

$$\Theta\colon W\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)\right) \to \mathop{*}_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)$$

ja $\Psi\colon *_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0) \to *_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0)/N$ tekijäkuvauksia. Tällöin

$$\Psi \circ \Theta([f_1]\cdots[f_n]) = \Psi \circ \Theta([f'_1]\cdots[f'_m]).$$

Todistus. Mikäli $[f_1]\cdots[f_n]$ ja $[f'_1]\cdots[f'_m]$ ovat ekvivalentteja operaation 1 kautta, niin $[f_1]\cdots[f_n] \sim_* [f'_1]\cdots[f'_m]$ joukossa $W(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha, x_0))$, sillä perusryhmän laskutoimituksena on polkujen yhdistäminen. Näin ollen $\Theta([f_1]\cdots[f_n]) = \Theta([f'_1]\cdots[f'_m])$, ja erityisesti siis $\Psi \circ \Theta([f_1]\cdots[f_n]) = \Psi \circ \Theta([f'_1]\cdots[f'_m])$.

Oletetaan, että $[f_1]\cdots[f_k]_\alpha\cdots[f_m]$ ja $[f_1]\cdots[f_k]_\beta\cdots[f_m]$ ovat ekvivalentteja operaation 2 kautta eli f_k on silmukka avaruudessa $A_\alpha \cap A_\beta$ ja lisäksi $[f_k]_\alpha \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$ ja $[f_k]_\beta \in \pi_1(A_\beta, x_0)$. Koska $[f_k]_\alpha^{-1}[f_k]_\beta \in N$, niin

$$\begin{aligned}
&\Psi \circ \Theta([f_1]\cdots[f_k]_\alpha\cdots[f_m]) = \Psi([f_1])\cdots\Psi([f_k]_\alpha)\cdots\Psi([f_m])\\
&= \Psi([f_1])\cdots\Psi([f_k]_\alpha)\Psi([f_k]_\alpha^{-1}[f_k]_\beta)\cdots\Psi([f_m])\\
&= \Psi([f_1])\cdots\Psi([f_k]_\alpha)\Psi([f_k]_\alpha^{-1})\Psi([f_k]_\beta)\cdots\Psi([f_m])\\
&= \Psi([f_1])\cdots\Psi([f_k]_\beta)\cdots\Psi([f_m])\\
&= \Psi \circ \Theta([f_1]\cdots[f_k]_\beta\cdots[f_m]).
\end{aligned}$$

Siis ekvivalentit tekijöinnit kuvautuvat samaksi alkioksi kuvauksessa $\Psi \circ \Theta$. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisen $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ kaikki tekijöinnit ovat ekvivalentteja. Konstruoidaan ensin apujoukkoja.

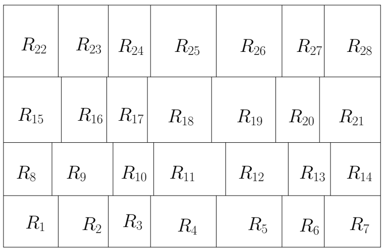
Olkoon $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ ja olkoot $[f_1]\cdots[f_m]$, $[f_1']\cdots[f_n']$ luokan $[f]$ tekijöintejä. Tällöin silmukat $f_1\cdots f_m$ ja $f_1'\cdots f_n$ ovat homotooppisia avaruudessa X. Olkoot $P = (a_1, \ldots, a_{m+1})$ ja $P' = (b_1, \ldots b_{n+1})$ välin $[0,1]$ jakoja siten, että P antaa tulon $f_1\cdots f_m$ ja vastaavasti P' tulon $f_1'\cdots f_n'$. Olkoon $H\colon I \times I \to X$ homotopia silmukasta $f_1\cdots f_m$ silmukkaan $f_1'\cdots f_n'$. Koska $I \times I$ on kompakti, kuvaus H jatkuva ja joukot A_α avoimia jokaisella $\alpha \in \Lambda$, niin on olemassa välin $[0,1]$ jaot $S = (s_1, \ldots, s_k)$ ja $T = (t_1, \ldots, t_l)$ siten, että kaikilla $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ ja kaikilla $j \in \{1, \ldots, l-1\}$ on olemassa $\alpha \in \Lambda$, jolle pätee $H([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subset A_\alpha$. Koska jaon hienonnus säilyttää kyseisen ominaisuuden, voidaan olettaa, että jako S on jakojen P ja P' yhteinen hienonnus. Samasta syystä voidaan olettaa, että jako T koostuu vähintään neljästä pisteestä. Merkitään $R_{ij}' = [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ jokaisella $(i,j) \in \{1, \ldots, k-1\} \times \{1, \ldots, l-1\}$ ja valitaan $A_{ij} = A_\alpha$ sellaisella $\alpha \in \Lambda$, jolle $H(R_{ij}') \subset A_\alpha$. Jokaisella R_{ij}' on ympäristö U_{ij} siten, että $H(U_{ij}) \subset A_{ij}$. Siten kaikilla $j \neq 1$ ja $j \neq l-1$ on olemassa $\varepsilon_j > 0$ siten, että $\varepsilon_j \neq \varepsilon_{j+1}$ kaikilla $j \in \{2, \ldots, l-2\}$ ja $H(R_{ij}'') \subset A_{ij}$ kaikilla $j \in \{2, \ldots, l-2\}$ ja kaikilla $i < k-1$, missä $R_{ij}'' := [s_i + \varepsilon_j, s_{i+1} + \varepsilon_j] \times [t_j, t_{j+1}]$. Näin tulo $I \times I$ on jaettu suorakulmioihin R_{ij}'' siten, että jokainen joukon $I \times I$ piste kuuluu enintään kolmeen tällaiseen suorakulmioon. Numeroidaan suorakulmiot vielä uudelleen kuvan 2.1 esimerkkitapauksen ($k = 8$ ja $l = 5$) mukaisesti merkiten $R_h = R_{ij}''$, kun $h = (k-1)(j-1) + i$.

Olkoon $r \in \{0, \ldots, (k-1)(l-1)\}$. Määritellään polku $\gamma_r\colon I \to I \times I$ siten, että $\gamma_r(I)$ jakaa joukon $I \times I$ kahteen osaan A ja B, joille $A = \bigcup_{i=1}^{r} R_i$ ja $B = \bigcup_{i=r+1}^{(k-1)(l-1)} R_i$. Tarkemmin sanottuna γ_r on yhdistetty polku poluista

$\gamma',\gamma'',\gamma''' \colon I \to I \times I$, jotka toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned}\gamma' &: x \mapsto (xs_{i+1},t_{j+1}),\\ \gamma'' &: x \mapsto (s_{i+1},(t_j - t_{j+1})x + t_{j+1}) \text{ ja}\\ \gamma''' &: x \mapsto (s_{i+1} + (1 - s_{i+1})x, t_j),\end{aligned}$$

kun $R_r = R''_{ij}$. Lisäksi jos $i = k - 1$, niin $\gamma = \gamma'$ ja γ_0 määritellään kuvaukseksi $x \mapsto (t,0)$. Näin määritellylle polulle γ_r pätee $\gamma_r(0) \in \{0\} \times [0,1]$ ja $\gamma_r(1) \in \{1\} \times [0,1]$, joten $H \circ \gamma_r$ on silmukka avaruudessa X.



Kuva 2.1: Tulon $I \times I$ jako suorakulmioihin R_h.

Apulause 2.10. *Olkoon X topologinen avaruus, joka toteuttaa Van Kampenin teoreeman 2.8B oletukset ja olkoon $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Tällöin kaikki luokan $[f]$ tekijöinnit ovat ekvivalentteja.*

Todistus. Olkoon $[f_1] \cdots [f_m]$ ja $[f'_1] \cdots [f'_n]$ luokan $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tekijöintejä. Olkoon $H \colon I \times I \to X$ homotopia silmukasta $f_1 \cdots f_m$ silmukkaan $f'_1 \cdots f'_n$. Olkoot edelleen $S = (s_1, \ldots, s_k)$ ja $T = (t_1, \ldots, t_l)$ välin I jakoja kuten edellä ja olkoon vastaavasti kaikilla $r \in \{0, \ldots, (k - 1)(l - 1)\}$ polku $\gamma_r \colon I \to I \times I$ kuten edellä.

Osoitetaan ensin, että silmukat $H \circ \gamma_r$ ja $H \circ \gamma_{r+1}$ ovat homotooppisia kaikilla $r \in \{0, \ldots, (k - 1)(l - 1) - 1\}$, jolloin on mielekästä tarkastella ovatko jotkin luokkien $[H \circ \gamma_r]$ ja $[H \circ \gamma_{r+1}]$ tekijöinnit ekvivalentteja keskenään. Uudelleenparametrisoimalla polut γ_r voidaan olettaa, että kaikilla $w \in \gamma_r(I) \cap \gamma_{r+1}(I)$ pätee $\gamma_r(x) = w = \gamma_{r+1}(x)$ jollakin $x \in I$.

Olkoon $r \in \{0, \ldots, (k - 1)(l - 1) - 1\}$. Määritellään $\hat{H}_r \colon I \times I \to I \times I$ kaavalla $(x,y) \mapsto (1 - y)\gamma_r(x) + y\gamma_{r+1}(x)$. Tällöin kuvaus $\hat{H}_r$ määrittää homotopian kuvauksesta γ_r kuvaukseen γ_{r+1}. Edelleen pätee, että $\hat{H}_r(I \times I) \subset \gamma_r(I) \cup \gamma_{r+1}(I) \cup R_{r+1}$, toisin sanoen homotopia $\hat{H}_r$ työntää polun γ_r poluksi γ_{r+1} pitkin suorakaidetta R_{r+1}. Nyt $H \circ \hat{H}_r \colon I \times I \to X$ on silmukkahomotopia kuvauksesta $H \circ \gamma_r$ kuvaukseen $H \circ \gamma_{r+1}$.

Tarkastellaan seuraavaksi luokkien $[H \circ \gamma_r]$ ja $[H \circ \gamma_{r+1}]$ eräitä tekijöintejä. Olkoon $r \in \{0, \dots, (k-1)(l-1)-1\}$. Olkoon $v \in (S \times T) \cap \gamma_r(I)$. Nyt $v \in R_h$ enintään kolmella $h \in \{1, \dots, (k-1)(l-1)\}$. Edelleen jokaista tällaista joukkoa R_h vastaa joukko A_{ij}. Oletuksen nojalla näistä joukoista A_{ij} muodostuva enintään kolmen joukon leikkaus on polkuyhtenäinen, joten voidaan määritellä polku $g_v \colon I \to X$ pisteestä x_0 pisteeseen $H(v)$. Olkoon nyt $Q = (t'_1, \dots, t'_p)$ välin $[0,1]$ jako siten, että jokaista pistettä $v \in (S \times T) \cap \gamma_r(I)$ vastaa täsmälleen yksi piste $t'_v \in Q$, jolle pätee $\gamma_r(t'_v) = v$. Olkoon $\gamma_{r,i} \colon I \to I \times I$ polku, joka vastaa rajoittumaa $\gamma_r|_{[t'_i, t'_{i+1}]}$. Merkitään vielä $v_i = \gamma_r(t'_i)$. Kuten surjektiivisuuden todistuksessa havaitaan, että polku γ_r on homotooppinen yhdistetyn polun $(H \circ \gamma_{r,1} g_{v_2}^{-1})(g_{v_2}(H \circ \gamma_{r,2}) g_{v_3}^{-1}) \cdots (g_{v_{p-1}} H \circ \gamma_{r,p-1})$ kanssa. Edelleen jokainen polku $\gamma_{r,i}$ kuuluu kahteen suorakaiteeseen R_{ij} ja siten polkua $\gamma_{r,i}$ tulossa vastaava silmukka $g_{v_i}(H \circ \gamma_{r,i}) g_{v_{i+1}}^{-1}$ (tässä $g_{v_1} \equiv x_0 \equiv g_{v_p}$) vastaaviin joukkoihin A_{ij}. Näin saadaan polun $[H \circ \gamma_r]$ tekijöinti. Riippuen siitä, kumpaan edellä mainituista joukoista A_{ij} silmukka ajatellaan kuuluvan, saadaan eri tekijöinnit, jotka kuitenkin ovat keskenään ekvivalentit. Edelleen luokkien $[H \circ \gamma_r]$ ja $[H \circ \gamma_{r+1}]$ näin saadut tekijöinnit ovat ekvivalentteja: vaaditaan kaikille $\gamma_{r,s}$ ja $\gamma_{r+1,t}$, jotka kuuluvat suorakaiteeseen R_{r+1}, että $[H \circ \gamma_{r,s}], [H \circ \gamma_{r+1,t}] \in \pi_1(A_{ij}, x_0)$, missä A_{ij} vastaa suorakaidetta R_{r+1}.

Riittää osoittaa, että polkua γ_0 vastaava tekijöinti on ekvivalentti tekijöinnin $[f_1] \cdots [f_m]$ kanssa ja vastaavasti polkua $\gamma_{(k-1)(l-1)}$ vastaava tekijöinti on ekvivalentti tekijöinnin $[f'_1] \cdots [f'_n]$ kanssa. Koska kaikilla $x \in I$ pätee $\gamma_0(x) \in R_h$ enintään kahdella h, voidaan kuvaukselta g_v vaatia, että se sisältyy lisäksi kuvausta f_i vastaavaan joukkoon A_α eli joukkoon A_α, jolle tekijöinnissä esiintyvälle kirjaimelle $[f_i]$ pätee, että $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha, x_0)$. Näin ollen jokainen $[f_i]$ saadaan luokan $[H \circ \gamma_0]$ tekijöinnissä esiintyvistä tekijöistä (mahdollisesti useammasta kuin yhdestä) operaatioiden 1 ja 2 avulla. Samalla tavalla nähdään, että tekijöinti $[f'_1] \cdots [f'_n]$ on ekvivalentti tekijöinnin $[H \circ \gamma_{(k-1)(l-1)}]$ kanssa. Siten luokan $[f]$ kaikki tekijöinnit ovat ekvivalentteja. □

Lauseen 2.8B todistus. Olkoon $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Tällöin on olemassa vähintään yksi luokan $[f]$ tekijöinti. Apulauseen 2.10 nojalla luokan $[f]$ kaikki tekijöinnit ovat ekvivalentteja. Näin ollen voidaan määritellä kuvaus $\Upsilon \colon \pi_1(X, x_0) \to \ast_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0)/N$ kaavalla $[f] \mapsto \Psi([f_1] \cdots [f_m])$, missä $[f_1] \cdots [f_m]$ on jokin luokan $[f]$ tekijöinti. Näin määritellylle kuvaukselle kaavio

$$\begin{tikzcd} \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha,x_0) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[dl, "\Upsilon"] \\ \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha,x_0)/N & \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Nyt jos $\Upsilon([f]) = 1$, niin luokalla $[f]$ on tekijöinti $[f_1]\cdots[f_n] \in N$, koska $\ker\Psi = N$. Luokalla $1 \in \pi_1(X,x_0)$ on tekijöinti, joka kuuluu aliryhmään N, joten $\ker\Phi \subset \Phi\circ\Upsilon^{-1}(1) = \ker\Psi = N$. Toistaalta kaikille tekijöinneille pätee, että $\Phi([f_1]\cdots[f_n]) = [f]$, joten normaalin aliryhmän N virittäjäjoukko $\{\iota_{\alpha\beta\#}(\xi)\iota_{\beta\alpha\#}(\xi)^{-1} : \alpha,\beta \in \Lambda,\ \xi \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)\}$ sisältyy aliryhmään $\ker\Phi$. Edelleen $\ker\Phi \lhd \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha,x_0)$. Näin ollen $N \subset \ker\Phi$. Siis $\ker\Phi = N$ ja siten $\pi_1(X) \cong \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(A_\alpha,x_0)/N$.

□

2.2 Graafin perusryhmä

Osoitetaan seuraavaksi Van Kampenin teoreeman avulla, että ympyröiden S^1 mielivaltaisen yhden pisteen yhdisteen perusryhmä on vapaa. Tätä varten määritellään avaruuksien yhden pisteen yhdiste.

Määritelmä 2.4 (Yhden pisteen yhdiste)**.** Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kokoelma topologisia avaruuksia ja olkoon jokaisella $\alpha \in \Lambda$ kantapiste $x_\alpha \in X_\alpha$. Olkoon edelleen $A = \{x_\alpha : x_\alpha \in X_\alpha,\ x_\alpha \text{ kantapiste}\}$ kantapisteiden joukko. (Kantapiste)avaruuksien $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ yhden pisteen yhdiste on topologinen avaruus

$$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha := \left(\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)\Big/ A\ .$$

Merkitään $\iota_\alpha\colon X_\alpha \to \bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ luonnollista inkluusiota.

Apulause 2.11. *Olkoon Λ mielivaltainen indeksijoukko. Tällöin $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^1)$ on vapaa ryhmä.*

Todistus. Olkoon $\alpha \in \Lambda$ ja $e_1 \in S^1$ kantapiste. Olkoon edelleen $h\colon [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ homeomorfismi, jolle pätee $0 \mapsto e_1$. Määritellään

$$U_\alpha = \iota_\alpha S^1 \bigcup_{\beta\in\Lambda,\ \beta\neq\alpha} \iota_\beta \circ h\left([0,\frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4},1]\right).$$

Tällöin S^1 on homotopiaekvivalentti avaruuden U_α kanssa, sillä U_α deformaatioretraktoituu avaruudeksi $\iota_\alpha S^1$, joka on homeomorfinen avaruuden S^1 kanssa. Lisäksi U_α on avoin ja joukot $U_\alpha \cap U_\beta$ ja $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ ovat polkuyhtenäisiä kaikilla $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$. Edelleen $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^1 = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Näin ollen Van Kampenin teoreeman nojalla

$$\pi_1\Big(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^1\Big) \cong \mathop{\ast}_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(U_\alpha) \cong \mathop{\ast}_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(S^1) \cong \mathop{\ast}_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{Z}\,.$$

Siis $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} S^1)$ on joukon Λ suhteen vapaa ryhmä. □

Esimerkki 2.2. Apulauseen 2.11 tapaan voidaan määrittää myös muiden yhden pisteen yhdisteiden perusryhmiä. Esimerkiksi avaruudelle $S^1 \bigvee S^2$ voidaan valita Van Kampenin teoreeman mukaiset joukot U_1 ja U_2 siten, että $\pi_1(U_1) \cong \pi_1(S^1)$ ja $\pi_1(U_2) \cong \pi_1(S^2)$. Näin ollen $\pi(S^1 \bigvee S^2) \cong \pi_1(S^1) \ast \pi_1(S^2)$. Koska perusryhmä $\pi_1(S^2)$ on triviaali, saadaan yhden pisteen yhdisteen perusryhmäksi $\pi_1(S^1 \bigvee S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Avaruuden $S^1 \bigvee S^2$ perusryhmän avulla voidaan nyt selvittää avaruuden $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ perusryhmä. Avaruus $S^1 \bigvee S^2$ upotettuna avaruuteen $\mathbb{R}^3$ on avaruuden $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ deformaatioretraktio [3, s. 46–47]. Erityisesti avaruudet $S^1 \bigvee S^2$ ja $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ ovat keskenään homotopiaekvivalentteja. Siten $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^1 \bigvee S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Osoitetaan vielä viimeinen aputulos ennen graafin perusryhmän määrittämistä. Aputulos sanoo, että graafi, jonka maksimaalisen puun pisteet samaistetaan, on homeomorfinen yksikköympyröiden yhden pisteen yhdisteen kanssa. Yhdisteessä jokainen ympyrä vastaa yhtä graafin sivua, joka ei sisälly maksimaaliseen puuhun. Näin löydetään myös ne silmukat, jotka virittävät graafin perusryhmän; silmukat, jotka sisältyvät muuten maksimaaliseen puuhun, mutta kulkevat kerran jonkin graafin sivun kautta, joka ei sisälly maksimaaliseen puuhun.

Apulause 2.12. *Olkoon X graafi, jolla on maksimaalinen puu T siten, että $X \neq T$. Tällöin tekijäavaruus X/T on homeomorfinen ympyröiden S^1 yhden pisteen yhdisteen kanssa.*

Todistus. Olkoon $X = X^0 \bigcup_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha$ graafi ja $T = X^0 \bigcup_{\alpha\in\hat{\Lambda}} e_\alpha \neq X$ maksimaalinen puu. Merkitään $\Lambda' = \Lambda \setminus \hat{\Lambda}$, jolloin $e_\alpha \subset X \setminus T$ kaikilla $\alpha \in \Lambda'$ ja $X \setminus T = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} e_\alpha$. Olkoon $\pi\colon X \to X/T$ tekijäkuvaus. Olkoon $\alpha \in \Lambda'$ ja olkoon $\psi_\alpha\colon [0,1] \to \overline{e}_\alpha$ kuten graafin määritelmässä. Olkoon edelleen $h\colon [0,1] \to S^1$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Määritellään kuvaus $h_\alpha\colon \overline{e}_\alpha \to S^1$, $h_\alpha = h \circ \psi_\alpha^{-1}$. Kuvaus on hyvin määritelty ja jatkuva, sillä

$h(0) = h(1)$. Määritellään edelleen kuvaus $f\colon X/T \to \bigvee_{\alpha\in\Lambda'} S^1$ kaavalla $x \mapsto \iota_\alpha \circ h_\alpha(x)$, kun $x \in \overline{e}_\alpha$. Kuvaus on hyvin määritelty, sillä kaikilla $\alpha \in \Lambda'$ pätee $h_\alpha(X^0 \cap \overline{e}_\alpha) = e_1 \in S^1$.

Osoitetaan, että näin määritelty kuvaus on homeomorfismi. Kuvaus on selvästi bijektio. Lisäksi se on jatkuva ja avoin joukossa $X/T \setminus \pi(T)$. Riittää siis osoittaa, että f on jatkuva pisteessä $v := \pi(T)$ ja että pisteen v avoimet ympäristöt kuvautuvat avoimiksi joukoiksi.

Olkoon U pisteen $f(v)$ ympäristö. Tällöin $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} \iota_\alpha U_\alpha$, jossa $U_\alpha \subset S^1$ on pisteen e_1 ympäristö avaruudessa S^1 kaikilla $\alpha \in \Lambda'$. Nyt $(f \circ \pi)^{-1}(U) = T \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} h_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, joka on avoin, koska $\iota_\alpha \circ h_\alpha$ on jatkuva kaikilla $\alpha \in \Lambda'$. Siten $f^{-1}(U)$ on avoin ja f on jatkuva pisteessä e_1.

Olkoon nyt V pisteen v ympäristö. Tällöin $V = \pi(T \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} V_\alpha)$, jossa $V_\alpha \subset \overline{e}_\alpha$ on avoin joukko, joka sisältää joukon $\overline{e}_\alpha \setminus e_\alpha$. Siis $(X/T) \setminus V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$, jossa F_α sisältyy joukkoon e_α ja on suljettu joukossa $\overline{e}_\alpha$ kaikilla $\alpha \in \Lambda$. Koska ψ_α on jatkuva, on $\psi_\alpha^{-1}(F_\alpha)$ suljettu. Lisäksi h on suljettu kuvaus, joten $f\left((X/T) \setminus V\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \iota_\alpha \circ h_\alpha(F_\alpha)$ on suljettu tekijäavaruuden määritelmän nojalla avaruudessa $\bigvee_{\alpha\in\Lambda'} S^1$. Näin ollen kuvaus f on homeomorfismi.

□

Todistuksen homeomorfismi on hyvin luonnollinen: graafissa X jokainen suljettu sivu on homeomorfinen joko suljetun välin $[0,1]$ tai ympyrän S^1 kanssa. Tekijäkuvauksessa $X \to X/T$ kaikki sivut, jotka kuuluvat maksimaaliseen puuhun, luhistetaan yhdeksi pisteeksi. Sivuista, jotka eivät kuulu tähän maksimaaliseen puuhun, samaistetaan päätepisteet, jolloin niistä tulee ympyröitä. On kuitenkin hyvä huomata, että homeomorfisuus on seurausta graafin ja yhden pisteen yhdisteen topologioiden yhteensopivuudesta. On esimerkiksi helppo todeta, että yhden pisteen yhdiste $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{R}$ on homemorfinen avaruuden $\mathbb{R}^n$ koordinaattiakselien yhdisteen kanssa, mutta kuitenkaan $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ ei ole homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vastaavan joukon kanssa. Vastaavasti esimerkiksi niin sanottu havaijilainen korvarengas muistuttaa numeroituvaa ympyröiden yhden pisteen yhdistettä, mutta ei ole homeomorfinen tämän kanssa. Itseasiassa havaijilaisen korvarenkaan perusryhmä on ylinumeroituva ryhmä, kun taas numeroituvan ympyröiden yhden pisteen yhdisteen perusryhmä on numeroituva [3].

Osoitetaan seuraavaksi, että graafin perusryhmä on vapaa.

Lause 2.13. *Olkoon X yhtenäinen graafi. Tällöin perusryhmä $\pi_1(X)$ on vapaa ryhmä.*

Todistus. Olkoon $X = X^0 \bigcup_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha$ yhtenäinen graafi. Jos X on puu, on perusryhmä $\pi_1(X)$ triviaali ja siten vapaa. Voidaan siis olettaa, että X ei ole puu. Apulauseen 2.2 nojalla on olemassa maksimaalinen puu $T \subset X$. Apulauseiden 2.4 ja 2.5 nojalla graafi X ja tekijäavaruus X/T ovat homotopiaekvivalentteja. Apulauseen 2.12 perusteella $X/T \approx \bigvee_{\alpha \in \Lambda'} S^1$, missä $\Lambda' = \{\alpha \in \Lambda : e_\alpha \subset X \setminus T\}$. Näin ollen $\pi_1(X) \cong \pi_1(\bigvee_{\alpha \in \Lambda'} S^1)$. Edelleen apulauseen 2.11 nojalla $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in \Lambda'} S^1)$ on vapaa ryhmä. Siis $\pi_1(X)$ on vapaa ryhmä. $\square$

Huomautus 2.6. Graafin perusryhmän vapauden todistamisessa ei oteta kantaa siihen, mikä on tämän vapaan ryhmän virittäjien joukko. Kuitenkin apulauseiden 2.12 ja 2.11 todistuksista nähdään, että perusryhmän virittävät ne silmukat, jotka vastaavat silmukoita, jotka kiertävä jonkin ympyröistä $\iota_\alpha S^1 \subset \bigvee_{\alpha \in \Lambda'} S^1$ kerran. Erityisesti siis jokaista $\alpha \in \Lambda'$ vastaa täsmälleen yksi virittäjä perusryhmässä $\pi_1(X)$, eli $\pi_1(X)$ on joukon Λ' suhteen vapaa ryhmä.

3 Epäkompaktin N_2-pinnan perusryhmä

Tässä luvussa osoitetaan, että epäkompaktin pinnan perusryhmä on vapaa. Lisävaatimuksena pinnalta oletetaan, että se on N_2. Todistus mukailee Masseyn kirjassaan esittämää runkoa [4]. Todistuksen idea on seuraava. Epäkompakti pinta tyhjennetään sisäkkäisillä kompakteilla reunallisilla pinnoilla siten, että jokainen inkluusiokuvauksen indusoima homomorfismi on injektio. Tällaisen tyhjennyksen konstruktiossa hyödynnetään tietoa siitä, että pinnalla, jonka topologialla on numeroituva kanta, on olemassa niin sanottu kolmiointi. Kolmioinnin olemassaoloa ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta lukija löytää halutessaan todistuksen esimerkiksi Ahlforsin ja Sarion kirjasta *Riemann surfaces* [1].

Todistuksessa on neljä osaa. Jokainen tyhjennykseen valitun kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä voidaan nähdä epäkompaktin pinnan perusryhmän aliryhmänä. Itseasiassa epäkompaktin pinnan perusryhmä on näiden aliryhmien yhdiste. Osoittamalla edelleen, että kompakti reunallinen pinta voidaan deformaatioretraktoida graafiksi, havaitaan, että kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä on vapaa luvussa 2 osoitettujen tulosten nojalla. Lopuksi osoitetaan, että näiden aliryhmien vapaus periytyy epäkompaktin pinnan perusryhmälle.

Todistus antaa itseasiassa hieman vahvemman tuloksen, että epäkompaktin pinnan perusryhmä on vapaa numeroituvan (äärellisen tai äärettömän) joukon suhteen.

3.1 Pinnan määritelmät

Määritellään seuraavaksi sekä pintä että reunallinen pinta. Pinta on topologinen avaruus, joka joka on lokaalisti homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa. Pintoja ovat esimerkiksi pallopinta S^2 ja torus $S^1 \times S^1$. Toisaalta taas esimerkiksi sylinterin pinta $I \times S^1$ ei ole pinta, sillä joukon $\{0,1\} \times S^1$ pisteissä avaruus ei ole lokaalisti homemorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa. Itseasiassa näissä pisteissä sylinterin pinta on lokaalisti puolitaso, joten sylinterin pinta on esimerkki reunallisesta pinnasta.

Määritelmä 3.1 (Pinta)**.** Yhtenäinen Hausdorff-avaruus X on pinta, jos se on lokaalisti homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa.

Huomautus 3.1. Vaikka pinta on määritelmänsä nojalla lokaalisti $\mathbb{R}^2$, voi pinnan ja tason topologiat olla melko erilaiset. On esimerkiksi olemassa pintoja, joiden topologioilla ei ole numeroituvaa kantaa [5].

Pelkkä lokaali homeomorfisuus tason kanssa ei takaa, että topologinen avaruus olisi Hausdorff, kuten seuraava esimerkki osoittaa. Tämän vuoksi oletus Hausdorffiudesta on sisällytetty määritelmään. Kirjallisuudessa pinnan eri määritelmät saattavat erota juuri siinä, että vaaditaanko avaruuden olevan N_2, Hausdorff tai yhtenäinen.

Esimerkki 3.1. Olkoon $X := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukkoon X samaistamalla pisteet $(x,y) \in X$ ja $(-x,y) \in X$, jos $|x| < 1$. Osoitetaan, että tällöin tekijäavaruus $X/\!\sim$ on lokaalisti homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa, mutta $X/\!\sim$ ei ole Hausdorff-avaruus.

Osoitetaan, että tekijäkuvaus $\pi\colon X \to X/\!\sim$ on avoin. Olkoon $A \subset X$ joukko. Merkitään tällöin $A^- := \{(x,y) \in X : (-x,y) \in A\}$. Olkoon $U \subset X$ avoin. Tällöin $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (U \cap ((0,1) \times \mathbb{R}))^- \cup (U \cap ((-1,0) \times \mathbb{R}))^-$, joka on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Siis tekijäkuvaus π on avoin kuvaus. Merkitään $X_\pm := \{(x,y) \in X\colon \pm x > 0\}$. Tällöin kuvaukset $\pi|_{X_\pm}\colon X_\pm \to X/\!\sim$ ovat injektioita. Näin ollen kuvaukset $\pi|_{X_\pm}$ ovat homeomorfismeja kuvilleen. Edelleen $X_+ \approx \mathbb{R}^2$ ja $X_- \approx \mathbb{R}^2$. Lisäksi $\pi(X_+) = X_+ \subset X/\!\sim$ ja $\pi(X_-) = X_- \subset X/\!\sim$. Koska $X/\!\sim = X_+ \cup X_-$, on X lokaalisti homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa.

Osoitetaan, että $X/\!\sim$ ei ole Hausdorff-avaruus. Olkoon $(x,y) \in \{1\} \times \mathbb{R} \subset X/\!\sim$. Olkoon $U \subset X/\!\sim$ pisteen (x,y) ympäristö ja olkoon V pisteen $(-x,y)$ ympäristö. Tällöin on olemassa $1/2 > r > 0$ siten, että $\pi(B((x,y),r)) \subset U$ ja $\pi(B((-x,y),r)) \subset V$. Toisaalta nyt pisteet $(x',y') \in ((0,1) \times \mathbb{R}) \cap B((x,y),r)$ ja $(-x',y') \in B((-x,y),r)$ kuvautuvat tekijäkuvauksessa samaksi pisteeksi. Siis $U \cap V \neq \varnothing$. Näin ollen $X/\!\sim$ ei ole Hausdorff-avaruus.

Laajennetaan seuraavaksi pinnan määritelmä reunalliselle pinnalle. On luonnollista ajatella, että esimerkiksi suljettu yksikköpallo $\bar{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ on pinta, jolla on reuna S^1. Vastaavasti jo aiemmin esiin tullut sylinterin pinta $I \times S^1$ on esimerkki reunallisesta pinnasta.

Määritelmä 3.2 (Reunallinen pinta)**.** Olkoon X yhtenäinen Hausdorff-avaruus, joka ei ole pinta. Tällöin X on reunallinen pinta, jos avaruuden X jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen joko puolitason $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geqslant 0\}$ tai tason $\mathbb{R}^2$ kanssa.

Huomautus 3.2. Pisteitä $x \in X$, joilla on ympäristö, joka on homeomorfinen puolitason $\mathbb{R}^2_+$ kanssa, mutta ei ole ympäristöä, joka on homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa, sanotaan *reunapisteiksi*. Vastaavasti pisteitä, joilla on tason $\mathbb{R}^2$ kanssa homeomorfinen ympäristö, sanotaan *sisäpisteiksi*. Reunapisteiden joukkoa merkitään ∂X ja sisäpisteiden joukkoa $\mathrm{int}X$. Mikäli mahdollisuus sekaannukseen topologisen reunan ja sisuksen kanssa on olemassa, puhutaan moniston (tai pinnan) reunasta ja moniston (tai pinnan) sisuksesta. Yleensä kuitenkin kontekstista selviää kumpaa tarkoitetaan.

3.2 Pinnan kolmiointi

Tässä alaluvussa määritellään, mitä tarkoitetaan pinnan *kolmioinnilla*. Intuitiivisesti kolmioinnilla tarkoitetaan, että pinta jaetaan osiin, jotka ovat homeomorfisia kolmion kanssa siten, että nämä osat liimataan yhteen riittävän siististi. Tässä siisteydellä tarkoitetaan, että kaksi eri osaa ovat joko erilliset tai ne leikkaavat toisiaan niin, että leikkausjoukko kuvautuu vastaavissa homeomorfismeissa joko kolmion sivuksi tai kärkipisteeksi. On helppo uskoa, että esimerkiksi kiekon $\bar{B}^2$ saa kolmioitua yhdellä kolmiolla ja pallopinnan S^2 neljällä kolmiolla muodostamalla niistä tetraedrin. Tämän alaluvun määritelmät ja tulokset mukailevat Ahlforsin ja Sarion kirjaa [1].

Täsmällistä määritelmää varten tarvitaan abstraktin kompleksin ja topologisen kompleksin käsitteet [1].

Määritelmä 3.3 (Abstrakti kompleksi)**.** Olkoon K joukko ja Λ kokoelma joukon K äärellisiä osajoukkoja. Tällöin pari (K,Λ) on *abstrakti kompleksi*, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) Jokaisella $k \in K$ on olemassa luku $n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja joukot $\{A_i\}_{i=1}^{n_k} \subset \Lambda$, joille $k \in A_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n_k\}$. Lisäksi $k \notin A$ millään $A \in \Lambda \setminus \{A_i\}_{i=1}^{n_k}$.

(ii) Jos $A \in \Lambda$ ja $A' \subset A$, niin $A' \in \Lambda$.

Joukkoa $A \in \Lambda$ sanotaan *simpleksiksi*. Sanotaan edelleen, että simpleksi A on *n-ulotteinen*, lyhyemmin A on *n-simpleksi*, jos siinä on $n+1$ alkiota. Jos simpleksien joukosta Λ ei ole epäselvyyttä, tai jos sillä ei ole erityistä merkitystä, saatetaan sanoa yksinkertaisemmin, että K on kompleksi. Kompleksi K on *n-ulotteinen*, jos n on suurin simpleksien $A \in \Lambda$ ulottuvuuksista. Jos suurinta ulottuvuutta ei ole, sanotaan, että K on *ääretönulotteinen*.

Edellä määritelty abstrakti kompleksi on täysin kombinatorinen objekti. Kuten graafin tapauksessa, myös tässä halutaan käsitellä topologista avaruutta, joka vastaa abstraktia kompleksia. Olkoon K abstrakti kompleksi.

Olkoon joukko $G(K)$ vektoriavaruuden $\mathcal{F} := \{f : K \to \mathbb{R}\}$ suurin osajoukko, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $f(k) \geqslant 0$ kaikilla $k \in K$,
2. $f^{-1}(0,\infty) \in \Lambda$, sekä
3. $\sum_{k \in K} f(k) = 1$.

Kohdan 3 ehdossa summattavia on vain äärellinen määrä, sillä kohdan 2 nojalla on olemassa sellainen $A \in \Lambda$, että $\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in A} f(k)$.

Olkoon nyt $A \in \Lambda$. Määritellään joukko $G(A) := \{f \in G(K) : f^{-1}(0,\infty) \subset A\}$. Näin määritelty joukko ei ole tyhjä, sillä esimerkiksi kuvaus $f : K \to R$,

$$k \mapsto \begin{cases} 0, & \text{kun } k \notin A \text{ ja} \\ 1/\#A, & \text{kun } k \in A \end{cases}$$

kuuluu joukkoon $G(A)$. Kohdasta 2 seuraa, että $G(K) = \bigcup_{A \in \Lambda} G(A)$. Olkoon nyt $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ n-ulotteinen simpleksi. Määritellään kuvaus $F_A : G(A) \to \mathbb{R}^{n+1}$ kaavalla

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} f(a_i) e_i \ .$$

Nyt $F_A(G(A))$ on pisteiden $\{e_i\}_{i=1}^n$ konveksi verho. Erityisesti siis tapauksessa $n = 2$ joukko $F_A(G(A))$ on kolmio, jonka kärkipisteet ovat e_1, e_2 ja e_3. Kuvaus F_A on lisäksi bijektio. Määritellään joukon $G(A)$ topologia asettamalla, että joukko $U \subset G(A)$ on avoin täsmälleen silloin, kun $F_A(U) \subset F_A(G(A))$ on avoin avaruudessa $F_A(G(A))$. Tällöin $F_A : G(A) \to F_A(G(A))$ on homeomorfismi. Määritellään edelleen avaruuden $G(K)$ topologia vaatimalla, että joukko $E \subset G(K)$ on suljettu, jos ja vain jos $E \cap G(A)$ on suljettu avaruudessa $G(A)$ kaikilla $A \in \Lambda$.

Kuvaus F_A riippuu siitä, miten joukko A on järjestetty. Tämä järjestys ei kuitenkaan vaikuta joukon $G(A)$ topologian määrittelyyn. Edelleen jos $A_1, A_2 \in \Lambda$ ja $A_1 \cap A_2 \in \Lambda$, niin $G(A_1) \cap G(A_2) = G(A_1 \cap A_2)$. Vastaavasti jos $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, niin $G(A_1) \cap G(A_2) = \varnothing$. Näin määriteltyä avaruutta $G(K)$ sanotaan *topologiseksi kompleksiksi*. Vastaavasti joukkoja $G(A)$ varustettuna edellä määritellyllä topologialla sanotaan *topologisiksi simplekseiksi*.

Määritellään seuraavaksi pinnan kolmiointi.

Määritelmä 3.4 (Pinnan kolmiointi)**.** Olkoon F pinta, joko reunaton tai reunallinen. Pinnalla F on *kolmiointi*, jos on olemassa 2-kompleksi (K,Λ) ja kuvaus $\sigma : \Lambda \to \mathcal{P}(F)$, joilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\sigma(A_1 \cap A_2) = \sigma(A_1) \cap \sigma(A_2)$ kaikilla $A_1, A_2 \in \Lambda$.

(ii) Jokaiselle $A \in \Lambda$ on olemassa homeomorfismi $h_A : G(A) \to \sigma(A)$, jolle pätee, että $h_A(G(A')) = \sigma(A)$ kaikilla $A' \subset A$.

(iii) Avaruus F on yhdiste simpleksien kuvista eli $F = \bigcup_{A \in \Lambda} \sigma(A)$.

(iv) Jokaisella pisteellä $x \in F$ on olemassa ympäristö U siten, että $U \cap \sigma(A) \neq \varnothing$ ainoastaan äärellisen monella simpleksillä $A \in \Lambda$.

Tällöin sanotaan, että pinnalla F on kolmiointi kompleksin K suhteen. Mikäli pinnalla on olemassa kolmiointi, sanotaan, että pinta on *kolmioituva*.

Esimerkki 3.2. Osoitetaan, että kiekko $\bar{B}^2$ voidaan kolmioida kompleksilla (K,Λ), $K = \{a_1,a_2,a_3\}$ ja $\Lambda = \mathcal{P}(K) \setminus \{\varnothing\}$. Olkoon $j \in \{0,1,2\}$. Määritellään $\beta_j = e^{\mathrm{i}2j\pi/3} \in \bar{B}^2$, $b_j = \{x \in \bar{B}^2 : x = e^{\mathrm{i}2(j+t)\pi/3},\ t \in [0,1]\}$ ja $B_j = \{x \in \bar{B}^2 : x = re^{\mathrm{i}2(j+t)\pi/3},\ t \in [0,1],\ r \in [0,1]\}$. Määritellään kuvaus $\sigma\colon \Lambda \to \mathcal{P}(\bar{B}^2)$ kaavalla

$$a_i \mapsto \beta_i,\ \{a_1, a_2\} \mapsto b_1,\ \{a_2, a_3\} \mapsto b_2, \{a_3, a_1\} \mapsto b_3 \text{ ja } K \mapsto \bar{B}^2.$$

Näin määritelty kuvaus täyttää selvästi määritelmän 3.4 ehdot (i), (iii) ja (iv). Osoitetaan, että myös ehto (ii) toteutuu. Olkoon E joukon $\{\beta_j\}_{j=1}^3$ konveksi verho avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Määritellään kuvaus $h'\colon G(K) \to E$ kaavalla

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{3} f(a_i)\beta_i.$$

Määritellään edelleen kuvaus $g\colon E \to \bar{B}^2$ seuraavasti. Olkoon $x \in E \setminus \{0\}$. Tällöin puolisuora $\{tx/|x| \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant 0\}$ leikkaa joukon E reunaa täsmälleen yhdessä pisteessä. Olkoon $l_x = t_x x/|x|$ tämä leikkauspiste. Määritellään g pisteessä $x \in E$ kaavalla

$$x \mapsto \frac{x}{t_x}.$$

Asetetaan lisäksi $g(0) = 0$. Näin määritellyt kuvaukset h' ja g ovat homeomorfismeja. Määritellään edelleen homeomorfismi $h\colon G(K) \to \bar{B}^2$ kaavalla $h = g \circ h'$. Homeomorfismin h konstruktiosta seuraa, että kaikilla $A \in \Lambda$ kuvaus $h_A := h|_{G(A)}\colon G(A) \to \sigma(A)$ täyttää ehdon (ii).

Edellinen määritelmä voidaan helposti yleistää tapauksiin, jossa pinnan sijaan käsiteltävä avaruus on korkeampiulotteinen. Tässä tutkielmassa pitäydytään 2-ulotteisessa tapauksessa. Seuraava tulos sanoo, että pinta, jolla on kolmionti kompleksin K suhteen, on homeomorfinen vastaavan topologisen kompleksin $G(K)$ kanssa. Näin ollen pinnan perusryhmän määrittäminen voidaan palauttaa kompleksin $G(K)$ perusryhmän määrittämiseen.

Apulause 3.1. *Olkoon F pinta, jolla on kolmionti kompleksin K suhteen. Tällöin on olemassa homeomorfismi $h\colon G(K) \to F$.*

Todistus. Olkoon F pinta, jolla on kolmiointi kompleksin K suhteen. Määritellään homeomorfismi $h : G(K) \to F$ vaiheittain. Olkoon $k \in K$, merkitään $A_k = \{k\}$. Nyt joukko $G(A_k)$ on yksiö. Määritellään $h(G(A_k)) = \sigma(k)$ kaikilla $k \in K$. Olkoon nyt $A \in \Lambda$ 1-simpleksi. Määritelmän 3.4 kohdan (ii) nojalla on olemassa homeomorfismi $h_A\colon G(A) \to \sigma(A)$. Määritellään $h(x) = h_A(x)$ kaikilla $x \in G(A)$.

Olkoon nyt $A \in \Lambda$ 2-simpleksi ja olkoot $A_1,A_2,A_3 \subset A$ sen sisältämät 1-simpleksit. Ehdon (i) nojalla kuvaus h on jo määritelty homeomorfisesti joukon $G(A)$ reunalla $\partial G(A) = G(A_1) \cup G(A_2) \cup G(A_3)$.

Olkoon $B := \bar{B}^2(0,1)$ suljettu kiekko ja olkoon $G\colon G(A) \to B$ homeomorfismi, joka kuvaa joukot $G(A_1)$, $G(A_2)$ ja $G(A_3)$ pallon B suljetuiksi kaariksi B_1, B_2 ja B_3, joiden sisustat ovat pistevieraita ja joille pätee $\partial B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ (ks. esimerkki 3.2). Olkoon $g\colon G(A) \to \sigma(A)$ kohdan (ii) mukainen homeomorfismi ja olkoon $\pi\colon B \setminus \{0\} \to \partial B$ projektio $x \mapsto x/|x|$. Määritellään kuvaus $f\colon B \to B$ kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} |x|\,(G \circ g^{-1} \circ h \circ G^{-1})\,(\pi(x)) & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Kuvaus on jatkuva, sillä $|f(x)| = |x| \to 0$, kun $x \to 0$. Edelleen kuvaus on bijektiivinen. Kuvaus $f|_{B\setminus\{0\}}$ on selvästi avoin. Siten kuvaus f on avoin, sillä se kuvaa origokeskeiset r-säteiset pallot origokeskeisiksi r-säteisiksi palloiksi ja siten origon avoimet ympäristöt origon avoimiksi ympäristöiksi. Siis f on homeomorfismi.

Määritellään kuvauksen $f\colon B \to B$ avulla homeomorfismi $f'_A\colon G(A) \to \sigma(A)$ kaavalla

$$x \mapsto g \circ G^{-1} \circ f \circ G(x).$$

Tällöin kaikilla $i \in \{1,2,3\}$ ja kaikilla $x \in G(A_i)$ pätee

$$f'_A(x) = h_{A_i}(x).$$

Kuvaukset f'_A voidaan siis laajentaa kuvaukseksi $h\colon G(K) \to F$ siten, että kaikilla 2-simplekseillä $A \in \Lambda$ pätee $h|_G(A) = f'_A$. Kuvaus on paloittain jatkuva ja koska määritelmät yhtyvät simpleksien reunoilla, se on myös jatkuva. Kohdan (i) nojalla se on injektio. Kuvaus on kohtien (iii) ja (iv) nojalla homeomorfismi. Pinta F ja topologinen kompleksi $G(K)$ näin ollen ovat homeomorfisia. □

Edellisen apulauseen perusteella kolmioituvan pinnan perusryhmä on isomorfinen kolmiointia vastaavan topologisen kompleksin perusryhmän kanssa. Osoitetaan seuraavaksi, että kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä on vapaa. Tätä varten tarvitaan seuraava apulause, joka sanoo, että 2-ulotteinen topologinen simpleksi voidaan deformaatioretraktoida sivukseen (1-ulotteinen alikompleksi) tai kahden sivunsa yhdisteeksi.

Apulause 3.2. *Olkoon A abstrakti 2-simpleksi ja olkoot A_1, A_2 ja A_3 sen 1-ulotteiset alisimpleksit. Tällöin aliavaruudet $G(A_1) \subset G(A)$ ja $G(A_1) \cup G(A_2) \subset G(A)$ ovat topologisen simpleksin $G(A)$ deformaatioretrakteja.*

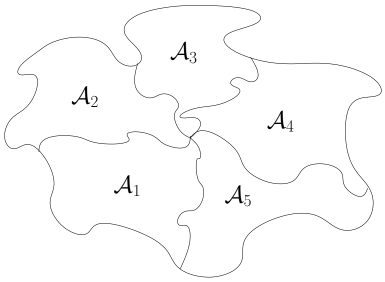
Todistus. Olkoon A 2-simpleksi ja olkoot A_1, A_2 ja A_3 sen 1-ulotteiset alisimpleksit. Olkoon $B \subset \mathbb{R}^2$ kolmio, jonka sivut ovat B_1, B_2 ja B_3. Olkoon $f\colon G(A) \to B$ homeomorfismi, jolle pätee $f(G(A_i)) = B_i$ kaikilla $i \in \{1{,}2{,}3\}$. Sivu B_1 ja yhdiste $B_1 \cup B_2$ ovat kolmion B retrakteja. Olkoot $r_1\colon B \to B_1$ ja $r_2\colon B \to B_1 \cup B_2$ vastaavat retraktiot. Koska kolmio B on konveksi joukko, on kuvaus $d_i\colon B \times I \to B$, $(x{,}t) \mapsto tr_i + (1-t)\mathrm{id}_B$, hyvin määritelty ja jatkuva, kun $i \in \{1{,}2\}$. Toisaalta $d_i(\cdot{,}0) = \mathrm{id}_B$ ja $d_i(\cdot{,}1) = r_i$, joten kuvaus d_i on deformaatioretraktio.

Määritellään nyt $D\colon G(A) \times I \to G(A)$ kaavalla

$$(x{,}t) \mapsto f^{-1} \circ d_i(f(x){,}t).$$

Kuvaus D on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva. Lisäksi pätee $D(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{G(A)}$ ja $D(\cdot, 1) = f^{-1} \circ r_i \circ f$. Edelleen $f^{-1} \circ r_i \circ f$ on jatkuva kuvaus ja lisäksi $f^{-1} \circ r_1 \circ f|_{G(A_1)} = \mathrm{id}_{G(A_1)}$ ja vastaavasti $f^{-1} \circ r_2 \circ f|_{G(A_1) \cup G(A_2)} = \mathrm{id}_{G(A_1) \cup G(A_2)}$. Siis joukot $G(A_1)$ ja $G(A_1) \cup G(A_2)$ ovat avaruuden $G(A)$ deformaatioretrakteja. □

Seuraava apulause antaa pinnan kolmionnille joitakin hyödyllisiä ominaisuuksia. Apulauseen todistus sivuutetaan. Todistus on esitetty kirjassa [1]. Ominaisuus (i) kertoo oleellisesti sen, että kolmionnissa enintään kaksi "kolmiota" voivat jakaa yhteisen "sivun". On intuitiivisesti uskottavaa, ettei kolmioita voi olla enempää, koska avaruuden täytyy näyttää lokaalisti tasolta $\mathbb{R}^2$ myös näiden sivujen pisteissä. Ominaisuus (ii) kertoo, että jokaisessa kolmiointia vastaavan kompleksin K pisteissä topologinen kompleksi on oleellisesti kuvan 3.1 näköinen.



Kuva 3.1

Apulause 3.3. *[1, Theorem 22E] Olkoon* (K,Λ) *reunallisen tai reunattoman pinnan* F *kolmiointi,* $\sigma\colon \Lambda \to \mathcal{P}(F)$ *määritelmän 3.4 mukainen kuvaus ja* $f\colon G(K) \to F$ *homeomorfismi, jolle* $f(G(A)) = \sigma(A)$ *kaikilla* $A \in \Lambda$*. Tällöin kompleksilla* K *on seuraavat ominaisuudet.*

(i) Jokainen 1*-simpleksi* $A \in \Lambda$ *sisältyy joko yhteen tai kahteen* 2*-simpleksiin. Jos* A *sisältyy yhteen* 2*-simpleksiin, niin* $G(A) \subset \partial G(K)$*. Jos* A *sisältyy kahteen* 2*-simpleksiin, niin* $\mathrm{int}G(A) \subset G(A)$ *sisältyy kompleksin* $G(K)$ *sisäpisteiden joukkoon* $\mathrm{int}G(K)$*.*

(ii) Jokaisella pisteellä $k \in K$*, jolle* $G(k) \in \mathrm{int}G(K)$*, on olemassa* $m \geqslant 3$ *ja* 1*-simpleksit* $\{a_i\}_{i=1}^m$ *sekä* 2*-simpleksit* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *siten, että* $k \in \bigcap_{i=1}^m (a_i \cap A_i)$*, ja* $k \notin A$ *kaikilla muilla* 1*- ja* 2*-simplekseillä. Lisäksi* $a_1 = A_1 \cap A_m$ *ja* $a_i = A_i \cap A_{i-1}$ *kaikilla* $i \geqslant 2$*.*

Jokaisella pisteellä $k \in K$*, jolle pätee* $G(k) \in \partial G(K)$*, on olemassa* $m \geqslant 1$ *ja* 1*-simpleksit* $\{a_i\}_{i=1}^m$ *sekä* 2*-simpleksit* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *siten, että* $k \in a_m \cap \bigcap_{i=1}^{m-1} (a_i \cap A_i)$*, ja* $k \notin A$ *kaikilla muilla* 1*- ja* 2*-simplekseillä. Lisäksi* $a_i = A_i \cap A_{i-1}$ *kaikilla* $m > i \geqslant 2$*.*

Seuraus 3.4. *Olkoon* (K,Λ) *pinnan* F *kolmiointi,* $\sigma\colon \Lambda \to \mathcal{P}(F)$ *määritelmän 3.4 mukainen kuvaus ja* $f\colon G(K) \to F$ *homeomorfismi, jolle* $\sigma(A) = f(G(A))$ *kaikilla* $A \in \Lambda$*, ja olkoon* $k \in K$*. Olkoon* $\{A_i\}_{i=1}^m$ *niiden* 2*-simpleksien joukko, johon* k *sisältyy. Olkoon* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *ja määritellään* $b_j := e^{i\frac{2\pi}{m}j} \in \mathbb{R}^2$*. Määritellään edelleen* $B_j := \{tb_j + (1-t)b_{j+1} \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$*. Tällöin on olemassa bijektio* $g\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$

ja homeomorfismi $h\colon \bigcup_{i=1}^m G(A_i) \to \bigcup_{i=1}^m B_i \subset \mathbb{R}^2$, *jolle* $h(G(A_{g(i)})) = B_i$ *kaikilla* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Todistus. Olkoon $k \in K$. Apulauseen 3.3 nojalla on olemassa $m \geqslant 3$ ja 1-simpleksit $\{a_i\}_{i=1}^m$ sekä 2-simpleksit $\{A_i\}_{i=1}^m$, joille $k \in \bigcap_{i=1}^m (a_i \cap A_i)$ ja $k \notin A$ kaikilla muilla 1- ja 2-simplekseillä $A \in \Lambda$. Lisäksi $a_1 = A_1 \cap A_m$ ja $a_i = A_i \cap A_{i-1}$ kaikilla $i \geqslant 2$. Näin ollen on olemassa pisteet $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset K$, joille pätee $a_i = \{k, \alpha_i\}$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Olkoon $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tällöin $A_i = \{k, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$, missä $\alpha_{m+1} \coloneqq \alpha_1$. Määritellään kuvaus $f_i\colon G(A_i) \to B_i$ kaavalla

$$f_i(g) = g(\alpha_i)b_i + g(\alpha_{i+1})b_{i+1}.$$

Joukon $G(A_i)$ topologian määritelmän nojalla f_i on selvästi homeomorfismi. Edelleen $f_i|_{G(A_i) \cap G(A_{i+1})} = f_{i+1}|_{G(A_i) \cap G(A_{i+1})}$ kaikilla $i \in \{1, \ldots m-1\}$ ja $f_m|_{G(A_m) \cap G(A_1)} = f_1|_{G(A_m) \cap G(A_1)}$. Näin ollen voidaan määritellä kuvaus $h\colon \bigcup_{i=1}^m G(A_i) \to \bigcup_{i=1}^m B_i$ kaavalla

$$g \mapsto f_i(g),$$

kun $g \in G(A_i)$. Kuvaus h on selvästi bijektio. Avaruuden $G(K)$ määritelmän perusteella kuvaus h on selvästi jatkuva ja suljettu, joten se on homeomorfismi. $\square$

3.3 Pinnan perusryhmä

Seuraavan lauseen seurauksena saadaan tulos, että kolmioituvan kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä on äärellisen joukon suhteen vapaa ryhmä. Erityisesti mikäli kolmioinnin niin sanottu *Eulerin karakteristika* tunnetaan, tiedetään myös vapaan ryhmän virittäjien lukumäärä. Eulerin karakteristika on hyvin hyödyllinen avaruuteen liitettävä luku, sillä se on topologinen – ja jopa homotopinen – invariantti.[1] Tämä tulos itseasiassa antaa keinon määrittää pinnan perusryhmä suoraan pinnan Eulerin karakteristikan avulla. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan todisteta tätä tulosta ja siksi sitä ei myöskään todistuksissa käytetä, vaan tarkastelut tehdään pintaa vastaavan kolmioinnin Eulerin karakteristikaa käyttämällä. [4]

[1] Topologisella invariantilla tarkoitetaan ominaisuutta, joka sailyy homeomorfismissa. Vastaavasti homotopisella invariantilla tarkoitetaan ominaisuutta, joka säilyy homotopiaekvivalenssissa.

Määritelmä 3.5 (Eulerin karakteristika)**.** Olkoon K äärellinen abstrakti 2-kompleksi. Kompleksin K Eulerin karakteristika on luku $\chi(K) = k-s+t$, missä k on 0-simpleksien lukumäärä, s on 1-simpleksien määrä ja t on 2-simpleksien määrä.

Olkoon X äärellinen graafi. Graafin X Eulerin karakteristika on luku $\chi(X) = k - s$, missä k on 0-solujen määrä ja s on 1-solujen määrä.

Lause 3.5. *Olkoon F kolmioituva kompakti reunallinen pinta ja olkoon (K,Λ) kolmiointia vastaava abstrakti kompleksi. Tällöin on olemassa graafi $X \subset G(K)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) $X = \bigcup_{A\in\Lambda'} G(A)$, *missä* $\Lambda' \subset \Lambda$ *koostuu* 0- *ja* 1-*ulotteisista simpleksistä (ei välttämättä kaikista).*

(ii) Graafi X on topologisen kompleksin $G(K)$ deformaatioretrakti.

(iii) Graafilla X on sama Eulerin karakteristika kuin kompleksilla K.

Todistus. Olkoon F kolmioituva kompakti reunallinen pinta ja olkoon (K,Λ) kolmiointia vastaava abstrakti kompleksi.

Olkoon $A \in \Lambda$ 2-simpleksi siten, että jokin 1-alisimpleksejä $A_1,A_2,A_3 \subset A$ vastaava joukko $G(A_i)$ sisältyy ainoastaan yhteen 2-simpleksiin. Olkoon kyseinen alisimpleksi A_1. Ainakin yksi tällainen A löytyy, sillä F on reunallinen pinta. Nyt joukon $A_2 \subset K$ pisteet sisältyvät simpleksi A mukaan lukien joko yhteen tai useampaan 2-simpleksiin. Vastaavasti joukko A_3 sisältyy joko yhteen tai useampaan 2-simpleksiin. Olkoon $d_3\colon G(A)\times I \to G(A)$ apulauseen 3.2 mukainen deformaatioretraktio joukosta $G(A)$ joukkoon $G(A_3)$ ja vastaavasti d_{23} deformaatiorektraktio joukosta $G(A)$ joukkoon $G(A_2) \cup G(A_3)$. Jos sekä joukon A_2 että joukon A_3 kaikki pisteet sisältyvät useampaan kuin yhteen 2-simpleksiin, niin määritellään $d\colon G(K) \times I \to G(K)$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} d_{23}(x,t), & \text{kun } x \in G(A) \text{ ja} \\ x, & \text{kun } x \notin G(A). \end{cases}$$

Tällöin d on deformaatioretraktio joukosta $G(K)$ joukkoon $(G(K) \setminus G(A)) \cup (G(A_2) \cup G(A_3))$. Jos taas toisen simpleksin A_2 tai A_3, olkoon A_2, toinen piste sisältyy vain yhteen 2-simpleksiin, niin määritellään $d\colon G(K) \times I \to G(K)$ kaavalla

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} d_{3}(x,t), & \text{kun } x \in G(A) \text{ ja} \\ x, & \text{kun } x \notin G(A). \end{cases}$$

Tällöin d on deformaatioretraktio joukosta $G(K)$ joukkoon $(G(K) \setminus G(A)) \cup G(A_3)$. Saatu deformaatioretrakti on topologinen kompleksi, joten merkitään deformaatioretraktia $G(K_1)$.

Jatketaan näin saadun avaruuden deformaatioretraktointia induktiivisesti. Olkoon $C_k \subset \Lambda$ k:nnessa vaiheessa deformaatioretraktoitujen 2-simpleksien joukko ja olkoon $G(K_k)$ k:nnen vaiheen deformaatioretrakti. Toisin sanoen $G(K_k)$ on saatu joukosta $G(K_{k-1})$ deformaatioretraktoimalla simpleksit $G(A)$ kaikilla $A \in C_k$. Olkoon $A \in C_k$ ja olkoon $Q_A := G(K_k) \cap G(A)$. Olkoon $A' \subset A$ 1-simpleksi siten, että $G(A') \subset Q_A$. Nyt $G(A')$ sisältyy enintään yhteen 2-simpleksiin, joka sisältyy joukkoon $G(K_k)$. Jos $G(A')$ kuuluu yhteen tällaiseen 2-simpleksiin, niin toistetaan kyseiselle simpleksille ensimmäinen vaihe, toisin sanoen määritellään deformaatioretraktio $d_{A'}\colon G(K_k) \times I \to G(K_k)$. Määritellään nyt

$$G(K_{k+1}) := \bigcap_{\substack{G(A') \subset Q_A \\ A \in C_k}} d_{A'}(G(K_k)) \ .$$

Tällöin $G(K_{k+1})$ on avaruuden $G(K_k)$ deformaatioretrakti. Deformaatioretraktio saadaan ketjuttamalla deformaatioretraktiot $d_{A'}$, joita on vain äärellinen määrä.

Osoitetaan, että $G(K_n)$ on graafi jollakin indeksillä $n \in \mathbb{N}$. Yhtenäisyys seuraa deformaatioretraktion jatkuvuudesta. Näin ollen riittää osoittaa, että $G(K_n)$ ei sisällä yhtään 2-simpleksiä jollakin $n \in \mathbb{N}$. Merkitään symbolilla A_0 2-simpleksiä, joka deformaatioretraktoidaan ensimmäisessä vaiheessa. Olkoon $\hat{A}$ 2-simpleksi. Osoitetaan, että on olemassa $m \in \mathbb{N}$ ja 2-simpleksit $\{A_i\}_{i=1}^m$ siten, että $A_1 = A_0$, $A_m = \hat{A}$ ja $A_i \cap A_{i+1}$ on 1-simpleksi kaikilla $i < m$. Olkoon $E := \{A_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \Lambda$ ne 2-simpleksit, joilla on yllä mainittu ominaisuus.

Osoitetaan, että joukko $\mathcal{C} := \bigcup_{\alpha \in J} G(A_\alpha)$ on avoin ja suljettu. Apulauseen 3.3 nojalla $G(K)$ on yhdiste 2-simplekseistä. Merkitään 0-,1- ja 2-simpleksien kokoelmia Λ_0,Λ_1,$\Lambda_2 \subset \Lambda$ vastaavasti. Jokaiselle 2-simpleksille $A \in \Lambda_2$ valitaan piste $x_A \in \mathrm{int} G(A)$. Tällöin joukko $S := \{x_A\}_{A \in \Lambda_2}$ on suljettu. Siten kokoelma $\{G(K) \setminus S\} \cup \{\mathrm{int} G(A)\}_{A \in \Lambda_2}$ on avaruuden $G(K)$ avoin peite. Koska $G(K)$ on kompakti, on tällä äärellinen osapeite. Näin ollen $G(K)$ on äärellinen yhdiste 2-simpleksejä. Siten myös $\mathcal{C}$ on äärellinen yhdiste 2-simpleksejä. Koska 2-simpleksit ovat suljettuja, on myös $\mathcal{C}$ suljettu. Osoitetaan, että $\mathcal{C}$ on myös avoin. Olkoon $c \in \mathcal{C}$ ja olkoon G niiden 2-simpleksien A joukko, joille pätee $c \in G(A)$. Tällöin on olemassa pisteen c ympäristö $U \subset \bigcup_{A \in G} G(A)$. Näin ollen, jos $G \subset E$, niin $U \subset \mathcal{C}$. Jos $G \not\subset E$, niin tällöin on olemassa 2-simpleksit $A' \in G$, $A' \notin E$ ja $A'' \in E$, joille pätee, että $c \in G(A') \cap G(A'')$. Koska $A' \in G$, niin $G(A') \cap G(A'') = c$. Toisaalta apulauseen 3.3 kohdan (ii) nojalla löytyy 2-simpleksit $\{A_i\}_{i=1}^n$ siten, että $A_1 = A'$, $A_n = A''$, ja $A_i \cap A_{i+1}$ on 1-simpleksi kaikilla $i < n$. Näin ollen $A' \subset E$, mikä on ristiriita. Siis $G \subset E$ ja siten $\mathcal{C}$ on avoin. Koska $G(K)$ on yhtenäinen, pätee $\mathcal{C} = G(K)$.

Deformaatioretraktion d määritelmästä seuraa, että kaikilla 2-simplekseillä $A \in E$ pätee, että $G(A) \not\subset G(K_n)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Siis $G(K_n)$ on 1-ulotteinen topologinen kompleksi ja siten graafi jollakin $n \in \mathbb{N}$. Erityisesti tämä graafi $X := G(K_n)$ on avaruuden $G(K)$ deformaatioretraktio. Näin ollen kohdat (i) ja (ii) on todistettu.

Osoitetaan, että graafilla X on sama Eulerin karakteristika kuin kompleksilla K. Deformaatioretraktion määritelmästä nähdään, että Eulerin karakteristikalle pätee $\chi(K_{i+1}) = \chi(K_i)$. Näin ollen graafilla X on sama Eulerin karakteristika kuin kompleksilla K. □

Seuraus 3.6. *Olkoon F kompakti reunallinen pinta, jolla on kolmiointi K. Tällöin perusryhmä $\pi_1(F)$ on $1 - \chi(K)$ alkion virittämä vapaa ryhmä $\mathbb{F}_{1-\chi(K)}$, missä $\chi(K)$ on kompleksin K Eulerin karakteristika.*

Todistus. Lauseen 3.5 nojalla on olemassa yhtenäinen ja äärellinen graafi $X \subset F$ siten, että $F \simeq X$ ja $\chi(K) = \chi(X)$. Toisaalta tiedetään, että graafin perusryhmä on $1 - \chi(X/T)$ alkion virittämä vapaa ryhmä, missä $T \subset X$ on maksimaalinen puu. Näin ollen riittää osoittaa, että $\chi(X) = \chi(X/T)$.

Olkoon $A := \{e_i \subset X^1 : e_i \text{ on 1-solu ja } e_i \not\subset T\}$. Koska T on maksimaalinen, pätee $\chi(X) = \chi(T) - \#A$. Toisaalta apulauseen 2.12 todistuksesta seuraa, että X/T on homeomorfinen ympyröiden yhden pisteen yhdisteen $\bigvee_{i=1}^{\#A} S^1$ kanssa. Näin ollen $\chi(X/T) = 1 - \#A$. Riittää siis osoittaa, että yhtenäisen äärellisen puun Eulerin karakteristika on 1.

Kiinnitetään maksimaalinen puu $T \subset X$. Jos puu T on yksiö, on sen Eulerin karakteristika 1. Oletetaan nyt, että puu T ei ole yksiö. Puu T on äärellinen ja yhtenäinen, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $T = \bigcup_{i=1}^n \bar{e}_i$, missä $\bar{e}_i$ on suljettu 1-solu siten, että $\bar{e}_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{e}_j\right) \neq \varnothing$ kaikilla $i > 1$. Koska T on puu, on leikkaus $\bar{e}_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{e}_j\right)$ yksiö kaikilla $i > 1$. Näin ollen $\chi\left(\bigcup_{j=1}^{i} \bar{e}_j\right) = \chi\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{e}_j\right)$ kaikilla $i > 1$. Siis $\chi(T) = \chi(\bar{e}_1) = 1$. □

Edellisen tuloksen nojalla tiedetään, että kompaktin reunallisen pinnan perusryhmä on vapaa. Lisäksi tulos antaa keinon selvittää kuinka monta virittäjää tällä ryhmällä on. Seuraavaa aputulosta käytetään osoittamaan, että kaksi sopivasti sisäkkäistä kompaktia reunallista pintaa sopivat perusryhmän mielessä hyvin yhteen, toisin sanoen pienemmän avaruuden perusryhmä voidaan nähdä suuremman avaruuden perusryhmän aliryhmänä inkluusiokuvauksen indusoiman injektiivisen homomorfismin kautta.

Apulause 3.7. *Olkoon X yhtenäinen graafi ja Y sen yhtenäinen aligraafi. Olkoon $v \in Y$. Tällöin on olemassa perusryhmän $\pi_1(Y,v)$ kanta $S \subset \pi_1(Y,v)$ ja perusryhmän $\pi_1(X,v)$ kanta $S' \subset \pi_1(X,v)$ siten, että inkluusiokuvauksen $\iota : X \hookrightarrow Y$ indusoima homomorfismi $\iota_\# : \pi(Y,v) \to \pi(X,v)$ on injektio ja lisäksi $\iota_\#(S) \subset S'$.*

Todistus. Olkoot $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{e}_\alpha$ yhtenäinen graafi, $Y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} \overline{e}_\alpha$ sen yhtenäinen aligraafi, missä $\Lambda' \subset \Lambda$ ja $\overline{e}_\alpha$ on suljettu 1-solu kaikilla $\alpha \in \Lambda$. Olkoon $T_Y \subset Y$ graafin Y maksimaalinen puu siten, että $v \in T_Y$. Tällöin $T_Y \subset X$ on puu myös avaruudessa X. Näin ollen lemman 2.2 nojalla on olemassa maksimaalinen puu $T_X \subset X$ siten, että T_Y on puun T_X deformaatioretrakti. Koska T_Y on maksimaalinen graafissa Y, niin pätee, että $(T_X \smallsetminus T_Y) \cap Y = \varnothing$. Olkoon $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\hat{\Lambda}}$ niiden avointen 1-solujen kokoelma, jotka sisältyvät joukkoon $X \smallsetminus T_X$, ja vastaavasti $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\hat{\Lambda}'}$ niiden avointen 1-solujen kokoelma, jotka sisältyvät joukkoon $Y \smallsetminus T_Y$. Tällöin $\hat{\Lambda}' \subset \hat{\Lambda}$. Olkoon $\iota_\alpha \colon S^1 \to \bigvee_{\alpha\in\hat{\Lambda}} S^1$ luonnollinen inkluusio. Apulauseen 2.12 todistuksesta seuraa, että on olemassa homotopiaekvivalenssi $h \colon X \to \bigvee_{\alpha\in\hat{\Lambda}} S^1$ siten, että $h(e_\alpha) \subset \iota_\alpha S^1$ ja $\overline{h(e_\alpha)} = \iota_\alpha S^1$ kaikilla $\alpha \in \hat{\Lambda}$. Nyt $h(Y) = \bigvee_{\alpha\in\hat{\Lambda}'} S^1 \subset \bigvee_{\alpha\in\hat{\Lambda}} S^1$. Valitsemalla perusryhmien $\pi_1(X)$ ja $\pi_1(Y)$ kannoiksi silmukat $t \mapsto \iota_\alpha e^{it2\pi} \in \iota_\alpha S^1$, nähdään, että inkluusiokuvauksen indusoima homomorfismi kuvaa perusryhmän $\pi_1(Y)$ kannan perusryhmän $\pi_1(X)$ kannalle injektiivisesti, josta myös homomorfismin injektiivisyys seuraa. $\square$

Apulause 3.8. *Olkoot F ja F' kompakteja reunallisia pintoja siten, että $F' \subset \operatorname{int} F$ ja että jokainen joukon $F \smallsetminus F'$ komponentti kohtaa joukon F reunan. Olkoot edelleen(K,Λ) ja (K',Λ') reunallisia pintoja F ja F' vastaavat kolmionnit siten, että $\Lambda' \subset \Lambda$. Tällöin on olemassa perusryhmien $\pi(F)$ ja $\pi(F')$ kannat S ja S' siten, että inkluusiokuvauksen $\iota \colon F' \to F$ indusoima homomorfismi $\iota_\#$ on injektio, ja lisäksi $\iota_\#(S') \subset S$.*

Todistus. Riittää osoittaa haluttu tulos pintoja F ja F' vastaaville topologisille komplekseille $G(K)$ ja $G(K')$. Merkitään $\Lambda_i \subset \Lambda$ ja $\Lambda'_i \subset \Lambda'$ i-simpleksien joukkoja kaikilla $i \in \{0,1,2\}$. Olkoon $\{C_i\}_{i=1}^n$ joukon $G(K) \smallsetminus G(K')$ komponenttien kokoelma. Tällöin on olemassa 2-simpleksit $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \Lambda_2$ siten, että $G(A_i) \cap \partial G(K) \neq \varnothing$ ja $G(A_i) \cap C_i \neq \varnothing$ kaikilla $i \in \{1, \dots n\}$.

Olkoon nyt $k \in \{1, \ldots, n\}$ ja olkoon $A_0 \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_2'$ 2-simpleksi siten, että $G(A_0) \cap C_k \neq \varnothing$. Tällöin simpleksi A_0 voidaan yhdistää 2-simplekseillä simpleksiin A_k komponentissa C_k, toisin sanoen on olemassa 2-simpleksit $\{\hat{A}_i\}_{i=1}^m \subset \Lambda \setminus \Lambda'$ siten, että $\hat{A}_1 = A_k$, $A_0 = \hat{A}_m$, $G(\hat{A}_i) \cap C_k \neq \varnothing$ ja $G(\hat{A}_i) \cap G(\hat{A}_{i+1})$ on 1-simpleksi kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$. Näin ollen voidaan lauseen 3.5 deformaatioretraktion konstruktiossa määritellä jollakin $j \in \mathbb{N}$ j ensimmäistä deformaatioretraktiota siten, että ainoastaan 2-simpleksit, jotka leikkaavat komponenttia C_k retraktoituvat, lähtien liikkeelle 2-simpleksistä $G(A_k)$.

Toistamalla sama muille komponenteille C_i saadaan kaikki ne 2-simpleksit $G(A)$ retraktoitua, joille $A \notin \Lambda_2'$. Edelleen jatkamalla mistä tahansa 2-simpleksistä $A \in \Lambda'$, joka kohtaa joukon $G(K')$ reunan, lauseen 3.5 todistuksen tapaan, saadaan kompleksi $G(K)$ deformaatioretraktoitua graafiksi X. Toisaalta edellisestä konstruktiosta seuraa, että $G(K')$ saadaan deformaatioretraktoitua graafiksi Y, joka on graafin X aligraafi.

Apulauseen 3.7 nojalla löytyy perusryhmien $\pi_1(X)$ ja $\pi_1(Y)$ kannat S_X ja S_Y siten, että inkluusiokuvauksen $\iota\colon Y \hookrightarrow X$ indusoima homomorfismi on injektio ja kuvaa kannan alkiot kannan alkioksi. Koska graafit X ja Y saadaan saman deformaatioretraktion seurauksena, määrittelevät vastaavat silmukat kannat myös avaruuksiin $G(K)$ ja $G(K')$. Toisin sanoen voidaan määritellä $S := \{[\iota \circ \alpha] \in \pi_1(G(K)) : [\alpha] \in S_X\}$ ja $S' := \{[\iota \circ \alpha] \in \pi_1(G(K')) : [\alpha] \in S_Y\}$. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että epäkompakti pinta voidaan tyhjentää sisäkkäisillä kompakteilla reunallisilla pinnoilla siten, että pinnat täyttävät pareittain apulauseen 3.8 oletukset. Tällaisen tyhjennyksen avulla osoitetaan edelleen tämän tutkielman päätulos, eli että epäkompaktin pinnan perusryhmä on vapaa.

Apulause 3.9. *Olkoon F epäkompakti pinta, jolla on kolmiointi (K,Λ). Tällöin on olemassa kompaktit reunalliset pinnat $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ siten, että*

(i) $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$,

(ii) $F_i \subset \operatorname{int} F_{i+1}$ *kaikilla* $i \in \mathbb{N}$,

(iii) jokainen joukon $F_{i+1} \setminus F_i$ komponentti kohtaa joukon F_{i+1} reunan kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja

(iv) jokaisella reunallisella pinnalla F_i on olemassa kolmiointi (K_i,Λ_i) siten, että $\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$.

Todistus. Riittää osoittaa, että tulos pätee topologiselle kompleksille $G(K)$. Konstruoidaan reunalliset pinnat induktiivisesti lähtien liikkeelle yhdestä 2-simpleksistä ja liittämällä jokaisessa vaiheessa jo saatuun reunalliseen pintaan lisää 2-simpleksejä. Jotta vältyttäisiin tilanteelta, jossa konstruoitu yhdiste 2-simpleksejä ei olekaan reunallinen pinta, täytyy 2-simpleksejä hieman suurentaa 0-simpleksien ympäriltä.

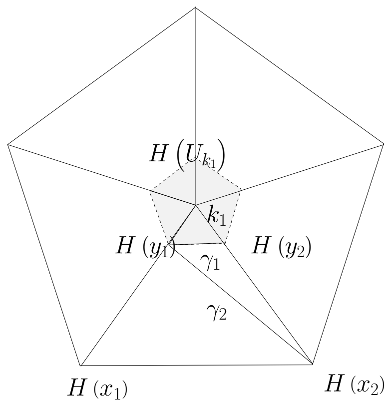
Koska $G(K)$ on N_2-pinta, koostuu se numeroituvasta määrästä 2-simpleksejä. Näin ollen myös 0-simpleksejä on numeroituva määrä. Olkoon $K = \{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Pisteelle $k_1 \in K$ on olemassa 2-simpleksit $\{A_i\}_{i=1}^n$ siten, että $G(k_1) \in \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^n G(A_i)$. Seurauksen 3.4 nojalla on olemassa homeomorfismi $H\colon \bigcup_{j=1}^n G(A_j) \to \bigcup_{j=1}^n B_j$, missä $B_j := B_j^n := \{t_0 e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}j} + t_1 e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}(j+1)} : 0 \leqslant t_0 + t_1 \leqslant 1\}$. Lisäksi homeomorfismille pätee $H(G(A_j)) = B_j$ kaikille $j \in \{1,\dots,n\}$. Olkoon $j \in \{1,\dots,n\}$ ja $A_j = \{x_1,x_2,k_1\}$ siten, että $H(x_1) = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}j}$ ja $H(x_2) = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}(j+1)}$. Olkoon edelleen $y_1 := H^{-1}(\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}j})$ ja $y_2 := H^{-1}(\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}(j+1)})$. Polut $\gamma_1\colon I \to B_j$, $t \mapsto tH(y_1) + (1-t)H(y_2)$, ja $\gamma_2\colon I \to B_j$, $t \mapsto tH(y_1) + (1-t)H(x_2)$, jakavat kolmion B_j kolmeen osaan kuvan 3.2 mukaisesti. Joukko $\{0, H(x_1), H(x_2), H(y_1), H(y_2)\}$ muodostaa kolmion B_j kolmioinnin, kun 2-simplekseiksi valitaan kuvan mukaisesti joukot $\{0, H(y_1), H(y_2)\}$, $\{H(y_1), H(y_2), H(x_2)\}$ ja $\{H(x_1), H(y_1), H(x_2)\}$. Näin ollen edelleen joukko $\{k_1, x_1, x_2, y_1, y_2\}$ muodostaa joukon $G(A_j)$ kolmioinnin. Toistamalla sama kaikille 2-simplekseille $G(A_j)$ saadaan avaruudelle $G(K)$ uusi kolmionti (K_1,Λ_1) siten, että $K \subset K_1$.

Olkoon E joukon $\{\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}j}\}_{j=1}^n$ konveksi verho ja merkitään $U_{k_1} := H^{-1}(E)$. Käymällä induktiivisesti läpi kaikki pisteet k_i ja toistamalla edellinen prosessi kaikille pisteen k_i sisältäville 2-simplekseille $A_j \in \Lambda_{i-1}$ saadaan avaruudelle $G(K)$ uusi kolmiointi ja joukot $U_{k_i} = H_i^{-1}(E)$, missä $H_i\colon \bigcup_{j=1}^{m_i} G(A_j^i) \to \bigcup_{j=1}^{m_i} B_j^{m_i}$ on konstruktiossa käytettävä homeomorfismi pisteen $G(k_i)$ sisältävien 2-simpleksien $G(A_j^i)$, $A_j^i \in \Lambda_{i-1}$, yhdisteeltä joukolle $\bigcup_{j=1}^{m_i} B_j^{m_i}$. Merkitään näin saatua kolmiointia (K',Λ').

Olkoon nyt $A = \{a_1,a_2,a_3\} \in \Lambda$ 2-simpleksi ja $G(A)$ sitä vastaava topologinen 2-simpleksi. Määritellään *laajennettu 2-simpleksi* $\mathcal{A}'$ kaavalla $\mathcal{A}' := G(A) \bigcup_{i=1}^3 U_{a_i}$.

Konstruoidaan seuraavaksi halutut reunalliset pinnat käyttäen hyödyksi laajennettuja 2-simpleksejä $\mathcal{A}'$. Olkoon A_0 2-simpleksi. Määritellään $F_1 := G(A_0)$. Oletetaan induktiivisesti, että luvulla $n \geqslant 1$ on olemassa reunalliset pinnat $F_1,\dots,F_n$, jotka toteuttavat ehdot *(ii)*-*(iii)*. Oletaan lisäksi, että jokainen F_i on yhdiste laajennetuista 2-simplekseistä $\mathcal{A}'$ ja että mikään joukon $G(K) \setminus F_n$ komponenteista ei ole relatiivikompakti[2]. Olkoon

[2]Joukko on relatiivikompakti, jos sen sulkeuma on kompakti.



Kuva 3.2: Kolmioinnin hienonnus

$\{\mathcal{A}'_\alpha\}_{\alpha\in J}$ niiden laajennettujen 2-simpleksien joukko, jotka eivät sisälly joukkoon F_n, mutta jotka leikkaavat sitä. Määritellään $F'_{n+1} := F_n \bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{A}'_\alpha$. Olkoon nyt $\mathcal{C}$ joukon $F \setminus F'_{n+1}$ niiden komponenttien kokoelma, jotka ovat relatiivikompakteja ja määritellään

$$F_{n+1} := F'_{n+1} \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C.$$

Koska F_{n+1} on äärellinen yhdiste suljettuja ja kompakteja joukkoja, on se suljettu ja kompakti. Näin ollen $F_{n+1} \neq F$. Erityisesti siis löytyy 2-simpleksi $G(A)$ siten, että $G(A) \cap \partial F_{n+1} \neq \varnothing$ ja $G(A) \cap (F \setminus F_{n+1}) \neq \varnothing$. Näin ollen F_{n+1} ei ole pinta. Konstruktiossa tehdystä 2-simpleksien laajennuksesta kuitenkin seuraa, että F_{n+1} on reunallinen pinta.

Osoitetaan, että joukot $F_1, \dots, F_{n+1}$ toteuttavat ehdot (ii)-(iii), ja lisäksi lisäehdot, että F_{n+1} on yhdiste laajennetuista 2-simplekseistä, ja että mikään joukon $F \setminus F_{n+1}$ komponentti ei ole relatiivikompakti. Ensimmäinen lisäehdoista seuraa suoraan konstruktiosta. Toisaalta joukon $F \setminus F_{n+1}$ komponentit ovat ne joukon $F \setminus F'_{n+1}$ komponentit, jotka eivät sisälly kokoelmaan $\mathcal{C}$. Näin ollen myös toinen lisäehdoista toteutuu. Olkoon nyt $x \in F_n$. Tällöin joukko F_{n+1} sisältää kaikki ne 2-simpleksit, joihin x sisältyy. Näin ollen $x \in \mathrm{int} F_{n+1}$. Siis ehto $F_n \subset \mathrm{int} F_{n+1}$ toteutuu. Edelleen jokainen joukon $F_{n+1} \setminus F_n$ komponentti B sisältyy johonkin joukon $F \setminus F_n$ komponenttiin D. Koska joukon $F \setminus F_n$ komponentit eivät ole relatiivikompakteja, joukko $D \setminus B$ on epätyhjä. Toisaalta nyt B on avoin avaruudessa F_{n+1} ja suljettu avaruudessa $F_{n+1} \setminus F_n$. Näin ollen komponentti B kohtaa joukon F_{n+1} reunan, sillä muuten D voitaisiin jakaa kahteen pistevieraaseen ja avoimeen joukkoon, mikä on ristiriita joukon D yhtenäisyyden kanssa. Siis ehto (iii) toteutuu. Ehto (iv) seuraa kolmioinnin (K',Λ') konstruktiosta.

Osoitetaan, että $G(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Koska 2-simpleksejä on vain numeroituva määrä, on avaruuden $G(K)$ yhtenäisyyden nojalla jokaisella 2-simpleksillä $G(A)$ on olemassa 2-simpleksit $\{G(A_i)\}_{i=1}^n$ siten, että $G(A_1) = G(A_0)$, $G(A_m) = G(A)$ ja $G(A_i) \cap G(A_{i+1}) \neq \varnothing$ kaikilla $i < m$. Näin ollen $G(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ja siten edelleen $G(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. □

Osoitetaan vielä yksi tekninen aputulos ennen tämän tutkielman päätulosta. Seuraavan apulauseen nojalla apulauseet 3.8 ja 3.9 sopivat hyvin yhteen, toisin sanoen näiden kahden apulauseen avulla voidaan määrittää epäkompaktin pinnan perusryhmä.

Apulause 3.10. *Olkoot G_1,G_2 ja G_3 vapaita ryhmiä ja olkoot $S_1 \subset G_1$, S_2,$S_2' \subset G_2$ ja $S_3' \subset G_3$ niiden äärellisiä kantoja. Olkoot edelleen joukot S_2 ja S_2' bijektiivisiä. Olkoot lisäksi $\iota_1 \colon G_1 \to G_2$ ja $\iota_2 \colon G_2 \to G_3$ injektiivisiä homomorfismeja, joille pätee $\iota_1(S_1) \subset S_2$ ja $\iota_2(S_2') \subset S_3'$. Tällöin joukko $S_3 := (S_3' \setminus \iota_2(S_2')) \cup \iota_2(S_2)$ on ryhmän G_3 kanta. Erityisesti pätee, että $\iota_2(S_2) \subset S_3$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\langle \iota_2 S_2 \rangle = \langle \iota_2 S_2' \rangle$. Olkoon $s \in S_2$. Tällöin on olemassa $\{s_i'\}_{i=1}^n \subset S_2'$ siten, että $s = (s_1')^{\varepsilon_1} \cdots (s_n')^{\varepsilon_n}$, missä $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Nyt

$$\iota_2 s = (\iota_2 s_1')^{\varepsilon_1} \cdots (\iota_2 s_n')^{\varepsilon_n} \in \langle \iota_2 S_2' \rangle.$$

Siis $\langle \iota_2 S_2 \rangle \subset \langle \iota_2 S_2' \rangle$. Olkoon nyt $g = (\iota_2 s_1')^{\varepsilon_1'} \cdots (\iota_2 s_n')^{\varepsilon_n'} \in \langle \iota_2 S_2' \rangle$. Koska joukko S_2 virittää ryhmän G_2, on jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ olemassa $\{s_{k,i}\}_{k=1}^{m_i} \subset S_2$ siten, että $s_i' = (s_{1,i})^{\varepsilon_{1,i}} \cdots (s_{m_i,i})^{\varepsilon_{m_i,i}}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} g &= (\iota_2 s_1')^{\varepsilon_1'} \cdots (\iota_2 s_n')^{\varepsilon_n'} \\ &= ((\iota_2 s_{1,1})^{\varepsilon_{1,1}} \cdots (\iota_2 s_{m_1,1})^{\varepsilon_{m_1,1}})^{\varepsilon_1'} \cdots ((\iota_2 s_{1,n})^{\varepsilon_{1,n}} \cdots (\iota_2 s_{m_n,n})^{\varepsilon_{m_n,n}})^{\varepsilon_n'} \in \langle \iota_2 S_2 \rangle. \end{aligned}$$

Siis $\langle \iota_2 S_2' \rangle \subset \langle \iota_2 S_2 \rangle$. Nyt

$$\begin{aligned} G_3 = \langle S_3' \rangle &= \langle (S_3' \setminus \iota_2 S_2') \cup \iota_2 S_2' \rangle = \langle (S_3' \setminus \iota_2 S_2') \cup \langle \iota_2 S_2' \rangle \rangle \\ &= \langle (S_3' \setminus \iota_2 S_2') \cup \langle \iota_2 S_2 \rangle \rangle = \langle (S_3' \setminus \iota_2 S_2') \cup \iota_2 S_2 \rangle = \langle S_3 \rangle. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että S_3 on kanta. Olkoon G ryhmä ja olkoon $\psi \colon S_3 \to G$ kuvaus. Koska S_2 on vapaan ryhmän $\langle \iota_2 S_2 \rangle < G_3$ kanta, on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $h\colon \langle \iota_2 S_2\rangle \to G$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & \langle \iota_2 S_2 \rangle \arrow[dd, "h"] \\ S_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "\psi|_{S_2}"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määritellään kuvaus $\hat{\psi}\colon S_3' \to G$ seuraavasti. Olkoon $s \in S_2'$. Tällöin $s \in G_2$, joten s voidaan esittää yksikäsitteisesti tulona $s_1 \cdots s_n$, missä $s_i \in S_2$ tai $s_i^{-1} \in S_2$ kaikilla $i \in \{1,\dots,n\}$. Asetetaan $\hat{\psi}(s) = \psi(s_1)\cdots\psi(s_n)$. Asetetaan lisäksi $\hat{\psi}(s) = \psi(s)$, kun $s \in S_2 \setminus S_2'$.

Joukko S_3' on vapaan ryhmän G_3 kanta, joten on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $h'\colon G_3 \to G$ siten, että seuraava kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} & G_3 \arrow[dd, "h'"] \\ S_3' \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "\hat{\psi}"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Osoitetaan, että homomorfismi h' on homomorfismi, jolle $h'(s) = \psi(s)$ kaikilla $s \in S_3$. Olkoon $s \in S_2$. Tällöin on s voidaan esittää yksikäsitteisesti tulona $s = s_1' \cdots s_m'$, missä $s_i' \in S_2'$ tai $(s_i')^{-1} \in S_2'$ kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$. Edelleen s_i' voidaan esittää yksikäsitteisesti tulona $s_1^i \cdots s_{n_i}^i$ kaikilla $i \in \{1,\dots,m\}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} h'(s) &= h'(s_1'\cdots s_m') = \hat{\psi}(s_1')\cdots\hat{\psi}(s_m') \\ &= \psi(s_1^1)\cdots\psi(s_{n_1}^1)\cdots\psi(s_1^m)\cdots\psi(s_{n_m}^m) \\ &= h(s_1^1)\cdots h(s_{n_1}^1)\cdots h(s_1^m)\cdots h(s_{n_m}^m) \\ &= h((s_1^1\cdots s_{n_1}^1)\cdots(s_1^m\cdots s_{n_m}^m)) \\ &= h(s) = \psi(s). \end{aligned}$$

Lisäksi jos $s \in S_3 \setminus S_2$, niin $s \in S_3' \setminus S_2'$, joten $h'(s) = \hat{\psi}(s) = \psi(s)$. Siis h' on homomorfismi, jolle $h'(s) = \psi(s)$ kaikilla $s \in S_3$.

Osoitetaan, että homomorfismi h' on yksikäsitteinen. Olkoon $H\colon G_3 \to G$ homomorfismi, jolle $H(s) = \psi(s)$ kaikilla $s \in S_3$ ja olkoon $g \in G_3$. Koska

$G_3 = \langle S_3 \rangle$, voidaan g esittää tulona $s_1 \cdots s_n$, jossa $s_i \in S_3$ tai $s_i^{-1} \in S_3$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} H(g) &= H(s_1 \cdots s_n) = H(s_1) \cdots H(s_n) \\ &= \psi(s_1) \cdots \psi(s_n) = h'(s_1) \cdots h'(s_n) \\ &= h'(s_1 \cdots s_n) = h(g). \end{aligned}$$

Siis $H = h'$ ja näin ollen S_3 on vapaan ryhmän G_3 kanta. □

Lause 3.11. *Olkoon F epäkompakti pinta, jonka topologialla on numeroituva kanta. Tällöin perusryhmä $\pi_1(F)$ on vapaa ryhmä, jolla on äärellinen tai numeroituvasti ääretön kanta.*

Todistus. Olkoon F epäkompakti pinta, jonka topologialla on numeroituva kanta. Tällöin F on kolmioituva pinta [1]. Olkoot nyt $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ apulauseen 3.9 mukaiset kompaktit reunalliset pinnat. Osoitetaan aluksi aputulos.

Olkoon $K \subset F$ kompakti joukko. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $K \subset F_n$. Määritellään joukolle K avoin peite seuraavasti. Olkoon $k \in K$. Tällöin $k \in F_{n_k}$ jollakin $n_k \in \mathbb{N}$. Erityisesti $k \in \mathrm{int} F_{n_k+1}$. Siten kokoelma $\{\mathrm{int} F_{n_k+1}\}_{k \in K}$ on joukon K avoin peite. Koska K on kompakti löytyy äärellinen osapeite $\{\mathrm{int} F_{n_{k_i}+1}\}_{i=1}^m$. Määritellään $n := \max\{n_{k_i}+1\}_{i=1}^m$. Koska joukot F_i ovat sisäkkäisiä, pätee että $\bigcup_{i=1}^m \mathrm{int} F_{n_{k_i}+1} \subset \bigcup_{i=1}^m F_{n_{k_i}+1} \subset F_n$.

Olkoon $x_0 \in F_1$ kantapiste ja merkitään $\pi_1(F_i) = \pi_1(F_i, x_0)$ ja $\pi_1(F) = \pi_1(F, x_0)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Merkitään edelleen $(\iota_n)_\# \colon \pi_1(F_n) \to \pi_1(F)$ inkluusiokuvauksen $i_n \colon F_n \hookrightarrow F$ indusoimaa homomorfismia ja $(\iota_{nm})_\# \colon \pi_1(F_n) \to \pi_1(F_m)$ inkluusiokuvauksen $\iota_{nm} \colon F_n \hookrightarrow F_m$ indusoimaa homomorfismia kaikilla $m \geqslant n$ ja $m,n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että

$$\pi_1(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\iota_n)_\# \pi_1(F_n).$$

Selvästi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\iota_n)_\# \pi_1(F_n) \subset \pi_1(F)$. Olkoon nyt γ silmukka avaruudessa F. Koska γ on jatkuva, on sen kuva kompakti. Siten se sisältyy edellä osoitetun ominaisuuden nojalla avaruuteen F_m jollakin $m \in \mathbb{N}$. Näin ollen $[\gamma] \in \mathrm{Im}(\iota_m)_\#$. Siis $\pi_1(F) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\iota_n)_\# \pi_1(F_n)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen homomorfismi $(\iota_n)_\#$ on injektio. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $[\gamma] \in \pi_1(F_n)$ siten, että $(\iota_n)_\#[\gamma] = 1$. Tällöin on olemassa homotopia $H \colon I \times I \to F$ polusta γ vakiopolkuun e. Koska H on jatkuva, on $H(I \times I)$ kompakti. Näin ollen on olemassa $m \geqslant n$ siten, että $H(I \times I) \subset F_m$. Määritellään $H_m \colon I \times I \to F_m$, $H_m(s,t) := H(s,t)$. Näin määritelty kuvaus H_m on homotopia silmukoiden γ ja e välillä avaruudessa F_m. Siten $(\iota_{nm})_\#[\gamma] = 1$. Edelleen apulauseesta 3.8 seuraa, että $(\iota_{nm})_\#$ on injektio, ja siten $[\gamma] = 1$. Siis $(\iota_n)_\#$ on injektio.

Apulauseen 3.6 nojalla pintojen F_i perusryhmät ovat äärellisen joukon virittämiä vapaita ryhmiä $\mathbb{F}_{1-\chi(K_i)}$, missä $\chi(K_i)$ on reunallista pintaa F_i vastaavan kolmionnin K_i Eulerin karakteristika. Toisin sanoen $\pi_1(F_i)$ on joukon $S_i := \{1, \dots, 1 - \chi(K_i)\}$ suhteen vapaa ryhmä kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Olkoon $\psi_i \colon S_i \to \pi_1(F_i)$ määritelmän 1.7B mukainen kuvaus. Soveltamalla induktiivisesti apulauseita 3.8 ja 3.10 voidaan kuvaukset ψ_i valita siten, että $(\iota_{i(i+1)})_\# \circ \psi_i(n) = \psi_{i+1}(n)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $n \in S_i$.

Osoitetaan, että perusryhmä $\pi_1(F)$ on joukon $S := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ suhteen vapaa ryhmä. Määritellään kuvaus $\psi \colon S \to \pi_1(F)$ kaavalla $n \mapsto (\iota_m)\# \circ \psi_m(n)$, kun $n \in S_m$. Osoitetaan, että kuvaus on hyvin määritelty. Olkoon $n \in S$ ja $m,k \in \mathbb{N}$ siten, että $n \in S_m \cap S_k$. Voidaan oletetaan, että $k < m$. Nyt $(\iota_k)_\# = (\iota_m)_\# \circ (\iota_{km})_\#$. Toisaalta $\psi_m(n) = (\iota_{km})_\# \circ \psi_k(n)$. Siis

$$(\iota_k)_\# \circ \psi_k(n) = (\iota_m)_\# \circ (\iota_{km})_\# \circ \psi_k(n) = (\iota_m)_\# \circ \psi_m(n),$$

ja siten kuvaus ψ on hyvin määritelty.

Osoitetaan, että kuvaus ψ on määritelmän 1.7B mukainen kuvaus. Olkoon G ryhmä ja olkoon $\phi \colon S \to G$ kuvaus. Olkoon $i \in \mathbb{N}$. Koska $\pi_1(F_i)$ on joukon S_i suhteen vapaa ryhmä, on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $h_i \colon \pi_1(F_i) \to G$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(F_i) \arrow[dd, "h_i"] \\ S_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[dr, "\phi|_{S_i}"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

kommutoi. Koska kuvaus $(\iota_i)_\# \colon \pi_1(F_i) \to \pi_1(F)$ on injektiivinen homomorfismi, indusoi homomorfismi h_i yksikäsitteisen homomorfismin $h_i' \colon (\iota_i)_\#\pi_1(F_i) \to G$, jolle kaavio

$$\begin{tikzcd} & (\iota_i)_\#\pi_1(F_i) \arrow[dd, "h_i'"] \\ S_i \arrow[ur, "(\iota_i)_\# \circ \psi_i"] \arrow[dr, "\phi|_{S_i}"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määritellään $h\colon \pi_1(F) \to G$ kaavalla $\alpha \mapsto h'_i(\alpha)$, kun $\alpha \in (\iota_i)_\#\pi_1(F_i)$. Osoitetaan, että kuvaus h on hyvin määritelty. Olkoon $\alpha \in (\iota_i)_\#\pi_1(F_i) \cap (\iota_j)_\#\pi_1(F_j)$ joillakin $i,j \in \mathbb{N}$, $i < j$. Koska $(\iota_i)_\#\pi_1(F_i)$ ja $(\iota_j)_\#\pi_1(F_j)$ ovat ryhmän $\pi_1(F)$ aliryhmiä, voidaan kirjoittaa $\alpha = \alpha_1^{\varepsilon_1}\cdots\alpha_n^{\varepsilon_n}$, missä $\alpha_i \in (\iota_i)_\# \circ \psi_i(S_i)$, ja $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$. Merkitään $\alpha_k = (\iota_i)_\# \circ \psi_i(s_k)$ jokaisella $k \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt

$$
\begin{aligned}
h'_i(\alpha) &= h'_i(\alpha_1)^{\varepsilon_1}\cdots h'_i(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \\
&= h'_i((\iota_i)_\# \circ \psi_i(s_1))^{\varepsilon_1}\cdots h'_i((\iota_i)_\# \circ \psi_i(s_n))^{\varepsilon_n} \\
&= \phi(s_1)^{\varepsilon_1}\cdots\phi(s_n)^{\varepsilon_n} \\
&= h'_j((\iota_j)_\# \circ \psi_j(s_1))^{\varepsilon_1}\cdots h'_j((\iota_j)_\# \circ \psi_j(s_n))^{\varepsilon_n} \\
&= h'_j\left((\iota_j)_\#(\psi_j(s_1))^{\varepsilon_1}\cdots(\iota_j)_\#(\psi_j(s_n))^{\varepsilon_n}\right) \\
&= h'_j\left((\iota_i)_\#(\psi_i(s_1))^{\varepsilon_1}\cdots(\iota_i)_\#(\psi_i(s_n))^{\varepsilon_n}\right) \\
&= h'_j(\alpha).
\end{aligned}
$$

Kuvaus h on siis hyvin määritelty. Kuvauksen h homomorfisuus seuraa kuvausten h'_i homomorfisuudesta. Edelleen kaavio

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(F) \arrow[dd, "h"] \\
S \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \\
 & G
\end{tikzcd}
$$

kommutoi. Kuvauksen h yksikäsitteisyys seuraa kuvausten h'_i yksikäsitteisyydestä. Näin ollen $\pi_1(F)$ on joukon S suhteen vapaa ryhmä. Lisäksi joukko S on numeroituvana yhdisteenä äärellisiä joukkoja numeroituva. $\square$

Kirjallisuus

[1] L. V. Ahlfors ja L. Sario. *Riemann surfaces.* Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960, s. xi+382.

[2] P. A. Grillet. *Abstract algebra.* Second. Vol. 242. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007, s. xii+669. ISBN: 978-0-387-71567-4.

[3] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002, s. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.

[4] W. S. Massey. *Algebraic topology: an introduction.* Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, s. xxi+261. ISBN: 0-387-90271-6.

[5] R. Nevanlinna. *Uniformisierung.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd LXIV. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953, s. x+391.

[6] J. C. Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory.* Vol. 72. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, s. xii+301. ISBN: 0-387-90516-2.

[7] M. Suzuki. *Group theory. I.* Vol. 247. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Translated from the Japanese by the author. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, s. xiv+434. ISBN: 3-540-10915-3.

[8] J. Väisälä. *Topologia II.* Limes ry, 1999, s. 182. ISBN: 951-745-185-7.

Hakemisto