Funktion approksimointi

Päivikki Vesterinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015

Tiivistelmä: Päivikki Vesterinen, *Funktion approksimointi* (engl. *Function Approximation*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 45. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2015.

Tässä tutkielmassa tutustutaan approksimointiteoriaan, joka on yksi analyysin osa-alue. Sen tavoitteena on tutkia, kuinka monimutkaista funktiota voidaan arvioida yksinkertaisemmilla ja helpommin käsiteltävillä funktioilla. Arvioiminen tarkoittaa arvioimista tasaisen suppenemisen mielessä. Tasainen suppeneminen on valittu, koska monet hyödylliset ominaisuudet, kuten jatkuvuus ja derivoituvuus, säilyvät tasaisessa suppenemisessa.

Approksimointiteoria sai alkunsa, kun ranskalainen matemaatikko Fourier tutki värähtelyn ja lämmön johtumista. Hän kehitteli Fourier-sarjat, joiden avulla pystytään esittämään jaksollinen funktio helpommin hahmotettavien trigonometristen funktioiden avulla äärettömänä summana. Aluksi luultiin, että Fourier-sarjat suppenevat tasaisesti kohti alkuperäistä funktiota. Myöhemmin paljastui, että Fourier-sarjat eivät välttämättä suppene edes pisteittäin ja tämän jälkeen ymmärrettiin, että Fourier-sarjojen suppenemisen teoria on hyvin monimutkaista. Tämän tiedon valossa unkarilainen matemaatikko Leopold Fejer keksi sovelluksen Fourier-sarjoista, Cesaron summan. Tässä tutkielmassa todistetaan, että Cesaron summa suppenee tasaisesti ja pisteittäin kohti alkuperäistä funktiota.

Yksi syy siihen, miksi Fourier-sarjat eivät suppene kaikkialla, on jatkuvien, ei-missään derivoituvien funktioiden olemassaolo. Tutkielmassa tutustutaan saksalaisen matemaatikon Karl Weierstrassin konstruktioon jatkuvista, ei-missään derivoituvista funktioista. Jatkuvat, ei-missään derivoituvat funktiot sijaitsevat hyvin "tiheästi" kaikkien jatkuvien funktioiden joukossa, vastaavasti kuin rationaaliluvut reaalilukujen joukossa. Tutkielmassa esitelty Fourier-sarjojen pisteittäisen suppenemisen todistus vaatii alkuperäiseltä funktiolta tiukan, derivoituvuutta muistuttavan oletuksen.

Lisäksi tutkielmassa todistetaan approksimointiteorian merkittävimpiin tuloksiin kuuluvat Weierstrassin lause ja Stonen yleistys tästä lauseesta. Weierstrassin lause sanoo, että jatkuvia funktioita voidaan arvioida polynomeilla. Stone yleisti tämän siten, että tietyin oletuksin algebran $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ muodostuu kaikista reaalisista jatkuvista funktioista. Tasaisella sulkeumalla $\mathcal{B}$ tarkoitetaan niiden kaikkien funktioiden joukkoa, jotka ovat joukon $\mathcal{A}$ alkioiden tasaisesti suppenevien jonojen raja-arvoja. Toisin sanoen Stonen yleistyksessä eritellään ne polynomien ominaisuudet, jotka tekevät Weierstrassin lauseen mahdolliseksi. Tutkielmassa muotoillaan myös toinen erityistapaus Stonen yleistyksestä. Sen mukaan jatkuvia 2π-periodisia funktioita voidaan arvioida trigonometrisillä polynomeilla. Kaikki tutkielmassa todistetut tulokset ovat hyödyllisiä matematiikan sovelluksissa, sillä niiden avulla monimutkaisia funktioita voidaan arvioida helpommin käsiteltävillä funktioilla.

Avainsanat: approksimointi, Cesaron summa, Dirichlet'n ydin, Fejerin ydin, Fourier-sarja, tasainen sulkeuma, tasainen suppeneminen

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua approksimointiteoriaan tiettyjen, hyvin käyttökelpoisten tulosten avulla. Approksimointiteoria on yksi analyysin osa-alue, jonka tutkimuskohteena on, kuinka monimutkaisia funktioita voidaan arvioida yksinkertaisemmilla ja helpommin käsiteltävillä funktioilla. Approksimointiteorian koulukunta on saanut alkunsa 1800-luvulla, kuten useat muutkin analyysin eri alat. Miksi 1800-luvun matemaatikot tulivat keksineeksi approksimointiteorian? Ensimmäinen syy approksimointiteorian syntyyn oli teoria Fourier-sarjoista. Nämä sarjat nimettiin kehittelijänsä Jean-Baptiste Joseph Fourier'n mukaan ja niiden tarkoituksena on esittää jaksollinen funktio trigonometristen funktioiden avulla äärettomänä summana. Siis jokin monimutkainen jaksollinen funktio esitetään yksinkertaisempien, helpommin käsiteltävien trigonometristen funktioiden avulla.

Fourier'n rinnalla toinen merkittävä henkilö approksimointiteorian tutkimuksessa oli saksalainen matemaatikko Karl Weierstrass. Weierstrassin tunnetuimmat tulokset ovat todistus jatkuvista, ei-missään derivoituvista funktioista, Lause 1.25, sekä tieto, että jatkuvia funktioita voidaan arvioida polynomeilla, Lause 2.1, ja trigonometrisillä polynomeilla, Lause 2.17. Nämä tulokset esitellään tutkielman ensimmäisessä ja toisessa luvussa. Weierstrassin approksimointiteoria sai aikaan lukuisia yleistyksiä, joista tunnetuimpia ovat tässä tutkielmassa käsitelty Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta, Lause 2.12, sekä Bohman-Korovkinin lause. Bohman-Korovkinin lausetta ei käsitellä tutkielmassa, mutta se löytyy lähdeteoksesta [**7**, Theorem 4.2, s. 12].

Tässä tutkielmassa esiteltäviä päätuloksia ovat toisessa luvussa esiintyvät Weierstrassin approksimaatiolause ja Stonen yleistys tästä lauseesta. Weierstrassin lauseen mukaan jatkuvia funktioita voidaan arvioida polynomeilla siten, että nämä polynomit suppenevat tasaisesti kohti alkuperäistä funktiota. Tämän lauseen merkitys on jo intuitiivisesti tärkeä, sillä polynomit ovat helposti hahmotettavia funktioita ja niiden käyttäytymistä on helppo tutkia. Weierstrassin lauseen todistuksen jälkeen luvussa kaksi käydään läpi tiettyjä ominaisuuksia, joiden pohjalta voidaan lopulta muotoilla ja todistaa Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta. Tämä yleistys sanoo, että tietyin oletuksin algebran $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ koostuu kaikista reaalisista jatkuvista funktioista. Lopulta huomataan, että Weierstrassin lause onkin yksi erityistapaus Stonen yleistyksestä. Useat toisen luvun tuloksista ovat suoraan yleistettävissä myös kompleksiarvoisille funktioille ja niiden todistuksia ei käydä erikseen läpi samankaltaisuuden vuoksi. Stonen yleistystä ei voida kuitenkaan siirtää suoraan kompleksiarvoisille funktioille. Jotta lause saadaan toimimaan myös kompleksialgebralle, täytyy algebran $\mathcal{A}$ olla itse-adjungoitu. Toisen luvun lopussa esitellään vielä yksi erityistapaus Stonen yleistyksestä. Tämän lauseen mukaan jatkuvia, 2π-periodisia funktioita voidaan arvioida trigonometrisillä polynomeilla vastaavaan tapaan, kuin tehtiin Weierstrassin lauseessa.

Tutkielman kolmannessa luvussa jatketaan 2π-periodisten funktioiden arviointia joillakin yksinkertaisemmilla funktioilla. Luvussa lähdetään liikenteeseen johtamalla kompleksinen versio Fourier-sarjoista, jonka jälkeen tutustutaan Fourier-sarjojen suppenemisen teoriaan. Huomataan, että Fourier-sarjojen suppenemisen tutkiminen on erittäin haasteellista. Tutkielmassa todistetaan tulos, jonka mukaan tietyin täsmällisin oletuksin Fourier-sarja suppenee pisteittäin kohti alkuperäistä funktiota. Koska Fourier-sarjojen suppenemisen tutkiminen osoittautuu haasteelliseksi, määritellään Fourier-sarjojen avulla Fejerin ydin ja edelleen Fourier-sarjojen Cesaron summa. Tämän ytimen avulla voidaan todistaa Fejerin lause, joka osoittaa kätevästi Cesaron summan tasaisen ja pisteittäisen suppenemisen kohti alkuperäistä funktiota. Kuitenkin liikaa riemastumatta täytyy todeta, että Fejerin lauseen tulosta ei voida yleistää Fourier-sarjoille.

Jotta lukujen kaksi ja kolme tulokset ovat esitettävissä ja todistettavissa, täytyy tutkielma aloittaa yleishyödyllisillä määritelmillä ja aputuloksilla. Ensimmäisen luvun määritelmät ja tulokset ovatkin pääpiirteissään tuttuja analyysin perustuloksia, mutta niiden esitteleminen auttaa lukijaa hahmottamaan tutkielman lopussa olevien tulosten todistukset. Selkeä aloitus tutkielmalle on pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen määritelmät sekä muutama tärkeä testi, joiden avulla funktiojonon ja funktiosarjan tasaista suppenemista voi tutkia. Tämän jälkeen tutustutaan tasaisen suppenemisen luomiin mahdollisuuksiin funktiojonon ominaisuuksien siirtymisestä rajafunktioon. Tutkielman tulosten valossa tärkeinä ominaisuuksina nousevat jatkuvuuden ja derivoituvuuden säilyminen tasaisessa suppenemisessa. Lisäksi ensimmäisessä luvussa tutustutaan Weierstrassin funktioiden avulla jatkuviin, ei-missään derivoituviin funktioihin. Tämän todistuksen historiallinen painoarvo on suuri ja siksi onkin mielekästä tutustua yksityiskohtaisesti todistukseen. Ensimmäisen luvun lopussa näytetään, että tietyin oletuksin yhtäjatkuvalla funktiojonolla on olemassa tasaisesti suppeneva osajono.

Tutkielman lukijalta edellytetään analyysin perustulosten hallintaa. Näin tutkielmaan tutustuminen on mielekästä ja antoisaa. Tiettyjä abstrakteja tuloksia on konkretisoitu esimerkein, jotta niiden sisältö avautuisi lukijalle entistä paremmin. Tutkielman päälähteenä on käytetty Walter Rudinin teosta *Principles of Mathematical Analysis* [**9**]. Tarkempi kuvaus tutkielmassa käytetyistä lähteistä on kirjoitettu kunkin luvun alkuun.

LUKU 1

Tasainen suppeneminen

Ensimmäisen luvussa esitellään tutkielman päätulosten kannalta oleellisia määritelmiä ja aputuloksia. Ne tuntuvat aluksi hieman toisistaan riippumattomilta ja irrallisilta, mutta tutkielman edetessä lukuihin kaksi ja kolme huomataan, kuinka hyödyllisiä ja käyttökelpoisia ensimmäisen luvun aputulokset ovat. Aluksi määrittelyissä tutkitaan yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita. Tutkielman edetessä saatetaan joutua tilanteeseen, jossa määrittelyalue on mielekästä laajentaa kompleksilukujen joukkoon.

Ensimmäisen luvun päälähteenä on käytetty teosta [**9**, s. 143-158] ja lisäksi apuna on käytetty lähteitä [**3**] ja [**8**].

1.1. Suppenemisen määritelmä

Tässä kappaleessa määritellään pisteittäinen ja tasainen suppeneminen funktiojonoille ja -sarjoille sekä todistetaan muutama hyödyllinen tulos, kuten Cauchyn kriteerio, Lause 1.5.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Kun jokaiselle luvulle $n \in \mathbb{Z}_+$ on annettuna funktio $f_n : E \to \mathbb{R}$, niin tällöin jono $(f_n)_{n=1}^{\infty} = (f_1, f_2, \dots)$ on *funktiojono*.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee pisteittäin* joukossa E, jos jokaiselle $x \in E$ lukujono $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ suppenee. Raja-arvo

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

missä $x \in E$, määrittelee funktion $f : E \to \mathbb{R}$.

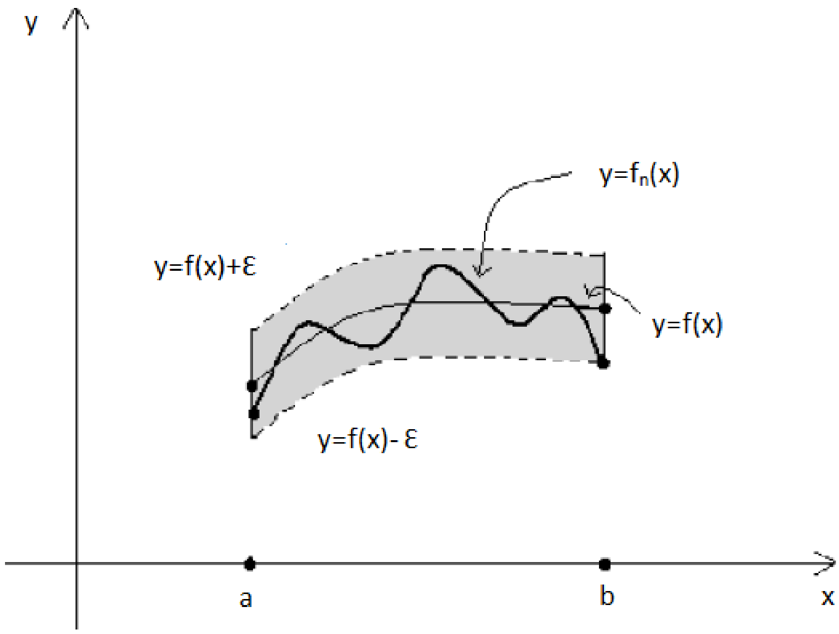
Pisteittäinen suppeneminen ei ole erityisen vahva tai käyttökelpoinen määritelmä. Siispä otetaan käyttöön pisteittäistä suppenemista vahvempi ehto, tasainen suppeneminen, joka mahdollistaa käyttökelpoisia tuloksia.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee tasaisesti* joukossa E kohti funktiota f, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku N siten, että kaikilla $n \geq N$

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \epsilon \tag{1.1}$$

kaikille $x \in E$.

Tasaisessa suppenemisessa luku N ei saa riippua muuttujasta x. Geometrisesti tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla $n \geq N$ kuvaajat $y = f_n(x)$ ovat kuvaajien $y = f(x) \pm \epsilon$ välissä, kaikilla $x \in E$. Havainnollistetaan tilannetta vielä kuvan avulla, Kuva 1.1.



Kuva 1.1. Tasainen suppeneminen välillä [a,b].

On selkeää, että kaikille tasaisesti suppeneville funktiojonoille pätee myös pisteittäinen suppeneminen. Kuitenkaan pisteittäin suppenevat funktiojonot eivät välttämättä suppene tasaisesti. Tämä näkyy seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 1.4. Olkoon funktiojono $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, siten, että

$$f_n(x) = x^n.$$

Nyt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

kaikilla $x \in (0,1)$. Siis funktiojono f_n suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(x) = 0$. Jotta funktiojono suppenisi tasaisesti, sen täytyisi supeta kohti samaa funktiota kuin pisteittäisessä suppenemisessa. Näin ei kuitenkaan ole, sillä

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = 1^n = 1$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siis funktiojono f_n ei suppene tasaisesti.

Muotoillaan seuraavaksi tasainen Cauchyn kriteerio, joka kertoo, että tasaisesti suppenevan funktiojonon termit saadaan mielivaltaisen lähelle toisiaan, kunhan ollaan tarpeeksi ”kaukana” jonossa. Tällöin siis funktiojono suppenee tasaisesti kohti jotain funktiota, josta ei tarvitse kuitenkaan olla mitään tarkempaa tietoa.

Lause 1.5. *Olkoot $f_n : E \to \mathbb{R}$ funktioita. Tällöin funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa E, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa kokonaisluku $N \in \mathbb{N}$ siten, että*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \qquad \text{kaikilla } n, m \geq N \text{ ja kaikilla } x \in E.$$

Todistus. Oletetaan, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa E ja olkoon f rajafunktio. Tällöin on olemassa kokonaisluku N siten, että kaikilla $n \geq N$ ja $x \in E$ pätee $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Tällöin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon,$$

jos $n, m \geq N$ ja $x \in E$.

Toiseen suuntaan todistettaessa oletetaan, että funktiojono toteuttaa tasaisen Cauchyn ehdon. Tällöin jokaisella luvulla x lukujono $f_n(x)$ on Cauchy-jono ja siten suppenee kohti reaalilukua $f(x)$. Näin saadaan rajafunktioehdokas $f : E \to \mathbb{R}$. Se on jonon f_n tasainen raja: Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan tasaisen Cauchyn ehdon antama luku N, jolle

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{kaikilla } n, m \geq N \text{ ja kaikilla } x \in E.$$

Kun $x \in E$, voidaan valita luku $m_x \in \mathbb{N}$, jolle $m_x > N$ ja

$$|f(x) - f_{m_x}(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tällöin

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Erityisesti

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{kaikilla } x \in E,$$

kunhan $n \geq N$. Siis jono f_n suppenee tasaisesti joukossa E kohti funktiota f. □

Tasaisesti suppenevan jonon funktiot tulevat kauttaaltaan lähelle rajafunktiota. Tällöin jonon funktioiden ominaisuudet heijastuvat myös rajafunktioon paremmin kuin pisteittäisessä suppenemisessa. Esimerkiksi jatkuvuus säilyy tasaisessa suppenemisessa. Tästä myöhemmin lisää.

Todistetaan seuraavaksi Weierstrassin M-testi, jonka avulla voidaan tutkia, suppeneeko jokin funktiojono todella tasaisesti kohti funktiota f.

Lause 1.6. *Olkoon $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ja asetetaan $M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Tällöin funktiojono f_n lähestyy funktiota f tasaisesti joukossa E, jos ja vain jos luku M_n lähestyy nollaa, kun n lähestyy ääretöntä.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktiojono f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa E, on määritelmän nojalla olemassa N siten, että $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ kaikilla $x \in E$, kun $n \geq N$.

Tutkitaan arvon M_n käyttäytymistä nollassa, eli

$$|M_n - 0| = |\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|| < \epsilon$$

kun $n \geq N$. Siis $M_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Toiseen suuntaan todistettaessa oletetaan, että $M_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $|M_n - 0| = |\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|| < \epsilon$, eli itseisarvon $|f_n(x) - f(x)|$ täytyy olla pienempää kuin ϵ kaikilla $x \in E$ ja kaikilla $n \geq N$, jotta oletus on voimassa. Siis $f_n \to f$ tasaisesti joukossa E. □

Esimerkki 1.7. Olkoon funktiojono $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

Tällöin $f_n(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja lisäksi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n}+x} \\
&= \frac{x^2}{x} = x = f(x),
\end{aligned}$$

kun $x \neq 0$. Kun tutkitaan erotuksen itseisarvoa, saadaan

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx^2}{1+nx} - x| = |\frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx}| = \frac{x}{1+nx},$$

kaikilla $x \in [0,1]$. Olkoon nyt

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| =: M_n$$

ja lisäksi $M_n \leq \frac{1}{n}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} M_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Siis Lauseen 1.6 nojalla funktiojono f_n lähestyy tasaisesti funktiota f.

Kuten alussa todettiin, tässä kappaleessa määritellään funktiojonojen lisäksi myös funktiosarjat ja esitellään niiden suppenemisen tarkasteluun käyttökelpoinen tulos. Määritellään ensiksi funktiosarja ja sen pisteittäinen ja tasainen suppeneminen joukossa E.

Määritelmä 1.8. Olkoon $f_n : E \to \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Muodollista summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$$

sanotaan *funktiosarjaksi.*

Määritelmä 1.9. Funktiosarja suppenee *pisteittäin joukossa* E, jos sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenevat jokaisella $x \in E$. Toisin sanoen, kun osasumma $S_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$, niin jokaiselle $x \in E$ lukujonolla $(S_k(x))_{k=1}^{\infty}$ on äärellinen raja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee *tasaisesti joukossa* E, jos osasummien S_k, missä S_k on muotoa

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x),$$

jono suppenee tasaisesti joukossa E. Toisin sanoen on olemassa funktio $f : E \to \mathbb{R}$, jolle kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|S_k(x) - f(x)| < \epsilon$$

kaikilla $x \in E$, kunhan $k \geq N$.

Tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio, Lause 1.5, voidaan laajentaa myös funktiosarjoille. Tehdään tämä seuraavassa lauseessa.

LAUSE 1.11. *Funktiosarja* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee tasaisesti joukossa* E *kohti jotain funktiota* $f : E \to \mathbb{R}$, *jos ja vain jos jokaisella* $\epsilon > 0$ *on olemassa kokonaisluku* $N \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{n=m+1}^{k} f_n(x) \right| = \sup_{x \in E} |S_k(x) - S_m(x)| < \epsilon,$$

kun $k > m \geq N$ *kaikilla* $x \in E$.

TODISTUS. Vastaavaan tapaan kuin Lauseen 1.5 todistus. Todistuksen voi lukea lähteestä [**3**, Lause 5.4]. □

ESIMERKKI 1.12. Osoitetaan, että funktiosarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ suppenee tasaisesti jokaisella suljetulla välillä $[0, r]$, missä $0 < r < 1$.

Valitaan $n \geq m$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,r]} \left| \sum_{j=m}^{n} x^j \right| &= \sup_{x \in [0,r]} |x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \cdots + x^n| \\
&= \sup_{x \in [0,r]} |x^m(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-m})| \\
&\leq \sup_{x \in [0,r]} \left| x^m \frac{1}{1-x} \right| \qquad \text{geometrisen sarjan perusteella} \\
&\leq \frac{r^m}{1-r}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $0 < r < 1$, niin $\frac{r^m}{1-r} \to 0$, kun $m \to \infty$. Siksi voidaan valita kokonaisluku N siten, että

$$\frac{r^N}{1-r} < \epsilon.$$

Tällöin edellisestä yhtälöketjusta seuraa kaikilla $n \geq m \geq N$ ja kaikilla $x \in [0, r]$, että

$$|x^m + x^{m+1} + \ldots x^n| \leq \frac{r^m}{1-r} < \epsilon.$$

Siispä Cauchyn kriteerion nojalla sarja suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[0, r]$, missä $0 < r < 1$.

Funktiosarjoille voidaan muotoilla M-testi vastaavaan tapaan kuin funktiojonoille. Tämän testin avulla voidaan tutkia funktiosarjojen suppenemista kätevästi. Seuraavan lauseen mukaan funktiosarja suppenee tasaisesti, jos funktioiden itseisarvojen supremumin muodostama lukusarja suppenee.

LAUSE 1.13. *Olkoon funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ määritelty joukossa E ja olkoon*

$$|f_n(x)| \leq M_n,$$

kun $x \in E$ ja $n = 1, 2 \ldots$. Tällöin funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti joukossa E, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee.

TODISTUS. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin kaikilla $\epsilon > 0$ pätee kolmioepäyhtälön ja oletuksen nojalla

$$\Big|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\Big| \leq \sum_{i=n}^{m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n}^{m} M_i \leq \epsilon,$$

kaikilla $x \in E$ kunhan m ja n ovat tarpeeksi suuria. Tällöin Cauchyn kriteerion nojalla funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti joukossa E. □

1.2. Tasainen suppeneminen ja jatkuvuus

Funktiojonoja tutkittaessa mielenkiintoinen kysymys on, siirtyvätkö tietyt ominaisuudet funktiojonosta (f_n) suoraan rajafunktioon f. Tällaisia ominaisuuksia ovat esimerkiksi jatkuvuus, derivoituvuus ja integroituvuus. Integroituvuuden tutkiminen ei ole tämän tutkielman tulosten kannalta oleellista. Siispä tutkitaan ainoastaan jatkuvuutta ja seuraavassa kappaleessa derivoituvuutta.

Aloitetaan määrittelemällä metriikka eli etäisyysfunktio, joka ilmaisee joukon pisteiden välisen etäisyyden. Tämän avulla voidaan määritellä jatkon kannalta olennainen avaruus, metrinen avaruus sekä supremum-normi.

MÄÄRITELMÄ 1.14. Olkoon X epätyhjä joukko. Funktio $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *metriikka*, jos kaikille $p, q \in X$ pätee seuraavat ominaisuudet

(1) $d(p, q) > 0$, jos $p \neq q$ ja $d(p, q) = 0$, jos $p = q$
(2) $d(p, q) = d(q, p)$
(3) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$, kaikille $r \in X$.

Tällöin sanotaan, että pari (X, d) on *metrinen avaruus*.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon joukko X metrinen avaruus. Merkinnällä $\Upsilon(X)$ tarkoitetaan kaikkia reaaliarvoisia, jatkuvia ja rajoitettuja funktioita joukossa X. Siis

$$\Upsilon(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva ja rajoitettu}\}$$

Määritellään lisäksi funktion $f \in \Upsilon(X)$ *supremum-normi*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

HUOMAUTUS 1.16. Funktion rajoittuneisuus on tarpeeton oletus, jos joukko X on kompakti.

ESIMERKKI 1.17. Osoitetaan, että pari $(\Upsilon(X), d(f,g))$, missä $d(f,g) = \|f - g\|$, on metrinen avaruus. Näin on, sillä funktioille $f, g, h \in \Upsilon(X)$ pätee Määritelmän 1.14 kolme ehtoa:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &d(f,g) = \|f-g\| = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| > 0, \text{ jos } f \neq g \text{ ja} \\ &d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g \end{aligned}$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} d(f,g) &= \|f-g\| = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| \\ &= \|g - f\| = d(g,f) \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} d(f,g) &= \|f-g\| = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| \\ &\quad + \sup_{x\in X} |h(x) - g(x)| = \|f - h\| + \|h - g\| \\ &= d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

Tällöin voidaan sanoa, että pari $(\Upsilon(X), d(f,g))$, missä $d(f,g) = \|f-g\|$, on metrinen avaruus.

Nyt Lause 1.6 voidaan muotoilla uudestaan hyödyntäen metrisen avaruuden määritelmää: Funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti funktiota f joukon $\Upsilon(X)$ metriikassa, jos ja vain jos f_n lähestyy funktiota f tasaisesti joukossa X.

Joskus joukon $\Upsilon(X)$ suljettuja osajoukkoja kutsutaan *tasaisesti suljetuiksi* ja vastaavasti joukon $B \subset \Upsilon(X)$ sulkeumaa kutsutaan *tasaiseksi sulkeumaksi.*

Muotoillaan seuraavaksi lause, joka sallii rajankäynnin järjestyksen vaihtamisen tasaisessa suppenemisessa.

LAUSE 1.18. *Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti joukossa E, joka on metrinen avaruus. Olkoon piste x joukon E kasautumispiste ja olkoon $\lim_{t\to x} f_n(t) = B_n$. Tällöin jono $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee ja*

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Toisin sanoen

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t).$$

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti, on olemassa luku N siten, että kaikille $n, m \geq N$ sekä $t \in E$ pätee

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \epsilon. \tag{1.2}$$

Oletetaan, että piste t lähestyy pistettä x. Tällöin saadaan yhtälö (1.2) oletuksen nojalla muotoon

$$|B_n - B_m| \leq \epsilon,$$

kun $n, m \geq N$ ja tällöin jono $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy jono ja siten suppeneva jono. Merkitään $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$.

Koska tarkoituksena on todistaa, että $\lim\limits_{t\to x} f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, niin arvioidaan itseisarvoa $|f(t) - B|$. Tällöin

$$|f(t) - B| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - B_n| + |B_n - B|.$$

Kiinnitetään luku n, jolla pätee, että

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

kaikilla $t \in E$ ja siten, että

$$|B_n - B| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Koska luku n on kiinnitetty, voidaan valita luvun x ympäristö V, missä $V = B(x, \delta)$ niin, että

$$|f_n(t) - B_n| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

jos $t \in V \cap E$ ja $t \neq x$. Siis, kun luvut t ja x ovat riittävän lähellä toisiaan, kiinnitetyllä luvulla n saadaan itseisarvo $|f_n(t) - B_n|$ tarpeeksi pieneksi.

Yhdistämällä nämä epäyhtälöt nähdään, että $|f(t) - B| \leq \epsilon$, kunhan $t \in V \cap E$ ja $t \neq x$. Siis väite on todistettu. □

Lopulta voidaan muotoilla täsmällisesti lause, joka siirtää funktiojonon (f_n) jatkuvuusominaisuuden rajafunktioon f.

Lause 1.19. *Jos funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ koostuu jatkuvista funktioista joukossa E ja jos $f_n \to f$ tasaisesti joukossa E, niin tällöin funktio f on jatkuva joukossa E.*

Todistus. Tulos seuraa suoraan Lauseesta 1.18. □

Lauseen 1.19 tulkitseminen päinvastaiseen suuntaan ei ole mahdollista. Toisin sanoen, jatkuvien funktioiden jono saattaa supeta kohti jatkuvaa funktiota, vaikka suppeneminen ei olisi tasaista. Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan tilannetta.

Esimerkki 1.20. Olkoon funktiojono $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, missä $x \in (0, 1)$ ja luku n on kokonaisluku. Lisäksi funktio f_n on jatkuva määrittelyjoukossaan. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0,$$

eli funktiojono (f_n) suppenee pisteittäin kohti jatkuvaa funktiota $f(x) = 0$. Suppeneminen ei kuitenkaan ole tasaista, sillä

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1.$$

Täytyy siis hieman muuttaa ja täsmentää Lauseen 1.19 oletuksia, jotta saadaan lopulta täsmällisesti todistettua lause, joka vahvistaa myös päinvastaisen päättelyn. Todistetaan ensin hyödyllinen aputulos.

LEMMA 1.21. *Jos* (K_t) *on kompaktien osajoukkojen kokoelma metrisessä avaruudessa* X *siten, että kokoelman* (K_t) *jokaisen äärellisen osakokoelman leikkaus on epätyhjä, niin tällöin* $\cap K_t$ *on epätyhjä.*

TODISTUS. Kiinnitetään kokoelman (K_t) joukko K_1 ja olkoon $G_t = K_t^c$. Lisäksi oletetaan, että yksikään joukon K_1 piste ei kuulu jokaiseen K_t. Tällöin kokoelma G_t muodostaa joukon K_1 avoimen peitteen. Toisin sanoen jokainen joukon K_1 piste kuuluu johonkin kokoelman G_t jäseneen.

Koska joukko K_1 on kompakti, eli sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite, niin tällöin on olemassa äärellinen määrä indeksejä $t_1, \dots t_n$ siten, että $K_1 \subset G_{t_1} \cup \cdots \cup G_{t_n}$. Näin on, sillä jokainen joukon K_1 piste kuuluu johonkin kokoelman G_t jäseneen. Tämän seurauksena kuitenkin leikkaus

$$K_1 \cap K_{t_1} \cap \cdots \cap K_{t_n}$$

on tyhjä, jolloin saadaan ristiriita oletuksen kanssa ja väite on todistettu. □

LAUSE 1.22. *Olkoon* K *kompakti joukko ja seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa.*

(1) *Funktiojono* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *koostuu jatkuvista funktioista joukossa* K.
(2) *Funktiojono* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee pisteittäin kohti jatkuvaa funktiota joukossa* K.
(3) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ *kaikille* $x \in K$ *ja* $n = 1, 2, 3 \dots$.

Tällöin f_n *lähestyy funktiota* f *tasaisesti joukossa* K.

TODISTUS. Olkoon funktio g_n muotoa $g_n = f_n - f$. Tällöin g_n on jatkuva, g_n lähestyy nollaa pisteittäin ja $g_n \geq g_{n+1}$. Täytyy siis osoittaa, että funktio g_n lähestyy nollaa tasaisesti joukossa K.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon K_n niiden pisteiden x joukko, joille pätee $g_n(x) \geq \epsilon$. Siis K_n on muotoa

$$K_n = \{x : g_n(x) \geq \epsilon\} = g_n^{-1}([\epsilon, \infty[).$$

Nyt, koska g_n on jatkuva, niin K_n on suljetun joukon $[\epsilon, \infty[$ alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa suljettu ja tällöin K_n on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti.

Koska $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$, on $K_n \supset K_{n+1}$. Valitaan piste $x \in K$. Koska $g_n(x) \to 0$, huomataan, että $x \notin K_n$, jos n on tarpeeksi suuri. Tällöin $x \notin \cap K_n$ eli toisin sanoen joukkojen K_n leikkaus on tyhjä. Tällöin Lemman 1.21 nojalla K_N on tyhjä jollakin N. Lopulta saadaan muodostettua päättelyketju $0 \leq g_n(x) \leq \epsilon$ kaikille $x \in K$ ja kaikille $n \geq N$. Nyt väite on todistettu. □

1.3. Tasainen suppeneminen ja derivoituvuus

Lähdetään tutkimaan tasaisen suppenemisen ja derivoituvuuden yhteyttä esimerkin avulla, joka paljastaa tarpeen uusien tulosten muotoilulle.

ESIMERKKI 1.23. Olkoon funktiojono f_n muotoa

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}},$$

missä muuttuja x on reaalinen ja n luonnollinen luku. Huomataan, että

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0.$$

Derivoidaan sekä rajafunktio että funktiojono ja saadaan, että $f'(x) = 0$ ja

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tutkitaan derivaattajonon f_n' raja-arvoa ja huomataan, että esimerkiksi, kun $x = 0$

$$f_n'(0) = \sqrt{n},$$

joka lähestyy ääretöntä, kun n lähestyy ääretöntä. Siispä $f_n'(x)$ ei suppene kohti funktiota $f'(x) = 0$.

Huomataan, että vaikka $f_n \to f$ tasaisesti ja lisäksi funktiojono f_n ja funktio f ovat derivoituvia, niin tästä ei seuraa suoraan, että derivaattajono f_n' suppenisi kohti derivaattafunktiota f'. Siispä on hyödyllistä muotoilla lause, jonka mukaan funktiojonon f_n derivaattajono suppenee kohti funktion f derivaattaa, jos jono f_n lähestyy funktiota f.

Lause 1.24. *Olkoon funktiojonon (f_n) funktiot derivoituvia välillä $[a, b]$. Oletetaan lisäksi, että jollakin luvulla x_0, joka kuuluu välille $[a, b]$, jono $(f_n(x_0))$ suppenee. Jos derivaattajono (f_n') suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$, niin funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti funktiota f ja*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \qquad a \le x \le b.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan luku N siten, että luvuille $n, m \ge N$ pätee epäyhtälöt

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

ja

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{kaikilla } a \le t \le b. \tag{1.3}$$

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla tiedetään, että jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b), niin tällöin on olemassa luku $x \in (a, b)$ siten, että

$$|f(b) - f(a)| \le (b-a)|f'(x)|.$$

Kun tätä tietoa sovelletaan funktioon $f_n - f_m = g_n$, saadaan arvio

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_n(t)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t))| \\ &= |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \\ &\le |x-t|\frac{\epsilon}{2(b-a)} \le \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

kaikille luvuille $x, t \in [a, b]$, jos luvut $n, m \ge N$. Nyt hyödyntämällä edellistä arviota saadaan itseisarvoepäyhtälö muotoon

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\le |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

kun $a \le x \le b$ ja $n, m \ge N$. Siis funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ Cauchyn kriteerion nojalla.

Todistetaan seuraavaksi väitteen toinen kohta, eli $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$. Valitaan piste x väliltä $[a, b]$ ja määritellään funktiojono ϕ_n ja funktio ϕ seuraavasti:

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \qquad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{1.5}$$

kaikilla $a \leq t \leq b$, $t \neq x$. Tällöin derivaatan määritelmän nojalla

$$\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n'(x).$$

Samoin kuin ensimmäisen kohdan todistuksessa, saadaan itseisarvoepäyhtälö yhtälön (1.4) nojalla muotoon

$$\begin{aligned}
|\phi_n(t) - \phi_m(t)| &= \left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} \right| \\
&= \frac{|f_n(t) - f_n(x) - f_m(t) + f_m(x)|}{|t - x|} \\
&\leq \frac{|x - t| \frac{\epsilon}{2(b-a)}}{|t - x|} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(b - a)},
\end{aligned}$$

jolloin funktiojono (ϕ_n) suppenee tasaisesti, kun $t \neq x$. Koska funktiojono (f_n) suppenee kohti funktiota f, voidaan funktion ϕ_n raja-arvo määritellä tarkasti. Siis

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \phi(t),$$

eli funktio $(\phi_n(t))$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $\phi(t)$, kun $a \leq t \leq b$ ja $t \neq x$.

Lopuksi hyödynnetään Lauseen 1.18 tulosta, jonka nojalla rajankäynnin järjestystä voidaan vaihtaa sekä kahta edellistä raja-arvomäärittelyä. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{t\to x} \phi(t) &= \lim_{t\to x} (\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} \phi_n(t) \qquad \text{Lause 1.18} \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n'(x).
\end{aligned}$$

Tällöin lauseen jälkimmäinenkin osa on saatu todistettua. □

Tarkastellaan seuraavaksi funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta eivät missään pisteessä derivoituvia. Tätä ilmiötä tutkivat useat analyysiin perehtyneet matemaatikot 1700- ja 1800-luvuilla. Saksalainen matemaatikko Karl Weierstrass (1815-1897) julkaisi ensimmäisenä jatkuvan, ei-missään derivoituvan funktion konstruktion vuonna 1872. Tämä oli merkittävä löydös matematiikan historiassa, sillä aikaisemmin useat matemaatikot olettivat, että kaikki jatkuvat funktiot ovat myös jossakin pisteessään derivoituvia. Ranskalainen matemaatikko Hermite kuvasi kirjeessään vuonna 1893 tunnettaan, kun hän kohtasi jatkuvat, ei-missään derivoituvat funktiot: ”I turn away with fear and horror from the lamentable plague of continuous functions which do not have derivatives..”. Myöhemmin myös muut matemaatikot tutkivat ja kehittelivät jatkuvia funktioita, jotka eivät ole missään derivoituvia ja nykyään tunnetaan useita eri rakenteita näille funktioille. [**8**, s. 1-9.]

Seuraavaksi esitellään ja todistetaan Weierstrassin kehittämä jatkuva, ei-missään derivoituva funktio. Todistuksessa tarvitaan edellä esiteltyjä tietoja funktiosarjojen tasaisesta suppenemisesta ja jatkuvuuden säilymisestä.

Lause 1.25. *Olkoon funktio f muotoa*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi), \tag{1.6}$$

missä $b \in (0,1)$, a on pariton kokonaisluku ja näiden lukujen tulolle pätee $ab > 1 + (3\pi/2)$. Tämä funktio on jatkuva, mutta ei-missään derivoituva.

Todistus. Aloitetaan tutkimalla funktion f jatkuvuutta. Geometrisen sarjan ominaisuuksista tiedetään, että $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} < \infty$, kun $b \in (0,1)$. Lisäksi huomataan, että

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |b^n \cos(a^n x\pi)| \leq b^n.$$

Kun näiden tietojen pohjalta hyödynnetään Weierstrassin M-testiä, Lausetta 1.13, huomataan, että $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$ suppenee tasaisesti. Nyt funktion f jatkuvuus seuraa Lauseesta 1.19, kun lisäksi tiedetään, että jatkuvien funktioiden summa on jatkuva.

Jotta voidaan todistaa, että funktio f ei ole missään derivoituva, tarvitaan hieman lisätietoja. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Olkoon α_m, kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m, lähin lukua $a^m x$ oleva kokonaisluku. Olkoon $x_m = a^m x - \alpha_m$, jolloin $|x_m| \leq \frac{1}{2}$. Määritellään kaksi jonoa (y_m) ja (z_m) siten, että

$$y_m = \frac{\alpha_m - 1}{a^m} \qquad z_m = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} x - y_m &= x - \frac{\alpha_m - 1}{a^m} = \frac{a^m x - \alpha_m + 1}{a^m} \\ &= \frac{x_m + \alpha_m - \alpha_m + 1}{a^m} = \frac{1 + x_m}{a^m} > 0 \end{aligned}$$

ja vastaavasti $z_m - x = \dfrac{1 - x_m}{a^m} > 0$. Näiden tietojen valossa huomataan, että $y_m < x < z_m$ ja lisäksi

$$\lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_m - 1}{a^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{a^m x - x_m - 1}{a^m} = x$$

sekä $\lim_{m\to\infty} z_m = x$.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta derivaatan määritelmän avulla:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y_m)}{x-y_m} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos(a^n x\pi)-\cos(a^n y_m \pi)}{x-y_m} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{\cos(a^n x\pi)-\cos(a^n y_m \pi)}{x-y_m} \qquad (1.7)\\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} b^{n+m} \frac{\cos(a^{n+m} x\pi)-\cos(a^{n+m} y_m \pi)}{x-y_m}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Kun $n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, voidaan väliarvolauseen avulla osamäärä yhtälöstä (1.7) arvioida muotoon

$$\frac{\cos(a^n x\pi)-\cos(a^n y_m \pi)}{x-y_m} = -a^n \pi \sin c_n,$$

jollekin luvulle $c_n \in (a^n y_m \pi, a^n x\pi)$. Lisäksi huomataan, että

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{\cos(a^n x\pi)-\cos(a^n y_m \pi)}{x-y_m} \Big| &\leq \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \pi |\sin c_n| \\
&\leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab-1} \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}.
\end{aligned}$$

Tutkitaan seuraavaksi summan (1.8) käyttäytymistä. Muistetaan, että a on pariton kokonaisluku ja α_m kokonaisluku ja lisäksi, että $\cos(n\pi) = 1$, kun n on parillinen ja $\cos(n\pi) = -1$, kun n on pariton. Näiden tietojen valossa voidaan kirjoittaa seuraavaa:

$$\cos(a^{n+m} y_m \pi) = \cos(a^n a^m \frac{\alpha_m - 1}{a^m} \pi) = \cos(a^n \pi(\alpha_m - 1)) = (-1)^{\alpha_m - 1}.$$

Lisäksi muistetaan, että $x - y_m = \frac{1+x_m}{a^m}$, ja huomataan, että $(-1)^{\alpha_m}(-1)^{\alpha_m} = (-1)^{2\alpha_m} = 1$. Nyt summaa voidaan muokata edelleen ja saadaan

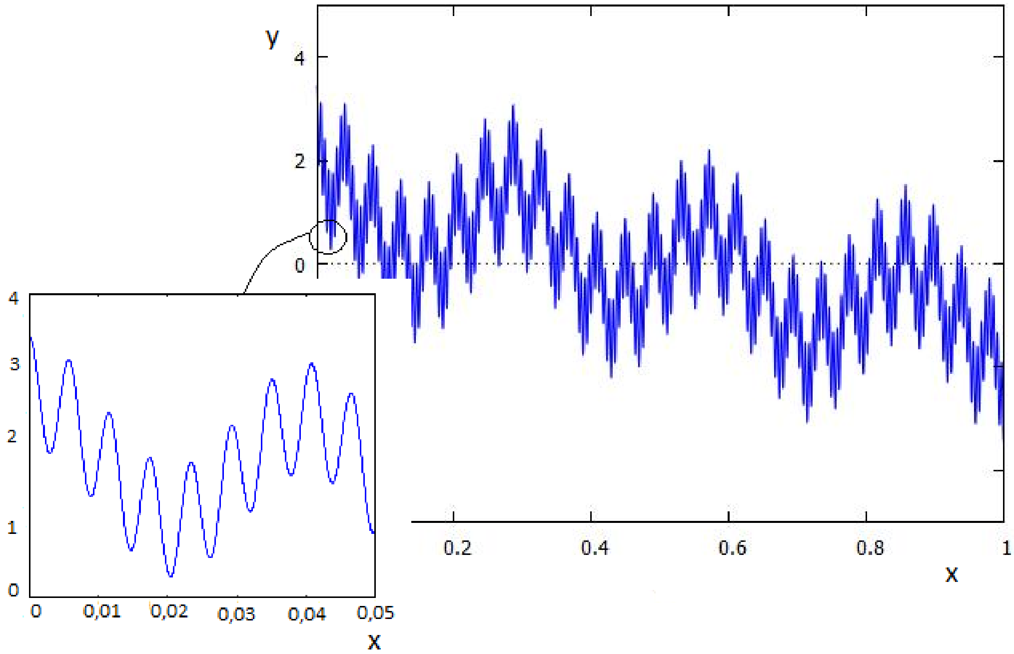
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} b^{n+m} \frac{\cos(a^{n+m} x\pi)-\cos(a^{n+m} y_m \pi)}{x-y_m} \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} b^n b^m \frac{a^m}{1+x_m} (\cos(a^{n+m} x\pi) - (-1)^{\alpha_m - 1}) \\
&\quad = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{(-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n+m} x\pi) + 1}{x_m + 1}.
\end{aligned}$$

Tutkitaan tilannetta, kun $n = 0$. Koska $|x_m \pi| \leq \frac{\pi}{2}$, niin $\cos(x_m \pi) \geq 0$. Näitä tietoja ja kosinin jaksollisuutta hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned}
(-1)^{\alpha_m} \cos(a^m x\pi) + 1 &= (-1)^{\alpha_m} \cos((x_m + \alpha_m)\pi) + 1 \\
&= \cos(x_m \pi) + 1 \geq 1.
\end{aligned}$$

Lisäksi luvun x_m määrittelystä seuraa, että $|x_m| \leq \frac{1}{2}$, jolloin
$$\frac{1}{2} \leq x_m + 1 \leq \frac{3}{2}.$$
Yhdistämällä nämä tiedot, voidaan summaa arvioida kätevästi
$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{(-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n+m} x\pi) + 1}{x_m + 1} \geq \frac{\cos(x_m \pi) + 1}{x_m + 1} \geq \frac{2}{3}.$$
Tällöin koko summalle saadaan arvioksi
$$(-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} b^{n+m} \frac{\cos(a^{n+m} x\pi) - \cos(a^{n+m} y_m \pi)}{x - y_m} \geq (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{2}{3}.$$
Nyt alkuperäinen osamäärä saadaan muotoon
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y_m)}{x - y_m} &= \epsilon_m \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} + \eta_m (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{2}{3} \\ &= \eta_m (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \Big[\frac{\epsilon_m (-1)^{\alpha_m}}{\eta_m} \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \Big] \end{aligned}$$
jollekin ϵ_m, η_m, joille $|\epsilon_m| \leq 1$, $\eta_m > 1$ ja $|\frac{\epsilon_m}{\eta_m}| < 1$. Oletuksen $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ nojalla saadaan
$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1}. \tag{1.9}$$
Tutkitaan yllä olevan osamäärän sulkulauseketta
$$\Big[\frac{\epsilon_m (-1)^{\alpha_m}}{\eta_m} \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \Big].$$
Huomataan, että jos sen molemmat termit ovat positiivisia, myös sulkulauseke on positiivinen. Tutkitaan tilannetta, jossa ensimmäinen termi on negatiivinen. Nyt huomataan, että pienimmillään
$$\frac{\epsilon_m (-1)^{\alpha_m}}{\eta_m} \frac{\pi}{ab - 1} > -\frac{\pi}{ab - 1},$$
jolloin yhtälön (1.9) nojalla
$$\Big[\frac{\epsilon_m (-1)^{\alpha_m}}{\eta_m} \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \Big] > 0.$$
Nyt raja-arvoksi saadaan
$$\begin{aligned} &\lim_{m \to \infty} (-1)^{\alpha_m} \frac{f(x) - f(y_m)}{x - y_m} \\ &\quad = \lim_{m \to \infty} (-1)^{\alpha_m} \eta_m (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \Big[\frac{\epsilon_m (-1)^{\alpha_m}}{\eta_m} \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \Big] = \infty, \end{aligned}$$
eli on todistettu, että funktiolla f ei ole derivaattaa missään pisteessä x. □

Kuvasta 1.2 huomataan, että kyseinen jatkuva, Weierstrassin funktion osasumma $f(x)$ on voimakkaasti "sahaava" jo hyvin pienellä summauksella. Kun summausta kasvatetaan, sahaus lisääntyy entisestään ja lopulta funktion jokainen piste on sen kärkipiste. Tällöin on saatu muodostettua jatkuva, ei-missään derivoituva funktio.



KUVA 1.2. Weierstrassin funktion osasumma välillä $[0,1]$, kun f on muotoa $f(x) = \sum_{n=0}^{3} 0,9^n \cos(7^n \pi x)$.

1.4. Yhtäjatkuvuus ja tasaisesti suppeneva osajono

Olkoon jono $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ja määritellään positiivisten kokonaislukujen jono $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ Tällöin jonoa $(p_{n_i})_{n=1}^{\infty}$ kutsutaan jonon p_n *osajonoksi*. Tätä määritelmää hyödyntämällä saadaan tulos, jonka mukaan kaikki rajoitetut jonot joukossa $\mathbb{R}^k$ sisältävät suppenevan osajonon [**9**, Theorem 3.6]. Olisi käyttökelpoista pystyä laajentamaan tulos myös funktiojonojen tapaukseen. Tätä varten muotoillaan kaksi määritelmää.

MÄÄRITELMÄ 1.26. Olkoon funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ määritelty joukossa E. Sanotaan, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on *pisteittäin rajoitettu* joukossa E, jos jono $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu kaikilla $x \in E$. Näin on, jos on olemassa äärellisarvoinen funktio ϕ joukossa E siten, että

$$|f_n(x)| < \phi(x) \qquad \text{kaikilla } x \in E \text{ ja } n = 1, 2, 3 \dots.$$

Lisäksi sanotaan, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on *tasaisesti rajoitettu* joukossa E, jos on olemassa luku M siten, että

$$|f_n(x)| < M \qquad \text{kaikilla } x \in E \text{ ja } n = 1, 2, 3 \dots.$$

Nyt, jos $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on pisteittäin rajoitettu joukossa E ja joukko E_1 on joukon E numeroituva osajoukko, on aina mahdollista löytää osajono (f_{n_k}) siten, että $(f_{n_k}(x))$ suppenee kaikilla $x \in E_1$. Tämä tulee perustelluksi Lauseen 1.29 todistuksessa.

Edellinen määritelmä nostaa esiin kysymyksen, onko jokaisella rajoitetulla jonolla tasaisesti suppeneva osajono. Seuraava esimerkki näyttää, että ilman tiettyjä oletuksia (katso Lause 1.31) näin ei ole, vaikka alkuperäinen jono olisi tasaisesti rajoitettu kompaktissa joukossa.

ESIMERKKI 1.27. Olkoon

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}, \qquad \text{missä } 0 \le x \le 1.$$

Tällöin $|f_n(x)| \le 1$, joten funktiojono f_n on tasaisesti rajoitettu välillä $[0,1]$. Lisäksi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ jokaisella $x \in [0,1]$, mutta

$$f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + (1 - n\frac{1}{n})} = 1.$$

Siispä mikään osajono ei suppene tasaisesti välillä $[0,1]$.

Määritellään seuraavaksi yhtäjatkuvuuden käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.28. Olkoon reaalisten funktioiden f perhe $\mathcal{F}$ määritelty joukossa E, joka on metrisessä avaruudessa X. Sanotaan, että $\mathcal{F}$ on *yhtäjatkuva* joukossa E, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

aina, kun $d(x,y) < \delta$, $x, y \in E$ ja $f \in \mathcal{F}$. Tässä d tarkoittaa joukon X metriikkaa.

Kaikki yhtäjatkuvan perheen alkiot ovat myös tasaisesti jatkuvia. Esimerkin 1.27 funktiojono ei ole yhtäjatkuva.

Seuraavaksi tutkitaan suppenevan osajonon valintaprosessia.

LAUSE 1.29. *Jos (f_n) on pisteittäin rajoitettu reaalisten funktioiden jono numeroituvassa joukossa E, niin tällöin funktiojonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}) siten, että $(f_{n_k}(x))$ suppenee kaikissa pisteissä $x \in E$.*

TODISTUS. Olkoon $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ joukon E pisteitä, jotka voidaan järjestää jonoksi, koska joukko E on numeroituva. Koska $(f_n(x_1))$ on rajoitettu, niin on olemassa osajono $(f_{1,k})$ siten, että jono $(f_{1,k}(x_1))$ suppenee, kun $k \to \infty$.

Olkoon nyt jonot $S_1, S_2, S_3, \ldots$, jotka merkitään seuraavasti:

$$\begin{array}{lllll} S_1 : & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} \cdots \\ S_2 : & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} \cdots \\ S_3 : & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} \cdots \\ & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

Näillä jonoilla on seuraavat ominaisuudet

(1) S_n on jonon S_{n-1} osajono, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$.
(2) Jono $(f_{n,k}(x_n))$ suppenee, kun $k \to \infty$.
(3) Järjestys, jossa funktiot esiintyvät, on sama jokaisessa jonossa. Jos valitaan jonosta S_2 funktio $f_{2,2}$ niin kohdan (1) perusteella $f_{2,2} \in S_1$. Edelleen, jos valitaan jonosta S_3 funktio $f_{3,3}$, niin kohdan (1) perusteella $f_{3,3} \in S_2 \subset S_1$.

Kun kuljetaan edellä olevassa taulukossa alaspäin diagonaalia pitkin, saadaan seuraavanlainen jono:

$$S: \quad f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \dots .$$

Kohdan (3) nojalla jono S on jonon S_n osajono, kun $n = 1, 2, 3, \dots$ eli samat ominaisuudet pätevät. Tällöin kohdan (2) nojalla diagonaalijono $(f_{n,n}(x_i))$ suppenee, kun $n \to \infty$ kaikilla $x_i \in E$. Siispä alkuperäinen väite on todistettu. □

Seuraavaksi muotoillaan lauseet, jotka näyttävät, että yhtäjatkuvuudella ja jatkuvien funktioiden jonon tasaisella suppenemisella on selvä yhteys.

Lause 1.30. *Jos joukko K on kompakti metrinen avaruus, funktio $f_n \in \Upsilon(K)$, missä $n = 1, 2, 3, \dots$ ja jos funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa K, niin tällöin jono (f_n) on yhtäjatkuva joukossa K.*

Todistus. Täytyy siis osoittaa, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$ aina, kun $d(x, y) < \delta$ kaikilla $x, y \in K$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktiojono (f_n) suppenee tasaisesti, Määritelmän 1.15 nojalla on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f_N(x)| = \|f_n - f_N\| < \epsilon$$

kaikilla $n > N$. Koska jatkuvat funktiot ovat tasaisesti jatkuvia kompaktissa joukossa, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon,$$

jos $1 \le i \le N$ ja $d(x, y) < \delta$.

Kun $n > N$ ja $d(x, y) < \delta$, niin tällöin

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\epsilon.$$

Siis haluttu väite pätee. □

Lause 1.31. *Jos K on kompakti, $f_n \in \Upsilon(K)$, missä $n = 1, 2, 3, \dots$ ja jos funktiojono (f_n) on pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva, niin tällöin funktiojono (f_n)*

(1) *on tasaisesti rajoitettu joukossa K ja*
(2) *sisältää tasaisesti suppenevan osajonon.*

Todistus. Todistetaan ensin kohta (1). Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ Määritelmän 1.28 nojalla siten, että

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

kaikilla n kunhan etäisyys $d(x, y) < \delta$.

Koska joukko K on kompakti, on olemassa äärellinen määrä pisteitä $p_1, \dots, p_r$ joukossa K siten, että jokaista pistettä $x \in K$ vastaa tätä lähimpänä oleva piste p_i, siten, että $d(x, p_i) < \delta$. Koska funktiojono (f_n) on pisteittäin rajoitettu, on kaikilla $i = 1, \dots, r$ olemassa $M_i < \infty$ siten, että $|f_n(p_i)| < M_i$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $M = \max(M_1, \dots, M_r)$, niin yhtäjatkuvuuden nojalla

$$|f_n(x)| \le |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y)| < \epsilon + M$$

kaikilla $x \in K$. Tällöin kohta (1) on todistettu.

Todistetaan seuraavaksi kohta (2). Olkoon E joukon K numeroituva tiheä osajoukko. Lause 1.29 näyttää, että funktiojonolla (f_n) on osajono (f_{n_i}) siten, että $(f_{n_i}(x))$ suppenee kaikilla $x \in E$.

Olkoon nyt $f_{n_i} = g_i$. Tällöin voidaan todistaa, että funktiojono (g_i) suppenee tasaisesti joukossa K.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ samoin kuin todistuksen alussa. Olkoon $V(x, \delta)$ kaikkien pisteiden $y \in K$ joukko, missä $d(x, y) < \delta$. Koska joukko E on tiheä joukossa K ja joukko K on kompakti, niin on olemassa äärellinen määrä pisteitä $x_1, \dots, x_m$ joukossa E siten, että

$$K \subset V(x_1, \delta) \cup \cdots \cup V(x_m, \delta). \tag{1.10}$$

Koska funktiojono $(g_i(x))$ suppenee kaikilla $x \in E$, niin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \epsilon, \tag{1.11}$$

kunhan $i, j \geq N$ ja $1 \leq s \leq m$.

Jos $x \in K$, tiedon (1.10) nojalla huomataan, että myös $x \in V(x_s, \delta)$ jollakin s ja tällöin

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \epsilon$$

kaikilla i. Jos $i, j \geq N$, epäyhtälöstä (1.11) seuraa, että

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| < 3\epsilon.$$

Siis väite on todistettu. $\square$

LUKU 2

Funktion approksimointi

Toisessa luvussa todistetaan kaksi työn kannalta olennaista tulosta: Weierstrassin approksimaatiolause ja kappaleen lopussa Stonen yleistys Weierstrassin lauseelle. Weierstrassin lause sanoo, että jatkuvia funktioita voidaan arvioida polynomeilla. Tämä on hyvin käyttökelpoista, sillä polynomit ovat yksinkertaisia funktioita ja niiden käyttäytymistä on helppo tutkia ja ennustaa. Lisäksi luvussa otetaan käyttöön ensimmäistä kertaa kompleksiarvoiset funktiot. Suurin osa luvun tuloksista on suoraan yleistettävissä kompleksiarvoisille funktioille. Näitä tuloksia ei todisteta erikseen reaali- ja kompleksiarvoisille funktioille, sillä todistukset ovat lähes samanlaisia. Kuitenkin osa tuloksista vaatii lisäoletuksia, jotta kompleksiarvoiset funktiot voidaan ottaa huomioon. Luvun lähteinä on käytetty teoksia [**9**, s. 159-171] ja [**5**, s. 52-55].

2.1. Weierstrassin lause

Siirrytään suoraan Weierstrassin lauseen muotoiluun ja todistamiseen.

LAUSE 2.1. (Weierstrassin lause). *Jos funktio f on jatkuva ja reaalinen suljetulla välillä [a,b], on olemassa polynomit P_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, siten, että*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

tasaisesti välillä [a,b]. Jos funktio f on kompleksiarvoinen, polynomi P_n on myös kompleksiarvoinen.

TODISTUS. Olkoon funktio $h : [0, 1] \to [a, b]$ siten, että $h(x) = a + x(b - a)$. Kun tarkastellaan yhdistettyä funktiota $f \circ h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ huomataan, että tämä funktio on kahden jatkuvan funktion yhdisteenä jatkuva. Tällöin voidaan olettaa, että lauseessa tarkasteltavan funktion f määrittelyväli on $[0, 1]$.

Tarkastellaan seuraavaa funktiota,

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

missä $0 \leq x \leq 1$. Tässä $g(0) = g(1) = 0$. Jos funktio g voidaan saada polynomien tasaisen suppenemisen raja-arvoksi, eli jos $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = g(x)$, niin funktion g määritelmän nojalla sama pätee myös funktiolle f, koska erotus $f - g$ on polynomifunktio. Tällöin voidaan tutkia funktiota f, jolle pätee $f(0) = f(1) = 0$. Jos funktio f ei toteuta tätä ehtoa, otetaan käyttöön funktio g ja näin saadaan huomioitua kaikki tapaukset. Määritellään $f(x) = 0$, kun x ei kuulu välille $[0, 1]$. Tällöin funktio f on tasaisesti jatkuva kaikkialla.

Olkoon $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, missä c_n on valittu siten, että

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1. \tag{2.1}$$

Tarvitaan hieman lisätietoa luvun c_n suuruudesta. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx &= 2\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \\
&\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n\,dx \\
&\geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\,dx \qquad \text{Bernoullin epäyhtälön nojalla} \\
&= 2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(x-\frac{1}{3}nx^3) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

jolloin yhtälön (2.1) nojalla $c_n < \sqrt{n}$. Tällöin kaikille $\delta > 0$ pätee

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n, \tag{2.2}$$

kun $\delta \leq |x| \leq 1$ ja tällöin $Q_n \to 0$.

Todistetaan Weierstrassin M-testin avulla, Lause 1.6, että $Q_n \to 0$ tasaisesti, kunhan $\delta \leq |x| \leq 1$. Merkitään

$$\sup|Q_n - 0| \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n =: M_n.$$

Koska $0 < 1-\delta^2 < 1$, niin tällöin voidaan kirjoittaa $1-\delta^2 = \frac{1}{b}$, missä $b > 1$. Tällöin tutkittava raja-arvo saadaan muotoon

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\delta^2)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{b^n}. \tag{2.3}$$

Olkoon $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{b^x}$. Tutkitaan tämän funktion raja-arvoa l'Hospitalin sääntöä käyttäen, kun x lähestyy ääretöntä. Tällöin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{b^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}b^x\ln b} = 0. \tag{2.4}$$

Huomataan, että raja-arvo on 0, vaikka ääretöntä lähestyttäisiin vain luonnollisten lukujen kautta. Siispä yhdistämällä yhtälöt (2.3) ja (2.4) huomataan, että $Q_n \to 0$ tasaisesti, kunhan $\delta \leq |x| \leq 1$.

Olkoon nyt polynomi P_n muotoa

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt$$

kaikilla $0 \leq x \leq 1$. Muistetaan, että funktio $f(x)$ on määritelty, kun $x \in [0,1]$ ja muualla se saa arvon nolla sekä $f(0) = f(1) = 0$. Siis termi $f(x+t) \neq 0$ vain silloin, kun $0 < x+t = u < 1$. Nyt integroitaessa muuttujan t suhteen, saadaan integrointirajoiksi $-x < t < 1-x$. Näiden tietojen nojalla voidaan tehdä muuttujanvaihto polynomin P_n integraaliin ja saadaan seuraavaa

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt \qquad \text{merkitään } u = x+t \\ &= \int_0^1 f(u)Q_n(u-x)\,du \qquad \text{merkitään } u = t \\ &= \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)\,dt. \end{aligned}$$

Samoin huomataan, että yhtälön viimeinen integraali on polynomi, jonka muuttujana on x. Tästä lisää Esimerkissä 2.2. Siis P_n on polynomi, joka on reaalinen, jos funktio f on reaalinen.

Olkoon nyt $\epsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

kun $|y-x| < \delta$. Olkoon $M = \sup |f(x)|$. Käyttämällä yhtälöitä (2.1) ja (2.2) ja tietoa, että $Q_n(x) \geq 0$ huomataan, että

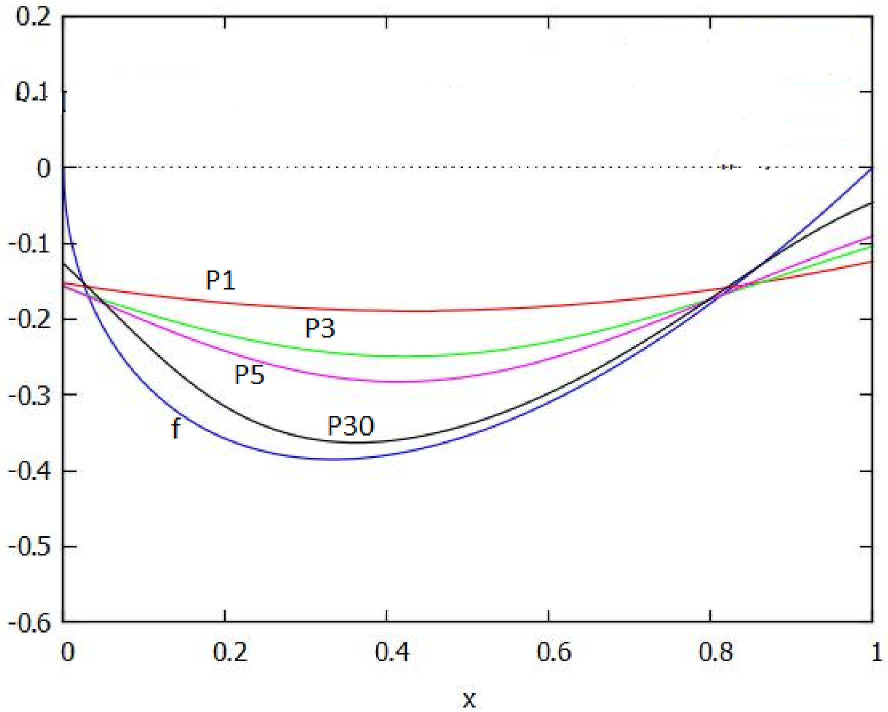
$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \Big| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)\,dt \Big| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \\ &\leq 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \Big(\int_{-1}^{-\delta} dt + \int_{\delta}^{1} dt\Big) + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

kaikille $0 \leq x \leq 1$ ja kunhan n on tarpeeksi suuri. Näin on saatu todistettua väite. □

Tutkitaan yksinkertaisen esimerkkifunktion avulla Weierstrassin lauseen ideaa.

Esimerkki 2.2. Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$. Nyt $f(0) = 0 = f(1)$ ja funktio f on tasaisesti jatkuva kaikkialla. Tutkitaan funktion f määräämiä polynomeja P_n, kun $n = 1, 3, 5, 30$ ja piirretään niistä kuvaaja. Muodostetaan aluksi yleinen kaava polynomeille P_n ja saadaan

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{t}(t-1)c_n(1-(t-x)^2)^n\,dt. \end{aligned}$$



KUVA 2.1. Weierstrassin lauseen sovellus funktiolle $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ välillä $[0,1]$.

Polynomin Q_n määritelmän ja yhtälön (2.1) nojalla kertoimeksi c_n saadaan

$$c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx},$$

josta integroimalla saadaan halutut kertoimet. Tällöin polynomiksi $P_1(x)$ saadaan tietokoneohjelma Maximalla laskettuna

$$P_1(x) = \int_0^1 \sqrt{t}(t-1)\frac{3}{4}(1-(t-x)^2)\,dt = \frac{84x^2 - 72x - 64}{420}.$$

Siis huomataan, että polynomin muuttujana on x, niin kuin Lauseen 2.1 todistuksessa todettiin.

Vastaavaan tapaan lasketaan Maximalla polynomit P_3, P_5 ja P_{30}. Piirretään Maximalla samaan kuvaan kaikki neljä polynomia ja alkuperäinen funktio f. Kuvasta 2.1 huomataan, että polynomit todella lähestyvät funktiota f välillä $[0,1]$.

Jotta voidaan lopulta todistaa Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta, Lause 2.12, täytyy Weierstrassin Lauseesta 2.1 todistaa seuraava erityistapaus.

SEURAUS 2.3. *Kaikilla suljetuilla väleillä* $[-a,a]$ *on reaalisten polynomien jono* P_n *siten, että* $P_n(0) = 0$ *ja edelleen, että*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

tasaisesti välillä $[-a,a]$.

Todistus. Lauseen 2.1 nojalla on olemassa reaalisten polynomien jono (P_n^*), joka suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$ kohti funktiota $|x|$. Siis pätee, että $P_n^*(0) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin polynomeille P_n, jotka ovat muotoa

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0),$$

pätee halutut ominaisuudet ja väite on todistettu. □

2.2. Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta

Seuraavaksi eritellään ne polynomien ominaisuudet, jotka tekevät Weierstrassin lauseen mahdolliseksi.

Määritelmä 2.4. Kompleksisten funktioiden $\mathcal{A}$ perhettä, joka on määritelty joukossa E, sanotaan *algebraksi*, jos kaikilla $f, g \in \mathcal{A}$ pätee seuraavat kolme ehtoa

(1) $f + g \in \mathcal{A}$
(2) $fg \in \mathcal{A}$
(3) $cf \in \mathcal{A}$ kaikilla kompleksisilla vakioilla c.

Toisin sanoen, jos $\mathcal{A}$ on suljettu yhteenlaskun, kertolaskun ja vakiolla kertomisen suhteen, se on algebra. Sama määritelmä pätee myös reaalisessa tapauksessa. Tällöin kohdassa (3) vakio c on reaalinen.

Esimerkin 1.17 jälkeen mainittiin tasainen sulkeuma ja tasaisesti suljettu joukko. Määritellään samat ominaisuudet algebran $\mathcal{A}$ avulla.

Määritelmä 2.5. Jos perheelle $\mathcal{A}$ pätee, että $f \in \mathcal{A}$ aina, kun $f_n \in \mathcal{A}$ ja f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa E, niin tällöin $\mathcal{A}$ on *tasaisesti suljettu.*

Olkoon $\mathcal{B}$ niiden kaikkien funktioiden joukko, jotka ovat joukon $\mathcal{A}$ alkioiden tasaisesti suppenevien jonojen raja-arvoja. Tällöin $\mathcal{B}$ on perheen $\mathcal{A}$ *tasainen sulkeuma.*

Esimerkki 2.6. Olkoon $\mathcal{P}$ kaikkien polynomien joukko. Osoitetaan, että tämä joukko on algebra, eli sille pätee Määritelmän 2.4 ehdot. Olkoon funktiot f ja g muotoa

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

ja

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + b_n x^n \cdots + b_1 x + b_0,$$

missä $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Siis $f, g \in \mathcal{P}$. Nyt

(1) kahden polynomin summa on polynomifunktio, siis $f(x) + g(x) \in \mathcal{P}$,

(2) kahden polynomin tulo on polynomifunktio, $f(x)g(x) \in \mathcal{P}$

(3) sekä polynomi vakiolla kerrottuna on edelleen polynomifunktio, $cf(x) \in \mathcal{P}$, missä $c \in \mathbb{R}$.

Tällöin kaikkien polynomien joukko $\mathcal{P}$ on algebra.

Lause 2.7. *Olkoon $\mathcal{A}$ algebra, joka muodostuu rajoitetuista funktioista. Olkoon $\mathcal{B}$ joukon $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma. Tällöin $\mathcal{B}$ on tasaisesti suljettu algebra.*

TODISTUS. Jos $f \in \mathcal{B}$ ja $g \in \mathcal{B}$, niin on olemassa tasaisesti suppenevat jonot (f_n) ja (g_n) siten, että $f_n \to f$, $g_n \to g$ ja $f_n, g_n \in \mathcal{A}$. Tällöin

$$||f_n - f|| < \epsilon \qquad \text{ja} \qquad ||g_n - g|| < \epsilon,$$

kunhan n on riittävän suuri. Nyt siis rajoitetuille funktioille pätee, että

- $\|f_n + g_n - (f+g)\| \leq \|f_n - f\| + \|g_n - g\| < 2\epsilon$, eli $f_n + g_n \to f + g$ tasaisesti.

- $\|f_n g_n - fg\| = \|f_n g_n - f g_n + f g_n - fg\| \leq \|g_n\|\|f_n - f\| + \|f\|\|g_n - g\| < (\|g_n\| + \|f\|)\epsilon = (M+N)\epsilon$, sillä g_n ja f ovat rajoitettuja. Nyt siis $f_n g_n \to fg$ tasaisesti.

- $\|cf_n - cf\| = |c|\|f_n - f\| < |c|\epsilon$, eli $cf_n \to cf$ tasaisesti, kun c on mielivaltainen vakio.

Koska $f + g, fg, cf \in \mathcal{B}$, niin $\mathcal{B}$ on algebra. Lisäksi $\mathcal{B}$ on tasaisesti suljettu. □

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoon $\mathcal{A}$ funktioperhe joukossa E. Tällöin sanotaan, että $\mathcal{A}$ on *separoituva* joukossa E, jos kaikilla erillisillä pistepareilla $x_1, x_2 \in E$ on olemassa funktio $f \in \mathcal{A}$ siten, että $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Jos jokaisella $x \in E$ on olemassa jokin funktio $g \in \mathcal{A}$ siten, että $g(x) \neq 0$, sanotaan, että $\mathcal{A}$ *ei ole nolla missään joukon E pisteessä.*

Tutkitaan, pätevätkö Määritelmän 2.8 ominaisuudet Esimerkin 2.6 polynomialgebralle $\mathcal{P}$.

ESIMERKKI 2.9. Olkoon $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ erilliset pisteet. Olkoon polynomi f muotoa $f(x) = x - x_1$. Tällöin $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = x_2 - x_1 \neq 0$, joten kaikkien polynomien algebra $\mathcal{P}$ on separoituva.

Lisäksi jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on olemassa polynomi $f \in \mathcal{P}$ siten, että $f(x) \neq 0$. Nyt jos $x \neq x_1$, niin $f(x) \neq 0$ aina. Jos $x = x_1$, niin voidaan valita toinen funktio polynomialgebrasta, esimerkiksi $g(x) = x - x_2$, jolle pätee $g(x) \neq 0$. Tällöin $\mathcal{P}$ ei ole nolla missään joukon $\mathbb{R}$ pisteessä.

Esimerkki algebrasta, joka ei ole separoituva on kaikkien niiden polynomien joukko, esimerkiksi välillä $[-1, 1]$, jonka funktioille pätee $f(-x) = f(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Seuraava lause käsittelee tätä asiaa.

LAUSE 2.10. *Olkoon $\mathcal{A}$ funktioiden algebra joukossa E. Lisäksi oletetaan, että $\mathcal{A}$ on separoituva ja se ei ole nolla missään joukon E pisteessä. Olkoon x_1, x_2 erillisiä joukon E pisteitä ja c_1, c_2 vakioita. Tällöin algebra $\mathcal{A}$ sisältää funktion f, jolle*

$$f(x_1) = c_1, \qquad f(x_2) = c_2$$

TODISTUS. Oletuksen nojalla algebrassa $\mathcal{A}$ on funktiot g, h ja k siten, että

$$g(x_1) \neq g(x_2), \qquad h(x_1) \neq 0 \qquad \text{ja} \qquad k(x_2) \neq 0.$$

Olkoon lisäksi funktiot u ja v muotoa

$$u = gk - g(x_1)k, \qquad v = gh - g(x_2)h.$$

Tällöin $u, v \in \mathcal{A}$, $u(x_1) = v(x_2) = 0$, $u(x_2) \neq 0$ ja $v(x_1) \neq 0$. Siispä funktiolle f, joka on muotoa

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)},$$

pätee

$$f(x_1) = \frac{c_1 v(x_1)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_1)}{u(x_2)} = c_1$$

ja

$$f(x_2) = \frac{c_1 v(x_2)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_2)}{u(x_2)} = c_2.$$

Tällöin funktio f täyttää halutut ehdot ja väite on todistettu. □

HUOMAUTUS 2.11. Edellinen Lause 2.10 pätee myös kompleksiarvoisten funktioiden algebralle $\mathcal{A}$. Tällöin erilliset pisteet $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ja vakiot c_1 ja c_2 ovat muotoa $c_1 = a_1 + ib_1$ ja $c_2 = a_2 + ib_2$. Nyt kompleksialgebralle pätee vastaavat oletukset kuin edellä reaalisessa tapauksessa ja todistus etenee samalla tavalla.

Lopulta on saatu koottua kaikki tarvittava materiaali, jotta voidaan muotoilla Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta. Tämä yleistys sanoo, että algebran $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ koostuu kaikista jatkuvista funktioista kompaktissa joukossa K.

LAUSE 2.12. (Stonen yleistys Weierstrassin lauseesta). *Olkoon $\mathcal{A}$ reaalisten jatkuvien funktioiden algebra kompaktissa joukossa K. Jos algebra $\mathcal{A}$ on separoituva joukossa K ja jos se ei ole nolla missään joukon K pisteessä, niin tällöin algebran $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ koostuu kaikista reaalisista jatkuvista funktioista joukossa K.*

TODISTUS. Jaetaan todistus neljään pienempään ja helpommin hahmotettavaan osaan. Ensimmäisessä vaiheessa todistetaan seuraava väite: Jos funktio $f \in \mathcal{B}$, niin myös $|f| \in \mathcal{B}$.

Olkoon

$$a = \sup |f(x)| = \|f\| \qquad x \in K$$

ja olkoon $\epsilon > 0$. Seurauksen 2.3 nojalla on olemassa reaaliluvut $c_1, c_2, \ldots$ siten, että

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \Big\| < \epsilon,$$

kun $-a \leq y \leq a$. Koska $\mathcal{B}$ on algebra, niin Määritelmän 2.4 nojalla funktio $g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$ kuuluu myös joukkoon $\mathcal{B}$. Tällöin sijoittamalla muuttujan y paikalle funktio $f(x)$, saadaan epäyhtälö

$$\big\| g(x) - |f(x)| \, \big\| < \epsilon,$$

kaikilla $x \in K$. Lisäksi, koska $\mathcal{B}$ on tasaisesti suljettu, voidaan todeta, että $|f| \in \mathcal{B}$.

Toisessa vaiheessa todistetaan väite, jonka mukaan joukkoon $\mathcal{B}$ kuuluvien funktioiden f ja g maksimi ja minimi kuuluvat myös joukkoon $\mathcal{B}$. Siis, jos $f, g \in \mathcal{B}$, niin tällöin myös $\max(f, g) \in \mathcal{B}$ ja $\min(f, g) \in \mathcal{B}$. Tässä maksimilla tarkoitetaan funktiota h siten, että

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jos } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{jos } f(x) < g(x) \end{cases}$$

ja minimi $\min(f,g) \in \mathcal{B}$ voidaan määritellä vastaavasti.

Toisen vaiheen todistus seuraa suoraan ensimmäisen vaiheen tuloksesta, kun havaitaan, että

$$\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

ja

$$\min(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Koska joukko $\mathcal{B}$ on algebra, pätee $f-g \in \mathcal{B}$ ja ensimmäisen vaiheen nojalla myös $|f-g| \in \mathcal{B}$.

Tulos voidaan laajentaa myös mihin tahansa äärelliseen funktiojoukkoon. Esimerkiksi, jos $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{B}$, niin tällöin myös $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}$ ja vastaavasti $\min(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}$.

Muotoillaan seuraavaksi todistuksen kolmas väite: Olkoon $x \in K$. Olkoon f reaalinen funktio, joka on jatkuva joukossa K ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa funktio $g_x \in \mathcal{B}$ siten, että $g_x(x) = f(x)$ ja

$$g_x(t) > f(t) - \epsilon \qquad \text{kaikilla } t \in K.$$

Koska joukko $\mathcal{B}$ on joukon $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma, niin pätee $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Lisäksi algebralle $\mathcal{A}$ pätee Lauseen 2.10 väite. Tällöin siis kaikille $y \in K$ voidaan löytää funktio $h_y \in \mathcal{B}$ siten, että

$$h_y(x) = f(x), \qquad h_y(y) = f(y). \tag{2.5}$$

Funktion h_y jatkuvuuden nojalla on olemassa avoin joukko J_y, joka sisältää pisteen y siten, että

$$h_y(t) > f(t) - \epsilon,$$

kaikilla $t \in J_y$.

Koska joukko K on kompakti, on olemassa äärellinen määrä pisteitä $y_1, \ldots, y_n$ siten, että

$$K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}. \tag{2.6}$$

Lisäksi olkoon

$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}).$$

Toisen vaiheen, tiedon $g_x \in \mathcal{B}$ ja yhteyksien (2.5) ja (2.6) nojalla huomataan, että funktiolle g_x pätee tarvittavat ominaisuudet.

Todistuksen neljännessä ja viimeisessä vaiheessa käsitellään väitettä, jonka avulla lopulta myös alkuperäinen väite saadaan todistettua. Olkoon reaalinen funktio f jatkuva joukossa K ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa funktio $h \in \mathcal{B}$ siten, että

$$|h(x) - f(x)| < \epsilon,$$

kaikilla $x \in K$. Koska joukko $\mathcal{B}$ on tasaisesti suljettu, niin tämä väite on yhtäpitävä alkuperäisen väitteen kanssa.

Tarkastellaan aluksi funktiota g_x, kaikilla $x \in K$, joka on muotoiltu samoin kuin tämän todistuksen kolmannessa vaiheessa. Jatkuvalle funktiolle g_x on olemassa avoin joukko V_x, joka sisältää pisteen x siten, että

$$g_x(t) < f(t) + \epsilon \qquad \text{kaikilla } t \in V_x. \tag{2.7}$$

Koska joukko K on kompakti, on olemassa äärellinen määrä pisteitä $x_1, \dots, x_m$ siten, että

$$K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}. \tag{2.8}$$

Olkoon nyt $h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$. Tällöin todistuksen toisen vaiheen nojalla pätee $h \in \mathcal{B}$ ja lisäksi pätee, kuten aikaisemmin, että

$$h(t) > f(t) - \epsilon \qquad \text{kaikilla } t \in K.$$

Tällöin aikaisempien yhtälöiden (2.7) ja (2.8) nojalla pätee lisäksi, että

$$h(t) < f(t) + \epsilon \qquad \text{kaikilla } t \in K.$$

Nyt siis $f(t) - \epsilon < h(t) < f(t) + \epsilon$, eli väite on todistettu. □

Mietitään seuraavaksi, mitä yhteistä Weierstrassin lauseella ja Stonen yleistyksellä todella on.

Esimerkki 2.13. Olkoon $\mathcal{P} = \{p : [a, b] \to \mathbb{R} : p \text{ on polynomi}\}$ kaikkien polynomien joukko. Esimerkkien 2.6 ja 2.9 nojalla Lauseen 2.12 oletukset pätevät joukolle $\mathcal{P}$. Tällöin Lause 2.12 sanoo, että joukon $\mathcal{P}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ koostuu kaikista reaalisista jatkuvista funktioista välillä $[a, b]$. Siis

$$\mathcal{B} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva välillä } [a, b]\}.$$

Monet tämän luvun lauseista voidaan yleistää suoraan kompleksiarvoisille funktioille. Näin ei kuitenkaan päde Lauseen 2.12 tapauksessa. Jotta lause saataisiin toimimaan myös kompleksiarvoisilla funktioilla, jopa kompleksialgebralle, täytyy määritellä uusi ominaisuus algebralle $\mathcal{A}$.

Määritelmä 2.14. Sanotaan, että $\mathcal{A}$ on *itse-adjungoitu*, jos kaikille funktioille $f \in \mathcal{A}$ myös sen kompleksikonjugaatti $\overline{f} \in \mathcal{A}$. Funktion f kompleksikonjugaatti määritellään seuraavasti: $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Nyt Lause 2.12 voidaan laajentaa myös kompleksiarvoisille funktioille, kuten seuraavasta todistuksesta nähdään.

Lause 2.15. (Kompleksinen versio Stone-Weierstrassin lauseesta). *Olkoon K kompakti joukko ja $\mathcal{A}$ kompleksiarvoisten jatkuvien funktioiden algebra joukossa K. Olkoon $\mathcal{A}$ itse-adjungoitu, separoituva, eikä se ole nolla missään joukon K pisteessä. Tällöin algebran $\mathcal{A}$ tasainen sulkeuma $\mathcal{B}$ muodostuu kaikista kompleksiarvoisista jatkuvista funktioista joukossa K. Toisin sanoen $\mathcal{A}$ on tiheä joukossa $\Upsilon(K)$.*

Todistus. Todistetaan ensin, että kaikkien algebraan $\mathcal{A}$ kuuluvien reaaliarvoisten funktioiden joukko on algebra ja että sille pätee edellä olevat oletukset. Merkitään $\mathcal{A}_R = \{f \in \mathcal{A} : f \text{ on reaaliarvoinen}\}$. Nyt $\mathcal{A}_R$ on algebra.

Jos $x_1, x_2 \in K$ siten, että $x_1 \neq x_2$, niin tällöin Huomautuksen 2.11 nojalla on olemassa funktio $f \in \mathcal{A}$ siten, että $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = 1$. Olkoon nyt $g = f + \overline{f} \in \mathcal{A}$, jolloin funktio g on reaaliarvoinen. Funktion g määritelmän nojalla

$$g(x_1) = f(x_1) + \overline{f(x_1)} = 0 + \overline{0} = 0 \qquad \text{sekä} \qquad g(x_2) = f(x_2) + \overline{f(x_2)} = 2.$$

Nyt siis $\mathcal{A}_R$ on separoituva.

Lisäksi halutaan löytää $g \in \mathcal{A}_R$, jolle $g(x)$ ei ole nolla, kun $x \in K$. Oletuksen nojalla on olemassa $f \in \mathcal{A}$, jolle $f(x)$ ei ole nolla. Valitaan $g = f \cdot \overline{f}$, joka algebran määritelmän mukaan kuuluu algebraan $\mathcal{A}$. Koska nyt g on reaaliarvoinen, niin se kuuluu myös algebraan $\mathcal{A}_R$ ja lisäksi $g(x)$ ei ole nolla, kun $x \in K$.

Olkoon nyt $\phi \in K$ kompleksiarvoinen jatkuva funktio siten, että $\phi = u + iv$, missä u ja v ovat reaaliarvoisia ja jatkuvia. Tällöin funktioita u ja v voidaan arvioida tasaisesti algebran $\mathcal{A}_R$ jäsenillä siten, että olkoon $h, j \in \mathcal{A}_R$ joille

$$\|u - h\| < \epsilon \qquad \text{sekä} \qquad \|v - j\| < \epsilon.$$

Tällöin huomataan, että

$$\|u + iv - (h + ij)\| \leq \|u - h\| + \|i\|\|v - j\| < 2\epsilon,$$

sillä $\|i\| = 1$. Siis kompleksiarvoista funktiota $u+iv$ voidaan arvioida tasaisesti, jolloin väite pätee.

□

Luvun loppuun todistetaan hieman muokattu versio Lauseesta 2.1. Määritellään ensiksi trigonometriset polynomit sarjakehitelmän avulla. Tätä määritelmää hyödynnetään myös seuraavassa luvussa, kun johdetaan funktion Fourier-sarjakehitelmä.

MÄÄRITELMÄ 2.16. Trigonometriset polynomit voidaan kirjoittaa äärellisenä summana seuraavasti:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2.9}$$

missä muuttuja x on reaalinen ja luvut $a_0, \ldots, a_N$ ja $b_1, \ldots, b_N$ ovat kompleksisia.

Muokattu versio Weierstrassin lauseesta sanoo, että jos f on jatkuva, 2π-periodinen funktio, niin sitä voidaan arvioida tasaisesti trigonometrisellä polynomilla.

LAUSE 2.17. (Eräs Stone-Weierstrassin yleistys). *Jos funktio f on jatkuva, 2π-periodinen ja olkoon $\epsilon > 0$, niin tällöin on olemassa trigonometrinen polynomi t siten, että*

$$|t(x) - f(x)| < \epsilon,$$

kaikilla pisteillä x.

TODISTUS. Jos samastetaan luvut x ja $x + 2\pi$, voidaan tarkastella 2π-periodisia funktioita joukossa $\mathbb{R}$, kuten funktioita yksikköympyrässä T. Todistetaan lause hyödyntäen Lausetta 2.12. Täytyy siis osoittaa, että trigonometristen polynomien joukko

$$\mathcal{T} = \{t : T \to \mathbb{R} : t \text{ on trigonometrinen polynomi}\}$$

on algebra ja että se on separoituva, eikä saa arvoa nolla missään joukon T pisteessä. Tällöin Stonen yleistyksen nojalla väite pätee.

Olkoon trigonometriset polynomit $t, p \in \mathcal{T}$ siten, että

$$t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ja

$$p(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos nx + d_n \sin nx).$$

Näille pätee:

(1)

$$\begin{aligned} t(x) + p(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) \\ &= (a_0 + c_0) + \sum_{n=1}^{N} ((a_n + c_n) \cos nx + (b_n + d_n) \sin nx) \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

(2) Vastaavasti $t(x)p(x) \in \mathcal{T}$, kun hyödynnetään trigonometristen funktioiden ominaisuuksia $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)$ ja $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$.

(3) Luonnollisesti myös $d \cdot t(x) \in \mathcal{T}$, missä $d \in \mathbb{C}$.

Siis $\mathcal{T}$ on algebra. Todistetaan lisäksi, että algebra $\mathcal{T}$ on separoituva, eikä se saa arvoa nolla missään joukon T pisteessä.

Olkoon $T = [-\pi, \pi]$ ja $x, y \in T$ siten, että $x < y$. Tutkitaan trigonometristen polynomien separoituvuutta kolmessa eri tilanteessa.

(1) Jos $x < 0 < y$ ja valitaan $t(x) = \sin x$, niin tällöin $t(x) < 0 < t(y)$ ja funktio t separoi pisteet x ja y.
(2) Jos $0 < x < y$, niin $t(x) = t(y)$ vain silloin, kun $y = \pi - x$. Tällöin, jos valitaan $p(x) = \cos x$, niin $p(y) = p(\pi - x) = -p(x)$ kosinin ominaisuuksien nojalla. Siis on löydetty funktio, joka separoi pisteet x ja y.
(3) Jos $x < y < 0$, niin vastaavasti, kuin kohdassa (2) $t(x) = t(y)$ vain silloin, kun $y = -\pi - x$. Jos nyt valitaan $p(x) = \cos x$, niin $p(y) = p(-\pi - x) = -p(x)$. Taas ollaan löydetty funktio, joka separoi pisteet x ja y.

Lisäksi jokaisella $x \in T$ on olemassa trigonometrinen polynomi $t \in \mathcal{T}$ siten, että $t(x) \neq 0$. Jos $x \neq \pi n$, niin $t(x) = \sin x \neq 0$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jos $x = \pi n$, niin valitaan esimerkiksi trigonometrinen polynomi $p(x) = \cos x$, jolle $p(\pi n) \neq 0$ aina. Tällöin $\mathcal{T}$ ei ole nolla missään joukon T pisteessä.

Nyt on näytetty, että Lauseen 2.12 oletukset pätevät. Tällöin saman lauseen nojalla trigonometristen polynomien algebran tasainen sulkeuma koostuu kaikista reaalisista jatkuvista funktioista joukossa T, joten väite on todistettu. □

Seuraava mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe olisi todistaa Lauseet 2.1 ja 2.17 yhtäpitäviksi. Todistus on pitkä ja veisi tutkielmaa eri suuntaan kuin on tarkoitus. Siksi sitä ei käsitellä tässä tutkielmassa. Todistus ja mielenkiintoisia kommentteja löytyy muun muassa lähteistä [**7**, Theorem 2.1 ja 2.2] ja [**8**, luku 4].

Seuraavassa luvussa tutustutaan lisää 2π-periodisten funktioiden arviointiin ja merkittävä kysymys on, suppenevatko tietyt funktiosarjat tasaisesti tai pisteittäin tai voidaanko niiden suppenemisesta sanoa mitään.

LUKU 3

2π-periodisten funktioiden approksimointi

Kuten johdannossa todettiin, approksimointiteoria on saanut alkunsa Fourier-sarjojen teorian myötä. Tämän vuoksi on mielekästä tutustua Fourier-sarjojen avulla jaksollisten funktioiden arviointiin. Kolmannessa luvussa tutkitaan, kuinka jaksollisia funktioita voidaan arvioida yksinkertaisemmilla funktioilla, erityisesti, kuinka 2π-periodisia funktioita arvioidaan. 2π-periodisia funktioita ovat esimerkiksi sini-, kosini- ja tangenttifunktiot. Luvun päätuloksina esitellään Fourier-sarjojen pisteittäinen suppeneminen tietyin rajoituksin ja Fourier-sarjoista johdetun Cesaron summan tasainen ja pisteittäinen suppeneminen. Kaikki tässä luvussa käsiteltävät funktiot ovat 2π-periodisia ja Riemann-integroituvia välillä $[-\pi, \pi]$, joten tätä tietoa ei mainita enää jatkossa erikseen.

Fourier-sarjat ovat paljon tutkittu aihe ja näiden sarjojen ominaisuuksista voisi kirjoittaa helposti oman tutkielmansa. Tähän tutkielmaan on valikoitu tiettyjä, kokonaisuuden kannalta hyödyllisiä ja mielenkiintoisia tuloksia. Luvun lähteinä on käytetty teoksia [**1**], [**2**, luku 8], [**6**, luku 10], [**9**, s. 185-199] ja [**10**, luku 10].

3.1. Fourier-sarjoista ja niiden suppenemisesta

Fourier-sarjat on nimetty ranskalaisen matemaatikon ja fyysikon Jean-Baptiste Joseph Fourierin mukaan (1768-1830). Sarjojen tarkoituksena on esittää jaksollinen funktio trigonometristen funktioiden avulla äärettömänä summana. Tarve Fourier-sarjoille sai alkunsa fysikaalisten ongelmien yhteydessä, erityisesti värähtelyn ja lämmön johtumisen tutkimisessa.

Lähdetään muokkaamaan Määritelmää 2.16 tavoitteena saada muodostettua kompleksinen versio tästä määritelmästä. Muistetaan kompleksilukujen ominaisuuksista, että $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ja lisäksi sinifunktion parittomuuden ja kosinifunktion parillisuuden nojalla $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Tällöin huomataan, että

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{sekä} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Muokataan yhtälöä (2.9) sijoittamalla edelliset lausekkeet kosinin ja sinin paikalle ja huomioimalla, että $i^2 = -1$. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{inx} + \overline{c_n} e^{-inx}). \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Tutkitaan seuraavaksi eksponenttifunktion integraalia:

$$
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 1 & \text{kun } n = 0 \\ \frac{1}{2\pi in} \Big|_{-\pi}^{\pi} e^{inx} = 0 & \text{kun } n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}
$$

Hajotetaan summa (3.1) osiin ja tutkitaan erikseen funktioita $g(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx}$ ja $h(x) = \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} e^{-inx}$. Kerrotaan ensin funktio g funktiolla e^{-imx}, missä m on kokonaisluku ja saadaan

$$
\begin{aligned}
e^{-imx} g(x) &= \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} e^{-imx} = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{(n-m)ix} \\
\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} g(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} c_n e^{(n-m)ix}\, dx \\
\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} g(x)\, dx &= \sum_{n=1}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{(n-m)ix}\, dx \\
\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} g(x)\, dx &= c_m \cdot 2\pi,
\end{aligned}
$$

jos m on jokin luvuista $1, 2 \dots, N$. Kun edellinen yhtälö jaetaan puolittain luvulla 2π, saadaan luvuille c_m yhtälö

$$
c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx}\, dx.
$$

Tehdään vastaava operaatio myös funktiolle h, ainoana erona edelliseen kerrotaan tätä funktiolla e^{imx}. Tällöin saadaan

$$
\overline{c_m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{imx}\, dx,
$$

jos m on jokin luvuista $1, 2, \ldots, N$. Nyt sekä c_m että $\overline{c_m}$ on määritelty kaikille $1 \leq m \leq N$. Jos $|m| > N$, molemmat intergaalit ovat nolla eksponenttifunktion integraalin nojalla.

Nyt jos merkitään, että $c_{-m} = \overline{c_m}$, niin funktio f saadaan muotoon

$$f(x) = c_0 + g(x) + h(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \tag{3.2}$$

Lisäksi huomataan, että edellinen yhtälö (3.2) on äärettömän summan

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{3.3}$$

kertalukua N oleva osasumma.

Nyt lukua

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx, \tag{3.4}$$

missä $m \in \mathbb{Z}$, kutsutaan funktion f *Fourier-kertoimeksi.* Lisäksi sarjaa (3.3), joka on määritelty näiden kertoimien avulla kutsutaan funktion f *Fourier-sarjaksi.*

Usein käytetään merkintää " $\sim$ " kuvaamaan sitä, että jokin sarja on funktion f Fourier-sarja. Tämä merkintä ei ota lainkaan kantaa siihen, suppeneeko sarja tai määrittääkö kyseinen sarja täsmällisesti funktion f. Lasketaan seuraavassa esimerkissä Fourier-sarjaesitys konkreettiselle funktiolle ja tutkitaan saadun Fourier-sarjan suppenemista.

Esimerkki 3.1. Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = 1$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = 0$, kun $x < 0$. Lasketaan ensin Fourier-kerroin c_n:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} f(x) e^{-inx}\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-inx}\, dx = -\frac{1}{2\pi i n} (e^{-in\pi} - e^{-in\cdot 0}) \\ &= -\frac{i}{2\pi n} (1 - e^{-in\pi}), \end{aligned}$$

kun $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Kun $n = 0$, kerroin c_n on muotoa

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ix\cdot 0}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2}.$$

Tällöin funktion f Fourier-sarjaksi saadaan

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{i}{2\pi n} (1 - e^{-in\pi}) e^{inx}.$$

Tutkitaan Fourier-sarjan suppenemista pisteessä $x = 0$. Tällöin huomataan, että

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} -\frac{i}{2\pi n} (1 - e^{-in\pi}) = \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=-k, n\neq 0}^{k} -\frac{i}{2\pi n} (1 - e^{-in\pi}) \Big) = \frac{1}{2} \neq f(0).$$

Siis pisteessä $x = 0$ Fourier-sarja suppenee kohti lukua $\frac{1}{2}$, joten ei voida sanoa, että Fourier-sarja suppenisi kohti alkuperäistä funktiota kaikkialla.

Huomataan, että Fourier-sarjat eivät suppene tasaisesti. Jotta lopulta voidaan todistaa jonkinlainen tulos Fourier-sarjojen suppenemiselle, täytyy ensin esitellä tiettyjä hyödyllisiä määritelmiä ja aputuloksia.

Merkitään seuraavaksi yhtälössä (3.2) määritelty funktion f Fourier-sarjan kertalukua N oleva osasumma siten, että

$$s_N(x) = s_N(f;x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}. \tag{3.5}$$

Myöhemmin huomataan, että tämän osasumman avulla voidaan tietyin täsmällisin ehdoin todistaa Fourier-sarjojen pisteittäinen suppeneminen. Lisäksi määritellään Peter Gustav Lejeune-Dirichlet'n (1805-1859) mukaan nimetty *Dirichlet'n ydin* $D_N(x)$ siten, että

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}. \tag{3.6}$$

Muotoillaan ja todistetaan kaksi suhteellisen laskennallista aputulosta, jotka helpottavat tämän kappaleen päätuloksen, Lauseen 3.5 todistamisessa.

LEMMA 3.2. *Dirichlet'n ytimelle pätee seuraava hyvin määritelty yhtäsuuruus:*

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

TODISTUS. Muokataan Dirichletin ytimen määritelmää, jotta päästään käyttämään geometrisen sarjan ominaisuuksia sekä tietoa, että $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx}\sum_{n=0}^{2N}(e^{ix})^n \\
&= e^{-iNx}\Big(\frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^{ix}}\Big) \\
&= \frac{e^{-iNx} - e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \qquad \text{lavennetaan luvulla } e^{-ix/2} \\
&= \frac{e^{-ix(N+1/2)} - e^{ix(N+1/2)}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\
&= \frac{\cos[(N+1/2)x] - i\sin[(N+1/2)x] - \cos[(N+1/2)x] - i\sin[(N+1/2)x]}{\cos(x/2) - i\sin(x/2) - \cos(x/2) - i\sin(x/2)} \\
&= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)},
\end{aligned}$$

kun $x \neq 0$. Tutkitaan vielä tilannetta, kun $x = 0$. Dirichlet'n ytimen määritelmän nojalla

$$D_N(0) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\cdot 0} = \sum_{n=-N}^{N} 1 = 2N + 1.$$

Tällöin saman täytyisi päteä myös väitteen yhtäsuuruudelle. Tutkitaan raja-arvoa l'Hospitalin säännön avulla ja saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(N+1/2)\cos((N+1/2)x)}{1/2\cos(x/2)} = 2N+1,$$

joten huomataan, että väite pätee myös, kun $x = 0$. Tällöin väite on todistettu. □

Lemma 3.3. *Funktion f Fourier-sarjan osasummalle pätee*

$$s_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt. \tag{3.7}$$

Lisäksi on täysin merkityksetöntä, minkä välin yli integrointi tehdään, kunhan välin pituus on täsmälleen 2π.

Todistus.

$$\begin{aligned}
s_N(f;x) &= \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\Big) e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,dt \qquad \text{merkitään } u = x-t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_N(u)\,du \qquad \text{merkitään } u = t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt
\end{aligned}$$

Lisäksi, koska tarkastellaan ainoastaan 2π-periodisia funktioita, niin ei ole väliä, minkä 2π-mittaisen välin yli integrointi tehdään. □

Seuraavaksi pohditaan Fourier-sarjojen suppenemisen mahdollisuuksia. Vuonna 1876 saksalainen matemaatikko Paul du Bois-Reymond esitti vastaesimerkin, josta ilmeni, että jatkuvien funktioiden Fourier-sarjat eivät välttämättä suppene missään. Tämän jälkeen matemaatikkojen yhteisö ymmärsi, että Fourier-sarjojen suppenemisen teoria on hyvin monimutkaista. [**4**, luku 19.]

Tässä tutkielmassa esitellään yksi tapa tutkia Fourier-sarjojen pisteittäistä suppenemista. Jotta todistaminen on mahdollista, täytyy funktiolle f asettaa voimakas ehto, jonka huomataan olevan suhteellisen lähellä derivoituvuutta. Todistetaan tämä väite Lauseessa 3.5. Ensin täytyy kuitenkin todistaa Riemann-Lebesguen lemma, jota hyödynnetään Fourier-sarjojen pisteittäisen suppenemisen todistamisessa.

Lemma 3.4. *Olkoon funktio f rajoitettu ja Riemann integroituva välillä $[a,b]$. Tällöin*

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0.$

TODISTUS. Aloitetaan todistamalla väitteen kohta (1). Oletetaan ensin, että f on vakio M. Tällöin

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\Big| &= |M|\Big|\int_a^b \sin(nx)\,dx\Big| \\ &= |M|\frac{|\cos(na)-\cos(nb)|}{n} \\ &\leq \Big|\frac{2M}{n}\Big| \to 0,\text{ kun } n\to\infty.\end{aligned}$$

Tällöin väite pätee, kun funktio f on vakio.

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, kun f ei ole vakiofunktio. Olkoon välin $[a,b]$ jako $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$. Määritellään luvut $U(f,P)$ ja $L(f,P)$ siten, että

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^k M_i(x_i-x_{i-1})$$

ja

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^k m_i(x_i-x_{i-1}),$$

missä M_i on funktion f arvojen supremum välillä $[x_i,x_{i-1}]$ ja vastaavasti m_i on arvojen infimum. Olkoon $\epsilon>0$. Tällöin Riemannin ehdon nojalla jako P voidaan valita siten, että

$$U(f,P)-L(f,P)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Olkoon m porrasfunktio, joka vastaa lukua m_i välillä $]x_{i-1},x_i]$. Valitaan luku N siten, että

$$\int_a^b m(x)\sin(nx)\,dx=\sum_{i=1}^k\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i\sin(nx)\,dx<\frac{\epsilon}{2},$$

jos $n\geq N$. Tämä on mahdollista, sillä m_i on vakio ja k on kiinnitetty ja äärellinen. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla kaikille $n\geq N$ pätee

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\Big| &\leq \Big|\int_a^b m(x)\sin(nx)\,dx\Big| + \Big|\int_a^b [f(x)-m(x)]\sin(nx)\,dx\Big| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\int_a^b |M(x)-m(x)|\,dx,\end{aligned}$$

missä M vastaa lukua M_i välillä $]x_{i-1},x_i]$. Koska $M(x)-m(x)\geq 0$ ja

$$\int_a^b M(x)-m(x)\,dx=U(f,P)-L(f,P)<\frac{\epsilon}{2},$$

niin tällöin

$$\Big|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\Big| < \epsilon,$$

kun $n > N$, ja näin väitteen kohta (1) on todistettu.

Vastaavaan tapaan voidaan todistaa, että $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0$. □

Nyt ollaan valmiita todistamaan lause, jonka mukaan Fourier-sarjat suppenevat pisteittäin tietyin oletuksin.

LAUSE 3.5. *Jos jollekin luvulle x on olemassa luvut $\delta > 0$ ja $M < \infty$ siten, että*

$$|f(x+t) - f(x)| \le M|t| \tag{3.8}$$

kaikille luvuille $t \in (-\delta, \delta)$, niin tällöin

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f;x) = f(x).$$

TODISTUS. Määritellään aluksi funktio g seuraavasti,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} & \text{kun } 0 < |t| \le \pi \\ 0 & \text{kun } t = 0. \end{cases}$$

Aikaisemman määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

Tällöin edellisen integraalin, funktion g määritelmän, kaavan (3.7) ja sinifunktion ominaisuuksien nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}s_N(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[g(t)\sin(t/2) + f(x)]\frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)}\,dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(N+\frac{1}{2})t\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{\sin(t/2)}\sin(N+\frac{1}{2})t\,dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)t\,dt + f(x)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt\Big) - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)t\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[g(t)\cos\frac{t}{2}\Big]\sin Nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[g(t)\sin\frac{t}{2}\Big]\cos Nt\,dt. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Nyt oletuksen (3.8) ja funktion g määritelmän nojalla voidaan kirjoittaa seuraavaa:

$$g(t)\cos\frac{t}{2} = 2\cdot\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t/2}{\sin(t/2)}\cdot\cos\frac{t}{2}.$$

Tämä funktio on rajoitettu, sillä $g(t)$ on oletuksen nojalla rajoitettu ja lisäksi tiedetään, että $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ja että kosinifunktio on aina rajoitettu. Sama päättely voidaan tehdä myös funktiolle $g(t)\sin\frac{t}{2}$. Tällöin Riemann-Lebesguen Lemman 3.4 nojalla yhtälön (3.9) integraalit lähestyvät nollaa, kun N lähestyy ääretöntä. Nyt alkuperäinen väite on todistettu. $\square$

SEURAUS 3.6. *Jos funktiolle f pätee $f(x) = 0$ kaikille luvuille x jossakin avoimessa osassa J, niin tällöin* $\lim_{N\to\infty} s_N(f;x) = 0$ *kaikilla $x \in J$.*

Luvussa 1 todistettiin, että on olemassa jatkuvia, ei-missään derivoituvia funktioita, Lause 1.25. Nämä funktiot ovat itseasiassa paljon "yleisempiä" kuin jatkuvat, derivoituvat funktiot. Siksi voidaan todeta, että Fourier-sarjojen suppenemisen todistaminen kaikille funktioille ei ole kovin yksinkertaista. Monista teoksista löytyy paljon eri lähestymistapoja Fourier-sarjojen suppenemisen tutkimiseen. Todistukset ovat pitkiä ja niistä voisi kirjoittaa oman tutkielmansa, joten aiheeseen ei ole mielekästä tässä tutkielmassa perehtyä enempää. Lisätietoa löytyy esimerkiksi lähteestä [**6**, luku 10].

Kuitenkin lähelle Fourier-sarjoja päästään ottamalla seuraavassa kappaleessa käyttöön Fourier-sarjoista johdettu Cesaron summa, jolle pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen todistaminen on yksinkertaisempaa. Täytyy kuitenkin painottaa, että Cesaron summalle todistettuja tuloksia ei voida laajentaa koskemaan Fourier-sarjoja.

3.2. Fejerin lause

Määritellään funktion f kertalukua N olevan Fourier-sarjan osasumman $s_N(f;x)$ avulla *Fourier-sarjojen Cesaron summa* $\sigma_N(f;x)$ seuraavasti

$$\sigma_N(f;x) = \frac{s_0(f;x)+s_1(f;x)+\cdots+s_N(f;x)}{N+1}. \tag{3.10}$$

Lisäksi määritellään Dirichlet'n ytimen avulla *Fejerin ydin* K_N siten, että

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x). \tag{3.11}$$

Fejerin ytimen avulla voidaan tämän kappaleen lopussa muotoilla Fejerin lause, jonka mukaan Fourier-sarjojen Cesaron summa $\sigma_N(f;x)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(x)$ suljetulla välillä $[-\pi,\pi]$, kunhan funktio f on jatkuva ja 2π-periodinen. Tämän lauseen muotoili unkarilainen matemaatikko Leopold Fejer. Ennen Fejerin lauseen todistamista huomataan, että Fejerin ytimet ovat ei-negatiivisia ja lisäksi $K_N \to 0$, kun $N\to\infty$, Lemma 3.7. Edellisessä kappaleessa määritetyllä Dirichlet'n ytimellä ei ole näitä ominaisuuksia, jonka vuoksi tämän kappaleen tulokset eivät ole yleistettävissä Fourier-sarjoille. Tämä seikka korostaa edelleen sitä, miksi Fourier-sarjojen suppenemisen teoria on haasteellista.

Todistetaan seuraavaksi Fejerin lauseen todistukseen tarvittavat aputulokset.

Lemma 3.7. *Olkoon Dirichlet'n ydin D_N määritelty kuten yhtälössä* (3.6) *ja Fejerin ydin K_N kaavan* (3.11) *mukainen. Tällöin Fejerin ydin voi saada muodon*

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1-\cos((N+1)x)}{1-\cos x}$$

ja lisäksi

(1) $K_N(x) \geq 0$

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1$

(3) $K_N(x) \leq \frac{1}{N+1}\frac{2}{1-\cos\delta}$ *jos* $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$

Todistus. Käyttämällä yhtälöä

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\Big(\frac{1}{2}\theta\Big) \tag{3.12}$$

ja Dirichlet'n ytimen määritelmää $D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}$, huomataan, että $K_N(x)$ kerrottuna puolittain yhtälöllä (3.12) saadaan seuraavaa:

$$(1-\cos x)K_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2\sin\frac{1}{2}x\sin(n+\frac{1}{2})x.$$

Lisäksi tiedetään trigonometristen funktioiden ominaisuuksista, että

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big),$$

jolloin äskeistä yhtälöä voidaan muokata sopivasti ja saadaan

$$\begin{aligned}
(1-\cos x)K_N(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2\frac{1}{2}\Big(\cos\big((n+\frac{1}{2})x - \frac{1}{2}x\big) - \cos\big((n+\frac{1}{2})x + \frac{1}{2}x\big)\Big)\\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} \cos(nx) - \cos(n+1)x\\
&= \frac{1}{N+1}\big(\cos 0 - \cos x + \cos x - \cos(2x) + \dots\\
&\quad + \cos(Nx) - \cos(N+1)x\big)\\
&= \frac{1}{N+1}\big(1 - \cos(N+1)x\big).
\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä, että $K_N(x)$ on hyvin määritelty myös pisteessä $x = 0$. Fejerin ytimen määritelmän (3.11) ja Lemman 3.2 nojalla saadaan

$$K_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2N+1) = \frac{1}{N+1}(1+3+\dots+(2N+1)) = N+1,$$

sillä induktiolla voidaan todistaa, että $(1 + 3 + \dots + (2N + 1)) = (N + 1)^2$. Tällöin vastaavasti kuin Lemman 3.2 todistuksessa, täytyy tutkia raja-arvon käyttäytymistä nollassa. Käytetään l'Hospitalin sääntöä kahdesti ja huomataan, että

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1-\cos((N+1)x)}{1-\cos x}=N+1,$$

joten väite on hyvin määritelty.

Todistetaan seuraavaksi kohdat (1), (2) ja (3).

(1) Funktion K_N positiivisuus seuraa suoraan edellä todistetusta kaavasta, kun lisäksi muistetaan, että $\cos x\in[-1,1]$.

(2) Lauseen 3.5 todistuksessa näytetään, että $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)\,dx=1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(x)\,dx&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(x)\,dx\\&=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)\,dx\\&=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}1=1,\end{aligned}$$

eli väite on todistettu.

(3) Koska edelleen tiedetään, että kosinifunktion arvojoukko on välillä $[-1,1]$ ja että se on vähenevä välillä $x\in[0,\pi]$, niin tällöin

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}\le\frac{1}{N+1}\frac{2}{1-\cos\delta},$$

kunhan $0<\delta\le|x|\le\pi$. □

Huomautus 3.8. Yhtälön (3.12) nojalla huomataan, että edellisessä todistuksessa saatu lauseke funktiolle K_N voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\Big(\frac{\sin\big(\frac{N+1}{2}x\big)}{\sin\frac{1}{2}x}\Big)^2.$$

Lemma 3.9. *Fourier-sarjojen Cesaron summalle, yhtälö* (3.10), *on voimassa*

$$\sigma_N(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_N(t)\,dt.$$

Todistus. Muistetaan aikaisemmista tiedoista, että

$$s_N(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt.$$

Hyödyntämällä tätä tietoa sekä Lemman 3.7 ensimmäistä tulosta, saadaan

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f;x) &= \frac{s_0(f;x)+s_1(f;x)+\cdots+s_N(f;x)}{N+1} \\
&= \frac{1}{N+1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_0(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_1(t)\,dt + \dots \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\,dt\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt,
\end{aligned}$$

jolloin väite on todistettu. □

Nyt voidaan muotoilla ja todistaa Fejerin lause.

LAUSE 3.10. (Fejerin lause). *Jos funktio f on jatkuva ja 2π-periodinen, niin tällöin $\sigma_N(f;x) \to f(x)$ tasaisesti välillä $[-\pi,\pi]$.*

TODISTUS. Täytyy siis todistaa, että $|\sigma_N(f;x) - f(x)| < \epsilon$. Käytetään todistuksessa apuna Lemmasta 3.7 saatuja tuloksia.

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktio f on tasaisesti jatkuva, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

kaikilla $|t| < \delta$ ja $x \in [-\pi,\pi]$.

Nyt erotus voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
|\sigma_N(f;x) - f(x)| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt - f(x)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]K_N(t)\,dt\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_N(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)|K_N(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|K_N(t)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_N(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Käyttämällä vastaavaa päättelyketjua kuin Lauseen 2.1 todistuksen loppuosassa, saadaan näytettyä, että erotus on hyvin pientä. Funktion f jatkuvuuden nojalla huomataan, että

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|K_N(t)\,dt \leq \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_N(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Lisäksi merkitään $M = \sup|f(x)|$ kaikilla luvuilla $x \in [-\pi, \pi]$. Nyt Lemman 3.7 kohdan (3) nojalla huomataan, että

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t)\, dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_N(t)\, dt\Big) \\ &\leq 2M \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1-\cos\delta} \cdot \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{-\delta} dt + \int_{\delta}^{\pi} dt\Big) \\ &= 2M \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1-\cos\delta} \cdot \frac{1}{\pi}(\pi - \delta) \end{aligned}$$

Tällöin jokaisella $x \in [-\pi, \pi]$ on voimassa

$$|\sigma_N(f;x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 < \epsilon,$$

kunhan N on tarpeeksi suuri. Näin väite on todistettu. $\square$

Todistetaan lisäksi pisteittäinen versio edellisestä Fejerin lauseesta. Tämän lauseen mukaan Cesaron summa $\sigma_N(f;x)$ suppenee pisteittäin, vaikka funktiolla f olisi epäjatkuvuuskohta.

LAUSE 3.11. *Jos funktio f on 2π-periodinen ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sekä $\lim_{t \to x^+} f(t) = f(x+)$ että $\lim_{t \to x^-} f(t) = f(x-)$ ovat olemassa jollakin luvulla x, niin tällöin*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f;x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

TODISTUS. Tutkitaan erotuksen itseisarvoa hieman vastaavaan tapaan kuin Lauseen 3.10 todistuksessa. Koska $K_N(t)$ on parillinen ja $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\, dt = 1$, niin tällöin $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_N(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_N(t)\, dt = \frac{1}{2}$. Tällöin erotus saadaan muotoon

$$\begin{aligned} &\Big|\sigma_N(f;x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]\Big| \\ &\quad = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\, dt - f(x+)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_N(t)\, dt - f(x-)\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_N(t)\, dt\Big| \\ &\quad = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x-t) - f(x+))K_N(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x-t) - f(x-))K_N(t)\, dt\Big| \\ &\quad \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x-t) - f(x+)|K_N(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x-t) - f(x-)|K_N(t)\, dt. \end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt, koska funktiolla f on olemassa toispuoleiset raja-arvot, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x-t) - f(x+)| < \frac{\epsilon}{2},$$

kun $-\delta < t < 0$ ja

$$|f(x-t) - f(x-)| < \frac{\epsilon}{2},$$

kun $0 < t < \delta$ ja $x \in [-\pi, \pi]$. Olkoon lisäksi $M = \sup |f(x)|$. Hajotetaan edellä muodostetut integraalit ja arvioidaan niitä Lemman 3.7 kohdan (3) nojalla ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x-t) - f(x+)| K_N(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x-t) - f(x-)| K_N(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta} \cdots \\
&\leq 2M \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1-\cos\delta} \cdot \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{-\delta} dt + \int_{\delta}^{\pi} dt\Big) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

kunhan N on tarpeeksi suuri. Tällöin pisteittäinen versio Fejerin lauseesta on todistettu. □

Verrataan äskeistä Lausetta 3.11 luvun alkupuoliskolla esiteltyyn Esimerkkiin 3.1. Esimerkissä näyttäisi käyvän juuri edellä todistetun lauseen mukaisesti, eli epäjatkuvuuskohdassa sarja suppenee kohti toispuoleisten raja-arvojen keskiarvoa.

Huomataan, että tasainen ja pisteittäinen suppeneminen Fourier-sarjoista johdetulle Cesaron summalle toimivat hyvin. Koska Fejerin ytimellä on sellaisia ominaisuuksia, kuten $K_N(x) \geq 0$, joita Dirichlet'n ytimellä ei ole, ei näitä suppenemistuloksia voida yleistää suoraan Fourier-sarjoille. Halutessaan lukija voi jatkaa aiheen käsittelyä pohtimalla lisää Fourier-sarjojen suppenemisen mahdollisuuksia hyödyntäen esimerkiksi lähdeteoksia [**6**, luku 10] tai [**7**].

Kirjallisuutta

[1] Kari Astala, Petteri Piiroinen: *Funktionaalianalyysin peruskurssi - Luennot: luku 5*, Helsingin yliopisto, luentomoniste 2006.
mathstat.helsinki.fi/kurssit/FApk/luennot/fa_s73-95.pdf (luettu 8.4.2015)

[2] Richard Courant, Fritz John: *Introduction to Calculus and Analysis 1*, Springer-Verlag New York, Inc. 1989.

[3] Tero Kilpeläinen: *Analyysi 3: Luentomuistiinpanoja syksyltä 2005.* Jyväskylän yliopisto, luentomoniste 2005.
http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA113.pdf (luettu 8.4.2015)

[4] T. W. Körner: *Fourier Analysis*, ensimmäinen painos, Cambridge University Press, 1988.

[5] Serge Lang: *Real and Functional Analysis*, kolmas painos, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.

[6] Jerrold E. Marsden: *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, 1974.

[7] Allan Pinkus: *Density in Approximation Theory.* Surveys in Approximation Theory, 2005

[8] Allan Pinkus: *Weierstrass and Approximation Theory*, Journal of Approximation Theory 107, 2000.

[9] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* kolmas laitos, McGraw-Hill Inc., 1976.

[10] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, Andrew M. Brucner: *Real Analysis*, toinen painos, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.
http://classicalrealanalysis.info/documents/TBB-AllChapters-Landscape.pdf
(luettu 8.4.2015)