

Lämpöyhtälön ja Laplacen yhtälön ratkaisun ominaisuuksia

Tiina Pakarinen

Matematiikan Pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015

TIIVISTELMÄ

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua kahteen tärkeään osittaisdifferentiaaliyhtälöön; Laplacen yhtälöön ja lämpöyhtälöön. Näitä molempia hyödynnetään fysiikan lisäksi useiden muidenkin tieteenalojen sovelluksissa.

Lämpöyhtälö, joka tunnetaan myös diffuusioyhtälönä, kuvaa jonkin suureen esimerkiksi lämmön johtumista aineissa ajan kuluessa. Pitkän ajan kuluttua tilanne taspainottuu, jolloin lämmön määrä pysyy ajan suhteen vakiona tarkasteltavan alueen joka pisteessä. Tällaista täysin stabiloitunutta tilannetta voidaan mallintaa Laplacen yhtälöllä. Laplacen yhtälön toteuttavia funktioita kutsutaan harmonisiksi funktioiksi. Tutkielmassa johdetaan perusratkaisu ja keskiarvoperiaate molemmille osittaisdifferentiaaliyhtälöille, sekä tutustutaan yhtälöiden fysikaalisiin tulkintoihin.

Tutkielman motivaationa on oppia diskretisoimaan yksiulotteinen osittaisdifferentiaaliyhtälö sekä rakentamaan sen perusteella numeerinen ratkaisija lämpöyhtälölle Matlab-ohjelmaa hyödyntämällä. Diskretointien ja keskiarvoperiaatteiden välillä havaitaan yhteys.

SISÄLTÖ

Tiivistelmä	1
Johdanto	3
1. Peruskäsitteitä	4
1.1. Jatkuvuus, derivaatta, gradientti	4
1.2. Divergenssin määritelmä ja Gaussin divergenssilause	7
2. Differentiaali- ja osittaisdifferentiaaliyhtälö	8
3. Elliptisiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä	9
3.1. Laplacen operaattori ja esimerkkejä	9
3.2. Laplacen yhtälö	9
Fysikaalinen tulkinta Laplacen yhtälölle	11
Laplacen yhtälön perusratkaisu	12
Laplacen yhtälön historia	14
3.3. Poissonin yhtälö	15
4. Lämpöyhtälö	16
4.1. Lämpöyhtälön fysikaalinen tulkinta	16
4.2. Lämpöyhtälön perusratkaisu	16
4.3. Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma	18
4.4. Keskiarvoperiaate lämpöyhtälölle	20
5. Numeerinen ratkaisija	23
5.1. Poissonin yhtälön diskretointi	23
5.2. Poissonin yhtälön numeerinen ratkaisija	24
5.3. Lämpöyhtälön diskretointi	25
5.4. Lämpöyhtälön numeerinen ratkaisija	26
Kirjallisuus	30

JOHDANTO

Tämä tutkielma käsittelee kahta tärkeää osittaisdifferentiaaliyhtälöä; Laplacen yhtälöä ja lämpöyhtälöä. Lämpöyhtälö, joka tunnetaan myös diffuusioyhtälönä, kuvaa jonkin suureen esimerkiksi lämmön johtumista aineissa ajan kuluessa. Pitkän ajan kulluttua tilanne tasapainottuu, jolloin lämmön määrä pysyy ajan suhteen vakiona tarkasteltavan alueen joka pisteessä. Tällaista täysin stabiloitunutta tilannetta voidaan mallintaa Laplacen yhtälöllä. Molempia yhtälöitä on hyvin laajalti käytetty fysiikan, biologian, geologian ja yhteiskuntatieteiden sovelluksissa.

Tämän tutkielman alussa määritellään Laplacen yhtälö, jonka toteuttavia funktioita sanotaan harmonisiksi funktioiksi. Lisäksi todistetaan keskiarvoperiaate Laplacen yhtälölle, jonka mukaan harmonisen funktion arvo jokaisen määrittelyalueeseen sisältyvän kiekon keskipisteessä on sama kuin funktion keskiarvo kiekon reunaympyrän yli. Lisäksi esitetään fysikaalinen tulkinta Laplacen yhtälölle ja määritellään monien käytännön sovellusten kannalta tärkeä Dirichlet'n ongelma.

Tutkielman lopussa määritellään lämpöyhtälö, tutustutaan sen fysikaaliseen tulkintaan ja johdetaan sille perusratkaisu. Lisäksi johdetaan lämpöyhtälölle vastaava keskiarvoperiaate, minkä johdimme aiemmin Laplacen yhtälölle. Viimeisessä kappaleessa diskretisoidaan yksiulotteinen osittaisdifferentiaaliyhtälö ja muodostetaan sen avulla numeerinen ratkaisija epähomogeeniselle Laplacen yhtälölle sekä lämpöyhtälölle. Kaikki tämän tutkielman teoriaosioissa käsiteltävät ratkaisut ovat sileitä.

Tutkielman motivaationa on oppia diskretisoimaan yksiulotteinen osittaisdifferentiaaliyhtälö sekä rakentamaan sen perusteella numeerinen ratkaisija lämpöyhtälölle Matlab-ohjelmaa hyödyntämällä. Diskretointien ja keskiarvoperiaatteiden välillä havaitaan yhteys. Jos tutkielmaa laajennettaisiin, niin luontevaa olisi seuraavana tehdä suppenemistarkasteluja ja tutkia heikkoa teoriaa.

Molempien tutkielmassa esiintyvien yhtälöiden historia ulottuu 1700-1800 luvun taitteeseen. Laplacen yhtälö on nimetty ranskalaisen matemaatikon Pierre Simon Laplacen mukaan, jonka taivaanmekaniikan tarkastelut synnyttivät Laplacen yhtälön. Lämpöyhtälön historia ulottuu 1800-luvun alkupuoliskolle. Joseph Fourier kuvasi vuonna 1807 teoksessaan *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides* lämpövirtausta osittaisdifferentiaaliyhtälöiden avulla. Ranskan Tieteiden Akatemia, johon kuuluivat kriitikkoina matemaatikot Joseph Lagrange ja Pierre Simon Laplace kyseenalaistivat Fourierin ratkaisut lämpöyhtälölle, eikä niitä silloin hyväksytty. Myöhemmin Fourier ja Laplace julkaisivat lämpöyhtälön omissa teoksissaan. Fourierin tulkinta lämpöyhtälöstä oli fysikaalinen ja Laplace käsitteli lämpöyhtälöä enemmänkin matemaattisen abstraktisti. [4] [9] [10]

1. PERUSKÄSITTEITÄ

Tässä luvussa käydään läpi tutkielman kannalta tärkeimpiä perusmääritelmiä. Läpi työn oletetaan, että kaikki teoriaosiossa tarkasteltavat funktiot ovat sileitä, skalaariarvoisia funktioita. Luvussa käsitellyt asiat on koottu suurimmaksi osaksi Jyväskylän yliopistossa luennoituilta Analyysi 1- ja Differentiaali- ja integraalilaskennan kursseilta. [8] [7]

1.1. Jatkuvuus, derivaatta, gradientti.

Määritelmä 1.1. (Jatkuvuus) Olkoot $I \subset \mathbf{R}$ väli ja $x_0 \in I$ ja $f : I \rightarrow \mathbf{R}$. Funktio f on *jatkuva* pisteessä x_0 , jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.

Määritelmä 1.2. (Derivaatta) Olkoot $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ ja $x \in]a, b[$. Funktio f on *derivoituva* pisteessä x , jos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Ko. raja-arvoa kutsutaan f :n *derivaataksi* pisteessä x ja merkitään $f'(x)$.

Huomautus 1.3. Derivaattaa $f'(x)$ voidaan merkitä myös $Df(x)$.

Määritelmä 1.4. (Osittaisderivaatta) Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ ja $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ funktio. Funktion f *osittaisderivaatta* i :n muuttujan x_i suhteen pisteessä x on

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Osittaisderivaatta $\partial_i f(x)$ saadaan siis derivoimalla lauseke

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

muuttujan x_i suhteen pitäen muita muuttujia x_j , $j \neq i$ vakiona.

Määritelmä 1.5. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko ja $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ funktio. Olkoon funktiolla $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ pisteen $x \in G$ avoimessa ympäristössä $U \subset G$ osittaisderivaatta $\partial_i f$. Jos funktiolla

$$g_i := \partial_i f : U \rightarrow \mathbf{R} : y \mapsto \partial_i f(y)$$

on pisteessä x osittaisderivaatta $\partial_j g_i(x)$, niin sitä kutsutaan *funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaataksi* pisteessä x ja merkitään

$$\partial_j g_i(x) = \partial_j (\partial_i f)(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

Määritelmä 1.6. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko. Lineaarikuvausta $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ sanotaan vektorifunktion $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ *derivaataksi* pisteessä $x \in G$, jos kaikille $u \in \mathbf{R}^n$, joille $x + u \in G$ on voimassa esitys

$$f(x+u) = f(x) + L(u) + |u| \epsilon(u) \quad \text{missä} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = 0.$$

Tällöin merkitään $Df(x) := L$.

Määritelmä 1.7. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko. Kuvaus $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on

- (i) *differentioituva* pisteessä x , jos sillä on tässä pisteessä derivaatta $Df(x)$,

(ii) *differentioituva* joukossa $F \subset \mathbf{G}$, jos sillä on derivaatta jokaisessa pisteessä $x \in F$,

(ii) *differentioituva*, jos se on differentioituva koko määrittelyjoukossa G .

Seuraavana määritellään gradientti, joka kelpaa differentiaaliksi, kun funktio on differentioituva.

Määritelmä 1.8. (Gradientti) Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$. Olkoon $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ derivoituva pisteessä x . Funktion f *gradientti* $\nabla f = \text{grad } f$ on vektori

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} e_n,$$

missä e_j on yksikkövektori origosta j :n koordinaattiakselin suuntaan.

Esimerkki 1.9. Määritetään funktion $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ gradientti. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\partial_2 f(x) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\partial_3 f(x) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

saadaan

$$\nabla f(x) = \left(\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, \frac{x_3}{|x|} \right).$$

Esimerkki 1.10. Määritetään funktion $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{|x|} = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ gradientti. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x) = \frac{x_1 e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\partial_2 f(x) = \frac{x_2 e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\partial_3 f(x) = \frac{x_3 e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

saadaan

$$\nabla f(x) = \left(\frac{x_1 e^{|x|}}{|x|}, \frac{x_2 e^{|x|}}{|x|}, \frac{x_3 e^{|x|}}{|x|} \right).$$

Voidaan osoittaa, että funktio on jatkuvasti differentioituva jos ja vain jos sen osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tätä tietoa hyödyntämällä saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.11. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$. Kuvaus $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on *jatkuvasti differentioituva* (pisteessä $x_0 \in G$), jos kuvaus

$$\nabla f : G \subset \mathbf{R}^n : x \mapsto \nabla f(x)$$

on jatkuva (pisteessä $x_0 \in G$).

Määritelmä 1.12. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko. Jos funktio $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on *jatkuva*, niin tällöin sanotaan, että f on C^0 -*funktio* tai C -*funktio*.

Määritelmä 1.13. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko. Funktio $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on *1 kertaa jatkuvasti derivoituva*, jos sen kaikki osittaisderivaatat ovat joukossa G olemassa ja jatkuvia. Tällöin sanotaan, että f on C^1 -*funktio*.

Määritelmä 1.14. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko. Funktio $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on *2 kertaa jatkuvasti derivoituva*, jos sen kaikki osittaisderivaatat kertalukuun 2 ovat joukossa G olemassa ja jatkuvia. Tällöin sanotaan, että f on C^2 -*funktio*.

Määritelmä 1.15. Olkoon $G \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $k \in \mathbf{N}$. Funktio $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ on *k kertaa jatkuvasti derivoituva*, jos sen kaikki osittaisderivaatat kertalukuun k asti ovat joukossa G olemassa ja jatkuvia. Tällöin sanotaan, että f on C^k -*funktio*. Jos f on C^k -funktio kaikille $k \in \mathbf{N}$, sitä sanotaan C^∞ -*funktioksi*.

Esimerkki 1.16. Tutkitaan funktiota $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$. Itseisarvo $f(x)$ on jatkuva \mathbf{R} :ssa. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Valitaan $\delta = \epsilon$, jolloin saamme

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

mikäli $|x - x_0| < \delta$.

Itseisarvofunktion derivaattafunktio

$$f'(x) = y = \begin{cases} 1 & \text{jos } x > 0 \\ -1 & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä $x_0 = 0$. $f(x)$ on siis C^0 -funktio.

Määritelmä 1.17. Olkoon $x \in \mathbf{R}^n$ ja $r > 0$. Joukkoa

$$B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < r\}$$

kutsutaan \mathbf{R}^n :n x -keskiseksi ja r -säteiseksi *avoimeksi palloksi*. Joukko $B(0, 1)$ on avoin yksikköpallo.

Määritelmä 1.18. Olkoon $S \subset \mathbf{R}^n$ joukko. Joukon S reuna ∂S on joukko

$$\partial S = \{x \in \mathbf{R}^n : \forall r > 0 (B(x, r) \cap S \neq \emptyset \wedge B(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus S) \neq \emptyset)\},$$

missä merkintä \wedge tarkoittaa konnektiivia *ja*.

1.2. Divergenssin määritelmä ja Gaussin divergenssilause.

Määritelmä 1.19. (Divergenssi) Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Vektorifunktion $F = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ *divergenssi* on reaaliarvoinen funktio

$$\nabla \cdot F = \operatorname{div} F = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \dots + \partial_n f_n.$$

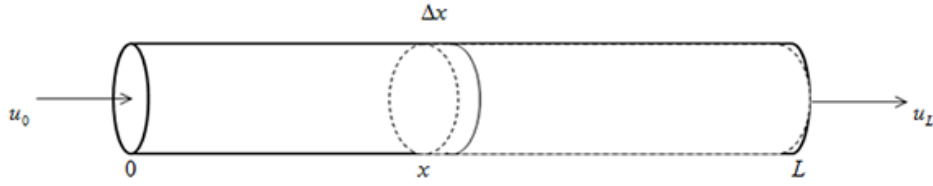
Lause 1.20. (*Gaussin divergenssilause*) Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Olkoon $V \subset \Omega$ rajoitettu, sileäreunainen alue ja $F : V \rightarrow \mathbf{R}$. Tällöin

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS.$$

Esimerkki 1.21. Yksiulotteisessa tapauksessa divergenssi vastaa normaalia integraalin sijoitusta, kuten seuraava esimerkki näyttää:

Olkoon $\Omega = (0, 1)$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$.

$$\int_0^1 F' dx = \int_{\Omega} F' dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds = -1 \cdot F(0) + (+1)F(1) = -F(0) + F(1).$$



KUVA 1. Esimerkin 2.2 sivuilta eristetty tanko

2. DIFFERENTIAALI- JA OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Määritelmä 2.1. Tavallinen n :n kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

missä $y : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ on n kertaa jatkuvasti derivoituva.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöissä esiintyy usean muuttujan tuntemattomia funktioita, niiden osittaisderivaattoja ($u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, \dots):

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x, u(t, x))$$

$$u_{tt}(t, x, y) = u_{xx}(t, x, y) + u_{xyy}(t, x, y).$$

Yhtälössä esiintyvää derivaatan korkeinta kertalukua sanotaan yhtälön kertaluvuksi. Yllä olevista yhtälöistä ensimmäinen on toista ja jälkimmäinen kolmatta kertalukua.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan lämpötilan muuttumista ajankuluessa ohuessa tangossa. Tanko on ympäriltä eristetty, jolloin lämpöä siirtyy vain tangon päistä.

Tangon alkupään ($x = 0$) lämpötila on u_0 ja loppupään ($x = L$) lämpötila u_L . Tankoa lämmitetään niin, että ajanhetkellä t lämpöenergiaa tuotetaan $f(x, t)$ yksikköä aika- ja tilavuusyksikköä kohden.

Merkitään tangon poikkileikkauksen pinta-alaa A :lla ja lämpöenergiatiheyttä $e(x, t)$:llä, jolloin lämpöenergia välillä $[x, x + \Delta x]$ on $e(x, t) \cdot A\Delta x$. Merkitään tangon suuntaista (vasemmalta oikealle) lämpöenergiavirtausta pisteessä x ajanhetkellä t , $q(x, t)$:llä, jolloin kohdassa x virtaavan lämpömäärän suuruus aikayksikössä poikkileikkauksen A läpi on $A \cdot q(x, t)$. Tällöin kohdassa $x + \Delta x$ virtaavan lämpömäärän suuruus on $A \cdot q(x + \Delta x, t)$. Nyt välillä $[x, \Delta x]$ energian muutosnopeus on

$$\frac{d}{dt}e(x, t)A\Delta x = A\Delta x f(x, t) + Aq(x, t) - Aq(x + \Delta x, t),$$

josta

$$e_t(x, t) = f(x, t) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x + \Delta x, t) - q(x, t)}{\Delta x} = f(x, t) - q_x(x, t).$$

Koska lämpövirtaus on verrannollinen lämpötilan u derivaattaan, fysikaalisten havaintojen perusteella saadaan:

$$q(x, t) = -k(x)u_x(x, t),$$

missä k on lämmönjohtavuus. Lisäksi lämpöenergiatiheyden $e(x, t)$ ja lämpötilan u välillä vallitsee yhteys $e(x, t) = c(x)u(x, t)$, missä c on aineen ominaislämpö. Näin ollen lämpötilalle saadaan yhtälö

$$\begin{cases} c(x)u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(k(x)u_x(x, t)) + f(x, t), & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u_0 \\ u(L, t) = u_L \end{cases}$$

Tätä kutsutaan yksidimensioiseksi lämpöyhtälöksi. Kun c ja k ovat vakioita, differentiaaliyhtälö saa muodon $u_t = au_{xx} + g$, missä $a = \frac{k}{c}$ ja $g(x, t) = \frac{1}{c}f(x, t)$. (Ks. [2, s.13-14]). Lämpöyhtälöön palaamme tarkemmin myöhemmin.

3. ELLIPTISIÄ OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖITÄ

Tässä luvussa tutustutaan elliptisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Ensin määritellään Laplacen operaattori ja tutustutaan siihen esimerkin avulla. Tämän jälkeen määritellään Laplacen yhtälö, jonka avulla voidaan määrittellä harmoniset funktiot. Seuraavaksi tutustutaan Laplacen yhtälön fysikaaliseen tulkintaan ja johdetaan Laplacen yhtälön perusratkaisu sekä tutustutaan harmonisten funktioiden ominaisuuksiin, kuten keskiarvoperiaatteeseen. Luvun lopussa määritellään vielä Poissonin yhtälö, joka on Laplacen yhtälöön liittyvä epähomogeeninen osittaisdifferentiaaliyhtälö. Tässä luvussa käsitellyt asiat perustuvat Lawrence C. Evansin teokseen *Partial Differential Equations* [1]

3.1. Laplacen operaattori ja esimerkkejä. Tässä kappaleessa määritetään Laplacen operaattori ja tutustutaan sen käyttöön neljän esimerkin avulla.

Määritelmä 3.1. (Laplacen operaattori) C^2 -skalaarifunktion f Laplacen operaattori Δf on gradientin divergenssi, eli

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \vdots \\ \partial_n f_n \end{pmatrix} = \partial_{11} f + \partial_{22} f + \cdots + \partial_{nn} f.$$

Esimerkki 3.2. Lasketaan u , kun

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Koska $\Delta u = 0$, niin integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int u_{xx} dx &= \int 0 dx = c = u_x \\ \int u_x dx &= \int c dx = cx + b = u, \end{aligned}$$

missä b, c ovat vakioita. Alkuehdoista $u(0) = 0$ ja $u(1) = 1$ saadaan vakiot b, c määritetyksi

$$\begin{aligned} u(0) &= c \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ u(1) &= c \cdot 1 + b = 1 \Rightarrow c = 1, \end{aligned}$$

jolloin $u = x$.

3.2. Laplacen yhtälö. Tässä kappaleessa määritellään Laplacen yhtälö ja sen avulla harmoniset funktiot. Sen jälkeen tutustutaan Laplacen yhtälön fysikaaliseen tulkintaan ja johdetaan Laplacen yhtälölle perusratkaisu. Kappaleen lopussa tutustutaan harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteeseen.

Määritelmä 3.3. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin joukko ja $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ C^2 -funktio. Yhtälöä, jossa

$$\Delta u = 0$$

kutsutaan *Laplacen yhtälöksi*.

Määritelmä 3.4. Laplacen yhtälöä toteuttavia funktioita kutsutaan *harmonisiksi funktioiksi*.

Esimerkki 3.5. Näytetään, että funktio $f(x_1, x_2) = -\log|x|$ on harmoninen, kun $x \neq 0$. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{|x|^2}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{|x|^2}$$

$$\partial_{11} f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 - |x|^2}{|x|^4}$$

$$\partial_{22} f(x_1, x_2) = \frac{2x_2^2 - |x|^2}{|x|^4}$$

nähdään, että funktio f toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\begin{aligned} \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \partial_{11} f + \partial_{22} f \\ &= \frac{2x_1^2 - |x|^2}{|x|^4} + \frac{2x_2^2 - |x|^2}{|x|^4} \\ &= \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 - |x|^2 - |x|^2}{|x|^4} \\ &= \frac{2|x|^2 - 2|x|^2}{|x|^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.6. Näytetään, että funktio $f(x_1, x_2, x_3) = |x|^{-1}$ on harmoninen, kun $x \neq 0$. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1}{|x||x|^2}$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_2}{|x||x|^2}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_3}{|x||x|^2}$$

$$\partial_{11} f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3x_1^2 - |x|^2}{|x||x|^4}$$

$$\partial_{22} f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3x_2^2 - |x|^2}{|x||x|^4}$$

$$\partial_{33} f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3x_3^2 - |x|^2}{|x||x|^4}$$

nähdään, että funktio f toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\begin{aligned}
 \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \partial_{11}f + \partial_{22} + \partial_{33}f \\
 &= \frac{3x_1^2 - |x|^2}{|x| |x|^4} + \frac{3x_2^2 - |x|^2}{|x| |x|^4} + \frac{3x_3^2 - |x|^2}{|x| |x|^4} \\
 &= \frac{3x_1^2 - |x|^2 + 3x_2^2 - |x|^2 + 3x_3^2 - |x|^2}{|x| |x|^4} \\
 &= \frac{3|x|^2 - 3|x|^2}{|x| |x|^4} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 3.7. Tutkitaan vielä n -ulotteista funktiota $f(x_1, \dots, x_n) = |x|^{2-n}$, ja näytetään, että se on harmoninen. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\begin{aligned}
 \partial_1 f(x_1, \dots, x_n) &= (2-n) |x|^{-n} \cdot x_1 \\
 &\vdots \\
 \partial_n f(x_1, \dots, x_n) &= (2-n) |x|^{-n} \cdot x_n \\
 \partial_{11} f(x_1, \dots, x_n) &= (2-n) \left[(-n) \frac{x_1^2}{|x|^{2+n}} + \frac{1}{|x|^n} \right] \\
 &\vdots \\
 \partial_{nn} f(x_1, \dots, x_n) &= (2-n) \left[(-n) \frac{x_n^2}{|x|^{2+n}} + \frac{1}{|x|^n} \right]
 \end{aligned}$$

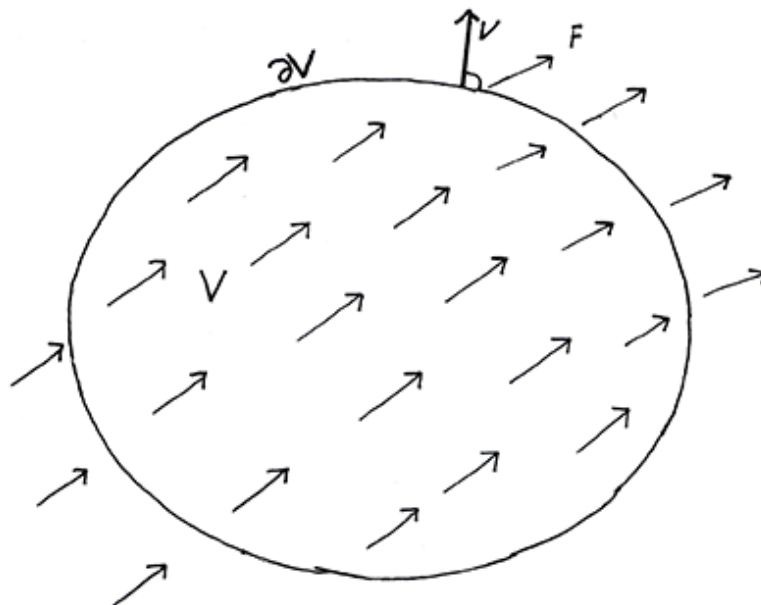
nähdään, että funktio f toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\begin{aligned}
 \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \partial_{11}f + \dots + \partial_{nn}f \\
 &= (2-n) \left[(-n) \frac{|x|^2}{|x|^{2+n} + \frac{n}{|x|^n}} \right] \\
 &= (2-n) \left[\frac{-n}{|x|^n} + \frac{n}{|x|^n} \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Fysikaalinen tulkinta Laplacen yhtälölle. Laplacen yhtälö esiintyy monissa fyysisen sovelluksissa, esimerkiksi:

- Newtonin gravitaatioteoriassa
- sähköstaatikassa
- lämpövirtauksessa
- kemiallisissa konsentraatioissa
- Riemannin geometriassa

Tyypillisesti Laplacen yhtälössä funktio u on jonkin suureen (esim. konsentraatio, lämpövirtaus) suuruus tasapainotilassa, jossa u siis pysyy ajan suhteen vakiona alueen U joka pisteessä.



KUVA 2. Laplacen yhtälön fysikaalisen tulkinnan oletuksen sisältö.

Tällöin minkä tahansa sileän osa-alueen $V \subset U$ reunan läpi tapahtuva nettovirtaus on nolla, eli esimerkiksi kemikaalia tulee ja lähtee alueesta yhtä paljon. Tällöin

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0,$$

missä F kuvaa virtauksen suuruutta ja ν ulospäin suunnattua normaalivektorikenttää.

Gaussin divergenssilauseen 1.20 mukaan

$$\int_V \operatorname{div} F dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0.$$

Koska V oli mielivaltainen ja sileä, tästä seuraa koko U :ssa, että

$$\operatorname{div} F = 0.$$

Usein on fysikaalisesti järkevää olettaa virtauksen F suuruuden olevan verrannollinen alkuperäisen suureen u gradienttiin, tosin vastakkaiseen suuntaan, koska virtaus tapahtuu korkeammasta konsentraatiosta kohti alhaisempaa konsentraatiota. Näin ollen

$$F = -a \nabla u \quad (a > 0).$$

Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saamme Laplacen yhtälön

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0.$$

Laplacen yhtälön perusratkaisu. Koska Laplacen yhtälö pysyy muuttumattomana kierrossa, etsitään alkuun radiaalista ratkaisua eli $r = |x|$.

Yritetään siis etsiä Laplacen yhtälölle ratkaisua u , kun $U = \mathbf{R}^n$, joka on muotoa

$$u(x) = v(r),$$

missä $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ ja v on valittu niin, että $\Delta u = 0$. Olkoon $i = 1, \dots, n$ siten, että

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}, \quad (x \neq 0).$$

Näin ollen

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

jokaiselle $i = 1, \dots, n$, ja

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Joten $\Delta u = 0$ täsmälleen silloin, kun

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Jos $v' \neq 0$, saadaan

$$\log(v')' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

ja siten $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ jollakin vakiolla a . Täten, jos $r > 0$, saadaan

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & \text{kun } n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{kun } n \geq 3, \end{cases}$$

missä b ja c ovat vakioita.

Määritelmä 3.8. Funktioita

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)} \log |x| & x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0, n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0, n \geq 3, \end{cases}$$

missä $\alpha(n)$ on yksikköpallon tilavuus \mathbf{R}^n :ssä, kutsutaan Laplacen yhtälön perusratkaisuksi.

Lemma 3.9. *Olkkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ja $u \in C^2(\Omega)$ funktio. Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto antaa*

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} dS(z)$$

jokaiselle pallolle $B(x,r) \subset \Omega$.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan funktion $\int x - r^{x+r} u(y) dy$ integraalia ensimmäisessä dimensiassa muuttujanvaihdon $y = x + rz$ avulla:

$$z = \frac{y-x}{r}, dy = r dz$$

alkureuna: $y = x - r \Rightarrow z = \frac{x-r-x}{x} = -1$

loppureuna: $y = x + r \Rightarrow z = \frac{x+r-x}{x} = 1$, jolloin saadaan

$$\int_{x-r}^{x+r} u(y)dy = \int_{-1}^1 u(x + rz)rdz.$$

Lemma 3.11. *Olkoon pallo $B(0, r) \subset \mathbf{R}^n$. Tällöin*

$$|B(0, r)| = \omega_n r^n$$

$$|\partial B(0, r)| = n\omega_n r^{n-1},$$

missä ω_n on yksikköpallon tilavuus \mathbf{R}^n :ssä.

Esimerkki 3.12. Tutkitaan pallon mitta

(i) kun $n = 2$

$$|B(0, r)| = \pi r^2 (\text{ympyrän pinta-ala})$$

$$|\partial B(0, r)| = 2\pi r (\text{ympyrän kehän pituus})$$

(ii) kun $n = 3$

$$|B(0, r)| = \frac{4}{3}\pi r^3 (\text{pallon tilavuus})$$

$$|\partial B(0, r)| = 4\pi r^2 (\text{pallon pinta-ala}).$$

Merkintä

$$\int_{\partial B(0, r)} u dS = \frac{1}{|\partial B(0, r)|} \int_{\partial B} u dS = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u dS$$

kaikilla $B(0, r) \subset \Omega$, missä $\int_{\partial B(0, r)} u dS$ tarkoittaa u :n integraalikeskiarvoa.

Seuraava tulos tunnetaan Laplacen yhtälön toteuttavien funktioiden eli harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteen nimellä. Se pätee kaikille harmonisille funktioille muodossa "harmonisen funktion arvo jokaisen määrittelyalueeseen sisältyvän kiekon keskipisteessä on sama kuin funktion keskiarvo kiekon reunaympyrän yli."

Lause 3.13. *(Keskiarvoperiaate Laplacen yhtälölle)*

Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ja $u \in C^2(\Omega)$ harmoninen funktio. Tällöin

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u dS$$

jokaiselle pallolle $B(x, r) \subset \Omega$

Todistus. Olkoon $B(x, r) \subset \Omega$ mielivaltainen pallo. Olkoon

$$\phi(r) := \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(z) = \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

Tällöin

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z),$$

josta soveltamalla Gaussin divergenssilausesta 1.20 ja Lemmaa 3.9 saadaan

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(x+rz) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0.\end{aligned}$$

Eli ϕ on vakio, koska oletuksen mukaan u on harmoninen. Tutkitaan raja-arvoa $\phi(t)$, kun $t \rightarrow 0$

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) = u(x).$$

Määritellään seuraavana monien käytännön sovellusten kannalta tärkeä matemaatiikan ongelma, joka tunnetaan nimellä Dirichlet'n ongelma. Monet Laplacen yhtälön ja seuraavassa luvussa määriteltävän lämpöyhtälön avulla mallinnettavat käytännön ilmiöt palautuvat monesti Dirichlet'n ongelman ratkaisemiseen.

Dirichlet'n ongelmalla tarkoitetaan tilannetta, jossa määritetään harmoninen funktio alueella, missä funktion arvot alueen reunalla tiedetään.

Määritelmä 3.14. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin, rajoitettu alue ja funktio $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ tuntematon. Olkoon $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ annettu. Reuna-arvo-ongelmaa

$$\begin{cases} \Delta u = f & U\text{:n sisällä} \\ u = 0 & U\text{:n reunalla,} \end{cases}$$

kutsutaan Dirichlet'n ongelmaksi.

Laplacen yhtälön historia. Pierre Simon Laplace, "Ranskan Newton", syntyi 23.3.1749 Normandiassa, Beaumont-en-Augen kaupungissa maanviljelijä perheeseen. Peruskoulun jälkeen hän aloitti kirkolliset opinnot Caenin yliopistossa. Kuitenkin hän oli hyvin kiinnostunut matematiikasta, ja hänen opettajansa kirjoittivat suosituskirjeen Jean le Rons d'Alembertille Pariisiin. Laplace lopetti kirkolliset opintonsa ja aloitti matematiikan opiskelun Pariisissa. d'Alembert huomasi myös Laplacen lahjakkuuden ja hän sai professorin viran Ecole Militaresta.

Laplace alkoi heti tuottaa matemaattisia julkaisuja, joista ensimmäinen toi parannuksia Lagrangen menetelmään ja se esitettiin Tieteiden Akatemialle Pariisissa vuonna 1770, Laplacen ollessa 21-vuotias. Tärkein matemaattinen oivallus, jonka hän teki taivaanmekaniikan analyyseissään, oli gravitaatiopotentiaalin kuvaaminen summautuvana skalaarikenttänä. Potentiaalientien matemaattinen käsittely synnytti myös Laplacen mukaan nimetyn Laplacen yhtälön ja sen yksinkertaiseen esittämiseen käytetyn Laplacen operaattorin Δf .

Laplacen ilmiömäistä matemaattista kykyä kuvasi myös se, että hän pystyi määrittämään auringon etäisyyden matemaattisin keinoin kuun liikkeistä pelkästään yhdestä observatoriosta suoritetuilla havainnoilla. Lisäksi Laplace muistetaan yhtenä ensimmäisistä tiedemiehistä, jotka uskoivat mustien aukkojen olemassaoloon. Saavutustensa ansiosta Laplace nimitettiin kreiviksi ja myöhemmin hän sai markiisin arvonimen. Hän on myös yksi niistä 72 henkilöstä, jonka nimi on kaiverrettu Eiffel-torniin. [4] [9]

3.3. Poissonin yhtälö.

Määritelmä 3.15. Laplacen yhtälöön liittyvää epähomogeenista osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\Delta u = f$$

kutsutaan *Poissonin yhtälöksi*, joka on nimetty Laplacen oppilaanakin olleen Simeón-Denis Poissonin mukaan.

Simeon Poisson syntyi vuonna 1781 Ranskassa, Pithiviers'n kaupungissa. Hän opiskeli École Polytechnique- yliopistossa ja sai vuonna 1802 matematiikan apulaisprofessorin. Hän jatkoi opettajansa Laplacen työtä taivaanmekaniikan tutkimisessa, sekä loi Laplacen potentiaaliyhtälön yleistetyn muodon, *Poissonin yhtälön*.

Poissonin yhtälöllä, joka tunnetaan myös potentiaaliyhtälönä, voidaan mallintaa esimerkiksi kemiallisia konsentraatioita, lämpötilajakaumia ja sähköisiä potentiaaleja.

4. LÄMPÖYHTÄLÖ

Tarkastellaan ympäriltä eristettyä metallitankoa, joka tuodaan selvästi viileämmästä ulkolämpötilasta sisälämpötilaan. Alkuun tangon lämpötila on hyvin lähellä ulkona vallitsevaa lämpötilaa. Työnnetään metalliputki ulkoseinästä läpi niin, että toinen pää on sisällä ja toinen ulkona. Lämpötila pyrkii tasoittumaan. Ajankuluessa päästään tilanteeseen, jossa sisällä oleva putken pää on lähellä sisälämpötilaa ja ulkona oleva putken pää on lähellä ulkolämpötilaa. Tässä kappaleessa tutustutaan tarkemmin esimerkissä 2.2 jo esiintyneeseen lämpöyhtälöön, jolla voidaan mallintaa kappaleen lämpötilan muuttumista lämmönjohtumisen ja joidenkin ulkoisten tekijöiden vaikutuksesta. Tässä luvussa käsitellyt asiat perustuvat Lawrence C. Evansin teokseen *Partial Differential Equations* [1]

4.1. Lämpöyhtälön fysikaalinen tulkinta. Lämpöyhtälö, joka tunnetaan myös diffuusioyhtälönä, on osittaisdifferentiaaliyhtälö, joka kuvaa esimerkiksi lämmön u johtumista aineissa ajan kuluessa. Lämpöyhtälö on hyvin laajalti käytetty fysiikan, biologian, geologian ja yhteiskuntatieteiden sovelluksissa. Suure u voi kuvata esimerkiksi kemiallista konsentraatiota, lämmönjohtumista ja jopa pörssioption hintaa.

Olkoon $V \subset U$ mikä tahansa sileä osa-alue, ja olkoon $u(x, t)$ lämmön määrä pisteessä x ajanhetkellä t . Tällöin kokonaismäärän muutoksen nopeus alueessa V on yhtä suuri kuin alueen reunan läpi tapahtuva nettovirtaus:

$$\frac{d}{dt} \int_V u dx = - \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu dS,$$

missä \mathbf{F} kuvaa virtauksen suuruutta ja ν ulospäin suunnattua normaalivektorikenttää. Koska lämpövirtaus on verrannollinen lämpötilan u derivaattaan, saadaan

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{F},$$

missä V oli mielivaltainen. Monissa tilanteissa \mathbf{F} on verrannollinen alkuperäisen suureen u gradienttiin, tosin vastakkaiseen suuntaan, koska virtaus tapahtuu korkeammasta lämpötilasta matalampaan lämpötilaan. Näin ollen:

$$\mathbf{F} = -a \nabla u \quad (a > 0).$$

Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saamme osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$u_t = a \operatorname{div}(\nabla u) = a \Delta u,$$

joka on lämpöyhtälö, kun $a = 1$.

4.2. Lämpöyhtälön perusratkaisu. Seuraavaksi johdamme perusratkaisun lämpöyhtälölle

$$(4.1) \quad u_t - \Delta u = 0,$$

joka täyttää sopivat alku- ja reunaehdot. Oletetaan, että $t > 0$ ja $x \in U$, missä $U \subset \mathbf{R}^n$ on avoin. Olkoon $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, ja Laplacen operaattori Δ muuttujalle $x = (x_1, \dots, x_n) : \Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$.

Lämpöyhtälö sisältää yhden derivaatan aika-muuttujalle t , mutta kaksi derivaattaa paikkamuuttujalle x_i , ($i = 1, \dots, n$). Huomataan, että u on lämpöyhtälön (4.1)

ratkaisu, jos u on muotoa $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, jollakin $\lambda \in \mathbf{R}$. Tämä osoittaa, että suhde $\frac{r^2}{t}$ ($r = |x|$) on hyvin tärkeä ratkaistaessa lämpöyhtälöä, jolloin ratkaisu on muotoa

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbf{R}),$$

jollekin toistaiseksi määrittelemättömälle funktiolle v .

Vaikka edellä esitelty lähestymistapa johtaa siihen ratkaisuun mitä halutaan, on nopeampaa etsiä ratkaisua, jolla on seuraavanlainen rakenne

$$(4.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbf{R}^n, t > 0),$$

missä vakiot α, β ja funktio $v : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ täytyy löytää. Päädytään yhtälöön (4.2), joka toteuttaa lämpöyhtälön λ :n arvosta riippumatta.

$$u(x, t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

Eli asetetaan

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

kaikille $\lambda > 0, x \in \mathbf{R}^n, t > 0$. Olkoon $\lambda = t^{-1}$, jolloin yhtälöstä (4.2) saadaan $v(y) := u(y, 1)$. Sijoitetaan yhtälö (4.2) alkuperäiseen lämpöyhtälöön, jonka jälkeen laskemalla saadaan

$$(4.3) \quad \alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

kun $y := t^{-\beta} x$. Jotta saadaan yllä oleva yhtälö haluttuun muotoon y , asetetaan $\beta = \frac{1}{2}$. Silloin termit muuttujan t suhteen ovat yhtäpitävät ja saadaan yhtälö sievennetyksi muotoon

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0.$$

Sievennetään edelleen asettamalla funktio v on radiaaliseksi. Tällöin $v(y) = \omega(|y|)$ jollekin $\omega : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Täten voidaan kirjoittaa

$$\alpha \omega + \frac{1}{2} r \omega' + \omega'' + \frac{n-1}{r} \omega' = 0,$$

jollekin $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$. Nyt jos asetaan $\alpha = \frac{n}{2}$, saadaan yhtälö yksinkertaistetuksi muotoon

$$(r^{n-1} \omega')' + \frac{1}{2} (r^2 \omega)' = 0.$$

Tällöin

$$r^{n-1} \omega' + \frac{1}{2} r^n \omega = a,$$

jollakin vakiolla a . Olettaen, että

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega, \omega' = 0,$$

saadaan,

$$\omega' = -\frac{1}{2} r \omega.$$

Silloin jollakin vakiolla b

$$\omega = b e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Yhdistämällä yllä oleva yhtälö, yhtälön (4.2) kanssa, sekä valitsemillamme α ja β , saadaan, että

$$\frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

ratkaisee alkuperäisen lämpöyhtälön.

Määritelmä 4.1. Funktiota

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbf{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

kutsutaan lämpöyhtälön perusratkaisuksi.

Lemma 4.2. (*Perusratkaisun integraali*) Olkoon aika $t > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

Todistus. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i. \\ &= 1 \end{aligned}$$

4.3. Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma. Seuraavana käytetään lämpöyhtälön perusratkaisua Φ ratkaistaessa alkuarvotehtävää, joka tunnetaan myös nimellä Cauchyn ongelma.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{sisällä } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{reunalla } \mathbf{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Koska funktio $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$ ratkaisee lämpöyhtälön alkuarvolla 0, tällöin se ratkaisee myöskin funktion $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ jokaisella kiinteällä $y \in \mathbf{R}^n$. Näin ollen

$$\begin{aligned} (4.4) \quad u(x, t) &= \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbf{R}^n, t > 0), \end{aligned}$$

täytyy olla myöskin ratkaisu.

Lause 4.3. (*Alkuarvo-ongelman ratkaisu*) Olkoon $g \in C(\mathbf{R}^n)$ rajoitettu ja u toteuttaa yllä olevan yhtälön. Tällöin

- (i) $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times (0, \infty))$,
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ ($x \in \mathbf{R}^n, t > 0$),
- (iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0)} u(x, t) = g(x^0)$ jokaisessa pisteessä $x^0 \in \mathbf{R}^n, x \in \mathbf{R}^n, t > 0$.

Todistus. 1. Koska funktio $\frac{1}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ on äärettömän monta kertaa differentioituva ja rajoitettu joukossa $(\mathbf{R}^n \times [\delta, \infty))$ millä tahansa $\delta > 0$, nähdään, että $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times (0, \infty))$. Lisäksi

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbf{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x - y, t)]g(y)dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n, t > 0), \end{aligned}$$

koska Φ toteuttaa lämpöyhtälön.

Olkoon $x^0 \in \mathbf{R}^n, \epsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon \quad \text{jos } |y - x^0| < \delta.$$

Tällöin, jos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, niin lemmän 4.2 mukaan,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x - y, t)[g(y) - g(x^0)]dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &=: I + J \end{aligned}$$

Nyt (4.4) ja lemmän mukaan

$$I \leq \epsilon \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x - y, t)dy = \epsilon.$$

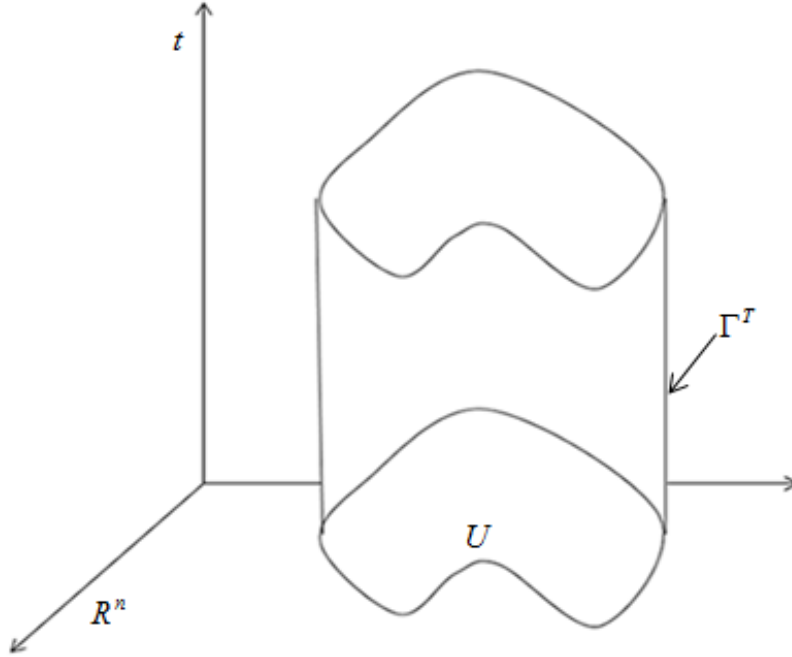
Tiis, jos $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ ja $|y - x^0| \geq \delta$, niin

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Siten $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$. Jolloin

$$\begin{aligned} J &\leq 2|g|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t)dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy \\ &= \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \rightarrow 0 \quad \text{kun } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Joten jos $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ ja $t > 0$ on tarpeeksi pieni, niin $|u(x, t) - g(x^0)| < 2\epsilon$.



KUVA 3. Määritelmän 4.4 parabolinen sylinteri U_T

4.4. **Keskiarvoperiaate lämpöyhtälölle.** Määritellään alkuun muutama käyttökelpoinen merkintätapa. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$, avoin, rajoitettu ja riippuvainen ajasta $T > 0$.

Määritelmä 4.4. (i) Parabolinen sylinteri on

$$U_T := U \times (0, T].$$

(ii) U_T :n reuna on

$$\Gamma_T := \bar{U}_T - U_T.$$

Siis, U_T on joukon $\bar{U}_T \times [0, T]$ sisus ja kansi ja Γ_T koostuu sen pohjasta ja sivuista.

Seuraavaksi halutaan johtaa samanlainen keskiarvo-ominaisuus lämpöyhtälölle kuin minkä johdimme aiemmin Laplacen yhtälölle.

Määritelmä 4.5. Kiinteälle $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, $r > 0$, määritetään

$$E(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Huomataan, että piste (x, t) sijaitsee keskellä kantta. $E(x, t; r)$ kutsutaan myös *lämpöpöpalloksi*.

Lemma 4.6. *Funktio*

$$\psi := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r,$$

ja $\psi = 0$ $\partial E(r)$:lla, kun $\phi(y, -s) = r^{-n} \partial E(r)$:lla, on hyödyllinen meille seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause 4.7. (Keskiarvo-ominaisuus lämpöyhtälölle)
Olkoon $u \in C_1^2(U_T)$ lämpöyhtälön ratkaisu. Tällöin

$$(4.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

jokaiselle $E(x, t; r) \subset U_T$.

Edellä oleva yhtälö (4.6) on tavallaan vastaava lämpöyhtälölle kuin keskiarvoperiaate oli Laplacen yhtälölle. Huomaamme, että oikea puoli sisältää vain $u(y, s)$, kun aika $s \leq t$. Tämä selittää sen, miksi $u(x, t)$ ei riipu tulevasta ajasta.

Todistus. Voidaan hyvin asettaa paikkakoordinaatiksi $x = 0$ ja aikakoordinaatiksi $t = 0$. Olkoon $E(r) = E(0, 0 : r)$, jolloin

$$\begin{aligned} \phi(r) &:= \frac{1}{r^n} \int \int_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \int \int_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Ketjusääntöä käyttäen saadaan,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &:= \int \int_{E(1)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Hyödyntämällä Lemmaa 4.6 saadaan

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4nu_s \psi + \sum_{i=1}^n u_{s y_i} y_i \psi dy ds; \end{aligned}$$

reuna-arvoa ei ole, koska $\phi = 0$ $\partial E(r)$:lla. Osittaisintegroimalla s :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4nu_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds - A. \end{aligned}$$

Koska u oli lämpöyhtälön ratkaisu, saadaan

$$\begin{aligned}\phi &= A + B \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4n u_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dy ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

Koska ϕ on jatkuva, saadaan

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = u(0, 0) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \int \int_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right) = 4u(0, 0),$$

kun

$$\frac{1}{t^n} \int \int_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \int \int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4.$$

Määritelmä 4.8. Olkoon $U \subset \mathbf{R}^n$ avoin, rajoitettu alue ja olkoon

$$U_T = U \times (0, T] \quad \text{jollakin } T > 0.$$

Toisen kertaluvun reuna-arvo-ongelma on muotoa

$$\begin{cases} u_t + \Delta u &= 0 & U_T \text{:ssä} \\ u &= 0 & \partial U \times [0, T]:\text{lla} \\ u &= g & U \times \{t = 0\}:\text{lla,} \end{cases}$$

missä funktiot $f : U_T \rightarrow \mathbf{R}$ ja $g : U \rightarrow \mathbf{R}$ ovat tunnettuja ja $u : U_T \rightarrow \mathbf{R}$ on tuntematon.

Seuraava lause kertoo, että lämpöyhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, koska sileysoletusten vallitessa heikot ratkaisut ovat myös sileitä. Heikot ratkaisut ovat oma laaja kokonaisuutensa, joihin ei tässä tutkielmassa mennä sen tarkemmin.

Lause 4.9. *Olkoon $g \in C_0^\infty(\bar{U})$ ja $f = 0$. Tällöin parabolisella reuna-arvo-ongelmalla on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu*

$$u \in C^\infty(\bar{U}_T).$$

Todistus. (Ks. [1, s.367])

Huomautus 4.10. Approksimaatiolla g :n suhteen voidaan osoittaa, että tämä on laajennettavissa tapauksiin, joita myöhemmin käsitellään.

5. NUMEERINEN RATKAISIJA

Tässä luvussa tullaan muodostamaan numeerinen ratkaisija ensin Poissonin yhtälölle ja seuraavaksi lämpöyhtälölle yksiulotteisessa tapauksessa differenssimenetelmällä.

Differenssimenetelmä perustuu funktion derivaatan approksimoimiseen erotusosamäärän lausekkeen avulla. Ideana on muodostaa kiinnitetty hila ja muodostaa lauseke, joka yhdistää funktion ja sen derivaatan arvot hilapisteissä. Lämpöyhtälön tapauksessa huomioidaan suuren muutos ajankuluessa.

5.1. Poissonin yhtälön diskretointi. Poissonin yhtälö

$$\Delta u = f,$$

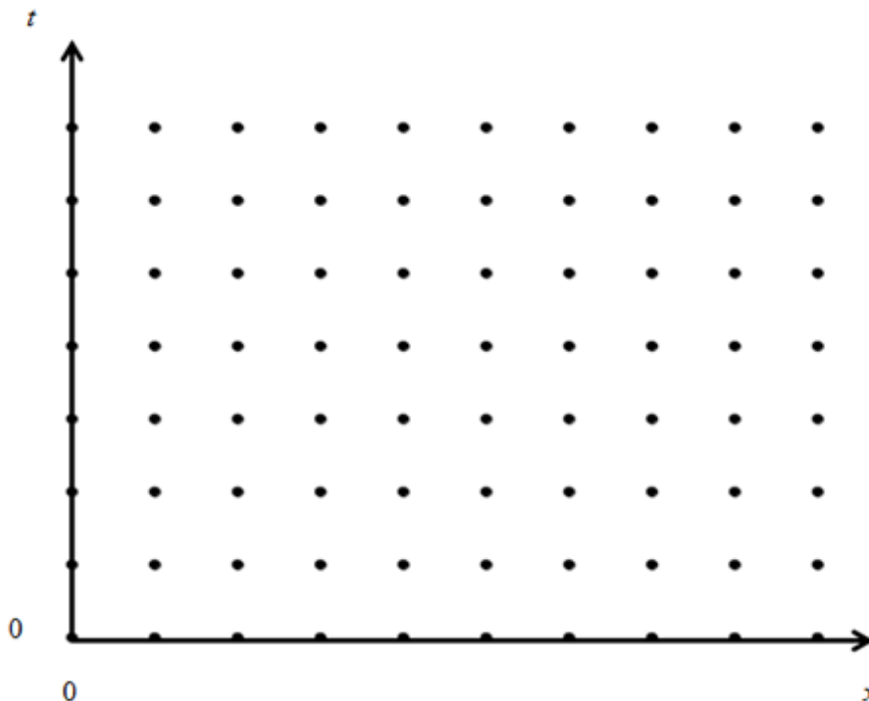
on esimerkki epähomogeenisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä.

Yksiulotteisessa tapauksessa yhtälö on muotoa

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = a \\ u(1) = b, \end{cases}$$

joka voidaan diskretisoida paikan x suhteen. Differenssimenetelmällä eli approksimoimalla funktion derivaattaa erotusosamäärän lausekkeen avulla, saadaan:

$$\Delta u = u''(x) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \right)$$



KUVA 4. Hilapisteet

$$= \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)).$$

Diskreetti tehtävä voidaan nyt kirjoittaa

$$Au = f,$$

missä $A = \Delta_h$ ja $\Delta_h \in \mathbf{R}^{(k+1) \times (k+1)}$, $u \in \mathbf{R}^{k+1}$,

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h^2 & 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & h^2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} a \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ b \end{bmatrix}$$

ja $h = \frac{1}{k}$ diskreetointi parametri $\mathbf{x}=0:h:1;$.

Huomautus 5.1. Jos funktio $f(x) = 0$, niin yllä oleva diskretisointi voidaan tulkita keskiarvoperiaatteeksi, koska

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{h} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h} \right) \\ &= \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h}, \end{aligned}$$

ja nyt $\Delta u = 0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{u(x+h)}{2} + \frac{u(x-h)}{2} \\ u(x) &= \frac{u(x+h) + u(x-h)}{2}, \end{aligned}$$

joka vastaa edellä esitettyä keskiarvoperiaatetta.

5.2. Poissonin yhtälön numeerinen ratkaisija. Muodostetaan Poissonin yhtälön numeerinen ratkaisu matlab-koodilla.

$$a = 0, b = 0 \quad \text{ja} \quad f(x) = -x(1-x).$$

%Tämä esimerkki kuvaa Poissonin yhtälön diskretointia.

k=10;

h=1/k;

%Luodaan (k+1)x(k+1) nollamatriisi A

A=zeros(k+1,k+1);

%Määritetään matriisin A ensimmäiseksi alkioksi h^2

A(1,1)=h^2;

%Määritetään matriisin viimeiseksi alkioksi h^2

A(length(A(:,1)),length(A(1,:)))=h^2;

```

%Seuraava silmukka pyörii niin kauan
%kunnes on käynyt kaikki i:t alkiot lävitse

%Käynnistetään silmukka

for i=2:length(A(:,1))-1 %Määrittää i:nnet alkiot

    %Lisää diagonaalini alapuolelle ykköset alkaen alkiosta (2,1)
    A(i,i-1)=1;

    %Lisää diagonaalille -2, alkaen alkiosta (2,2) ja loppuen alkioon (k,k)
    A(i,i)=-2;

    %Lisää diagonaalini yläpuolelle ykköset alkaen alkiosta (2,3)
    A(i,i+1)=1;

    %Lopetaan silmukka
end

%Kerrotaan matriisi (A) 1/h^2:lla
A=1/h^2*A;

%Luodaan (k+1)-pituisen nollavektori
y=zeros(k+1,1);

%Määrätään y:lle parametrit
a=0;
b=0;
x=0:h:1;

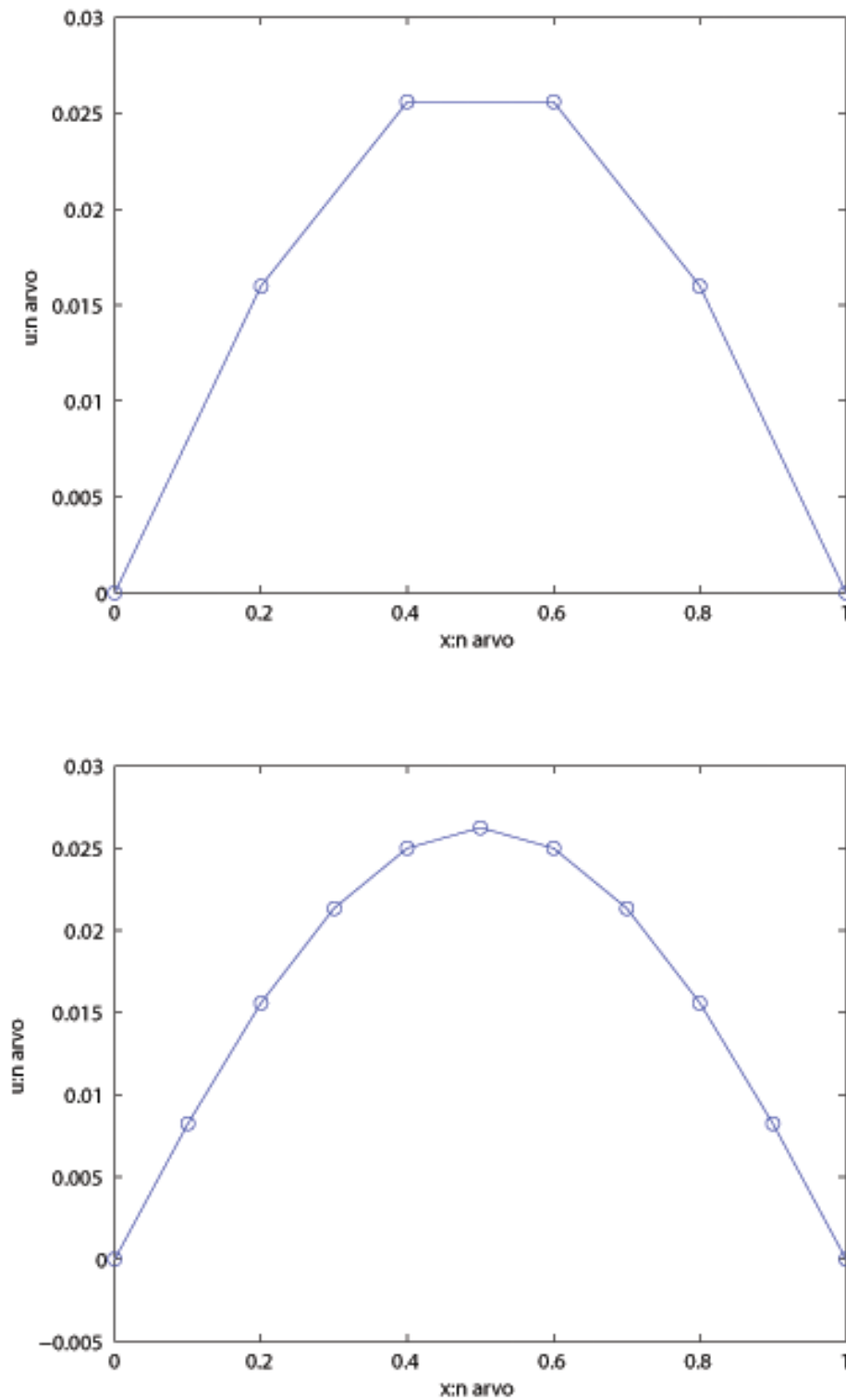
%Seuraava silmukka pyörii x:n pituuden verran
%Käynnistetään silmukka
    for i=1:length(x)
        y(i)=-x(i)*(1-x(i)); Tässä on määritetty funktio y

    %Lopetetaan silmukka
    end

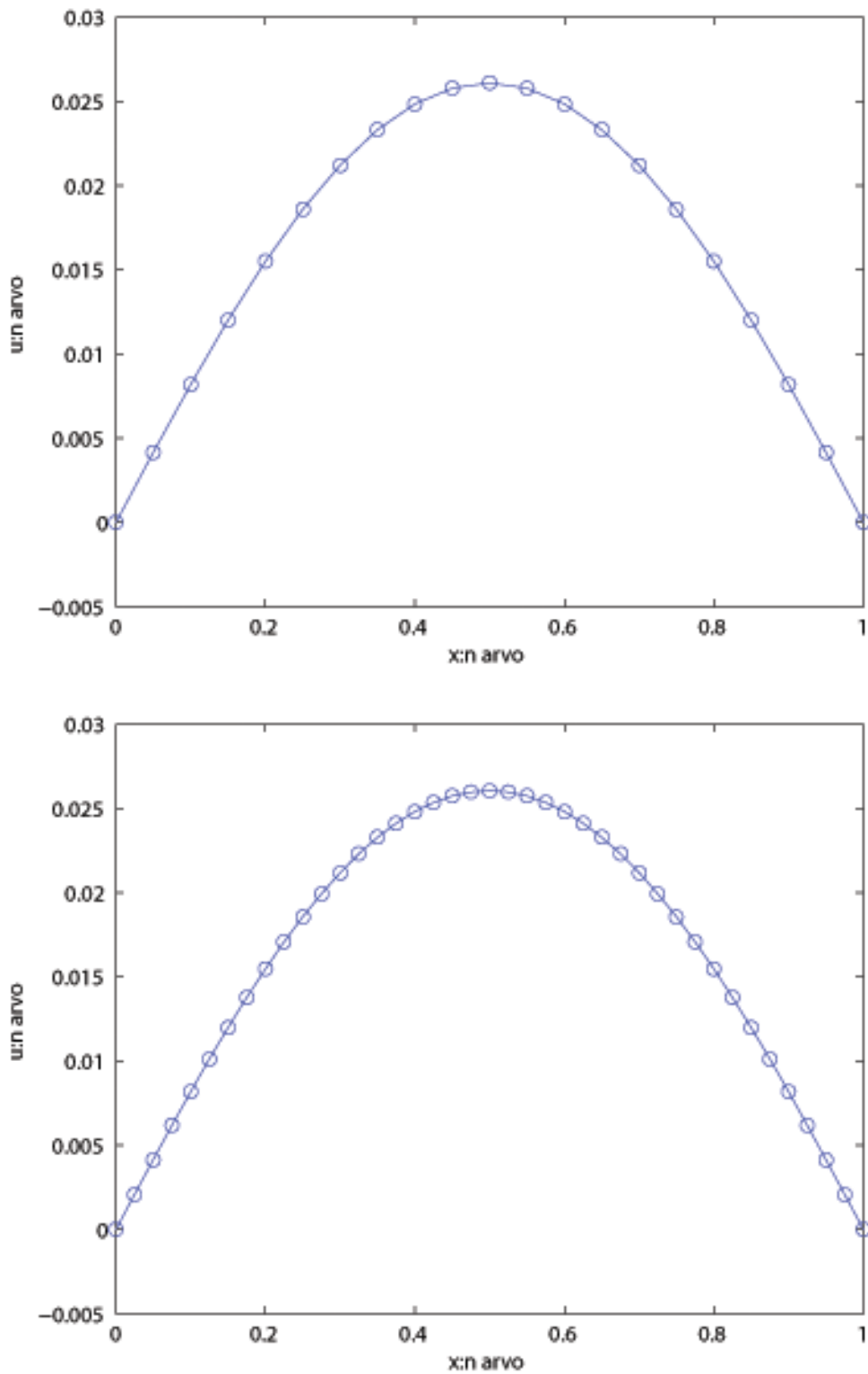
Määritetään u matriisin (A) käänteismatriisin ja funktion y tulona
u=A\y;

%Piirretään kuvaaja
plot(x,u,'*')
hold on
%Nimetään akselit

```

KUVA 5. Poissonin yhtälön numeerinen ratkaisu tapauksessa $f(x) = -x(1-x)$, $h = 0.2$ (ylempi kuva), ja $h = 0.1$ (alempi kuva)



KUVA 6. Poissonin yhtälön numeerinen ratkaisu tapauksessa $f(x) = -x(1-x)$, $h = 0.05$ (ylempi kuva), ja $h = 0.025$ (alempi kuva)

5.4. **Lämpöyhtälön numeerinen ratkaisija.** Approksimoidaan nyt edellä diskreetoitua yksiulotteista lämpöyhtälöä funktiolla $f(x) = -x(1 - x)$.

```
%Tämä esimerkki ratkaisee 1-dimensioisen lämpöyhtälön
k=50;
h=1/k;
dt=0.0001; %aika-askel

%Ensin diskretisoidaan paikan x suhteen

%Luodaan (k+1) x (k+1) nollamatriisi.
A=zeros(k+1,k+1);
%Määrätään matriisin A ensimmäiseksi alkioksi -2
A(1,1)=-2;
%Seuraava silmukka pyörii niin kauan
%kunnes on käynyt kaikki i:t alkiot alkiot lävitse

%Käynnistetään silmukka
for i=2:length(A(:,1))
    A(i,i-1)=1;
    A(i,i)=-2;
    A(i-1,i)=1;
    %Lopetetaan silmukka
end
%Kerrotaan matriisi (A) 1/h^2:lla
A=1/h^2*A;
%Luodaan (k+1):n pituinen nollavektori
y=zeros(k+1,1);

%Määrätään vektorille y parametrit a, b ja x
a=0;
b=0;
x=0:h:1;

%Seuraava silmukka pyörii x:n pituuden verran

%Käynnistetään silmukka
for i=1:length(x)
    y(i)=x(i)*(1-x(i)); %Tässä on määritetty funktio y
    %Lopetetaan silmukka
end
```



```

%Diskretisoidaan ajan t suhteen
t=0:dt:2000*dt;

%Luodaan (x:n pituus) x (t:n pituus) nollamatriisi U
U=zeros(length(x),length(t));

U(:,1)=y+dt*A*y;

%Seuraava silmukka pyörii t:n pituuden verran

%Käynnistetään silmukka
for indt=2:length(t)
    U(:,indt)=U(:,indt-1)+dt*A*U(:,indt-1);
%Lopetetaan silmukka
end

%Määrätään vielä matriisin U reunat 0:ksi
U(1,:)=0;
U(length(x),:)=0;

%Piirretään 3-D kuvaaja
mesh(x,t,U')

%Nimetään akselit
xlabel('x:n arvo')
ylabel('t:n arvo')

```

Matlab-ohjelmassa löytyy myös diag-komento, jolloin matriisin A luomiseen ei tarvitse käyttää for-silmukkaa. Alla sama esimerkki, jossa matriisi A:n luomiseen on käytetty diag-komentoa.

```

%Tämä esimerkki ratkaisee 1-dimensioisen lämpöyhtälön
k=50;
h=1/k;
dt=0.0001; %aika-askel

%Ensin diskretisoidaan paikan x suhteen

%Tässä luodaan diag-komennolla matriisi A,
%joka tehtiin aiemmin hieman monimutkaisemmin
S=ones(k+1, 1);
A=diag(S(1:k),-1)+(-2)*diag(S)+diag(S(1:k),1);

%Kerrotaan matriisi (A) 1/h^2:lla
A=1/h^2*A;
%Luodaan (k+1):n pituinen nollavektori

```

```

y=zeros(k+1,1);

%Määrätään vektorille y parametrit a, b ja x
a=0;
b=0;
x=0:h:1;

%Seuraava silmukka pyörii x:n pituuden verran

%Käynnistetään silmukka
for i=1:length(x)
    y(i)=x(i)*(1-x(i)); %Tässä on määritetty funktio y
    %Lopetetaan silmukka
end

%Diskretisoidaan ajan t suhteen
t=0:dt:2000*dt;

%Luodaan (x:n pituus) x (t:n pituus) nollamatriisi U
U=zeros(length(x),length(t));

U(:,1)=y+dt*A*y;

%Seuraava silmukka pyörii t:n pituuden verran

%Käynnistetään silmukka
for indt=2:length(t)
    U(:,indt)=U(:,indt-1)+dt*A*U(:,indt-1);
%Lopetetaan silmukka
end

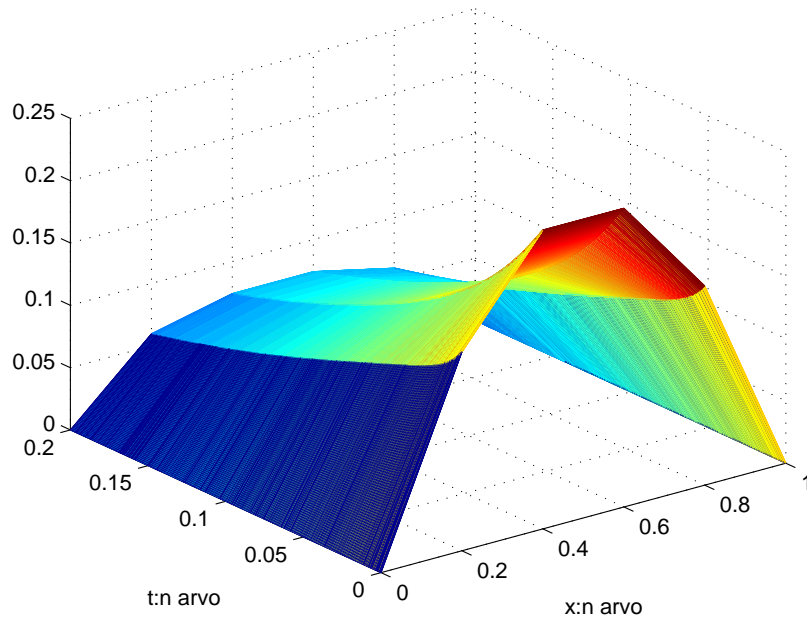
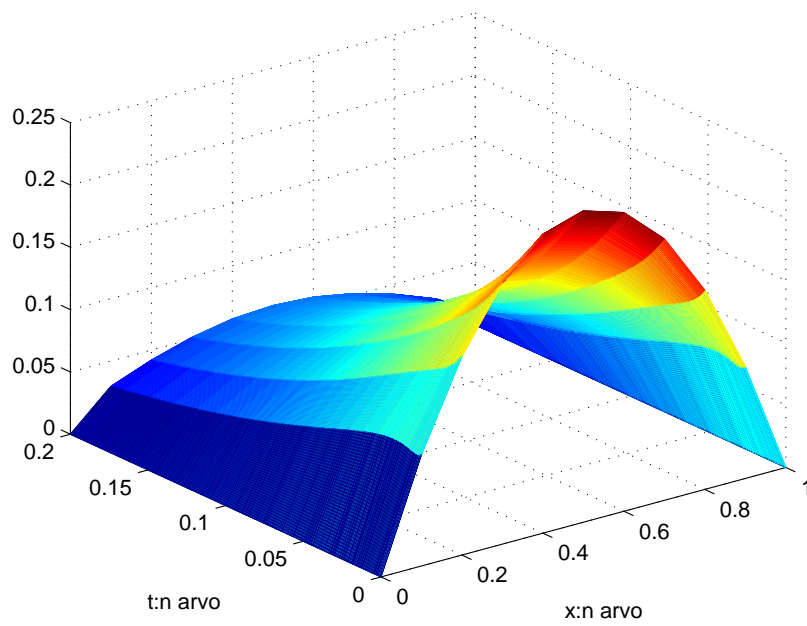
%Määrätään vielä matriisin U reunat 0:ksi
U(1,:)=0;
U(length(x),:)=0;

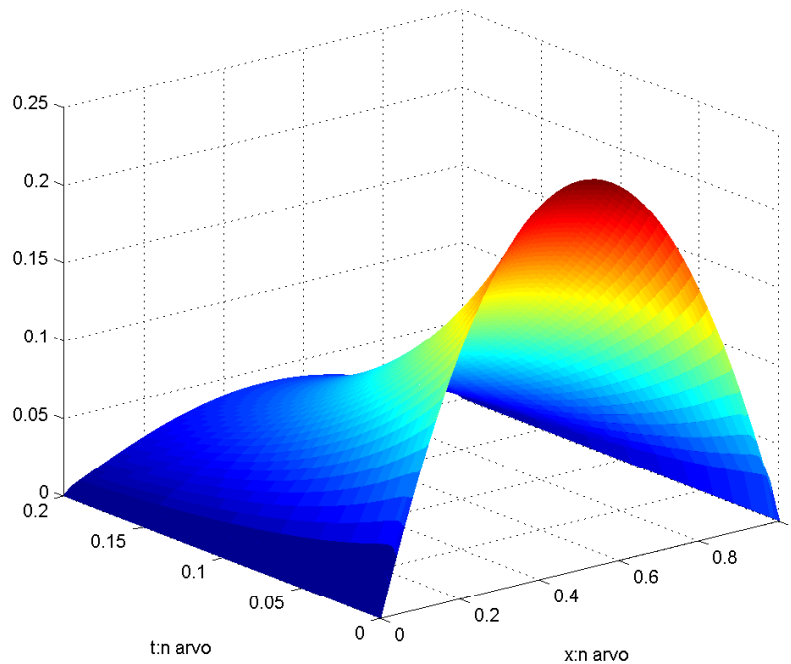
%Piirretään 3-D kuvaaja
mesh(x,t,U')

%Nimetään akselit
xlabel('x:n arvo')
ylabel('t:n arvo')

```

Lämpöyhtälön tapauksessa aikasuunnan diskretisoinnin (pisteiden ero δt) on oltava paikkadiskretisointia tiheämpi (oltava itseasiassa $\delta < \frac{1}{4}h^2$), sillä muuten ratkaisussa ilmenee stabilisuusongelmia. Toisin sanoen δ :n on oltava hyvin pieni pienillä h :n arvoilla.

KUVA 7. Lämpöyhtälön numeerinen ratkaisu, kun $k=5$ KUVA 8. Lämpöyhtälön numeerinen ratkaisu, kun $k=10$



KUVA 9. Lämpöyhtälön numeerinen ratkaisu, kun $k=50$

KIRJALLISUUS

- [1] LAWRENCE C. EVANS: *Partial Differential Equations* 2nd edition, American Mathematical Society, 2010
- [2] TIMO EIROLA: *Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentomoniste* Teknillinen korkeakoulu, Espoo, kevät 2003
- [3] JOHN K. HUNTER: *Notes of Partial Differential Equations*
- [4] VICTOR J. KATZ: *A History of mathematics: an introduction* 2nd edition, Addison-Wesley, 1998
- [5] DAVID GILBARG, NEIL S. TRUDINGER: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* Springer
- [6] WU ZHUOQUN, YIN JINGXUE, WANG CHUNPENG: *Elliptic and parabolic equations* Springer
- [7] VEIKKO T. PURMONEN: *Differentiaali- ja integraalilaskentaa usean reaalimuuttujan funktioille 1. osa* Jyväskylän yliopistopaino, 2004
- [8] TERO KILPELÄINEN: *Analyysi 1* <http://users.jyu.fi/terok/opetus/analyysi1/analyysi1.pdf> (haettu 1.3.2015)
- [9] DAVID R. WILKINS: *Mathematicians of the Seventeenth and Eighteenth Centuries* http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Laplace/RouseBall/RB_Laplace.html (haettu 1.3.2015)
selectlanguageenglish
- [10] T.N. NARASIMHAN: *The dichotomous history of diffusion* verkkolehti, <http://soilphysics.okstate.edu/Recommended%20Reading/narasimhan%202009.pdf> (haettu 11.3.2015)