Yhdesti yhtenäisten tasoalueiden konformisten itsekuvausten ryhmät sup-metriikassa

Juha Syrjälä

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014

Tiivistelmä: Juha Syrjälä, *Yhdesti yhtenäisten tasoalueiden konformisten itsekuvausten ryhmät sup-metriikassa*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 59 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2014.

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehtyä rajoitettujen, yhdesti yhtenäisten alueiden G konformisten itsekuvausten ryhmiin $\Sigma(G)$ sup-metriikassa. Erityisesti on tarkoitus löytää alueen G reunalle avaruuden $\Sigma(G)$ ominaisuuksia karakterisoivia tai määrääviä ehtoja. Avaruudelle $\Sigma(G)$ todistetaan myös yleispäteviä ominaisuuksia, ja yksikkökiekon B tapauksessa ryhmän $\Sigma(B)$ rakennetta tutkitaan eksplisiittisesti.

Riemannin kuvauslauseen nojalla on olemassa konformikuvaus $h : B \to G$. Se määrää isomorfismin $\Phi : \Sigma(B) \to \Sigma(G) : L \mapsto hLh^{-1}$. Osoittautuu, että kuvaus Φ on homeomorfismi, jos ja vain jos joukko ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Edelleen nähdään, että jos kuvaus Φ ei ole jatkuva, niin avaruudet $\Sigma(B)$ ja $\Sigma(G)$ eivät ole homeomorfiset. Tämän lisäksi todistetaan, että, kuvauksen Φ homeomorfisuuden ohella, joukon ∂G lokaali yhtenäisyys karakterisoi avaruuden $\Sigma(G)$ polkuyhtenäisyyden ja epädiskreetin avaruuden $\Sigma(G)$ tapauksessa sen, että $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä.

Tutkielmassa esitetään todistuksineen myös reuna-alkioteorian perusteet, joiden myötä alueen G reuna-alkioiden joukon $\mathcal{P}$ nähdään vastaavan bijektiivisellä tavalla joukkoa ∂B. Vastaavuuden nojalla alueelle G löydetään kompaktifiointi $G \cup \mathcal{P} \approx \overline{B}$. Tutkielman lopuksi avaruuden $\Sigma(G)$ epäyhtenäisyyttä tutkitaan reuna-alkioteorian avulla eri tilanteissa. Alussa tarkasteltu avaruuden $\Sigma(B)$ ryhmärakennekin tulee vielä hyötykäyttöön, kun identtisen kuvauksen yhtenäisyyskomponentti osoittautuu myös ryhmän $\Sigma(G)$ aliryhmäksi.

Sisältö

Johdanto

Dieter Gaier julkaisi vuonna 1984 tutkimuksen [**4**], jossa hän tarkasteli rajoitettujen, yhdesti yhtenäisten tasoalueiden G konformisten itsekuvausten ryhmiä $\Sigma(G)$ sup-metriikassa. Gaierin mukaan taustalla oli Paul Gauthier'n vuonna 1981 esittämä kysymyksenasettelu kompleksiseen approksimointiteoriaan liittyen. Erityisesti Gaier tutki, voidaanko yhdesti yhtenäisen alueen identtistä kuvausta approksimoida sup-metriikassa konformikuvauksilla mielivaltaisen hyvin. Vastaukseksi osoittautui, että joskus voidaan, mutta toisinaan ei. Tämän lisäksi Gaier todisti monia perustuloksia avaruuksille $\Sigma(G)$. Näistä tuloksista mainittakoon avaruuden $\Sigma(G)$ täydellisyys, ja toiseksi joukon ∂G lokaali yhtenäisyys ehtona avaruuden $\Sigma(G)$ homeomorfisuudelle yksikkökiekkoa B vastaavan avaruuden $\Sigma(B)$ ja samalla avaruuden $\partial B \times B$ kanssa. Jälkimmäisen tuloksen osoittamiseksi Gaier tutki Riemannin kuvauksen $h^{-1}\colon G \to B$ määräämän isomorfismin $\Sigma(B) \to \Sigma(G) : L \mapsto hLh^{-1}$ jatkuvuutta. Tulevaa varten mainittakoon, että joukko ∂G on lokaalisti yhtenäinen, jos ja vain jos kuvauksella h on raja-arvo joukon ∂B jokaisessa pisteessä.

Sittemmin avaruuden $\Sigma(G)$ topologisia ominaisuuksia alettiin tutkia muidenkin toimesta. Erityiskiinnostuksen kohteiksi muodostuivat avaruuden $\Sigma(G)$ yhtenäisyys-kysymykset sekä lokaali kompaktius. Gaier oli jo tutkimuksessaan osoittanut, että $\Sigma(G)$ on epäyhtenäinen ainakin niissä tapauksissa, joissa joukon ∂B pisteitä, joissa kuvauksella h ei ole raja-arvoa, on vähintään yksi ja korkeintaan äärellisen monta. Tämän pohjalta Gerald Schmieder todisti vuonna 1986 julkaisussaan [**11**], että $\Sigma(G)$ on polkuyhtenäinen täsmälleen silloin, kun ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Kyseinen tulos seurasi Gaierin tutkimusten ohella Schmiederin todistamasta tuloksesta, jonka mukaan avaruus $\Sigma(G)$ on lokaalisti täysin epäyhtenäinen, jos kuvaukselta h uupuu raja-arvo ainakin kolmessa pisteessä. Julkaisussaan Schmieder todisti myös tuloksen, jonka myötä $\Sigma(G)$ on diskreetti ainakin silloin, kun kuvauksen h raja-arvo puuttuu vähintään kolmessa ja korkeintaan numeroituvassa määrässä pisteitä.

Esitettyjen tulosten pohjalta voisi arvella, että avaruus $\Sigma(G)$ on yhtenäinen vain siinä tapauksessa, että ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Tätä ei tiettävästi vielä ole kyetty todistamaan. I. A. Volynec kuitenkin osoitti vuonna 1992 julkaisussaan [**12**], että epädiskreetti $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä vain joukon ∂G ollessa lokaalisti yhtenäinen ja että mikäli kuvauksen h raja-arvo puuttuu ainakin kolmessa pisteessä, on $\Sigma(G)$ lokaalisti kompakti vain ollessaan diskreetti. Toisaalta jo Gaier osoitti, että kun ∂G on lokaalisti yhtenäinen, niin $\Sigma(G)$ on homeomorfinen avaruuden $\partial B \times B$ kanssa ja siten lokaalisti kompakti. Näiden tulosten myötä Wolfgang Lauf esitti vuonna 1999 tutkimuksessaan [**6**] topologisen karakterisoinnin lokaalisti kompakteille avaruuksille $\Sigma(G)$ erityisesti niissä tapauksissa, joissa kuvauksen h raja-arvo uupuu tasan yhdessä tai kahdessa pisteessä.

Tässä tutkielmassa todistetaan edellä esitellyistä tuloksista lähes jokainen — ja lisäksi paljon muutakin. Ainoastaan lokaalia kompaktiutta koskevista tuloksista osa on jätetty lähdeviittausten varaan. Joitakin tuloksia on todistettu useammassakin mainituista lähteistä, jolloin on pyritty valitsemaan helppolukuisin todistusmetodi sen sijaan, että olisi noudatettu edellä mainittua järjestystä. Selvitetään luvun lopuksi vielä lyhyesti tutkielman yleinen rakenne:

Luvussa 1 todistetaan useimmat varsinaisten tutkimusten pohjalle tarvittavista tuloksista. Lukijan esitiedoiksi oletetaan aina joitakin sopivan tasoisiksi arvioituja tuloksia, minkä jälkeen kaikki pyritään lähtökohtaisesti todistamaan. Suoraviivaisen luonteensa vuoksi Luvun 1 todistukset onkin tarvittaessa helppo ohittaa, sikäli kun tulokset ovat lukijalle entuudestaan tuttuja.

Luvussa 2 tarkastellaan joukkoa $\Sigma(G)$ ryhmänä. Koska $\Sigma(G)$ on aina isomorfinen esimerkiksi tunnetun matriisien tekijäryhmän $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ kanssa, on tämä puoli jätetty tutkielman lähteissä vähemmälle huomiolle. Luvussa 2 on kuitenkin haluttu todella *laskea* niillä kahdella parametrillä, jotka määräävät ryhmän $\Sigma(B)$ alkiot. Osa tuloksista ja todistuksista saattaa tästä syystä näyttäytyä hieman epäortodoksisina. Luvun 2 tulokset eivät missään nimessä ole irrallaan avaruuden $\Sigma(G)$ tutkimuksesta, sillä alueen G identtisen kuvauksen yhtenäisyyskomponentti osoittautuu Luvussa 6 ryhmän $\Sigma(G)$ aliryhmäksi.

Luvussa 3 tutkitaan metristä avaruutta $\Sigma(G)$ melko yksinkertaisissa tilanteissa. Avaruuden $\Sigma(G)$ ominaisuuksien hienovaraisempaan jaotteluun tarvitaankin avuksi Luvussa 4 rakennettavaa reuna-alkioteoriaa. Luvun 3 tiettyihin tuloksiin palataan kuitenkin yhä uudestaan, sillä tutkimusten myötä osoittautuu, että avaruuden $\Sigma(G)$ ominaisuuksista kovin moni pätee oleellisesti vain kyseisissä perustapauksissa.

Luku 5 on kokonaisuudessaan erinomainen esimerkki juuri mainitusta ilmiöstä: pitkällisten ponnistelujen jälkeen osoittautuu, että kaikki epädiskreetit topologiset ryhmät $\Sigma(G)$ ovat oikeastaan olleet jo tiedossa. Lukua 6 voidaankin pitää tutkielman varsinaisena työnäytteenä, sillä siinä yhdistyy hienosti aiemmissa luvuissa kerätty tietämys niin avaruuden $\Sigma(G)$ topologisesta kuin ryhmärakenteestakin, joista sitten reuna-alkioteorian avulla todistetaan monia mielenkiintoisia tuloksia.

LUKU 1

Valmistelevia tuloksia

Tässä luvussa todistetaan useimmat tutkielmassa käytettävistä aputuloksista. Aputuloksista puhuminen on kuitenkin sikäli harhaanjohtavaa, että osa tuloksista on hyvinkin merkittäviä. Esimerkiksi kohdassa 1.3 todistetaan Riemannin kuvauslause, joka ylipäätään mahdollistaa tutkielman nimikkoavaruuksien tutkimisen. Huomionarvoisia ovat myös Lauseet 1.26 ja 1.32, joissa todistetaan radiaalista rajankäyntiä koskevia tunnettuja tuloksia (rajoitetuille konformikuvauksille). Kaikkia aputuloksia ei esitetä lopullisessa käyttömuodossaan, ja jotkut tuloksista on mahdollista esittää vasta Luvussa 4 rakennettavan reuna-alkioteorian avulla. Lisäksi osa aputuloksista on selkeyden vuoksi jätetty esitettäväksi myöhemmissä luvuissa.

Lukijan esitiedoiksi oletetaan niin algebran, topologian, kompleksianalyysin kuin mitta- ja integraaliteoriankin perusteet. Kovinkaan syvällistä algebraa ei tutkielmassa tarvita, joten siihen liittyviä aputuloksia ei ole tähän lukuun kirjattu. Jotta (muilla) tutkimuksilla olisi nähtävissä jonkinlainen pohja, on edistyneemmille tuloksille pyritty esittämään todistus joistakin perustuloksista lähtien. Lähtökohdat ilmoitetaan aina erikseen, ja määritelmistä ainakin monimutkaisimmat palautetaan mieliin sitä mukaa, kun niitä tarvitaan.

1.1. Topologiaa

Topologisista määritelmistä mainittakoon, että avaruuden joukko on *harva*, jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä, ja 1. *kategoriaa*, jos se voidaan esittää kyseisen avaruuden harvojen joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Vastaavasti avaruus on 1. kategoriaa, jos se on sitä osajoukkonaan. Jos avaruus (joukko) ei ole 1. kategoriaa, on se 2. *kategoriaa*.

LEMMA 1.1 (Cantorin lemma). *Olkoon (M, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $\varnothing \neq A_n \subset M$ ovat suljettuja joukkoja, siten että $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja diam$(A_n) \longrightarrow 0$, niin $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.*

TODISTUS. Valitaan $x_n \in A_n$ jokaiselle n. Oletusten nojalla (x_n) on täydellisen avaruuden Cauchy-jono, joten on $x \in M$, siten että $x_n \longrightarrow x$. Koska $x_k \in A_n$ kaikilla $k \geq n$ ja joukot A_n ovat suljettuja, pätee $x \in A_n$ kaikilla n. Siten $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. $\square$

LAUSE 1.2 (Bairen lause). *Täydellinen metrinen avaruus on aina 2. kategoriaa.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi: On täydellinen metrinen avaruus (M, d), joka on 1. kategoriaa. On siis harvat joukot $A_n \subset M$, siten että $M = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Joukon A_1 harvuuden nojalla on $x_1 \in M \setminus \overline{A_1}$, ja joukon $M \setminus \overline{A_1}$ avoimuuden nojalla edelleen $r_1 \in (0, 1)$, siten että $\overline{B(x_1, r_1)} \subset M \setminus \overline{A_1}$. Vastaavasti on $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus \overline{A_2}$ sekä $r_2 \in (0, 1/2)$, siten että $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \setminus \overline{A_2}$. Näin jatkamalla löydetään joukot

$\overline{B(x_n, r_n)}$, jotka toteuttavat Lemman 1.1 oletukset ja joille $\overline{B(x_n, r_n)} \cap A_n = \varnothing$. Siten

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \cap M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \cap A_k \Big) = \varnothing \,,$$

mikä on ristiriita. □

Muistutetaan vielä, että perhe kuvauksia topologisesta metriseen avaruuteen on *yhtäjatkuva*, mikäli topologisen avaruuden jokaisessa pisteessä kullekin säteen arvolle löytyy ympäristö, jonka kukin perheen alkio kuvaa juuri määrätynsäteiseen palloon. Toisaalta perhe on *normaali*, jos sen jokaisella jonolla on lokaalisti tasaisesti suppeneva osajono. Lokaali tasaisuus tarkoittaa tässä tasaisuutta kompakteissa joukoissa.

LEMMA 1.3. *Olkoot $f_1, f_2, \ldots$ yhtäjatkuvia kuvauksia topologisesta avaruudesta X täydelliseen metriseen avaruuteen M. Mikäli jono (f_n) suppenee tiheässä joukossa $A \subset X$, suppenee se lokaalisti tasaisesti avaruudessa X.*

TODISTUS. Kiinnitetään avaruuden X kompakti ja ei–tyhjä joukko K sekä $\epsilon > 0$. Kompaktiuden ja kuvausten f_n yhtäjatkuvuuden nojalla on pisteet $x_1, \ldots, x_k \in K$ sekä joukon K avoin peite $\{U_1, \ldots, U_k\}$, siten että $x_j \in U_j$ ja

$$d(f_n(x), f_n(x_j)) < \frac{\epsilon}{5} \quad \text{kaikilla } x \in U_j \text{ ja } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Joukon A tiheyden nojalla on pisteet $a_j \in U_j \cap A$, joille suppenemisoletuksen myötä löydetään $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, siten että

$$d(f_m(a_j), f_n(a_j)) < \frac{\epsilon}{5} \quad \text{kaikilla } m, n \geq n_0 \,.$$

Olkoon $x \in K$ sekä j indeksi, jolle $x \in U_j$. Tällöin kaikilla $m, n \geq n_0$ pätee

$$\begin{aligned} d(f_m(x), f_n(x)) &\leq d(f_m(x), f_m(x_j)) + d(f_m(x_j), f_m(a_j)) + d(f_m(a_j), f_n(a_j)) + \\ &\quad + d(f_n(a_j), f_n(x_j)) + d(f_n(x_j), f_n(x)) \\ &< \epsilon \,. \end{aligned}$$

Siis $(f_n(x))$ on täydellisen avaruuden M Cauchy-jono, joten (f_n) suppenee joukossa K kohti kuvausta f. Koska yksiö on kompakti, suppenee (f_n) koko avaruudessa X. Antamalla yllä $m \longrightarrow \infty$ nähdään, että $d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$ kaikilla $x \in K$ ja $n \geq n_0$. Näin ollen suppeneminen on lokaalisti tasaista. □

LAUSE 1.4 (Ascolin lause). *Olkoon $\mathcal{F}$ perhe yhtäjatkuvia kuvauksia separoituvasta topologisesta avaruudesta X täydelliseen metriseen avaruuteen M. Jos kaikilla $x \in X$ joukko $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ sisältyy avaruuden M kompaktiin joukkoon, on $\mathcal{F}$ normaali.*

TODISTUS. Olkoon (f_n) jono perheen $\mathcal{F}$ kuvauksia. Avaruus X on separoituva, joten löytyy tiheä joukko $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset X$. Oletusten nojalla $\{f_n(a_1) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ sisältyy kompaktiin joukkoon, joten jonolla $(f_n(a_1))$ on suppeneva osajono. Olkoon $(f_{1,n})$ vastaava kuvausjono. Edelleen jonolla $(f_{1,n}(a_2))$ on suppeneva osajono ja sitä vastaava kuvausjono $(f_{2,n})$. Näin jatkamalla löydetään jonot $(f_{k,n})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, siten että $(f_{k,n})$ suppenee joukossa $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ja $(f_{l,n})$ on jonon $(f_{k,n})$ osajono kaikilla $l > k$. Diagonaalijono $(f_{n,n})$ on nyt loppupäästään kunkin $(f_{k,n})$ osajono, joten se suppenee joukossa $\{a_1, a_2, \ldots\}$ ja on lisäksi jonon (f_n) osajono. Koska avaruus M on täydellinen, suppenee $(f_{n,n})$ Lemman 1.3 nojalla lokaalisti tasaisesti avaruudessa X. Siis $\mathcal{F}$ on normaali. □

1.2. Kompleksianalyysiä

Jatkossa avoin, yhtenäinen ja ei–tyhjä joukko on *alue*. Polkua, jolla on sama alku- ja loppupiste, nimitetään *umpipoluksi*; näiden kokoelmaa kutsutaan *sykliksi*. Syklin σ kuva on merkinnältään $|\sigma|$, ja joukon A syklin σ sanotaan olevan *nollahomologinen* (jolloin merkitään $\sigma \sim 0$), jos sen *kierrosluku pisteen* $z \in \mathbb{C}\setminus|\sigma|$ *ympäri* eli luku $n(\sigma, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$ on nolla kaikilla $z \in \mathbb{C}\setminus A$. Kierrosluku on alueessa vakio, ja se on erityisesti nolla joukon $\mathbb{C}\setminus|\sigma|$ rajoittamattomassa komponentissa.

Otetaan lähtökohdaksi seuraavat Cauchyn ja Moreran lauseet (sekä oletettavasti niitä edeltävä teoria), jotka ovat koottavissa lähteestä [**1**, 121–122 & 141–145].

Lause 1.5 (Moreran lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : U \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Jos $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ alueen U umpipoluilla γ, on kuvauksella f primitiivi ja lisäksi f on analyyttinen.*

Lause 1.6 (Cauchyn lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue sekä $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Tällöin $\int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ alueen U nollahomologisilla sykleillä σ.*

Muistutetaan, että joukossa $U\setminus\{a\}$ analyyttisellä kuvauksella f on analyyttinen jatke alueeseen U, jos on olemassa raja-arvo $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

Lause 1.7 (Cauchyn integraalikaava). *Olkoon σ alueen $U \subset \mathbb{C}$ nollahomologinen sykli sekä $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Tällöin kuvauksella f on kaikkien kertalukujen derivaatat $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, joille pätee*

$$n(\sigma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \textit{kaikilla } z \in U\setminus|\sigma|\,.$$

Todistus. Kiinnitetään $z \in U\setminus|\sigma|$. Oletuksen nojalla on $f'(z) \in \mathbb{C}$, joten kuvaus $\zeta \mapsto (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z)$ on analyyttinen koko alueessa U. Lauseen 1.6 nojalla siis

$$0 = \int_\sigma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \; - f(z)\int_\sigma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\;,$$

mistä tapaus $k = 0$ seuraa. Muut väitteet seuraavat siitä, että joukossa $|\sigma|$ jatkuvalle kuvaukselle g kuvaukset $F_k(z) := \int_\sigma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ ovat analyyttisiä joukossa $z \in \mathbb{C}\setminus|\sigma|$ ja lisäksi $F_k' = (k+1)F_{k+1}$. □

Analyyttisen kuvauksen Taylorin kehitelmä antaa aihetta seuraaviin määritelmiin. Piste a on kuvauksen f *kertaluvun $m \in \mathbb{Z}_+$ nollakohta/napa*, jos on $r > 0$, siten että f on analyyttinen alueessa $A := B(a, r)\setminus\{a\}$ ja löytyy joukossa $B(a, r)$ analyyttinen kuvaus g, jolle pätee $g(a) \neq 0$ ja $f(z) = g(z)(z - a)^{\pm m}$ kaikilla $z \in A$. Kertaluvullisia nollakohtia ja napoja kutsutaan *erikoispisteiksi* eivätkä ne kasaudu — jos alueessa analyyttisen kuvauksen f (kertaluvuttomat) nollakohdat kasautuvat, niin $f \equiv 0$. Lopuksi, kuvaus on *meromorfinen*, jos se on analyyttinen napojensa ulkopuolella.

Lause 1.8 (Argumentin periaate). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorfinen, ei–vakio kuvaus. Kun M, N ovat kuvauksen f nollakohtien ja napojen joukot sekä $m_z \in \mathbb{Z}_+$ erikoispisteen $z \in M \cup N$ kertaluku, niin*

$$n(f\gamma, 0) = \sum_{a\in M} m_a n(\gamma, a) - \sum_{b\in N} m_b n(\gamma, b)$$

alueen U nollahomologisilla umpipoluilla γ, joille $|\gamma| \cap (M \cup N) = \varnothing$.

Todistus. Kiinnitetään mainitunlainen γ. Koska erikoispisteet eivät kasaudu ja $|\gamma| \subset B(0,r) =: B_r$ jollekin $r > 0$, on joukko $(M \cup N) \cap B_r$ äärellinen ja $n(\gamma, z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus B_r$. Voidaan siis määritellä kuvaus

$$g(z) := \frac{\prod_{b \in N \cap B_r} (z-b)^{m_b}}{\prod_{a \in M \cap B_r} (z-a)^{m_a}} f(z)\,,$$

joka on analyyttinen ja nollasta eroava alueessa $A := U \setminus ((M \cup N) \setminus B_r)$. (Joukko A on alue, koska erikoispisteet eivät kasaudu.) Lisäksi $\gamma \sim 0$ joukossa A ja

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{a \in M \cap B_r} \frac{m_a}{z-a} - \sum_{b \in N \cap B_r} \frac{m_b}{z-b}$$

kaikilla $z \in |\gamma|$, joten Lauseen 1.6 nojalla

$$\begin{aligned} n(f\gamma, 0) &= \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z + \sum_{a \in M \cap B_r} m_a \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} - \sum_{b \in N \cap B_r} m_b \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} \\ &= \sum_{a \in M} m_a n(\gamma, a) - \sum_{b \in N} m_b n(\gamma, b)\,. \end{aligned}$$

□

Lause 1.9. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue, $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus sekä $z_0 \in U$, $w_0 := f(z_0)$. Jos z_0 on kuvauksen $f - w_0$ kertaluvun $m \in \mathbb{Z}_+$ nollakohta, niin pienillä $\delta > 0$ on $\epsilon > 0$, siten että kaikilla $w \in B(w_0, \epsilon) \setminus \{w_0\}$ kuvauksella $f - w$ on joukossa $B(z_0, \delta)$ tasan m nollakohtaa, joista jokaisen kertaluku on 1.*

Todistus. Oletusten nojalla on $\delta_0 > 0$, siten että $B(z_0, \delta_0) \subset U$ ja $f(z) \neq w_0$, $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(z_0, \delta_0) \setminus \{z_0\}$. Olkoot $\delta \in (0, \delta_0)$ sekä γ ympyrän $S(z_0, \delta)$ vastapäivään kulkeva polku. Koska $w_0 \notin |f\gamma|$, on $\epsilon > 0$, jolle $B(w_0, \epsilon) \cap |f\gamma| = \varnothing$. Kierrosluku on alueessa vakio, joten

$$n(f\gamma, w) = n(f\gamma, w_0) \quad \text{kaikilla } w \in B(w_0, \epsilon)\,.$$

Lauseen 1.8 mukaan edelleen

$$n(f\gamma, w_0) = n((f - w_0)\gamma, 0) = m\, n(\gamma, z_0) = m\,,$$

sillä $\gamma \sim 0$ ja z_0 on kuvauksen $f - w_0$ ainut erikoispiste alueessa $B(z_0, \delta_0)$. Koska $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, voi kuvauksella $f - w$, $w \in B(w_0, \epsilon) \setminus \{w_0\}$, olla joukossa $B(z_0, \delta)$ vain kertaluvun 1 nollakohtia. Lauseen 1.8 sekä edellä osoitetun nojalla niitä on tasan m kappaletta. □

Lause 1.10. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen, ei–vakio kuvaus. Tällöin f on avoin.*

Todistus. Olkoon $\varnothing \neq V \subset U$ avoin, $w_0 \in f(V)$ ja $z_0 \in f^{-1}(\{w_0\})$. Koska $f - w_0$ ei ole vakio, on sen nollakohdalla z_0 äärellinen kertaluku. Voidaan siis valita $\delta, \epsilon > 0$, $B(z_0, \delta) \subset V$, kuten Lauseessa 1.9. Tällöin jokaisella $w \in B(w_0, \epsilon)$ kuvauksella $f - w$ on nollakohta joukossa $B(z_0, \delta)$. Siten $B(w_0, \epsilon) \subset f(B(z_0, \delta)) \subset f(V)$ eli $f(V)$ on avoin. Siis f on avoin. □

LAUSE 1.11 (Maksimiperiaate). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : U \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Jos kuvauksella $|f|$ on lokaali maksimi, on f vakio. Erityisesti kompaktissa joukossa $|f|$ saavuttaa maksimin reunalla.*

TODISTUS. Olkoon $\varnothing \neq V \subset U$ avoin ja $z \in V$. Jos kuvaus f ei ole vakio, on Lauseen 1.10 nojalla $\epsilon > 0$, siten että $B(f(z), \epsilon) \subset f(V)$. Tällöin origosta lähtevältä, pisteen $f(z)$ sisältämältä puolisuoralta löytyy piste $w \in f(V)$, $|w| > |f(z)|$. Siis $|f|$ ei saavuta maksimia joukossa V. Kompaktissa joukossa kuvauksella $|f|$ on maksimi, jota ei edellä osoitetun nojalla saavuteta sisäpisteiden joukossa. □

LAUSE 1.12 (Schwarzin lemma). *Olkoon $f : B \to B$ analyyttinen kuvaus, siten että $f(0) = 0$. Tällöin $|f(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in B$, ja jos $|f'(0)| = 1$ tai $|f(z)| = |z|$ jollakin $z \in B \setminus \{0\}$, on f kierto.*

TODISTUS. Koska oletuksen nojalla on $f'(0) \in \mathbb{C}$, kuvaus $g(z) := f(z)/z$ on analyyttinen koko joukossa B. Lauseen 1.11 mukaan siis jokaiselle $r \in (0, 1)$ löytyy $z_r \in S(0, r)$, siten että

$$|g(z)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} < \frac{1}{r} \quad \text{kaikilla } z \in \overline{B}(0, r)\,.$$

Antamalla $r \longrightarrow 1$ saadaan $|g(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in B$, mistä ensimmäinen väite seuraa. Jos lisäksi $|f'(0)| = 1$ tai $|f(z)| = |z|$ jollakin $z \in B \setminus \{0\}$, niin $|g(z)| = 1$ jollakin $z \in B$. Lauseen 1.11 nojalla g on tällöin vakio $\zeta \in S$, minkä johdosta $f(z) = \zeta z$ kaikilla $z \in B$ eli f on kierto. □

Argumentin periaatteen avulla saadaan toisaalta

LAUSE 1.13 (Rouchén lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoot kuvaukset $f, g : U \to \mathbb{C}$ analyyttisiä. Olkoon lisäksi γ alueen U nollahomologinen polku, jolle $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Jos $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$, on kuvauksilla f, g (kertaluvut laskien) yhtä monta nollakohtaa joukossa $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : n(\gamma, z) = 1\}$.*

TODISTUS. Olkoon $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Tällöin $f(z), g(z) \neq 0$ ja $f(z)/g(z) \in B(1, 1)$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Lisäksi voidaan olettaa, että $f \neq cg$, $c \in \mathbb{C}$. Nyt $F := f/g$ on meromorfinen ja ei–vakio kuvaus, jolle $|F\gamma| \subset B(1, 1)$ ja jonka nollakohtien ja napojen joukot M, N sisältyvät vastaavasti kuvausten f, g nollakohtien joukkoihin M_f, M_g. Siten $n(F\gamma, 0) = 0$ ja $|\gamma| \cap (M \cup N) = \varnothing$. Kun $m_h(z) \in \mathbb{Z}_+$ on kuvauksen $h = F, f, g$ erikoispisteen z kertaluku, saadaan Lauseen 1.8 ja oletuksen $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ nojalla

$$\begin{aligned}
0 = n(F\gamma, 0) &= \sum_{z \in M \cap A} m_F(z) - \sum_{z \in N \cap A} m_F(z) \\
&= \sum_{z \in A \cap M_f \setminus M_g} m_f(z) + \sum_{z \in A \cap M_f \cap M_g} (m_f(z) - m_g(z)) - \sum_{z \in A \cap M_g \setminus M_f} m_g(z) \\
&= \sum_{z \in M_f \cap A} m_f(z) - \sum_{z \in M_g \cap A} m_g(z)\,.
\end{aligned}$$

□

LAUSE 1.14 (Hurwitzin lause). *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon (f_n) jono analyyttisiä kuvauksia $U \to \mathbb{C}$, siten että (f_n) suppenee lokaalisti tasaisesti. Tällöin rajakuvaus f on analyyttinen, ja jos $f_n(z) \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $z \in U$, on joko $f \equiv 0$ tai $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in U$.*

TODISTUS. Olkoon $z_0 \in U$. Lokaalisti tasaisen suppenemisen myötä f on jatkuva ja edelleen Lausetta 1.5 hyödyntämällä analyyttinen. Niinpä jos $f(z) \neq 0$ jollakin $z \in U$, on $r > 0$, jolle $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Siten on $s > 0$, jolle $|f(z)| \geq s$ kaikilla $z \in |\gamma|$, kun γ on ympyrän $S(z_0, r)$ vastapäivään kulkeva polku. Suppenemislaadun nojalla on $n \in \mathbb{Z}_+$, siten että $|f_n(z) - f(z)| < s$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Nyt $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$, joten kuvauksilla f_n, f on Lauseen 1.13 nojalla yhtä monta nollakohtaa joukossa $B(z_0, r)$. Koska $f_n(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$, on $f(z_0) \neq 0$. □

LAUSE 1.15. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon (f_n) lokaalisti tasaisesti suppeneva jono analyyttisiä injektioita $U \to \mathbb{C}$. Tällöin rajakuvaus f on vakio tai analyyttinen injektio.*

TODISTUS. Olkoon $z_0 \in U$. Oletuksen nojalla $f_n - f_n(z_0) \longrightarrow f - f(z_0)$ lokaalisti tasaisesti alueessa $U \setminus \{z_0\}$. Kuvaukset f_n ovat injektioita, joten $f_n(z) - f_n(z_0) \neq 0$ kaikilla $z \in U \setminus \{z_0\}$. Lauseen 1.14 mukaan kuvaus f on analyyttinen ja pätee joko $f - f(z_0) \equiv 0$ tai $f(z) - f(z_0) \neq 0$ kaikilla $z \in U \setminus \{z_0\}$. Näin ollen f on vakio tai analyyttinen injektio. □

1.3. Riemannin kuvauslause

Edellä kehitettyyn topologian ja kompleksianalyysin teoriaan tullaan tutkielman aikana useasti viittaamaan. Sen lisäksi, että tuloksia tarvitaan sellaisinaan, riittävät ne jo sangen merkittävien lauseiden todistamiseen. Eräs näistä merkittävyyksistä on Riemannin kuvauslause (Lause 1.20), jota nyt ryhdytään kokoamaan.

Sanotaan, että kuvausten perhe on *lokaalisti rajoitettu*, mikäli se on rajoitettu kompakteissa joukoissa.

LAUSE 1.16. *Olkoon $\mathcal{F}$ perhe alueessa $U \subset \mathbb{C}$ analyyttisiä kuvauksia. Jos $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu, on se normaaliperhe.*

TODISTUS. Lokaalisti rajoitettu perhe on pisteittäin rajoitettu, joten $\mathcal{F}$ kuvaa pisteittäin kompaktiin joukkoon. Lisäksi U on separoituva ja $\mathbb{C}$ täydellinen, joten Lauseen 1.4 nojalla riittää osoittaa $\mathcal{F}$ yhtäjatkuvaksi.

Olkoot $z_0 \in U$ sekä $r > 0$ siten, että $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Lokaalin rajoittuneisuuden nojalla on $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$ kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja $z \in \overline{B}(z_0, r)$. Siispä kun $f \in \mathcal{F}$ ja γ kulkee ympyrän $S(z_0, r)$, pätee Lauseen 1.7 nojalla kaikilla $z \in B(z_0, r/2)$

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0))| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| |\mathrm{d}\zeta| \\
&= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} \\
&\leq \frac{2M}{r} |z - z_0| \,.
\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva. □

Alue $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ on *yhdesti yhtenäinen*, jos joukko $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ on yhtenäinen. Yhdesti yhtenäisessä alueessa D umpipolku γ on aina nollahomologinen, sillä $\mathbb{C}\setminus D$ sisältyy joukon $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$ rajoittamattomaan komponenttiin.

LAUSE 1.17. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue ja $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus, siten että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Tällöin alueessa D on $\log f$:n haara eli on analyyttinen kuvaus $\log f : D \to \mathbb{C}$, jolle $e^{\log f(z)} = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Erityisesti $(\log f)' = f'/f$ ja kuvauksella f on alueessa D neliöjuuri eli analyyttinen kuvaus $\sqrt{f(z)} := e^{\frac{1}{2}\log f(z)}$, joka on injektio, jos f on injektio.*

TODISTUS. Koska $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ ja Lauseen 1.7 nojalla myös f' on analyyttinen, on kuvaus $z \mapsto f'(z)/f(z)$ analyyttinen joukossa D. Siten Lauseen 1.6 nojalla $\int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$ alueen D nollahomologisilla sykleillä σ. Yhdesti yhtenäisen alueen umpipolut ovat nollahomologisia, joten erityisesti $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$ alueen D umpipoluilla γ. Kuvauksella $z \mapsto f'(z)/f(z)$ on siis Lauseen 1.5 nojalla primitiivi eli analyyttinen kuvaus F, siten että $F'(z) = f'(z)/f(z)$. Alueessa D määritellylle kuvaukselle $g(z) := f(z)e^{-F(z)}$ pätee $g' \equiv 0$, joten $g \equiv c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Valitaan $a \in \mathbb{C}$, siten että $c = e^a$, jolloin kuvaus $\log f := F + a$ toteuttaa esitetyt väitteet. □

LEMMA 1.18. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin löytyy analyyttinen injektio $f : D \to B$, jolle $0 \in f(D)$.*

TODISTUS. Etsitään f analyyttisten injektioiden yhdisteenä. Olkoon $a \in \mathbb{C}\setminus D$. Lauseen 1.17 nojalla alueessa D on injektiivinen neliöjuuri $f_1(z) := \sqrt{z-a}$. Kaikilla $w \in f_1(D) =: D_1$ on $-w \notin D_1$, sillä ehdosta $-\sqrt{z-a} = \sqrt{\tilde{z}-a}$, $z, \tilde{z} \in D$, seuraisi $\sqrt{z-a} = 0 \notin D_1$. Siis $-D_1 \in \mathbb{C}\setminus D_1$. Valitaan $b \in -D_1$, jolloin b on Lauseen 1.10 nojalla joukon $\mathbb{C}\setminus D_1$ sisäpiste. Kuvaukselle $f_2(z) := (z-b)^{-1}$ joukko $f_2(D_1) =: D_2$ on siten rajoitettu. Valitaan $c \in D_2$, jolloin kuvaukselle $f_3(z) := (z-c)/diam(D_2)$ pätee $0 \in f_3(D_2) \subset B$. Lopulta voidaan asettaa $f := f_3 f_2 f_1$. □

LEMMA 1.19. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, yhdesti yhtenäinen alue ja $f : D \to B$ analyyttinen injektio, siten että $0 \in f(D) \neq B$. Tällöin on analyyttinen injektio $g : D \to B$, jolle pisteessä $z_0 := f^{-1}(0)$ pätee $g(z_0) = 0$ ja $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$.*

TODISTUS. Olkoon $a \in B\setminus f(D)$. Määritellään $g_1 : B \to B : z \mapsto (z-a)/(1-\overline{a}z)$, jolloin g_1 on konformikuvaus ja $g_1 f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$. Lauseen 1.17 nojalla kuvauksella $g_1 f$ on injektiivinen neliöjuuri $g_2(z) := e^{\frac{1}{2}\log(g_1 f)(z)}$, jolle $g_2(D) \subset B$, sillä $g_2(z)^2 = g_1 f(z)$. Merkitään $b := g_2(z_0)$, jolloin $g_3 : B \to B : z \mapsto (z-b)/(1-\overline{b}z)$ on konformikuvaus. Nyt $g := g_3 g_2 : D \to B$ on analyyttinen injektio, jolle $g(z_0) = 0$. Koska kuvauksille $T(z) := \frac{z-c}{1-\overline{c}z}$ on $T'(z) = \frac{1-|c|^2}{(1-\overline{c}z)^2}$ ja siten

$$g_2'(z_0) = e^{\frac{1}{2}\log(g_1 f)(z_0)} \cdot \frac{g_1'(f(z_0))f'(z_0)}{2g_1 f(z_0)} = \frac{1-|a|^2}{2b} f'(z_0)\,,$$

pätee lisäksi

$$|g'(z_0)| = |g_3'(b)||g_2'(z_0)| = \frac{1}{1-|b|^2} \cdot \frac{1-|a|^2}{2|b|}|f'(z_0)| = \frac{1+|a|}{2|b|}|f'(z_0)|\,.$$

Yllä $\frac{1+|a|}{2|b|} = \frac{2|b|+(1-|b|)^2}{2|b|} > 1$ ja kuvauksen f injektiivisyyden sekä Lauseen 1.9 nojalla $f'(z_0) \neq 0$, joten $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$. □

Kaikki on vihdoin valmista Riemannin kuvauslauseen todistusta varten. Lauseen yksikäsitteisyyspuolta ei tutkielmassa tarvita, mutta todistetaan sekin.

LAUSE 1.20 (Riemannin kuvauslause). *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa konformikuvaus eli analyyttinen bijektio $f : D \to B$. Lisäksi jokaiselle $z_0 \in D$ on yksikäsitteinen f siten, että $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.*

TODISTUS. Lemman 1.18 nojalla löytyy analyyttinen injektio $g : D \to B$, jolle $0 \in g(D)$. Olkoot ensin $z_0 := g^{-1}(0)$ ja $\mathcal{F}$ niiden analyyttisten injektioiden $D \to B$ perhe, joissa $z_0 \mapsto 0$. Tällöin $\mathcal{F}$ on ei–tyhjä ja Lauseen 1.16 mukaan normaaliperhe. Olkoot $M := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$ sekä $f_n \in \mathcal{F}$, $|f_n'(z_0)| \longrightarrow M$. Normaaliuden nojalla on osajono (f_{n_k}) sekä kuvaus $f : D \to \overline{B}$, siten että $f_{n_k} \longrightarrow f$ lokaalisti tasaisesti. Lauseen 1.15 mukaan f on analyyttinen injektio tai vakio. Suppenemislaadun sekä Lauseen 1.7 myötä $|f_{n_k}'(z_0)| \longrightarrow |f'(z_0)|$, joten $M = |f'(z_0)|$. Nyt $|g'(z_0)| \leq |f'(z_0)|$ ja Lauseen 1.9 perusteella $|g'(z_0)| > 0$, joten f ei ole vakio. Näin ollen $f(D) \subset B$ Lauseen 1.10 tai 1.14 nojalla. Lisäksi $f(z_0) = \lim f_{n_k}(z_0) = 0$, joten $f \in \mathcal{F}$. Ei voi olla $f(D) \neq B$, sillä tuolloin löytyisi Lemman 1.19 mukaan kuvaus $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, jolle $|\tilde{f}'(z_0)| > |f'(z_0)| = M$ vastoin luvun M määrittelyä. Siis $f(D) = B$ ja $f : D \to B$ on konformikuvaus.

Yksikäsitteisyysväitettä varten olkoon $z_0 \in D$ sekä $g : D \to B$ konformikuvaus. Kuvaukset $T, R : B \to B$,

$$T(z) = \frac{z - g(z_0)}{1 - \overline{g(z_0)}z}, \quad R(z) = e^{-i \arg((Tg)'(z_0))} z,$$

ovat konformisia, joten myös $f := RTg : D \to B$ on. Lisäksi pätee $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) = |(Tg)'(z_0)| > 0$. Jos $\tilde{f}$ on vastaavanlainen kuvaus, ovat $L := \tilde{f} f^{-1}$ ja L^{-1} konformikuvauksia $B \to B$, joille $L(0) = L^{-1}(0) = 0$. Tällöin Lauseen 1.12 nojalla

$$|L(z)| \leq |z| = |L^{-1}(L(z))| \leq |L(z)| \quad \text{eli} \quad |L(z)| = |z| \quad \text{kaikilla } z \in B\,.$$

Edelleen Lauseen 1.12 mukaan L on kierto, joten $\tilde{f} = \zeta f$ jollekin $\zeta \in S$. Näin ollen $\tilde{f}' = \zeta f'$, joten ehtojen $\tilde{f}'(z_0), f'(z_0) > 0$ nojalla $\zeta = 1$. Siis $\tilde{f} = f$. □

1.4. Konformikuvauksen reunakäyttäytyminen

Olkoot M, M' metrisiä avaruuksia, $A \subset M$, $x \in \overline{A}$ sekä $f : A \to M'$ kuvaus. Tällöin joukko

$$\begin{aligned} C(f, x) : &= \{y \in M' : \text{on pisteet } x_n \in A,\ x_n \longrightarrow x, \text{ siten että } f(x_n) \longrightarrow y\} \\ &= \cap_{n=1}^{\infty} \overline{f(A \cap B(x, 1/n))} \end{aligned}$$

on *kuvauksen f kasautumisjoukko pisteessä x*, ja kaikilla $E \subset A$, $x \in \overline{E}$, joukko $C_E(f, x) := C(f|_E, x)$ *kuvauksen f kasautumisjoukko pisteessä x pitkin joukkoa E*. Tärkeä esimerkki joukoista $E \subset B$ ovat *Stolzin kulmat* eli lukujen $\zeta \in S$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja $\rho \in (0, 2\cos\alpha)$ määräämät joukot

$$S_\zeta(\alpha) := \{z \in B(\zeta, \rho) \cap B : (\zeta - z \,|\, \zeta) > |\zeta - z| \cos\alpha\}\,.$$

Lukua ρ ei ole tarpeen sisällyttää merkintään, sillä sovellukset, kuten seuraava tulos, koskevat kuvauksen kasautumisjoukkoja pisteessä ζ.

LAUSE 1.21. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus sekä Δ Stolzin kulma pisteessä $\zeta \in S$. Tällöin*
$$C_E(h,\zeta) = C_\Delta(h,\zeta)$$
jokaiselle yhtenäiselle joukolle $E \subset \Delta$, jolle $\zeta \in \overline{E}$.

TODISTUS. Triviaalisti $C_E(h,\zeta) \subset C_\Delta(h,\zeta)$. Olkoot $\alpha \in (0,\pi/2)$, jolle $\Delta = S_\zeta(\alpha)$, sekä $\beta \in (\alpha,\pi/2)$, $s > 0$, siten että merkinnällä $\Delta' := S_\zeta(\beta)$ on $S(\zeta,3s)\cap\Delta'\cap\Delta \neq \varnothing$. Tällöin joukko $K := \overline{\Delta} \cap \overline{B}(\zeta,2s)\backslash B(\zeta,s)$ on kompakti ja sisältyy alueeseen Δ'.

Olkoon $\xi \in C_\Delta(h,\zeta)$. On siis pisteet $z_n \in \Delta$, $z_n \longrightarrow \zeta$, joille $h(z_n) \longrightarrow \xi$. Valitaan luvut $r_n \in (0,1)$ siten, että $z_n \in \overline{B}(\zeta,2sr_n)\backslash B(\zeta,sr_n)$. Tällöin $r_n \longrightarrow 0$ ja kuvauksille
$$g_n(z) := r_n(z-\zeta)+\zeta\,, \quad z \in \Delta',$$
pätee $z_n \in g_n(K) \subset B$. Analyyttisten injektioiden $f_n := hg_n : \Delta' \to G$ muodostama perhe on rajoitettu ja siten Lauseen 1.16 nojalla normaali. On siis (osa)jono (f_k) sekä kuvaus $f : \Delta' \to \overline{G}$, siten että $f_k \longrightarrow f$ lokaalisti tasaisesti. Koska $z_k \in g_k(K)$, on pisteet $c_k \in K$, joille $g(c_k) = z_k$. Joukon K kompaktiuden nojalla on (osa)jono (c_l) sekä piste $c \in K$, siten että $c_l \longrightarrow c$. Nyt kuvauksen f jatkuvuuden, jonon (f_l) suppenemislaadun sekä ehdon $h(z_l) \longrightarrow \xi$ perusteella
$$\begin{aligned} |f(c)-\xi| &\leq |f(c)-f(c_l)| + |f(c_l)-f_l(c_l)| + |f_l(c_l)-\xi| \\ &\leq |f(c)-f(c_l)| + \sup_{z\in K}|f(z)-f_l(z)| + |h(z_l)-\xi| \\ &\overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$
eli $f(c) = \xi$. Kuvauksen h homeomorfisuuden myötä $\xi \in \partial G$, joten Lauseen 1.14 nojalla $f \equiv \xi$. Koska $\Delta \cap S(\zeta, \frac{3}{2}sr_l) \subset g_l(K)$ ja joukon E yhtenäisyyden sekä ehdon $\zeta \in \overline{E}$ nojalla $\Delta \cap S(\zeta,r)\cap E \neq \varnothing$ pienillä r, on $g_l(K)\cap E \neq \varnothing$ suurilla l. Siten on $a_l \in E$, $a_l \longrightarrow \zeta$, joille $h(a_l) \in f_l(K)$. Koska $f(K) = \{\xi\}$, on suppenemisen lokaalin tasaisuuden perusteella $h(a_l) \longrightarrow \xi$. Siis $\xi \in C_E(h,\zeta)$ ja $C_\Delta(h,\zeta) \subset C_E(h,\zeta)$. □

Jatkossa tarvitaan avuksi myös mitta- ja integraaliteoriaa. Lähtökohdaksi otetaan dominoidun konvergenssin lause (Lause 1.22; ks. [**2**, 217]) sekä sitä edeltävä teoria. Oletetaan tunnetuksi myös Fubinin lause (ks. [**2**, 275]) sekä Riemannin ja Lebesguen integraalien välisen yhteyden kertova tulos (ks. [**2**, 224]), joka mahdollistaa analyysin peruslauseen sekä muuttujanvaihtolauseen yleistetyn käytön.

Olkoon seuraavassa $(M,\mathcal{M},m)$ mitta-avaruus ja olkoot $\mathcal{N},\mathcal{L}$ sitä vastaavat nollamittaisten joukkojen sekä integroituvien kuvausten kokoelmat. Sanotaan, että jokin ominaisuus pätee *melkein kaikilla* $x \in M$ (tai lyhyemmin joskin epämääräisemmin *melkein kaikkialla*), jos se on pätemättä vain nollamittaisessa joukossa. Integroitaessa riittää, että kuvaus on määritelty melkein kaikkialla (kunhan kuvauksella on olemassa mitallinen edustaja). Ennen todistamisen pariin palaamista kirjataan jo mainittu

LAUSE 1.22 (Dominoidun konvergenssin lause). *Olkoon $g \in \mathcal{L}$ ja olkoon (f_j) jono mitallisia kuvauksia, siten että melkein kaikkialla (f_j) suppenee ja $|f_j| \leq g$. Tällöin $f_j \in \mathcal{L}$ jokaisella $j \in \mathbb{Z}_+$ ja*
$$\lim_{j\to\infty}\int_M f_j\,\mathrm{d}m = \int_M \lim_{j\to\infty} f_j\,\mathrm{d}m\,.$$

Lemma 1.23. *Olkoon $f \in \mathcal{L}$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$, siten että jokaisella $E \in \mathcal{M}$, $m(E) < \delta$, pätee $\int_E |f| \,\mathrm{d}m < \epsilon$.*

Todistus. Tehdään antiteesi. Sen mukaan on $\epsilon > 0$ ja joukot $E_j \in \mathcal{M}$, siten että $m(E_j) \leq 2^{-j}$ ja $\int_{E_j} |f| \,\mathrm{d}m \geq \epsilon$. Merkitään $A_k := \cup_{j=k}^{\infty} E_j$. Tällöin $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja $m(A_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} m(E_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \longrightarrow 0$, joten $\chi_{A_k} \longrightarrow 0$ melkein kaikkialla, kun χ_{A_k} on joukon A_k karakteristinen funktio. Lisäksi $0 \leq \chi_{A_k}|f| \leq |f| \in \mathcal{L}$, joten Lauseen 1.22 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int_M \chi_{A_k}|f| \,\mathrm{d}m = \int_M \lim_{k\to\infty} \chi_{A_k}|f| \,\mathrm{d}m = \int_M 0 \,\mathrm{d}m = 0\,.$$

Tämä on ristiriita, sillä $A_k \supset E_k$ ja siten $\int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}m \geq \int_{E_k} |f| \,\mathrm{d}m \geq \epsilon$ kaikilla k. □

Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Kuvaus $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$, siten että pistevieraille väleille $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, \ldots, n \in \mathbb{Z}_+$, joille $\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| < \delta$, pätee $\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(b_k)| < \epsilon$.

Lemma 1.24. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva kuvaus. Jos $N \in \mathcal{N}$, niin $f(N) \in \mathcal{N}$.*

Todistus. Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Olkoot $\delta > 0$ kuten absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä sekä $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ pistevieraita välejä, siten että $N \subset \cup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k| < \delta$. Kuvaus f on jatkuva, joten on pisteet $x_k, y_k \in [a_k, b_k]$, joille $f(x_k) = \max_{x\in[a_k,b_k]} f(x)$ ja $f(y_k) = \min_{y\in[a_k,b_k]} f(y)$. Nyt $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| < \delta$ ja $f(N) \subset f(\cup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]) = \cup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k])$, joten

$$m^*(f(N)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f([a_k, b_k])) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*([f(y_k), f(x_k)]) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k) - f(y_k)) \leq \epsilon\,,$$

kun m^* on mittaa m vastaava ulkomitta. Siis $m^*(f(N)) = 0$ eli $f(N) \in \mathcal{N}$. □

Lemma 1.25. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva kuvaus. Jos $N \in \mathcal{N}$, niin $f(N) \in \mathcal{N}$.*

Todistus. Lemman 1.24 perusteella riittää osoittaa f absoluuttisesti jatkuvaksi. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen myötä $f' \in \mathcal{L}$, joten sille on $\delta > 0$ kuten Lemmassa 1.23. Olkoot $(a_j, b_j) \subset [a, b]$, $j = 1, \ldots, k$, pistevieraita välejä, joille $\sum_{j=1}^{k} |a_k - b_k| < \delta$. Tällöin (yleistetyn) analyysin peruslauseen nojalla

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{k} \Big| \int_{[a_j,b_j]} f' \,\mathrm{d}m \Big| \leq \sum_{j=1}^{k} \int_{[a_j,b_j]} |f'| \,\mathrm{d}m = \int_{\sum_{j=1}^{k}[a_j,b_j]} |f'| \,\mathrm{d}m < \epsilon\,,$$

joten f on absoluuttisesti jatkuva. □

Kun $\zeta \in S$, merkitään rajoitetuille konformikuvauksille $h : B \to G$ loppuluvun ajan $h(\zeta) := \limsup_{r\to 1-} h(r\zeta)$, missä raja-arvo otetaan reaali- ja imaginääriosille erikseen. Kuvauksen $t \mapsto h(e^{it})$ reaali- ja imaginääriosat ovat tällöin mitallisia ja yhtyvät seuraavan tuloksen myötä radiaalisiin raja-arvoihinsa melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Lause 1.26. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus. Tällöin kuvauksella h on radiaaliraja-arvo $\lim_{r\to 1-} h(re^{i\alpha}) \in \mathbb{C}$ melkein kaikilla $\alpha \in [0, 2\pi)$.*

TODISTUS. Olkoon $I_r \subset (-\pi, \pi)$ kullakin $r \in (0,2)$ se avoin väli, jolle kuvaus $\gamma_r : I_r \to S(-1,r) \cap B : t \mapsto re^{it} - 1$ on bijektio. Polun $h\gamma_r$ pituudelle L_r pätee

$$L_r = \int_{I_r} \big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\gamma_r)(t)\big| \,\mathrm{d}t = \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))| r \,\mathrm{d}t \,,$$

joten Schwarzin epäyhtälöstä saadaan

$$L_r^2 \leq \Big(\int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_{I_r} r \,\mathrm{d}t\Big) \leq 2\pi r \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \,\mathrm{d}t \,.$$

Koska h on diffeomorfismi ja $J_h(z) = |h'(z)|^2$, pätee lisäksi (yleistetyn) muuttujanvaihtolauseen sekä Fubinin lauseen nojalla

$$\int_{(0,2)} \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \,\mathrm{d}t\mathrm{d}r = \int_B |h'(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \int_G \mathrm{d}z = m_2(G) < \infty \,.$$

Näin ollen $L_r < \infty$ melkein kaikilla $r \in (0,2)$. Tästä seuraa, että kuvauksella h on raja-arvot pisteissä $e^{\pm i\alpha}$, $\alpha = \arccos(\frac{r^2}{2} - 1)$, ympyräkaarta $|\gamma_r|$ pitkin melkein kaikilla $r \in (0,2)$. Kaaren kummatkin päät sisältyvät Stolzin kulmaan pisteissä $e^{\pm i\alpha}$, joten raja-arvot ovat Lauseen 1.21 nojalla radiaalisia. Lemmaa 1.25 joukoissa $[r_1, r_2] \subset (0,2)$ kuvauksiin $r \mapsto \pm \arccos(\frac{r^2}{2} - 1)$ soveltamalla nähdään, että raja-arvo on olemassa pisteessä $e^{i\alpha}$ melkein kaikilla $\alpha \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ ja näin ollen myös melkein kaikilla $\alpha \in [0, 2\pi)$. □

Yksikkökiekossa jatkuville kuvauksille pätee hieman Lausetta 1.26 muistuttava tulos. Lause 1.27 seuraa välittömästi *Collingwoodin maksimaalisuuslauseesta*, jonka suhteellisen helppolukuinen mutta pitkähkö todistus löytyy lähteestä [**3**, 76–77].

LAUSE 1.27. *Olkoon $f : B \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Tällöin avaruuden S joukko $\{\zeta \in S : C_{[0,\zeta)}(f,\zeta) \neq C(f,\zeta)\}$ on 1. kategoriaa.*

Myöskään seuraavaa lausetta ei todisteta. Lähteessä [**9**, 20] tulokselle on esitetty todistus, joka nojaa lähteessä [**10**, 31] todistettuun *Janiszewskin lemmaan*. Lause 1.28 on otettu mukaan lähinnä havainnollistavan luonteensa vuoksi.

LAUSE 1.28. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus. Tällöin h on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

Luvun lopuksi tarkastellaan vielä analyyttisten kuvausten Poisson'n integraaleja Lauseiden 1.31 ja 1.32 todistuksia silmällä pitäen. Lemman 1.29 todistuksen idea on peräisin osoitteesta [**13**], ja Lemman 1.30 sekä Lauseiden 1.31 ja 1.32 todistuksiin on saatu vihiä lähteestä [**5**, 357, 333 & 280].

LEMMA 1.29. *Olkoon $f : B \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus ja $r \in (0,1)$. Tällöin*

$$f(z) = \int_{(0,2\pi)} f(re^{it}) \, \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{it} - z|^2} \,\mathrm{d}t \quad \textit{kaikilla } z \in B(0,r) \,.$$

Todistus. Oletuksen perusteella kuvaus $f_r(z) := f(rz)$ on analyyttinen joukossa $B(0,1/r) \supset S$. Olkoon $se^{i\theta} \in B$, jolloin $\frac{1}{s}e^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\overline{B}$. Nyt Lauseen 1.7 nojalla

$$\begin{aligned} f_r(se^{i\theta}) - 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f_r(e^{it})}{e^{it} - se^{i\theta}}\, ie^{it}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f_r(e^{it})}{e^{it} - \frac{1}{s}e^{i\theta}}\, ie^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})\Big(\frac{1}{1 - se^{i(\theta-t)}} + \frac{se^{-i(\theta-t)}}{1 - se^{-i(\theta-t)}}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})\,\frac{1-s^2}{|e^{it} - se^{i\theta}|^2}\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

joten kaikilla $z \in B(0,r)$ pätee

$$f(z) = f_r\Big(\frac{z}{r}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})\,\frac{1 - \frac{|z|^2}{r^2}}{|e^{it} - \frac{z}{r}|^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} f(re^{it})\,\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Lemma 1.30. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus. Tällöin*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} h(e^{it})\,\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}t \quad \textit{kaikilla } z \in B\,.$$

Todistus. Riittää osoittaa väite kuvaukselle $u := \mathit{Re}\, h$. Olkoot $r \in (0,1)$ ja $z \in B(0,r)$. Jokaiselle $s \in [r,1]$ merkitään

$$P_s(t) := \frac{s^2 - |z|^2}{|se^{it} - z|^2}\,, \quad t \in (0,2\pi)\,.$$

Nyt on luvut $M, M' > 0$, joille $|u| \le M$ ja $|P_1(t)| \le M'$ kaikilla $t \in (0,2\pi)$. Siten Lemman 1.29 (reaaliosaversion) nojalla kaikilla $s \in [r,1)$ pätee

$$\begin{aligned} \Big|u(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} u(e^{it})\,\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}t\Big| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} u(se^{it})P_s(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} u(e^{it})P_1(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\le \frac{M}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} |P_s(t) - P_1(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{M'}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} |u(se^{it}) - u(e^{it})|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Kun $s \longrightarrow 1$, suppenevat integrandit Lauseen 1.26 nojalla nollaan melkein kaikilla $t \in (0,2\pi)$. Lisäksi integrandit ovat rajoitettuja, joten Lauseen 1.22 mukaan myös integraalit suppenevat nollaan. Väite seuraa, sillä $r \in (0,1)$ valittiin mielivaltaisesti.

□

Lause 1.31. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus ja $C \subset S$ avoin, ei–tyhjä joukko. Jos kuvaus $\zeta \mapsto h(\zeta)$, $\zeta \in S$, on jatkuva joukossa C, on kuvauksella h jatkuva jatke joukkoon $B \cup C$.*

Todistus. Oletetaan kuvaus $\zeta \mapsto h(\zeta)$ jatkuvaksi joukossa C. Olkoon $e^{it_0} \in C$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Riittää osoittaa, että $h(e^{it_0}) = \lim_{z \to e^{it_0}} h(z)$, kun rajankäynnissä $z \in B$. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletusten nojalla löytyy $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, siten että

$$|h(e^{it}) - h(e^{it_0})| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{kaikilla } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) =: I_1\,. \quad (*)$$

Olkoon $z = re^{i\theta} \in B$, $\theta \in (t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2})$. Merkitään $I := (t_0 - \delta,\, 2\pi + t_0 - \delta)$. Tällöin kaikilla $t \in I \setminus I_1 =: I_2$ pätee $|\theta - t| \in (\frac{\delta}{2}, \frac{3\delta}{2}) \subset (\frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2})$ ja edelleen

$$|e^{it} - z| = |1 - re^{i(\theta - t)}| \geq 1 - r|\cos(\theta - t)| > 1 - r\cos\frac{\delta}{2}\,.$$

Siten, koska h on rajoitettu, on $r_0 \in (0,1)$, jolle kaikilla $r \in (r_0, 1)$ ja $t \in I_2$

$$P(z,t) := \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} < \frac{1 - r^2}{(1 - r\cos\frac{\delta}{2})^2} < \frac{\epsilon/2}{\sup_{t\in I}|h(e^{it}) - h(e^{it_0})|}\,. \quad (**)$$

Oletetaan, että $z \in \{re^{i\theta} : r \in (r_0, 1),\, \theta \in (t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2})\} =: A$. Lemman 1.29 todistuksesta kuvaukselle $f \equiv 1$ (jolloin $f_r \equiv 1$) nähdään, että $\frac{1}{2\pi}\int_I P(z,t)\,\mathrm{d}t = 1$. Lisäksi $P(z,t) > 0$ kaikilla $t \in I$, joten Lemman 1.30 sekä ehtojen $(*)$ ja $(**)$ nojalla

$$\begin{aligned}
|h(z) - h(e^{it_0})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{I_1}|h(e^{it}) - h(e^{it_0})|P(z,t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{I_2}|h(e^{it}) - h(e^{it_0})|P(z,t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{I_1}P(z,t)\,\mathrm{d}t + \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{I_2}\mathrm{d}t \\
&< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Väite seuraa, sillä $B(e^{it_0}, s) \cap B \subset A$ pienillä $s > 0$. □

LAUSE 1.32. *Olkoon $h : B \to G$ rajoitettu konformikuvaus ja $w_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin $h(e^{i\alpha}) \neq w_0$ melkein kaikilla $\alpha \in [0, 2\pi)$.*

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $w_0 = 0$ ja $G \subset B$. Valitaan $r \in (0,1)$, siten että $h(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B \setminus B(0,r)$. Jos kuvauksella h on nollakohta a, niin $a \in B(0,r)$ ja määritellään $T(z) := (\frac{z}{r} - \frac{a}{r})/(1 - \frac{\bar{a}}{r}\frac{z}{r})$; muuten $T :\equiv 1$. Tällöin on $s \in (r,1)$, siten että kuvaus $g(z) := h(z)/T(z)$ on analyyttinen ja nollasta eroava yhdesti yhtenäisessä alueessa $B(0,s)$. Lauseen 1.17 mukaan on $\log g$, jolle Lemman 1.29 nojalla pätee

$$\log g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)}\log g(re^{it})\,\mathrm{d}t\,. \quad (\star)$$

On helppo tarkistaa, että $T(S(0,r)) \subset S$. Siten $|g| = |h|$ joukossa $S(0,r)$. Lisäksi, kun log merkitsee reaalistakin logaritmia, pätee ehdon $|g(z)| = |e^{\log g(z)}| = e^{Re(\log g(z))}$ myötä $Re(\log g(z)) = \log|g(z)|$. Näin ollen ehdosta $(\star)$ saadaan

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)}\log|g(re^{it})|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)}\log|h(re^{it})|\,\mathrm{d}t\,. \quad (\star\star)$$

Olkoot sitten $r_n \in (r,1)$, $r_n \longrightarrow 1$, ja T_n, g_n, s_n kuten T, g, s edellä. Kuvauksen h nollakohdan tapauksessa $g_n(0) = r_n h'(0)$ $(a = 0)$ tai $g_n(0) = -r_n h(0)/a$ $(a \neq 0)$; muuten $g_n(0) = h(0)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Erityisesti aina on $\lim_{n\to\infty} g_n(0) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Oletuksen $G \subset B$ ja lukujen r_n valinnan myötä kuvaukset $t \mapsto -\log|h(r_n e^{it})|$ ovat positiivisia sekä jatkuvina mitallisia. Lauseen 1.26 ja logaritmin jatkuvuuden nojalla radiaaliraja-arvo $-\log|h(e^{it})|$ on olemassa melkein kaikilla $t \in (0, 2\pi)$, joten Fatoun lemmasta ja ehdosta $(\star\star)$ seuraa

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(0,2\pi)} -\log|h(e^{it})|\,\mathrm{d}t \;\leq\; \liminf_{n\to\infty}(-\log|g_n(0)|) = -\log|\lim_{n\to\infty} g_n(0)| < \infty\,.$$

Näin ollen $-\log|h(e^{it})| \neq \infty$ eli $h(e^{it}) \neq 0$ melkein kaikilla $t \in [0, 2\pi)$. □

LUKU 2

Ryhmä $\Sigma(G)$

Olkoon loppututkielman ajan $G \subset \mathbb{C}$ rajoitettu, yhdesti yhtenäinen alue sekä $h : B \to G$ konformikuvaus (joita löytyy Lauseen 1.20 nojalla). Merkitään lisäksi

$$\Sigma(D) := \{f : D \to D \text{ konformikuvaus}\}$$

jokaiselle yhdesti yhtenäiselle alueelle $D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Tässä luvussa tutkitaan joukon $\Sigma(G)$ algebrallisia ominaisuuksia kuvausten yhdistämisen toimiessa laskutoimituksena. Heti kohdassa 2.1 osoitetaan, että joukot $\Sigma(B), \Sigma(G)$ ovat isomorfisia ryhmiä. Näin ollen tutkimukset on luonnollista tehdä ryhmässä $\Sigma(B)$, jonka alkiot Lauseen 2.2 nojalla ovat Möbius-kuvauksia. Yhtä hyvin voitaisiin tarkastella ryhmää $\Sigma(H)$,

$$H := \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\},$$

sillä Lauseen 2.1 myötä $\Sigma(H)$ vastaa luonnollisella tavalla hyvin tunnettua matriisien tekijäryhmää $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$. Ryhmässä $\Sigma(B)$ laskeminenkin osoittautuu kuitenkin sujuvan kohtalaisen vaivattomasti, ja tämän lisäksi siellä voidaan muotoilla joitakin erityistuloksia (ks. Lause 2.8).

2.1. Isomorfismi $\Phi : \Sigma(B) \to \Sigma(G)$

Osoitetaan aivan aluksi, että alueelle $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ joukko $\Sigma(D)$ todella muodostaa ryhmän kuvausten yhdistämisen suhteen. Jos $f_1, f_2 \in \Sigma(D)$, niin yhdistetty kuvaus $f_1 f_2 : D \to D$ on määritelty ja konformikuvausten yhdisteenä konforminen. Näin ollen $f_1 f_2 \in \Sigma(D)$ eli ainakin kuvausten yhdistäminen on joukon $\Sigma(D)$ laskutoimitus. Laskutoimitus on vieläpä assosiatiivinen ja sillä on neutraalialkio $\mathrm{id}_D \in \Sigma(D)$. Lisäksi jokaisella $f \in \Sigma(D)$ on konforminen käänteiskuvaus $f^{-1} : D \to D$ eli käänteisalkio $f^{-1} \in \Sigma(D)$. Siis $\Sigma(D)$ on ryhmä.

Konformikuvauksen $h : B \to G$ avulla voidaan nyt määritellä ryhmien $\Sigma(B)$ ja $\Sigma(G)$ välinen kuvaus

$$\Phi : \Sigma(B) \to \Sigma(G), \quad \Phi(L) = hLh^{-1}.$$

Kuvaus Φ on hyvin määritelty, sillä $hLh^{-1} : G \to G$ on konformikuvausten yhdisteenä konforminen. Kaikilla $L_1, L_2 \in \Sigma(B)$ pätee

$$\Phi(L_1)\Phi(L_2) = hL_1h^{-1}hL_2h^{-1} = hL_1L_2h^{-1} = \Phi(L_1L_2),$$

joten Φ on homomorfismi. Lisäksi Φ on bijektio, ilmeisenä käänteiskuvauksenaan

$$\Phi^{-1} : \Sigma(G) \to \Sigma(B), \quad \Phi^{-1}(\phi) = h^{-1}\phi h.$$

Siis Φ on isomorfismi ja ryhmät $\Sigma(B), \Sigma(G)$ siten isomorfiset. Luvussa 3 tutkitaan isomorfismien $\Phi^{\pm 1}$ jatkuvuutta sup-metriikan suhteen, ja Lauseiden 3.7 ja 3.9 myötä osoittautuu, että Φ^{-1} on jatkuva aina, kun taas Φ on jatkuva täsmälleen joukon ∂G ollessa lokaalisti yhtenäinen.

2.2. Ryhmät Möb, $\Sigma(H)$ ja $\Sigma(B)$

Möbius-kuvausten ryhmä

$$\text{Möb} := \Big\{ \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ kuvaus; } a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0 \Big\}$$

sekä sitä koskevat perustulokset oletetaan lukijalle jokseenkin tutuiksi. Mainittakoon erityisesti, että kuvaus $L \in$ Möb on aina konforminen ja

- kiinnittää täsmälleen 1 tai 2 joukon $\overline{\mathbb{C}}$ pistettä, paitsi jos $L = \mathrm{id}$.
- voidaan esittää *normaalimuodossa* eli siten, että $ad - bc = 1$, jolloin nelikko (a,b,c,d) on etumerkkiä vaille yksikäsitteinen.
- säilyttää *kaksoissuhteen* eli eri pisteillä $z_1, z_2, z_3, z \in \overline{\mathbb{C}}$ on voimassa
$$[L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z)] = [z_1, z_2, z_3, z] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z}{z_3 - z}\,.$$
- säilyttää *yleistetyt ympyrät* eli suorien $(\ni \infty)$ ja ympyröiden joukon.
- säilyttää *peilipisteet* eli jos z, z^* ovat peilipisteitä yleistetyn ympyrän K suhteen, ovat $L(z), L(z^*)$ peilipisteitä yleistetyn ympyrän $L(K)$ suhteen.

Osoitetaan peilipisteitä koskeva väite. Peilipisteellä tarkoitetaan tässä pisteen kuvaa *peilauksessa yleistetyn ympyrän suhteen*, jotka määritellään seuraavasti: Peilauksella suoran $\zeta\overline{\mathbb{R}} + z_0$, $\zeta \in S$, $z_0 \in \mathbb{C}$, suhteen tarkoitetaan ihan tavallista peilausta, jonka lausekkeelle löydetään esitys kuvaamalla vaiheittain

$$z \mapsto \overline{\zeta}(z - z_0) \mapsto \zeta(\overline{z} - \overline{z_0}) \mapsto \zeta^2(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 = \zeta^2 \overline{z} + z_0 - \zeta^2 \overline{z_0}\,,$$

missä siis varsinainen peilaaminen käytiin tekemässä reaaliakselin suhteen. Peilaus ympyrän $S(z_0, r)$ suhteen taas määritellään ehdolla

$$z \mapsto z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0) = \frac{z_0 \overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} =: z^*,$$

joten erityisesti $z^* \in \overrightarrow{z - z_0}$ ja $|z^* - z_0||z - z_0| = r^2$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Peilaus yleistetyn ympyrän K suhteen on siis Möbius-kuvauksen kompleksikonjugaatti, joka lisäksi on itsensä käänteiskuvaus ja kiinnittää joukon K pisteet. Jos nyt $L \in$ Möb ja $\rho_K, \rho_{L(K)}$ ovat peilauksia ympyröiden $K, L(K)$ suhteen, pätee $f := \rho_{L(K)} L \rho_K \in$ Möb ja $f(z) = L(z)$ kaikilla $z \in K$. Tästä seuraa $f = L$ eli $L\rho_K = \rho_{L(K)} L$, mikä merkitsee juuri pelipisteiden säilymistä kuvauksessa L.

Lauseessa 2.2 nähdään ryhmän $\Sigma(B)$ koostuvan Möbius-kuvausten rajoittumista. Sama pätee siten myös ryhmälle $\Sigma(H)$, sillä $\Sigma(H) = k\Sigma(B)k^{-1}$ sopivalle Möbius-kuvauksen rajoittumalle $k : B \to H$. Näin ollen voidaan tulkita $\Sigma(B), \Sigma(H) \leq$ Möb. Lauseen 2.1 todistuksessa käytetään jälkimmäistä tietoa, joten Lause 2.2 todistetaan käyttämättä Lausetta 2.1. Lopuksi todetaan, että matriisikertolaskulla varustetulle kääntyvien $\mathbb{C}$-kertoimisten 2×2-matriisien ryhmälle $GL(2, \mathbb{C})$ kuvaus

$$GL(2,\mathbb{C}) \to \text{Möb} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a\,\mathrm{id} + b}{c\,\mathrm{id} + d}$$

on surjektiivinen homomorfismi. Esimerkiksi kuvaukselle $L(z) = (az + b)/(cz + d)$ pätee siten $L^{-1}(z) = (dz - b)/(-cz + a)$.

Osoitetaan esitellyistä tuloksista lähtien jo luvun alussa lupailtu

LAUSE 2.1. *Olkoon $SL(2,\mathbb{R})$ matriisikertolaskulla varustettu reaalikertoimisten 2×2 -matriisien, joiden determinantti on 1, ryhmä. Tällöin kuvaus*

$$SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\} \to \Sigma(H) : \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a\,\mathrm{id}+b}{c\,\mathrm{id}+d}$$

on hyvin määritelty isomorfismi.

TODISTUS. Olkoon $L \in \Sigma(H)$. Edellä todettiin $\Sigma(H) \subset$ Möb, joten L voidaan esittää muodossa $L(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$. Koska $L(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, on $L(z) = \overline{L(\overline{z})}$ kaikilla $z \in \overline{\mathbb{R}}$. Siis L ja Möbius-kuvaus $z \mapsto \overline{L(\overline{z})} = (\overline{a}z+\overline{b})/(\overline{c}z+\overline{d})$ ovat yksi ja sama kuvaus. Lisäksi $\overline{a}\overline{d}-\overline{b}\overline{c}=1$, joten

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}) = \pm(a,b,c,d) \quad \text{eli} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad a,b,c,d \in i\mathbb{R}\,.$$

Näin ollen

$$0 < Im\,L(i) = |ci+d|^{-2} Im(a\overline{c}+a\overline{d}i-b\overline{c}i+b\overline{d}) = |ci+d|^{-2}(a\overline{d}-b\overline{c})$$

eli $a\overline{d}-b\overline{c} > 0$, joten ehdon $ad-bc=1$ nojalla pätee tapaus $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Jos taas oletetaan $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$, niin kuvaukselle $L(z) := (az+b)/(cz+d)$ on $L(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, $Im\,L(i) = |ci+d|^{-2} > 0$ ja siten $L \in \Sigma(H)$. On siis näytetty, että kuvaus

$$SL(2,\mathbb{R}) \to \Sigma(H) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a\,\mathrm{id}+b}{c\,\mathrm{id}+d}$$

on hyvin määritelty surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on $\{\pm I\}$. Väite seuraa nyt algebran ensimmäisestä isomorfialauseesta. □

Selvitetään seuraavassa (käyttämättä Lausetta 2.1), millaisia ovat ryhmän $\Sigma(B)$ alkiot. Erityisesti nähdään tulkinta $\Sigma(B) \leq$ Möb.

LAUSE 2.2. *Ryhmä $\Sigma(B)$ koostuu Möbius-kuvausten rajoittumista*

$$L : B \to B\,, \quad L(z) = \zeta\,\frac{z+c}{1+\overline{c}z}\,,$$

missä $\zeta \in S$, $c \in B$. Lisäksi vakiot ζ, c ovat yksikäsitteiset kullekin $L \in \Sigma(B)$.

TODISTUS. On suoraviivaista tarkistaa, että esitetty lauseke antaa ryhmän $\Sigma(B)$ alkion. Osoitetaankin ainoastaan väitteen toinen puoli. Olkoon $L \in \Sigma(B)$. Merkitään $c := -L^{-1}(0) \in B$, jolloin siis kuvaus $T : B \to B : z \mapsto (z+c)/(1+\overline{c}z)$ kuuluu ryhmään $\Sigma(B)$. Siten myös $LT^{-1}, TL^{-1} \in \Sigma(B)$. Lisäksi $LT^{-1}(0) = TL^{-1}(0) = 0$, joten Lauseen 1.12 nojalla

$$|LT^{-1}(z)| \leq |z| = |TL^{-1}(LT^{-1}(z))| \leq |LT^{-1}(z)| \quad \text{eli} \quad |LT^{-1}(z)| = |z|$$

kaikilla $z \in B$. Edelleen Lauseen 1.12 nojalla LT^{-1} on kierto eli on $\zeta \in S$, jolle

$$LT^{-1}(z) = \zeta z \quad \text{ja siten} \quad L(z) = \zeta\,T(z) = \zeta\,\frac{z+c}{1+\overline{c}z} \quad \text{kaikilla } z \in B\,.$$

Siis L on väitettyä muotoa. Annetulle $L \in \Sigma(B)$ lukujen ζ, c yksikäsitteisyys seuraa ehdoista $c = -L^{-1}(0)$ ja $\zeta = L(z)/T(z)$, kun $z \in B\backslash\{-c\}$ ja kuvaus T on määritelty luvun c avulla kuten todistuksen alussa. □

Merkintä. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $c \in B$. Asetetaan

$$R_\alpha(z) := e^{i\alpha} z \quad \text{ja} \quad T_c(z) := \frac{z + c}{1 + \overline{c}z} \quad \text{kaikilla } z \in B,$$

mikä määrää kuvaukset $R_\alpha, T_c \in \Sigma(B)$. Lauseen 2.2 nojalla $\Sigma(B)$ koostuu kuvauksista $L = R_\alpha T_c$, missä kuvaukset R_α, T_c ovat yksikäsitteiset (tosin luku α vain modulo 2π). Tunnetusti $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, joten $R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$. Samoin matriisivastaavuudesta seuraa, että $T_c^{-1} = T_{-c}$. Kuvauksia R_α, T_c nimitetään vastaavasti *kierroiksi* ja *translaatioiksi*. Tilanteen salliessa alaindeksit jätetään pois näkyvistä. Merkitään lisäksi

$$a * b := \frac{a + b}{1 + a\overline{b}} \quad (= T_b(a) \in B) \quad \text{kaikilla } a, b \in B\,.$$

Tällöin '$*$' on joukon B laskutoimitus, jonka neutraalialkio on 0 ja jonka suhteen kaikilla $a \in B$ on käänteisalkio $-a \in B$. Kiekon B halkaisijoilla $(-\zeta, \zeta)$ jopa pätee

PROPOSITIO 2.3. *Jokaisella $\zeta \in S$ pari $((-\zeta, \zeta), *)$ on Abelin ryhmä.*

TODISTUS. Koska neutraalialkio 0 sekä luvun $a \in (-\zeta, \zeta)$ käänteisalkio $-a$ ovat joukossa $(-\zeta, \zeta)$, niin riittää osoittaa, että '$*$' on joukon $(-\zeta, \zeta)$ kommutatiivinen ja assosiatiivinen laskutoimitus.

Olkoon ensin $\zeta = 1$ ja olkoot $a, b, c \in (-1, 1)$. Selvästi $a * b = b * a \in \mathbb{R}$, joten '$*$' on joukon $(-1, 1)$ kommutatiivinen laskutoimitus. Lisäksi

$$(a * b) * c = \frac{a + b}{1 + ab} * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab}c} = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ac + bc}\,,$$

missä viimeinen muoto on invariantti lukujen a, b, c permutaatioissa. Kommutoinnin ja permutaatioinvarianssin nojalla

$$a * (b * c) = (b * c) * a = (a * b) * c\,,$$

joten '$*$' on assosiatiivinen joukossa $(-1, 1)$. Olkoon sitten $\zeta \in S$ mielivaltainen. Tällöin

$$a\zeta * b\zeta = \frac{a\zeta + b\zeta}{1 + a\zeta\overline{b\zeta}} = \frac{a + b}{1 + a\overline{b}}\,\zeta = (a * b)\zeta\,,$$

joten '$*$' on myös joukon $(-\zeta, \zeta)$ kommutatiivinen ja assosiatiivinen laskutoimitus. Siis $((-\zeta, \zeta), *)$ on Abelin ryhmä kaikilla $\zeta \in S$. $\square$

Osoitetaan uusille merkinnöille kaksi "laskusääntöä", joiden myötä voidaan välttää pistetasolle meneminen kuvauksilla $L \in \Sigma(B)$ laskettaessa.

LEMMA 2.4. *Olkoot $a, b, c \in B$ ja $\zeta \in S$. Tällöin*

$$T_a T_b = R_{2\arg(1+a\overline{b})} T_{a*b} \quad \textit{ja} \quad R_{\arg\zeta} T_c = T_{\zeta c} R_{\arg\zeta}\,.$$

TODISTUS. Kiinnitetään $z \in B$, jolloin väitteet seuraavat laskuista

$$R_{\arg\zeta} T_c(z) = \zeta\,\frac{z + c}{1 + \overline{c}z} = \frac{\zeta z + \zeta c}{1 + \overline{\zeta c}\,\zeta z} = T_{\zeta c} R_{\arg\zeta}(z) \quad \text{ja}$$

$$
\begin{aligned}
T_aT_b(z) = \frac{\frac{z+b}{1+\bar{b}z}+a}{1+\overline{a}\frac{z+b}{1+\bar{b}z}} = \frac{(1+a\bar{b})z+a+b}{1+\overline{a}b+(\overline{a}+\bar{b})z} &= \frac{1+a\bar{b}}{\overline{1+a\bar{b}}}\cdot\frac{z+\frac{a+b}{1+a\bar{b}}}{1+(\overline{\frac{a+b}{1+a\bar{b}}})z} \\
&= \Big(\frac{1+a\bar{b}}{|1+a\bar{b}|}\Big)^2\cdot\frac{z+(a*b)}{1+\overline{(a*b)}z} \\
&= R_{2\arg(1+a\bar{b})}T_{a*b}(z)\,.
\end{aligned}
$$

□

Osoitetaan seuraavassa heti Lemman 2.4 avulla, että kierroilla $R\neq -\mathrm{id}$ on esitys kolmen translaation yhdisteenä (ja kierrolla $-\mathrm{id}=R_{\pi/2}^2$ siten kuuden). Erityisesti Lauseen 2.2 myötä translaatiot *virittävät* ryhmän $\Sigma(B)$.

PROPOSITIO 2.5. *Olkoon $\alpha\in\mathbb{R}$. Tällöin $R_\alpha=T_aT_bT_c$ joillekin $a,b,c\in B$, jos ja vain jos $e^{i\alpha}\neq -1$.*

TODISTUS. Lemman 2.4 nojalla

$$R_{2\arg(1+z\overline{w})}=T_zT_wT_{-(z*w)}$$

kaikilla $z,w\in B$. Huomataan, että kuvaukset

$$B\times B\to B(1,1):(z,w)\mapsto 1+z\overline{w}\quad\text{ja}\quad B(1,1)\to(-\pi,\pi):\zeta\mapsto 2\arg\zeta$$

ovat surjektioita: edellinen, koska (asettamalla $w=r$) sen kuvajoukko sisältää joukot $B(1,r)$, $r\in(0,1)$, ja jälkimmäinen siksi, että origosta puolitasoon $\{z\in\mathbb{C}: Re\,z>0\}$ lähtevät puolisuorat leikkaavat joukkoa $S(1,1)\setminus\{0\}$ ja siten myös joukkoa $B(1,1)$. Siispä surjektioiden yhdisteenä kuvaus

$$B\times B\to(-\pi,\pi):(z,w)\mapsto 2\arg(1+z\overline{w})$$

on surjektio. Näin ollen $R_\alpha=T_zT_wT_{-(z*w)}$ joillekin $z,w\in B$, jos $e^{i\alpha}\neq -1$.

Oletetaan, että $R_\alpha=T_aT_bT_c$, $a,b,c\in B$. Lemmaa 2.4 kahdesti hyödyntämällä

$$R_\alpha=R_{2\arg(1+a\bar{b})}T_{a*b}T_c=R_{2\arg(1+a\bar{b})+2\arg(1+(a*b)\overline{c})}T_{(a*b)*c}\,,$$

missä Lauseen 2.2 nojalla $(a*b)*c=0$ eli $c=-(a*b)$ ja siten $\arg(1+(a*b)\overline{c})=0$. Näin ollen

$$R_\alpha=R_{2\arg(1+a\bar{b})}\quad\text{eli}\quad e^{i\alpha}=e^{i\,2\arg(1+a\bar{b})}\neq -1\,,$$

missä erisuuruus seuraa tiedosta $2\arg(1+a\bar{b})\in(-\pi,\pi)$. □

Annetaan tässä kohtaa hieman esimakua ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmistä, joita aletaan jatkossa etsiä systemaattisemminkin kuvausten $L\in\Sigma(B)$ kiintopisteiden avulla.

SEURAUS 2.6. *Joukko* $\mathrm{O}:=\{R_\alpha\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$ *sekä joukot* $\Theta_{\pm\zeta}:=\{T_c\,|\,c\in(-\zeta,\zeta)\}$, *$\zeta\in S$, ovat ryhmän $\Sigma(B)$ Abelin aliryhmiä.*

TODISTUS. Kiertojen joukolle O väite on selvä. Kiinnitetään $\zeta\in S$. Kaikilla $c_1,c_2\in(-\zeta,\zeta)$ pätee $\arg(1+c_1\overline{c_2})=0$ ja siten Lemman 2.4 nojalla

$$T_{c_1}T_{c_2}=R_{2\arg(1+c_1\overline{c_2})}T_{c_1*c_2}=T_{c_1*c_2}\,.$$

Lisäksi Proposition 2.3 nojalla $((-\zeta,\zeta),*)$ on Abelin ryhmä ja kuvaus

$$((-\zeta,\zeta),*)\to\Theta_{\pm\zeta}:c\mapsto T_c$$

on surjektio, joten myös $\Theta_{\pm\zeta}$ on Abelin ryhmä. □

2.3. Kuvausten $L \in \Sigma(B)$ kiintopisteet

Varsinaista aliryhmätutkimusta varten siirretään huomio nyt kuvausten $L \in \Sigma(B)$ kiintopisteisiin joukossa $\overline{B}$, kun tulkitaan $\Sigma(B) \subset$ Möb. Lähestymistavan perustana on tieto siitä, että jokaisella Möbius-kuvauksella on vähintään yksi kiintopiste ja että annetun joukon permutaatiot, jotka kiinnittävät annetun pistejoukon, muodostavat aina ryhmän kuvausten yhdistämisen suhteen. Osoitetaan ensin, että ryhmässä $\Sigma(B)$ kuvaukset jakautuvat kiintopistekäyttäytymisensä perusteella kolmeen kategoriaan:

Lemma 2.7. *Olkoon $L \in \Sigma(B)$, $L \neq \mathrm{id}$. Tällöin yksi ja vain yksi seuraavista ehdoista on voimassa:*

· *Kuvauksella L on täsmälleen yksi kiintopiste joukossa B.*
· *Kuvauksella L on täsmälleen yksi kiintopiste joukossa S.*
· *Kuvauksella L on täsmälleen kaksi kiintopistettä joukossa S.*

Todistus. Oletetaan ensin, että kuvauksella L on kiintopiste $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Koska $L(S) = S$ ja kuvaus $z \mapsto \overline{z}^{-1} =: z^*$ on peilaus ympyrän S suhteen, pätee

$$L(\overline{a}^{-1}) = L(a^*) = L(a)^* = a^* = \overline{a}^{-1}.$$

Siten myös $\overline{a}^{-1} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ on kuvauksen L kiintopiste. Täsmälleen toinen kiintopisteistä on joukossa B eikä muita kiintopisteitä oletuksen $L \neq \mathrm{id}$ nojalla löydy. Näin ollen Lemman ensimmäinen ehto kattaa täsmälleen ne tapaukset, joissa kuvauksella L on kiintopiste $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Jäljelle jäävät ehdot sisältävät loput tapaukset ja ovat selvästi erillisiä. □

Seuraavan karakterisoinnin avulla nähdään kätevästi, mihin Lemman 2.7 kiintopistekategorioista annettu kuvaus $R_\alpha T_c \in \Sigma(B)$ kuuluu. Samalla tulee näytetyksi, että kategoriat ovat ei–tyhjiä.

Lause 2.8. *Olkoon $L \in \Sigma(B)$, $L = R_\alpha T_c \neq \mathrm{id}$. Tällöin kuvauksella L on tasan*

· *yksi kiintopiste joukossa B, jos ja vain jos* $|c| < \sin \dfrac{|\alpha|}{2}$.
· *yksi kiintopiste joukossa S, jos ja vain jos* $|c| = \sin \dfrac{|\alpha|}{2}$.
· *kaksi kiintopistettä joukossa S, jos ja vain jos* $|c| > \sin \dfrac{|\alpha|}{2}$.

Todistus. Lemman 2.7 nojalla riittää osoittaa implikaatiot '$\Rightarrow$'. Voidaan olettaa $c \neq 0$, jolloin pisteet $-1/\overline{c}$, ∞ eivät ole kuvauksen L kiintopisteitä. Kun merkitään $\zeta := e^{i\alpha}$, pätee kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{c}\}$

$$\begin{aligned} L(z) = \zeta \frac{z+c}{1+\overline{c}z} = z \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{1-\zeta}{\overline{c}} z - \zeta \frac{c}{\overline{c}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = -\frac{1-\zeta}{2\overline{c}} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\zeta}{2\overline{c}}\right)^2 + \zeta \frac{c}{\overline{c}}} \ . \quad (*) \end{aligned}$$

Oletetaan, että kuvauksella L on tasan yksi kiintopiste $a \in S$. Ehdon $(*)$ nojalla

$$a = -\frac{1-\zeta}{2\overline{c}} \quad \text{ja siten} \quad 1 = |a|^2 = \frac{|1-\zeta|^2}{4|c|^2} ,$$

missä

$$\frac{|1-\zeta|^2}{4} = \frac{1}{2}(1 - Re\,\zeta) = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = \sin^2\frac{\alpha}{2}\,. \quad (**)$$

Näin ollen $\sin\frac{|\alpha|}{2} = |c|$ eli väite pätee ainakin tässä tapauksessa.

Muissa tapauksissa kuvauksella L on Lemman 2.7 todistuksen nojalla kiintopisteet $a_1, a_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (kiintopiste 0 vastaisi tilannetta $c = 0$). Ehdon $(*)$ nojalla

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{1-\zeta}{2\overline{c}}\,,$$

joten yhdessä ehdon $(**)$ kanssa

$$\frac{|a_1 + a_2|}{2} = \frac{|1-\zeta|}{2|c|} = \frac{\sin\frac{|\alpha|}{2}}{|c|}\,. \quad (***)$$

Oletetaan ensin, että esimerkiksi $a_1 \in B\backslash\{0\}$. Lemman 2.7 todistuksessa nähtiin, että tällöin $a_2 = 1/\overline{a_1}$. Siten

$$\frac{|a_1 + a_2|}{2} = \frac{|a_1|^2 + 1}{2|\overline{a_1}|} = \frac{(|a_1|-1)^2 + 2|a_1|}{2|a_1|} > 1$$

eli ehdon $(***)$ nojalla $\sin\frac{|\alpha|}{2} > |c|$, kuten väitettiinkin.

Oletetaan sitten, että $a_1, a_2 \in S$. Tällöin merkinnällä $\xi := e^{-i(\arg a_1 + \arg a_2)/2}$ pätee

$$\xi a_2 = e^{i(\arg a_2 - \arg a_1)/2} = \overline{e^{i(\arg a_1 - \arg a_2)/2}} = \overline{\xi a_1}\,.$$

Lisäksi $|\arg(\xi a_1)| = \frac{1}{2}|\arg a_1 - \arg a_2| \in (0,\pi)$, joten

$$\frac{|a_1 + a_2|}{2} = \frac{|\xi a_1 + \xi a_2|}{2} = |Re(\xi a_1)| < 1\,.$$

Väite $\sin\frac{|\alpha|}{2} < |c|$ seuraa nyt ehdosta $(***)$. □

Aiemmin todettiin, että jokainen $L \in$ Möb voidaan esittää normaalimuodossa $L(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc = 1$, jolloin nelikko (a,b,c,d) on etumerkkiä vaille yksikäsitteinen. Näin ollen kuvauksen L *normaalimuodon jäljen neliö*,

$$tr^2(L) := (a+d)^2,$$

on yksikäsitteinen. Jäljen neliön avulla voidaan esittää Lemman 2.7 ehdoille vielä eräs karakterisointi.

LAUSE 2.9. *Olkoon $L \in \Sigma(B)$, $L \neq \mathrm{id}$, esitetty normaalimuodossa. Kuvauksella L on tällöin tasan*

- *yksi kiintopiste joukossa B, jos ja vain jos $tr^2(L) \in [0,4)$.*
- *yksi kiintopiste joukossa S, jos ja vain jos $tr^2(L) = 4$.*
- *kaksi kiintopistettä joukossa S, jos ja vain jos $tr^2(L) > 4$.*

TODISTUS. Olkoot $L = R_\alpha T_c$ ja $b := e^{i\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{1-|c|^2}$. Tällöin $e^{i\alpha} = b/\overline{b}$ ja siten

$$L(z) = e^{i\alpha}\frac{z+c}{1+\overline{c}z} = \frac{bz + bc}{\overline{b}\,\overline{c}z + \overline{b}}\,,$$

missä viimeisin on kuvauksen L normaalimuoto. Näin ollen

$$tr^2(L) = (b+\overline{b})^2 = 4(Re(b))^2 = 4\,\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1-|c|^2}\,,$$

joten $tr^2(L) \geq 0$ ja kullekin järjestysrelaatiolle R pätee

$$\begin{aligned} tr^2(L)\ \mathrm{R}\ 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2}\ \mathrm{R}\ 1-|c|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |c|^2\ \mathrm{R}\ 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad |c|\ \mathrm{R}\ \sin\frac{|\alpha|}{2}\,. \end{aligned}$$

Väite seuraa nyt Lauseesta 2.8. □

2.4. Kiintopisteet ja ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmät

Tähän asti on käsitelty lähinnä yksittäisten kuvausten kiintopistekäyttäytymistä jakamalla ne kolmeen kategoriaan kiintopisteidensä sijainnin mukaan, minkä jälkeen kategorioihin kuulumiselle on sitten annettu erilaisia karakterisointeja. Jatkossa sen sijaan aletaankin tarkastella kiintopisteiden avulla määrättyjä joukkoja sekä niiden aliryhmäominaisuuksia. Tätä silmällä pitäen esitellään

Merkintä. Olkoot $a, b \in S$, $a \neq b$, $c \in B$ ja $\zeta \in S$. Asetetaan

$$\begin{aligned} \Sigma_{a,b} &:= \{L \in \Sigma(B) \colon L(a) = a,\ L(b) = b\,\}, \\ \Sigma_c &:= \{L \in \Sigma(B) \colon L(c) = c\,\} \text{ ja} \\ \Sigma_\zeta &:= \{L \in \Sigma(B) \colon L(z) = z \Leftrightarrow z = \zeta\,\} \cup \{\mathrm{id}\}. \end{aligned}$$

Lisäksi merkitään $\Sigma_{\pm a} := \Sigma_{a,-a}$ sekä $\Sigma^* := \Sigma \backslash \{\mathrm{id}\}$ kussakin tapauksista. Aiempien tulosten perusteella joukot Σ^* siis koostuvat niistä ryhmän $\Sigma(B)$ kuvauksista, jotka joukossa $\overline{B}$ kiinnittävät täsmälleen merkinnässä esiintyvät pisteet. Huomataan, että Seurauksessa 2.6 on oikeastaan jo todistettu

Lemma 2.10. *Joukot $\Sigma_0, \Sigma_{\pm 1}$ ovat ryhmän $\Sigma(B)$ epätriviaaleja Abelin aliryhmiä.*

Todistus. Seurauksen 2.6 nojalla ja merkinnöin riittää osoittaa, että $\Sigma_0 = \mathrm{O}$ ja $\Sigma_{\pm 1} = \Theta_{\pm 1}$. Ensimmäinen väite on selvä, sillä Lauseen 2.2 nojalla jokainen $L \in \Sigma_0$ on kierto ja toisaalta jokaisen kierron $R \neq \mathrm{id}$ ainut kiintopiste joukossa $\overline{B}$ on 0. Jälkimmäistä väitettä varten huomataan ensin, että $\Theta_{\pm 1} \subset \Sigma_{\pm 1}$, sillä

$$T_r(\pm 1) = \frac{\pm 1 + r}{1 + r(\pm 1)} = \pm\frac{1 \pm r}{1 \pm r} = \pm 1 \quad \text{kaikilla } r \in (-1, 1).$$

Olkoon sitten $L = R_{\arg\zeta} T_c \in \Sigma_{\pm 1}$. Voidaan olettaa $c \neq 0$, sillä muuten $L = \mathrm{id} \in \Theta_{\pm 1}$. Nyt pisteille $z = \pm 1$ pätee

$$L(z) = \zeta\,\frac{z + c}{1 + \overline{c}z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1-\zeta}{2\overline{c}} \pm \sqrt{\Big(\frac{1-\zeta}{2\overline{c}}\Big)^2 + \zeta\frac{c}{\overline{c}}}\,,$$

jotka ensin ynnäämällä ja sitten kertomalla saadaan

$$0 = -\frac{1-\zeta}{\overline{c}} \quad \text{eli} \quad \zeta = 1 \quad \text{ja} \quad -1 = -\frac{c}{\overline{c}} \quad \text{eli} \quad c = \overline{c}\,.$$

Siis $R_{\arg\zeta} = \mathrm{id}$, $c \in \mathbb{R}$ ja näin ollen $L = T_c \in \Theta_{\pm 1}$. □

Seuraava aputulos paljastaa, kuinka jokainen $L \in \Sigma(B)$ on joukon Σ_0, Σ_1 tai $\Sigma_{\pm 1}$ alkion *konjugaatti.* Lisäksi nähdään, että kyseinen joukko sekä (eräs) konjugoiva kuvaus määräytyvät yksikäsitteisesti kuvauksen L kiintopisteistä.

LEMMA 2.11. *Olkoon $L \in \Sigma(B)$, $L \neq \mathrm{id}$. Tällöin kuvauksella L on joukossa $\overline{B}$ täsmälleen*

· *yksi kiintopiste $c \in B$, jos ja vain jos $L = T_c R T_c^{-1}$, $R \in \Sigma_0^*$.*

· *yksi kiintopiste $e^{i\alpha} \in S$, jos ja vain jos $L = R_\alpha \tilde{L} R_\alpha^{-1}$, $\tilde{L} \in \Sigma_1^*$.*

· *kaksi kiintopistettä $a, b \in S$, jos ja vain jos $L = lTl^{-1}$, $T \in \Sigma_{\pm 1}^*$, missä $l \in \Sigma(B)$, $l(\pm 1) = \{a, b\}$. Lisäksi (eräs) tällainen l määrittyy yksikäsitteisellä tavalla pisteistä a, b.*

TODISTUS. Selvästikin kaksi ensimmäistä ekvivalenssia pätevät, ja jos $L = lTl^{-1}$ kuten kolmannessa, on kuvauksella L eri kiintopisteet $a, b \in S$. Voidaan siis olettaa, että kuvauksella L on kiintopisteet $a, b \in S$. Merkinnällä $\xi := e^{-i(\arg a + \arg b)/2}$ pätee

$$\xi a = e^{i(\arg a - \arg b)/2} \neq \pm 1 \quad \text{ja} \quad \xi b = e^{i(\arg b - \arg a)/2} = \overline{\xi a}\,,$$

joten on yksikäsitteinen $\zeta \in \{\xi a, \xi b\}$, jolle $Im\,\zeta \in (0, 1]$. Edelleen on yksikäsitteinen $r \in (-1, 1)$, siten että

$$T_r(\zeta) = \frac{\zeta + r}{1 + r\zeta} = i \quad \Leftrightarrow \quad r = i\,\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}\,,$$

sillä tiedon $Im\,\zeta \in (0, 1]$ myötä

$$\frac{|1 + i\zeta|^2}{|1 - i\zeta|^2} = \frac{2 + i(\zeta - \overline{\zeta})}{2 - i(\zeta - \overline{\zeta})} = \frac{1 - Im\,\zeta}{1 + Im\,\zeta} \in [0, 1).$$

Lisäksi

$$T_r(\overline{\zeta}) = \frac{\overline{\zeta} + r}{1 + r\overline{\zeta}} = \overline{\left(\frac{\zeta + r}{1 + r\zeta}\right)} = \overline{i} = -i\,,$$

joten oletuksen $L \neq \mathrm{id}$ nojalla

$$T := (R_{\pi/2} T_r R_{\arg \xi}) L (R_{\pi/2} T_r R_{\arg \xi})^{-1} \in \Sigma_{\pm 1}^*\,.$$

Asetetaan $l := (R_{\pi/2} T_r R_{\arg \xi})^{-1}$, jolloin $l \in \Sigma(B)$, $l(\pm 1) = \{a, b\}$ ja $L = lTl^{-1}$. Siis L on väitettyä muotoa, ja koska ξ määriteltiin pisteiden a, b avulla, minkä jälkeen tuloista $\xi a, \xi b$ valittiin yksikäsitteinen ζ, joka määräsi luvun r, riippuu kuvaus l näin määriteltynä vain pisteistä a, b. □

Kiintopisteiden avulla löydetään vielä eräs ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmätyyppi, kun jokaisella $\zeta \in S$ asetetaan

$$F_\zeta := \{L \in \Sigma(B) :\ L(\zeta) = \zeta\}\,.$$

Tällöin $\Sigma_\zeta \subset F_\zeta$ ja tarkemmin

$$F_\zeta = \bigsqcup_{a \in S \setminus \{\zeta\}} \Sigma_{a,\zeta}^* \sqcup \Sigma_\zeta\,,$$

kun merkinnällä tarkoitetaan joukkojen erillistä yhdistettä. Todistetaan Lausetta 2.14 varten vielä Lemman 2.10 vastine joukoille Σ_1, F_1:

Lemma 2.12. *Joukot Σ_1 ja F_1 ovat ryhmän $\Sigma(B)$ epätriviaaleja aliryhmiä, joista ensimmäinen on Abelin ryhmä ja jälkimmäinen ei.*

Todistus. Bijektiolla on aina käänteiskuvauksensa kanssa yhteiset kiintopisteet. Lisäksi, jos yhdistettävillä kuvauksilla on yhteinen kiintopiste, on se myös yhdistetyn kuvauksen kiintopiste. Joukon F_1 aliryhmyys seuraa edellä mainitusta, sillä triviaalisti $\mathrm{id} \in F_1 \subset \Sigma(B)$. Sen sijaan joukon Σ_1 aliryhmyyttä varten pitää lisäksi osoittaa, että Σ_1 on vakaa kuvausten yhdistämisen suhteen.

Muistutetaan vielä, että Σ_1^* koostuu niistä ryhmän $\Sigma(B)$ kuvauksista, joiden ainut kiintopiste on 1. Niinpä Lauseen 2.8 sekä siinä esiintyvien ehtojen $(*)$ ja $(**)$ nojalla $L = R_\alpha T_c \in \Sigma_1$ täsmälleen silloin, kun

$$\zeta := e^{i\alpha} \in S\backslash\{-1\} \quad \text{ja} \quad c = \frac{\overline{\zeta} - 1}{2}. \quad (\star)$$

Edellä on otettu huomioon myös tapaus $c = 0$, jossa $\zeta = 1$ ja $L = \mathrm{id}$. Tulevia laskuja varten huomataan, että ehdossa $(\star)$

$$\zeta c = \zeta\,\frac{\overline{\zeta} - 1}{2} = \frac{1-\zeta}{2} = -\overline{\left(\frac{\overline{\zeta} - 1}{2}\right)} = -\overline{c}\,. \quad (\star\star)$$

Olkoot $L_1, L_2 \in \Sigma_1$ eli muotoa $L_1 = R_{\arg\zeta_1} T_{c_1}$, $L_2 = R_{\arg\zeta_2} T_{c_2}$. Lemmaa 2.4 toistuvasti hyödyntämällä

$$\begin{aligned} L_1 L_2 = R_{\arg\zeta_1} T_{c_1} R_{\arg\zeta_2} T_{c_2} &= R_{\arg(\zeta_1\zeta_2)} T_{\overline{\zeta_2} c_1} T_{c_2} \\ &= R_{\arg(\zeta_1\zeta_2) + 2\arg(1+\overline{\zeta_2} c_1 \overline{c_2})} T_{(\overline{\zeta_2} c_1) * c_2}\,, \end{aligned}$$

missä ehdon $(\star\star)$ nojalla $\arg(1 + \overline{\zeta_2} c_1 \overline{c_2}) = \arg(1 - c_1 c_2)$ ja yhdessä ehdon $(\star)$ kanssa

$$(\overline{\zeta_2} c_1) * c_2 = \frac{\overline{\zeta_2} c_1 + c_2}{1 + \overline{\zeta_2} c_1 \overline{c_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{\zeta_2}(\overline{\zeta_1} - 1) + \overline{\zeta_2} - 1}{1 - c_1 c_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{\zeta_1 \zeta_2} - 1}{1 - c_1 c_2}\,.$$

Siten, koska $\zeta_1\zeta_2 = \zeta_2\zeta_1$ ja $c_1c_2 = c_2c_1$, myös $L_1L_2 = L_2L_1$. Näin ollen joukon Σ_1 alkiot kommutoivat keskenään. Lisäksi Σ_1 on vakaa, sillä ehdon $(\star)$ sekä edellä lasketun nojalla saadaan

$$\begin{aligned} L_1 L_2 = R_{\arg\zeta} T_c \in \Sigma_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\overline{c} + 1 = \zeta \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\zeta_1\zeta_2 - 1}{1 - \overline{c_1 c_2}} + 1 = \zeta_1\zeta_2 \left(\frac{1 - c_1 c_2}{|1 - c_1 c_2|}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \zeta_1\zeta_2 - \overline{c_1 c_2} = \zeta_1\zeta_2(1 - c_1 c_2) \\ &\Leftrightarrow \quad -\overline{c_1 c_2} = -\zeta_1 c_1 \zeta_2 c_2\,, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus on ehdon $(\star\star)$ myötä voimassa. Siis Σ_1 on ryhmän $\Sigma(B)$ Abelin aliryhmä, joka ehdon $(\star)$ nojalla on epätriviaali.

Todistuksen alussa joukko F_1 todettiin jo ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmäksi. Se on myös epätriviaali, sillä selvästi $\Sigma_1 \subset F_1 \neq \Sigma(B)$. Olkoot $L \in F_1\backslash\Sigma_1$, $l \in \Sigma_1^*$, ja olkoon $a \in S\backslash\{1\}$ kuvauksen L toinen kiintopiste. Tällöin $Ll \neq lL$, sillä muuten

$$Ll(a) = lL(a) = l(a) \quad \text{eli} \quad l(a) \in \{1, a\},$$

mikä on mahdotonta kuvauksen l sekä pisteen a valintojen nojalla. Näin ollen F_1 ei ole kommutatiivinen. $\square$

Lemman 2.10 mukaan $\Sigma_0, \Sigma_{\pm 1}$ ovat Abelin ryhmiä. Lemman 2.12 todistuksessa sen sijaan näytettiin, että ryhmä Σ_1 on kommutatiivinen, mutta joukon $F_1 \backslash \Sigma_1$ alkiot eivät kommutoi joukon Σ_1^* alkioiden kanssa. Nämä ovat erikoistapauksia yleisemmistä tuloksista (ks. [**8**, 72]): mikäli kuvauksilla $L_1, L_2 \in$ Möb on samat kiintopisteet, ne kommutoivat, ja jos $L_1, L_2 \in$ Möb$\backslash\{\mathrm{id}\}$ kommutoivat, on niillä samat kiintopisteet tai $L_1^2 = L_2^2 = \mathrm{id}$. Lähtien näistä tuloksista todistetaan

LAUSE 2.13. *Kuvaukset $L_1, L_2 \in \Sigma(B)\backslash\{\mathrm{id}\}$ kommutoivat, jos ja vain jos niillä on samat kiintopisteet.*

TODISTUS. Olkoon $L = R_{\arg\zeta} T_c \in \Sigma(B)$, $L^2 = \mathrm{id}$. Lemman 2.4 nojalla

$$L^2 = R_{2\arg\zeta} T_{\overline{\zeta}c} T_c = R_{2\arg\zeta + 2\arg(1+\overline{\zeta}c\overline{c})} T_{(\overline{\zeta}c)*c} = R_{2\arg(\zeta+|c|^2)} T_{(\overline{\zeta}c)*c}\,,$$

joten Lauseen 2.2 mukaan $\arg(\zeta + |c|^2) \in \{0, \pi\}$ eli $\zeta = \pm 1$ ja edelleen $(\pm c) * c = 0$ eli $\pm c = -c$. Näin ollen

$$L \in \Sigma(B)\backslash\{\mathrm{id}\},\ L^2 = \mathrm{id}, \quad \text{jos ja vain jos} \quad L = -T_c,\ c \in B. \quad (*)$$

Olkoot $c_1, c_2 \in B$ eri pisteitä ja $L_1 := -T_{c_1}$, $L_2 := -T_{c_2}$. Lauseeseen johdattelun sekä ehdon $(*)$ perusteella riittää osoittaa, että kuvaukset L_1, L_2 eivät kommutoi. Lemman 2.4 mukaan

$$L_1 L_2 = R_{2\arg(1-c_1\overline{c_2})} T_{(-c_1)*c_2} \quad \text{ja} \quad L_2 L_1 = R_{2\arg(1-c_2\overline{c_1})} T_{(-c_2)*c_1}\,,$$

joten ehdosta $L_1 L_2 = L_2 L_1$ seuraisi Lauseen 2.2 ja tiedon $c_1 \neq c_2$ nojalla

$$\begin{aligned} (-c_1) * c_2 = (-c_2) * c_1 \ &\Rightarrow \ \frac{-c_1 + c_2}{1 - c_1\overline{c_2}} = \frac{-c_2 + c_1}{1 - c_2\overline{c_1}} \\ &\Rightarrow \ -1 = \Big(\frac{1 - c_1\overline{c_2}}{|1 - c_1\overline{c_2}|}\Big)^2 \ (\in S\backslash\{-1\})\,. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö on kuitenkin epätosi, joten kuvaukset L_1, L_2 eivät kommutoi. □

Esitetään vihdoin tulos, jossa on koottuna kiintopisteiden avulla määräytyneet ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmät sekä niiden algebrallisia ominaisuuksia. Olkoot seuraavassa $c \in B$ ja $\zeta, \xi \in S$, $\zeta \neq \xi$.

LAUSE 2.14. *Joukot Σ_c, $\Sigma_{\zeta,\xi}$, Σ_ζ ja F_ζ ovat (vastaavassa järjestyksessä) joukkojen Σ_0, $\Sigma_{\pm 1}$, Σ_1 ja F_1 konjugaatteja ryhmässä $\Sigma(B)$. Erityisesti ne ovat ryhmän $\Sigma(B)$ epätriviaaleja aliryhmiä, joista kolme ensimmäistä on Abelin ja viimeinen ei.*

TODISTUS. Kuvauksella $L \in \Sigma(B)$ konjugointi on ryhmän $\Sigma(B)$ automorfismi ja säilyttää kiintopisteiden lukumäärän. Niinpä

$$\Sigma_c = T_c\, \Sigma_0 T_c^{-1} \quad \text{ja} \quad \Sigma_{\zeta,\xi} = l\, \Sigma_{\pm 1} l^{-1},$$

missä $l \in \Sigma(B)$, $l(\pm 1) = \{\zeta, \xi\}$, on kuten Lemmassa 2.11. Vastaavasti merkinnällä $R := R_{\arg\zeta}$ pätee

$$\Sigma_\zeta = R\, \Sigma_1 R^{-1} \quad \text{ja} \quad F_\zeta = R F_1 R^{-1}.$$

Joukoille $\Sigma_c, \Sigma_{\zeta,\xi}$ väitteet seuraavat Lemmasta 2.10, joukoille Σ_ζ, F_ζ Lemmasta 2.12. □

HUOMAUTUS 2.15. Lauseessa 2.1 osoitettiin, että ryhmä $\Sigma(H)$ koostuu Möbius-kuvauksista $z \mapsto (az+b)(cz+d)$, joille normaalimuodossa $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Lausekkeesta on suoraviivaista selvittää, että ryhmässä $\Sigma(H)$ joukkojen $\Sigma_0, \Sigma_{\pm 1}, \Sigma_1$ ja F_1 vastineet (kuvauksella $k : B \to H : z \mapsto (z+1)/(iz-i)$ konjugoinnissa) ovat merkinnöiltään tässä vaiheessa jo ilmeiset joukot

$$\begin{aligned}
\Sigma_i(H) &\cong \left\{\pm\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}, \\
\Sigma_{0,\infty}(H) &\cong \left\{\pm\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0\right\}, \\
\Sigma_{\infty}(H) &\cong \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} \text{ ja} \\
F_{\infty}(H) &\cong \left\{\pm\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0,\, b \in \mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

missä hyödynnettiin Lauseen 2.1 matriisivastaavuutta. Ryhmässä $\Sigma(B)$ lukua $\alpha \in \mathbb{R}$ vastaa kierron parametri 2α (eli yllä $\beta \equiv \alpha$ modulo π antaa saman kuvauksen), ja ryhmässä $F_\infty(H)$ lukuja $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ vastaa kuvaus $z \mapsto a^2 z + ab$.

Huomionarvoista on, että kun matriisiryhmä $SL(2, \mathbb{R})$ varustetaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ topologialla, ovat esitetyt aliryhmät yhtenäisten joukkojen jatkuvia kuvia ja sellaisina yhtenäisiä (tekijäkuvauksen koindusoimassa topologiassa). Lähteessä [**12**, 201–202] on osin todistettu väite, jonka mukaan ryhmässä $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ ei konjugointia vaille muita epätriviaaleja yhtenäisiä aliryhmiä olekaan. Esittämättömät laskut vaatisivat Lien ryhmien ja algebrojen tuntemusta eikä niiden validiuteen oteta tässä kantaa. Asiaa kuitenkin sivutaan Luvussa 6 avaruuden $\Sigma(G)$ yhtenäisyyskomponentin $C(\mathrm{id}_G)$ osoittautuessa samalla ryhmän $\Sigma(G)$ aliryhmäksi.

LUKU 3

Metrinen avaruus $\Sigma(G)$

Olkoon $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$ sekä $X_A := \{f : A \to \mathbb{C}$ rajoitettu kuvaus$\}$. Varustetaan joukko X_A sup-metriikalla d eli asetetaan

$$d(f_1, f_2) := \sup_{z \in A} |f_1(z) - f_2(z)| \quad \text{kaikilla } f_1, f_2 \in X_A\,.$$

Erityisesti tapauksessa $A = G$ myös alueen G konformisten itsekuvausten joukko $\Sigma(G) \subset X_G$ varustettuna metriikan d rajoittumalla on metrinen avaruus. Metriikoille d sekä niiden rajoittumille käytetään samaa merkintää, ja suppenemista merkitään kussakin metriikassa symbolilla '$\Longrightarrow$'. Suppeneminen avaruudessa $(\Sigma(G), d)$ merkitsee siis kuvausten tasaista suppenemista alueessa G euklidisen metriikan suhteen.

Tässä luvussa tutkitaan avaruuden $\Sigma(G)$ metrisiä ja topologisia ominaisuuksia siinä määrin kuin on mahdollista turvautumatta Luvussa 4 rakennettavaan reuna-alkioteoriaan. Heti kohdassa 3.1 osoitetaan, että avaruus $\Sigma(G)$ on aina täydellinen ja ei–kompakti. Lisäksi tutkitaan isomorfismin $\Phi : \Sigma(B) \to \Sigma(G)$ jatkuvuutta, jota joukon ∂G lokaalin yhtenäisyyden huomataan karakterisoivan. Lopuksi avaruuden $\Sigma(G)$ separoituvuutta tutkimalla selviää, että sama lokaali yhtenäisyys karakterisoi jopa avaruuksien $\Sigma(G)$ ja $\Sigma(B)$ homeomorfisuuden.

Aloitetaan todistamalla yksinkertainen mutta tärkeä aputulos, johon viitataan toistuvasti loppututkielman ajan. Lemman 3.1 merkittävyys perustuu siihen, että sen myötä avaruuden $\Sigma(G)$ metrisen rakenteen tarkastelu voidaan palauttaa pisteen id_G ympäristöön. Tulos kertoo oleellisesti, että "oikealta kertominen" on avaruuden $\Sigma(G)$ isometria.

Lemma 3.1. *Olkoot $A, A' \subset \mathbb{C}$ ja $g : A' \to A$ surjektio. Tällöin*

$$d(f_1, f_2) = d(f_1 g, f_2 g) \quad \textit{kaikilla } f_1, f_2 \in X_A\,.$$

Erityisesti jokaisella $\phi_0 \in \Sigma(G)$ kuvaus $\phi \mapsto \phi\phi_0$ on isometria avaruudelta $\Sigma(G)$ itselleen ja $d(\phi_0, \mathrm{id_G}) = d(\phi_0^{-1}, \mathrm{id}_G)$.

Todistus. Ensimmäinen väite siis kuuluu, että

$$\sup_{z \in A} |f_1(z) - f_2(z)| = \sup_{w \in A'} |f_1 g(w) - f_2 g(w)|\,,$$

ja se on triviaali, sillä oletusten nojalla $g(A') = A$.

Olkoon $\phi_0 \in \Sigma(G)$. Koska $\Sigma(G)$ on ryhmä, on $\phi_0^{-1} \in \Sigma(G)$ ja ehdot $\phi \mapsto \phi\phi_0^{\pm 1}$ määräävät toistensa (bijektiiviset) käänteiskuvaukset $\Sigma(G) \to \Sigma(G)$. Isometrisyys sekä yhtäsuuruus $d(\phi_0, \mathrm{id_G}) = d(\phi_0^{-1}, \mathrm{id}_G)$ seuraavat ensimmäisestä väitteestä. □

Merkintä. Jatkossa todistusten sisällä kuljetaan edestakaisin avaruuksien $\Sigma(B)$ ja $\Sigma(G)$ välillä. Koska kuvaukset $\Phi^{\pm 1}$ pysyvät koko ajan muuttumattomina, on kätevää käyttää merkinnällistä vastaavuutta $\phi \leftrightarrow L$. Käytännössä toimitaan siten, että jos on esimerkiksi kiinnitetty alkio $L_0 \in \Sigma(B)$, niin ilman eri mainintaa $\phi_0 := \Phi(L_0) \in \Sigma(G)$

– ja vastaavasti toisin päin. Alaindeksien ohella muutkin tunnisteet siirtyvät, kuten tapauksessa $\tilde{\phi} \in \Sigma(G)$, jolloin sanomattakin $\tilde{L} := \Phi^{-1}(\tilde{\phi}) \in \Sigma(B)$.

3.1. Avaruuden $\Sigma(G)$ täydellisyys

Avaruudelle $\Sigma(G)$ löydetään joitakin alueesta G riippumattomia ominaisuuksia. Näistä täydellisyyden todistamiseksi tarvitaan vielä

LEMMA 3.2. *Olkoon (L_n) jono Möbius-kuvauksia, joka suppenee kolmessa pisteessä kohti eri lukuja. Tällöin $L_n \longrightarrow L$ kaikkialla, missä $L \in$ Möb.*

TODISTUS. Olkoot $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ pisteet, joissa oletettu suppeneminen tapahtuu. Kun $z = a, b, c$, merkitään $z'_n := L_n(z)$ ja $z' := \lim z'_n$. Käyttämällä tarvittaessa apuna Möbius-kuvauksia voidaan olettaa, että mainitut pisteet ovat äärellisiä. Niinpä kaksoissuhteesta saadaan kaikille $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c, L_n^{-1}(\infty)\}$

$$\begin{aligned}[a,b,c,z] = [a'_n, b'_n, c'_n, L_n(z)] \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{b-z}{c-z} = \frac{a'_n - c'_n}{a'_n - b'_n} \cdot \frac{b'_n - L_n(z)}{c_n - L_n(z)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{L_n(z) - b'_n}{L_n(z) - c'_n} = d'_n \, \frac{z-b}{z-c} \,,\end{aligned}$$

missä

$$d'_n := \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{a'_n - b'_n}{a'_n - c'_n} \longrightarrow \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{a' - b'}{a' - c'} =: d' \,.$$

Siten kaikilla $z \in \overline{\mathbb{C}}$ pätee

$$L_n(z) = \frac{-c'_n(d'_n \frac{z-b}{z-c}) + b'_n}{-(d'_n \frac{z-b}{z-c}) + 1} \longrightarrow \frac{-c'(d' \frac{z-b}{z-c}) + b'}{-(d' \frac{z-b}{z-c}) + 1} =: M_2 M_1(z) \,,$$

missä $M_1, M_2 \in$ Möb, sillä $\det(M_1) = d'(b-c) \neq 0$ ja $\det(M_2) = b' - c' \neq 0$. Siis $L_n \longrightarrow M_2 M_1 \in$ Möb kaikkialla. □

Seuraavat avaruuden $\Sigma(G)$ ominaisuudet on todistettu jo lähteessä [**4**, 229–230]. Erikoisuutena kuitenkin mainittakoon, että nyt esitettävässä todistuksessa vältetään Jordanin käyrälauseen (tai vastaavan) käyttö täydellisyystodistuksen lopun osalta.

LAUSE 3.3. *Avaruus $\Sigma(G)$ on aina täydellinen ja ei–kompakti.*

TODISTUS. *Ei–kompaktius*: Olkoot $a, b_n \in B$, siten että $b_n \longrightarrow S$. Merkitään $L_n := T_{b_n} T_{-a} \in \Sigma(B)$, jolloin $L_n(a) = b_n$ ja

$$\phi_n(h(a)) = h L_n h^{-1} h(a) = h(L_n(a)) = h(b_n) \,.$$

Jos $\Sigma(G)$ olisi kompakti, niin jonolla (ϕ_n) olisi osajono (ϕ_{n_k}) sekä $\phi \in \Sigma(G)$ siten, että $\phi_{n_k} \Longrightarrow \phi$. Erityisesti pätisi

$$h(b_{n_k}) = \phi_{n_k}(h(a)) \longrightarrow \phi(h(a)) \in G \,.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $b_{n_k} \longrightarrow S$, joten kuvauksen h homeomorfisuuden nojalla $h(b_{n_k}) \longrightarrow \partial G$.

Täydellisyys: Olkoon (ϕ_n) avaruuden $\Sigma(G)$ Cauchy-jono. Tällöin

$$|\phi_n(z) - \phi_k(z)| \leq d(\phi_n, \phi_k) \quad \text{kaikilla } z \in G \,, \quad (*)$$

joten $(\phi_n(z))$ on täydellisen avaruuden $\mathbb{C}$ Cauchy-jono jokaisella $z \in G$. Siten on kuvaus $\phi : G \to \overline{G}$, jolle $\phi_n \longrightarrow \phi$. Koska (ϕ_n) on Cauchy-jono sup-metriikassa d, on ehdon $(*)$ nojalla jopa $\phi_n \Longrightarrow \phi$. Lauseen 1.15 mukaan ϕ on nyt joko vakio tai analyyttinen injektio. Ei kuitenkaan voi olla $\phi \equiv c$, sillä ehdosta $\phi_n \Longrightarrow c$ seuraisi $diam(G) = diam(\phi_n(G)) \longrightarrow 0$. Siis ϕ on analyyttinen injektio, jolle Lauseen 1.14 nojalla pätee $\phi(G) \subset G$.

Ehdon $\phi_n \longrightarrow \phi$ sekä kuvauksen h konformisuuden myötä $L_n \in \Sigma(B)$ suppenee pisteittäin kohti analyyttistä injektiota $h^{-1}\phi h : B \to B$. Erityisesti L_n suppenee kolmessa pisteessä kohti eri lukuja, joten Lauseen 2.2 sekä Lemman 3.2 nojalla on $L \in$ Möb, jolle $L_n \longrightarrow L$ kaikkialla. Koska $L_n(S) = S$ ja $L_n(0) \in B$ kaikilla n, pätee $L(B) = B$. Näin ollen

$$\phi(G) = hh^{-1}\phi h(B) = hL(B) = h(B) = G\,.$$

Siis $\phi_n \Longrightarrow \phi \in \Sigma(G)$, joten $\Sigma(G)$ on täydellinen. □

3.2. Homeomorfismi $\vartheta : \mathbb{T} \to \Sigma(B)$

Vaikka avaruuden $\Sigma(G)$ topologiset ominaisuudet riippuvat pitkälti alueesta G, voidaan eri tapauksia jossakin määrin luokitella. Lauseessa 3.15 esimerkiksi ratkeaa täydellisesti, milloin $\Sigma(G)$ on homeomorfinen *toruksen* eli avaruuden $\mathbb{T} := S \times B$ kanssa. Lauseessa 3.4 nähdään jo, että ainakin $\Sigma(B) \approx \mathbb{T}$. Tätä varten palautetaan mieliin, että Lauseen 2.2 nojalla $\Sigma(B)$ koostuu kuvauksista $L = R_{\arg\zeta}T_c$, missä $\zeta \in S$, $c \in B$ ovat yksikäsitteiset. Näin ollen kuvaus

$$\vartheta : \mathbb{T} \to \Sigma(B)\,, \quad \vartheta(\zeta, c) = R_{\arg\zeta}T_c\,,$$

on hyvin määritelty bijektio. Tämän pohjalta todistetaan

LAUSE 3.4. *Kuvaus ϑ on homeomorfismi.*

TODISTUS. *Kuvauksen ϑ^{-1} jatkuvuus*: Olkoot $L_0, L \in \Sigma(B)$ ja $(\zeta_0, c_0), (\zeta, c) \in \mathbb{T}$ niitä vastaavat parit. Tällöin

$$|L(-c_0) - L_0(-c_0)| = \left|0 - \frac{-c_0 + c}{1 + \overline{c}(-c_0)}\right| \geq \frac{|c - c_0|}{2}\,,$$

joten $c \longrightarrow c_0$, kun $L \longrightarrow L_0$. Olkoon $a \in B\backslash\{-c_0\}$. Tällöin $|T_{c_0}(a)| > 0$ ja

$$\begin{aligned}|L(a) - L_0(a)| &= |\zeta\, T_c(a) - \zeta_0 T_{c_0}(a)| \\ &\geq |\zeta - \zeta_0||T_{c_0}(a)| - |\zeta||T_c(a) - T_{c_0}(a)|\end{aligned}$$

eli

$$|T_{c_0}(a)||\zeta - \zeta_0| \leq |T_c(a) - T_{c_0}(a)| + |L(a) - L_0(a)|\,.$$

Kuvaus $c \mapsto T_c(a)$ on jatkuva joukossa B, ja edellä osoitettiin, että $c \longrightarrow c_0$, kun $L \longrightarrow L_0$. Siten myös $\zeta \longrightarrow \zeta_0$, kun $L \longrightarrow L_0$. Näin ollen

$$(\zeta_0, c_0) \longrightarrow (\zeta, c), \quad \text{kun } L \longrightarrow L_0\,,$$

joten triviaalisti myös

$$(\zeta_0, c_0) \longrightarrow (\zeta, c), \quad \text{kun } L \Longrightarrow L_0\,.$$

Kuvauksen ϑ jatkuvuus: Olkoot $(\zeta_0, c_0), (\zeta, c) \in \mathbb{T}$ sekä $L_0, L \in \Sigma(B)$ vastaavat kuvaukset. Tällöin jokaisella $z \in \overline{B}$ pätee

$$\begin{aligned}|L(z) - L_0(z)| &\leq |\zeta - \zeta_0||T_{c_0}(z)| + |\zeta||T_c(z) - T_{c_0}(z)| \\ &\leq |\zeta - \zeta_0| + |T_c(z) - T_{c_0}(z)|\,.\end{aligned}$$

Lisäksi edellä

$$\begin{aligned}
|T_c(z) - T_{c_0}(z)| &= \left| \frac{z+c}{1+\overline{c}z} - \frac{z+c_0}{1+\overline{c_0}z} \right| \\
&= \frac{|c - c_0 - (\overline{c} - \overline{c_0})z^2 + (c\overline{c_0} - \overline{c}c_0)z|}{|1+\overline{c}z||1+\overline{c_0}z|} \\
&\leq \frac{|c-c_0| + |\overline{c} - \overline{c_0}||z|^2 + (|c||\overline{c_0} - \overline{c}| + |\overline{c}||c - c_0|)|z|}{(1-|c||z|)(1-|c_0||z|)} \\
&\leq \frac{4|c-c_0|}{(1-|c|)(1-|c_0|)}\,,
\end{aligned}$$

joten

$$d(L, L_0) \leq |\zeta - \zeta_0| + \frac{4|c-c_0|}{(1-|c|)(1-|c_0|)} \longrightarrow 0 \quad \text{eli} \quad L \Longrightarrow L_0\,,$$

kun $(\zeta, c) \longrightarrow (\zeta_0, c_0)$. □

Huomautus 3.5. Lauseen 3.4 todistuksessa osoitettiin, että avaruudessa $\Sigma(B)$ jo pisteittäisestä suppenemisesta seuraa tasainen suppeneminen joukossa $\overline{B}$. Nimittäin todistuksen merkinnöin näytettiin, että jos $L \longrightarrow L_0$ eri pisteissä $-c_0, a \in B$, niin $(\zeta, c) \longrightarrow (\zeta_0, c_0)$, mistä edelleen seuraa $L \Longrightarrow L_0$ joukossa $\overline{B}$. Samaan tulokseen päädyttäisiin myös peilauksen $z \mapsto 1/\overline{z}$ jatkuvuuden, Lemman 3.2 ja Lauseen 1.16 avulla, kunhan jälkimmäistä varten huomataan kuvauksen L navan olevan pisteen c peilipisteen vastaluku.

Homeomorfismin ϑ myötä avaruuden $\Sigma(B)$ topologiset ominaisuudet ovat samat kuin toruksella $\mathbb{T}$. Näistä ainakin seuraavien toteutumista avaruudessa $\Sigma(G)$ tullaan vielä tarkastelemaan:

Seuraus 3.6. *Avaruus $\Sigma(B)$ on separoituva, yhtenäinen, polkuyhtenäinen, lokaalisti kompakti, lokaalisti yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen.*

3.3. Kuvaukset $\Phi^{\pm 1}$ ja jatkuvuus

Tarkastellaan seuraavassa isomorfismien $\Phi : \Sigma(B) \to \Sigma(G) : L \mapsto hLh^{-1} (= \phi)$ ja Φ^{-1} jatkuvuutta. Erityisesti ollaan kiinnostuneita siitä, milloin Φ on homeomorfismi. Tuohon ongelmaan annetaankin täydellinen vastaus Lauseessa 3.11. Ensin kuitenkin osoitetaan Huomautuksen 3.5 avulla, että yleisesti pätee

Lause 3.7. *Kuvaus Φ^{-1} on jatkuva.*

Todistus. Olkoot $\phi, \phi_n \in \Sigma(G)$, $\phi_n \Longrightarrow \phi$. Erityisesti $\phi_n \longrightarrow \phi$, joten kuvauksen h^{-1} jatkuvuuden nojalla

$$L(z) = h^{-1}(\phi(h(z))) = \lim_{n\to\infty} h^{-1}(\phi_n(h(z))) = \lim_{n\to\infty} L_n(z)$$

kaikilla $z \in B$. Toisin sanoen $L_n \longrightarrow L$, mistä Huomautuksen 3.5 nojalla seuraa $L_n \Longrightarrow L$. Näin ollen Φ^{-1} on jatkuva. □

Kuvauksen Φ jatkuvuus sen sijaan riippuu joukon ∂G rakenteesta. Varsinaisen tuloksen todistamiseksi tarvitaan vielä

Lemma 3.8. *Jos $d(hR_\alpha, h) \longrightarrow 0$, kun $\alpha \longrightarrow 0$, on kuvaus h tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Koska $\overline{B}$ on kompakti, on h tasaisesti jatkuva, jos sillä on jatkuva jatke joukkoon $\overline{B}$. Jatke löydetään helposti, mikäli kaikilla $\zeta \in S$ on raja-arvo $\lim_{z\to\zeta} h(z)$. Lemman 3.1 ja kiertojen kommutoinnin nojalla $d(hR_\alpha, h) = d((hR)R_\alpha, hR)$ jokaiselle kierrolle R, joten riittää osoittaa raja-arvon olemassaolo pisteessä $\zeta = 1$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen mukaan on $\alpha_0 \in (0, \pi)$, siten että

$$d(hR_\alpha, h) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } \alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)\,. \quad (*)$$

Lauseen 1.26 nojalla löytyy $\theta \in (-\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\alpha_0}{2})$, jolle radiaaliraja-arvo $\lim_{r\to 1-} h(re^{i\theta})$ on olemassa. On siis $r_0 \in (0,1)$, siten että

$$|h(re^{i\theta}) - h(se^{i\theta})| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{kaikilla } r, s \in (r_0, 1)\,. \quad (**)$$

Olkoot $z, w \in \{re^{i\alpha} : r \in (r_0, 1),\ \alpha \in (-\frac{\alpha_0}{2}, \frac{\alpha_0}{2})\} =: A$ eli muotoa $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$. Tällöin $r, s \in (r_0, 1)$ ja $|\theta - \alpha|, |\theta - \beta| < \alpha_0$, joten ehtojen $(*)$ ja $(**)$ perusteella

$$\begin{aligned} |h(z) - h(w)| &\le |h(z) - h(re^{i\theta})| + |h(re^{i\theta}) - h(se^{i\theta})| + |h(se^{i\theta}) - h(w)| \\ &= |h(z) - hR_{\theta-\alpha}(z)| + |h(re^{i\theta}) - h(se^{i\theta})| + |hR_{\theta-\beta}(w) - h(w)| \\ &< \epsilon\,. \end{aligned}$$

Väite seuraa, sillä $\mathbb{C}$ on täydellinen ja $B(1,\delta) \cap B \subset A$ pienillä $\delta > 0$. □

Kuvauksen Φ jatkuvuudelle voidaan nyt esittää alueen G reunan avulla varsin konkreettinen karakterisointi. Huomattavaa on, että kuvauksen Φ jatkuvuus ei riipu valitusta konformikuvauksesta $h : B \to G$.

Lause 3.9. *Kuvaus Φ on jatkuva, jos ja vain jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

Todistus. Lauseen 1.28 myötä jälkimmäinen ehto voidaan korvata vaatimuksella kuvauksen h tasaisesta jatkuvuudesta. Oletetaan ensin, että h on tasaisesti jatkuva. Olkoon $\epsilon > 0$. Tasaisen jatkuvuuden nojalla on $\delta > 0$, siten että

$$|h(w_1) - h(w_2)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } w_1, w_2 \in B,\ |w_1 - w_2| < \delta\,.$$

Olkoot $L_1, L_2 \in \Sigma(B)$, $d(L_1, L_2) < \delta$. Merkitään $w_k := L_k(h^{-1}(z))$ kaikilla $z \in G$. Tällöin $w_1, w_2 \in B$, $|w_1 - w_2| < \delta$, ja siten

$$|\phi_1(z) - \phi_2(z)| = |h(w_1) - h(w_2)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } z \in G\,.$$

Siis $d(\phi_1, \phi_2) \le \epsilon$ ja näin ollen kuvaus Φ on (tasaisesti) jatkuva.

Oletetaan sitten, että Φ on jatkuva. Koska

$$d(R_\alpha, \mathrm{id}_B) = \sup_{w\in B} |e^{i\alpha}w - w| = |e^{i\alpha} - 1| \longrightarrow 0\,, \quad \text{kun } \alpha \longrightarrow 0\,,$$

pätee nyt $\Phi(R_\alpha) \Longrightarrow \Phi(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_G$, kun $\alpha \longrightarrow 0$. Lemman 3.1 nojalla siis

$$d(hR_\alpha, h) = d(\Phi(R_\alpha), \mathrm{id}_G) \longrightarrow 0\,, \quad \text{kun } \alpha \longrightarrow 0\,,$$

joten Lemman 3.8 mukaan h on tasaisesti jatkuva. □

Huomautus 3.10. Lauseen 3.9 todistuksesta nähdään, että mikäli kuvaus Φ on jatkuva, on se jopa tasaisesti jatkuva. Lisäksi huomataan, että jatkuvuuteen riittää jo jatkuvuus pisteessä id_B kiertojen joukkoa pitkin.

Lauseiden 3.7, 3.9 ja 3.4 myötä voidaan muotoilla kaksi tulosta:

Lause 3.11. *Kuvaus Φ on homeomorfismi, jos ja vain jos joukko ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

Seuraus 3.12. *Jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen, on avaruus $\Sigma(G)$ homeomorfinen toruksen $\mathbb{T}$ kanssa. Erityisesti avaruus $\Sigma(G)$ on tällöin separoituva, yhtenäinen, polkuyhtenäinen, lokaalisti kompakti, lokaalisti yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen.*

3.4. Separoituvuus ja $\Sigma(G)$

Avaruuden $\Sigma(G)$ separoituvuus otetaan nyt erilliskäsittelyyn, koska sille voidaan esittää karakterisointi reunan ∂G avulla. Vastaava tulos on mainittu ilman todistusta lähteessä [**12**, 201], mutta se esitetään tässä todistuksineen. Lauseen 3.14 (ja samalla Lemman 6.16) todistusta varten tarvitaan seuraava aputulos, jonka alkuosan todistus on esitetty lähteessä [**6**, 96–97].

Lemma 3.13. *Joukko $\Phi^{-1}(\overline{B}(\mathrm{id}_G,\epsilon))\subset\Sigma(B)$ on suljettu kaikilla $\epsilon>0$ ja kompakti pienillä $\epsilon>0$.*

Todistus. Olkoot $\epsilon>0$ ja $K_\epsilon:=\Phi^{-1}(\overline{B}(\mathrm{id}_G,\epsilon))$. Osoitetaan, että K_ϵ on suljettu. Jos $L\in\Sigma(B)\setminus K_\epsilon$, niin $\phi\in\Sigma(G)\setminus\overline{B}(\mathrm{id}_G,\epsilon)$ eli

$$|h(Lh^{-1}(a))-a|=|\phi(a)-a|>\epsilon \quad \text{jollekin } a\in G\,.$$

Tällöin kuvauksen h jatkuvuuden nojalla on $r>0$, jolle

$$|h(z)-a|>\epsilon \quad \text{kaikilla } z\in B(Lh^{-1}(a),r)\,.$$

Jos $\tilde{L}\in B(L,r)$, niin $\tilde{L}h^{-1}(a)\in B(Lh^{-1}(a),r)$ ja siten

$$|\tilde{\phi}(a)-a|=|h(\tilde{L}h^{-1}(a))-a|>\epsilon\,.$$

Näin ollen $\tilde{\phi}\in\Sigma(G)\setminus\overline{B}(\mathrm{id}_G,\epsilon)$ eli $\tilde{L}\in\Sigma(B)\setminus K_\epsilon$. Siis $B(L,r)\subset\Sigma(B)\setminus K_\epsilon$, joten $\Sigma(B)\setminus K_\epsilon$ on avoin ja K_ϵ suljettu.

Oletetaan, että $\epsilon\in(0,\ dist(h(0),\partial G))$. Osoitetaan, että löytyy $s\in(0,1)$, siten että $|c|\le s$ kaikilla $L=RT_c\in K_\epsilon$. Jos tällaista s ei olisi, löydettäisiin kuvaukset

$$L_n\in K_\epsilon\,,\quad \text{siten että}\quad |L_n(0)|=|c_n|\longrightarrow 1\,.$$

Tällöin kuvauksen h homeomorfisuuden nojalla

$$\phi_n\in\overline{B}(\mathrm{id}_G,\epsilon)\,,\quad \phi_n(h(0))=h(L_n(0))\longrightarrow\partial G\,.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} dist(h(0),\partial G)&\le|h(0)-\phi_n(h(0))|+dist(\phi_n(h(0)),\partial G)\\ &\le\epsilon+dist(\phi_n(h(0)),\partial G)\longrightarrow\epsilon \end{aligned}$$

eli $dist(h(0),\partial G)\le\epsilon$, mikä on vastoin luvun ϵ valintaa.

Olkoon siis $s\in(0,1)$ kuten edellä. Lauseen 3.4 homeomorfismille ϑ pätee nyt

$$\vartheta^{-1}(K_\epsilon)\subset S\times\overline{B}(0,s)\,.$$

Todistuksen alkuosan nojalla K_ϵ on suljettu, joten sen homeomorfisena kuvana myös $\vartheta^{-1}(K_\epsilon)$ on suljettu. Kompaktin joukon $S\times\overline{B}(0,s)$ suljettuna osajoukkona $\vartheta^{-1}(K_\epsilon)$ on kompakti, joten sen jatkuvana kuvana myös K_ϵ on kompakti. □

Seuraavan tuloksen nojalla avaruus $\Sigma(G)$ on separoituva vain silloin, kun ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Todistuksessa hyödynnetään Bairen kategorialausetta, jonka käytön avaruuden $\Sigma(G)$ täydellisyys mahdollistaa.

LAUSE 3.14. *Avaruus $\Sigma(G)$ on separoituva, jos ja vain jos joukko ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

TODISTUS. Jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen, on $\Sigma(G)$ Lauseiden 3.4 ja 3.11 nojalla homeomorfinen separoituvan avaruuden $\mathbb{T}$ kanssa ja siten itsekin separoituva.

Oletetaan, että $\Sigma(G)$ on separoituva. Olkoon $A \subset \Sigma(G)$ separoituvuuden takaama numeroituva ja tiheä joukko. Osoitetaan, että Φ on jatkuva pisteessä id_B, jolloin Huomautuksen 3.10 sekä Lauseen 3.9 nojalla ∂G on lokaalisti yhtenäinen.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $K_\epsilon := \Phi^{-1}(\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon))$. Joukon A tiheyden ja Lemman 3.1 nojalla

$$\Sigma(G) = \bigcup_{\psi \in A} \overline{B}(\psi, \epsilon) = \bigcup_{\psi \in A} \overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)\psi\,,$$

joten kuvauksen Φ^{-1} isomorfisuuden myötä

$$\Sigma(B) = \Phi^{-1}\Big(\bigcup_{\psi \in A} \overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)\psi\Big) = \bigcup_{l \in \Phi^{-1}(A)} K_\epsilon l\,.$$

Lauseen 3.3 mukaan $\Sigma(B)$ on täydellinen ja Lauseen 1.2 nojalla siis 2. kategoriaa. Indeksijoukko $\Phi^{-1}(A)$ on numeroituva ja Lemmojen 3.13 sekä 3.1 nojalla joukot $K_\epsilon l$ ovat suljettuja, joten on avoin joukko $V_\epsilon \subset \Sigma(B)$ sekä kuvaus $l_0 \in \Phi^{-1}(A)$, joille

$$\varnothing \neq V_\epsilon \subset K_\epsilon l_0\,.$$

Olkoon $L_0 \in K_\epsilon$ siten, että $L_0 l_0 \in V_\epsilon$. Tällöin joukko $\tilde{V}_\epsilon := V_\epsilon l_0^{-1} L_0^{-1} \subset K_\epsilon L_0^{-1}$ on Lemman 3.1 nojalla pisteen id_B ympäristö. Jos nyt $\tilde{L} \in \tilde{V}_\epsilon$, niin on $L \in K_\epsilon$, jolle $\tilde{L} = L L_0^{-1}$. Erityisesti $\phi, \phi_0 \in \overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)$, joten kuvauksen Φ isomorfisuuden ja Lemman 3.1 nojalla

$$d(\tilde{\phi}, \mathrm{id}_G) = d(\phi\phi_0^{-1}, \mathrm{id}_G) = d(\phi, \phi_0) \leq d(\phi, \mathrm{id}_G) + d(\mathrm{id}_G, \phi_0) \leq 2\epsilon\,.$$

Siis $\Phi(\tilde{V}_\epsilon) \subset \overline{B}(\mathrm{id}_G, 2\epsilon)$ ja näin ollen Φ on jatkuva pisteessä id_B. □

Tässä luvussa todistettuja tuloksia yhdistelemällä saadaan

LAUSE 3.15. *Avaruus $\Sigma(G)$ on homeomorfinen toruksen $\mathbb{T}$ kanssa, jos ja vain jos joukko ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Erityisesti, jos kuvaus Φ ei ole homeomorfismi, niin ei ole olemassa muutakaan homeomorfismia $\Sigma(B) \to \Sigma(G)$.*

TODISTUS. Jos $\Sigma(G) \approx \mathbb{T}$, on $\Sigma(G)$ separoituva. Tällöin Lauseen 3.14 nojalla ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Jos taas ∂G on lokaalisti yhtenäinen, niin Seurauksen 3.12 mukaan $\Sigma(G) \approx \mathbb{T}$. Oletetaan sitten, että $\Sigma(G) \approx \Sigma(B)$. Nyt $\Sigma(G) \approx \mathbb{T}$ Lauseen 3.4 nojalla, joten todistuksen alun perusteella ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Silloin Φ on Lauseen 3.11 nojalla homeomorfismi. □

LUKU 4

Reuna-alkioteoriaa

Avaruuden $\Sigma(G)$ topologiaa tutkittaessa on jo ilmennyt alueen G reunarakenteen ratkaiseva vaikutus. Toistaiseksi on kuitenkin luokiteltu ainoastaan tapaus, jossa ∂G on lokaalisti yhtenäinen eli jossa konformikuvauksella h on jatkuva jatke joukkoon $\overline{B}$. Jotta alueen G reunarakennetta voitaisiin tutkia tarkemmin, tarvitaan reuna-alkion (*prime end*) käsitettä. Kohdassa 4.1 osoitetaan, että alueen G reuna-alkioiden joukko vastaa bijektiivisesti joukkoa S. Tähän pohjautuen kohdassa 4.2 esitellään alueen G kompaktifiointi, joka on homeomorfinen joukon $\overline{B}$ kanssa. Luvun lopuksi reuna-alkiot jaotellaan neljään kategoriaan, joiden myötä Luvussa 1 esitettyjä tuloksia ja niiden seurauksia voidaan muotoilla tulevaa käyttöä varten. Rakennettava reuna-alkioteoria perustuu oleellisesti lähteeseen [**3**, §9].

Aloitetaan kirjaamalla reuna-alkiohin liittyviä määritelmiä, joissa kaikissa $D \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu, yhdesti yhtenäinen alue.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Jordan-kaari on *alueen D cross-cut*, mikäli se päätepisteitään lukuun ottamatta sisältyy joukkoon D jakaen sen kahteen osa-alueeseen. Edelleen jono (C_n) alueen D cross-cuteja on *ketju*, mikäli

$$diam(C_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \overline{C_n} \cap \overline{C_{n+1}} = \varnothing \quad \text{ja} \quad C_{n+1} \text{ separoi joukot } C_n, C_{n+2}$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Alueen D ketju (C_n) määrää siis jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ joukon $D\backslash C_n$ yksikäsitteisen osa-alueen, joka sisältää kaaren C_{n+1}. Olkoon jatkossa D_n (erityistunnisteet sallien) kyseinen osa-alue. Tällöin

$$D_1 \supset D_2 \supset \cdots\,, \quad D\backslash\overline{D_1} \subset D\backslash\overline{D_2} \subset \cdots \quad \text{ja} \quad \overline{D_{n+1}} \cap D \subset D_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Nyt ollaan valmiita määrittelemään ketjujen ekvivalenssi. Kyseessä on selvästikin ekvivalenssirelaatio, joten ekvivalenssiluokat (eli reuna-alkiot) ovat hyvin määritellyt.

MÄÄRITELMÄ 4.2. Alueen D ketjut $(C_n), (C'_n)$ ovat *ekvivalentteja*, mikäli kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee $D_n \subset D'_k$ ja $D'_n \subset D_k$ suurilla n. Ketjujen määräämiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan *reuna-alkioiksi*. Reuna-alkioiden kokoelma on merkinnältään $\mathcal{P}$, yksittäinen reuna-alkio P (erityistunnisteet sallien).

Määritelmästä 4.2 nähdään helposti, että seuraava määritelmä on riippumaton reuna-alkion edustajan valinnasta.

MÄÄRITELMÄ 4.3. Olkoon $P = [(C_n)] \in \mathcal{P}$. Joukkoa $I(P) := \cap_{n=1}^{\infty}\overline{D_n}$ kutsutaan *reuna-alkion P kuvaksi*. Sanotaan, että alueen D jono (z_n) *suppenee reuna-alkioon P*, mikäli kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee $z_n \in D_k$ suurilla n. Tällöin merkitään $z_n \longrightarrow P$.

Ennen varsinaiseen työhön ryhtymistä todistetaan vielä kaksi aputulosta, joiden mukaan reuna-alkion kuva sisältyy alueen D reunaan ja reuna-alkio on raja-arvona yksikäsitteinen.

LEMMA 4.4. *Jokaisella $P \in \mathcal{P}$ pätee $I(P) \subset \partial D$.*

TODISTUS. Olkoon $P \in \mathcal{P}$ ja (C_n) sen edustaja. Osoitetaan, että $\cap_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing$. Kiinnitetään $a \in D \setminus D_1$. Olkoot $w \in D$ ja γ pisteet a, w yhdistävä alueen D polku. Nyt $a \in D \setminus D_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $dist(|\gamma|, \partial D) > 0$. Kuitenkin $\overline{C_n} \cap \partial D \neq \varnothing$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $diam(C_n) \longrightarrow 0$, joten $C_n \cap |\gamma| = \varnothing$ suurilla n. Näin ollen $w \in |\gamma| \subset D \setminus D_n$ suurilla n, ja koska $w \in D$ oli mielivaltainen, $\cap_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing$. Väite seuraa, sillä

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{D_n} \cap D\right) = I(P) \cap D$$

ja triviaalisti $I(P) \subset \overline{D}$. □

LEMMA 4.5. *Olkoot $P, P' \in \mathcal{P}$ sekä $z_n \in D$ siten, että $z_n \longrightarrow P$ ja $z_n \longrightarrow P'$. Tällöin $P = P'$.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi: $P \neq P'$. Olkoot $(C_n), (C'_n)$ reuna-alkioiden P, P' edustajat. Antiteesin avulla löydetään luku $k \in \mathbb{Z}_+$ ja esimerkiksi jonon (C_n) (kanssa ekvivalentti) osajono (C_m), jolle $D_m \not\subseteq D'_k$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Suppenemisoletusten myötä $D_m \cap D'_k \neq \varnothing$, joten joukkojen D_m yhtenäisyyden perusteella $D_m \cap C'_k \neq \varnothing$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Edelleen joukon C'_k yhtenäisyyden nojalla kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$ pätee $C'_k \subset D_m$ tai $C'_k \cap C_m \neq \varnothing$. Ensimmäinen ehto ei toteudu äärettömän monella m, sillä Lemman 4.4 nojalla (osa)jonolle (C_l) pätee $\cap_{l=1}^{\infty} D_l = I(P) \cap D = \varnothing$. On siis $C'_k \cap C_m \neq \varnothing$ suurilla $m \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi $diam(C_m) \longrightarrow 0$, $dist(C'_k, C'_{k+1}) > 0$ ja C'_{k+1} separoi joukot C'_k ja $C'_{k+2} \subset D'_{k+1}$, joten on $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, jolle $C_m \subset D \setminus \overline{D'_{k+1}}$ kaikilla $m \geq m_0$. Olkoon $m \geq m_0$. Ei voi olla $D'_{k+1} \not\subseteq D_m$, sillä ehdosta $D'_{k+1} \cap D_m \neq \varnothing$ ja joukon D_m yhtenäisyydestä seuraisi $D'_{k+1} \cap C_m \neq \varnothing$, mikä on vastoin juuri todettua ehtoa $C_m \subset D \setminus \overline{D'_{k+1}}$. Siis $D'_{k+1} \subset D_m$ kaikilla $m \geq m_0$, mistä Lemman 4.4 avulla saadaan ristiriita $D'_{k+1} \subset \cap_{m=m_0}^{\infty} D_m = \varnothing$. □

4.1. Joukkojen S ja $\mathcal{P}$ vastaavuus

Palataan tutkimusten tilanteeseen, jossa siis joukko $G \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu, yhdesti yhtenäinen alue ja $h : B \to G$ konformikuvaus. Lauseessa 4.7 selviää, että alueen G reuna-alkioiden sekä joukon S pisteiden välillä on bijektiivinen vastaavuus ja että kohdassa 1.4 esitelty kasautumisjoukko $C(h, \zeta)$ sekä pistettä $\zeta \in S$ vastaavan reuna-alkion kuva ovat identtiset. Todistus perustuu Lemmojen 4.4 ja 4.5 ohella seuraavaan tulokseen, jossa merkitään $C_r := h(B \cap S(\zeta, r))$, kun $r \in (0, 2)$.

LEMMA 4.6. *Jokaisella $\zeta \in S$ on luvut $r_1 > r_2 > \cdots > 0$, siten että $r_n \longrightarrow 0$, $l(C_{r_n}) \longrightarrow 0$ ja $l(C_{r_n}) < \infty$ sekä $\overline{C_{r_n}} \cap \overline{C_{r_{n+1}}} = \varnothing$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.*

TODISTUS. Kierrolle R myös kuvaus $hR : B \to G$ on konforminen, joten voidaan olettaa, että $\zeta = -1$. Lauseen 1.26 todistuksen merkinnöin ($L_r \leftrightarrow l(C_r)$ vaihtaen) kaikilla $r \in (0, 2)$ on voimassa

$$\frac{l(C_r)^2}{2\pi r} \leq \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \,\mathrm{d}t \quad \text{ja} \quad \int_{(0,2)} \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \,\mathrm{d}t\mathrm{d}r = m_2(G)\,.$$

Merkitään $I_n := (4^{-n}, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, jolloin kaikilla $I_n' \subset I_n$, $m_1(I_n \setminus I_n') = 0$, pätee

$$(\inf_{r \in I_n'} l(C_r))^2 \, \frac{n \log 2}{2\pi} = \int_{I_n'} \frac{\inf_{s \in I_n'} l(C_s)^2}{2\pi r} \, \mathrm{d}r \leq \int_{I_n'} \int_{I_r} |h'(\gamma_r(t))|^2 r \, \mathrm{d}t\mathrm{d}r \leq m_2(G)$$

ja siten

$$\inf_{r \in I_n'} l(C_r) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\frac{2\pi \, m_2(G)}{\log 2} \Big)^{\frac{1}{2}} =: M_n \, . \quad (*)$$

Olkoon $r_1 \in I_1$ siten, että $l(C_{r_1}) \leq M_1 + 1$. Koska $l(C_{r_1}) < \infty$, on Jordan-kaarella C_{r_1} päätepisteet $a_1, b_1 \in \partial G$, jotka Lauseen 1.21 mukaan ovat kuvauksen h radiaaliraja-arvoja. Lauseen 1.32 nojalla joukko $\{\alpha \in (-\pi, \pi) : h(e^{i\alpha}) = a_1, b_1\}$ on nollamittainen, joten Lemmaa 1.25 joukoissa $[\alpha_1, \alpha_2] \subset (-\pi, \pi)$ kuvaukseen $\theta \mapsto (2\cos\theta + 2)^{1/2}$ soveltamalla nähdään, että joukko $J_1 := \{r \in (0,2) : \overline{C_r} \cap \overline{C_{r_1}} \neq \varnothing\}$ on nollamittainen. Ehdon $(*)$ nojalla löytyy $r_2 \in I_2 \setminus J_1$, jolle $l(C_{r_2}) \leq M_2 + \frac{1}{2} < \infty$. Jatkamalla kuten edellä löydetään luvut $r_n > 0$, siten että

$$r_n \leq 2^{-n} \longrightarrow 0 \, , \quad l(C_{r_n}) \leq M_n + 2^{-n} \longrightarrow 0 \quad \text{sekä} \quad \overline{C_{r_n}} \cap \overline{C_{r_{n+1}}} = \varnothing$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ehto $r_1 > r_2 > \cdots > 0$ saadaan voimaan siirtymällä tarvittaessa jonon (r_n) osajonoon. □

Lause 4.7 (Carathéodory). *Jokaisella $\zeta \in S$ on yksikäsitteinen $P_\zeta \in \mathcal{P}$, siten että $z_n \longrightarrow \zeta$ joukossa B, jos ja vain jos $h(z_n) \longrightarrow P_\zeta$ alueessa G. Vastaavasti jokaisella $P \in \mathcal{P}$ on yksikäsitteinen $\zeta \in S$, jolle $P = P_\zeta$. Lisäksi $I(P_\zeta) = C(h, \zeta)$.*

Todistus. Olkoon $\zeta \in S$ sekä $(C_n) := (C_{r_n})$ pisteelle ζ Lemmasta 4.6 saatava jono. Lemman 4.6 sekä kuvauksen h homeomorfisuuden myötä jokainen C_n on crosscut ja C_{n+1} separoi joukot C_n, C_{n+2} kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi $diam(C_n) \leq l(C_n) \longrightarrow 0$ ja $\overline{C_n} \cap \overline{C_{n+1}} = \varnothing$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten (C_n) on ketju. Jos $z_n \in B$, $z_n \longrightarrow \zeta$, niin kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee $h(z_n) \in h(B \cap B(\zeta, r_k)) = D_k$ suurilla n. Näin ollen $(h(z_n))$ suppenee ketjun (C_n) määräämään reuna-alkioon P, joka on yksikäsitteinen Lemman 4.5 nojalla. Voidaan siis merkitä $P_\zeta := P$. Edelleen

$$C(h, \zeta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h(B \cap B(\zeta, r_n))} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D_n} = I(P_\zeta) \, .$$

Toisaalta, jos $z_n \in B$, $h(z_n) \longrightarrow P_\zeta$, pätee lopussa todistettavan käänteistuloksen nojalla $z_n \longrightarrow \zeta'$ jollekin $\zeta' \in S$. Niinpä todistuksen alun sekä Lemman 4.5 myötä $P_\zeta = P_{\zeta'}$ ja siten $\zeta = \zeta'$ käänteistuloksen yksikäsitteisyyspuolen nojalla.

Olkoon kääntäen $P \in \mathcal{P}$ sekä $w_n \in G$, $w_n \longrightarrow P$. Lemman 4.4 nojalla pätee $dist(w_n, \partial G) \longrightarrow 0$, joten jos jono $(h^{-1}(w_n))$ ei suppene joukon S pisteeseen, sillä on joukon $\overline{B}$ kompaktiuden ja kuvauksen h homeomorfisuuden nojalla eri pisteisiin $\xi, \xi' \in S$ suppenevat osajonot $(z_n), (z_n')$. Lemman 4.6 pisteille ξ, ξ' antamat ketjut eivät selvästikään ole ekvivalentteja, joten jonot $(h(z_n)), (h(z_n'))$ suppenevat eri reuna-alkioihin. Koska jonon (w_n) osajonoina ne kuitenkin suppenevat reuna-alkioon P, suppenee toinen niistä kahteen eri reuna-alkioon. Tämä on mahdotonta Lemman 4.5 nojalla, joten $h^{-1}(w_n) \longrightarrow \zeta$ jollekin $\zeta \in S$. Todistuksen alkuosan alun mukaan $w_n \longrightarrow P_\zeta$, joten Lemman 4.5 nojalla $P = P_\zeta$. Lisäksi $P_\zeta \neq P_{\zeta'}$ kaikilla $\zeta' \in S \setminus \{\zeta\}$, sillä Lemman 4.6 ketjut eivät ole eri pisteille ekvivalentteja. □

4.2. Homeomorfismi $h^* : \overline{B} \to G^*$

Määritellään $G^* := G \cup \mathcal{P}$, ja varustetaan joukko G^* topologialla seuraavasti: Lauseen 4.7 nojalla kuvauksella h on bijektiivinen jatke

$$h^* : \overline{B} \to G^* , \quad h^*(\zeta) = P_\zeta \quad \text{kaikilla } \zeta \in S \, .$$

Tällöin kuvaus h^* on homeomorfismi joukkoon G^* koindusoimassaan topologiassa, joka avaruuteen G rajoitettuna antaa tavallisen topologian. Erityisesti $\mathcal{P} \approx S$ ja G^* on avaruuden G kompaktifiointi. Lisäksi avaruuden G^* topologia on riippumaton kuvauksesta h, sillä jos myös $\tilde{h} : B \to G$ on konformikuvaus, niin $M := (h^*)^{-1}\tilde{h}^*$ on joukon $\overline{B}$ homeomorfismi ja $\tilde{h}^* = h^*M$. Kuvaukset $\phi \in \Sigma(G)$ voidaan jatkossa ajatella homeomorfismeina $h^*L(h^*)^{-1} : G^* \to G^*$, missä L on Lauseen 2.2 nojalla Möbius-kuvaus ja erityisesti $\phi(P_\zeta) = P_{L(\zeta)}$ kaikilla $\zeta \in S$.

Merkintä. Seuraavassa määritelmässä reuna-alkiot jaotellaan neljään kategoriaan sen mukaan, millaisia kuvauksen h yleinen sekä radiaalinen kasautumisjoukko reuna-alkiota vastaavassa joukon S pisteessä ovat. Siksi jokaisella $P = P_\zeta \in \mathcal{P}$ merkitään

$$\Pi(P) := C_{[0,\zeta)}(h, \zeta) \, .$$

Tällöin $\Pi(P) \subset I(P)$, ja Huomautuksessa 4.9 nähdään, ettei joukon $\Pi(P)$ määrittely eikä siten seuraava jaottelukaan riipu kuvauksen h valinnasta.

MÄÄRITELMÄ 4.8. Olkoon $P \in \mathcal{P}$. Määritellään joukot $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_4$ asettamalla

- $P \in \mathcal{P}_1$, jos $\Pi(P) = I(P)$ on yksiö.
- $P \in \mathcal{P}_2$, jos $\Pi(P) \neq I(P)$ ja $\Pi(P)$ on yksiö.
- $P \in \mathcal{P}_3$, jos $\Pi(P) = I(P)$ ei ole yksiö.
- $P \in \mathcal{P}_4$, jos $\Pi(P) \neq I(P)$ ja $\Pi(P)$ ei ole yksiö.

Merkitään lisäksi $\mathcal{P}_{j_1 \cdots j_n} := \cup_{m=1}^n \mathcal{P}_{j_m}$ sekä $S_{j_1 \cdots j_n} := (h^*)^{-1}(\mathcal{P}_{j_1 \cdots j_n})$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $\{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

HUOMAUTUS 4.9. Joukot $\mathcal{P}_j$ selvästikin osittavat reuna-alkioiden kokoelman $\mathcal{P}$ ja, kuten edellä jo mainittiin, niiden määrittely ei riipu kuvauksen h valinnasta. Jos nimittäin myös $\tilde{h} : B \to G$ on konformikuvaus, niin $L := h^{-1}\tilde{h} \in$ Möb Lauseen 2.2 perusteella. Möbius-kuvauksena L^{-1} säilyttää yleistetyt ympyrät (sekä niiden välisen kulman), joten Lauseen 1.21 nojalla kaikilla $\zeta \in S$ pätee

$$C_{[0,\zeta)}(\tilde{h}, \zeta) = C_{L^{-1}([0,L(\zeta)))}(\tilde{h}, \zeta) = C_{[0,L(\zeta))}(h, L(\zeta)) \, .$$

Lisäksi Lauseen 4.7 mukaan on $\tilde{P}_\zeta = P_{L(\zeta)}$, kun $\tilde{P}$ ilmaisee reuna-alkiovastaavuutta kuvauksessa $\tilde{h}$.

Olisi ehkä mielekkäämpää määritellä joukot $\Pi(P)$ suoraan avaruudessa G, kuten reuna-alkioiden kuville $I(P)$ tehtiin. Tämä onnistuisi asettamalla $\Pi(P) := \cap_\gamma C(\gamma, 1)$, missä leikataan yli polkujen $\gamma : [0, 1) \to G$, joille pätee $\gamma(t_n) \longrightarrow P$, kun $t_n \longrightarrow 1-$. Määritelmien yhtäpitävyyden näkemiseksi tarvittaisiin lähteen [**3**, 178–179]) tulosta, jonka nojalla homeomorfismin h radiaalinen kasautumisjoukko sisältyy kasautumisjoukkoon pitkin mitä tahansa vastaavaan reunapisteeseen päättyvää joukon B polkua. Kyseisestä tuloksesta seuraisi myös *Lindelöfin lause*: jos kuvauksella h on raja-arvo pisteeseen ζ päättyvää kaarta pitkin, on se samalla raja-arvo pitkin mitä tahansa Stolzin kulmaa $S_\zeta(\alpha)$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Annetaan tässä luvussa esitettyjen määritelmien ja Huomautuksessa 4.9 mainitun, joukon $\Pi(P)$ vaihtoehtoisen määrittelyn perusteella jokaiselle $j \in \{2, 3, 4\}$ esimerkki alueesta, jolle $\mathcal{P}_{234} = \mathcal{P}_j = \{P\}$:

Esimerkki 4.10. Kiinnitetään suorakaidealue $(0, 1) \times (-1, 1)$, josta poistetaan kussakin tapauksessa jokin joukko lopullisen alueen saavuttamiseksi.

Tapaus $j = 2$: Poistetaan joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times [0, 1) , \quad \text{jolloin} \quad I(P) = [0, i] \quad \text{ja} \quad \Pi(P) = \{0\} ,$$

tai joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times ((-1, -2^{-n}] \cup [2^{-n}, 1)) \ ; \quad I(P) = [-i, i] \, , \ \Pi(P) = \{0\} \, .$$

Tähän tapaan muodostettuja alueita kutsutaan vastaavasti *ensimmäinen ja toisen lajin kampa-alueiksi*.

Tapaus $j = 3$: Poistetaan joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times (-1)^n (-1, 1 - 2^{-n+1}] , \quad \text{jolloin} \quad I(P) = \Pi(P) = [-i, i] \, .$$

Tapaus $j = 4$: Poistetaan joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times (-1)^n (-1, \frac{1}{2}] \ ; \quad I(P) = [-i, i] \, , \ \Pi(P) = [-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}] \, .$$

Tapauksissa $j = 3, 4$ muodostettujen kaltaisia alueita kutsutaan *käärmealueiksi*.

Ilmaistaan lopuksi Luvussa 1 esitettyjä tuloksia reuna-alkioiden avulla. Kirjataan ensin joukkojen $\mathcal{P}_j$ yhteys kuvauksen h raja-arvotyyppeihin:

Lemma 4.11. *Olkoon $P = P_\zeta \in \mathcal{P}$. Kuvauksella h on raja-arvo $\lim_{z \to \zeta} h(z)$, jos ja vain jos $P \in \mathcal{P}_1$, ja radiaaliraja-arvo $\lim_{r \to 1-} h(r\zeta)$, jos ja vain jos $P \in \mathcal{P}_{12}$.*

Määritelmän 4.8 ja Lemman 4.11 myötä seuraavat kolme tulosta ovat ainoastaan Lauseiden 1.28, 1.26 ja 1.27 uudelleenmuotoiluja.

Lause 4.12. *Avaruus ∂G on lokaalisti yhtenäinen, jos ja vain jos $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$.*

Lause 4.13. *Melkein kaikilla $\alpha \in [0, 2\pi)$ pätee $P_{e^{i\alpha}} \in \mathcal{P}_{12}$.*

Lause 4.14. *Joukko $\mathcal{P}_{24}$ on* 1. *kategoriaa avaruudessa $\mathcal{P}$.*

Jatkossa tarvitaan erityisesti tietoa siitä, että $\mathcal{P}_{12}$ ja $\mathcal{P}_{13}$ ovat avaruuden $\mathcal{P}$ tiheitä joukkoja. Jälkimmäisen väitteen osoittamiseksi muotoillaan vielä

Lemma 4.15. *Olkoon X topologinen avaruus ja $A' \subset A \subset X$. Jos A' on avoin ja aliavaruutena* 2. *kategoriaa, niin joukko A on* 2. *kategoriaa.*

Todistus. Tehdään antiteesi: $A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, missä $F_n \subset X$, $\mathit{int}\, \overline{F_n} = \varnothing$. Tällöin $A' = \cup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap A')$, joten oletuksen nojalla on $k \in \mathbb{Z}_+$ ja avoin $U \subset X$, joille

$$\varnothing \neq U \cap A' \subset \overline{F_k \cap A'} \cap A' \subset \overline{F_k} \, .$$

Tämä on ristiriita, sillä $\mathit{int}\, \overline{F_k} = \varnothing$ ja oletuksen perusteella $U \cap A'$ on avoin. □

Lause 4.16. *Joukot $\mathcal{P}_{12}$ ja $\mathcal{P}_{13}$ ovat tiheitä avaruudessa $\mathcal{P}$.*

Todistus. Riittää osoittaa väitteet avaruudessa S joukoille S_{12} ja S_{13}. Koska avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet välit ovat positiivimittaisia, seuraa joukon S_{12} tiheys helposti Lauseesta 1.26 ja Lemmasta 4.11. Todistetaan seuraavassa jälkimmäinen väite.

Täydellinen avaruus S on Lauseen 1.2 mukaan 2. kategoriaa, joten Lauseen 4.14 nojalla löytyy $e^{i\alpha} \in S_{13}$. Kuvaus

$$\gamma : (\alpha, 2\pi + \alpha) \to S \backslash \{e^{i\alpha}\}\,, \quad \gamma(t) = e^{it},$$

on homeomorfismi, joten jos S_{13} ei olisi tiheä, löytyisi väli $(t_1, t_2) \subset (\alpha, 2\pi + \alpha)$, siten että $\gamma((t_1, t_2)) \subset S \setminus S_{13} = S_{24}$. Tällöin joukko $\gamma((t_1, t_2)) \approx \mathbb{R}$ olisi avoin joukossa $S \backslash \{e^{i\alpha}\}$, siten myös joukossa S, ja aliavaruutena 2. kategoriaa. Näin ollen joukko S_{24} olisi Lemman 4.15 perusteella 2. kategoriaa avaruudessa S, mikä on kuitenkin vastoin Lausetta 4.14. $\square$

LUKU 5

Milloin $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä?

Olkoon joukko $A \neq \varnothing$ varustettu niin ryhmän kuin topologisen avaruudenkin struktuurilla. Tällöin A on *topologinen ryhmä*, mikäli kuvaukset

$$A \to A : f \mapsto f^{-1} \quad \text{ja} \quad A \times A \to A : (f,g) \mapsto fg$$

ovat jatkuvia joukon $A \times A$ ollessa varustettu karteesisen tulon topologialla. Välillä puhutaan ryhmän topologisuudesta, jos tarkastelun kohteena oleva joukko tiedetään jo ryhmäksi.

Tämän luvun pääasiallisena tarkoituksena on vastata luvun nimikkokysymykseen, missä onnistutaankin Lauseessa 5.8. Tämän lisäksi todistetaan joitakin aputuloksia (Lemmat 5.3 ja 5.4) huomattavasti tarvittavaa vahvempina Lukua 6 silmällä pitäen. Topologisten ryhmien yleisiin ominaisuuksiin ei tässä paneuduta, sillä epädiskreetti topologinen ryhmä $\Sigma(G)$ on Lauseiden 5.8, 3.11 ja 2.1 perusteella aina (homeo- ja) isomorfinen matriisien tekijäryhmän $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$ kanssa.

5.1. Tapaus $\Sigma(G) \approx \mathbb{T}$

Lauseessa 5.2 todistetaan, että $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä ainakin silloin, kun ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Myöhemmin Lauseessa 5.8 osoitetaan, että muunlaisia epädiskreettejä topologisia ryhmiä $\Sigma(G)$ ei olekaan.

LEMMA 5.1. *Ryhmä $\Sigma(G)$ on topologinen, jos ja vain jos kaikilla $\psi \in \Sigma(G)$ pätee:*

$$\textit{Jos} \quad \phi_n \in \Sigma(G) \quad \textit{ja} \quad \phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G, \quad \textit{niin} \quad \psi\phi_n \Longrightarrow \psi. \quad (\star)$$

TODISTUS. Ryhmän $\Sigma(G)$ ollessa topologinen ehto $(\star)$ seuraa topologisen ryhmän määritelmästä, sillä triviaalisti $\psi \Longrightarrow \psi$ kaikilla $\psi \in \Sigma(G)$.

Oletetaan, että ehto $(\star)$ pätee. Olkoot $\phi, \psi, \phi_n, \psi_n \in \Sigma(G)$ siten, että $\phi_n \Longrightarrow \phi$ ja $\psi_n \Longrightarrow \psi$. Tällöin Lemman 3.1 ja tiedon $\phi_n \Longrightarrow \phi$ nojalla

$$d(\phi\phi_n^{-1}, \mathrm{id}_G) = d(\phi, \phi_n) \longrightarrow 0 \quad \text{eli} \quad \phi\phi_n^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_G\,.$$

Ehdon $(\star)$ mukaan siis

$$d(\phi_n^{-1}, \phi^{-1}) = d(\phi^{-1}\phi\phi_n^{-1}, \phi^{-1}) \longrightarrow 0 \quad \text{eli} \quad \phi_n^{-1} \Longrightarrow \phi^{-1}.$$

Näin ollen avaruuden $\Sigma(G)$ kuvaus $\phi \mapsto \phi^{-1}$ on jatkuva. Vastaavasti Lemman 3.1 ja tiedon $\psi_n \Longrightarrow \psi$ nojalla $\psi\psi_n^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_G$. Lisäksi Lemman 3.1 avulla saadaan

$$d(\phi_n\psi_n, \phi\psi) \leq d(\phi_n\psi_n, \phi\psi_n) + d(\phi\psi_n, \phi\psi) = d(\phi_n, \phi) + d(\phi, \phi\psi\psi_n^{-1})\,,$$

joten tiedon $\phi_n \Longrightarrow \phi$ sekä ehdon $(\star)$ nojalla

$$d(\phi_n\psi_n, \phi\psi) \longrightarrow 0 \quad \text{eli} \quad \phi_n\psi_n \Longrightarrow \phi\psi\,.$$

Näin ollen myös avaruuden $\Sigma(G)$ kuvaus $(\phi, \psi) \mapsto \phi\psi$ on jatkuva. Siis $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä. $\square$

LAUSE 5.2. *Jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen, niin $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä.*

TODISTUS. Oletetaan, että ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Olkoot $\phi, \phi_n \in \Sigma(G)$, siten että $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$. Lemman 5.1 nojalla riittää osoittaa, että $\phi\phi_n \Longrightarrow \phi$. Koska L on konformikuvaus $B \to B$, määrää se isomorfismin

$$\Lambda : \Sigma(B) \to \Sigma(B)\,, \quad \Lambda(l) = LlL^{-1}.$$

Avaruudet $S, \partial G$ ovat lokaalisti yhtenäisiä, joten Lauseen 3.11 mukaan kuvaukset $\Lambda, \Phi^{\pm 1}$ ovat jatkuvia. Lemman 3.1 sekä kuvauksen Φ isomorfisuuden nojalla

$$d(\phi\phi_n, \phi) = d(\phi\phi_n\phi^{-1}, \mathrm{id}_G) = d(\Phi(LL_nL^{-1}), \mathrm{id}_G) = d(\Phi\Lambda\Phi^{-1}(\phi_n), \mathrm{id}_G)\,,$$

missä kuvaus $\Phi\Lambda\Phi^{-1}$ on jatkuvien isomorfismien yhdisteenä sellainen itsekin. Siten

$$\Phi\Lambda\Phi^{-1}(\phi_n) \Longrightarrow \Phi\Lambda\Phi^{-1}(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G$$

ja näin ollen

$$d(\phi\phi_n, \phi) = d(\Phi\Lambda\Phi^{-1}(\phi_n), \mathrm{id}_G) \longrightarrow 0 \quad \text{eli} \quad \phi\phi_n \Longrightarrow \phi\,.$$

□

5.2. Avaruuden $\Sigma(G)$ diskreettiys muissa tapauksissa

Lemmoissa 5.3 ja 5.4 todistetaan paljon enemmänkin kuin olisi tarpeen tämän luvun kannalta. Kumpikin tulee täyteen käyttöön Luvussa 6. Lemmoihin 5.3 ja 5.4 on nykyisessä laajudessaan saatu ajatus lähteessä [**6**, 95] esitetystä tuloksesta sekä sitä seuraavan lauseen kohdan (ii) todistuksessa mainitusta. Lemman 5.4 väitteistä ensimmäiselle ja Seuraukselle 5.5 on esitetty todistus lähteessä [**4**, 236–237].

LEMMA 5.3. *Olkoot $\phi_n \in \Sigma(G)$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$. Tällöin kaikilla $P \in \mathcal{P}$ pätee*

$$\begin{aligned} diam\, I(P) &= \lim_{n\to\infty} diam\, I(\phi_n(P)) \quad ja \\ diam\, \Pi(P) &= \lim_{n\to\infty} diam\, \Pi(\phi_n(P))\,. \end{aligned}$$

TODISTUS. Oletuksen sekä Lemman 3.1 nojalla $d(hL_n, h) \longrightarrow 0$. Olkoot $\epsilon > 0$ ja $P_\zeta \in \mathcal{P}$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|hL_n(z) - h(z)| < \epsilon \quad \text{kaikilla } n \geq n_0,\ z \in B\,. \quad (*)$$

Olkoon $n \geq n_0$. Jos $z_k \longrightarrow \zeta$, niin $L_n(z_k) \longrightarrow L_n(\zeta)$, ja jos $w_k \longrightarrow L_n(\zeta)$, niin $L_n^{-1}(w_k) \longrightarrow \zeta$. Lisäksi Möbius-kuvaus kuvaa kunkin säteen aina Stolzin kulmaan sisältyväksi ympyräkaareksi. Täten Lauseen 4.7 nojalla $I(P_{L_n(\zeta)}) = C(h, L_n(\zeta))$ ja Lauseen 1.21 nojalla $\Pi(P_{L_n(\zeta)}) = C_{L_n([0,\zeta))}(h, L_n(\zeta))$. Näin ollen, koska joukko $\overline{G}$ on jonokompakti, saadaan ehdosta $(*)$

$$\begin{aligned} |diam\, I(P_{L_n(\zeta)}) - diam\, I(P_\zeta)| &\leq 2\epsilon \quad \text{ja} \\ |diam\, \Pi(P_{L_n(\zeta)}) - diam\, \Pi(P_\zeta)| &\leq 2\epsilon\,. \end{aligned}$$

Väitteet seuraavat, sillä $\phi(P_\zeta) = P_{L(\zeta)}$ kaikilla $\phi \in \Sigma(G)$. □

LEMMA 5.4. *Olkoon $P_{e^{i\alpha}} \in \mathcal{P}$. Jos on kuvaukset $\phi_n \in \Sigma(G)$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$, siten että $\phi_n(P_{e^{i\alpha}}) \neq P_{e^{i\alpha}}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin*

$$\mathit{diam}\, I(P_{e^{i\alpha}}) = \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}}) \quad \mathit{ja}$$
$$\mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{i\alpha}}) \leq \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{it}})\,.$$

TODISTUS. Ehdosta $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$ seuraa Lauseen 3.7 ja Huomautuksen 3.5 nojalla $L_n \Longrightarrow \mathrm{id}_{\overline{B}}$, ja ehdosta $\phi_n(P_{e^{i\alpha}}) \neq P_{e^{i\alpha}}$ seuraa $L_n(e^{i\alpha}) \neq e^{i\alpha}$. Täten jonolla (L_n) on osajono (L_k) ja luvut $\alpha_k \in \mathbb{R}$, siten että $e^{i\alpha_k} = L_k(e^{i\alpha})$ ja esimerkiksi $\alpha_k \longrightarrow \alpha+$. Lemman 5.3 perusteella pätee

$$\mathit{diam}\, I(P_{e^{i\alpha}}) = \lim_{k \to \infty} \mathit{diam}\, I(P_{e^{i\alpha_k}})) \leq \limsup_{t \to \alpha+} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}})$$

sekä vastaava epäyhtälö joukolle $\Pi(P_{e^{i\alpha}})$.

Toisaalta Lemman 3.1 nojalla $\phi_k^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_G$, joten vastaavasti $L_k^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\overline{B}}$ sekä $L_k^{-1}(e^{i\alpha}) \neq e^{i\alpha}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon $C_k \subset S$ kullakin $k \in \mathbb{Z}_+$ pisteet $e^{i\alpha_k}$ ja $-e^{i\alpha}$ yhdistävä kaari, joka sisältää pisteen $e^{i\alpha}$. Tällöin $L_k^{-1}(C_k) \subset S$ on pisteet $e^{i\alpha}$ ja $L_k^{-1}(-e^{i\alpha})$ yhdistävä kaari, joka sisältää pisteen $L_k^{-1}(e^{i\alpha})$. Siten on luvut $\beta_k \in \mathbb{R}$, joille $e^{i\beta_k} = L_k^{-1}(e^{i\alpha})$ ja $\beta_k \longrightarrow \alpha-$. Siis Lemman 5.3 mukaan pätee

$$\mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{i\alpha}}) = \lim_{k \to \infty} \mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{i\beta_k}})) \leq \limsup_{t \to \alpha-} \mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{it}})$$

sekä vastaava epäyhtälö joukolle $I(P_{e^{i\alpha}})$.

Väitteen ainoan suunnan '$\geq$' todistamiseksi olkoot $t_n \in \mathbb{R}$, $t_n \longrightarrow \alpha\pm$, siten että

$$\mathit{diam}\, I(P_{e^{it_n}}) \longrightarrow \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}})\,. \quad (\star)$$

Olkoot edelleen $a_n, b_n \in B \cap B(e^{it_n}, \frac{1}{n})$, siten että

$$\big||h(a_n) - h(b_n)| - \mathit{diam}\, I(P_{e^{it_n}})\big| < \frac{1}{n}\,. \quad (\star\star)$$

Nyt $a_n, b_n \longrightarrow e^{i\alpha}$, joten siirtymällä tarvittaessa suppeneviin osajonoihin löydetään raja-arvot $a' := \lim h(a_m) \in I(P_{e^{i\alpha}})$ ja $b' := \lim h(b_m) \in I(P_{e^{i\alpha}})$. Siispä ehtojen $(\star)$ ja $(\star\star)$ nojalla

$$\mathit{diam}\, I(P_{e^{i\alpha}}) \geq |a' - b'| = \lim_{m \to \infty} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it_m}}) = \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}})\,.$$

□

Jatkossa joukon A alkioiden lukumäärälle käytetään merkintää $|A|$.

SEURAUS 5.5. *Jos $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä ja $1 \leq |\mathcal{P}_{234}| < \infty$, on avaruus $\Sigma(G)$ diskreetti.*

TODISTUS. Antiteesi: $\Sigma(G)$ on epädiskreetti. Kiinnitetään $P = P_{e^{i\alpha}} \in \mathcal{P}_{234}$. Nyt joukon $\mathcal{P}_{234}$ äärellisyyden myötä on voimassa

$$\mathit{diam}\, I(P) > 0 = \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}})\,. \quad (*)$$

Epädiskreettiyden ja Lemman 3.1 nojalla löydetään $\phi_n \in \Sigma(G) \setminus \{\mathrm{id}_G\}$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$. Tällöin $L_n \neq \mathrm{id}_B$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten Lauseen 2.2 myötä jokainen L_n kiinnittää korkeintaan kaksi pistettä. Näin ollen löytyy $\zeta \in S$, jota yksikään L_n ei kiinnitä.

Olkoon $L := R_{\alpha-\arg\zeta}$ sekä $\psi_n := \phi\phi_n\phi^{-1}$. Topologisuusoletuksen ja tiedon $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$ nojalla $\psi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$. Lisäksi, koska $\phi(P_\zeta) = P_{L(\zeta)} = P_{e^{i\alpha}}$ ja siten $\phi^{-1}(P) = P_\zeta$, on

$$\psi_n(P) = \phi\phi_n(P_\zeta) = \phi(P_{L_n(\zeta)}) \neq \phi(P_\zeta) = P \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+ .$$

Lemman 5.4 mukaan siis $\mathit{diam}\, I(P) = \limsup_{t\to\alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}})$, mikä on ristiriidassa ehdon $(*)$ kanssa. □

Seuraavaa kahta aputulosta hyödynnetään ainoastaan Lauseen 5.8 todistuksessa.

LEMMA 5.6. *Olkoon $\phi_0 \in \Sigma(G)$. Tällöin joukko*

$$\{L \in \Sigma(B) \colon d(\phi\phi_0\phi^{-1}, \mathrm{id}_G) \leq \epsilon\}$$

on suljettu kaikilla $\epsilon > 0$.

TODISTUS. Seurataan oleellisesti Lemman 3.13 alkuosan todistusta, tosin yhdessä kohtaa turvaudutaan ryhmän $\Sigma(B)$ topologisuuteen. Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Merkitään $K := \{L \in \Sigma(B) : \ d(\phi\phi_0\phi^{-1}, \mathrm{id}_G) \leq \epsilon\}$ sekä $\lambda := LL_0L^{-1}$ kaikilla $L \in \Sigma(B)$. Jos nyt $L \in \Sigma(B)\setminus K$, niin kuvauksen Φ isomorfisuuden nojalla

$$|h(\lambda h^{-1}(a)) - a| = |\phi\phi_0\phi^{-1}(a) - a| > \epsilon \quad \text{jollekin } a \in G .$$

Tällöin kuvauksen h jatkuvuuden myötä on $r > 0$, jolle

$$|h(z) - a| > \epsilon \quad \text{kaikilla } z \in B(\lambda h^{-1}(a), r) . \quad (*)$$

Jos lisäksi $\tilde{L} \in \Sigma(B)$, $\tilde{L} \Longrightarrow L$, niin Lauseen 5.2 nojalla

$$L_0\tilde{L}^{-1} \Longrightarrow L_0L^{-1} \quad \text{ja edelleen} \quad \tilde{\lambda} := \tilde{L}L_0\tilde{L}^{-1} \Longrightarrow \lambda .$$

Löytyy siis $\delta > 0$, siten että jos $\tilde{L} \in B(L, \delta)$, niin $\tilde{\lambda} \in B(\lambda, r)$. Oletetaan, että $\tilde{L} \in B(L, \delta)$. Tällöin $\tilde{\lambda}h^{-1}(a) \in B(\lambda h^{-1}(a), r)$, joten kuvauksen Φ isomorfisuuden sekä ehdon $(*)$ perusteella

$$|\tilde{\phi}\phi_0\tilde{\phi}^{-1}(a) - a| = |h(\tilde{\lambda}h^{-1}(a)) - a| > \epsilon .$$

Siten $d(\tilde{\phi}\phi_0\tilde{\phi}^{-1}, \mathrm{id}_G) > \epsilon$ eli $\tilde{L} \in \Sigma(B)\setminus K$. Siis $B(L, \delta) \subset \Sigma(B)\setminus K$, joten joukko $\Sigma(B)\setminus K$ on avoin ja joukko K näin ollen suljettu. □

LEMMA 5.7. *Olkoon $E \subset S$ tiheä ja olkoot $a, b \in S$, $a \neq b$. Tällöin jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$, siten että kaikilla $w_1, w_2 \in B(a, \delta) \cap E$ on $l_1, l_2 \in B(\mathrm{id}_B, \epsilon)$, joille*

$$l_j(a) = w_j \quad \text{ja} \quad l_1(b) = l_2(b) \in E .$$

TODISTUS. Olkoot joukon E tiheyden nojalla $a_n, b_n \in E$, $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$. Merkitään $c := e^{i(\arg a + \arg b)/2}$ ja $c_n := e^{i(\arg a_n + \arg b_n)/2}$, jolloin $c, c_n \in S$, $c_n \longrightarrow c$. Koska a, b, c ovat eri pisteitä, voidaan näin olettaa myös pisteiden a_n, b_n, c_n olevan.

Olkoot $l_n \in$ Möb siten, että $l_n(z) = z_n$, kun $z = a, b, c$. Siis $l_n \longrightarrow \mathrm{id}$ kolmessa pisteessä, joten Lemman 3.2 nojalla $l_n \longrightarrow \mathrm{id}$ kaikkialla. Erityisesti $l_n(0) \longrightarrow 0$ ja $l_n(S) = S$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, sillä Möbius-kuvaus säilyttää yleistetyt ympyrät. Näin ollen $l_n \in \Sigma(B)$ suurilla n, joten Huomautuksen 3.5 ja ehdon $l_n \longrightarrow \mathrm{id}$ nojalla $l_n \Longrightarrow \mathrm{id}_B$.

Luvut $a_n, b_n \in E$ valittiin suppenemista lukuun ottamatta mielivaltaisesti, joten jokaisella $\epsilon > 0$ on $\delta > 0$, siten että kaikilla $w \in B(a, \delta) \cap E$ ja $\zeta \in B(b, \delta) \cap E$ on $l \in B(\mathrm{id}_B, \epsilon)$, jolle $l(a) = w$ ja $l(b) = \zeta$. Kiinnitetään $\zeta \in B(b, \delta) \cap E$, jolloin erityisesti kaikilla $w_j \in B(a, \delta) \cap E$ on $l_j \in B(\mathrm{id}_B, \epsilon)$, siten että $l_j(a) = w_j$ ja $l_j(b) = \zeta \in E$. □

Nyt ollaan valmiita todistamaan luvun päätulos. Edellä kirjattujen aputulosten ohella todistus nojaa avaruuksille $\Sigma(G)$ Luvuissa 2 ja 3 osoitettuihin ominaisuuksiin, Lauseeseen 4.16 sekä Luvussa 1 todistettuihin Lauseisiin 1.21 ja 1.31. Todistus seuraa hyvin tarkasti lähdettä [**12**, 196–197], josta tieto tuloksesta on peräisinkin.

LAUSE 5.8. *Avaruus $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä, jos ja vain jos se on diskreetti tai ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

TODISTUS. Toinen suunta on Lauseen 5.2 myötä selvä, sillä diskreetti avaruus on ryhmänä aina topologinen.

Oletetaan, että $\Sigma(G)$ on topologinen ryhmä. Tehdään antiteesi: Avaruus $\Sigma(G)$ ei ole diskreetti eikä ∂G lokaalisti yhtenäinen. Tällöin Lauseen 4.12 ja Seurauksen 5.5 nojalla $|\mathcal{P}_{234}| = \infty$. Epädiskreettiyden ja Lemman 3.1 perusteella löytyy kuvaukset $\phi_n \in \Sigma(G)\backslash\{\mathrm{id}_G\}$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$, joille topologisuusoletuksen nojalla

$$\phi\phi_n\phi^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_G \quad \text{kaikilla } \phi \in \Sigma(G)\,.$$

Näin ollen joukoille

$$A_{k,m} := \{\phi \in \Sigma(G) :\ d(\phi\phi_n\phi^{-1}, \mathrm{id}_G) \leq \frac{1}{k} \text{ kaikilla } n \geq m\}\,,$$

$k, m \in \mathbb{Z}_+$, pätee

$$\Sigma(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k,m} \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Merkinnällä $A'_{k,m} := \Phi^{-1}(A_{k,m})$ on siten

$$\Sigma(B) = \Phi^{-1}\big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k,m}\big) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_{k,m} \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Huomataan, että

$$A'_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{L \in \Sigma(B) :\ d(\phi\phi_n\phi^{-1}, \mathrm{id}_G) \leq \frac{1}{k}\,\}\,,$$

joten Lemman 5.6 nojalla kukin $A'_{k,m}$ on suljettujen joukkojen leikkaus ja sellaisena suljettu. Koska avaruus $\Sigma(B)$ on Lauseen 3.3 mukaan täydellinen, on se Lauseen 1.2 nojalla toista kategoriaa. On siis avoin joukko $V_1 \subset \Sigma(B)$ sekä $m_1 \in \mathbb{Z}_+$, joille

$$\varnothing \neq V_1 \subset A'_{1,m_1}\,, \quad diam(V_1) < 1\,.$$

Vastaavasti avaruus

$$\overline{V_1} = \overline{V_1} \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_{2,m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A'_{2,m} \cap \overline{V_1})$$

on täydellisen avaruuden suljettuna joukkona täydellinen ja joukot $A'_{2,m} \cap \overline{V_1}$ ovat suljettuja, joten Lauseen 1.2 nojalla on avoin $U_2 \subset \Sigma(B)$ sekä $m_2 \in \mathbb{Z}_+$, joille

$$\varnothing \neq U_2 \cap \overline{V_1} \subset A'_{2,m_2} \cap \overline{V_1}\,.$$

Erityisesti $\varnothing \neq U_2 \cap V_1 \subset A'_{2,m_2}$ ja joukko $U_2 \cap V_1$ on avoin, joten löydetään avoin $V_2 \subset \Sigma(B)$, jolle

$$\varnothing \neq \overline{V_2} \subset U_2 \cap V_1 \subset A'_{2,m_2}\,, \quad diam(V_2) < \frac{1}{2}\,.$$

Näin jatkamalla löydetään avoimet joukot $V_k \subset \Sigma(B)$ sekä luvut $m_k \in \mathbb{Z}_+$, siten että

$$\varnothing \neq V_k \subset A'_{k,m_k}\,, \quad \overline{V_{k+1}} \subset V_k \quad \text{ja} \quad diam(V_k) < 2^{-k} \longrightarrow 0\,.$$

Cantorin lemman 1.1 nojalla

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_k} \neq \varnothing\,,$$

ja joukkojen $A'_{k,m}$ luonne muistaen kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee:

$$\text{Suurilla } n \quad d(hLL_n, hL) = d(\phi\phi_n\phi^{-1}, \mathrm{id_G}) \leq \frac{1}{k} \quad \text{kaikilla } L \in V_k\,,$$

missä yhtäsuuruus seuraa Lemmasta 3.1 ja kuvauksen Φ isomorfisuudesta. Olkoon $l_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} V_k$. Lemman 3.1 nojalla joukot $\tilde{V_k} := V_k l_0^{-1}$ ovat pisteen id_B ympäristöjä. Merkitään $\lambda_n := l_0 L_n l_0^{-1}$. On osoitettu, että kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee:

$$\text{Suurilla } n \quad d(hl\lambda_n, hl) = d(hll_0L_n, hll_0) \leq \frac{1}{k} \quad \text{kaikilla } l \in \tilde{V_k}\,, \qquad (\star)$$

missä hyödynnettiin jälleen Lemmaa 3.1.

Olkoon $E \subset S$ niiden pisteiden joukko, joissa kuvauksella h on radiaaliraja-arvo, sekä $F \subset S$ niiden, jotka λ_n suurilla n kiinnittää. Lauseen 4.16 nojalla E on tiheä joukossa S, ja koska $\phi_n \neq \mathrm{id}_G$, pätee $\lambda_n \neq \mathrm{id}_B$ ja siten $|F| \leq 2$ Lauseen 2.2 nojalla. Olkoot $a \in S\backslash F$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Ehdon $(\star)$ ja joukon F luonteen myötä voidaan valita sellainen suuri n, jolle $\lambda_n(a) \neq a$ ja

$$d(hl\lambda_n, hl) \leq \frac{1}{k} \quad \text{kaikilla } l \in \tilde{V_k}\,. \quad (\star\star)$$

Koska $\tilde{V_k}$ on pisteen id_B ympäristö, voidaan edelleen Lemman 5.7 nojalla valita $\delta > 0$ siten, että kaikilla $w_1, w_2 \in B(a,\delta) \cap E$ löytyy kuvaukset $l_1, l_2 \in \tilde{V_k}$, joille

$$l_j(a) = w_j \quad \text{ja} \quad \zeta := l_1(\lambda_n(a)) = l_2(\lambda_n(a)) \in E\,. \quad (\star\star\star)$$

Olkoot $w_1, w_2 \in B(a,\delta) \cap E$ sekä l_j, ζ kuten yllä. Merkitköön h myös radiaalista jatkettaan joukkoon $B \cup E$. Lauseen 2.2 mukaan l_j, $l_j\lambda_n \in$ Möb, joten Lauseen 1.21 sekä ehtojen $(\star\star)$ ja $(\star\star\star)$ perusteella

$$|h(\zeta) - h(w_j)| = |h(l_j\lambda_n(a)) - h(l_j(a))| \leq \frac{1}{k}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

ja edelleen

$$|h(w_1) - h(w_2)| \leq |h(w_1) - h(\zeta)| + |h(\zeta) - h(w_2)| \leq \frac{2}{k}\,.$$

On siis osoitettu:

$$\text{Kaikilla } a \in S\backslash F \text{ ja } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ on } \delta > 0, \text{ jolle } diam(h(B(a,\delta) \cap E)) \leq \frac{2}{k}\,.$$

Kuvauksen h rajoittumalla joukkoon $E\setminus F$ on siten jatkuva jatke joukkoon $S\setminus F$. Kun kuvausta h jatketaan kyseisellä jatkeella, on syntyvä jatke Lauseen 1.31 mukaan jatkuva joukossa $\overline{B}\setminus F$. Lemman 4.11 nojalla $|\mathcal{P}_{234}| \leq |F| \leq 2$, mikä on ristiriidassa antiteesin jälkeen todetun ehdon $|\mathcal{P}_{234}| = \infty$ kanssa. Siis $\Sigma(G)$ on diskreetti tai ∂G lokaalisti yhtenäinen. $\square$

LUKU 6

Yhtenäisyystarkastelua

Lauseessa 3.12 osoitettiin, että avaruus $\Sigma(G)$ on homeomorfinen toruksen $\mathbb{T}$ kanssa täsmälleen silloin, kun ∂G on lokaalisti yhtenäinen. Lauseessa 4.12 toisaalta todettiin joukon ∂G lokaali yhtenäisyys yhtäpitäväksi ehdon $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ kanssa. Tässä luvussa avaruuden $\Sigma(G)$ (epä)yhtenäisyyttä tarkastellaan pääosin tilanteissa, joissa joukko $\mathcal{P}_{234}$ on ei–tyhjä, mutta korkeintaan numeroituvasti ääretön. Lauseiden 6.11 ja 6.12 tulokset tosin kattavat myös ylinumeroituvan tapauksen, ja toisaalta Lauseesta 6.13 seuraa, että $\Sigma(G)$ on polkuyhtenäinen, jos ja vain jos $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$.

Ylinumeroituvasta tapauksesta tulkoon vielä mainituksi, että on olemassa (ks. [**7**]) avaruuksia $\Sigma(G)$, joille $\mathcal{P}_{234}$ on ylinumeroituva ja jotka ovat täysin epäyhtenäisiä mutta eivät kuitenkaan diskreettejä (vrt. Lause 6.18). Sitä, ovatko avaruudet $\Sigma(G)$ ylinumeroituvassa tapauksessa yleisesti ottaen epäyhtenäisiä, ei tiedettäne. Tuohon suuntaan viittaavista tuloksista kuitenkin mainittakoon lähteessä [**6**, 102] todistettu

LAUSE 6.1. *Olkoon $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$. Tällöin avaruus $\Sigma(G)$ on lokaalisti kompakti, jos ja vain jos se on diskreetti.*

6.1. Kiinnittyvät reuna-alkiot ja epäyhtenäisyys

Avaruuden $\Sigma(G)$ epäyhtenäisyyden tutkimisessa oleellisessa osassa on seuraava kiinnittyvän reuna-alkion (*fixed prime end*, ks. [**6**, 95]) käsite.

MÄÄRITELMÄ 6.2. Reuna-alkio P on *kiinnittyvä*, jos on $\epsilon > 0$, jolle $\phi(P) = P$ kaikilla $\phi \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$.

Kiinnittyvien reuna-alkioiden havaitaan heti aiheuttavan jopa diskreettiyttä:

LEMMA 6.3. *Jos kiinnittyviä reuna-alkioita on vähintään kolme, on avaruus $\Sigma(G)$ diskreetti. Tällöin jokainen reuna-alkio on kiinnittyvä.*

TODISTUS. Jos $\phi \in \Sigma(G)$ kiinnittää kolme reuna-alkiota, niin vastaava Möbius-kuvaus L kiinnittää kolme pistettä. Silloin $L = \mathrm{id}$ ja $\phi = \mathrm{id}_G$. Jos siis kiinnittyviä reuna-alkioita on vähintään kolme, niin löytyy $\epsilon > 0$, siten että $B(\mathrm{id}_G, \epsilon) = \{\mathrm{id}_G\}$. Avaruuden $\Sigma(G)$ diskreettiys seuraa nyt Lemmasta 3.1. Viimeinen väite taas seuraa siitä, että jokaisella $P \in \mathcal{P}$ triviaalisti $\phi(P) = P$ kaikilla $\phi \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon) = \{\mathrm{id}_G\}$. $\square$

Määritelmän 6.2 myötä Lemma 5.4 voidaan muotoilla hieman toisin:

LEMMA 6.4. *Olkoon $P_{e^{i\alpha}} \in \mathcal{P}$. Jos*

$$\begin{aligned} diam\, I(P_{e^{i\alpha}}) &\neq \limsup_{t \to \alpha\pm} diam\, I(P_{e^{it}}) \quad tai \\ diam\, \Pi(P_{e^{i\alpha}}) &> \limsup_{t \to \alpha\pm} diam\, \Pi(P_{e^{it}}), \end{aligned}$$

on reuna-alkio $P_{e^{i\alpha}}$ kiinnittyvä.

Lemmoista 6.3 ja 6.4 saadaan välittömästi tulos, jota tullaan parantamaan vielä Lauseessa 6.18:

SEURAUS 6.5. *Jos* $3 \leq |\mathcal{P}_{234}| < \infty$, *on avaruus* $\Sigma(G)$ *diskreetti.*

Lauseessa 6.9 kyetään osoittamaan, että jo yksikin kiinnittyvä reuna-alkio takaa avaruuden $\Sigma(G)$ epäyhtenäisyyden. Tämän näyttämiseksi määritellään seuraavassa ketjukomponentin (*Verkettungskomponente*, ks. [**4**, 238]) käsite. Ketjukomponentin määritelmän lisäksi myös sitä seuraavat tulokset 6.7−6.10 on esitetty (ja todistettu) lähteessä [**4**, 238–239].

MÄÄRITELMÄ 6.6. Olkoon (M, ρ) metrinen avaruus ja $x \in M$. Asetetaan ensin jokaisella $\epsilon > 0$

$$K_\epsilon(x) := \{y \in M : \text{on } x = x_1, \ldots, x_n = y \in M, \text{ joille } \rho(x_j, x_{j-1}) < \epsilon\},$$

ja määritellään sitten *pisteen* x *ketjukomponentti* $K(x) := \cap_{\epsilon>0} K_\epsilon(x)$. Joukot $K_\epsilon(x)$ ovat selvästi avoimia ja suljettuja, joten ketjukomponentti $K(x)$ sisältää vastaavan (yhtenäisyys)komponentin $C(x)$.

Avaruudessa $\Sigma(G)$ ketjukomponenttiin kuulumisella on näppärä karakterisointi, josta tässä osoitetaan toinen suunta tapauksesssa $K(\mathrm{id}_G)$.

LEMMA 6.7. *Olkoon* $\phi \in K(\mathrm{id}_G)$. *Tällöin kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa kuvaukset* $\phi_1, \ldots, \phi_n \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *siten että* $\phi = \phi_n \cdots \phi_1$.

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$. Määritelmän 6.6 myötä löytyy $\psi_0, \ldots, \psi_n \in \Sigma(G)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, siten että $\mathrm{id}_G = \psi_0$, $\phi = \psi_n$ ja $d(\psi_j, \psi_{j-1}) < \epsilon$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Nyt kuvauksille $\phi_j := \psi_j \psi_{j-1}^{-1}$ pätee Lemman 3.1 nojalla $d(\phi_j, \mathrm{id}_G) = d(\psi_j, \psi_{j-1}) < \epsilon$ eli $\phi_j \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$, ja lisäksi

$$\phi = (\phi\psi_{n-1}^{-1}) \cdots (\psi_1 \psi_0^{-1})\mathrm{id}_G = \phi_n \cdots \phi_1 .$$

□

LAUSE 6.8. *Jos reuna-alkio* P *on kiinnittyvä, niin* $\phi(P) = P$ *kaikilla* $\phi \in C(\mathrm{id}_G)$.

TODISTUS. Olkoon P kiinnittyvä reuna-alkio ja olkoon $\epsilon > 0$ siten, että $\phi(P) = P$ kaikilla $\phi \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$. Kiinnitetään $\phi \in C(\mathrm{id}_G)$. Koska $C(\mathrm{id}_G) \subset K(\mathrm{id}_G)$, löydetään Lemman 6.7 nojalla $\phi_1, \ldots, \phi_n \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, siten että $\phi = \phi_n \cdots \phi_1$. Luvun ϵ valinnan myötä $\phi_j(P) = P$ jokaisella $j = 1, \ldots, n$, joten myös $\phi(P) = P$. □

Kierron $R \neq \mathrm{id}$ kuva $\Phi(R)$ ei kiinnitä yhtäkään reuna-alkiota, joten Lauseen 6.8 nojalla $\Phi(R) \notin C(\mathrm{id}_G)$. Näin ollen pätee

LAUSE 6.9. *Jos yksikin reuna-alkioista on kiinnittyvä, on* $\Sigma(G)$ *epäyhtenäinen.*

Lemma 6.4 yhdistettynä Lauseeseen 6.9 antaa välttämättömän geometrisen ehdon avaruuden $\Sigma(G)$ yhtenäisyydelle:

SEURAUS 6.10. *Jos* $\Sigma(G)$ *on yhtenäinen, niin kaikilla* $P_{e^{i\alpha}} \in \mathcal{P}$ *pätee*

$$\mathit{diam}\, I(P_{e^{i\alpha}}) = \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, I(P_{e^{it}}) \quad \mathit{ja}$$
$$\mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{i\alpha}}) \leq \limsup_{t \to \alpha\pm} \mathit{diam}\, \Pi(P_{e^{it}}) .$$

6.2. Tapaus $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$ ja täysi epäyhtenäisyys

Avaruuden epäyhtenäisen joukon sanotaan olevan *täysin epäyhtenäinen*, mikäli sen (yhtenäisyys)komponentit ovat yksiöitä. Vastaavasti määritellään täysi polkuepäyhtenäisyys. Tapauksessa $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$ avaruus $\Sigma(G)$ on seuraavan tuloksen nojalla diskreetti tai *lokaalisti* täysin epäyhtenäinen ja Lauseen 6.12 nojalla täysin polkuepäyhtenäinen. Lauseiden 6.11–6.13 tulokset ovat todistusideoineen kaikkineen peräisin lähteestä [**11**, 198–200].

LAUSE 6.11. *Jos $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$, on joukko $\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)$ yksiö tai täysin epäyhtenäinen pienillä $\epsilon > 0$.*

TODISTUS. Lauseen 3.7 nojalla kuvaus Φ^{-1} on jatkuva, joten riittää osoittaa väite joukoille $K_\epsilon := \Phi^{-1}(\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)) \subset \Sigma(B)$. Oletuksen myötä on eri pisteet $\zeta_j \in S_{234}$, $j = 1, 2, 3$. Olkoot $a, b > 0$ siten, että

$$diam\, I(P_{\zeta_j}) \geq 5a \quad \text{kaikilla } j \quad \text{ja} \quad diam\, \Pi(P_{\zeta_j}) \geq 3b\,, \quad \text{jos } \zeta_j \in S_{34}\,.$$

Olkoon $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}\min\{a, b\})$. Oletetaan $\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon) \neq \{\mathrm{id}_G\}$ ja osoitetaan K_ϵ täysin epäyhtenäiseksi. Tehdään vastaoletus: on yhtenäinen joukko $C \subset K_\epsilon$, joka sisältää eri kuvaukset $l, \tilde{l}$. Tällöin joukko $C_0 := Cl^{-1}$ sisältää eri kuvaukset $L_0 := \tilde{l}l^{-1}$, id_B ja on Lemman 3.1 mukaan yhtenäinen. Edelleen $C_0 \subset K_{2\epsilon}$, sillä Lemman 3.1 nojalla $d(\tilde{\phi}\phi^{-1}, \mathrm{id}_B) \leq 2\epsilon$ kaikilla $L, \tilde{L} \in K_\epsilon$. Koska $L_0 \neq \mathrm{id}_B$, on $L_0(\zeta_j) \neq \zeta_j =: \zeta$ jollekin $j \in \{1, 2, 3\}$. Lisäksi kuvaus

$$\Omega : \Sigma(B) \to S\,, \quad \Omega(L) = L(\zeta)\,,$$

on Huomautuksen 3.5 nojalla jatkuva, joten joukko $\Omega(C_0)$ sisältää eri pisteet $\zeta, L_0(\zeta)$ ja on yhtenäinen. Erityisesti $\Omega(C_0)$ sisältää pisteet $\zeta, L_0(\zeta)$ yhdistävän kaaren A, ja jos $\xi \in A$, on $L \in C_0$, jolle $\xi = \Omega(L) = L(\zeta)$.

Olkoot $\xi \in A$ ja $L \in C_0$, siten että $\xi = L(\zeta)$. Tiedon $C_0 \subset K_{2\epsilon}$, Lemman 3.1 ja luvun ϵ valinnan nojalla $d(hL, h) \leq 2\epsilon < \min\{a, b\}$, mistä seuraa

$$\begin{aligned} |diam\, I(P_\xi) - diam\, I(P_\zeta)| &\leq 2\min\{a, b\} \quad \text{ja} \\ |diam\, \Pi(P_\xi) - diam\, \Pi(P_\zeta)| &\leq 2\min\{a, b\} \end{aligned}$$

kuten Lemman 5.3 todistuksessa. Jos nyt $P_\zeta \in \mathcal{P}_2$, niin $diam\, \Pi(P_\zeta) = 0$ ja luvun a valinnan nojalla $diam\, I(P_\zeta) \geq 5a$. Siten $diam\, \Pi(P_\xi) \leq 2a$ ja $diam\, I(P_\zeta) \geq 3a$, minkä johdosta $\xi \notin S_{13}$. Jos taas $P_\zeta \in \mathcal{P}_{34}$, on luvun b valinnan nojalla $diam\, \Pi(P_\zeta) \geq 3b$, jolloin $diam\, \Pi(P_\xi) \geq b$ ja siten $\xi \notin S_{12}$. Siispä kaari A jättää leikkaamatta toista joukoista S_{13}, S_{12}, jotka kuitenkin ovat Lauseen 4.16 mukaan tiheitä avaruudessa S. Näin ollen vastaoletus johti ristiriitaan ja väite seuraa. □

LAUSE 6.12. *Jos $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$, on avaruus $\Sigma(G)$ täysin polkuepäyhtenäinen.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi: On olemassa polku $\gamma : [0, 1] \to \Sigma(G)$, jolle pätee $\phi_0 := \gamma(0) \neq \gamma(1) =: \phi_1$. Tällöin $\Sigma(G)$ on epädiskreetti, joten Lauseen 6.11 nojalla on $\epsilon \in (0, d(\phi_0, \phi_1))$, siten että joukko $\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)$ on täysin epäyhtenäinen. Lemman 3.1 perusteella myös joukko $\overline{B}(\phi_0, \epsilon)$ on täysin epäyhtenäinen. Tämä on ristiriita, sillä polun γ rajoittuma välille $[0, t_\epsilon]$, $t_\epsilon := \inf\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \notin \overline{B}(\phi_0, \epsilon)\}$, on ei–vakio, kuvaa joukkoon $\overline{B}(\phi_0, \epsilon)$ ja on kuvaltaan yhtenäinen. □

Kuten avaruuden $\Sigma(G)$ separoituvuus Lauseessa 3.14, myös sen polkuyhtenäisyys karakterisoi joukon ∂G lokaalin yhtenäisyyden:

LAUSE 6.13. *Avaruus $\Sigma(G)$ on polkuyhtenäinen, jos ja vain jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen.*

TODISTUS. Jos ∂G on lokaalisti yhtenäinen, niin $\Sigma(G)$ on Lauseen 3.15 nojalla homeomorfinen toruksen $\mathbb{T}$ kanssa ja siten polkuyhtenäinen.

Kääntäen, jos ∂G ei ole lokaalisti yhtenäinen, on Lauseen 4.12 myötä $\mathcal{P}_{234} \neq \varnothing$. Jos $|\mathcal{P}_{234}| = 1, 2$, niin Seurauksen 6.10 nojalla $\Sigma(G)$ ei ole edes yhtenäinen, ja jos $|\mathcal{P}_{234}| \geq 3$, kaatuu polkuyhtenäisyys Lauseeseen 6.12. $\square$

Seuraavaksi todistetaan joukko tuloksia, jotka huipentuvat Lauseeseen 6.18. Kukin tuloksista 6.14−6.18 on todistusideoineen peräisin lähteestä [**6**, 96–99].

Osoittautuu, että pisteen id_G lähiympäristössä reuna-alkio $P \notin \mathcal{P}_1$ ei voi muuttaa lajiaan kuin monimutkaisimpaan:

LAUSE 6.14. *Olkoon $P \in \mathcal{P}_j$, $j \in \{2, 3, 4\}$. Tällöin on $\epsilon > 0$, siten että $\phi(P) \in \mathcal{P}_{j4}$ kaikilla $\phi \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon)$.*

TODISTUS. Antiteesi: Väitettyä ϵ ei ole. Tällöin on $\phi_n \in \Sigma(G)$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$, siten että $\phi_n(P) \in \mathcal{P} \backslash \mathcal{P}_{j4}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Siispä Lemman 5.3 nojalla

$$\begin{aligned} diam\, I(P) &= \lim_{n \to \infty} diam\, I(\phi_n(P)) \quad \text{ja} \\ diam\, \Pi(P) &= \lim_{n \to \infty} diam\, \Pi(\phi_n(P)) \,. \end{aligned}$$

Käsitellään tapaukset $j = 2, 3, 4$ erikseen.

Tapaus $j = 2$: Tällöin $diam\, I(\phi_n(P)) = diam\, \Pi(\phi_n(P))$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten $diam\, I(P) = diam\, \Pi(P)$. Siis $P \in \mathcal{P}_{13}$, mikä on ristiriita.

Tapaus $j = 3$: Nyt $diam\, \Pi(\phi_n(P)) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten $diam\, \Pi(P) = 0$. Siis $P \in \mathcal{P}_{12}$, mikä on ristiriita.

Tapaus $j = 4$: Löytyy jonon (ϕ_n) osajono (ϕ_k), jolle joko $diam\, \Pi(\phi_k(P)) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ tai sitten $diam\, I(\phi_k(P)) = diam\, \Pi(\phi_k(P))$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Edellinen tilanne johtaa ristiriitaan $P \in \mathcal{P}_{12}$, jälkimmäinen ristiriitaan $P \in \mathcal{P}_{13}$. $\square$

Seuraavien tulosten muotoilua varten määritellään jokaisella $P \in \mathcal{P}$ kuvaus

$$T_P : \Sigma(G) \to \mathcal{P} \,, \quad T_P(\phi) = \phi(P) \,.$$

Jos siis $P \in \mathcal{P}_j$, $j \in \{2, 3, 4\}$, niin Lauseen 6.14 nojalla pätee $T_P(B(\mathrm{id}_G, \epsilon)) \subset \mathcal{P}_{j4}$ jollekin $\epsilon > 0$. Toisaalta jos $P \in \mathcal{P}$ on kiinnittyvä, on Lauseen 6.8 nojalla voimassa $T_P(C(\mathrm{id}_G)) = \{P\}$.

LEMMA 6.15. *Jokaisella $P \in \mathcal{P}$ kuvaus T_P on jatkuva.*

TODISTUS. Olkoon $P = P_\zeta \in \mathcal{P}$. Kuvaus

$$\Omega_\zeta : \Sigma(B) \to S \,, \quad \Omega_\zeta(L) = L(\zeta) \,,$$

on Huomautuksen 3.5 nojalla jatkuva. Lisäksi h^* on homeomorfismi ja kuvaus Φ^{-1} Lauseen 3.7 nojalla jatkuva. Koska kaikilla $\phi \in \Sigma(G)$ pätee

$$T_P(\phi) = \phi(P_\zeta) = h^* L(\zeta) = h^* \Omega_\zeta(L) = h^* \Omega_\zeta \Phi^{-1}(\phi) \,,$$

on myös yhdistetty kuvaus $T_P = h^* \Omega_\zeta \Phi^{-1}$ jatkuva. $\square$

Lemman 3.13 kompaktiusosuus osoitettiin vain, jotta nyt osattaisiin todistaa

LEMMA 6.16. *Pienillä $\epsilon > 0$ joukko $T_P(\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon))$ on kompakti kaikilla $P \in \mathcal{P}$.*

TODISTUS. Joukko $\Phi^{-1}(\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon))$ on Lemman 3.13 mukaan kompakti pienillä $\epsilon > 0$, ja Lemman 6.15 todistuksen nojalla $T_P = h^*\Omega_\zeta\Phi^{-1}$ kaikilla $P = P_\zeta \in \mathcal{P}$, missä kuvaukset h^*, Ω_ζ ovat jatkuvia ja säilyttävät siten kompaktiuden. □

LAUSE 6.17. *Jos $P \in \mathcal{P}$ ei ole kiinnittyvä, on joukko $T_P(B(\mathrm{id}_G, \epsilon))$ ylinumeroituva kaikilla $\epsilon > 0$.*

TODISTUS. Älköön reuna-alkio P olko kiinnittyvä. Riittää osoittaa, että joukko $T_\epsilon := T_P(\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon))$ on ylinumeroituva pienillä $\epsilon > 0$. Oletuksen sekä Lemman 6.3 nojalla kiinnittyviä reuna-alkioita on enintään kaksi, joten Lemmojen 6.15 ja 6.16 myötä pienillä $\epsilon > 0$ joukko T_ϵ on kompakti eikä sisällä kiinnittyviä reuna-alkioita. Pienillä $\epsilon > 0$ siis T_ϵ on aliavaruutena täydellinen ja jokaisella $P' \in T_\epsilon$ $(\neq \varnothing)$ on $\phi_n \in \overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)$, $\phi_n \Longrightarrow \mathrm{id}_G$, joille $\phi_n(P') \neq P'$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi Lemman 6.15 nojalla $\phi_n(P') \longrightarrow P'$, joten P' on joukon T_ϵ kasautumispiste. Ylinumeroituvuus seuraa, sillä jos T_ϵ olisi numeroituva, olisi sillä täydellisenä avaruutena Lauseen 1.2 mukaan erakkopiste. □

Seurausta 6.5 saadaan nyt Lauseiden 6.14 ja 6.17 avulla oleellisesti vahvennettua. Ylinumeroituville joukoille $\mathcal{P}_{234}$ seuraava tulos ei enää laajene (ks. [**7**]).

LAUSE 6.18. *Jos $3 \leq |\mathcal{P}_{234}| < \infty$ tai joukko $\mathcal{P}_{234}$ on numeroituvasti ääretön, on avaruus $\Sigma(G)$ diskreetti.*

TODISTUS. Olkoon $P \in \mathcal{P}_j$, $j \in \{2, 3, 4\}$, ja olkoon $\epsilon > 0$ kuten Lauseessa 6.14. Tällöin $T_P(B(\mathrm{id}_G, \epsilon)) \subset \mathcal{P}_{j4} \subset \mathcal{P}_{234}$, joten joukko $T_P(B(\mathrm{id}_G, \epsilon))$ on oletuksen nojalla numeroituva. Näin ollen P on Lauseen 6.17 perusteella kiinnittyvä. Siispä oletuksen myötä kiinnittyviä reuna-alkioita on ainakin kolme, joten väite seuraa Lemmasta 6.3. □

6.3. Tapaus $|\mathcal{P}_{234}| = 1, 2$ ja aliryhmä $C(\mathrm{id}_G)$

Lemman 3.1 myötä avaruuden $\Sigma(G)$ lokaalit topologiset ominaisuudet ovat joka pisteessä samat. Erityisesti pisteiden $\phi, \psi \in \Sigma(G)$ komponenteille $C(\phi), C(\psi)$ pätee $C(\phi\psi) = C(\phi)\psi \approx C(\phi)$. Oikealta kertomisen isometrisyydestä nimittäin seuraa $C(\phi)\psi \subset C(\phi\psi)$, $C(\phi\psi)\psi^{-1} \subset C(\phi)$, ja lisäksi $(C(\phi\psi)\psi^{-1})\psi = C(\phi\psi)$. Osoitetaan edellä mainitusta lähtien

LAUSE 6.19. *Joukko $C(\mathrm{id}_G)$ on ryhmän $\Sigma(G)$ aliryhmä.*

TODISTUS. Olkoot $\phi, \psi \in C(\mathrm{id}_G)$. Tällöin $C(\phi) = C(\psi) = C(\mathrm{id}_G)$ ja siten

$$\phi\psi^{-1} \in C(\phi\psi^{-1}) = C(\phi)\psi^{-1} = C(\psi)\psi^{-1} = C(\mathrm{id}_G)\,,$$

mistä väite seuraa. □

Selvitetään seuraavaksi, millaisia vaihtoehtoja aliryhmäksi $C(\mathrm{id}_G)$ on tapauksissa $|\mathcal{P}_{234}| = 1, 2$. Todistusten sisällä tulee samalla todetuksi, että Luvussa 2 esiintyneet aliryhmät $\Sigma_{\pm 1}, \Sigma_1$ ja F_1 ovat yhtenäisiä (toki kiertojenkin ryhmä Σ_0 on, mikä seuraa Lauseesta 3.4). Osoitetaan ensin

LAUSE 6.20. *Jos* $|\mathcal{P}_{234}| = 2$, *niin joko* $C(\mathrm{id}_G) = \{\mathrm{id}_G\}$ *tai* $\Phi^{-1}(C(\mathrm{id}_G))$ *on Abelin ryhmän* $\Sigma_{\pm 1}$ *konjugaatti ryhmässä* $\Sigma(B)$.

TODISTUS. Olkoot $\mathcal{P}_{234} = \{P_\zeta, P_\xi\}$ ja $C' := \Phi^{-1}(C(\mathrm{id}_G))$. Lemman 6.4 nojalla P_ζ ja P_ξ ovat kiinnittyviä, joten Lauseen 6.8 perusteella $C' \subset \Sigma_{\zeta,\xi}$. Lauseen 2.14 mukaan $\Sigma_{\zeta,\xi}$ on joukon $\Sigma_{\pm 1}$ konjugaatti ryhmässä $\Sigma(B)$, ja Lauseen 3.7 nojalla Φ^{-1} sekä konjugointi ryhmässä $\Sigma(B)$ ovat jatkuvia isomorfismeja. Näin ollen riittää osoittaa, ettei ryhmällä $\Sigma_{\pm 1}$ ole epätriviaaleja yhtenäisiä aliryhmiä.

Olkoot $\{\mathrm{id}_B\} \neq A \leq \Sigma_{\pm 1}$ sekä $L \in A \backslash \{\mathrm{id}_B\}$. Tällöin Lemman 2.10 todistuksen nojalla $L = T_r$, $r \in (-1,1)\backslash\{0\}$, ja koska $T_{-r} = L^{-1} \in A$, voidaan olettaa $r \in (0,1)$. Nyt $L^{2^n} \in A$ ja $r_n := L^{2^n}(0) \in (0,1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi Lemman 2.4 mukaan

$$r_{n+1} = T_{r_n * r_n}(0) = r_n * r_n = \frac{2r_n}{1+r_n^2} > r_n = T_{r_n}(0) = r_n\,,$$

joten kasvavuuden sekä relaation $r_{n+1} = 2r_n/(1+r_n^2)$ perusteella $r_n \longrightarrow 1$. Kuvaus $\Sigma_{\pm 1} \to (-1,1) : T_s \mapsto s = T_s(0)$ on Lauseen 3.4 nojalla homeomorfismi, joten A on yhtenäinen, jos ja vain jos $A = \Sigma_{\pm 1}$. □

Tapauksessa $|\mathcal{P}_{234}| = 1$ vaihtoehtoja on kaksi enemmän. Tapauksen $|\mathcal{P}_{234}| = 2$ kanssa yhtenevä epätriviaali vaihtoehto tosin voitaisiin sulkea pois, mikäli kyettäisiin osoittamaan, että reuna-alkio $P \in \mathcal{P}_1$ ei voi olla kiinnittyvä. Väitteen pätevyyteen ei kuitenkaan tässä osata ottaa kantaa.

LAUSE 6.21. *Jos* $|\mathcal{P}_{234}| = 1$, *niin joko* $C(\mathrm{id}_G) = \{\mathrm{id}_G\}$ *tai* $\Phi^{-1}(C(\mathrm{id}_G))$ *on Abelin ryhmän* $\Sigma_{\pm 1}, \Sigma_1$ *tai epäkommutatiivisen ryhmän* F_1 *konjugaatti ryhmässä* $\Sigma(B)$.

TODISTUS. Olkoot $\mathcal{P}_{234} = \{P_\zeta\}$ ja $C' := \Phi^{-1}(C(\mathrm{id}_G))$. Koska P_ζ on Lemman 6.4 nojalla kiinnittyvä, pätee Lauseen 6.8 perusteella $C' \subset F_\zeta$. Lauseen 2.14 mukaan F_ζ on ryhmän F_1 konjugaatti, ja kuvaus Φ^{-1} sekä ryhmässä $\Sigma(B)$ konjugointi ovat Lauseen 3.7 nojalla jatkuvia isomorfismeja. Riittää siis tutkia ryhmän F_1 yhtenäisiä aliryhmiä A, joille voidaan lisäksi olettaa $A \not\subseteq \Sigma_{1,\xi}$ kaikilla $\xi \in S\backslash\{1\}$, sillä muuten päädytään vaihtoehdoista kahteen ensimmäiseen kuten Lauseen 6.20 todistuksessa. Siirretään tarkastelut puolitasoon H todistamisen helpottamiseksi.

Lauseessa 2.1 nähtiin ryhmän $\Sigma(H)$ koostuvan kuvauksista $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, joille $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$. Määritellään $k : B \to H : z \mapsto (z+1)/(iz-i)$, jolloin pisteen ∞ kiinnittävien ryhmän $\Sigma(H)$ kuvausten joukko on

$$F_\infty(H) = kF_1k^{-1} = \{z \mapsto az+b :\ a > 0, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Pisteittäinen suppeneminen säilyy homeomorfismilla konjugoitaessa ja kuvaukselle $M \in F_\infty(H)$, $M(z) = az+b$, pätee $b = M(0)$ sekä $a = M(1) - b$. Näin ollen kuvaus

$$\mu : F_1 \to (0,\infty) \times \mathbb{R}\,, \quad \mu(L) = (a,b)\,,$$

missä $b = kLk^{-1}(0), a = kLk^{-1}(1) - b$, on Huomautuksen 3.5 myötä homeomorfismi.

Olkoot $A \leq F_1$ ja $L \in A\backslash\{\mathrm{id}_B\}$. Jos $A \subset \Sigma_1$, niin $A' := kAk^{-1} \leq F_\infty(H)$ sisältyy vain pisteen ∞ kiinnittävien ryhmän $F_\infty(H)$ kuvausten (pois lukien id) joukkoon

$$\Sigma_\infty(H) = k\Sigma_1k^{-1} = \{z \mapsto z+b :\ b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Tällöin kuvaukselle $M := kLk^{-1}$ pätee $M(z) = z+b$, $b \neq 0$. Edelleen $L^j \in A$ ja $M^j(z) = z+jb$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$, joten kuvauksen μ rajoittuman $\Sigma_1 \to \{1\} \times \mathbb{R}$ homeomorfisuuden nojalla A on yhtenäinen, jos ja vain jos $A = \Sigma_1$.

Olkoon sitten $A \not\subseteq \Sigma_1$. Alussa todetun perusteella $A \not\subseteq \Sigma_{1,\xi}$ kaikilla $\xi \in S\backslash\{1\}$, joten löytyy $\tilde{L} \in A$ ja $\xi \in S\backslash\{1\}$, joille $\tilde{L}(\xi) \neq L(\xi)$ ja esimerkiksi $L(\xi) = \xi$. Siispä $M(z) = az + b$, $a \neq 1$, ja jos kuvaukselle $\tilde{M} := k\tilde{L}k^{-1}$ on $\tilde{M}(z) = \tilde{a}z + \tilde{b}$, $\tilde{a} \neq 1$, pätee kuvausten $M, \tilde{M}$ toisille kiintopisteille $b/(1-a) \neq \tilde{b}/(1-\tilde{a})$. Tällöin, koska

$$N(z) := M\tilde{M}M^{-1}\tilde{M}^{-1}(z) = z + b(1-\tilde{a}) - \tilde{b}(1-a) \quad \text{kaikilla } z \in H,$$

on kuvaus $N \in A'$ muotoa $N(z) = z + b_0$, $b_0 \neq 0$. Siten ryhmästä A' löytyy aina kuvauksen N kaltainen alkio. Lisäksi $M^j \in A'$ ja $M^j(1) - M^j(0) = a^j$ kaikilla $j \in \mathbb{Z}$, joten jos A on yhtenäinen, niin kaikilla $a' > 0$ on $M_{a'} \in A'$, jolle $M_{a'}(1) - M_{a'}(0) = a'$. Tällöin pätee

$$M_{a'}NM_{a'}^{-1}(z) = z + a'b_0 \quad \text{kaikilla } z \in H,$$

minkä johdosta $\Sigma_\infty(H) \subset A'$. Jos siis $(a', b') \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, niin valitsemalla $\tilde{N} \in A'$, jolle $\tilde{N}(z) = z + b' - M_{a'}(0)$, on $\tilde{N}M_{a'}(z) = a'z + b'$. Kuvauksen μ homeomorfisuuden nojalla siis A on yhtenäinen, jos ja vain jos $A = F_1$. □

Homeomorfismin h^* avulla avaruuteen G^* jatkettujen kuvausten ja kuvauksen Φ isomorfisuuden myötä aliryhmiä $\Sigma_{\zeta,\zeta'}, \Sigma_\zeta$ ja F_ζ vastaavat avaruudessa $\Sigma(G)$ merkinnöiltään ilmeiset aliryhmät $\Sigma_{P,P'}, \Sigma_P$ ja F_P. Tapauksissa $|\mathcal{P}_{234}| = 1, 2$ kuvaus id_G on Lauseen 6.14 nojalla joukkojen $\Sigma_{P,P'}, F_P$ sisäpiste, mistä Lemman 3.1 nojalla seuraa, että joukot $\Sigma_{P,P'}, F_P$ ovat avoimia avaruudessa $\Sigma(G)$. Lauseiden 6.20 ja 6.21 tuloksia voidaan siis muotoilla toisin ja hiukan parantaa:

LAUSE 6.22. *Jos $\mathcal{P}_{234} = \{P, P'\}$, $P \neq P'$, niin joko avaruus $\Sigma(G)$ on täysin epäyhtenäinen tai $C(\mathrm{id}_G) = \Sigma_{P,P'}$. Lisäksi $\Sigma_{P,P'}$ on avoin joukko ja Abelin aliryhmä.*

LAUSE 6.23. *Jos $\mathcal{P}_{234} = \{P\}$, niin joko avaruus $\Sigma(G)$ on täysin epäyhtenäinen, $C(\mathrm{id}_G) = \Sigma_{P,P'}$ jollekin $P' \neq P$ tai $C(\mathrm{id}_G) \in \{\Sigma_P, F_P\}$. Lisäksi joukot $\Sigma_{P,P'}, F_P$ ovat aina avoimia ja aliryhmät $\Sigma_{P,P'}, \Sigma_P$ kommutatiivisia.*

Annetaan vielä tutkielman lopuksi esimerkkejä alueista, joille pätee $|\mathcal{P}_{234}| = 1, 2$ ja jotka toteuttavat Lauseiden 6.22 ja 6.23 eri vaihtoehtoja. Asiaankuuluvat todistukset löytyvät lähteestä [**4**, 244–256], mutta ovat todella haastavia ja työläitä eikä niihin tässä paneuduta. Avaruus $\Sigma(G)$ on kussakin esimerkissä lokaalisti kompakti, mikä ei ole sattumaa, sillä tapaukset on lähteessä [**6**, 111] koottu taulukkoon nimenomaisesti lokaalisti kompaktin avaruuden $\Sigma(G)$ topologisina tyyppeinä.

ESIMERKKI 6.24. Kiinnitetään jälleen suorakaidealue $A := (0,1) \times (-1,1)$ kuten Esimerkissä 4.10, ja muodostetaan siitä uusia alueita joko poistamalla tai lisäämällä pisteitä.

(1) Kun alueesta A poistetaan joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times [0,1), \;\; \text{niin } \mathcal{P}_{234} = \{P\}, \;\; I(P) = [0,i], \;\; \Pi(P) = \{0\},$$

ja muodostuva ensimmäisen lajin kampa-alue on diskreetti. Myös toisen lajin kampa-alueelle on aina $\mathcal{P}_{234} = \{P\}$, mutta sopivin mittasuhtein konstruoituna sille pätee $C(\mathrm{id}_G) = \Sigma_P$.

(2) Kun alueesta A poistetaan joukko

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{2^{-n}\}\times(-1)^n(-1,1-2^{-n+1}],\text{ niin } \mathcal{P}_{234}=\{P\},\ I(P)=\Pi(P)=[-i,i],$$

ja muodostuvalle käärmealueelle pätee $C(\mathrm{id}_G)=F_P$.

(3) "Tuplataan" kohdissa (1) ja (2) muodostetut ensimmäisen lajin kampa-alue ja käärmealue peilaamalla ne suoran $\{\frac{3}{4}\}\times\mathbb{R}$ suhteen ja liittämällä itseensä. Tällöin $\mathcal{P}_{234}=\{P,P'\}$, $P\neq P'$, ja ensimmäisessä tapauksessa syntyvä alue on diskreetti, kun taas jälkimmäisessä pätee $C(\mathrm{id}_G)=\Sigma_{P,P'}$.

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\|x\|$	Olion x luonteesta riippuen pisteen normi, polun kuva tai joukon alkioiden lukumäärä
(x, y)	Kontekstista riippuen avoin väli, pistepari tai jana
fg	Yhdistetty kuvaus $f \circ g$
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_+$	Positiivisten kokonaislukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksitaso
$\overline{\mathbb{C}}$	Laajennettu kompleksitaso $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	Joukko $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$
B	Yksikkökiekko $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$
S	Yksikköympyrä $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$
H	Ylempi puolitaso $\{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\}$
G	Yhdesti yhtenäinen, rajoitettu tasoalue
h	Konformikuvaus $B \to G$
Φ	Isomorfismi $\Sigma(B) \to \Sigma(G) : L \mapsto hLh^{-1}$
Φ^{-1}	Isomorfismi $\Sigma(G) \to \Sigma(B) : \phi \mapsto h^{-1}\phi h$
$\Sigma(G)$	Ryhmä/Avaruus $\{\phi : G \to G$ konformikuvaus$\}$
$\Sigma(B)$	Ryhmä/Avaruus $\{L : B \to B$ konformikuvaus$\} \subset$ Möb
$\Sigma(H)$	Ryhmä $\{L : H \to H$ konformikuvaus$\} \subset$ Möb
$SL(2, \mathbb{R})$	Reaalikertoimisten 2×2-matriisien, joiden determinantti on 1, ryhmä
Möb	Möbius-kuvausten ryhmä
R_α	Kierto $B \to B : z \mapsto e^{i\alpha} z$
T_c	Translaatio $B \to B : z \mapsto (z + c)/(1 + \bar{c}z)$
$a * b$	Luku $(a + b)/(1 + a\bar{b}) \in B\,;\ a, b \in B$
Σ_x	Ryhmän $\Sigma(B)$ Abelin aliryhmä, jonka alkiot (pois lukien id_B) kiinnittävät joukossa $\overline{B}$ symbolin x paikalla lueteltavat pisteet ja vain ne
Σ_x^*	Joukko $\Sigma_x \setminus \{\mathrm{id}_B\}$
F_ζ	Ryhmän $\Sigma(B)$ aliryhmä, jonka alkiot kiinnittävät ainakin pisteen $\zeta \in S$
d	Sup-metriikka tai sen rajoittuma
$\overline{B}(\mathrm{id}_G, \epsilon)$	Joukko $\{\phi \in \Sigma(G) : d(\phi, \mathrm{id}_G) \le \epsilon\}$
$\Longrightarrow$	Suppeneminen metriikassa d
$\phi \leftrightarrow L$	Kun $L \in \Sigma(B)$ (vast. $\phi \in \Sigma(G)$), merkitään $\phi := \Phi(L)$ (vast. $L := \Phi^{-1}(\phi)$)

$\mathbb{T}$	Torus $S \times B$
ϑ	Homeomorfismi $\mathbb{T} \to \Sigma(B) : (\zeta, c) \mapsto R_{\arg\zeta} T_c$
$C(f, x)$	Metrisen avaruuden M joukosta A lähtevän kuvauksen f kasautumisjoukko pisteessä $x \in \overline{A}$ eli joukko $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{f(A \cap B(x, 1/n))}$
$C_E(f, x)$	Kuvauksen f kasautumisjoukko pisteessä $x \in \overline{E}$ joukkoa $E \subset A$ pitkin eli joukko $C(f\|_E, x)$
$S_\zeta(\alpha)$	Stolzin kulma eli joukko $\{z \in B(\zeta, \rho) \cap B : (\zeta - z \mid \zeta) > \|\zeta - z\| \cos\alpha\}$, missä $\zeta \in S$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ ja $\rho \in (0, 2\cos\alpha)$
$\mathcal{P}$	Alueen G reuna-alkioiden joukko
P	Yksittäinen reuna-alkio
P_ζ	Reuna-alkio, jolle $h(z) \longrightarrow P_\zeta$, kun $z \longrightarrow \zeta \in S$ joukossa B
G^*	Avaruus $G \cup \mathcal{P}$
h^*	Kuvauksen h homeomorfinen jatke $\overline{B} \to G^*$, jolle $P_\zeta = h^*(\zeta)$
$I(P)$	Reuna-alkion $P = P_\zeta$ kuva eli joukko $C(h, \zeta)$
$\Pi(P)$	Joukko $C_{[0,\zeta)}(h, \zeta)$, kun $\zeta = (h^*)^{-1}(P)$
$\mathcal{P}_1$	Reuna-alkioiden P, joille $\Pi(P) = I(P)$ on yksiö, joukko
$\mathcal{P}_2$	Reuna-alkioiden P, joille $\Pi(P)$ on yksiö ja $\Pi(P) \neq I(P)$, joukko
$\mathcal{P}_3$	Reuna-alkioiden P, joille $\Pi(P) = I(P)$ eikä kumpikaan ole yksiö, joukko
$\mathcal{P}_4$	Reuna-alkioiden P, joille $\Pi(P) \neq I(P)$ eikä kumpikaan ole yksiö, joukko
$\mathcal{P}_{j_1 \cdots j_n}$	Joukko $\cup_{m=1}^{n} \mathcal{P}_{j_m}$; $n \in \mathbb{Z}_+$, $\{j_1, \ldots, j_n\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
$S_{j_1 \cdots j_n}$	Joukko $(h^*)^{-1}(\mathcal{P}_{j_1 \cdots j_n})$
$C(\mathrm{id}_G)$	Kuvauksen $\mathrm{id}_G \in \Sigma(G)$ (yhtenäisyys)komponentti
$K(\mathrm{id}_G)$	Kuvauksen $\mathrm{id}_G \in \Sigma(G)$ ketjukomponentti eli joukko $$\bigcap_{\epsilon>0} \{\phi \in \Sigma(G) : \text{on } \phi_1, \ldots, \phi_{n_\epsilon} \in B(\mathrm{id}_G, \epsilon), \text{ siten että } \phi = \phi_{n_\epsilon} \cdots \phi_1\}$$
T_P	Jatkuva kuvaus $\Sigma(G) \to \mathcal{P} : T_P(\phi) = \phi(P)$ kiinnitetylle $P \in \mathcal{P}$

Lähdeluettelo

[1] Ahlfors, L.: *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1966, toinen laitos.

[2] Bruckner, A.M., Bruckner, J.B., Thomson, B.S.: *Real Analysis.* Prentice-Hall, 1997.

[3] Collingwood, E.F., Lohwater, A.J.: *The Theory of Cluster Sets.* Cambridge University Press, 1966.

[4] Gaier, D.: *Über Räume konformer Selbstabbildungen ebener Gebiete.* Mathematische Zeitschrift **187** (1984), 227-257.

[5] Golusin, G.M.: *Geometrische Funktionentheorie.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.

[6] Lauf, W.: *Local Compactness in the Automorphism Space* $\Sigma(G)$. Complex Variables **39** (1999), 93-114.

[7] Lauf, W., Schmieder, G., Volynec, I.A.: *The Automorphism Space* $\Sigma(G)$ *of a Domain without Punctiform Prime Ends.* The Journal of Geometric Analysis **10** (2000), 697-712.

[8] Lehner, J.: *Discontinuous Groups and Automorphic Functions.* AMS, 1964.

[9] Pommerenke, Ch.: *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Springer-Verlag, 1992.

[10] Pommerenke, Ch.: *Univalent Functions.* Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.

[11] Schmieder, G.: *Disconnectedness in the Automorphism Space* $\Sigma(G)$. Complex Variables **7** (1986), 197-203.

[12] Volynec, I.A.: *Groups of Conformal Automorphisms of Plane Domains in the Uniform Metric.* Complex Variables **19** (1992), 195-203.

[13] *http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews//c2003/dirichletproblemdisk/ DirichletProblemDiskProof.pdf*