

# Harmoniset funktiot kompleksialueessa ja konformikuvaukset

Hanna-Kaisa Karttunen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Syksy 2014



**Tiivistelmä:** Hanna-Kaisa Karttunen, *Harmoniset funktiot kompleksialueessa ja konformikuvaukset* (engl. *Harmonic Functions in the Complex Plane and Conformal Mappings*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 79 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2014.

Tämän tutkielman tarkoituksena on syventää tietoja kompleksianalyysistä tutustumalla harmonisiin funktioihin ja konformikuvauksiin. Funktioita, jotka toteuttavat Laplacen yhtälön, kutsutaan harmonisiksi funktioiksi. Harmonisten funktioiden määrittämiseen voidaan käyttää Cauchy-Riemannin yhtälöitä. Harmoniset funktioit ovat yhteydessä analyyttisiin funktioihin, sillä harmonisten funktioiden avulla voidaan selittää analyyttisten kuvausten teoriaa ja päinvastoin. Tämän tutkielman kannalta tärkeimpiä analyyttisiä kuvauksia ovat injektiiviset kuvaukset, jotka tunnetaan myös konformikuvauksina. Konformikuvaukset ovat alueiden välisiä kuvauksia, jotka säilyttävät kulmien suuruuden ja suunnan ja joiden derivaatta on äärellinen ja nollasta eroava. Harmonisten funktioiden ja konformikuvausten välillä on monia tärkeitä yhteyksiä. Esimerkiksi, jos harmoniselle funktiolle tehdään konforminen muuttujanvaihto, niin myös tuloksena saatu funktio on harmoninen.

Tutkielman motivaationa on oppia ratkaisemaan Dirichlet'n ongelma erityisesti puolitasossa, kiekossa ja monikulmiossa. Dirichlet'n ongelma määritellään usein sellaisessa alueessa, jossa se on vaikea ratkaista. Siten tavoitteena on löytää analyyttinen kuvaus monimutkaisesta alueesta yksinkertaisempaan alueeseen, jossa ongelma on ratkaistavissa. Tällainen analyyttinen kuvaus löydetään tunnettujen konformikuvausten joukosta tai se ratkaistaan esimerkiksi lineaaristen rationaalikuvausten tai Schwarz-Christoffelin kaavan avulla. Puolitasossa ja yksikkökiekossa ongelman ratkaisemiseen voidaan soveltaa Poissonin integrointikaavoja. Dirichlet'n ongelman ratkaiseminen noudattaa neljän vaiheen ratkaisumenetelmää.

**Avainsanat:** harmoninen funktio, konformikuvaus, Laplacen yhtälö, Cauchy-Riemannin yhtälöt, analyyttinen funktio, Dirichlet'n ongelma, lineaarinen rationaalikuvaus, Schwarz-Christoffelin kaava, Poissonin integrointikaava



## Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Kompleksianalyysin kertausta	3
1.1. Lineaarikuvaukset	3
1.2. Analyttiset funktiot	4
1.2.1. Kompleksinen derivaatta	4
1.2.2. Cauchy-Riemannin yhtälöt	6
1.3. Kompleksinen integrointi	7
1.3.1. Primitiivit	9
1.3.2. Kierrosluku	9
1.4. Cauchyn lause	10
Luku 2. Harmoniset funktiot kompleksialueessa	13
2.1. Harmoniset funktiot	13
2.2. Keskiarvo-ominaisuus	17
2.3. Dirichlet'n ongelma	18
2.3.1. Poisson integraalit	19
2.3.2. Harmoniset funktiot ja analyttiset kuvaukset	24
2.3.3. Dirichlet'n ongelman ratkaiseminen	25
Luku 3. Konformikuvaukset	35
3.1. Konformikuvaukset	35
3.2. Laajennettu kompleksitaso	40
3.3. Lineaariset rationaalikuvaukset	41
3.3.1. Kaksoissuhde	46
3.4. Schwarz-Christoffelin kaava	48
3.5. Poissonin integrointikaavat	54
3.5.1. Poissonin integrointikaava ylemmässä puolitasossa	54
3.5.2. Poissonin integrointikaava yksikkökiekossa	60
3.6. Yhteenveto Dirichlet'n ongelman ratkaisemisesta	61
Kirjallisuutta	65
Liitteet	67
Liite 1. Alueiden välisiä konformikuvauksia	67



## Johdanto

Kuuluisan ranskalaisen matemaatikon Pierre-Simon Laplacen (1749-1827) mukaan nimetyllä Laplacen yhtälöllä on paljon sovelluksia potentiaali-teoriassa. Yhtälön avulla voidaan mallintaa muun muassa sähköstatistiikkaan, virtausdynamiikkaan ja lämmönjohtavuuteen liittyviä ongelmia. Kompleksialueessa määriteltyjä funktioita, jotka toteuttavat Laplacen yhtälön, kutsutaan harmonisiksi. Harmonisia funktioita voidaan etsiä Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla. Harmoniset ja analyyttiset funktiot liittyvät vahvasti toisiinsa, sillä toisaalta harmonisten funktioiden teoriaa voidaan johtaa analyyttisten funktioiden teorian pohjalta, kun taas toisaalta harmonisten funktioiden avulla voidaan kuvata analyyttisiä funktioita.

Saksalainen matematiikko Bernhard Riemann (1826-1866) näytti vuonna 1851 väitöskirjassaan, että jokainen kompleksitason yhdesti yhtenäinen tasoalue voidaan kuvata mille tahansa toiselle samantyyppiselle alueelle jonkin analyyttisen kuvauksen avulla. Tällaisia kuvauksia kutsutaan konformikuvauksiksi. Ne ovat kuvauksia, jotka säilyttävät kulmien suuruuden ja suunnan ja joiden derivaatta on äärellinen ja nollasta eroava.

Harmoisten funktioiden ja konformikuvausten välillä on monia yhteyksiä. Voidaan esimerkiksi näyttää, että jos harmoniselle funktiolle tehdään konforminen muuttujanvaihto, niin myös tuloksena saatu funktio on harmoninen. Tällä tuloksella on merkittävä asema tässä tutkielmassa.

Kompleksialueen harmonisten funktioiden ja konformikuvausten avulla voidaan ratkaista monia ongelmia, jotka on mahdollista esittää kompleksiarvoisina funktioina, mutta joiden geometriset ominaisuudet aiheuttavat hankaluuksia. Tämä epämukava geometria voidaan kuitenkin muuntaa helpommin käsiteltäväksi valitsemalla sopiva muunnos. Tällaiset ongelmat tunnetaan yleisemmin nimellä Dirichlet'n ongelma.

Dirichlet'n ongelmalla on keskeinen rooli potentiaali-teoriassa. Se syntyi 1800-luvulla, kun huomattiin, että monia ilmiöitä voidaan havainnollistaa Laplacen yhtälön mukaisten potentiaalien avulla. Englantilainen matemaattinen fyysikko George Green (1793-1841) oli yksi ensimmäisistä lineaarista Dirichlet'n ongelmaa tutkineista. Hän tutki ongelmaa esseessään *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism* vuonna 1828 [3]. Hänen ideansa olivat tärkeitä jatkoon kannalta, vaikka hänen todistuksensa eivät olleet täsmällisiä. 1800-luvun jälkipuoliskolla saksalainen matemaatikko Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) esitti Dirichlet'n periaatteena tunnetun osittain puutteellisen variaatioperiaatteen. Sen mukaan Dirichlet'n ongelman ratkaiseva funktio minimoi integraalin

$$\int_G |\nabla f|^2 dV$$

kaikkien alueen  $G$  reunalla annettuun funktioon yhtyvien funktioiden  $f$  joukossa. Dirichlet ei kuitenkaan selvittänyt, onko mimimointitehtävällä varmasti ratkaisu. Saksalainen matemaatikko David Hilbert (1862-1943) selvitti asian lopullisesti vasta vuonna 1899. [8], [9]

Tämän tutkielman tavoitteena on tutustua kompleksialueen harmonisiin funktioihin ja konformikuvauksiin. Motivaationa on oppia ratkaisemaan Dirichlet'n ongelma erityisesti puolitasossa, kiekossa ja monikulmiossa. Koska Dirichlet'n ongelma määritellään usein sellaisessa alueessa, jossa se on vaikea ratkaista, niin halutaan löytää analyyttinen kuvaus monimutkaisesta alueesta yksinkertaisempaan alueeseen, jossa ongelma on ratkaistavissa. Konformikuvaukset ovat tällaisia alueiden välisiä kuvauksia.

Tutkielma jakautuu kolmeen lukuun. Ensimmäisessä luvussa kerrataan joitakin tämän tutkielman kannalta keskeisimpiä kompleksianalyysin asioita. Kertauksessa keskitytään lineaarikuvauksiin, analyyttisiin funktioihin, kompleksiseen integrointiin sekä Cauchyn lauseeseen. Lauseita ei todisteta, vaan todistukset voi halutessaan lukea lähdekirjallisuudesta.

Toinen luku käsittelee harmonisia funktioita. Ensimmäisessä kappaleessa määritellään harmoniset funktiot Laplacen yhtälön avulla ja osoitetaan niille muutamia tuloksia. Tämän jälkeen perehdytään harmonisten funktioiden ominaisuuksiin, kuten esimerkiksi keskiarvo-ominaisuuteen. Tässä luvussa tutustutaan myös Dirichlet'n ongelmaan ja sen ratkaisemiseen yleisen ratkaisumenetelmän avulla. Dirichlet'n ongelmalle pyritään löytämään yleinen ratkaisu kiekossa ja pystysuorien suorien rajoittamassa alueessa Poissonin integrointikaavan ja Schwarzin lauseen avulla.

Kolmannessa luvussa keskitytään kompleksitason analyyttisiin ja injektiivisiin kuvauksiin eli konformikuvauksiin. Ne ovat osa kompleksianalyysin tutkituimpaa aihealuetta. Aluksi määritellään konformikuvaukset, minkä jälkeen tutustutaan lineaarisiin rationaalikuvauksiin, Schwarz-Christoffelin kaavaan ja Poissonin integrointikaavoihin. Tässä luvussa ollaan erityisesti kiinnostuneita Dirichlet'n ongelman ratkaisusta puolitasossa, kiekossa ja monikulmiossa. Ongelman ratkaiseminen pohjautuu harmonisten funktioiden ominaisuuksiin ja konformikuvauksiin. Liitteeseen 1 on koottu hyödyllisiä esimerkkejä alueiden välisistä konformikuvauksista.

Harmonisia funktioita, konformikuvauksia ja Dirichlet'n ongelmaa käsittelevissä luvuissa on paljon esimerkkejä. Niiden tarkoituksena on selkeyttää ja havainnollistaa teoriaa.

Tämän tutkielman määritelmät, lauseet ja todistukset ovat koottu suurimmaksi osin Kirjallisuutta-osiossa mainituista teoksista ja luentomonisteista sekä Jyväskylän yliopistossa keväällä 2014 luennoitun Kompleksianalyysi-kurssin luentomuistiinpanoista.



## Kompleksianalyysin kertausta

Tässä luvussa kerrataan tämän tutkielman kannalta keskeisimpiä kompleksianalyysin perusmääritelmiä ja -lauseita. Luku jakautuu lineaarikuvauksia, analyyttisiä funktioita, kompleksista integrointia ja Cauchyn lausetta käsitteleviin kappaleisiin. Luvussa esiintyvät lauseet esitetään todistamatta, mutta todistukset voi halutessaan lukea lähdekirjallisuudesta.

### 1.1. Lineaarikuvaukset

Tämän kappaleen tarkoituksena on kerrata lyhyesti kompleksiarvoisen lineaarikuvauksen määritelmä sekä palauttaa mieleen lineaarikuvaukseen liittyviä käsitteitä.

**MÄÄRITELMÄ 1.1.** Funktiota  $f(z) = az + b$ , missä vakiot  $a$  ja  $b$  ovat kompleksilukuja, sanotaan *kompeksiseksi lineaarifunktioksi*.

Aivan kuten reaaliset lineaariset funktiot ovat yksinkertaisimpia reaalifunktioita, niin kompleksiset lineaarifunktiot ovat yksinkertaisimpia kompleksisia funktioita. Kompleksiset lineaariset funktiot voidaan luokitella seuraavalla tavalla:

- (1) Kompleksista lineaarista funktiota

$$T(z) = z + b, \quad b \neq 0,$$

sanotaan *siirroksi* eli *translaatioksi*. Jos pisteet  $z$  ja  $b$  esitetään muodossa  $z = x + iy$  ja  $b = x_0 + iy_0$ , niin tällöin on

$$T(z) = (x + iy) + (x_0 + iy_0) = x + x_0 + i(y + y_0),$$

toisin sanoen kuvaus  $T$  kuvaa pisteen  $(x, y)$  pisteeksi  $(x + x_0, y + y_0)$ . Huomataan, että siirto ei muuta siirrettävän kuvan muotoa tai kokoa kompleksitasossa.

- (2) Kompleksista lineaarista funktiota

$$R(z) = az = e^{i\theta} z, \quad |a| = 1, \quad a \in \mathbb{C}, \quad 0 < \theta \leq \pi,$$

kutsutaan *kierroksi*. On tärkeää huomata, että vakio  $a$  on kompleksinen. Jos siis  $\alpha \neq 0$  on kompleksiluku, niin luku  $a = \frac{\alpha}{|\alpha|}$  on kompleksinen ja sen moduli on yksi eli  $|a| = 1$ . Tämän vuoksi funktio  $R(z) = \frac{\alpha}{|\alpha|} z$  on kierto mille tahansa kompleksiluvulle  $\alpha$ . Kuten siirto, kiertokaan ei muuta kuvattavan kuvan muotoa tai kokoa kompleksitasossa.

- (3) Kompleksista lineaarista funktiota

$$M(z) = az, \quad a > 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

kutsutaan *dilaatioksi*. Jos  $z = x + iy$  on kompleksitason piste, niin dilaation lauseke on

$$M(z) = az = ax + iay,$$

toisin sanoen piste  $(x, y)$  kuvautuu pisteeksi  $(ax, ay)$ . Jos pistettä  $z$  merkitään  $z = re^{i\theta}$ , niin dilaation lauseke voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$M(z) = a(re^{i\theta}) = (ar)e^{i\theta}.$$

Kun  $a > 1$ , niin piste  $M(z)$  on  $a$  kertaa kauempana origosta kuin piste  $z$ . Tätä kutsutaan *venytykseksi*. Vastaavasti, jos  $0 < a < 1$ , niin piste  $M(z)$  on  $a$  kertaa lähempänä origoa kuin piste  $z$ . Tätä puolestaan kutsutaan *kutistukseksi*. Dilaatio voi siis muuttaa kuvattavan kuvan kokoa kompleksitasossa, mutta se ei voi muuttaa kappaleen perusmuotoa.

Seuraavan lauseen mukaan jokainen kompleksiarvoinen lineaarikuvaus saadaan yhdistämällä siirto, kierto ja dilaatio.

LAUSE 1.2. *Jokainen kompleksiarvoinen lineaarikuvaus  $f(z) = az + b$  saadaan yhdistettynä kuvauksena siirroista, kierroista ja dilaatioista.*

TODISTUS. [11, s. 71-72]

□

## 1.2. Analyttiset funktiot

Palautetaan mieleen analyttisten funktioiden teoriaa kompleksisen derivaatan ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden osalta. Analyttiset funktiot ovat merkittävässä asemassa tarkasteltaessa harmonisia funktioita ja konformikuvauksia.

**1.2.1. Kompleksinen derivaatta.** Kerrataan aluksi muutamia jatkon kannalta oleellisia käsitteitä. Tämän jälkeen määritellään kompleksinen derivaatta ja tutustutaan muutamiiin derivaattaan liittyviin tuloksiin.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Joukko  $A \subset \mathbb{C}$  on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet joukot  $U, V \subset \mathbb{C}$  siten, että

- (1)  $A \cap U \neq \emptyset$
- (2)  $A \cap V \neq \emptyset$
- (3)  $U \cap V = \emptyset$ , toisin sanoen joukot  $U$  ja  $V$  ovat *erillisiä*
- (4)  $A \subset (U \cup V)$ .

Määritelmän kolmas ehto voidaan korvata ehdolla  $U \cap V \cap A = \emptyset$ .

MÄÄRITELMÄ 1.4. Joukko  $A \subset \mathbb{C}$  on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen.

Esimerkiksi kompleksitaso  $\mathbb{C}$  sekä jokainen kompleksitason jana  $J = [z_0, z_1] := \{tz_1 + (1-t)z_0 : 0 \leq t \leq 1\}$  ovat yhtenäisiä. Myös jokainen yhtenäisen joukon yhdiste on yhtenäinen. Se sijaan joukot  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ja  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ovat epäyhtenäisiä.

Koska avoimet ja yhtenäiset joukot ovat hyvin yleisiä monissa kompleksitason matemaattisissa tarkasteluissa, niin niille on annettu oma nimi.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Avoin yhtenäinen joukko  $D \subset \mathbb{C}$  on *alue*.

Määritellään seuraavaksi kompleksinen derivaatta.

**MÄÄRITELMÄ 1.6.** Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  funktio. Sanotaan, että luku  $\lambda \in \mathbb{C}$  on funktion  $f$  *kompleksinen derivaatta* pisteessä  $z_0 \in U$ , jos

$$(1.1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda.$$

Jos funktio  $f$  on derivoituva, niin luku  $\lambda \in \mathbb{C}$  on yksikäsitteinen ja merkitään  $\lambda =: f'(z_0)$  tai  $\lambda =: \frac{df}{dz}(z_0)$ .

**HUOMAUTUS 1.7.** Ehto (1.1) on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikille  $\epsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$  siten, että jos  $0 < |z - z_0| < \delta$ , niin

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \lambda \right| < \epsilon.$$

Erotusosamäärän raja-arvo kirjoitetaan usein myös muodossa

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow z_0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h},$$

missä vakio  $h \in \mathbb{C}$  ja se voi lähestyä nollaa miltä puolelta hyvänsä.

Seuraava määritelmä esittelee kompleksiseen derivaattaan liittyviä nimityksiä, jotka tulevat toistumaan moneen kertaan tämän tutkielman aikana.

**MÄÄRITELMÄ 1.8.** Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  funktio. Sanotaan, että funktio  $f$  on *analyttinen* (eli *holomorfinen* tai *säännöllinen*) *joukossa*  $U$ , jos funktiolla  $f$  on kompleksinen derivaatta jokaisessa joukon  $U$  pisteessä  $z_0 \in U$ . Sanotaan myös, että funktio  $f$  on *analyttinen pisteessä*  $z_0 \in U$ , jos se on analyttinen jossain pisteen  $z_0$  ympäristössä. Lisäksi, jos funktio on analyttinen koko kompleksitasossa, niin sanotaan, että se on *kokonainen*.

**LEMMA 1.9.** *Jos funktio  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  on derivoituva pisteessä  $z_0 \in U$ , niin se on jatkuva pisteessä  $z_0 \in U$ .*

**TODISTUS.** [6, Lemma 2.4, s.28] □

Edellinen Lemma osoittaa derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisen yhteyden. On erityisen tärkeää muistaa, että funktion jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto funktion derivoituvuudelle. Toisin sanoen derivoituva funktio on aina jatkuva, mutta jatkuva funktio ei ole aina derivoituva.

Palautetaan nyt mieleen muutamia derivaatan laskusääntöjä. Vastaavat säännöt pätevät myös reaaliarvoisille funktioille.

**LAUSE 1.10.** (*Derivoimissääntöjä*). *Olkoott funktiot  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  derivoituvia pisteessä  $z_0 \in U$  ja olkoon  $c \in \mathbb{C}$  vakio. Tällöin funktiot  $cf$ ,  $f + g$ ,  $fg$  sekä  $\frac{f}{g}$ , kun  $g(z_0) \neq 0$ , ovat derivoituvia pisteessä  $z_0 \in U$  ja niiden derivaatat ovat*

$$\begin{aligned} (cf)'(z_0) &= cf'(z_0) \\ (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \end{aligned}$$

ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}, \text{ kun } g(z_0) \neq 0.$$

Lisäksi, jos kuvaus  $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{C}$  on derivoituva, niin sen derivaatta on

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

TODISTUS. [6, Lause 2.5, s. 28] ja [7, Lause 4.2] □

**1.2.2. Cauchy-Riemannin yhtälöt.** Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja funktio  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  derivoituva pisteessä  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ . Merkitään funktion  $f$  reaali- ja imaginaariosia funktioilla  $u$  ja  $v$  siten, että

$$\begin{aligned} u(z) &= \operatorname{Re}(f(z)) \\ v(z) &= \operatorname{Im}(f(z)) \end{aligned}$$

kaikilla pisteillä  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Nämä reaaliarvoiset funktiot  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  on siis valittu siten, että funktio  $f$  voidaan ilmaista niiden avulla muodossa  $f = u + iv$ . Lasketaan seuraavaksi funktion  $f$  derivaatta kahdella tavalla. Lähestytään pistettä  $z_0$  ensin reaaliakselin suuntaisesti, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x+iy_0) - u(x_0+iy_0)}{x-x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x+iy_0) - v(x_0+iy_0)}{x-x_0} \\ &= u_x(x_0 + iy_0) + iv_x(x_0 + iy_0). \end{aligned}$$

Siten osittaisderivaatat  $u_x(z_0)$  ja  $v_x(z_0)$  ovat olemassa ja funktion  $f$  derivaatta on

$$(1.2) \quad f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

Tämä on funktion  $f$  reaalin osittaisderivaatta.

Vastaavasti, kun lähestytään pistettä  $z_0$  imaginaariakselin suuntaisesti, saadaan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)} \\ &= -i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0+iy) - u(x_0+iy_0)}{y-y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0+iy) - v(x_0+iy_0)}{y-y_0} \\ &= -iu_y(x_0 + iy_0) + v_y(x_0 + iy_0). \end{aligned}$$

Täten myös osittaisderivaatat  $u_y(z_0)$  ja  $v_y(z_0)$  ovat olemassa ja funktion  $f$  derivaatta on

$$(1.3) \quad f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

Vähentämällä derivaattafunktiot (1.2) ja (1.3) toisistaan saadaan *Cauchy-Riemannin yhtälöt*

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0). \end{cases}$$

Kootaan edellä todettu lauseeksi.

**LAUSE 1.11.** Jos funktio  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  on derivoituva pisteessä  $z_0 \in U$  ja kirjoitetaan muodossa  $f = u + iv$ , missä  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ , niin osittaisderivaatat  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  ja  $v_y$  ovat

olemassa ja niille pätee

$$(1.4) \quad \begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0). \end{cases}$$

Tämä pätee myös kääntäen:

LAUSE 1.12. *Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  funktio siten, että  $f = u + iv$ , missä  $u = \operatorname{Re}(f)$  ja  $v = \operatorname{Im}(f)$ . Oletetaan, että osittaisderivaatat  $u_x, u_y, v_x$  ja  $v_y$  ovat olemassa joukossa  $U$  ja jatkuvia pisteessä  $z_0 \in U$ . Jos Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat pisteessä  $z_0$ , niin funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $z_0$  ja sen derivaatta on*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iv_y(z_0).$$

TODISTUS. [6, Lause 2.9, s. 32] □

On tärkeää huomata, että Lauseessa 1.12 ei riitä oletus, että osittaisderivaatat  $u_x, u_y, v_x$  ja  $v_y$  ovat olemassa joukossa  $U$ , vaikka ne toteuttaisivatkin Cauchy-Riemannin yhtälöt. Osittaisderivaatoilta vaaditaan myös jatkuvuus pisteessä  $z_0$ . Myöhemmin tullaan kuitenkin näyttämään, että avoimessa joukossa  $U$  differentioituvan Cauchy-Riemann -systeemin ratkaisilla  $u$  ja  $v$  on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat joukossa  $U$ , toisin sanoen ne ovat  $C^\infty$ -funktioita.

SEURAUUS 1.13. *Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  funktio. Jos funktiolla  $f$  on olemassa jatkuvat osittaisderivaatat joukossa  $U$ , niin se on analyttinen joukossa  $U$  täsmälleen silloin, kun Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat kaikilla pisteillä  $z \in U$ .*

### 1.3. Kompleksinen integrointi

Kerrataan aluksi muutamia keskeisiä käsitteitä ja tarkastellaan sitten kompleksista integrointia.

MÄÄRITELMÄ 1.14. *Polku on kompleksitasossa jatkuva kuvaus  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , missä vakiot  $a, b \in \mathbb{R}$  ovat siten, että  $a \leq b$ . Piste  $\gamma(a)$  on polun  $\gamma$  alkupiste ja  $\gamma(b)$  sen loppupiste. Kuvauksen  $\gamma$  kuvajoukkoa*

$$|\gamma| := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

kutsutaan polun  $\gamma$  jäljeksi. Sanotaan, että  $\gamma$  on polku joukossa  $A$ , jos  $|\gamma| \subset A$ . Polku  $\gamma$  on suljettu (eli umpinainen), jos sen alku- ja loppupiste ovat samat eli  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

MÄÄRITELMÄ 1.15. *Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  polku ja merkitään*

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(\gamma(t)) \\ y(t) = \operatorname{Im}(\gamma(t)). \end{cases}$$

Polku  $\gamma$  on jatkuvasti differentioituva polku, jos  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ovat jatkuvasti differentioituvia (toisin sanoen päätepisteissä on toispuoleiset derivaatat). Tällöin polun  $\gamma$  derivaatta on

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Lisäksi sanotaan, että polku  $\gamma$  on paloittain jatkuvasti differentioituva välillä  $[a, b]$ , jos on olemassa pisteet  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  siten, että polun  $\gamma$  rajoittuma välille  $[t_{k-1}, t_k]$ , eli  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ , on jatkuvasti differentioituva kaikilla  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

MÄÄRITELMÄ 1.16. Paloittain jatkuvasti differentioituvaa polkua  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle  $|\gamma| \subset A$ , kun  $A \subset \mathbb{C}$ , sanotaan *tieksi joukossa A*.

Suljettua tietä kutsutaan myös *piiriksi*.

Määritellään seuraavaksi polun käänteispolku.

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  polku/tie. Polun  $\gamma$  *käänteispolku* tai *paluupolku/käänteistie* on kuvaus  $\overleftarrow{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$

Poluille voidaan määritellä myös yhdistetty polku, mikäli toisen polun loppupiste on sama kuin toisen alkupiste.

MÄÄRITELMÄ 1.18. Olkoot  $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  polkuja siten, että  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . Polkujen  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  *yhdistetty polku* (*summapolku*)

$$\gamma_1 * \gamma_2: [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{C}$$

määritellään asettamalla

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{kun } a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & \text{kun } b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

HUOMAUTUS 1.19. (1) Jos yhdistetty polku  $\gamma_1 * \gamma_2$  on määritelty, niin sen kuvajoukolle pätee  $|\gamma_1 * \gamma_2| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|$ .

(2) Jos  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  ovat teitä, niin myös yhdistetty polku  $\gamma_1 * \gamma_2$  on tie.

Edellä olleen polkuihin liittyvän teorian pohjalta ollaan nyt valmiita määrittelemään kompleksiarvoisen funktion integraali.

MÄÄRITELMÄ 1.20. Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma = x + iy$ , tie ja  $f: |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , jatkuva funktio. Tällöin funktion  $f$  *kompleksinen integraali yli tien  $\gamma$*  on

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Vastaavasti funktion  $f$  *integraali yli tien  $\gamma$  kaarenpituuden suhteen* on

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Tarkastellaan seuraavaksi kompleksisen integraalin ominaisuuksia.

LEMMA 1.21. *Olkoot  $\gamma$  ja  $\beta$  teitä joukossa  $A$  ja  $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuvia funktioita. Tällöin*

$$(1) \int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$$

$$(2) \int_{\gamma} cf(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz \text{ kaikilla } c \in \mathbb{C}.$$

$$(3) \int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(4) jos yhdistetty polku  $\gamma * \beta$  on määritelty, niin

$$\int_{\gamma * \beta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz.$$

(5) jos  $|f(z)| \leq |g(z)|$  kaikilla  $z \in |\gamma|$ , niin

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |g(z)| |dz| = \int_a^b |g(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt,$$

missä  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .

TODISTUS. [6, Lemma 3.11, s. 53-54] □

**1.3.1. Primitiivit.** Olkoon  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $U \subset \mathbb{C}$  on avoin, funktio. Funktiota  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  sanotaan funktion  $f$  *primitiiviksi* (tai kantafunktioksi) joukossa  $U$ , jos se on analyttinen ja  $F'(z) = f(z)$  kaikilla pisteillä  $z \in U$ .

**HUOMAUTUS 1.22.** Jos funktio  $F$  on funktion  $f$  primitiivi joukossa  $U$ , niin tällöin myös funktio  $F + c$  on funktion  $f$  primitiivi kaikilla vakioilla  $c \in \mathbb{C}$ .

**ESIMERKKI 1.23.** Funktion  $f(z) = z$  primitiivi on  $F(z) = \frac{z^2}{2}$ .

Eksponenttifunktion  $f(z) = e^z$  primitiivi on eksponenttifunktio itse.

Logaritmin päähaara  $F(z) = \text{Log}(z)$  on funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  primitiivi joukossa  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

Seuraava lause antaa keinon primitiivin löytämiseksi.

**LAUSE 1.24.** *Olkoon funktio  $F$  jatkuvan funktion  $f$  primitiivi avoimessa joukossa  $U \subset \mathbb{C}$ . Jos  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  on tie joukossa  $U$ , niin*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Erityisesti, jos jatkuvalla funktiolla  $f$  on primitiivi joukossa  $U$  ja  $\gamma$  on suljettu tie, niin*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

TODISTUS. [10, Theorem IV.2.2, s. 126] □

Lause 1.24 siis väittää, että jos jatkuvalla funktiolla  $f$  on primitiivi joukossa  $U$ , niin tällöin funktion  $f$  integraali yli tien  $\gamma$  riippuu ainoastaan tien alku- ja loppupisteistä.

**1.3.2. Kierrosluku.** Määritellään vielä lopuksi käsite kierrosluku. Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suljettu tie. Tien  $\gamma$  *kierrosluku*  $n(\gamma, w)$  *pisteen*  $w \in \mathbb{C}$  *suhteen* on pisteen  $w$  ympäri vastapäivään kierrettyjen kierrosten lukumäärä. Kierrosluku on kokonaisluku ja sen merkki kertoo kiertosuunnan. Jos kierrosluvun arvo on positiivinen, niin polku  $\gamma$  kiertää pisteen  $w$  ympäri vastapäivään, ja jos se on negatiivinen, niin silloin polku kiertää pisteen myötäpäivään.

**MÄÄRITELMÄ 1.25.** Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suljettu tie. Tien  $\gamma$  kierrosluku pisteen  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$  ympäri on

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Lukua  $n(\gamma, w)$  kutsutaan myös tien  $\gamma$  indeksiksi pisteen  $w$  suhteen.

Seuraavaan lemmaan on koottu muutamia kierrosluvun keskeisiä ominaisuuksia.

**LEMMA 1.26.** *Olkoon  $\gamma$  suljettu, paloittain sileä polku kompleksitasossa ja olkoon  $U = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ . Tällöin*

- (1)  $n(\gamma, z)$  on vakio jokaisessa joukon  $U$  komponentissa;
- (2)  $n(\gamma, z) = 0$ , jos piste  $z$  kuuluu joukon  $U$  rajoittamattomaan komponenttiin;
- (3) kun polku  $\gamma$  on yksinkertainen, niin joko  $n(\gamma, z) = 1$  tai  $n(\gamma, z) = -1$  jokaiselle pisteelle  $z$  joukon  $U$  rajoitetussa komponentissa.

**TODISTUS.** [10, Lemma V.2.1, s. 157-160] □

### 1.4. Cauchyn lause

Kerrataan lopuksi yhtä kompleksianalyysin keskeisimpää lausetta - Cauchyn lausetta. Se on alunperin vuodelta 1825. Cauchyn lauseen keskeinen teema voidaan muotoilla kysymykseksi: Millaisissa olosuhteissa analyyttisen funktion integraali suljettua polkua pitkin häviää? Cauchyn lause paljastaa kompleksianalyysin ja tason topologian välisen kiehtovan yhteyden. Se myös auttaa ymmärtämään analyyttisten funktioiden lokaalia rakennetta.

Cauchyn lauseesta on olemassa sekä lokaali että globaali versio. Sana ”lokaali” viittaa kiekkoon rajoittumiseen.

**LAUSE 1.27.** *(Cauchyn lauseen lokaali muoto) Olkoon  $D$  avoin kompleksitason kiekko. Oletetaan, että funktio  $f$  on analyyttinen kiekossa  $D$  (tai yleisemmin, jatkuva kiekossa  $D$  ja analyyttinen kiekossa  $D \setminus z_0$  jollekin pisteelle  $z_0 \in D$ ). Tällöin on  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  jokaiselle suljetulle, paloittain sileälle polulle  $\gamma \in D$ .*

**TODISTUS.** [10, s. 143-147] □

**LEMMA 1.28.** *Olkoon  $\gamma$  paloittain sileä polku kompleksitasossa ja funktio  $h$  jatkuva joukossa  $|\gamma|$ . Olkoon lisäksi  $k$  positiivinen kokonaisluku. Avoimessa joukossa  $U = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$  määritelty funktio  $H$ ,*

$$H(z) = \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^k},$$

*on analyyttinen ja sen derivaatta on*

$$H'(z) = k \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

**TODISTUS.** [10, Lemma V.1.6, s. 151] □

**LAUSE 1.29.** *(Cauchyn integraalikaavan lokaalo muoto) Oletetaan, että funktio  $f$  on analyyttinen avoimessa kiekossa  $D$  ja että  $\gamma$  on suljettu, paloittain sileä polku kiekossa  $D$ . Tällöin on*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$



kaikille  $z \in D \setminus |\gamma|$

TODISTUS. [10, Theorem V.2.2, s. 161-162] □

Tämän Cauchyn integraalikaavan perusteella voidaan tehdä päätelmä, joka alkaa paljastaa kompleksianalyysin ja reaalianalyysin välisen eron.

LAUSE 1.30. *Jos funktio  $f$  on analyyttinen joukossa  $U$ , niin myös funktio  $f'$  on analyyttinen joukossa  $U$ . Erityisesti funktio  $f$  on jatkuvasti derivoituva funktio eli  $f \in C^1(U)$ .*

TODISTUS. [10, Theorem V.3.1, s. 164-165] □

SEURAUS 1.31. *Jos funktio  $f$  on analyyttinen joukossa  $U$ , niin se voidaan differentioida mielivaltaisen monta kertaa joukossa  $U$  ja kaikki sen derivaatat  $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots$  ovat analyyttisiä joukossa  $U$ . Erityisesti funktiolla  $f$  on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat eli  $f \in C^\infty(U)$ .*

Cauchyn lauseen lokaalin muodon oletus, että eletään kiekossa, on liian rajoittava. Siten siitä oletuksesta pyritään pääsemään eroon.

Cauchyn lauseen globaalia versiota varten on hyvä kerrata muutama keskeinen käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.32. Kompleksitasossa *sykli* on äärellinen jono suljettuja teitä  $\gamma_k$ , missä  $k = 1, 2, \dots, p$ . Syklille käytetään merkintää  $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ .

MÄÄRITELMÄ 1.33. Olkoon  $\sigma$  sykli avoimessa joukossa  $U \subset \mathbb{C}$ . Sanotaan, että sykli  $\sigma$  on *nollahomologinen* joukossa  $U$ , jos  $n(\sigma, z) = 0$  kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus U$ .

Cauchyn lauseen lokaalin version mukaan kaikki syklit ovat nollahomologisia kiekossa  $D$ .

MÄÄRITELMÄ 1.34. Alue  $U \in \mathbb{C}$  on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen joukon  $U$  suljettu tie  $\gamma$  (ja siten jokainen sykli) on nollahomologinen joukossa  $U$ .

Se, että alue on yhdesti yhtenäinen, merkitsee geometrisesti sitä, että siinä ei ole ”reikiä”. Rajoitettu alue  $U$  on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos joukko  $\mathbb{C} \setminus U$  on yhtenäinen. Rajoittamaton alue  $U \neq \mathbb{C}$  on puolestaan yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos joukon  $\mathbb{C} \setminus U$  kaikki komponentit ovat rajoittamattomia.

Seuraava lause on yksi kompleksianalyysin tärkeimmistä tuloksista.

LAUSE 1.35. *(Cauchyn lause) Olkoon  $\sigma$  sykli avoimessa joukossa  $U$ . Tällöin on  $\int_\sigma f(z) dz = 0$  jokaiselle analyyttiselle funktiolle  $f$  joukossa  $U$ , jos ja vain jos sykli  $\sigma$  on nollahomologinen joukossa  $U$ .*

TODISTUS. [10, Theorem V.5.1, s. 188-191] □

LAUSE 1.36. *(Cauchyn integraalikaava) Olkoon funktio  $f$  analyyttinen avoimessa joukossa  $U$  ja  $\sigma$  nollahomologinen sykli joukossa  $U$ . Tällöin on*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

kaikille  $z \in U \setminus |\sigma|$ .

TODISTUS. [10, Theorem V.5.4, s. 192]

□

Cauchyn lauseen ja integraalikaavan väitteet pätevät siis kaikille sykleille yhdesti yhtenäisissä alueissa.

## Harmoniset funktiot kompleksialueessa

Tässä luvussa tarkastellaan harmonisten funktioiden teoriaa kompleksitasoalueessa. Ensin määritellään Laplacen yhtälö, jonka avulla voidaan määrittellä harmoniset funktiot. Tämän jälkeen osoitetaan muutamia tuloksia ja tutustutaan harmonisten funktioiden ominaisuuksiin, kuten esimerkiksi keskiarvo-ominaisuuteen. Lopuksi tutustutaan Dirichlet'n ongelmaan ja sen ratkaisemiseen esittelemällä yleinen ratkaisumenetelmä. Dirichlet'n ongelmalle pyritään löytämään ratkaisu kiekossa ja pystysuorien suorien rajoittamassa alueessa. Tätä varten määritellään Poissonin integrointikaava kiekossa ja todistetaan Schwarzin lause.

### 2.1. Harmoniset funktiot

Harmoniset funktiot ovat merkittävässä roolissa fysiikassa ja tekniikassa. Erityisesti niihin törmätään sähköstatistiikassa, virtausdynamiikassa, akustiikassa ja lämmön siirrossa [10, s. 214]. Harmonisten funktioiden sovelluksista voi lukea lisää esimerkiksi O.D.Kelloggin teoksesta *Foundations of Modern Potential Theory* [5] sekä L. L. Helmsin teoksesta *Introduction to Potential Theory* [4].

Tässä kappaleessa määritellään ensin Laplacen yhtälö ja sen avulla harmoniset funktiot. Tämän jälkeen tutkitaan analyttisten ja harmonisten funktioiden välistä suhdetta. Lopuksi tutustutaan vielä harmonisiin konjugaattifunktioihin ja niiden ominaisuuksiin. Harmonisten funktioiden teoriaa selvennetään esimerkkien avulla.

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Olkoon  $U \subset \mathbb{C}$  avoin joukko ja  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolla on olemassa jatkuvat osittaisderivaatat  $u_{xx}$  ja  $u_{yy}$  jokaisessa joukon  $U$  pisteessä. Määritellään *Laplacen operaattori* asettamalla

$$(2.1) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

*Laplacen yhtälö* saadaan asettamalla Laplacen operaattori nolaksi eli toisin sanoen

$$(2.2) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Laplacen yhtälön ratkaisulle, funktiolle  $u$ , on annettu oma nimi ja se määritellään seuraavasti:

**MÄÄRITELMÄ 2.2.** Olkoon  $D \subset \mathbb{C}$  alue ja  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolla on olemassa jatkuvat osittaisderivaatat  $u_{xx}$  ja  $u_{yy}$  jokaisessa alueen  $D$  pisteessä. Sanotaan, että funktio  $u$  on *harmoninen*, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön, toisin sanoen, jos  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  kaikilla alueen  $D$  pisteillä.

Seuraava lause osoittaa, että analyttisen funktion reaali- ja imaginaariosat ovat harmonisia.

**LAUSE 2.3.** *Olkoon  $f = u + iv$  analyttinen funktio alueessa  $D \subset \mathbb{C}$ . Tällöin funktiot  $u$  ja  $v$  ovat harmonisia alueessa  $D$ .*

TODISTUS. Oletetaan, että funktio  $f = u + iv$  on analyyttinen alueessa  $D \subset \mathbb{C}$ . Tällöin Lauseen 1.30 mukaan myös sen derivaatafunktio

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z)$$

on analyyttinen tässä alueessa  $D$ . Tämän seurauksena reaaliarvoisten funktioiden  $u$  ja  $v$  toisen kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia ja niille pätee  $u_{xy} = u_{yx}$  ja  $v_{xy} = v_{yx}$ .

Koska funktio  $f$  on analyyttinen, niin Lauseen 1.11 nojalla Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat. Tällöin on

$$u_{xx} = (v_y)_x = -u_{yy} \text{ ja } v_{xx} = (-u_y)_x = -v_{yy},$$

joten sekä  $u$  että  $v$  toteuttaa Laplacen yhtälön.  $\square$

ESIMERKKI 2.4. Olkoon funktio  $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$  kokonainen. Tällöin funktiot  $u(x, y) = x^2 - y^2$  ja  $v(x, y) = 2xy$  ovat Lauseen 2.3 nojalla selvästi harmonisia jokaisessa alueessa  $D \subset \mathbb{C}$ .

On siis näytetty, että jos funktio  $f = u + iv$  on analyyttinen alueessa  $D$ , niin tällöin sen reaali- ja imaginaariosat  $u$  ja  $v$  ovat harmoniset tässä alueessa. Olkoon nyt  $u$  reaaliarvoinen ja harmoninen funktio alueessa  $D$ . Jos löydetään toinen harmoninen funktio  $v$  siten, että molemmat funktiot  $u$  ja  $v$  toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt alueessa  $D$ , niin löydettyä funktiota  $v$  kutsutaan funktion  $u$  *harmoniseksi konjugaatiksi*. Yhdistämällä funktiot  $u$  ja  $v$  funktioksi  $u + iv$  saadaan funktio, joka on analyyttinen alueessa  $D$ .

Tutustutaan harmonisiin funktioihin vielä seuraavien esimerkkien avulla.

ESIMERKKI 2.5. (1) Näytetään, että funktio  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$  on harmoninen koko kompleksialueessa. Laskemalla osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 3x^2 - 3y^2, \\ u_{xx}(x, y) &= 6x, \\ u_y(x, y) &= -6xy - 5, \\ u_{yy}(x, y) &= -6x \end{aligned}$$

nähdään, että funktio  $u$  toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 6x - 6x = 0.$$

(2) Etsitään funktion  $u$  konjugaattifunktio. Koska harmonisen konjugaattifunktion  $v$  täytyy toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt  $u_x = v_y$  ja  $u_y = -v_x$ , niin täytyy olla

$$v_y(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \text{ ja } v_x(x, y) = 6xy + 5.$$

Kun yhtälö  $v_y(x, y) = 3x^2 - 3y^2$  integroidaan muuttujan  $y$  suhteen, saadaan

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x).$$

Kun tämä puolestaan derivoidaan muuttujan  $x$  suhteen, saadaan

$$v_x(x, y) = 6xy + h'(x).$$

Vertaamalla tätä tulosta aiemmin laskettuun funktion  $v$  osittaisderivaattaan muuttujan  $x$  suhteen nähdään, että  $h'(x) = 5$ . Siten on oltava  $h(x) = 5x + C$ , missä  $C$  on reaalinen vakio. Siispä funktion  $u$  harmoninen konjugaatti on

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C.$$

ESIMERKKI 2.6. Olkoon  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio siten, että

$$u(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^n r^k [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)]$$

jokaiselle  $r > 0$  ja  $\theta \in \mathbb{R}$ , kun  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ja  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ovat reaalisia vakioita. Näytetään, että funktio  $u$  on harmoninen kompleksitasossa  $\mathbb{C}$  ja etsitään funktiolle  $u$  konjugaattifunktio  $v$ , jolle pätee  $v(0) = 0$ .

Asetetaan  $z = re^{i\theta}$ . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} u(z) &= a_0 + \sum_{k=1}^n r^k [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n r^k [a_k \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) + b_k \operatorname{Im}(e^{ik\theta})] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n r^k [a_k \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) + b_k \operatorname{Re}(-ie^{ik\theta})] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[(a_k - ib_k)r^k e^{ik\theta}] \\ &= \operatorname{Re} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)z^k \right]. \end{aligned}$$

Koska funktio  $u$  on polynomin

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)z^k$$

reaaliosa, niin funktio  $u$  on selvästi harmoninen kompleksitasossa.

Funktio  $v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$  on funktion  $u$  harmoninen konjugaatti, sillä sille pätee  $v(0) = \operatorname{Im}(f(0)) = \operatorname{Im}(a_0) = 0$ . Siten, kun merkitään  $z = re^{i\theta}$ , saadaan

$$\begin{aligned} v(z) &= \operatorname{Im} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)z^k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}[(a_k - ib_k)r^k e^{ik\theta}] \\ &= \sum_{k=1}^n r^k [a_k \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) - b_k \operatorname{Im}(ie^{ik\theta})] \\ &= \sum_{k=1}^n r^k [-b_k \cos(k\theta) + a_k \sin(k\theta)]. \end{aligned}$$

Siispä haluttu harmoninen konjugaatti  $v$  on

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n r^k [-b_k \cos(k\theta) + a_k \sin(k\theta)]$$

kaikille  $r \geq 0$  ja  $r \in \mathbb{R}$ .

**LAUSE 2.7.** *Olkoon  $D \subset \mathbb{C}$  alue. Tällöin jokaisella alueen  $D$  harmonisella funktiolla on harmoninen konjugaattifunktio tässä alueessa, jos ja vain jos alue  $D$  on yhdesti yhtenäinen.*

**TODISTUS.** Oletetaan ensin, että alue  $D$  on yhdesti yhtenäinen ja osoitetaan, että alueen  $D$  harmonisella funktiolla  $u$  on harmoninen konjugaattifunktio tässä alueessa.

Määritellään funktio  $g$  asettamalla  $g = u_x - iu_y$ . Koska funktio  $u$  on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva alueessa  $D$  eli siis  $u \in C^2(D)$ , niin myös funktio  $g$  on jatkuvasti differentioituva alueessa  $D$  eli  $g \in C^1(D)$ . Lisäksi, koska funktio  $u$  on harmoninen alueessa  $D$ , niin määritelmän mukaan on  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  alueessa  $D$ . Tällöin funktion  $g$  reaali- ja imaginaariosat toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt alueessa  $D$ :

$$\begin{aligned} (u_x)_x &= u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y, \\ (u_x)_y &= u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x. \end{aligned}$$

Seurauksen 1.13 mukaan funktio  $g$  on analyyttinen alueessa  $D$ , jolloin sille voidaan valita primitiivi  $f = \tilde{u} + iv$  [10, Theorem V.6.1, s. 196]. Olkoon nyt piste  $z_0 \in D$  siten, että  $f(z_0) = u(z_0)$ . (Tämä määrää yksikäsitteisesti funktion  $f$ .) Tällöin on oltava  $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$ . Koska nyt on

$$\tilde{u}_x - i\tilde{u}_y = f' = g = u_x - iu_y$$

alueessa  $D$ , niin täytyy olla  $(\tilde{u} - u)_x = (\tilde{u} - u)_y = 0$  kaikkialla alueessa  $D$ . Tällöin funktio  $\tilde{u} - u$  on vakio alueessa  $D$  [10, Lemma III.2.3, s. 73]. Lisäksi aiemmin todetun perusteella on  $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$ , joten on oltava  $\tilde{u} - u = 0$  eli  $\tilde{u} = u$  alueessa  $D$ . Saadaan siis, että funktio  $f$  voidaan kirjoittaa muodossa  $f = u + iv$  alueessa  $D$ . Funktio  $f$  on määritelmänsä mukaan analyyttinen alueessa  $D$ , joten funktio  $v$  on funktion  $u$  harmoninen konjugaattifunktio.

Oletetaan sitten, että jokaisella harmonisella funktiolla on harmoninen konjugaattifunktio alueessa  $D$  ja osoitetaan, että alue  $D$  on yhdesti yhtenäinen. Olkoon  $\gamma$  suljettu, paloittain sileä polku alueessa  $D$ . Halutaan näyttää, että  $\gamma$  on nollahomologinen alueessa  $D$ , toisin sanoen  $n(\gamma, z_0) = 0$  jollekin pisteelle  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ .

Määritellään nyt funktio  $u: \mathbb{C} \setminus z_0 \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että  $u(z) = \text{Log}|z - z_0|$ . Funktio  $u$  on harmoninen alueessa  $\mathbb{C} \setminus z_0$  ja yksinkertaisella laskulla nähdään, että se on harmoninen myös alueessa  $D$ . Oletuksen mukaan funktiolle  $u$  voidaan valita harmoninen konjugaattifunktio  $v$  alueessa  $D$ , jolloin funktio  $f = u + iv$  on analyyttinen alueessa  $D$ . Myös funktio  $h: D \rightarrow \mathbb{C}$ , joka määritellään asettamalla

$$h(z) = (z - z_0)e^{-f(z)},$$

on analyyttinen alueessa  $D$ . Huomataan, että sen normi on

$$|h(z)| = |z - z_0|e^{-u(z)} = |z - z_0|e^{-\text{Log}|z - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$

kaikilla  $z \in D$ . Tällöin funktion  $h$  on oltava vakio alueessa  $D$  [10, Theorem III.2.5, s. 74]. Tästä seuraa, että

$$0 = h'(z) = e^{-f(z)} - (z - z_0)e^{-f(z)}f'(z)$$

kaikkialla alueessa  $D$ , jolloin saadaan, että on oltava  $f'(z) = (z - z_0)^{-1}$  kaikilla  $z \in D$ . Lauseen 1.24 nojalla kierrosluku on tällöin

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = 0.$$

Tämä on, mitä haluttiinkin. Siispä alue  $D$  on yhdesti yhtenäinen.  $\square$

**SEURAUUS 2.8.** *Jos funktio  $u$  on harmoninen avoimessa joukossa  $U$ , niin funktiolla  $u$  on harmoninen konjugaattifunktio jokaisessa joukon  $U$  avoimessa kiekossa. Erityisesti funktio  $u$  on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoitua eli  $u \in C^\infty(U)$ .*

## 2.2. Keskiarvo-ominaisuus

Tässä kappaleessa tutustutaan harmonisten funktioiden keskiarvo-ominaisuuteen. Aloitetaan osio lyhyellä laskulla. Oletetaan aluksi, että  $u$  on harmoninen funktio tason avoimessa joukossa  $U$  ja piste  $z \in U$ . Olkoon lisäksi  $\rho > 0$  niin pieni, että  $z$ -keskinen ja  $\rho$ -säteinen kiekko  $D := B(z, \rho)$  sisältyy joukkoon  $U$ , toisin sanoen  $D \subset U$ . Lauseen 2.7 nojalla funktiolle  $u$  voidaan valita harmoninen konjugaattifunktio  $v$  kiekossa  $D$ . Kun  $0 < r < \rho$ , sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa funktioon  $f = u + iv$  ja saadaan

$$\begin{aligned} u(z) &= \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Tästä voidaan siis päätellä, että funktion  $u$  lauseke on

$$(2.3) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta,$$

kun  $0 < r < \rho$ . Yhtälön 2.3 oikealla puolella on yksinkertainen tulkinta: se antaa funktion  $u$  keskiarvon kiekossa  $B(z, r)$ . Yhtälön 2.3 mukaan tämä keskiarvo on sama jokaiselle  $r \in (0, \rho)$  ja on yhtäsuuri kuin funktion  $u$  arvo kiekon  $B(z, r)$  keskipisteessä.

Yhtälön 2.3 motivoimana tehdään seuraava määritelmä:

**MÄÄRITELMÄ 2.9.** Reaaliarvoisella funktiolla  $w$ , joka on jatkuva avoimessa joukossa  $U \subset \mathbb{C}$ , on *keskiarvo-ominaisuus* joukossa  $U$ , jos jokaiselle pisteelle  $z \in U$  on olemassa säde  $\rho = \rho(z) > 0$  siten, että

$$(2.4) \quad w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z + re^{i\theta}) d\theta$$

kaikilla  $0 < r < \rho$ .

On selvää, että kiekko  $B(z, \rho)$  sisältyy joukkoon  $U$  eli  $B(z, \rho) \subset U$ . Yhtälöitä 2.4 ei kuitenkaan vaadita, että se pätee kaikilla säteillä  $\rho$  siten, että kiekko  $B(z, \rho)$  sisältyisi joukkoon  $U$ , vaan, että se pätee, kun säde  $\rho$  on valittu riittävän pieneksi.

Kootaan edeltävät huomioit vielä lauseeksi.

**LAUSE 2.10.** *Harmonisella funktiolla  $u$  on keskiarvo-ominaisuus avoimessa joukossa  $U$ . Lisäksi, jos pisteellä  $z$  on edellä mainittu ominaisuus, niin mikä tahansa luku  $\rho > 0$  voi olla tätä pistettä vastaava säde, kun  $B(z, \rho) \subset U$ .*

### 2.3. Dirichlet'n ongelma

Tutustutaan seuraavaksi erääseen klassiseen ja tärkeään soveltavan matematiikan ongelmaan, joka liittyy Laplacen yhtälöön. Tämä ongelma tunnetaan nimellä Dirichlet'n ongelma. Tässä kappaleessa pyritään löytämään Dirichlet'n ongelmalle yleinen ratkaisu kiekossa sekä alueessa, jota rajoittavat pystysuorat suorat. Tätä varten määritellään Poissonin integrointikaava kiekossa ja todistetaan Schwarzin lause. Tarastellaan myös harmonisten funktioiden ja analyyttisten kuvausten välistä yhteyttä osoittamalla, että analyyttinen muuttujanvaihto säilyttää kuvauksen harmonisuuden. Lopuksi esitellään Dirichlet'n ongelman ratkaisumalli, johon tullaan palaamaan myös tutkielman viimeisessä luvussa. Esimerkkien tavoitteena on helpottaa asioiden ymmärtämistä.

Olkoon  $D$  tason alue ja  $h: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva, alueen  $D$  reunalla määritelty, funktio. *Dirichlet'n ongelman* tavoitteena on löytää jatkuva funktio  $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , joka on harmoninen alueessa  $D$  ja joka vastaa funktiota  $h$  alueen  $D$  reunalla. Oikeastaan riittää löytää harmoninen funktio  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle pätee

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = h(\zeta)$$

kaikilla  $\zeta \in \partial D$ . Tällöin on helppoa nähdä, että funktio, joka vastaa funktiota  $u$  alueessa  $D$  ja funktiota  $h$  alueen  $D$  reunalla  $\partial D$ , on jatkuva joukossa  $\overline{D}$ .

Dirichlet'n ongelmalla ei ole välttämättä ratkaisua, mutta sillon, kun ratkaisu on olemassa ja alue on rajoitettu, niin ratkaisu on yksikäsitteinen [10, s. 227-228]. Muissa tapauksissa ratkaisuja voi olla useampia. Aluetta, jossa Dirichlet'n ongelmalla on ratkaisu jokaiselle jatkuvalla reunafunktiolle  $h$ , sanotaan *säännölliseksi Dirichlet'n ongelmalle*. Esimerkiksi avoin kiekko on tällainen alue.

Dirichlet'n ongelma on käytännön sovellusten kannalta tärkeä, sillä monet fyysikaan ongelmat, kuten esimerkiksi lämpövirtaus, palautuvat Dirichlet'n ongelman ratkaisemiseen. Seuraavasta esimerkistä käy ilmi, kuinka Dirichlet'n ongelma ratkaistaan origokeskeisessä kiekossa, kun reunafunktio on kahden muuttujan,  $x$  ja  $y$ , polynomi.

**ESIMERKKI 2.11.** Ratkaistaan Dirichlet'n ongelma kiekossa  $D = B(0, 2)$ , kun reunafunktiona on  $h(z) = x^2 + 2xy^2$ .



Asetetaan  $z = 2e^{i\theta} = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Muokataan funktion  $h: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  lauseketta käyttämällä trigonometrisiä kaavoja:

$$\begin{aligned}
 h(z) &= x^2 + 2xy^2 \\
 &= (2 \cos \theta)^2 + 2 \cdot 2 \cos \theta \cdot (2 \sin \theta)^2 \\
 &= 4 \cos^2 \theta + 16 \cos \theta \sin^2 \theta \\
 &= 4 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right] + 16 \cos \theta \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right] \\
 &= 2[1 + \cos(2\theta)] + 8 \cos \theta [1 - \cos(2\theta)] \\
 &= 2 + 8 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) - 8 \cos \theta \cos(2\theta) \\
 &= 2 + 8 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) - 4 \left[ 2 \cos \left( \frac{3\theta - \theta}{2} \right) \cos \left( \frac{3\theta + \theta}{2} \right) \right] \\
 &= 2 + 8 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) - 4[\cos(3\theta) + \cos \theta] \\
 &= 2 + 8 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) - 4 \cos(3\theta) - 4 \cos \theta \\
 &= 2 + 4 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) - 4 \cos(3\theta).
 \end{aligned}$$

Esimerkin 2.6 avulla nähdään, että funktio  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , joka määritellään asettamalla

$$u(re^{i\theta}) = 2 + 4a_1 r \cos \theta + 2a_2 r^2 \cos(2\theta) - 4a_3 r^3 \cos(3\theta),$$

on harmoninen kompleksitasossa jokaiselle vakiolle  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ . Valitaan nyt vakiot  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  siten, että funktio  $u$  vastaa funktiota  $h$ , kun  $r = 2$ . Valitaan siis  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{4}$  ja  $a_3 = \frac{1}{8}$ . Annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu on siten

$$\begin{aligned}
 u(z) &= 2 + 2r \cos \theta + \frac{r^2 \cos(2\theta)}{2} - \frac{r^3 \cos(3\theta)}{2} \\
 &= \operatorname{Re} \left( 2 + 2z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} \right) \\
 &= 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3xy^2}{2}.
 \end{aligned}$$

**2.3.1. Poisson integraalit.** Valmistellaan nyt Dirichlet'n ongelman yleistä ratkaisua kiekossa.

**MÄÄRITELMÄ 2.12.** Määritellään funktio  $P$  jokaisessa kompleksitason pisteessä  $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2$ , missä  $z \neq \zeta$ , asettamalla

$$P(z, \zeta) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right).$$

Tätä funktiota kutsutaan *Poissonin ytimeksi*.

**HUOMAUTUS 2.13.** Kun piste  $\zeta \neq 0$  on kiinnitetty, Poissonin ytimestä  $P(z, \zeta)$  tulee positiivinen harmoninen funktio kiekossa  $B(0, |\zeta|)$ .

Seuraava Poissonin ytimen ominaisuus on jatkossa tärkeä.

**LEMMA 2.14.** Jos  $r > 0$ , niin

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta = 1$$

aina, kun  $|z| < r$ .

TODISTUS. Todistetaan väite yksinkertaisella laskulla:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) d\theta \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left( \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \right) \\
&= 2 - 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

sillä jokaiselle pisteelle  $z \in B(0, r)$  pätee (Lemma 1.26)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = n(\gamma, z) = 1,$$

missä  $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$ , kun  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . □

Sana "Poisson" viittaa harmonisten funktioiden tutkijaan, Siméon Poissoniin (1781-1840).

HUOMAUTUS 2.15. Kirjallisuudessa Poissonin ytimelle käytetään myös merkintää

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta - r^2},$$

missä  $0 \leq r < 1$  ja  $-\infty < \theta < \infty$ . Huomataan, että  $P_r(\theta) = P(re^{i\theta}, 1)$ :

$$\begin{aligned}
P(re^{i\theta}, 1) &= \frac{|1|^2 - |re^{i\theta}|^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} \\
&= \frac{1 - |r|^2 |e^{i\theta}|^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} \\
&= \frac{1 - r^2}{|1 - r(\cos \theta + i \sin \theta)|^2} \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta - r^2}.
\end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 2.16. Olkoon  $D = B(z_0, r)$  avoin kiekko ja  $h: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio. Funktiota  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z - z_0, re^{i\theta}) h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

kutsutaan funktion  $h$  *Poissonin integraaliksi kiekossa  $D$* .

Seuraava Hermann Schwarzin lause osoittaa, että funktio  $u$  on Dirichlet'n ongelman ratkaisu kiekossa, kun reunafunktiona on funktio  $h$ .

LAUSE 2.17. (*Schwarzin lause*) Olkoon  $D$  avoin kiekko kompleksitasossa,  $h: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio ja  $u$  funktion  $h$  Poissonin integraali kiekossa  $D$ . Tällöin funktio  $u$  on harmoninen kiekossa  $D$  ja

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = h(\zeta)$$

kaikille  $\zeta \in \partial D$ . Erityisesti kiekko  $D$  on säännöllinen Dirichlet'n ongelmalle.

TODISTUS. Oletetaan, että kiekon  $D$  keskipiste on origossa eli toisin sanoen  $D = B(0, r)$ . (Huomaa, että tämä oletus ei vaikuta väitteen yleistettävyyteen.) Näytetään ensin, että funktio  $u$  on harmoninen kiekossa  $D$ . Lemman 1.28 nojalla funktio  $H: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{h(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

on analyyttinen. Kun  $z \in D$ , niin funktion  $u$  lauseke voidaan laskea:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) h(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z} \right) h(re^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left( \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \right) \frac{h(\zeta)d\zeta}{\zeta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left( \frac{2}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta} \right) h(\zeta) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re}(2H(z) - H(0)). \end{aligned}$$

Funktio  $u$  on harmoninen kiekossa  $D$ , sillä se on analyyttisen funktion reaaliosa.

Nyt riittää osoittaa, että funktiolla  $u$  on haluttu rajankäyntiominaisuus: jokaiselle pisteelle  $\zeta \in \partial D$  pätee

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = h(\zeta).$$

Kiinnitetään piste  $\zeta \in \partial D$  ja merkitään  $\zeta = re^{i\psi}$ , missä  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Olkoon  $\epsilon > 0$ . Raja-arvon määritelmän mukaan on löydettävä  $\delta > 0$  siten, että

$$(2.6) \quad |u(z) - h(\zeta)| < \epsilon$$

kaikilla  $z \in D$ , kun  $|z - \zeta| < \delta$ . Sovelletaan nyt yhtälöä 2.5 ja integrandin jaksollisuutta:

$$\begin{aligned} u(z) - h(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) h(re^{i\theta}) d\theta - \frac{h(re^{i\psi})}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) [h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta}) [h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})] d\theta. \end{aligned}$$

Kun  $0 < t \leq \pi$ , voidaan merkitä

$$M(t) = \max\{|h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})| : \theta \in [\psi - t, \psi + t]\}.$$

Koska funktio  $\theta \mapsto |h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})|$  on jatkuva reaaliakselilla, niin sen rajoittuma välillä  $[\psi - t, \psi + t]$  saavuttaa maksiminsa. Siten funktio  $M(t)$  on hyvin määritelty. Funktion  $M$  määritelmän mukaan on selvästi  $M(t) < M(\pi)$ . Lisäksi, koska funktion  $h(re^{i\theta})$  arvo lähestyy funktion  $h(re^{i\psi})$  arvoa, kun  $\theta$  lähestyy pistettä  $\psi$ , niin tällöin funktio  $M(t)$  lähestyy nollaa, kun  $t$  lähestyy nollaa.

Olkoon  $0 < t < \pi$ . Yhtälön 2.5 ja Poissonin ytimen  $P$  määritelmän avulla voidaan arvioida lukua  $|u(z) - h(\zeta)|$ , kun  $z \in D$ , seuraavasti:

$$\begin{aligned}
|u(z) - h(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta}) [h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})] d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\pi}^{\psi+\pi} P(z, re^{i\theta}) |h(re^{i\theta}) - h(re^{i\psi})| d\theta \\
&\leq \frac{M(t)}{2\pi} \int_{|\theta-\psi| \leq t} P(z, re^{i\theta}) d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi} \int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta \\
&\leq \frac{M(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi} \int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} P(z, re^{i\theta}) d\theta \\
&\leq M(t) + \frac{M(\pi)(r^2 - |z|^2)}{2\pi} \int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2}.
\end{aligned}$$

Siispä jokaiselle  $t \in (0, \pi)$  ja  $z \in D$  saadaan arvio

$$(2.7) \quad |u(z) - h(\zeta)| \leq M(t) + \frac{M(\pi)(r^2 - |z|^2)}{2\pi} \int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2}.$$

Näytetään sitten, että yllä olevan yhtälön 2.7 integraali on rajoitettu. Olkoon  $t \leq |\theta - \psi| \leq \pi$ . Koska tiedetään, että  $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ , kun  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , niin

$$\begin{aligned}
|e^{i\theta} - e^{i\psi}| &= |e^{i\psi}(e^{i(\theta-\psi)} - 1)| = |e^{i(\theta-\psi)} - 1| \\
&\geq 1 - \cos(\theta - \psi) \geq 1 - \cos t = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \frac{2t^2}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälön nojalla jokaiselle pisteelle  $z \in D$ , jolle pätee  $|z - \zeta| < \frac{rt^2}{\pi^2}$ , on siten oltava

$$|re^{i\theta} - z| \geq |re^{i\theta} - \zeta| - |\zeta - z| = r|e^{i\theta} - e^{i\psi}| - |\zeta - z| \geq \frac{2rt^2}{\pi^2} - \frac{rt^2}{\pi^2} = \frac{rt^2}{\pi^2},$$

kun  $t \leq |\theta - \psi| \leq \pi$ . Integraalia voidaan nyt arvioida ja saadaan

$$\int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{\pi^4}{r^2 t^4} \int_{t \leq |\theta-\psi| \leq \pi} d\theta \leq \frac{\pi^4}{r^2 t^4} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{2\pi^5}{r^2 t^4}.$$

Tämän perusteella integraali on rajoitettu.

Yhtälö 2.7 on saatu nyt muotoon

$$(2.8) \quad |u(z) - h(\zeta)| \leq M(t) + \frac{\pi^4 M(\pi)(r^2 - |z|^2)}{r^2 t^4}$$

kaikille pisteille  $z \in D$ , joille  $|z - \zeta| < \frac{rt^2}{\pi^2}$ .

Määritetään seuraavaksi luku  $\delta > 0$  siten, että yhtälö 2.6 pätee kaikille pisteille  $z \in D$ , joille  $|z - \zeta| < \delta$ . Koska funktion  $M(t)$  arvot lähestyvät nollaa muuttujan  $t$  lähestyessä nollaa, niin valitaan  $t \in (0, \pi)$  siten, että  $M(t) < \frac{\epsilon}{2}$ . Kun  $t$  on nyt kiinnitetty, niin yhtälön 2.8 viimeinen termi lähestyy nollaa, kun  $|z| \rightarrow r$ . Itse asiassa tämä tapahtuu, kun piste  $z$  lähestyy pistettä  $\zeta$ . Nyt voidaan valita  $\delta \in (0, \frac{rt^2}{\pi^2})$  siten, että yhtälön 2.8 viimeinen termi on pienempi kuin  $\frac{\epsilon}{2}$  kaikilla  $z \in D$ , joille  $|z - \zeta| < \delta$ . Rajoitus  $0 < \delta < \frac{rt^2}{\pi^2}$  takaa sen, että

$$|u(z) - h(\zeta)| < \epsilon$$

kaikilla pisteillä  $z$ , joille  $|z - \zeta| < \delta$ . Siispä

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = h(\zeta).$$

Tämä on, mitä haluttiinkin. □

Schwarzin lause (Lause 2.17) ei siis vain kerro, että Dirichlet'n ongelmalla on ratkaisu kiekossa  $D = B(z_0, r)$ , vaan se antaa myös ratkaisulle muodon

$$u(z) = \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta}{|re^{i\theta} - (z - z_0)|^2}.$$

Tämän yhtälön avulla saadaan paljon hyödyllistä tietoa harmonisista funktioista. Esimerkiksi Lauseen 2.17 avulla voidaan johtaa ei-negatiiviselle, harmoniselle funktiolle ylä- ja alaraja kiekossa. Tämä tunnetaan yleisemmin *Harnackin epäyhtälönä*. Harnackin epäyhtälöstä voi lukea lisää esimerkiksi Bruce P. Palkan teoksesta *An Introduction to Complex Function Theory* [10, s. 232-233].

Tarkastellaan sitten Dirichlet'n ongelman ratkaisua muualla kuin kiekossa. Seuraava esimerkki kuvaa yksinkertaista Dirichletin ongelmaa alueessa, joka on rajoitettu pystysuorilla suorilla.

**ESIMERKKI 2.18.** Ratkaistaan Kuvan 2.1 esittämä Dirichlet'n ongelma. Alue  $D$  on pystysuora, rajoittamaton liuska, missä  $-1 < x < 1$  ja  $-\infty < y < \infty$ . Alueen  $D$  rajat ovat pystysuorat  $x = -1$  ja  $x = 1$ .

Halutaan löytää funktio  $u$  siten, että  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , kun  $-1 < x < 1$  ja  $-\infty < y < \infty$ , ja kun tiedetään, että

$$u(-1, y) = k_0$$

ja

$$u(1, y) = k_1,$$

kun  $-\infty < y < \infty$  ja  $k_1$  ja  $k_2$  ovat vakioita.

Alueen  $D$  muoto ja tieto siitä, että reunaehdot ovat vakioita, viittaa siihen, että funktio  $u$  on riippumaton muuttujasta  $y$ . Siten on järkevää etsiä Laplacen yhtälölle ratkaisua muodossa

$$u(x, y) = \tilde{u}(x).$$

Koska funktio  $\tilde{u}$  on nyt siis riippumaton muuttujasta  $y$ , Laplacen yhtälö saa muodon

$$u_{xx} = 0.$$

Integroimalla tämä yhtälö kahdesti saadaan yleinen ratkaisu

$$\tilde{u}(x) = ax + b.$$

Vakiot  $a$  ja  $b$  voidaan ratkaista reunaehtojen avulla. Koska tiedetään, että  $\tilde{u}(-1) = k_0$  ja  $\tilde{u}(1) = k_1$ , niin on oltava

$$a(-1) + b = k_0$$

ja

$$a(1) + b = k_1.$$

Laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan

$$2b = k_0 + k_1,$$

kun taas vähentämällä ensimmäinen yhtälö toisesta saadaan

$$2a = k_1 - k_0.$$

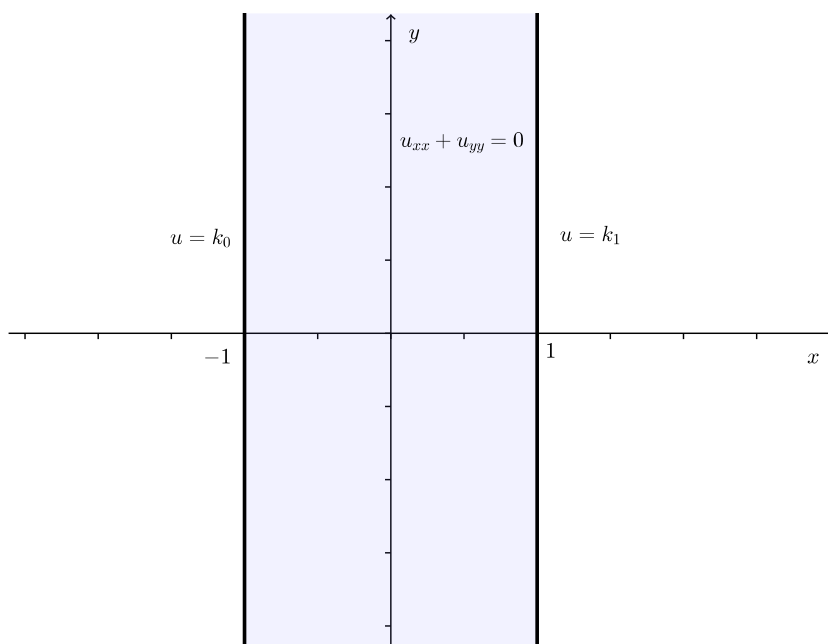
Näiden kahden tuloksen perusteella vakioiksi  $a$  ja  $b$  saadaan

$$b = \frac{k_1+k_0}{2} \text{ ja } a = \frac{k_1-k_0}{2}.$$

Siten Dirichlet'n ongelman eräs ratkaisu on

$$u(x, y) = \frac{k_1-k_0}{2}x + \frac{k_1+k_0}{2}.$$

(Myös funktio  $u(x, y) = e^{\pi y} \sin \pi x$  on annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu.)



KUVA 2.1. Yksinkertainen Dirichlet'n ongelma

**2.3.2. Harmoniset funktiot ja analyyttiset kuvaukset.** Esimerkin 2.18 Dirichlet'n ongelma oli varsin helppo ratkaista, koska alue  $D$  oli niin yksinkertainen. Vastaavanlainen ratkaisuteknikka ei kuitenkaan sovellu yleisesti Dirichlet'n ongelmiin monimutkaisemmissa alueissa.

Funktiota  $f$ , joka on analyyttinen alueessa  $D$  ja joka kuvaa alueen  $D$  alueeksi  $D'$ , kutsutaan *analyyttiseksi kuvaukseksi* alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ . Dirichlet'n ongelma monimutkaisessa alueessa  $D$  voidaan usein ratkaista etsimällä tällainen analyyttinen kuvaus alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ , jossa Dirichlet'n ongelma on helpompi ratkaista. Tämä menetelmä perustuu seuraavaan lauseeseen, jonka mukaan Laplacen yhtälö on muuttumaton analyyttisessä kuvauksessa.

**LAUSE 2.19.** *Olkoon  $f = u + iv$  analyyttinen kuvaus alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ . Jos funktio  $\Phi$  on harmoninen alueessa  $D'$ , niin funktio  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  on harmoninen alueessa  $D$ .*

TODISTUS. Osoitetaan, että funktio  $\phi$  on harmoninen alueessa  $D$  näyttämällä, että se toteuttaa Laplacen yhtälön tässä alueessa. Koska tiedetään, että

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)),$$

niin ketjusäännön mukaan on

$$\phi_x = \Phi_u u_x + \Phi_v v_x.$$

Soveltamalla uudelleen ketjusääntöä sekä tulon derivoimissääntöä saadaan funktion  $\phi$  toisen kertaluvun osittaisderivaataksi muuttujan  $x$  suhteen

$$(2.9) \quad \phi_{xx} = (\Phi_{uu}u_x + \Phi_{vu}v_x)u_x + \Phi_u u_{xx} + (\Phi_{uv}u_x + \Phi_{vv}v_x)v_x + \Phi_v v_{xx}.$$

Vastaavasti funktion  $\phi$  toisen kertaluvun osittaisderivaatta muuttujan  $y$  suhteen on

$$(2.10) \quad \phi_{yy} = (\Phi_{uu}u_y + \Phi_{vu}v_y)u_y + \Phi_u u_{yy} + (\Phi_{uv}u_y + \Phi_{vv}v_y)v_y + \Phi_v v_{yy}.$$

Laskemalla yhtälöt 2.9 ja 2.10 yhteen saadaan

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \Phi_{uu}((u_x)^2 + (u_y)^2) + \Phi_{vv}((v_x)^2 + (v_y)^2) \\ &\quad + \Phi_u(u_{xx} + u_{yy}) + \Phi_v(v_{xx} + v_{yy}) + (\Phi_{vu} + \Phi_{uv})(u_x v_x + u_y v_y). \end{aligned}$$

Koska funktio  $f$  on oletuksen mukaan analyyttinen alueessa  $D$ , niin Lauseen 1.11 nojalla Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat, toisin sanoen  $u_x = v_y$  ja  $u_y = -v_x$ . Edelleen Lauseen 2.3 mukaan funktiot  $u$  ja  $v$  ovat harmonisia alueessa  $D$ , joten niille pätee  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  ja  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ . Siten edellä laskettu Laplacen operaattori sievenee muotoon

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \Phi_{uu}((u_x)^2 + (v_x)^2) + \Phi_{vv}((v_x)^2 + (u_x)^2) \\ &= \Delta\Phi((u_x)^2 + (v_x)^2). \end{aligned}$$

Lauseen 1.12 nojalla on

$$(u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2,$$

joten funktion  $\phi$  Laplacen operaattori voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Delta\phi = \Delta\Phi \cdot |f'(z)|^2.$$

Oletuksen mukaan funktio  $\Phi$  on harmoninen alueessa  $D'$ , joten määritelmän nojalla on  $\Delta\Phi = 0$ . Siispä saadaan

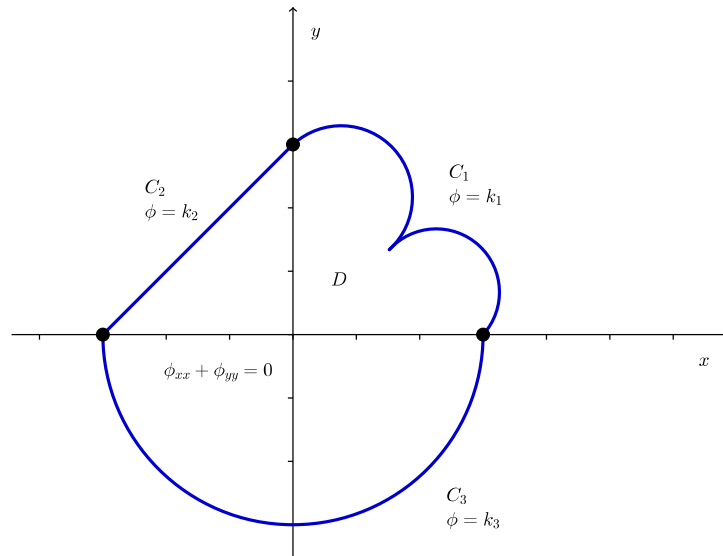
$$\Delta\phi = \Delta\Phi \cdot |f'(z)|^2 = 0.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että funktio  $\phi$  toteuttaa Laplacen yhtälön alueessa  $D$ , joten se on myös harmoninen alueessa  $D$ .  $\square$

**2.3.3. Dirichlet'n ongelman ratkaiseminen.** Lause 2.19 antaa keinon ratkaista Dirichlet'n ongelman. Olkoon  $D$  alue, jonka reuna koostuu käyristä  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Tavoitteena on löytää funktio  $\phi$ , joka on harmoninen alueessa  $D$  ja joka saa arvot  $k_1, k_2, \dots, k_n$  reunakäyrillä  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Dirichlet'n ongelman ratkaisumenetelmä koostuu seuraavista vaiheista:

- (1) Etsitään analyyttinen funktio  $f = u + iv$ , joka kuvaa alueen  $D$  yksinkertaisemmaksi alueeksi  $D'$  ja kuvaa reunakäyrät  $C_1, C_2, \dots, C_n$  käyriksi  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ .
- (2) Muutetaan käyrien  $C_1, C_2, \dots, C_n$  reunaehdot vastaamaan käyrien  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$  reunaehtoja.

- (3) Ratkaistaan uusi (ja helpompi) Dirichlet'n ongelma alueessa  $D'$ , jolloin löydetään harmoninen funktio  $\Phi$ .
- (4) Korvataan funktion  $f$  reaali- ja imaginaariosat  $u(x, y)$  ja  $v(x, y)$  muuttujilla  $u$  ja  $v$  funktiossa  $\Phi(u, v)$ . Lauseen 2.19 mukaan funktio  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  on Dirichlet'n ongelman ratkaisu alueessa  $D$ .



KUVA 2.2. Ratkaisumenetelmän vaiheissa alue  $D$

Ratkaisumenetelmän vaiheet esitetään vielä Kuvissa 2.2 ja 2.3.

ESIMERKKI 2.20. Olkoon  $D$  alue, jota rajaavat suorat  $y = x$  ja  $y = x + 2$ . Etsitään funktio  $\phi$ , joka on harmoninen alueessa  $D$  ja joka toteuttaa reunaehdot

$$\phi(x, x + 2) = -2$$

ja

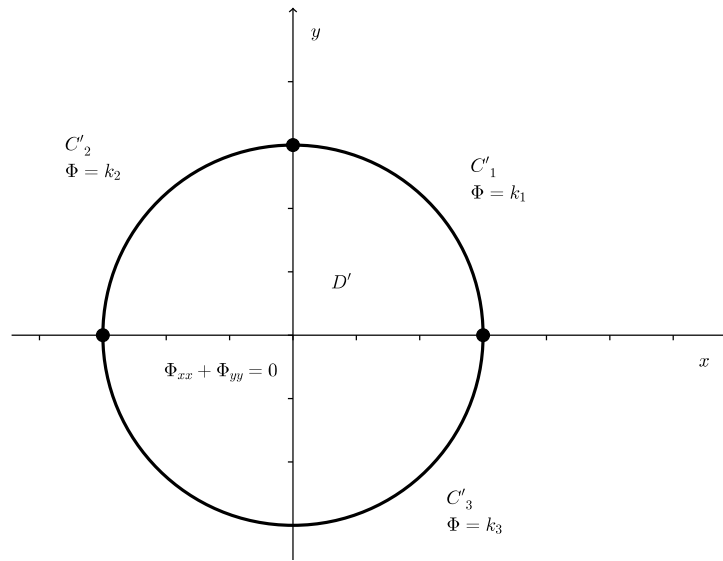
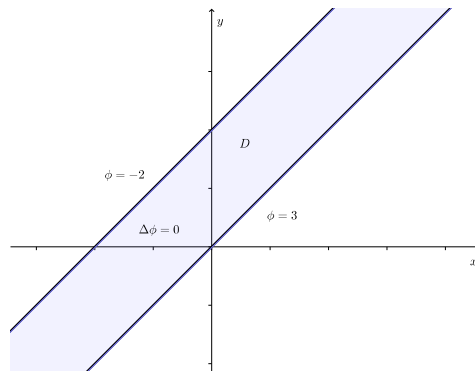
$$\phi(x, x) = 3.$$

Ratkaistaan ongelma käyttäen edellä esiteltyä neljän vaiheen ratkaisumenetelmää.

- (1) Tarkastelemalla Kuvaa 2.4 alueesta  $D$  voidaan päätellä, että alueeksi  $D'$  kannattaa valita alue, jota rajaavat suorat  $u = -1$  ja  $u = 1$ . Tällöin Dirichlet'n ongelman ratkaisu on samaa muotoa kuin Esimerkissä 2.18.

Ensimmäiseksi halutaan löytää analyyttinen kuvaus alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ . Jotta tällainen kuvaus löydetään, kierretään aluetta  $D$  ensin kulman  $\frac{\pi}{4}$  verran vastapäivään origon suhteen. Tämän kierron myötä reunasuorat  $y = x + 2$  ja  $y = x$  kuvautuvat pystysuoriksi  $u = -\sqrt{2}$  ja  $u = 0$ . Kun tätä aluetta skaalataan vielä kertomalla luvulla  $\sqrt{2}$ , saadaan alue, jota rajoittavat suorat  $u = -2$  ja  $u = 0$ . Viimeiseksi siirretään aluetta yhden yksikön verran, jotta



KUVA 2.3. Ratkaisumenetelmän vaiheissa alue  $D'$ 

KUVA 2.4. Kuva Esimerkkiin 2.20

saadaan alue, jonka reunasuorina ovat suorat  $u = -1$  ja  $u = 1$ . Muistetaan, että kierto kulman  $\frac{\pi}{4}$  verran origon suhteen vastaa kuvausta

$$R(z) = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

skaalaaminen luvulla  $\sqrt{2}$  vastaa kuvausta

$$M(z) = \sqrt{2}z$$

ja siirto yhden yksikön verran vastaa kuvausta

$$T(z) = z + 1$$

(katso [11, Section 2.3, s. 68-76]). Siispä alue  $D$  kuvautuu alueeksi  $D'$  kuvauksella

$$f(z) = T(M(R(z))) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1 = (1+i)z + 1.$$

Koska funktio  $f$  on lineaarinen, niin se on kokonainen. Ensimmäinen vaihe on siten valmis.

- (2) Muutetaan nyt alueen  $D$  reunaehdot vastaamaan alueen  $D'$  reunaehtoja. On siis selvitettävä, kuinka funktio  $f$  kuvaa reunakäyrät  $y = x$  ja  $y = x + 2$  alueessa  $D$ . Kun merkitään  $z = x + iy$ , kuvaus  $w = (1+i)z + 1$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$(2.11) \quad w = (1+i)(x+iy) + 1 = x - y + 1 + (x+y)i.$$

Yhtälöstä 2.11 nähdään, että reunakäyrän  $y = x + 2$  kuvajoukko on joukko pisteitä

$$w = u + iv = x - (x+2) + 1 + (x+(x+2))i = -1 + 2(x+1)i,$$

toisien sanoen kuvajoukko on suora  $u = -1$ . Vastaavasti reunakäyrän  $y = x$  kuvajoukko on joukko pisteitä

$$w = u + iv = x - (x) + 1 + (x+(x))i = 1 + 2xi,$$

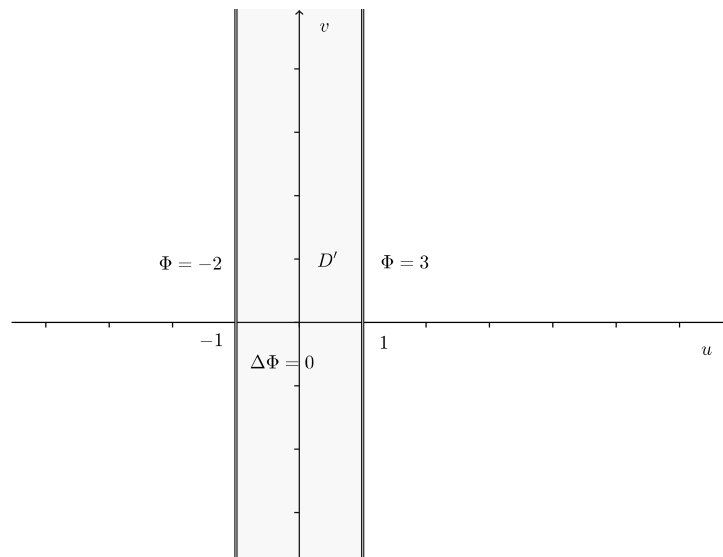
eli siis se on suora  $u = 1$ . Siten reunaehto  $\phi(x, x+2) = -2$  muuttuu ehdoksi

$$\Phi(-1, v) = -2$$

ja reunaehto  $\phi(x, x) = 3$  muuttuu ehdoksi

$$\Phi(1, v) = 3.$$

Katso Kuva 2.5.



KUVA 2.5. Esimerkin 2.20 siirretty Dirichlet'n ongelma

- (3) Dirichlet'n ongelman ratkaisu alueessa  $D'$  on samaa muotoa kuin Esimerkin 2.18 ratkaisu. Kun muuttujat  $x$  ja  $y$  korvataan muuttujilla  $u$  ja  $v$  ja merkitään  $k_0 = -2$  ja  $k_1 = 3$ , niin ratkaisu alueessa  $D'$  on

$$\Phi(u, v) = \frac{3-(-2)}{2}u + \frac{-2+3}{2} = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}.$$

- (4) Lopuksi korvataan funktion  $f$  reaali- ja imaginaariosat muuttujilla  $u$  ja  $v$  funktiossa  $\Phi$ , jolloin saadaan haluttu ratkaisu  $\phi$ . Yhtälöstä 2.11 nähdään, että funktion  $f$  reaaliosa on

$$u(x, y) = x - y + 1$$

ja imaginaariosa on

$$v(x, y) = x + y.$$

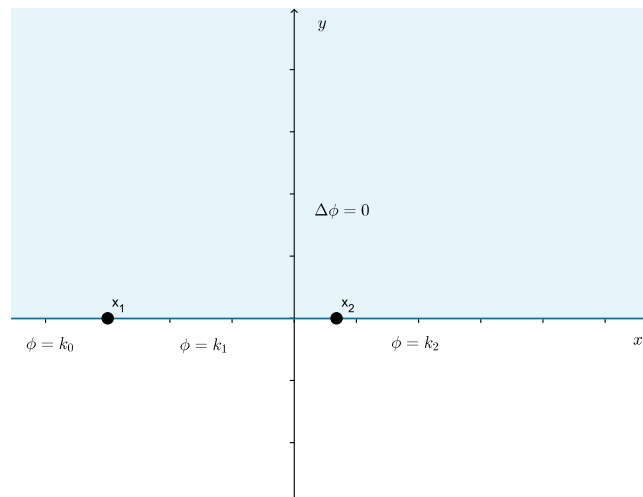
Siten funktio

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = \frac{5}{2}(x - y + 1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3$$

on eräs Dirichlet'n ongelman ratkaisu alueessa  $D$ . Vastauksen voi tarkistaa tutkimalla, toteuttaako funktio  $\phi$  Laplacen yhtälön ja reunaehdot  $\phi(x, x) = 3$  ja  $\phi(x, x + 2) = -2$ .

Esimerkissä 2.20 käytettyä tapaa ratkaista Dirichlet'n ongelma voidaan soveltaa aina, kun aluetta  $D$  rajaa kaksi yhdensuuntaista suoraa. Tällaisten ongelmien ratkaisu perustuu siis siihen, että löydetään sopiva lineaarinen funktio, joka kuvaa alueen  $D$  reunasuorat Kuvan 2.1 maukaisen alueen reunasuoriksi.

Tarkastellaan seuraavaksi Dirichlet'n ongelmaa puolitasossa. Olkoon  $D$  ylempi puolitaso  $y > 0$ , ja olkoot  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  erillisiä pisteitä reaaliakselilla (joka on alueen  $D$  reuna). Useissa sovelluksissa halutaan tietää Dirichlet'n ongelman ratkaisu



KUVA 2.6. Dirichlet'n ongelma ylemmässä puolitasossa

$\phi$  alueessa  $D$  siten, että ratkaisu toteuttaa reunaehdot

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= k_0, \text{ kun } x < x_1, \\ \phi(x, 0) &= k_1, \text{ kun } x_1 < x < x_2, \\ \phi(x, 0) &= k_2, \text{ kun } x_2 < x < x_3, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \phi(x, 0) &= k_n, \text{ kun } x_n < x.\end{aligned}$$

Katso Kuva 2.6. Jos merkitään  $z = x + iy$ , niin tällaisen Dirichlet'n ongelman ratkaisu on muotoa

$$(2.12) \quad \phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n (k_{i-1} - k_i) \text{Arg}(z - x_i),$$

missä  $\text{Arg}(z - x_i)$  on kompleksiluvun  $z - x_i$  pääargumentti. Tämä ratkaisufunktio johdetaan myöhemmin kappaleessa 3.5.1.

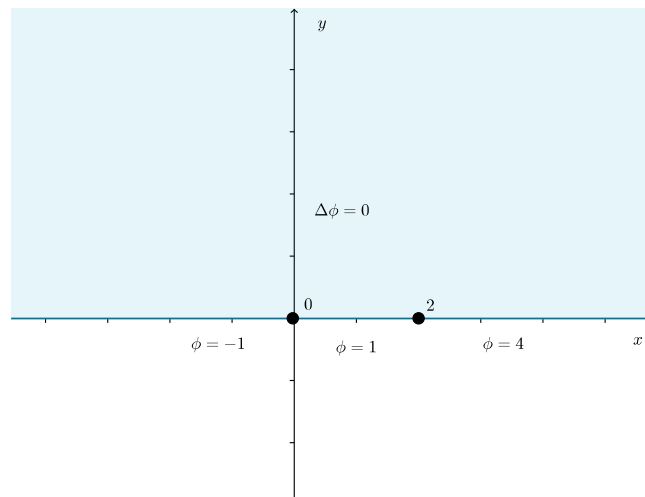
ESIMERKKI 2.21. Tutkitaan Dirichlet'n ongelmaa, jossa halutaan löytää funktio  $\phi$  siten, että

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ , ja jolle pätee

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 4, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

Katso Kuva 2.7.



KUVA 2.7. Dirichlet'n ongelma ylemmässä puolitasossa

Tämän ongelman eräs ratkaisu on samaa muotoa kuin yhtälö 2.12, kun valitaan  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $k_0 = -1$ ,  $k_1 = 1$  ja  $k_2 = 4$ :

$$(2.13) \quad \phi(x, y) = 4 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Arg}(z) - \frac{3}{\pi} \operatorname{Arg}(z - 2).$$

Nyt riittää osoittaa, että funktio  $\phi$  on todellakin tämän Dirichlet'n ongelman eräs ratkaisu. Näytetään ensin, että funktio  $\phi$  on harmoninen alueessa  $y > 0$ . Huomataan, että funktio  $\phi$  on funktion

$$\Omega(z) = 4i - \frac{2}{\pi} \operatorname{Ln}(z) - \frac{3}{\pi} \operatorname{Ln}(z - 2)$$

imaginaariosa. Koska funktio  $\Omega$  on analyyttinen alueessa  $y > 0$ , niin funktio  $\phi$  on harmoninen tässä alueessa. Näytetään sitten, että funktio  $\phi$  toteuttaa Kuvassa 2.7 esitetyt reunaehdot. Jos  $-\infty < x < 0$  ja  $y = 0$ , niin piste  $z = x + iy$  on negatiivisella reaaliakselilla ja siten sen pääargumentti on  $\operatorname{Arg}(z) = \pi$ . Tässä tapauksessa myös piste  $z - 2$  on negatiivisella reaaliakselilla, joten senkin pääargumentti on  $\operatorname{Arg}(z - 2) = \pi$ . Sijoittamalla nämä arvot yhtälöön 2.13 saadaan

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi} \pi - \frac{3}{\pi} \pi = -1.$$

Jos  $0 < x < 2$  ja  $y = 0$ , niin piste  $z$  on positiivisella reaaliakselilla, kun taas piste  $z - 2$  on negatiivisella reaaliakselilla. Tällöin pääargumentit ovat  $\operatorname{Arg}(z) = 0$  ja  $\operatorname{Arg}(z - 2) = \pi$ . Sijoittamalla nämä arvot yhtälöön 2.13 saadaan

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi} \cdot 0 - \frac{3}{\pi} \pi = 1.$$

Jos  $2 < x < \infty$  ja  $y = 0$ , niin tällöin pisteet  $z$  ja  $z - 2$  ovat positiivisella reaaliakselilla, jolloin molempien pisteiden pääargumentit ovat nolla eli  $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z - 2) = 0$ . Siten saadaan

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi} \cdot 0 - \frac{3}{\pi} \cdot 0 = 4.$$

Koska reunaehdot toteutuvat, niin funktio  $\phi$  on annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu.

**ESIMERKKI 2.22.** Ratkaistaan Dirichlet'n ongelma alueessa  $D$ , missä  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  ja  $y > 0$ , ja reunaehdot ovat

$$\phi(-\frac{\pi}{2}, y) = 40, \quad \phi(\frac{\pi}{2}, y) = 10, \quad y > 0$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 20, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 50, & 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ratkaistaan ongelma käyttäen aikaisemmin esiteltyä neljän vaiheen ratkaisumenetelmää.

- (1) Näytetään, että funktio  $w = \sin z$  kuvaa alueen  $D$  ylemmäksi puolitasoksi  $D'$ . Tätä varten tutkitaan, miten funktio  $w = \sin z$  kuvaa pystysuorat suorat  $x = a$ , kun  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ . Tarkastellaan tilannetta, kun  $-\infty < y < \infty$ , ja päätellään lopussa testipisteen avulla alueen  $y > 0$  kuvautuminen. Oletetaan aluksi, että  $a \neq 0$ .

Tiedetään, että kompleksiarvoinen sinifunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ja reaaliarvoiset hyperboliset sini- ja kosinifunktiot ovat määritelmiensä mukaan

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

ja

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Kun pistettä  $z$  merkitään  $z = x + iy$ , niin sinifunktion lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= \sin x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Tällöin suoran  $x = a$  kuva on

$$u = \sin a \cosh y, \quad v = \cos a \sinh y, \quad -\infty < y < \infty.$$

Koska oletuksen mukaan on  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$  ja  $a \neq 0$ , niin tällöin on  $\sin a \neq 0$  ja  $\cos a \neq 0$ . Siten edellä olleista yhtälöistä saadaan

$$\cosh y = \frac{u}{\sin a}$$

ja

$$\sinh y = \frac{v}{\cos a}.$$

Lisäksi tiedetään, että hyperbolisille funktioille pätee

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1,$$

joten nyt on oltava

$$\left( \frac{u}{\sin a} \right)^2 - \left( \frac{v}{\cos a} \right)^2 = 1.$$

Tämän yhtälön kuva koostuu pisteiden  $(\pm \sin a, 0)$  kautta kulkevista hyperbeleistä sekä vinoista asymptoteista

$$v = \pm \left( \frac{\cos a}{\sin a} \right) u.$$

Koska piste  $(a, 0)$  on suoralla  $x = a$ , niin pisteen  $(\sin a, 0)$  on oltava suoran kuvajoukolla. Siten funktio  $w = \sin z$  kuvaa suoran  $x = a$ , kun  $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$  ja  $a \neq 0$ , hyperbelin haaraksi, joka kulkee pisteen  $(\sin a, 0)$  kautta. Koska sinifunktiolle on  $\sin(-z) = -\sin z$  kaikille pisteille  $z$ , niin tällöin myös suoran  $x = -a$  kuva on hyperbelin haara, joka kulkee pisteen  $(-\sin a, 0)$  kautta.

Suoran  $x = 0$  kuvautumista ei voida päätellä yhtälöstä

$$\left( \frac{u}{\sin a} \right)^2 - \left( \frac{v}{\cos a} \right)^2 = 1.$$

Yhtälöistä

$$u = \sin a \cosh y, \quad v = \cos a \sinh y \quad \text{ja} \quad -\infty < y < \infty$$

voidaan kuitenkin päätellä, että suora  $x = 0$  kuvautuu imaginaariakseliksi  $u = 0$ .

Siispä funktio  $w = \sin z$  kuvaa äärettömän pystysuoran liuskan, missä  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  ja  $-\infty < y < \infty$ , koko tasoksi.

Selvitetään nyt, miten alue, missä  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  ja  $y > 0$ , kuvautuu. Valitaan testipisteeksi  $z = 1 + i$ . Tällöin yhtälöiden

$$u = \sin a \cosh y \text{ ja } v = \cos a \sinh y$$

avulla nähdään, että

$$u = \sin 1 \cdot \cosh 1 > 0$$

ja

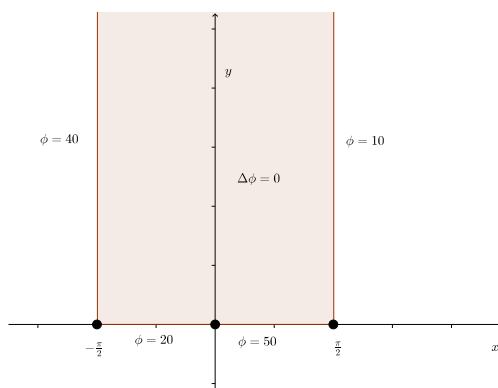
$$v = \cos 1 \cdot \sinh 1 > 0.$$

Siispä kuvajoukko eli alue  $D'$  on ylempi puolitaso. Funktio  $w = \sin z$  on siis etsitty kuvaus.

Koska  $\sin z$  on kokonainen funktio, niin kuvaus  $w = \sin z$  on analyyttinen kuvaus alueesta  $D$  alueeseen  $D'$  ja on siten surjektio.

(2) Kohdan (1) päättelyiden nojalla tiedetään, että funktio  $w = \sin z$  kuvaa

- puolisuoran  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$  puolisuoraksi  $v = 0$ ,  $u < -1$ ,
- janan  $y = 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  janaksi  $v = 0$ ,  $-1 < u < 0$ ,
- janan  $y = 0$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  janaksi  $v = 0$ ,  $0 < u < 1$  ja
- puolisuoran  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$  puolisuoraksi  $v = 0$ ,  $u > 1$ .



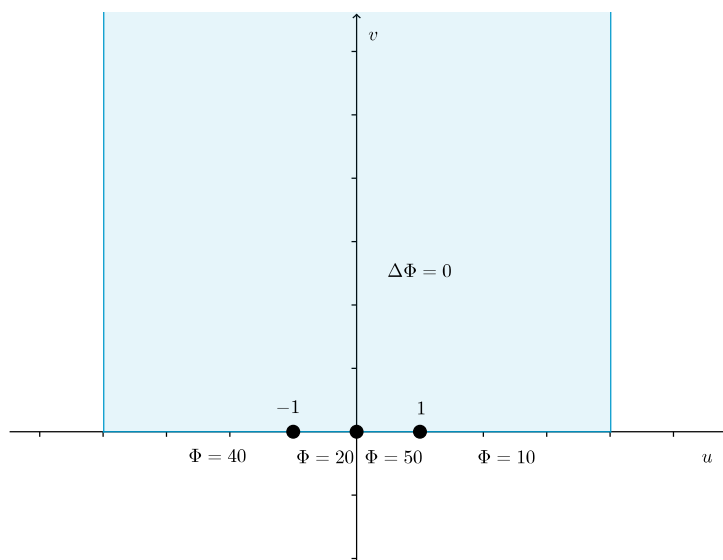
KUVA 2.8. Esimerkin 2.22 alue  $D$

Funktio  $w = \sin z$  siis siirtää Dirichlet'n ongelman alueesta  $D$  (Kuva 2.8) alueeseen  $D'$  eli puolitasoon  $v > 0$  (Kuva 2.9). Siten siirretyn Dirichlet'n ongelman tavoitteena on löytää funktio  $\Phi$  siten, että

$$\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0,$$

ja jolle pätee

$$\Phi(u, 0) \begin{cases} 40, & -\infty < u < -1 \\ 20, & -1 < u < 0 \\ 50, & 0 < u < 1 \\ 10, & 1 < u < \infty. \end{cases}$$

KUVA 2.9. Esimerkin 2.22 alue  $D'$ 

- (3) Siirretyn Dirichlet'n ongelman ratkaisu on samaa muotoa kuin yhtälö 2.13, kun muuttujat  $x$ ,  $y$  ja  $z$  korvataan muuttujilla  $u$ ,  $v$  ja  $w$ . Kun asetetaan  $k_0 = 40$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 50$ ,  $k_3 = 10$ ,  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 0$  ja  $u_3 = 1$ , saadaan

$$\Phi(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi} \operatorname{Arg}(w + 1) - \frac{30}{\pi} \operatorname{Arg}(w) + \frac{40}{\pi} \operatorname{Arg}(w - 1).$$

- (4) Dirichlet'n ongelman ratkaisu  $\phi$  alueessa  $D$  löydetään korvaamalla edellä ratkaistun funktion  $\Phi$  muuttujat  $u$  ja  $v$  analyyttisen funktion  $f(z) = \sin z$  reaali- ja imaginaariosilla. Koska sinifunktio ja funktio  $w$  kirjoitetaan muodossa

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

ja

$$w = u + iv,$$

niin on oltava  $w = \sin z$ . Siten funktio

$$\phi(x, y) = 10 + \frac{20}{\pi} \operatorname{Arg}(\sin z + 1) - \frac{30}{\pi} \operatorname{Arg}(\sin z) + \frac{40}{\pi} \operatorname{Arg}(\sin z - 1)$$

on eräs Dirichlet'n ongelman ratkaisu alueessa  $D$ .

Funktio  $\phi$  on mahdollista kirjoittaa myös muuttujien  $x$  ja  $y$  avulla, kunhan reaalista arkustangenttia käytetään huolellisesti. Jos siis arkustangentin arvot ovat lukujen 0 ja  $\pi$  väliltä, niin tällöin funktion  $\phi$  lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\phi(x, y) = 10 + \frac{20}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y + 1}\right) - \frac{30}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y}\right) + \frac{40}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y - 1}\right).$$

Ylemmässä puolitasossa määriteltyyn Dirichlet'n ongelmaan palataan vielä myöhemmin kappaleessa 3.5.1.



## Konformikuvaukset

Tässä luvussa tutustutaan konformikuvauksiin. Kuten harmonisilla funktioilla, myös konformikuvauksilla on suuri rooli fysiikassa ja tekniikassa. Konformikuvauksilla on tärkeitä sovelluksia Laplacen yhtälöön liittyvissä reuna-arvo-ongelmissa. Tämän vuoksi luvun loppupuolella keskitytään Dirichlet'n ongelman ratkaisemiseen erityisesti puolitasossa, kiekossa ja monikulmiossa.

Luku jakautuu kuuteen kappaleeseen, joissa käsitellään yleisesti konformikuvauksia ja niiden ominaisuuksia, laajennettua kompleksitasoa, lineaarisia rationaalikuvauksia ja kaksoissuhdetta, Schwarz-Christoffelin kaavaa sekä Poissonin integrointikaavoja ylemmässä puolitasossa sekä yksikkökiekossa. Tämän tutkielman Poissonin integrointikaavassa siis rajoitutaan yksikkökiekkoon, mutta tarkastelu olisi mahdollista laajentaa pienin muutoksin myös laajempaan kiekkoon. Luvun lopussa tehdään vielä yhteenveto Dirichlet'n ongelman ratkaisemisesta.

### 3.1. Konformikuvaukset

Tässä kappaleessa määritellään konformikuvaukset ja selvitetään, mitä tarkoitetaan kahden sileän käyrän välisellä kulman suuruudella ja suunnalla. Näiden tietojen avulla osoitetaan muun muassa, että analyyttiset funktiot, joiden derivaatta on nollasta eroava, ovat konformisia. Kappaleen loppupuolella pohditaan konformikuvausten yhteyttä Dirichlet'n ongelmaan. Jotta Dirichlet'n ongelman ratkaisemista voisi hieman helpottaa, tutkielman loppuun on koottu liitteeksi lista, jossa on joitakin tunnettuja alueiden välisiä konformikuvauksia. Tällaisten kuvausten olemassaolon todistamiseksi tutustutaan lyhyesti myös Riemannin kuvauslauseeseen.

**MÄÄRITELMÄ 3.1.** Olkoon  $D$  alue, piste  $z_0 \in D$  ja funktio  $f$  alueessa  $D$  määritelty kompleksikuvaus. Sanotaan, että funktio  $f$  on *konforminen pisteessä*  $z_0$ , jos se säilyttää kahden toisiaan leikkaavan, sileän käyrän välisen kulman suuruuden ja suunnan.

Kuvausta  $f$ , joka on konforminen jokaisessa joukon  $D$  pisteessä  $z_0 \in D$ , kutsutaan *konformiseksi joukossa*  $D$ . Jos edellä mainittuun oletukseen lisätään vielä oletus funktion  $f$  injektiivisyydestä, niin funktiota  $f$  kutsutaan *konformikuvaukseksi* alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ . Koska funktion  $f$  kuvajoukko on joukko  $D'$ , niin se on bijektio.

Sanomalla, että funktio  $f$  on konforminen (pisteessä  $z_0$ ) tarkoitetaan vain, että funktio  $f$  on lokaalisti injektio. Konformikuvaus viittaa kielenkäytössämme puolestaan globaaliin injektioon.

**ESIMERKKI 3.2.** Lineaarinen funktio  $f(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ , on selvästi konforminen jokaisessa kompleksitason pisteessä.

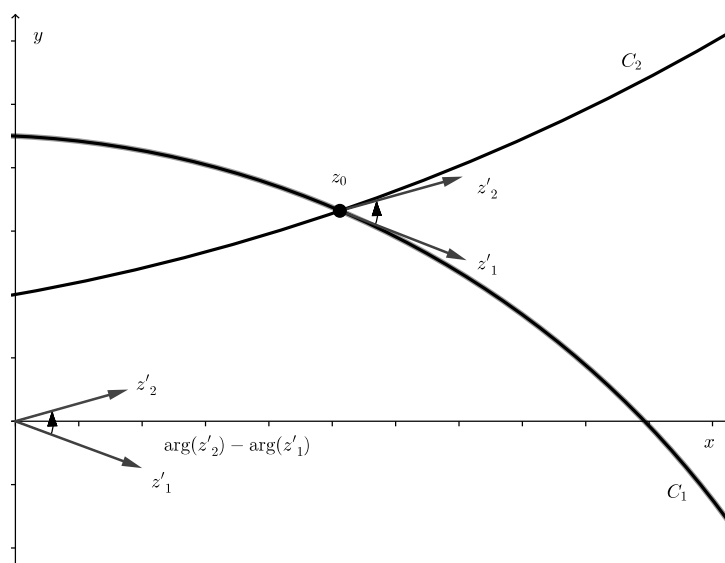
Määritelmää 3.1 käytetään harvoin osoittamaan, että kompleksikuvaus on konforminen. Seuraavassa lauseessa tullaan todistamaan käytetympi tapa osoittaa funktio

konformiseksi. Ennen sitä on määriteltävä kahden sileän käyrän välisen kulman suuruus ja suunta.

Olkoot  $C_1$  ja  $C_2$  sileitä käyriä, jotka leikkaavat pisteessä  $z_0$ . Olkoot lisäksi  $z_1(t)$  ja  $z_2(t)$  käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  parametrisoinnit siten, että

$$z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0.$$

Koska käyrä  $C_1$  on sileä, niin sen tangenttivektori pisteessä  $z_0$ , merkitään  $z'_1 = z'_1(t_0)$ , on nolasta eroava. Siten argumentti  $\arg(z'_1)$  on määritelty ja se vastaa paikkavektorin  $z'_1$  ja positiivisen  $x$ -akselin välistä kulmaa. Vastaavasti käyrän  $C_2$  tangenttivektori  $z'_2 = z'_2(t_0)$  on nolasta eroava ja argumentti  $\arg(z'_2)$  on sama kuin paikkavektorin  $z'_2$  ja positiivisen  $x$ -akselin välinen kulma. Kuvaa 3.1 tarkastelemalla nähdään, että



KUVA 3.1. Käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma

käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma  $\theta$  on arvoltaan sama kuin luku

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1)$$

välillä  $[0, \pi]$ , jos paikkavektoria  $z'_1$  voidaan kiertää kulman  $\theta$  verran vastapäivään origon suhteen paikkavektoriksi  $z'_2$ . Jos tarvitaan kiertoa myötäpäivään, niin tällöin kulma  $-\theta$  on sama kuin luku  $\arg(z'_2) - \arg(z'_1)$  välillä  $(-\pi, 0)$ . Molemmissa tapauksissa luku  $\arg(z'_2) - \arg(z'_1)$  antaa sekä käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välisen kulman suuruuden että suunnan pisteessä  $z_0$ .

**LAUSE 3.3.** *Olkoot  $D$  alue, piste  $z_0 \in D$  ja funktio  $f$  analyyttinen alueessa  $D$ . Jos  $f'(z_0) \neq 0$ , niin tällöin funktio  $f$  on konforminen pisteessä  $z_0$ .*

**TODISTUS.** Oletetaan, että funktio  $f$  on analyyttinen alueessa  $D$ ,  $z_0 \in D$  ja  $f'(z_0) \neq 0$ . Olkoot  $C_1$  ja  $C_2$  sileitä käyriä alueessa  $D$  ja  $z_1(t)$  ja  $z_2(t)$  niiden parametrisoinnit siten, että

$$z_1(t) = z_2(t) = z_0.$$

Oletetaan lisäksi, että funktio  $f$  kuvaa käyrät  $C_1$  ja  $C_2$  käyriksi  $C'_1$  ja  $C'_2$ . Halutaan näyttää, että käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma  $\theta$  pisteessä  $z_0$  on yhtä suuri ja samansuuntainen kuin käyrien  $C'_1$  ja  $C'_2$  välinen kulma  $\phi$  pisteessä  $f(z_0)$ .

Voidaan olettaa (tarvittaessa numeroimalla uudelleen käyrät  $C_1$  ja  $C_2$ ), että vektori  $z'_1 = z'_1(t_0)$  voidaan kiertää kulman  $\theta$  verran vastapäivään origon suhteen vektoriksi  $z'_2 = z'_2(t_0)$ . Siten kulman  $\theta$  suuruus on yksikäsitteinen luku

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1)$$

välillä  $[0, \pi]$ .

Käyrien  $C'_1$  ja  $C'_2$  parametrisoinnit ovat

$$w_1(t) = f(z_1(t))$$

ja

$$w_2(t) = f(z_2(t)).$$

Ketjusäännön nojalla käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  tangenttivektorit  $w'_1$  ja  $w'_2$  ovat

$$w'_1 = w'_1(t_0) = f'(z_1(t_0)) \cdot z'_1(t_0) = f'(z_0) \cdot z'_1$$

ja

$$w'_2 = w'_2(t_0) = f'(z_2(t_0)) \cdot z'_2(t_0) = f'(z_0) \cdot z'_2.$$

Koska käyrät  $C_1$  ja  $C_2$  ovat sileitä, niin vektorit  $z'_1$  ja  $z'_2$  ovat nolasta eroavia. Lisäksi oletuksen mukaan  $f'(z_0) \neq 0$ , joten myös tangenttivektorit  $w'_1$  ja  $w'_2$  ovat nolasta eroavia. Tällöin käyrien  $C'_1$  ja  $C'_2$  välinen kulma  $\phi$  pisteessä  $f(z_0)$  on

$$\arg(w'_2) - \arg(w'_1) = \arg(f'(z_0) \cdot z'_2) - \arg(f'(z_0) \cdot z'_1).$$

Argumentin laskusääntöjen mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \arg(f'(z_0) \cdot z'_2) - \arg(f'(z_0) \cdot z'_1) &= \arg(f'(z_0)) + \arg(z'_2) - [\arg(f'(z_0)) + \arg(z'_1)] \\ &= \arg(z'_2) - \arg(z'_1). \end{aligned}$$

Tällä lausekkeella on yksikäsitteinen arvo välillä  $[0, \pi]$ , olkoon se nimeltään  $\theta$ . Siten kulmat  $\theta$  ja  $\phi$  ovat yhtäsuuret eli  $\theta = \phi$ . Siispä funktio  $f$  on konformikuvaus pisteessä  $z_0$ .  $\square$

Lauseen 3.3 nojalla on suhteellisen helppoa määrittää, missä analyyttinen funktio on konformikuvaus.

**ESIMERKKI 3.4.** (1) Lauseen 3.3 mukaan kokonainen funktio  $f(z) = e^z$  on konforminen jokaisessa kompleksitason pisteessä, koska  $f'(z) = e^z \neq 0$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ .

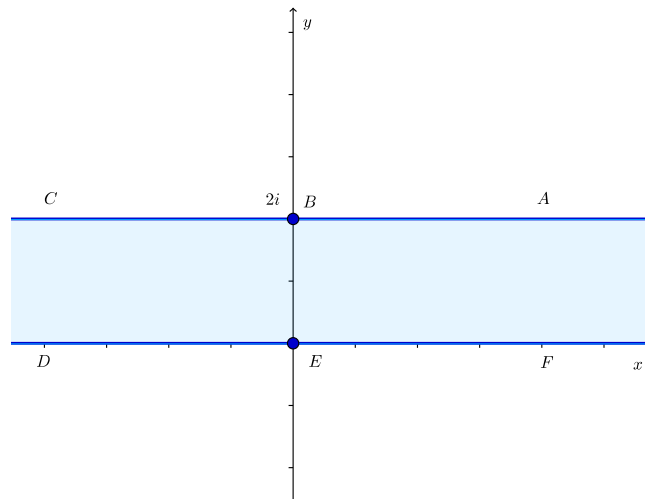
(2) Lauseen 3.3 mukaan kokonainen funktio  $g(z) = z^2$  on konforminen kaikilla pisteillä  $z$ ,  $z \neq 0$ , koska  $g'(z) = 2z \neq 0$ .

Esimerkin 3.4 kohdan (2) funktio  $g(z) = z^2$  ei ole konformikuvaus pisteessä  $z_0 = 0$ , koska  $g'(0) = 0$ . Yleisesti, jos kompleksinen funktio  $f$  on analyyttinen pisteessä  $z_0$  ja  $f'(z_0) = 0$ , niin pistettä  $z_0$  sanotaan funktion  $f$  *kriittiseksi pisteeksi*. Analyyttiset funktiot eivät siis ole konformisia kriittisissä pisteissä.

Luvussa 2.3 esiteltiin menetelmä, jolla voidaan ratkaista tietyntyyppiset reuna-arvo-ongelmat kompleksiarvoisten funktioiden avulla. Menetelmän mukaan Dirichlet'n ongelma monimutkaisessa alueessa  $D$  voidaan ratkaista etsimällä analyyttinen kuvaus alueesta  $D$  yksinkertaisempaan alueeseen  $D'$ , jossa kyseinen Dirichlet'n ongelma on jo ratkaistu. Tämän luvun lopussa tullaan esittelemään vastaavanlainen Dirichlet'n ongelman ratkaisumenetelmä, jossa puolestaan käytetään konformikuvauksia. Tavoitteena on löytää konformikuvaus alueesta  $D$  yksinkertaisempaan alueeseen  $D'$ , jossa kyseisellä reuna-arvo-ongelmalla on ratkaisu. Tällaisissa tehtävissä voi käyttää apuna Liitteessä 1 olevaa listaa, jossa on joitakin alueiden välisiä konformikuvauksia [11, Appendix III].

Liitteen 1 listassa konformikuvaukset on järjestetty seuraavasti: alkeiskuvaukset (E-1 - E-9), puolitason kuvaukset (H-1 - H-6), kuvaukset ympyränmutoisiin alueisiin (C-1 - C-5) ja sekalaiset kuvaukset (M-1 - M-10). Huomataan, että joissakin tapauksissa haluttu kuvaus löytyy listasta sellaisenaan, kun taas joissakin tilanteissa tarvitaan yksi tai useampi kuvaus peräkkäin. On tärkeää huomata myös se, että kun puhutaan konformikuvauksesta alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ , niin kuvaukselta vaaditaan, että se on konfominen vain alueen  $D$  sisäpisteissä.

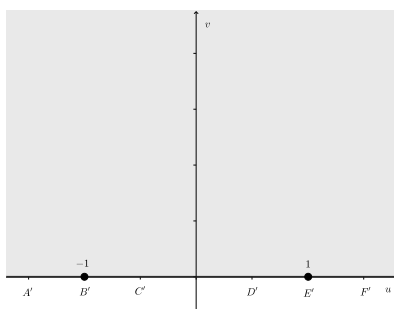
**ESIMERKKI 3.5.** Etsitään Liitettä 1 apuna käyttäen konformikuvaus rajoittamattomasta, horisontaalisesta liuskasta, missä  $0 \leq y \leq 2$  ja  $-\infty < x < \infty$ , ylempään puolitasoon, missä  $v \geq 0$ . Kuinka tämä kuvaus kuvaa negatiivisen  $x$ -akselin?



KUVA 3.2. Esimerkin 3.5 kuva horisontaalisesta liuskasta  $0 \leq y \leq 2$

Liitteen 1 mukaan kuvaus H-2 on kuvaus rajoittamattomasta, horisontaalisesta liuskasta ylempään puolitasoon. Asettamalla  $a = 2$  saadaan halutuksi kuvaukseksi

$$w = e^{\frac{\pi z}{2}}.$$



KUVA 3.3. Liuskan kuvautuminen Esimerkissä 3.5

Kuvauksesta H-2 nähdään myös, että pisteet  $D$  ja  $E = 0$  negatiivisella  $x$ -akselilla kuvautuvat pisteiksi  $D'$  ja  $E' = 1$  positiivisella  $u$ -akselilla. Huomioimalla näiden pisteiden suhteelliset paikat voidaan päätellä, että funktio

$$w = e^{\frac{\pi z}{2}}$$

kuvaa negatiivisen  $x$ -akselin väliksi  $(0, 1]$   $u$ -akselilla. Katso Kuvat 3.2 ja 3.4. Vastaavat päätelmät voitaisiin tehdä myös käyttämällä parametrisointia.

ESIMERKKI 3.6. Etsitään Liitettä 1 apuna käyttäen konformikuvaus rajoittamattomasta, horisontaalisesta liuskasta, missä  $0 \leq y \leq 2$  ja  $-\infty < x < \infty$ , yksikkökiekokseen  $|w| \leq 1$ . Kuinka tämä kuvaus kuvaa negatiivisen  $x$ -akselin?

Liitteestä 1 ei löydy kuvausta, joka kuvaisi rajoittamattoman, horisontaalisen liuskan yksikkökiekoksi. Siten on muodostettava tällainen konformikuvaus yhdistämällä kaksi listassa esiintyvää kuvausta. Edellä olleen Esimerkin 3.5 mukaan kuvaus

$$f(z) = e^{\frac{\pi z}{2}}$$

kuvaa rajoittamattoman, horisontaalisen liuskan ylemmäksi puolitasoksi. Lisäksi Liitteen 1 kuvaus C-4, missä

$$g(z) = \frac{i-z}{i+z},$$

kuvaa ylemmän puolitason yksikkökiekoksi. Siten näiden kahden kuvauksen yhdistetty kuvaus

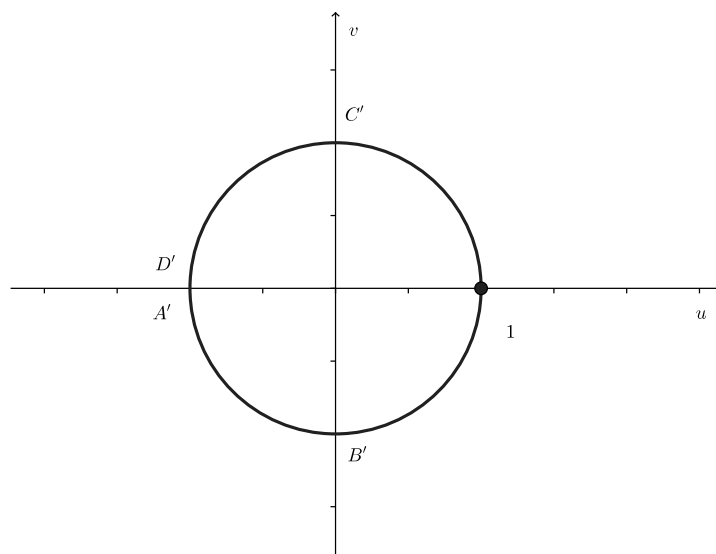
$$w = g(f(z)) = \frac{i - e^{\frac{\pi z}{2}}}{i + e^{\frac{\pi z}{2}}}$$

kuvaa liuskan, missä  $0 \leq y \leq 2$  ja  $-\infty < x < \infty$ , yksikkökiekoksi  $|w| \leq 1$ .

Kuten Esimerkissä 3.5 havaittiin, niin kuvaus  $f$  kuvaa negatiivisen reaaliakselin väliksi  $(0, 1]$  reaaliakselilla. Tarkastelemalla kuvausta C-4 huomataan, että väli pisteestä 0 pisteeseen  $C = 1$  kuvautuu yksikköympyrän  $|w| = 1$  kehäksi pisteestä 1 pisteeseen  $C' = i$ . Siispä kuvaus

$$w = \frac{i - e^{\frac{\pi z}{2}}}{i + e^{\frac{\pi z}{2}}}$$

kuvaa negatiivisen reaaliakselin yksikköympyrän kehäksi pisteestä 1 pisteeseen  $i$ .



KUVA 3.4. Puolitason kuvautuminen yksikköympyräksi Esimerkissä 3.6

Herää kysymys, onko tällainen konformikuvaus alueesta  $D$  yksinkertaisempaan alueeseen  $D'$  aina olemassa. Matemaatikko Bernhard Riemannin (1826-1866) nimeä kantava lause antaa vastauksen tähän kysymykseen.

**LAUSE 3.7.** (Riemannin kuvauslause) Olkoon  $D \neq \mathbb{C}$  yhdesti yhtenäinen alue ja  $z_0 \in D$  jokin alueen  $D$  piste. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus  $f: D \rightarrow B(0, 1)$  siten, että  $f(z_0) = 0$  ja  $f'(z_0) > 0$ .

TODISTUS. [2, s. 170-173]

□

Riemannin kuvauslause siis kertoo, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue on konformisesti kiekko. Huomataan, että Riemannin kuvauslause on olemassaolotodistus, joten se ei kerro, kuinka kuvauksen voi löytää. Myöhemmin tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun rationaalifunktioita, lineaarisia rationaalikuvauksia, joiden avulla voidaan konstruoida eräitä konformikuvauksia. Sitä ennen määritellään lyhyesti laajennettu kompleksitaso.

### 3.2. Laajennettu kompleksitaso

Usein on hyödyllistä lisätä kompleksitasoon  $\mathbb{C}$  äärettömyyspiste  $\infty \notin \mathbb{C}$ . Näin määriteltyä joukkoa

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

kutsutaan *laajennetuksi kompleksitasoksi*. Laajennetussa kompleksitasossa pätevät vastaavat algebralliset laskutoimitukset kuin laajennetussa reaalilukujoukossa:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty, & \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, & \text{kun } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0, & \text{kun } z \in \mathbb{C} \\ \frac{z}{0} = \infty, & \text{kun } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Laskutoimituksia  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  ja  $\infty \cdot \infty$  ei ole määritelty eikä niitä siten saa käyttää.

### 3.3. Lineaariset rationaalikuvaukset

Monissa Laplacen yhtälöön liittyvissä reuna-arvo-ongelmissa halutaan löytää konformikuvaus, joka kuvaa kiekon puolitasoksi  $v \geq 0$ . Tällaisen kuvauksen täytyisi siis kuvata kiekon ympyränmutoinen reuna puolitason reunasuoraksi. Alkeisimpia konformikuvauksia, jotka kuvaavat ympyrät suoriksi (ja päin vastoin), kutsutaan lineaarisiksi rationaalikuvauksiksi. Tässä osiossa määritellään lineaariset rationaalikuvaukset ja tutustutaan niiden ominaisuuksiin. Kappaleen lopussa opetellaan muodostamaan tällaisia kuvauksia, kun tiedetään, miten kolme annetun alueen reunapistettä kuvautuvat.

**MÄÄRITELMÄ 3.8.** Jos  $a, b, c$  ja  $d$  ovat kompleksilukuja siten, että  $ad - bc \neq 0$ , niin kompleksifunktiota

$$(3.1) \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

kutsutaan *lineaarisesksi rationaalikuvaukseksi*.

Lineaarista rationaalikuvauksista käytetään myös nimeä *Möbius-kuvaus*. Jos vakio  $c = 0$ , niin yhtälön 3.1 kuvaus  $T$  on lineaarikuvaus. Siten lineaarikuvaus on lineaaristen rationaalikuvauksien erikoistapaus. Jos taas vakio  $c \neq 0$ , niin yhtälö 3.1 voidaan kirjoittaa muodossa

$$(3.2) \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c} \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}.$$

Asettamalla  $A = \frac{bc-ad}{c}$  ja  $B = \frac{a}{c}$  nähdään, että yhtälön 3.2 lineaarikuvaus  $T$  voidaan kirjoittaa yhdistettynä kuvauksena

$$T(z) = f \circ g \circ h(z),$$

missä  $f(z) = Az + B$  ja  $h(z) = cz + d$  ovat lineaarisia funktioita ja  $g(z) = \frac{1}{z}$  on identtisen funktion käänteisfunktio.

Lineaarinen rationaalikuvaus  $T$  on määritelty alueessa  $D$ , missä  $z \neq -\frac{d}{c}$ . Lisäksi, koska kuvauksen  $T$  derivaatta on

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2},$$

niin Lauseen 3.3 ja vaatimuksen  $ad - bc \neq 0$  mukaan lineaariset rationaalikuvaukset ovat konformisia määrittelyalueissaan. Vaatimus  $ad - bc \neq 0$  takaa myös sen, että kuvaus  $T$  on yksikäsitteinen funktio määrittelyalueessaan.

Jos vakio  $c \neq 0$ , niin yhtälö 3.1 voidaan kirjoittaa muodossa

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(z+\frac{b}{a})}{z+\frac{d}{c}} = \frac{\phi(z)}{z-(-\frac{d}{c})},$$

missä

$$\phi(z) = \frac{a}{c} \left( z + \frac{b}{a} \right).$$

Koska oletuksen mukaan on  $ad - bc \neq 0$ , niin tällöin on

$$\phi\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0$$

ja siten piste  $z = -\frac{d}{c}$  on kuvauksen  $T$  yksinkertainen napa (katso [11, Theorem 6.12, s. 339]).

Kun vakio  $c \neq 0$  eli kun kuvaus  $T$  ei ole lineaarinen funktio, niin kuvausta  $T$  kannattaa tarkastella laajennetun kompleksitason  $\overline{\mathbb{C}}$  kuvauksena. Koska kuvaus  $T$

on määritelty kaikille muille laajennetun kompleksitason pisteille paitsi navalle  $z = -\frac{d}{c}$  ja ideaalipisteelle  $\infty$ , niin kuvauksen  $T$  määritelmä tulee laajentaa käsittämään myös nämä pisteet. Tämän vuoksi tarkastellaan kuvauksen  $T$  raja-arvoja, kun piste  $z$  lähestyy napaa ja kun se lähestyy ideaalipistettä. Tutkimalla raja-arvoa

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{cz+d}{az+b} = \frac{0}{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b} = \frac{0}{-ad+bc} = 0$$

huomataan, että kun piste  $z$  lähestyy napaa, niin kuvauksen  $T$  raja-arvo, on

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

Kun piste  $z$  lähestyy ideaalipistettä, niin kuvauksen  $T$  raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{z}+b}{\frac{c}{z}+d} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a+zb}{c+zd} = \frac{a}{c}.$$

Jos siis vakio  $c \neq 0$ , niin yksikäsitteinen kuvaus  $T$  määritellään laajennetussa kompleksitasossa  $\overline{\mathbb{C}}$  asettamalla

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

Huomataan, että funktio  $\frac{1}{z}$  on erikoistapaus laajennetussa kompleksitasossa määritelystä lineaarisesta rationaalikuvauksesta, kun valitaan  $a = 0, b = 1, c = 1$  ja  $d = 0$ .

ESIMERKKI 3.9. Tutkitaan, miten lineaarinen rationaalikuvaus

$$T(z) = \frac{2z+1}{z-i}$$

kuvaa pisteet  $0, 1+i, i$  ja  $\infty$ .

Pisteille  $z = 0$  ja  $z = 1+i$  on

$$T(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 - i} = \frac{1}{-i} = i$$

ja

$$T(1+i) = \frac{2(1+i)+1}{(1+i)-i} = \frac{3+2i}{1} = 3+2i.$$

Kun merkitään  $a = 2, b = 1, c = 1$  ja  $d = -i$ , niin saadaan

$$T(i) = T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

ja

$$T(\infty) = \frac{a}{c} = 2.$$

Funktiolla  $\frac{1}{z}$  on kaksi mielenkiintoista ominaisuutta [11, Section 2.7, s. 100-107]. Ensinnäkin se kuvaa ympyrän, jonka keskipisteenä on napa  $z = 0$ , ympyräksi. Lisäksi se kuvaa ympyrän, jonka keskipiste on  $x$ - tai  $y$ -akselilla ja jolla on napa  $z = 0$ , pysty- tai vaakasuoraksi suoraksi. Lineaarisilla rationaalikuvauksilla on samanlaiset kuvausominaisuudet. Tämä ilmenee seuraavasta lauseesta.

LAUSE 3.10. *Jos  $C$  on ympyrä kompleksitasossa ja  $T$  on lineaarinen rationaalikuvaus laajennetussa kompleksitasossa, niin kuvaus  $T$  kuvaa ympyrän  $C$  joko ympyräksi tai suoraksi. Ympyrä kuvautuu suoraksi, jos ja vain jos  $c \neq 0$  ja napa  $z = -\frac{d}{c}$  on ympyrällä  $C$ .*



TODISTUS. Kun vakio  $c = 0$ , niin  $T$  on lineaarinen funktio. Koska lineaariset funktiot kuvaavat ympyrät ympyröiksi [11, Section 2.3, s. 68-76], niin väite pätee.

Riittää siis osoittaa, että väite pätee, kun vakio  $c \neq 0$ . Oletetaan nyt, että  $c \neq 0$ . Yhtälön 3.2 mukaan on

$$T(z) = f \circ g \circ h(z),$$

missä  $f(z) = Az + B$  ja  $h(z) = cz + d$  ovat lineaarisia funktioita ja  $g(z) = \frac{1}{z}$  on identtisen funktion käänteisfunktio. Koska funktio  $h$  on lineaarinen, niin se kuvaa ympyrän  $C$  ympyräksi  $C'$ . Tarkastellaan kaksi tapausta:

- (1) Oletetaan, että origo  $w = 0$  on ympyrällä  $C'$ . Näin on, jos ja vain jos napa  $z = -\frac{d}{c}$  on ympyrällä  $C$ . Jos piste  $w = 0$  on ympyrällä  $C'$ , niin funktio  $g(z) = \frac{1}{z}$  kuvaa ympyrän  $C'$  joko pysty- tai vaakasuoraksi suoraksi  $L$  [11, Section 2.5, s. 100-107]. Lisäksi, koska funktio  $f$  on lineaarinen, niin se kuvaa suoran  $L$  suoraksi. Siispä, jos napa  $z = -\frac{d}{c}$  on ympyrällä  $C$ , niin kuvaus  $T$  kuvaa ympyrän  $C$  suoraksi.
- (2) Oletetaan sitten, että piste  $w = 0$  ei ole ympyrällä  $C'$ . Tällöin myöskään napa  $z = -\frac{d}{c}$  ei ole ympyrällä  $C$ . Olkoon  $C'$  ympyrä siten, että

$$|w - w_0| = \rho.$$

Jos asetetaan

$$\xi = f(w) = \frac{1}{w}$$

ja

$$\xi_0 = f(w_0) = \frac{1}{w_0},$$

niin tällöin jokaiselle pisteelle  $w \in C'$  on

$$(3.3) \quad |\xi - \xi_0| = \left| \frac{1}{w} - \frac{1}{w_0} \right| = \frac{|w - w_0|}{|w||w_0|} = \rho |\xi_0| |\xi|.$$

Huomataan, että pisteet, jotka toteuttavat yhtälön

$$(3.4) \quad |\xi - a| = \lambda |\xi - b|,$$

muodostavat suoran, jos  $\lambda = 1$ , ja ympyrän, jos  $\lambda > 0$  ja  $\lambda \neq 1$ . Kun merkitään  $a = \xi_0$ ,  $b = 0$  ja  $\lambda = \rho |\xi_0|$ , nähdään, että yhtälö 3.3 voidaan muuttaa yhtälön 3.4 muotoon. Koska piste  $w = 0$  ei ole ympyrällä  $C'$ , niin täytyy olla  $|w_0| \neq \rho$  tai  $\lambda = \rho |\xi_0| \neq 1$ . Siten yhtälön 3.3 toteuttavan pistejoukon on oltava ympyrä. Koska funktio  $f$  on lineaarinen, niin se kuvaa tämän ympyrän ympyräksi. Siispä kuvaus  $T$  kuvaa ympyrän  $C$  ympyräksi. □

SEURAUUS 3.11. *Olkoon  $T$ ,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , lineaarinen rationaalikuvaus laajennettuna kompleksitasossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Tällöin kuvaus  $T$  kuvaa suoran  $L$  joko suoraksi tai ympyräksi. Kuvajoukko on ympyrä, jos ja vain jos  $c \neq 0$  ja napa  $z = -\frac{d}{c}$  ei ole suoralla  $L$ .*

ESIMERKKI 3.12. Tutkitaan, miten lineaarinen rationaalikuvaus

$$T(z) = \frac{z+2}{z-1}$$

kuvaa yksikköympyrän  $|z| = 1$ . Selvitetään myös, mikä on ympyrän sisäpisteiden  $|z| < 1$  kuvajoukko.

Huomataan, että kuvauksen  $T$  napa on pisteessä  $z = 1$ . Koska tämä piste on yksikköympyrällä  $|z| = 1$ , niin Lauseen 3.10 mukaan yksikköympyrä kuvautuu suoraksi. Koska kuvajoukko on suora, niin se voidaan määrittää kahden pisteen avulla. Kuvaukselle  $T$  on nyt

$$T(-1) = -\frac{1}{2}$$

ja

$$T(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i,$$

joten kuvajoukon on oltava suora

$$u = -\frac{1}{2}.$$

Huomataan, että lineaarinen rationaalikuvaus on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyalueessaan. Tämän vuoksi yksikköympyrän sisäpisteiden joukon  $|z| < 1$  kuva on joko puolitaso  $u < -\frac{1}{2}$  tai puolitaso  $u > -\frac{1}{2}$ . Valitaan nyt piste  $z = 0$  testipisteeksi. Kuvauksen  $T$  arvo tässä pisteessä on

$$T(0) = -2$$

ja se on suoran  $u = -\frac{1}{2}$  vasemmalla puolella. Siten kuvajoukko on puolitaso

$$u < -\frac{1}{2}.$$

**ESIMERKKI 3.13.** Tutkitaan, miten lineaarinen rationaalikuvaus

$$T(z) = \frac{z+2}{z-1}$$

kuvaa ympyrän  $|z| = 2$ . Selvitetään myös, miten kuvaus  $T$  kuvaa kiekon  $|z| \leq 2$ .

Tässä esimerkissä kuvauksen  $T$  napa  $z = 1$  ei ole ympyrällä  $|z| = 2$ . Siten Lauseen 3.10 mukaan ympyrä  $|z| = 2$  kuvautuu ympyräksi  $C'$ . Huomataan ensin, että ympyrä  $|z| = 2$  on symmetrinen  $x$ -akselin suhteen. Tällöin, jos piste  $z$  on ympyrällä  $|z| = 2$ , niin myös piste  $\bar{z}$  on tällä samalla ympyrällä. Lisäksi jokaiselle pisteelle  $\bar{z}$  on

$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z-1}} = \overline{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)} = \overline{T(z)}.$$

Koska pisteet  $z$  ja  $\bar{z}$  ovat ympyrällä  $|z| = 2$ , niin pisteiden

$$w = T(z)$$

ja

$$\bar{w} = \overline{T(z)} = T(\bar{z})$$

on oltava ympyrällä  $C'$  (koska ympyrä  $C'$  on symmetrinen  $u$ -akselin suhteen). Nyt pisteet  $z = 2$  ja  $z = -2$  ovat ympyrällä  $|z| = 2$ , joten pisteet  $T(2) = 4$  ja  $T(-2) = 0$  ovat ympyrällä  $C'$ . Ympyrän  $C'$  symmetrisyyden vuoksi pisteet 0 ja 4 ovat halkaisijan päätepisteet. Siten ympyrä  $C'$  on

$$|w - 2| = 2.$$

Ympyrän  $|z| = 2$  sisäpisteiden kuvajoukon on tällöin oltava ympyrän  $|w - 2| = 2$  ulkopuoli, toisin sanoen

$$|w - 2| \geq 2.$$

HUOMAUTUS 3.14. Lineaariset rationaalikuvaukset voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa. Kuvausta

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

vastaa matriisi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Matriiseista voi lukea lisää esimerkiksi teoksesta *A First Course in Complex Analysis with Applications* [11, s. 404-405].

Pistettä  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ , jolle  $f(z_0) = z_0$ , sanotaan kuvauksen  $f$  kiintopisteeksi.

LAUSE 3.15. *Lineaarilla rationaalikuvauksella  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  on korkeintaan 2 kiintopistettä tai se on identtinen kuvaus.*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että ei-identtinen lineaarinen rationaalikuvaus on muotoa

$$f(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$$

kaikilla  $z \in \mathbb{C}$  ja  $f(\infty) = \infty$ . Jos  $a = d$ , niin täytyy päteä  $\frac{b}{d} \neq 0$ , sillä muuten funktio  $f$  olisi identtinen kuvaus. Jos taas  $a \neq d$ , niin funktiolla  $f$  on toinenkin kiintopiste, sillä  $f(z) = z$ , jos ja vain jos

$$\frac{az}{d} + \frac{b}{d} = z$$

eli jos

$$z = \frac{b}{d-a}.$$

Oletetaan sitten, että ei-identtinen lineaarinen rationaalikuvaus  $f$  on muotoa

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus -\frac{d}{c}$ ,

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

ja

$$f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Jos  $z \in \mathbb{C} \setminus -\frac{d}{c}$ , niin  $f(z) = z$ , jos ja vain jos

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

eli jos

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Ratkaisemalla tämä toisen asteen yhtälö saadaan

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Siispä funktiolla  $f$  on kaksi kiintopistettä. □

SEURAUS 3.16. *Jos lineaarinen rationaalikuvaus kiinnittää kolme pistettä, niin se on identtinen kuvaus  $f(z) = z$  kaikilla  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ .*

Lineaarisen rationaalikuvauksen määrittelyssä voidaan määrätä kolmen pisteen kuvapistet, mutta ei enempää.

LAUSE 3.17. *Olkoot  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  kolme eri pistettä. Tällöin on olemassa tasan yksi lineaarinen rationaalikuvaus  $f$ , jolle  $f(z_1) = 1$ ,  $f(z_2) = 0$  ja  $f(z_3) = \infty$ .*

TODISTUS. Osoitetaan ensin yksikäsitteisyys. Jos kuvaukset  $f$  ja  $g$  toteuttavat halutut ehdot, niin kuvaus  $f \circ g^{-1}$  on lineaarinen rationaalikuvaus, joka kiinnittää pisteet  $1, 0$  ja  $\infty$ . Seurauksen 3.16 nojalla kuvaus  $f \circ g^{-1}$  on identtinen kuvaus, joten on oltava  $f = g$ .

Näytetään sitten, että tällainen kuvaus on olemassa. Jos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , niin määritellään kuvaus  $f$  asettamalla

$$f(z) = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}.$$

Muulloin on vastaavasti

$$f(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3}, \text{ jos } z_1 = \infty,$$

$$f(z) = \frac{z_1-z_3}{z-z_3}, \text{ jos } z_2 = \infty,$$

$$f(z) = \frac{z-z_2}{z_1-z_2}, \text{ jos } z_3 = \infty.$$

□

SEURAUUS 3.18. *Olkoot  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  kolme eri pistettä. Jos  $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  ovat kolme eri pistettä, niin tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen rationaalikuvaus  $f$ , jolle  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$  ja  $f(z_3) = w_3$ .*

**3.3.1. Kaksoissuhde.** Sovelluksissa halutaan usein löytää konformikuvaus ympyröiden rajoittamasta alueesta  $D$  suorien rajoittamaan alueeseen  $D'$ . Lineaariset rationaalikuvaukset ovat erityisen hyviä tähän tarkoitukseen. Määritellään nyt menetelmä, jonka avulla tällainen lineaarinen rationaalikuvaus  $w = T(z)$  voidaan muodostaa siten, että se kuvaa kolme alueen  $D$  reunapistettä  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  kolmeksi erilliseksi pisteeksi  $w_1, w_2$  ja  $w_3$  alueen  $D'$  reunalla.

MÄÄRITELMÄ 3.19. Olkoot  $z, z_1, z_2$  ja  $z_3$  neljä eri kompleksilukua. Lukua

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

sanotaan *kaksoissuhteeksi*.

Kaksoissuhteen merkintää ei saa sekoittaa murtoviivaan. Lisäksi kaksoissuhde voidaan kirjoittaa monessa eri järjestyksessä, joten aina kannattaa tarkistaa, mikä on kulloinkin määritelmä. Kaksoissuhteen määritelmässä kompleksilukujen järjestyksellä on merkitystä. Esimerkiksi lukujen  $0, 1, i$  ja  $2$  kaksoissuhde on  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$ , kun taas lukujen  $0, i, 1$  ja  $2$  kaksoissuhde on  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ .

Kaksoissuhteen määritelmä voidaan laajentaa käsittämään myös laajennetun kompleksitason  $\overline{\mathbb{C}}$  pisteet käyttämällä seuraavaa tietoa raja-arvoista:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L, \text{ jos ja vain jos } \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L.$$

Esimerkiksi lukujen  $\infty, z_1, z_2$  ja  $z_3$  kaksoissuhde lasketaan raja-arvona

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

Seuraava lause osoittaa kaksoissuhteen merkityksen lineaarisille rationaalikuvauksille. Sen mukaan kaksoissuhde on invariantti lineaarisissa rationaalikuvauksissa.

LAUSE 3.20. Jos  $w = T(z)$  on lineaarinen rationaalikuvaus, joka kuvaa erilliset pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  erillisiksi pisteiksi  $w_1, w_2$  ja  $w_3$ , niin tällöin kaksoissuhteelle pätee

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)],$$

toisin sanoen

$$\frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_3} \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

kaikille pisteille  $z$ .

TODISTUS. Olkoon

$$R(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

se lineaarinen rationaalikuvaus, joka kuvaa pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  pisteiksi  $0, 1$  ja  $\infty$ . Lauseen 3.17 mukaan tällainen yksikäsitteinen kuvaus on olemassa. Olkoon lisäksi

$$S(z) = \frac{z-w_1}{z-w_3} \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

sellainen lineaarinen rationaalikuvaus, jolle  $S(w_1) = 0, S(w_2) = 1$  ja  $S(w_3) = \infty$ . Tällöin lineaarinen rationaalikuvaus

$$S^{-1}(R(z))$$

kuvaa pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  pisteiksi  $w_1, w_2$  ja  $w_3$ . Tästä seuraa, että yhdistetty kuvaus

$$T^{-1}(S^{-1}(R(z)))$$

kuvaa pisteet  $0, 1$  ja  $\infty$  pisteiksi  $0, 1$  ja  $\infty$ . Määritetään nyt tällainen lineaarinen rationaalikuvaus

$$T^{-1}(S^{-1}(R(z))) = \frac{az+b}{cz+d},$$

joka kuvaa pisteet  $0, 1$  ja  $\infty$  pisteiksi  $0, 1$  ja  $\infty$ . Ehdosta

$$T^{-1}(S^{-1}(R(0))) = 0$$

seuraa, että vakio  $b$  on nolla (eli siis  $b = 0$ ). Toisen ehdon mukaan lineaarinen rationaalikuvaus kuvaa pisteen  $\infty$  pisteeksi  $\infty$ , joten saadaan, että  $c = 0$ . Kolmannen ehdon

$$T^{-1}(S^{-1}(R(1))) = 1$$

mukaan on puolestaan  $\frac{a}{d} = 1$ . Näin ollen etsitty kuvaus on

$$T^{-1}(S^{-1}(R(z))) = z$$

eli kyseessä on identtinen kuvaus. Yhtäpitävästi voidaan kirjoittaa

$$R(z) = S(T(z)).$$

Kun merkitään  $w = T(z)$ , niin on  $R(z) = S(w)$ . Siispä on oltava

$$\frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_3} \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}.$$

□

ESIMERKKI 3.21. Muodostetaan lineaarinen rationaalikuvaus, joka kuvaa yksikköympyrän  $|z| = 1$  pisteet  $1, i$  ja  $-1$  reaaliakselin pisteiksi  $-1, 0$  ja  $1$ . Selvitetään myös, miten tämä kuvaus kuvaa joukon  $|z| < 1$ .

Merkitään  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, w_1 = -1, w_2 = 0$  ja  $w_3 = 1$ . Lauseen 3.20 mukaan kuvaus  $w = T(z)$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{z-1}{z-(-1)} \frac{i-(-1)}{i-1} = \frac{w-(-1)}{w-1} \frac{0-1}{0-(-1)}.$$

Kun tästä ratkaistaan  $w$ , saadaan

$$w = T(z) = \frac{z-i}{iz-1}.$$

Valitaan nyt testipisteeksi  $z = 0$ . Tällöin kuvaukselle  $T$  on

$$T(0) = i,$$

joten joukon  $|z| < 1$  kuvajoukko on ylempi puolitaso  $v > 0$ .

**ESIMERKKI 3.22.** Muodostetaan lineaarinen rationaalikuvaus, joka kuvaa suoran  $y = x - 1$  pisteet  $-i, 1$  ja  $\infty$  yksikköympyrän  $|w| = 1$  pisteiksi  $1, i$  ja  $-1$ .

Pisteiden  $z, z_1 = -i, z_2 = 1$  ja  $z_3 = \infty$  kaksoissuhde on

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z-z_3} \frac{1-z_3}{1+i} = \lim_{z_3 \rightarrow 0} \frac{z+i}{z-\frac{1}{z_3}} \frac{1-\frac{1}{z_3}}{1+i} = \lim_{z_3 \rightarrow 0} \frac{z+i}{zz_3-1} \frac{z_3-1}{1+i} = \frac{z+i}{1+i}.$$

Kun merkitään  $w_1 = 1, w_2 = i$  ja  $w_3 = -1$ , niin Lauseen 3.20 mukaan kuvaus  $w = T(z)$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{z+i}{1+i} = \frac{w-1}{w+1} \frac{i+1}{i-1}.$$

Ratkaisemalla tästä yhtälöstä  $w$  saadaan

$$w = T(z) = \frac{z+1}{-z+1-2i}.$$

### 3.4. Schwarz-Christoffelin kaava

Useissa sovelluksissa halutaan löytää konformikuvaus ylemmästä puolitasosta monikulmion muotoiseen alueeseen. Riemannin kuvauslause takaa, että tällainen kuvaus on olemassa, mutta se ei kerro, kuinka tällainen kuvaus löydetään. Tässä kappaleessa johdetaan kaava, jonka avulla löydetään konformikuvaus ylemmästä puolitasosta monikulmioon.

Kompleksitasossa *monikulmiot* ovat alueita, joita rajoittavat yksinkertaiset, paloittain sileät käyrät, jotka koostuvat äärellisen monesta peräkkäisestä janasta. Janojen päätepisteitä kutsutaan *kärjiksi*. Jos monikulmion reuna on suljettu käyrä, niin monikulmiota kutsutaan *rajoitetuksi monikulmioksi*. Vastaavasti monikulmiota, jonka reuna ei ole suljettu, kutsutaan *rajoittamattomaksi monikulmioksi*. Ideaalipistettä  $\infty$  pidetään rajoittamattoman monikulmion kärkenä.

Tarkastellaan nyt kompleksista funktiota

$$(3.5) \quad w = f(z) = (z - x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

missä  $x_1$  ja  $\alpha$  ovat reaalityyppisiä lukuja ja  $0 < \alpha < 2\pi$ . Kuvaus  $f$  on siirron

$$T(z) = z - x_1$$

ja potenssifunktion

$$F(z) = z^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

yhdistetty funktio. Koska  $x_1$  on reaalinen piste, niin kuvaus  $T$  on reaaliakselin suunteinen siirto, joka kuvaa  $x$ -akselin  $u$ -akseliksi samalla, kun piste  $z = x_1$  kuvautuu pisteeksi  $w = 0$ . Potenssifunktiossa  $F$  voidaan merkitä  $z = re^{i\theta}$ , jolloin saadaan

$$(3.6) \quad F(z) = (re^{i\theta})^{\frac{\alpha}{\pi}} = r^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\frac{\alpha\theta}{\pi}}.$$

Yhtälöstä 3.6 nähdään, että kompleksiarvoinen kuvaus

$$w = z^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

venyttää tai kutistaa säteen  $r$  säteeksi  $r^{\frac{\alpha}{\pi}}$  ja kiertää origoa kulman  $\frac{\alpha}{\pi}$  verran siten, että argumentti  $\theta$  kasvaa tai vähenee argumentiksi  $\frac{\alpha\theta}{\pi}$ . Siten yhdistetty kuvaus

$$w = F(T(z)) = (z - x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

kuvaa pisteestä  $x_1$  lähtevän säteen, joka muodostaa reaaliakselin kanssa kulman  $\phi$ , origosta lähteväksi säteeksi, joka muodostaa reaaliakselin kanssa kulman  $\frac{\alpha\theta}{\pi}$ .

Tarkastellaan nyt kuvausta 3.5 ylemmässä puolitasossa  $y \geq 0$ . Koska tämä joukko koostuu pisteestä  $z = x_1$  sekä sädejoukosta

$$\arg(z - x_1) = \phi,$$

$0 \leq \phi \leq \pi$ , niin funktion

$$w = (z - x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

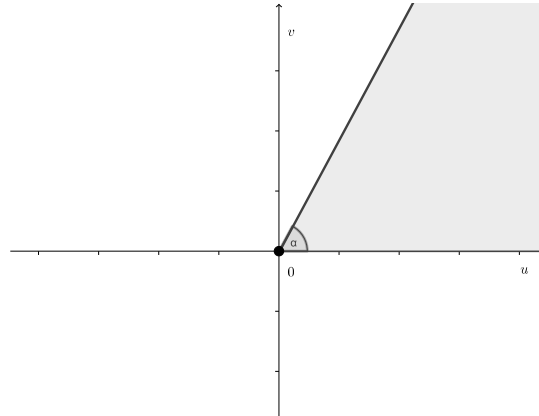
kuvajoukko koostuu pisteestä  $w = 0$  sekä sädejoukosta

$$\arg(w) = \frac{\alpha\theta}{\pi},$$

$0 \leq \frac{\alpha\theta}{\pi} \leq \alpha$ . Toisin sanoen ylempi puolitaso  $y \geq 0$  kuvautuu pisteeksi  $w = 0$  sekä kiilaksi

$$0 \leq \arg(w) \leq \alpha.$$

Katso Kuva 3.5.



KUVA 3.5. Ylemmän puolitason kuvautuminen funktiossa  $w = f(z) = (z - x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}}$ .

Yhtälön 3.5 funktiolla  $f$ , joka siis kuvaa ylemmän puolitason  $y \geq 0$  rajoittamattomaksi, yksikätkiseksi monikulmioksi, on derivaatta

$$f'(z) = \frac{\alpha}{\pi}(z - x_1)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}.$$

Koska tämä derivaatta on nolasta eroava aina, kun  $y > 0$ , niin funktio  $w = f(z)$  on konforminen kaikissa pisteissä  $z$ , joissa  $y > 0$ . Derivaattafunktiota  $f'$  käytetään siis

yleisesti silloin, kun halutaan konformikuvaus ylemmästä puolitasosta  $y \geq 0$  mielivaltaiseen monikulmioon. Tämän tiedon avulla voidaan tehdä yleistyksiä.

Tarkastellaan nyt uutta funktiota  $f$ , joka on analyyttinen alueessa  $y > 0$  ja jonka derivaatta on

$$(3.7) \quad f'(z) = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1},$$

missä  $x_1, x_2, \alpha_1$  ja  $\alpha_2$  ovat reaalitykijöitä,  $x_1 < x_2$  ja  $A$  on kompleksinen vakio. Tiedetään, että parametrisaatio  $w(t)$ ,  $a < t < b$ , on jana, jos ja vain jos argumentti  $\arg(w'(t))$  on vakio kaikilla  $a < t < b$ . Tämän tiedon avulla voidaan selvittää, miten funktio  $w = f(z)$  kuvaa reaaliakselin välit  $(-\infty, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$  ja  $(x_2, \infty)$ . Jos väli  $(-\infty, x_1)$  parametrisoidaan asettamalla

$$z(t) = t,$$

$-\infty < t < x_1$ , niin funktion  $f$  kuvajoukko parametrisoidaan asettamalla

$$w(t) = f(z(t)) = f(t),$$

$-\infty < t < x_1$ . Kun yhtälössä 3.7 merkitään  $z = t$ , niin saadaan

$$w'(t) = f'(t) = A(t - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (t - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1}.$$

Tällöin derivaatan  $w'(t)$  argumentti on

$$(3.8) \quad \text{Arg}(A) + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) \text{Arg}(t - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) \text{Arg}(t - x_2).$$

Koska  $-\infty < t < x_1$ , niin  $t - x_1$  on negatiivinen reaaliluku ja siten sen pääargumentti on

$$\text{Arg}(t - x_1) = \pi.$$

Lisäksi, koska  $x_1 < x_2$ , niin myös  $t - x_2$  on negatiivinen reaaliluku, ja siten myös sen pääargumentti on

$$\text{Arg}(t - x_2) = \pi.$$

Kun nämä tiedot sijoitetaan yhtälöön 3.8, saadaan, että argumentti

$$\text{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$$

on vakio kaikilla  $t \in (-\infty, x_1)$ . Siispä funktio  $w = f(z)$  kuvaa välin  $(-\infty, x_1)$  janoiksi.

Vastaavasti voidaan päätellä, että välit  $(x_1, x_2)$  ja  $(x_2, \infty)$  kuvautuvat janoiksi. Argumentin  $w'$  arvot jokaisella välillä on tiivistetty Talukkoon 1. Taulukosta käy ilmi

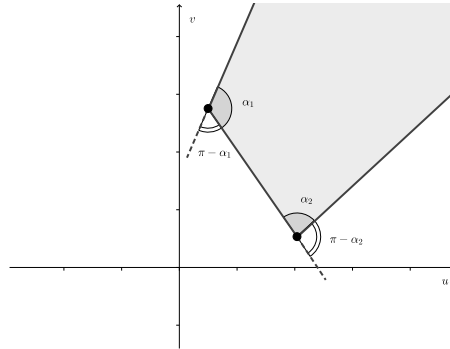
TAULUKKO 1. Derivaatan  $w'$  argumentit

Väli	Argumentti	Argumentin muutos
$(-\infty, x_1)$	$\text{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$	0
$(x_1, x_2)$	$\text{Arg}(A) + \alpha_2 - \pi$	$\pi - \alpha_1$
$(x_2, \infty)$	$\text{Arg}(A)$	$\pi - \alpha_2$

myös argumentin muutos.

Koska funktio  $f$  on analyyttinen (ja siten myös jatkuva), niin puolitaso  $y \geq 0$  kuvautuu rajoittamattomaksi monikulmioksi. Taulukosta 1 nähdään, että monikulmion peräkkäisten sivujen välinen, ulkopuolelle jäävä kulma on sama kuin argumentin





KUVA 3.6. Yhtälöön 3.7 liittyvä kuva

muutos. Siten monikulmion sisälle jäävät kulmat ovat suuruudeltaan  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$ . Katso Kuva 3.6.

Vastaavasti kuin edellä, funktiolle  $f$  voidaan muodostaa derivaattafunktio  $f'$ , joka kuvaa ylemmän puolitason monikulmioksi, jossa on mielivaltainen määrä sivuja. Tämä yleistys esitetään seuraavassa lauseessa.

LAUSE 3.23. (*Schwarz-Christoffelin lause*) Olkoon funktio  $f$  analyyttinen alueessa  $y > 0$  ja olkoon sen derivaatta

$$(3.9) \quad f'(z) = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1},$$

missä  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $0 < \alpha_i < 2\pi$  kaikilla  $1 \leq i \leq n$  ja  $A$  on kompleksinen vakio. Tällöin funktio  $w = f(z)$  kuvaa ylemmän puolitason  $y \geq 0$  rajoittamattomaksi monikulmioksi, jonka sisäkulmat ovat  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

TODISTUS. Määritellään aluksi alueessa  $G := \mathbb{C} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  funktiot  $g$  ja  $h$  siten, että

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

ja

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}{z - x_j},$$

jos  $x_n \neq \infty$ , ja

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}{z - x_j},$$

jos  $x_n = \infty$ . Tällöin funktio  $h$  on analyyttinen alueessa  $G$ . Huomataan, että pisteet  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ja  $\infty$  ovat funktion  $h$  poistuvia singulariteetteja. Poistamalla nämä singulariteetit funktio  $h$  voidaan muuttaa laajennetun kompleksitason  $\overline{\mathbb{C}}$  holomorfiniseksi funktioksi. Koska funktio  $h$  on jatkuva joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$  ja  $\overline{\mathbb{C}}$  on kompakti joukko, niin myös funktion  $h$  kuvajoukko  $h(\overline{\mathbb{C}})$  on kompakti. Lisäksi, koska funktio  $h$  ei saavuta koskaan arvoa  $\infty$ , niin kuvajoukko  $h(\overline{\mathbb{C}})$  on itse asiassa kompleksitason kompakti

joukko ja siten rajoitettu. Kun funktio  $h$  rajoitetaan kompleksitasoon, niin se on rajoitettu kokonainen funktio. Tällöin Liouvilin lauseen [10, Theorem V.3.7, s. 167] mukaan funktio  $h$  on vakio kompleksitasossa. Jatkuvuuden nojalla funktio  $h$  on vakio myös joukossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Koska funktiolle  $h$  on  $h(\infty) = 0$ , niin tällöin on oltava  $h(z) = 0$  kaikilla kompleksitason pisteillä  $z$ . Tällöin funktio  $g$  esitetään muodossa

$$g(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}{z - x_j}.$$

Oletetaan nyt, että  $x_n \neq 0$ . Olkoon  $l$  funktion  $\log f'(z)$  haara ylemmässä puolitasossa ja lasketaan sen derivaatta:

$$l'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = g(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\alpha_j}{\pi} - 1}{z - x_j} = \frac{d}{dz} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \text{Log}(z - x_j).$$

Tällöin funktion  $l$  lauseke on

$$l(z) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_j}{\pi} - 1\right) \text{Log}(z - x_j) + C,$$

missä  $C$  on vakio. Nyt voidaan ratkaista funktio  $f'$  yhtälöstä  $\log f'(z) = l(z)$  ja saadaan

$$f'(z) = e^{l(z)} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1},$$

missä  $A$  on vakio siten, että  $A = e^C$ . [10, Lemma IX.5.4, s. 459-460] □

**HUOMAUTUS 3.24.** (1) Schwarz-Christoffelin lauseessa esiintyvä funktio  $f$  on määritelty ylemmässä puolitasossa  $y \geq 0$ , mutta Lauseen 3.3 mukaan se on konforminen vain alueessa  $y > 0$ .

(2) Reaaliakselin pisteet  $x_k$  ovat vapaasti valittavissa. Järkevät valinnat voivat kuitenkin helpottaa funktion  $f$  ratkaisemista.

(3) Lause 3.23 antaa vain funktion  $f$  derivaatan  $f'$ . Funktio  $f$  saadaan integraalista

$$f(z) = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B,$$

missä  $A$  ja  $B$  ovat kompleksisiä vakioita. Siten funktio  $f$  on funktion

$$g(z) = \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz$$

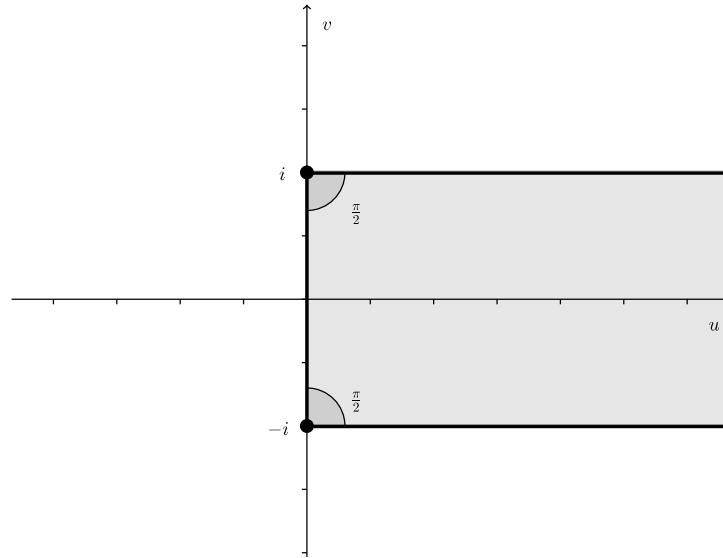
ja lineaarikuvauksen

$$h(z) = Az + B$$

yhdistetty funktio.

(4) Schwarz-Christoffelin kaavaa voidaan käyttää myös muodostettaessa funktiota ylemmästä puolitasosta  $y \geq 0$  rajoitettuun monikulmioon. Tällöin yhtälöä 3.9 sovelletaan vain  $n - 1$  sisäkulmaan, sillä rajoitetussa monikulmiossa  $n - 1$  sisäkulmaa määrittää yksikäsitteisesti puuttuvan kulman.

Käytetään nyt Schwarz-Christoffelin kaavaa muutamissa esimerkeissä.



KUVA 3.7. Esimerkin 3.25 kuva

ESIMERKKI 3.25. Muodostetaan Schwarz-Christoffelin kaavan avulla konformikuvaus ylemmästä puolitasosta monikulmioon, missä  $u \geq 0$  ja  $-1 \leq v \leq 1$ .

Monikulmio, missä  $u \geq 0$  ja  $-1 \leq v \leq 1$ , on puoliksi rajoitettu liuska. Katso Kuva 3.7. Tämän rajoittamattoman monikulmion sisäkulmat ovat  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  ja kärjet ovat  $w_1 = -i$  ja  $w_2 = i$ . Valitaan reaaliakselilta vielä pisteet  $x_1 = -1$  ja  $x_2 = 1$ . Tällöin Schwarz-Christoffelin kaava saadaan muotoon

$$(3.10) \quad f'(z) = A(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lauseen 3.20 mukaan funktio  $w = f(z)$  on konformikuvaus ylemmästä puolitasosta  $y \geq 0$  monikulmioon, missä  $u \geq 0$  ja  $-1 \leq v \leq 1$ . Funktio  $f$  saadaan integroimalla derivaattafunktio 3.10. Koska piste  $z$  kuuluu ylempään puolitasoon  $y \geq 0$  ja

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = i,$$

niin yhtälö 3.10 voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f'(z) &= A((z+1)(z-1))^{-\frac{1}{2}} = A(z^2-1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{A}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{A}{[-1(1-z^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{A}{(-1)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{A}{i} \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = -Ai \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Tällöin funktio  $f$  on

$$f(z) = -Ai \arcsin z + B,$$

missä  $A$  ja  $B$  ovat kompleksisia vakioita. Koska funktiolle  $f$  on

$$f(-1) = -i$$

ja

$$f(1) = i,$$

niin vakioiden  $A$  ja  $B$  täytyy toteuttaa yhtälöt

$$-Ai \arcsin(-1) + B = Ai \cdot \frac{\pi}{2} + B = -i$$

$$-Ai \arcsin(1) + B = -Ai \cdot \frac{\pi}{2} + B = i.$$

Laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan, että

$$2B = 0$$

eli  $B = 0$ . Tällöin on oltava

$$A = -\frac{2}{\pi}.$$

Siispä kysytty kuvaus on

$$f(z) = i \cdot \frac{2}{\pi} \arcsin z.$$

### 3.5. Poissonin integrointikaavat

Kuten aiemmin on jo useampaan kertaan todettu, niin Laplacen yhtälöön liittyvä reuna-arvo-ongelma kannattaa siirtää konformikuvauksen avulla sellaiseen yksinkertaisempaan alueeseen, esimerkiksi ylempään puolitasoon tai avoimeen yksikkökiekkoon, jossa se on helpompi ratkaista. Tässä kappaleessa esitetään kaksi tärkeää integrointikaavaa, jotka auttavat Dirichlet'n ongelman ratkaisemisessa ylemmässä puolitasossa ja yksikkökiekkossa.

**3.5.1. Poissonin integrointikaava ylemmässä puolitasossa.** Aloitetaan tarkastelemalla seuraavaa Dirichlet'n ongelmaa: Halutaan ratkaista funktio  $\phi$ , jolle pätee

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ , ja

$$(3.11) \quad \phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < \infty, \end{cases}$$

missä  $k_0$  ja  $k_1$  ovat reaalisia vakioita ja piste  $x_1$  on  $x$ -akselin piste, joka riippuu pisteiden  $x_1$  ja  $x_1 + 1$  kautta kulkevan säteen sekä pisteiden  $x_1$  ja  $z = x + iy$ ,  $y > 0$ , kautta kulkevan säteen välisestä kulmasta  $\theta$ . Itse asiassa kulma  $\theta$  on myöskin positiivisen  $x$ -akselin ja vektorin  $z - x_1$  välinen kulma. Katso Kuva 3.8. Koska piste  $z$  on ylemmässä puolitasossa, niin kulma  $\theta$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$\theta = \operatorname{Arg}(z - x_1),$$

missä  $\operatorname{Arg}(z - x_1)$  on luvun  $z - x_1$  pääargumentti. Funktion  $\phi$  täytyy muuttua arvosta  $k_0$  arvosta  $k_1$ , kun kulma  $\theta$  kasvaa arvosta 0 arvoon  $\pi$ . Muistetaan, että pisteiden  $z_0$  ja  $z_1$  välinen jana voidaan kirjoittaa muodossa

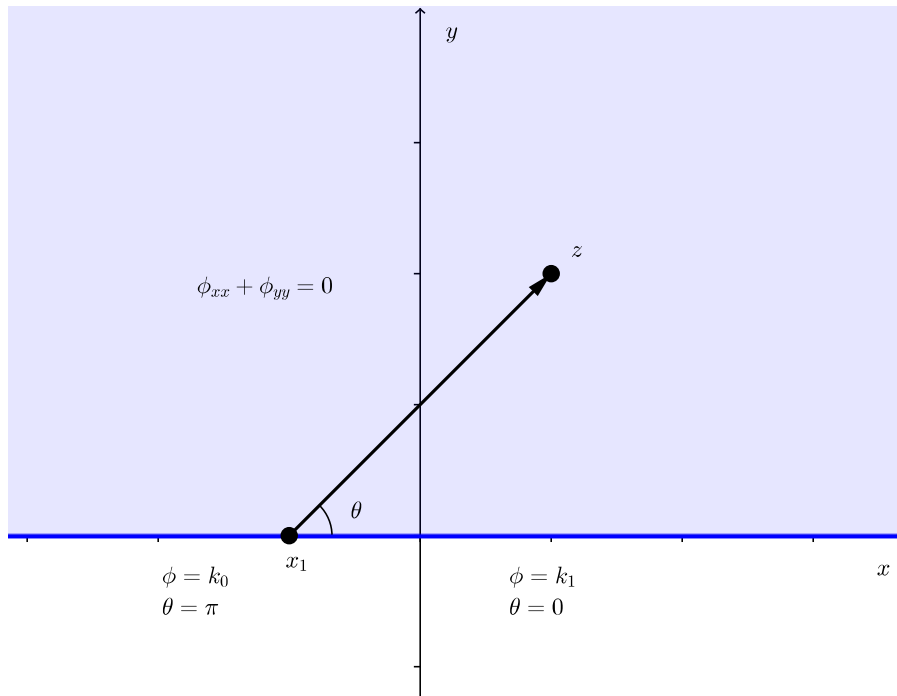
$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t,$$

kun  $0 \leq t \leq 1$  [11, Section 2.2, s, 63]. Siten muuttujan  $\theta$  avulla lausuttuna funktio  $\phi$  on

$$\phi(\theta) = k_1 \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) + k_0 \frac{\theta}{\pi}$$

tai muuttujien  $x$  ja  $y$  avulla lausuttuna se on

$$\phi(x, y) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\operatorname{Arg}(z - x_1),$$



KUVA 3.8. Ehtoon 3.11 liittyvä Dirichlet'n ongelma

kun  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Näytetään, että näin määritelty funktio  $\phi$  on eräs annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Ylemmässä puolitasossa  $y > 0$  funktio  $\phi$  on funktion

$$f(z) = ik_1 + Ln \left[ \frac{k_0 - k_1}{\pi} (z - x_1) \right]$$

imaginaariosa. Koska funktio  $f$  on analyyttinen, kun  $y > 0$ , niin Lauseen 2.3 mukaan sen imaginaariosa on harmoninen. Siten funktio  $\phi$  toteuttaa Laplacen yhtälön  $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ , kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ .

Näytetään vielä, että funktio  $\phi$  toteuttaa siltä vaaditut reunaehdot. Olkoon piste  $z$  reaaliakselin väliltä  $(x_1, \infty)$ , toisin sanoen  $z = x + 0i$ , missä  $x_1 < x < \infty$ . Tällöin luvun  $z - x_1$  pääargumentti on

$$\text{Arg}(z - x_1) = 0,$$

joten saadaan

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\text{Arg}(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1) \cdot 0 = k_1.$$

Toisaalta, jos piste  $z$  on  $z = x + 0i$ , kun  $-\infty < x < x_1$ , niin pääargumentin arvo on

$$\text{Arg}(z - x_1) = \pi.$$

Tällöin saadaan

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\text{Arg}(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\pi = k_0.$$

Siten voidaan päätellä, että funktio  $\phi$  on eräs annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu.

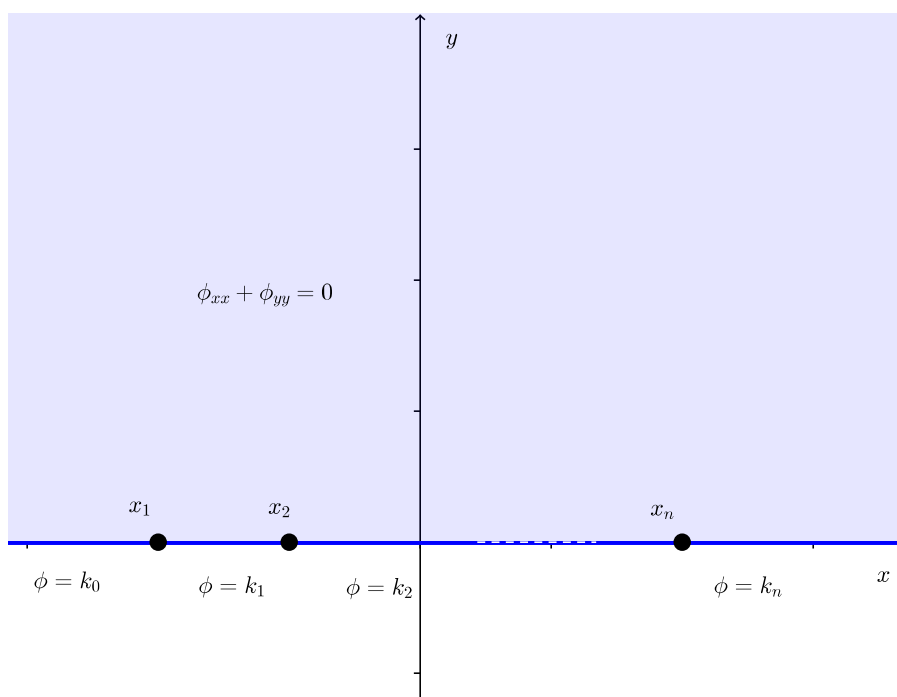
Edellä käsitelty Dirichlet'n ongelma voidaan yleistää. Tarkastellaan nyt seuraavaanlaista Dirichlet'n ongelmaa: Halutaan löytää funktio  $\phi$ , jolle pätee

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ , ja

$$(3.12) \quad \phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ k_n, & x_n < x < \infty, \end{cases}$$

missä  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  ovat reaaliakselin erillisiä pisteitä ja  $k_0, k_1, \dots, k_n$  ovat  $n + 1$  reaalista vakiota. Katso Kuva 3.9. Huomataan, että ensimmäisenä tarkastellun



KUVA 3.9. Ehtoon 3.12 liittyvä Dirichlet'n ongelma

Dirichlet'n ongelman ehto 3.11 on erikoistapaus ehdosta 3.12, kun valitaan  $n = 1$ . Siten vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan konstruoida funktio

$$(3.13) \quad \phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (k_{j-1} - k_j) \operatorname{Arg}(z - x_j).$$

Kuten edellä, funktio  $\phi$  on harmoninen alueessa  $y > 0$ , koska se on analyyttisen funktion

$$f(z) = ik_n + \sum_{j=1}^n Ln \left[ \frac{k_{j-1} - k_j}{\pi} (z - x_j) \right]$$

imaginaariosa.

Näytetään sitten, että funktio  $\phi$  toteuttaa annetut reuna-ehdot. Olkoon  $N$  jokin luvun  $j$  kiinnitetty arvo. Jos  $z = x + 0i$  on piste, kun  $x_N < x < x_{N+1}$ , niin pääargumentin arvo on

$$\text{Arg}(z - x_j) = 0$$

kaikilla  $1 \leq j \leq N$  ja

$$\text{Arg}(z - x_j) = \pi$$

kaikilla  $N + 1 \leq j \leq n$ . Siispä, kun piste  $z$  on  $z = x + 0i$ , missä  $x_N < x < x_{N+1}$ , niin saadaan

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (k_{j-1} - k_j) \text{Arg}(z - x_j) \\ &= k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N (k_{j-1} - k_j) \text{Arg}(z - x_j) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=N+1}^n (k_{j-1} - k_j) \text{Arg}(z - x_j) \\ &= k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N (k_{j-1} - k_j) \cdot 0 + \frac{1}{\pi} \sum_{j=N+1}^n (k_{j-1} - k_j) \cdot \pi \\ &= k_n + (k_N - k_{N+1}) + (k_{N+1} - k_{N+2}) + \cdots + (k_{n-1} - k_n) \\ &= k_N. \end{aligned}$$

Siten funktio  $\phi$  toteuttaa ehdot 3.12.

Ollaan siis näytetty, että funktio

$$\phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (k_{j-1} - k_j) \text{Arg}(z - x_j)$$

on eräs Dirichlet'n ongelman ratkaisu, kun reunaehtona on ehto 3.12. Tätä ratkaisua käytetään usein, kun halutaan löytää Dirichlet'n ongelman eräs ratkaisu yleisessä puolitaossa  $y > 0$ .

**ESIMERKKI 3.26.** Ratkaistaan seuraava Dirichlet'n ongelma: Halutaan löytää funktio  $\phi$ , jolle pätee

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ , ja

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 2, & -\infty < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 3 \\ 5, & 3 < x < \infty. \end{cases}$$

Merkitään  $k_0 = 2, k_1 = -1, k_2 = 5, x_1 = 0$  ja  $x_2 = 3$ . Tällöin yhtälön 3.13 nojalla eräs ratkaisu on

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= 5 + \frac{1}{\pi}(2 + 1)Arg(z - 0) + \frac{1}{\pi}(-1 - 5)Arg(z - 3) \\ &= 5 + \frac{3}{\pi}Arg(z) - \frac{6}{\pi}Arg(z - 3).\end{aligned}$$

Eräs Dirichlet'n ongelman erikoistapaus saadaan, kun reunaehdoissa 3.12 on  $k_0 = k_n = 0$ . Tällöin halutaan siis löytää funktio  $\phi$ , jolle pätee

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$  ja  $y > 0$ , ja

$$(3.14) \quad \phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ k_{n-1}, & x_{n-1} < x < x_n \\ 0, & x_n < x < \infty. \end{cases}$$

Kun asetetaan  $z_i = z - x_i$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, n$  ja merkitään  $k_0 = k_n = 0$ , niin yhtälön 3.13 nojalla funktio  $\phi$  on

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= 0 + \frac{1}{\pi}[(0 - k_1)Arg(z_1) + (k_1 - k_2)Arg(z_2) + \dots + (k_{n-1} - 0)Arg(z_n)] \\ &= \frac{1}{\pi}[k_1(Arg(z_2) - Arg(z_1)) + k_2(Arg(z_3) - Arg(z_2)) + \dots + k_{n-1}(Arg(z_n) - Arg(z_{n-1}))] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{\pi}(Arg(z_{j+1}) - Arg(z_j)).\end{aligned}$$

Siten funktio

$$(3.15) \quad \phi(x, y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{\pi}[Arg(z - x_{j+1}) - Arg(z - x_j)]$$

on eräs annetun Dirichlet'n ongelman ratkaisu.

Yhtälö 3.15 voidaan kirjoittaa myös integraalin avulla. Olkoon  $t$  reaalinen muuttuja ja olkoon lisäksi  $y > 0$ . Tällöin luvun  $z - t$  pääargumentti on

$$Arg(z - t) = \cot^{-1} \left( \frac{x-t}{y} \right)$$

ja sen derivaatta on

$$\frac{d}{dt} Arg(z - t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Toisaalta pääargumenttien erotukselle on

$$Arg(z_{j+1}) - Arg(z_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right] dt.$$

Siten funktio 3.15 voidaan kirjoittaa muodossa

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{k_j y}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$



Koska reunaehdon 3.14 mukaan on  $\phi(x, 0) = 0$ , kun  $x < x_1$  tai  $x > x_n$ , funktio  $\phi$  voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$(3.16) \quad \phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t, 0)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Integraalia 3.16 kutsutaan *Poissonin integrointikaavaksi* ylemmässä puolitasossa  $y > 0$ . Se antaa Dirichlet'n ongelman erään ratkaisun  $\phi$ , kun reunaehtona on ehto 3.14. Poissonin integrointikaavaa voidaan käyttää myös yleisemmissä Dirichlet'n ongelmissa, joissa reunaehdot määrittää mikä tahansa paloittain jatkuva ja rajoitettu funktio. Tämä ilmenee seuraavasta lauseesta.

**LAUSE 3.27.** *Olkoon  $f$  paloittain jatkuva ja rajoitettu funktio, kun  $-\infty < x < \infty$ . Tällöin funktio*

$$(3.17) \quad \phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

*on Dirichlet'n ongelman ratkaisu ylemmässä puolitasossa  $y > 0$ , kun reunaehtona on  $\phi(x, 0) = f(x)$  kaikissa funktion  $f$  jatkuvuuspisteissä.*

**ESIMERKKI 3.28.** Ratkaistaan Poissonin integrointikaavan 3.17 avulla seuraava Dirichlet'n ongelma: Halutaan löytää funktio  $\phi$  siten, että

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

kun  $-\infty < x < \infty$ ,  $y > 0$  ja

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Määritellään ensin reaalin funktio  $f$  asettamalla

$$f(x) = \phi(x, 0).$$

Tällöin on

$$f(x) = x,$$

kun  $-1 < x < 1$ , ja 0 muualla. Funktio  $f$  on nyt siis paloittain jatkuva ja rajoitettu, kun  $-\infty < x < \infty$ . Kun muuttuja  $x$  korvataan muuttujalla  $t$ , saadaan

$$f(t) = \phi(t, 0) = t,$$

kun  $-1 < t < 1$ , ja 0 muualla. Tällöin yhtälön 3.17 mukaan funktio  $\phi$  on

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t, 0)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Kun merkitään  $s = x - t$  ja  $ds = -dt$ , niin saadaan

$$\phi(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_{x+1}^{x-1} \frac{x-s}{s^2 + y^2} ds = -\frac{y}{\pi} \int_{x+1}^{x-1} \frac{x}{s^2 + y^2} ds + \frac{y}{\pi} \int_{x+1}^{x-1} \frac{s}{s^2 + y^2} ds.$$

Koska tiedetään, että

$$\int \frac{x}{s^2 + y^2} ds = \frac{x}{y} \tan^{-1} \left( \frac{s}{y} \right) + C_1$$

ja

$$\int \frac{s}{s^2+y^2} ds = \frac{1}{2} \ln(s^2 + y^2) + C_2,$$

niin funktio

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{x}{y} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{s}{y} \right) \right]_{x+1}^{x-1} + \frac{y}{2\pi} [\ln(s^2 + y^2)]_{x+1}^{x-1} \\ &= \frac{x}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x+1}{y} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{x-1}{y} \right) \right] + \frac{y}{2\pi} \ln \left[ \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

on eräs Dirichlet'n ongelman ratkaisu.

**3.5.2. Poissonin integrointikaava yksikkökiekossa.** Poissonin integrointikaava yksikkökiekossa voidaan johtaa samalla tavalla kuin ylempää puoltasossa.

LAUSE 3.29. *Olkoon  $f$  kompleksifunktio, jolle funktion arvot  $f(e^{i\theta})$  yksikköympyrällä  $z = e^{i\theta}$  määrittävät paloittain jatkuvan ja rajoitetun funktion kaikilla  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Tällöin funktio*

$$(3.18) \quad \phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} dt$$

on Dirichlet'n ongelman ratkaisu avoimessa yksikkökiekossa  $|z| < 1$ , kun reunaehtona on  $\phi(\cos \theta, \sin \theta) = f(e^{i\theta})$  kaikissa funktion  $f$  jatkuvuuspeisteissä.

Integraalia 3.18 ei voida aina ratkaista alkeisfunktioiden avulla, vaan usein joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin. Tällainen tilanne tulee vastaan seuraavassa esimerkissä.

ESIMERKKI 3.30. Ratkaistaan Poissonin integrointikaavan 3.18 avulla Dirichlet'n ongelma: Halutaan löytää funktio  $\phi$ , jolle pätee

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, \\ x^2 + y^2 &< 1 \end{aligned}$$

ja

$$\phi(\cos \theta, \sin \theta) = |\theta|,$$

kun  $-\pi < \theta < \pi$ .

Funktio

$$f(e^{i\theta}) = \phi(\cos \theta, \sin \theta) = |\theta|$$

on paloittain jatkuva ja rajoitettu funktio, kun  $-\pi < \theta < \pi$ . Kun merkitään

$$f(e^{it}) = \phi(\cos t, \sin t) = |t|,$$

niin yhtälön 3.18 nojalla funktio  $\phi$  on

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} dt.$$

Tätä integraalia ei voi ratkaista alkeisfunktioiden avulla. Esimerkiksi *Mathematica*-ohjelmaa käyttämällä voidaan kuitenkin arvioida funktion  $\phi$  arvoja. Nyt funktiolle  $\phi$  saadaan arvot  $\phi\left(\frac{1}{2}, 0\right) \approx 0,9147$  ja  $\phi\left(0, \frac{1}{2}\right) \approx 1,5708$  [11, Chapter 7, Example 3, s. 426].

### 3.6. Yhteenveto Dirichlet'n ongelman ratkaisemisesta

Tehdään vielä lopuksi yhteenveto Dirichlet'n ongelmasta. Olkoon  $D$  alue ja funktio  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  alueen  $D$  reunalla määritelty funktio. Dirichlet'n ongelmassa halutaan löytää harmoninen funktio  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ , joka vastaa funktiota  $g$  alueen  $D$  reunalla. Koska Dirichlet'n ongelma on usein hankala ratkaista annetussa alueessa  $D$ , niin siirretään ongelma yksinkertaisempaan alueeseen  $D'$ , jossa se voidaan ratkaista. Alue  $D$  voidaan kuvata alueeksi  $D'$  konformikuvauksella  $f: D \rightarrow D'$ , jolle pätee, että funktio  $f: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$  on jatkuva bijektio. Ratkaistaan sitten Dirichlet'n ongelma alueessa  $D'$ . Olkoon nyt funktio  $\Phi: D' \rightarrow \mathbb{R}$  harmoninen funktio siten, että se vastaa funktioiden  $g$  ja  $f^{-1}$  yhdistettyä kuvausta

$$h := g \circ f^{-1}$$

alueen  $D'$  reunalla eli toisin sanoen

$$\Phi = h = g \circ f^{-1}$$

alueen  $D'$  reunalla. Tällöin etsitty Dirichlet'n ongelman ratkaisu alueessa  $D$  on funktio

$$\phi = \Phi \circ f.$$

Mikäli yksinkertaisemmaksi alueeksi  $D'$  valitaan yksikkökierokki, niin funktio  $\Phi$  saadaan Poissonin integrointikaavasta:

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) \frac{1-|w|^2}{|e^{it}-w|^2} dt.$$

Tällöin Dirichlet'n ongelman ratkaisufunktio  $u$  on

$$\phi(z) = \Phi(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(f^{-1}(e^{it})) \frac{1-|f(z)|^2}{|e^{it}-f(z)|^2} dt.$$

Kerrataan vielä Luvussa 2.3 esitelty Dirichlet'n ongelman yleinen ratkaisumenetelmä, joka koostuu neljästä vaiheesta:

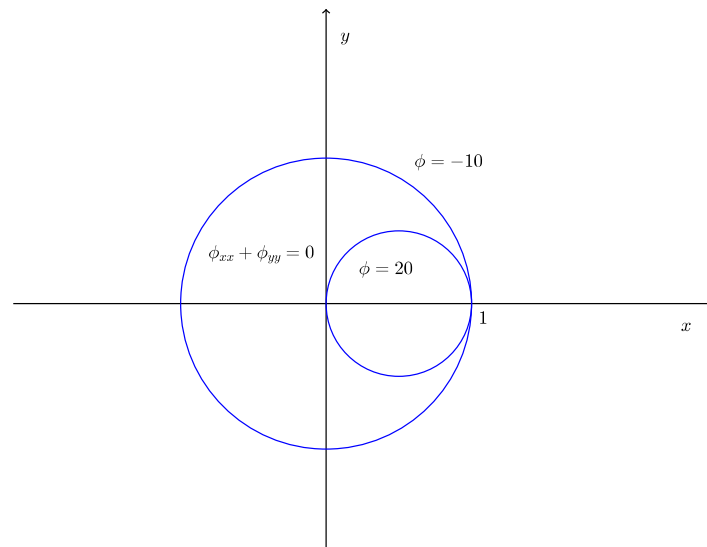
- (1) Etsitään analyttinen kuvaus  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  alueesta  $D$  alueeseen  $D'$ .
- (2) Muutetaan alueen  $D$  reunaehdot vastaamaan alueen  $D'$  reunaehtoja.
- (3) Ratkaistaan Dirichlet'n ongelma alueessa  $D'$ .
- (4) Asetetaan  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ .

Ensimmäisen vaiheen analyttisen kuvauksen voi etsiä Liitteen 1 konformikuvauksista tai sen voi muodostaa lineaarista rationaalikuvausta tai Schwarz-Christoffelin kaavaa käyttämällä. Mikäli alue  $D'$  on ylempi puolitaso tai avoin yksikkökierokki, niin Dirichlet'n ongelman ratkaisemiseksi tässä alueessa voidaan käyttää Poissonin integrointikaavoja.

Tarkastellaan vielä lopuksi konkreettista Dirichlet'n ongelmaan liittyvää esimerkkiä, jossa edetään ratkaisumenetelmän vaiheiden mukaan.

**ESIMERKKI 3.31.** Määritetään ympyröiden  $|z| = 1$  ja  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  väliin jäävässä alueessa  $D$  (Kuva 3.10) sähköstaattinen potentiaali  $\phi$ , joka toteuttaa reunaehdot

$$\phi(x, y) = -10,$$



KUVA 3.10. Sähköstaattinen potentiaali alueessa  $D$

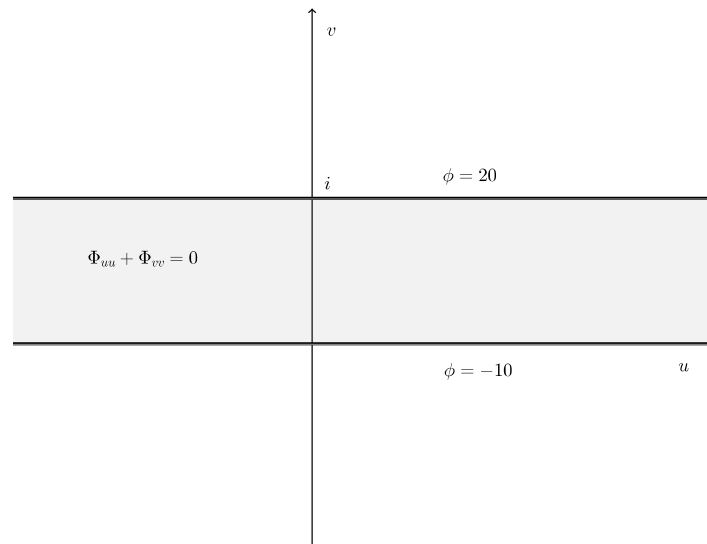
kun  $x^2 + y^2 = 1$ , ja

$$\phi(x, y) = 20,$$

kun  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ .

Sähköstaattinen potentiaali  $\phi$  on Laplacen yhtälön ratkaisu alueessa  $D$  ja se toteuttaa yllä mainitut reunaehdot. Ratkaistaan ongelma neljässä vaiheessa.

(1) Alue  $D$  voidaan kuvata äärettömäksi horisontaaliseksi liuskaksi  $D'$  (Kuva



KUVA 3.11. Sähköstaattinen potentiaali alueessa  $D'$

3.11), missä  $0 < v < 1$ , lineaarisella rationaalikuvauksella. Tällainen kuvaus voidaan määrittää useammalla tavalla. Voidaan esimerkiksi vaatia, että ympyrän  $|z| = 1$  pisteet  $1, i$  ja  $-1$  kuvautuvat pisteiksi  $\infty, 0$  ja  $1$ . Lauseen 3.20

mukaan tällainen lineaarinen rationaalikuvaus  $w = f(z)$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1} = \lim_{w_1 \rightarrow \infty} \frac{w-w_1}{w-1} \frac{0-1}{0-w_1}$$

tai

$$\frac{z-1}{z+1}(-i) = \frac{-1}{w-1}.$$

Ratkaisemalla  $w = f(z)$  saadaan

$$f(z) = (1-i) \frac{z-i}{z-1}.$$

Lineaarinen rationaalikuvaus  $w = f(z)$  kuvaa ympyrän  $|z| = 1$  suoraksi  $v = 0$ . Myös ympyrä

$$|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

kuvautuu suoraksi, koska kuvauksen  $w$  napa  $z = 1$  on tällä ympyrällä. Tämä suora voidaan määrittää selvittämällä ympyrän

$$|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

kahden pisteen kuvautuminen. Esimerkiksi pisteet  $z = 0$  ja  $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  ovat ympyrällä  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  ja niiden kuvapisteen ovat

$$f(0) = 1 + i$$

ja

$$f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + i.$$

Siten ympyrä  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  kuvautuu suoraksi  $v = 1$ . Koska testipisteelle  $z = -\frac{1}{2}$  on

$$f(-\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{3}i,$$

niin tästä voidaan päätellä, että kuvaus  $w = f(z)$  kuvaa ympyröiden väliin jäävän alueen suorien  $v = 0$  ja  $v = 1$  väliseksi alueeksi.

Tämä etsitty kuvaus oltaisiin voitu valita myös suoraan Liitteen 1 konformikuvauksista. Kuvaus M-1 kuvaa kahden ympyrän väliin jäävän alueen äärettömäksi horisontaaliseksi liuskaksi. Kyseisen konformikuvauksen lauseke on

$$w = (1-i) \frac{z-i}{z-1},$$

joka on sama kuin edellä laskettu lineaarisen rationaalikuvauksen lauseke.

- (2) Muutetaan seuraavaksi alueen  $D$  reunaehdot vastaamaan alueen  $D'$  reunaehdot. Uudet ehdot ovat  $\Phi = -10$  suoralla  $v = 0$  ja  $\Phi = 20$  suoralla  $v = 1$ .
- (3) Siirretyn Dirichlet'n ongelman ratkaisu voidaan selvittää aivan vastaavalla tavalla kuin Esimerkissä 2.18. Tällä kertaa ratkaisuksi saadaan

$$\Phi(u, v) = 30v - 10.$$

- (4) Alkuperäisen Dirichlet'n ongelman ratkaisu saadaan korvaamalla kuvauksen  $f(z)$  reaali- ja imaginaariosat funktion  $\Phi(u, v)$  muuttujilla  $u$  ja  $v$ . Kun pistettä  $z$  merkitään  $z = x + iy$ , niin kuvauksen  $f(z)$  lauseke voidaan muokata muotoon

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= (1-i) \frac{x+iy-i}{x+iy-1} = (1-i) \frac{x+i(y-1)}{x-1+yi} \frac{x-1-iy}{x-1-iy} \\ &= \frac{x^2+y^2-2x-2y+1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}i. \end{aligned}$$

Siten etsitty sähköstaattinen potentiaali on

$$\phi(x, y) = 30 \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} - 10.$$

## Kirjallisuutta

- [1] LARS V. AHLFORS: *Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., Second edition, 1966.
- [2] JOSEPH BAK, DONALD J. NEWMAN: *Complex Analysis*. Springer-Verlag, Springer-Verlag New York Inc., 1982.
- [3] GEORGE GREEN: *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. Originally published: Nottingham, 1828, reprint: Journal für die reine und angewandte Mathematik in three parts. <http://arxiv.org/pdf/0807.0088v1.pdf>. (1.12.2014)
- [4] L. L. HELMS: *Introduction to Potential Theory*. Krieger Publishing, Huntingdon, N.Y., 1975; reprint of Wiley-Interscience, Pure and Applied Mathematics, Vol. 22, 1969.
- [5] O.D. KELLOGG: *Foundations of Modern Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, reprint of 1929 edition, 1967.
- [6] TERO KILPELÄINEN: *Kompleksianalyysi. Luentomuistiinpanoja keväälle 2005*. University of Jyväskylä. <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf>, 2006. (1.12.2014)
- [7] ANTTI KÄENMÄKI: *Kompleksianalyysi. Luentomuistiinpanoja 2014*. University of Jyväskylä, 2014.
- [8] MATTI LEHTINEN: *Matematiikan historian luentoja*. University of Helsinki. <http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/histluennot.pdf>, 2000. (1.12.2014)
- [9] DR. A. F. MONNA: *Dirichlet's principle A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis*. Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, The Netherlands, 1975.
- [10] BRUCE P. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, Springer-Verlag New York Inc., 1991.
- [11] DENNIS G. ZILL, PATRICK D. SHANAHAN: *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Jones and Barlett Publishers, Inc., 2003.





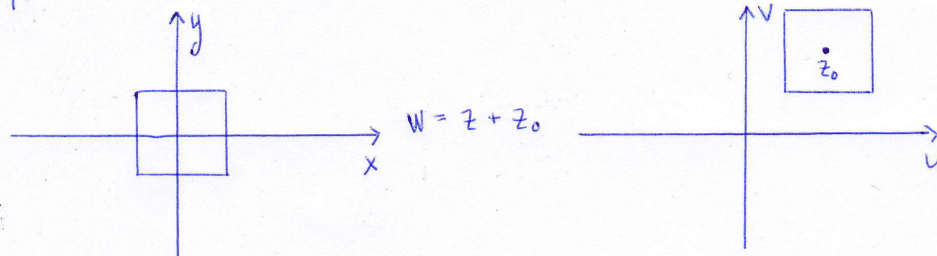
## **Liitteet**

### **Liite 1. Alueiden välisiä konformikuvauksia**

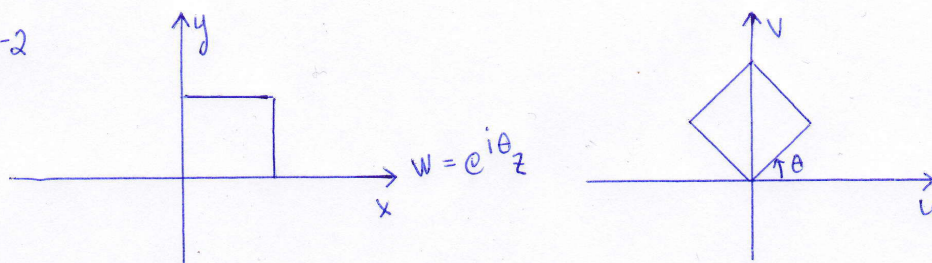
## Alueiden välisiä konformikuvauksia

### Aikeiskuvaukset

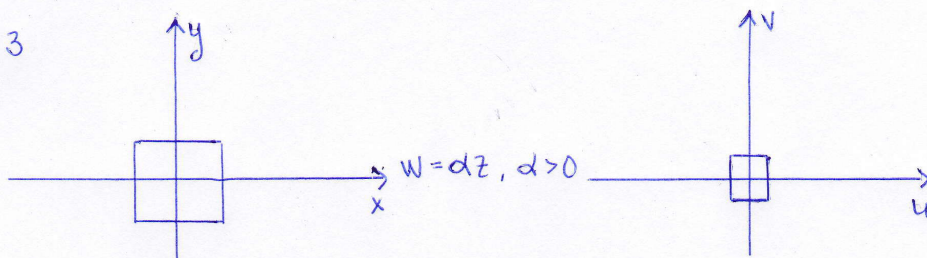
E-1



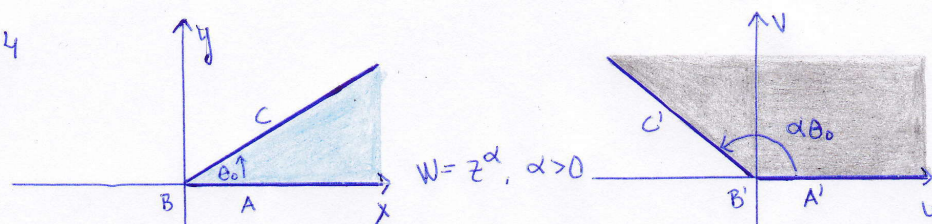
E-2



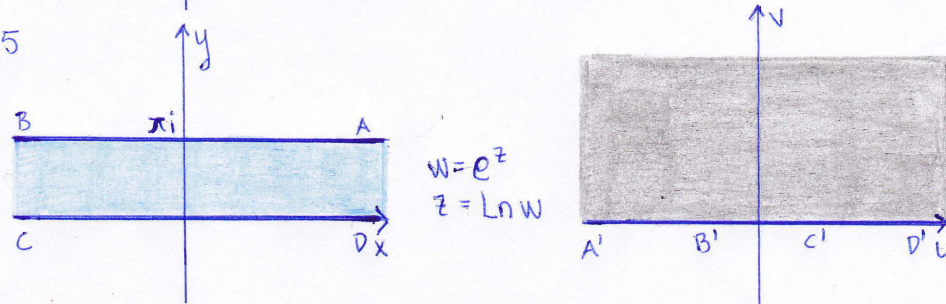
E-3



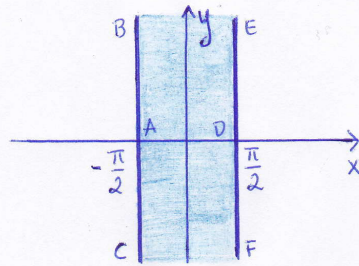
E-4



E-5

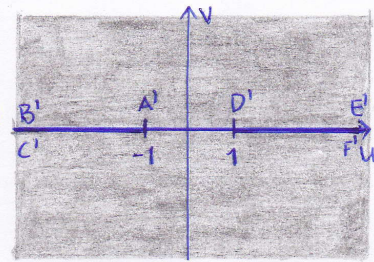


E-6

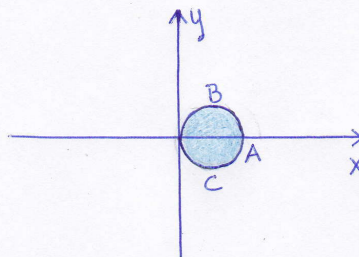


$$w = \sin z$$

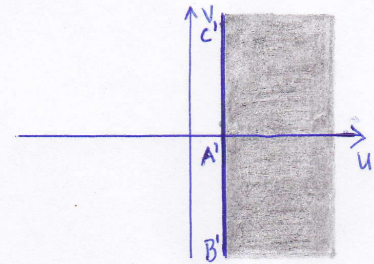
$$z = \sin^{-1} w$$



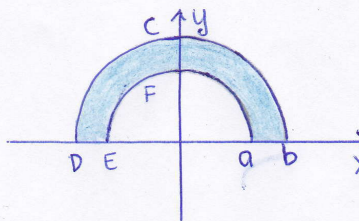
E-7



$$w = \frac{1}{z}$$

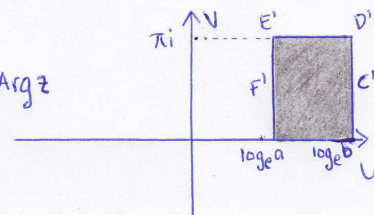


E-8

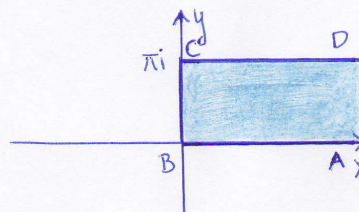


$$w = \log_e |z| + i \text{Arg} z$$

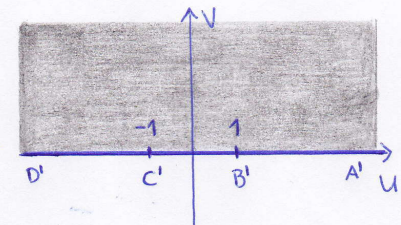
$$a > 1$$



E-9

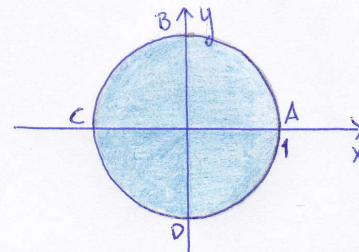


$$w = \cosh z$$

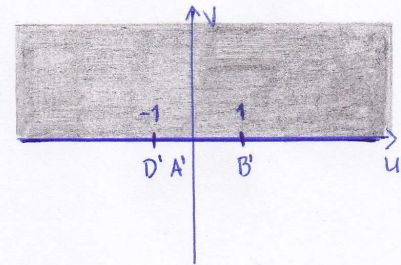


Puolitasen kuvaukset

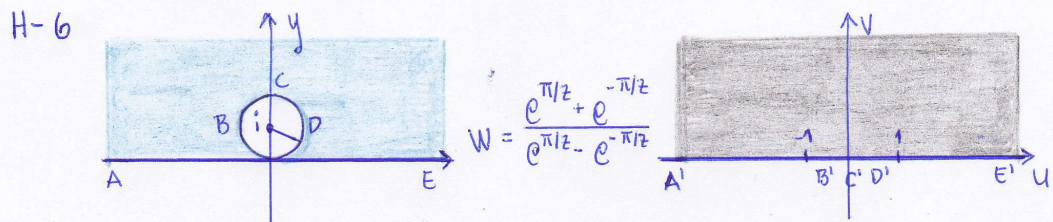
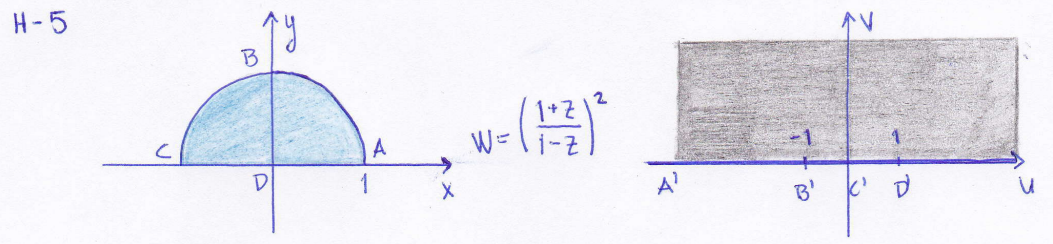
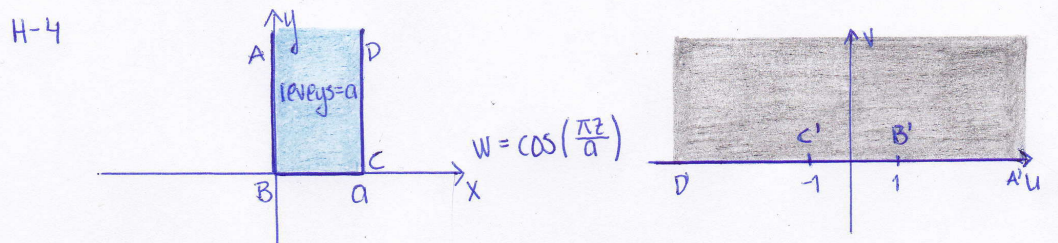
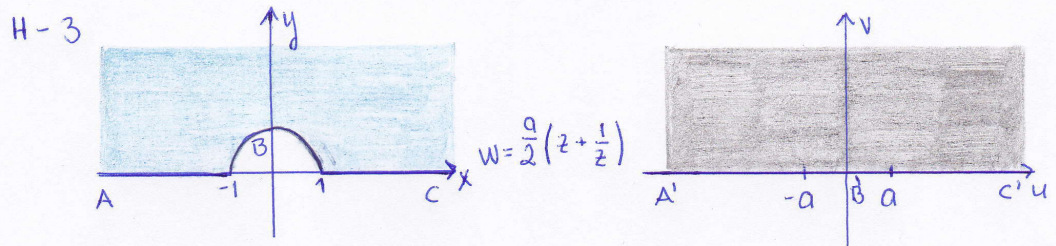
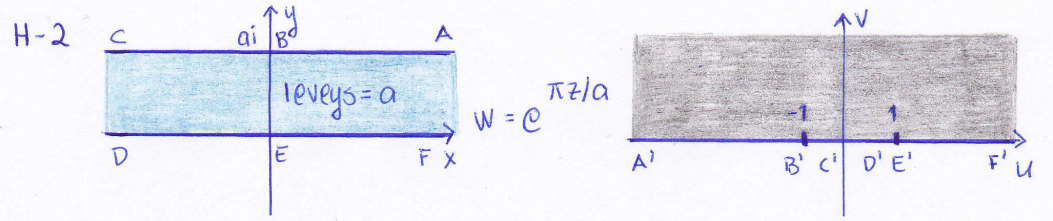
H-1



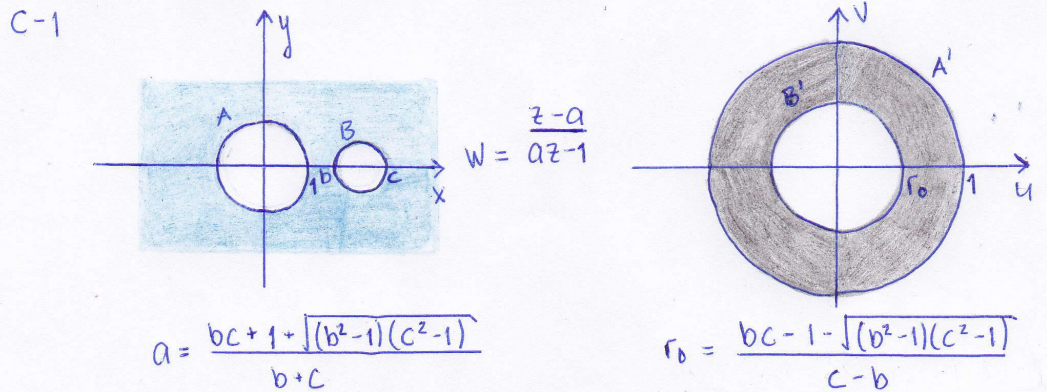
$$w = i \frac{1-z}{1+z}$$



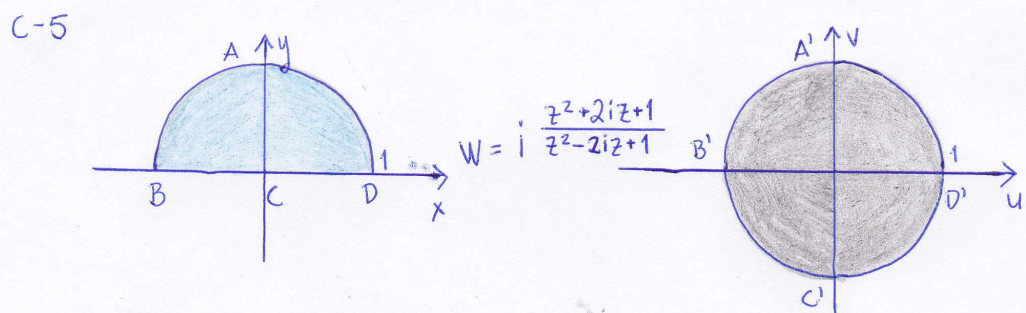
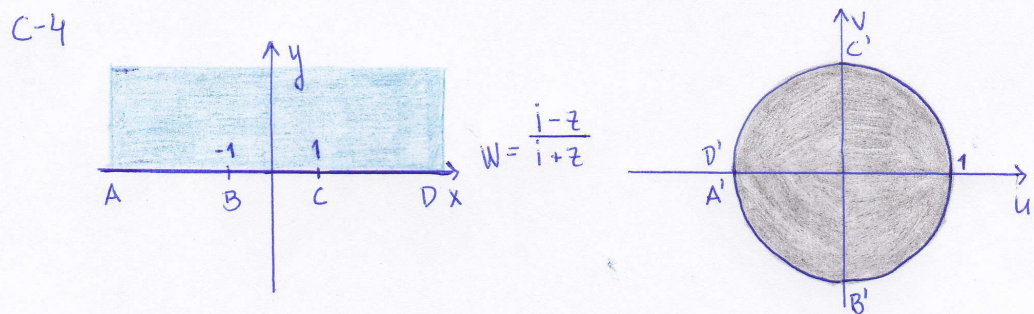
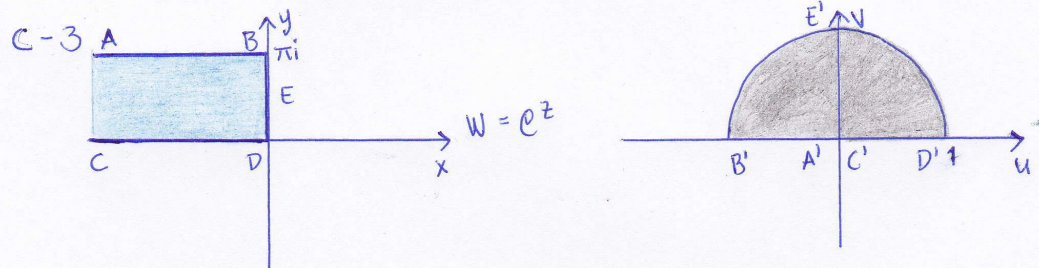
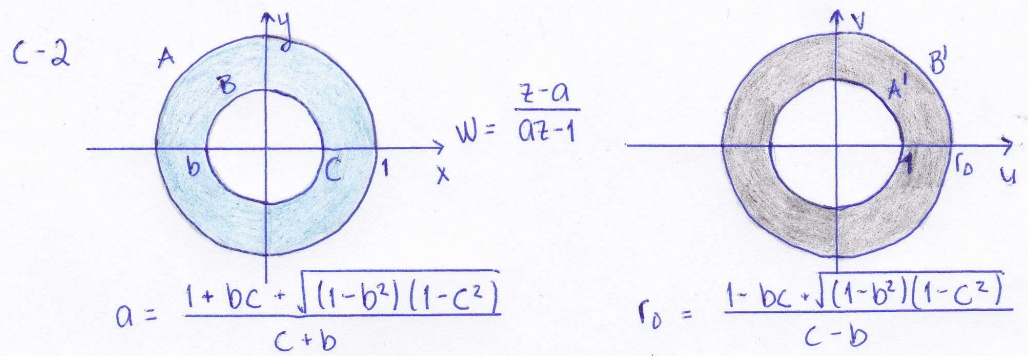
KUVA 3.13. Liite 1.2



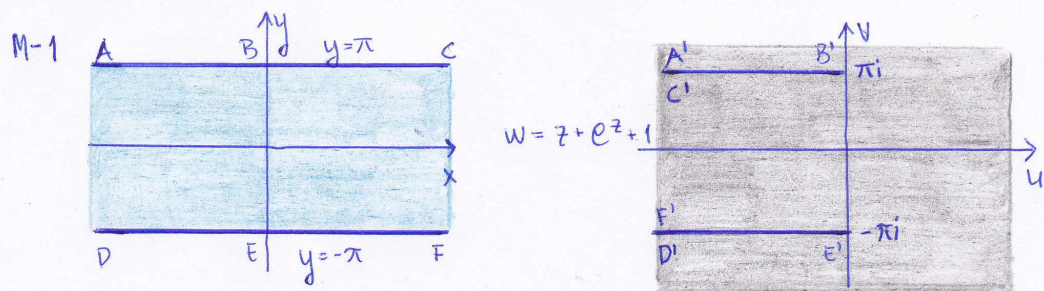
Kuvaukset ympyränmuotoisiin alueisiin



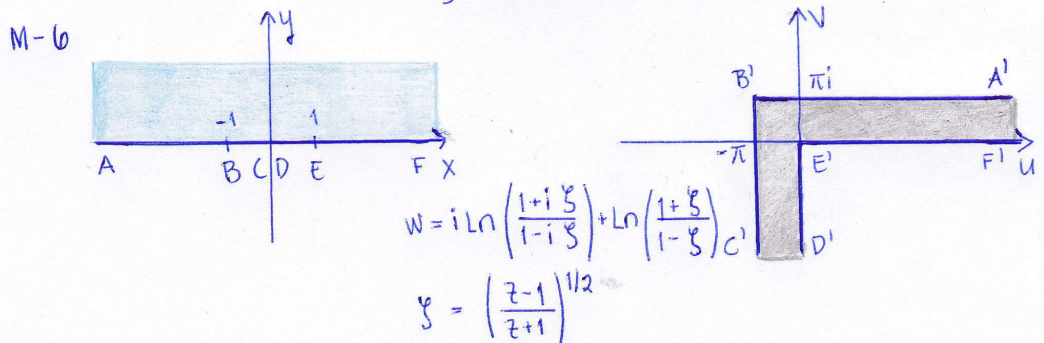
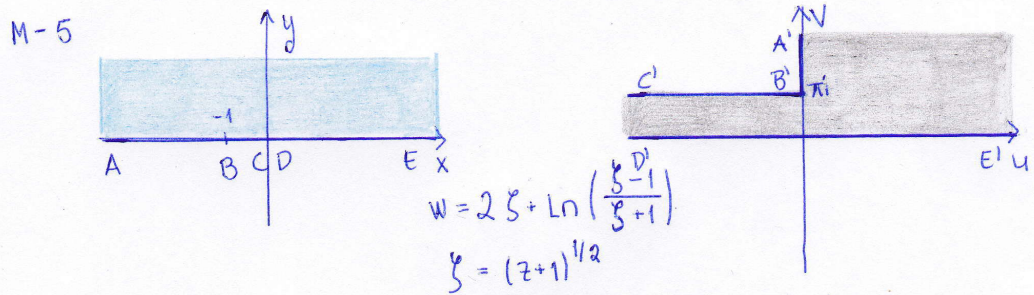
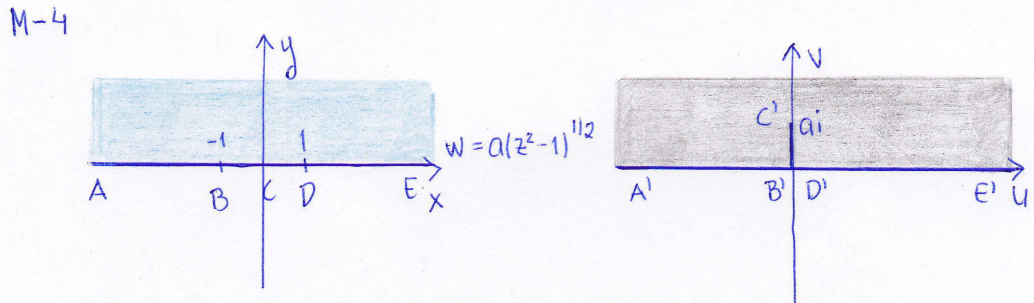
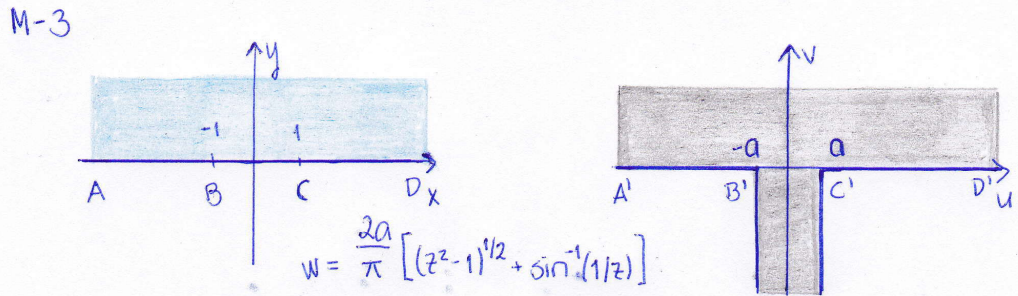
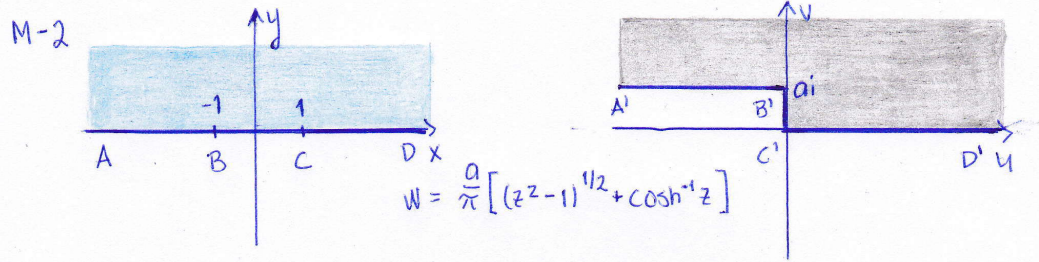
KUVA 3.14. Liite 1.3

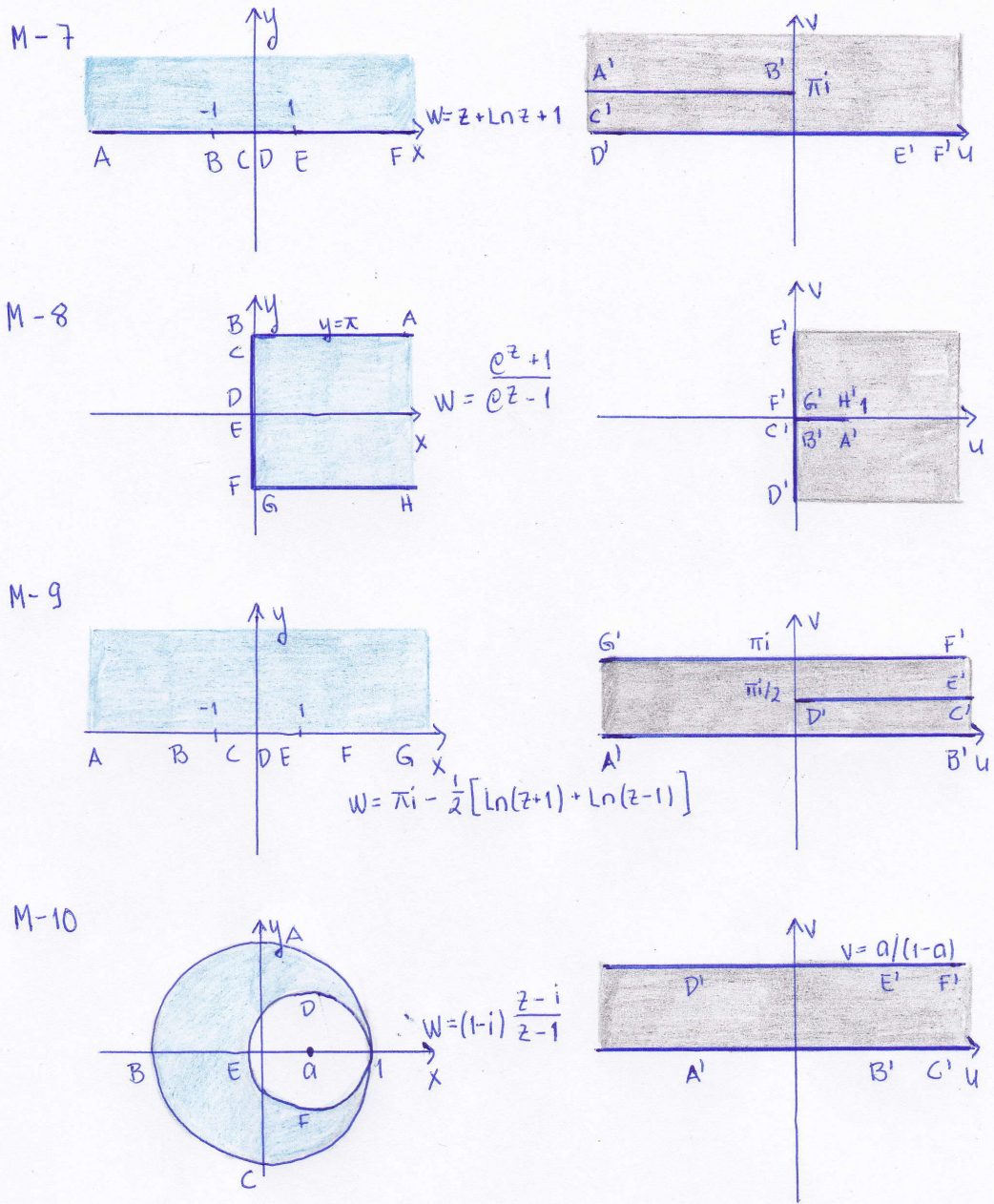


Sekalaiset kuvaukset



KUVA 3.15. Liite 1.4





KUVA 3.17. Liite 1.6