Lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät

Antti Kosonen

Matematiikan kandidaatintutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan ensimmäisen kertaluvun lineaaristen ja vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden muodostamiin yhtälöryhmiin. Tutkielman tavoitteena on löytää systemaattinen tapa tällaisten differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseksi. Ohessa tutustutaan myös niihin "työkaluihin", joita tämän tavoitteen saavuttamisessa tarvitaan. Lukijalta oletetaan perustietämystä lineaarialgebrasta sekä vektorifunktioiden analyysista, kompleksiluvuista ja differentiaaliyhtälöistä.

Differentiaaliyhtälöryhmiä esiintyy usein biologisten ja fysikaalisten ongelmien yhteydessä. Ne kuvaavat tilanteita, joissa tarkasteltavan suureen muutosnopeus riippuu suureen oman arvon lisäksi muiden suureiden arvoista tarkasteluhetkellä. Havainnollistetaan tätä esimerkillä, joka pohjautuu Utahin yliopiston insinöörimatematiikan luentomateriaaliin [2].

Esimerkki 1.1. Kolme lampea ovat kytköksissä toisiinsa niin, että ensimmäisestä lammesta vesi virtaa toiseen, toisesta kolmanteen ja siitä edelleen mereen. Ensimmäisen lammen läheiseltä laitokselta alkaa veteen vuotaa jätettä, jonka määrä (kg) ajan funktiona on $g(t)$. Jäte sekoittuu veteen ja alkaa sitten levitä muihin lampiin ja mereen. Mikä on jätteen määrä kussakin lammessa ajanhetkellä t?

Tehdään seuraavat merkinnät:

- Lampien tilavuudet ovat V_1, V_2 ja V_3 (m^3).
- Nopeudet, joilla vesi virtaa pois kustakin lammesta, ovat f_1, f_2 ja f_3 $(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}})$.
- Jätteen määrät lammissa ajanhetkellä t ovat $x_1(t)$, $x_2(t)$ ja $x_3(t)$ (kg).

Oletetaan, että jäte sekoittuu veteen tasaisesti ja miltei välittömästi. Näin ollen jätteen määrän muutosnopeudelle $(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}})$ ensimmäisessä lammessa on

$$x_1'(t) = g(t) - \frac{f_1}{V_1}x_1(t).$$

Vastaavasti jätteen määrän muutosnopeudelle toisessa lammessa pätee

$$x_2'(t) = \frac{f_1}{V_1}x_1(t) - \frac{f_2}{V_2}x_2(t),$$

ja viimeisessä

$$x_3'(t) = \frac{f_2}{V_2}x_2(t) - \frac{f_3}{V_3}x_3(t).$$

Kun edellä olevat yhtälöt kootaan yhteen, saadaan

$$
\begin{cases}
x_1'(t) = -\frac{f_1}{V_1}x_1(t) + g(t) \\
x_2'(t) = \frac{f_1}{V_1}x_1(t) - \frac{f_2}{V_2}x_2(t) \\
x_3'(t) = \frac{f_2}{V_2}x_2(t) - \frac{f_3}{V_3}x_3(t).
\end{cases}
$$

Koska tarkastelun alussa kaikki lammet ovat puhtaita, vaaditaan lisäksi, että $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Tämän *differentiaaliyhtälöryhmän* ratkaisemiseksi tulee löytää kolme funktiota, jotka toteuttavat ryhmän yhtälöt sekä vaaditun alkuarvoehdon.

Differentiaaliyhtälöryhmän ratkaiseminen vaikuttaa hankalalta ongelmalta. Yhtälöiden lineaarisuuden vuoksi ratkaisufunktioiden etsinnässä pystytään kuitenkin hyödyntämään lineaarialgebran tuloksia, ja myös kompleksiluvut tulevat olemaan avuksi. Luontevuuden vuoksi ja ulkoasun yhtenäistämiseksi vektorit ja yhden sarakkeen matriisit samastetaan tässä tutkielmassa, samoin kuin matriisit ja lineaarikuvaukset. Samoista syistä käytetään muuttujana aikaa t, ja kuvauksia käsitellään ajan funktioina. Tähän on myös käytännön syy: luonnonilmiöitä tutkittaessa vastaan tulee usein juuri aikariippuvuus.

2 Differentiaaliyhtälöryhmät

2.1 Differentiaaliyhtälöryhmiin liittyviä käsitteitä

Tässä luvussa tutustutaan yleisesti differentiaaliyhtälöryhmiin ja niihin liittyviin käsitteisiin. Luvun tiedot pohjautuvat Martin Braunin kirjan Differential equations and their applications [1] lukuun kolme, Jouni Parkkosen luentomonisteeseen Johdatus dynaamisiin systeemeihin [6], sekä kirjoittajan omiin muistiinpanoihin [5]. Aloitetaan antamalla määritelmä differentiaaliyhtälöryhmälle.

Määritelmä 2.1 (Differentiaaliyhtälöryhmä)**.** Olkoot $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}$ avoimia joukkoja ja $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Tällöin yhtälöryhmää

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

aukikirjoitettuna

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = f_1(t, (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = f_2(t, (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t) = f_n(t, (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))), \end{cases}$$

kutsutuaan *differentiaaliyhtälöryhmäksi* tai *-systeemiksi*. Mikäli oikean puolen kuvaus $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ei suoraan riipu muuttujasta t, eli on $f : U \to \mathbb{R}^n$ ja $x'(t) = f(x(t))$, niin differentiaaliyhtälöryhmä on *autonominen*.

Differentiaaliyhtälöryhmä on *lineaarinen*, jos se on esitettävissä muodossa

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t). \end{cases}$$

Lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä voidaan esittää myös matriisien avulla. Tällöin tarkasteltavista funktoista x_j ja funktioista g_j muodostetaan vektorit, ja funktioiden x_j kertoimet sijoitetaan kerroinmatriisiin. Näin kirjoitettuna lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

eli lyhyesti $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$. Mikäli kerroinmatriisi A ei riipu muuttujasta t, niin sanotaan, että differentiaaliyhtälöryhmä on *vakiokertoiminen*. Jos taas kuvaukselle g on $g(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin differentiaaliyhtälöryhmä on *homogeeninen*. Tarkastellaan esimerkin vuoksi kahta seuraavaa differentiaaliyhtälöryhmää.

Esimerkki 2.2 (Matemaattinen heiluri)**.** Matemaattisen heilurin liikeyhtälöt ovat

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = -g \cdot \sin(\theta(t)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) = \frac{1}{l} \cdot v(t), \end{cases}$$

missä g on gravitaatiovakio, $v(t)$ on heilurin massan ratanopeus ja $\theta(t)$ on heilurin varren kiertokulma [5]. Tämä *differentiaaliyhtälöpari* on autonominen, mutta se ei ole lineaarinen.

Esimerkki 2.3 (Diabeteksen diagnosointi)**.** Diabetesta diagnosoitaessa tarkastellaan veren glukoosikonsentraation ja yhteenlasketun hormonikonsentraation eroja optimiarvoistaan, $g(t)$ ja $h(t)$. Näiden muutokset diagnoosin aikana noudattavat yhtälöitä

$$\begin{cases} g'(t) = -m_1 g(t) - m_2 h(t) + j(t) \\ h'(t) = -m_3 h(t) + m_4 g(t), \end{cases}$$

missä m_1, m_2, m_3 ja m_4 ovat positiivisia vakioita ja $j(t)$ on se nopeus, jolla veren glukoosipitoisuutta lisätään diagnoosin aikana [1, s.181]. Matriisimuodossa tämä on

$$\begin{bmatrix} g'(t) \\ h'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä differentiaaliyhtälöryhmä on lineaarinen ja vakiokertoiminen, mutta se ei ole homogeeninen. Ryhmän autonomisuus riippuu siitä, pidetäänkö $j(t)$ vakiona.

Differentiaaliyhtälöryhmän (1) *ratkaisulla* tarkoitetaan jatkuvasti differentioituvaa kuvausta $x : I \to \mathbb{R}^n$, jolle $x'(t) = f(t, x(t))$. Ratkaisu on siis vektoriarvoinen kuvaus x, jonka komponenttikuvaukset $x_1, \ldots, x_n$ toteuttavat yhtälöryhmän (1) kaikki yhtälöt. Tästä syystä differentiaaliyhtälöryhmää voitaisiinkin kutsua vain (vektorifunktion) differentiaaliyhtälöksi. Tässä tutkielmassa käytetään matriisimuodossa kirjoitetuista differentiaaliyhtälöryhmistä termiä differentiaaliyhtälösysteemi.

Varsinkin sovelluksissa ollaan yleensä kiinnostuneita ratkaisuista, jotka tietyllä ajanhetkellä toteuttavat jonkin halutun vaatimuksen, niin kutsutun *alkuarvon*. Tällaista ongelmaa kutsutaan *alkuarvotehtäväksi*, ja vaaditaan

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Alkuarvotehtävän (2) ratkaisu on jatkuvasti differentioituva kuvaus $x : I \to \mathbb{R}^n$, jolle $x'(t) = f(t, x(t))$ ja $x(t_0) = x_0$.

Differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisemisella tarkoitetaan sen kaikkien mahdollisten ratkaisujen löytämistä. Sellaista kuvausta, jonka avulla saadaan kaikki yksittäiset (alkuarvotehtävien) ratkaisut, kutsutaan *yleiseksi ratkaisuksi*. Mutta onko ratkaisuja aina edes olemassa ja jos on, niin kuinka ne löydetään? Entä kuinka monta ratkaisua täytyy löytää systeemin ratkaisemiseksi täydellisesti? Näihin kysymyksiin aletaan nyt etsiä vastauksia.

2.2 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Seuraavaksi esiteltävä lause takaa, että differentiaaliyhtälösysteemeille on tietyin oletuksin aina olemassa ratkaisuja ainakin jollakin aikavälillä. Sitä ennen esitellään kuitenkin eräs määritelmä, jota tarvitaan lauseen formuloinnissa.

Määritelmä 2.4 (Lipschitz-jatkuvuus)**.** Jatkuva kuvaus $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on *Lipschitz-jatkuva*, jos on olemassa luku $L > 0$ siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^m$. Tällöin sanotaan myös, että kuvaus f on *L-Lipschitz*, *L-Lipschitz-jatkuva*, tai *Lipschitz-jatkuva vakiolla L*.

Lause 2.5 (Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause)**.** *Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja ja $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, jolle kuvaus $x \mapsto f(t, x)$ on L-Lipschitz-jatkuva kaikilla $t \in I$. Tällöin jokaisella $(t_0, x_0) \in I \times U$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ määritelty yksikäsitteinen ratkaisu.

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistus perustuu niin kutsuttuun Picardin iteraatioon. Lause 2.5 likimain edellä olevassa muodossa ja sen todistus tapauksessa, jossa $U = \mathbb{R}^n$ ja kuvaus f on L-Lipschitz, on esitetty Jouni Parkkosen luentomonisteessa Johdatus dynaamisiin systeemeihin [6, s. 6]. Skalaaritilannetta vastaavan lauseen varsin yksityiskohtainen todistus on luettavissa Martin Braunin teoksesta [1, s. 67].

Lipschitz-ehdon toteutumisen tarkistaminen voi olla käytännössä hyvin hankalaa. Kompaktiin joukkoon rajoitettaessa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset ovat kuitenkin Lipschitz-jatkuvia jollakin vakiolla. Siispä tällöin riittää tarkastella, onko oikean puolen kuvaus f jatkuvasti differentioituva. Lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin tapauksessa myös Lipschitz-ehdon toteutuminen on kuitenkin helppoa todeta. Tällöin nimittäin oikean puolen kuvaus f on lineaarikuvaus, tai epähomogeenisessa tapauksessa lineaariaffiini kuvaus avaruudesta $\mathbb{R}^n$ avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Tällainen kuvaus on aina Lipschitz-jatkuva.

Lemma 2.6. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoon $f : U \to \mathbb{R}^n$ lineaariaffiini kuvaus. Tällöin kuvaus f on Lipschitz-jatkuva.*

Todistus. Olkoot $x \in U$ ja $y \in U$, ja kuvaus f kuten lauseen oletuksissa. Tällöin f on muotoa $f(x) = Ax + b$, missä A on $n \times n$-matriisi. Koska kuvaukselle f on

$$d(f(x), f(y)) = \|(Ax + b) - (Ay + b)\| = \|Ax - Ay\|,$$

riittää tarkastella aidosti lineaarista tapausta. Lineaarisuuden nojalla

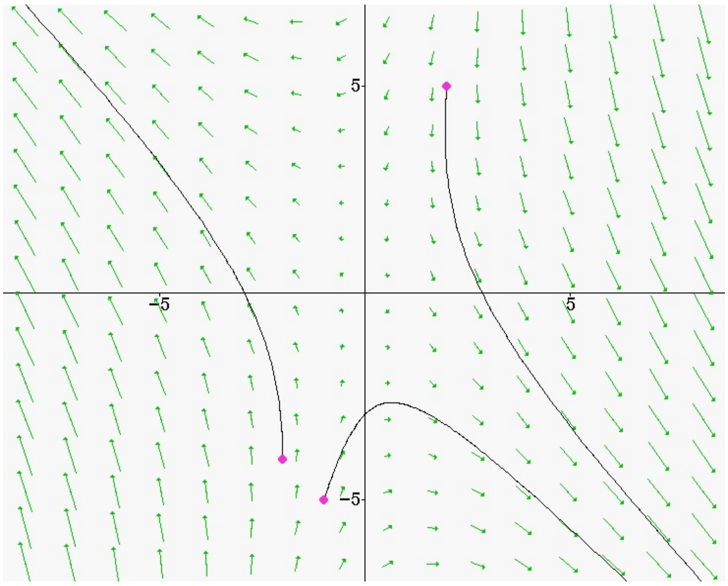
$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\|.$$

Kuvauksen A *operaattorinormille* $\|A\|_{op} = \max\{\|Az\| : z \in \mathbb{R}^n, \|z\| = 1\}$ pätee $\|Az\| \leq \|A\|_{op}\|z\|$ kaikilla $z \in \mathbb{R}^n$. Siispä

$$\begin{aligned}
\|A(x - y)\| &\leq \|A\|_{op}\|(x - y)\| \\
&= \underbrace{\max\{\|Az\| : z \in \mathbb{R}^n \|z\| = 1\}}_{=:L}\|(x - y)\| \\
&= L\|(x - y)\| \\
&= L \cdot d(x, y),
\end{aligned}$$

joten kuvaus f on Lipschitz-jatkuva. □

Lemman 2.6 anti on, että olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta 2.5 voidaan aina soveltaa lineaarisiin differentiaaliyhtälösysteemeihin. Siispä tässä tutkielmassa tarkasteltavissa tapauksissa ratkaisuja on aina olemassa, ja lisäksi jokaisen



Kuva 1. Systeemin $x'(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} x(t)$ kerroinmatriisin määräämä vektorikenttä ja alkuarvoista $(-1, 5)$, $(-2, -4)$ ja $(2, 5)$ lähtevät ratkaisut.

alkuarvon kautta kulkee täsmälleen yksi ratkaisu. Geometrisesti tämä tarkoittaa, että kahden eri alkuarvon kautta kulkevan ratkaisun kuvaajat eivät voi leikata toisiaan.

Differentiaaliyhtälöparien ratkaisuja voidaan hahmotella tasossa tarkasteltavan systeemin oikean puolen kuvauksen f määräämän aikariippumattoman vektorikentän avulla: Kuvaus f liittää jokaiseen joukon U pisteeseen x derivaattavektorin $f(x)$, jonka alkupiste on x. Ratkaisu $x(t)$ on siis parametrisoitu käyrä, jonka tangenttivektori pisteessä $x(t)$ on $f(x(t))$. [5]. Tätä havainnollistaa kuva 1.

3 Homogeeniset differentiaaliyhtälöryhmät ja lineaarialgebra

Differentiaaliyhtälösysteemejä on huomattavasti helpompi käsitellä kirjoitettuna matriisien avulla kuin yhtälöryhmänä. Tämä ei kuitenkaan ole tärkein syy tämän merkintätavan käyttökelpoisuudelle. Lineaarialgebra tulee nimittäin osoittautumaan todella tehokkaaksi ja jopa välttämättömäksi työkaluksi differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisemisessa. Siispä systeemejä käsitellään tästä eteenpäin matriisimuodossa. Tämän luvun tiedot ovat peräisin Martin Braunin teoksesta [1].

Aloitetaan differentiaaliyhtälösysteemien tutkiminen yksinkertaisimmasta tapauksesta, eli lineaarisesta ja homogeenisesta systeemistä

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3}$$

mikä on aukikirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Tutkielman tarkastelut tulevat painottumaan juuri muotoa $x'(t) = Ax(t)$ oleviin systeemeihin. Lemman 2.6 nojalla olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta 2.5 voidaan soveltaa, mutta nyt tarkasteltavassa tapauksessa tilanne on kuitenkin vielä parempi. Seuraava tulos voidaan todistaa samaan tapaan kuin lause 2.5, kun huomioidaan lisäoletus lineaarisuudesta.

Lause 3.1. *Olkoon A vakiokertoiminen $n \times n$-neliömatriisi. Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on olemassa täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ja tämä ratkaisu on määritelty kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Lauseen 3.1 myötä kysymykseen ratkaisujen oloemassaolosta on löydetty vastaus. Seuraavaksi kysymys kuuluu, kuinka monta vektoriarvoista funktiota on löydettävä, jotta nämä kaikki mahdolliset ratkaisut saadaan esitettyä. Intuitiivinen veikkaus voisi olla, että yhtä monta funktiota, kuin systeemissä on yhtälöitä. Osoitetaan seuraavaksi, että näin todella on.

Lause 3.2. *Lineaarisen, homogeenisen differentiaaliyhtälösysteemin* (3) *ratkaisut virittävät n-ulotteisen vektoriavaruuden.*

Todistus. Olkoon $\mathbb{V}$ kaikkien systeemin (3) ratkaisujen joukko. On näytettävä, että $\mathbb{V}$ on vektoriavaruus ja että sen dimensio on n. Näytetään ensin, että ratkaisut todella virittävät vektoriavaruuden.

$\mathbb{V}$ on (reaalinen) vektoriavaruus, mikäli se on epäytyhjä ja sen alkioille on määritelty yhteenlasku $a + b \in \mathbb{V}$ ja reaaliluvulla λ kertominen $\lambda a \in \mathbb{V}$ siten, että seuraavat laskusäännöt toteutuvat kaikilla $a, b, c \in \mathbb{V}$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(i) $a + b = b + a$

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) On olemassa $0 \in \mathbb{V}$ siten, että $a + 0 \in \mathbb{V}$ kaikilla $a \in \mathbb{V}$

(iv) On olemassa $(-a) \in \mathbb{V}$ siten, että $a + (-a) = 0$

(v) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

(vi) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(vii) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

(viii) $1 \cdot a = a$.

Lauseen 3.1 nojalla $\mathbb{V}$ on epätyhjä. Joukon $\mathbb{V}$:n yhteenlaskuksi voidaan asettaa tavallinen komponenteittainen yhteenlasku, sillä tällöin vektorifunktioiden laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t) + b(t)) &= a'(t) + b'(t) \\ &= Aa(t) + Ab(t) \\ &= A(a(t) + b(t)). \end{aligned}$$

Komponenteittainen reaaliluvulla kertominen sopii kertolaskuksi joukkoon $\mathbb{V}$, sillä

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda a(t)) = \lambda \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a(t) = \lambda A a(t) = A(\lambda a(t)).$$

Olkoon sitten $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $0(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Funktio 0 on systeemin (3) ratkaisu, sillä $0'(t) = 0 = A0(t)$. Siten $0 \in \mathbb{V}$, ja lisäksi $a + 0 = a$ kaikilla $a \in \mathbb{V}$. Edellä olevan nojalla $(-1)a \in \mathbb{V}$, jolloin $a + (-1)a = a + (-a) = 0$. Näin ollen ehdot (i)–(iv) ja (viii) toteutuvat. Koska $a(t), b(t), c(t) \in \mathbb{R}^n$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin myös ehdot (v)–(vii) toteutuvat $\mathbb{R}^n$:n laskusääntöjen nojalla. Siten $\mathbb{V}$ todella on vektoriavaruus.

Lisäksi tulee näyttää, että $\mathbb{V}$:n dimensio on n. Tätä varten esitetään ensin jotkin n lineaarisesti riippumatonta vektoria avaruudesta $\mathbb{V}$ ja näytetään sitten, että nämä vektorit myös virittävät $\mathbb{V}$:n.

Olkoon $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \cdots, n$, alkuarvotehtävän

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(0) = e_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \underbrace{1}_{j.\text{ paikka}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

ratkaisu. Lauseen 3.1 nojalla kuvaus $t \mapsto \phi_j(t)$ on olemassa ja yksikäsitteinen kaikilla t, ja määrittelynsä nojalla $\phi_j \in \mathbb{V}$ kaikilla j. Olkoon $c_j \in \mathbb{R}$. Jos tällöin

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t) = 0,$$

niin erityisesti

$$c_1\phi_1(0) + c_2\phi_2(0) + \ldots + c_n\phi_n(0) = 0.$$

Kuvausten ϕ_j määrittelyn perusteella on yhtäpitävää vaatia

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0.$$

Koska vektorit e_j ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantavektoreina lineaarisesti riippumattomia, on oltava $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Siten kuvaukset ϕ_j ovat n lineaarisesti riippumatonta vektoria avaruudessa $\mathbb{V}$. Jos ne vielä virittävät $\mathbb{V}$:n, on lause saatu todistettua. Olkoon $y \in \mathbb{V}$ ja olkoon $y(0) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$. Tällöin

$$y(0) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(0) = \phi(0).$$

Nyt olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta 3.1 seuraa, että $y(t) = \phi(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Siispä

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t),$$

joten mielivaltainen ratkaisu on esitettävissä ratkaisujen ϕ_j lineaarikombinaationa. Näin ollen funktiot ϕ_j myös virittävät avaruuden $\mathbb{V}$, ja lause on todistettu. □

Lause 3.2, edellä olevaa vastaava todistus ja vektoriavaruuden määritelmä on esitetty Martin Braunin teoksessa [1, s. 291]. Vektoriavaruuden määritelmä on luettavissa myös esimerkiksi Mikko Saarimäen luentomonisteista Reaalisia vektoriavaruuksia ja ominaisarvoja [9, s. 53] ja Matriisiteoria [7, s. 4].

Lause 3.2 on tämän tutkielman kenties keskeisin tulos. Sen nojalla homogeenisen systeemin (3) ratkaisemiseksi riittää löytää n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, jotka eivät ole ”nollaratkaisuja”. Tällöin kaikki mahdolliset ratkaisut saadaan esitettyä näiden lineaarikombinaatioina. Mutta kuinka tarvittavat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut löydetään, ja mitä muotoa ne ovat? Haetaanpa mallia yksiulotteisesta tilanteesta. Ensimmäisen kertaluvun lineaarisen ja homogeenisen differentiaaliyhtälön $y'(t) = \lambda y(t)$ ratkaisu on eksponenttifunktio $e^{\lambda t}$, joten hyvä veikkaus systeemin (3) ratkaisuksi voisi olla kuvaus $t \mapsto e^{\lambda t}v$, missä $v \in \mathbb{R}^n$. Jotta tämä voi olla ratkaisu, sen on toteutettava yhtälö

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v. \tag{4}$$

Yhtälön vasemmalta puolelta saadaan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t}v = \lambda e^{\lambda t}v$, ja oikealta puolelta $Ae^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$. Siispä on oltava

$$(\lambda v)e^{\lambda t} = (Av)e^{\lambda t}.$$

Näin on täsmälleen silloin, kun

$$Av = \lambda v.$$

Siispä $e^{\lambda t}v$ on (3):n ratkaisu, kun v on matriisin A ominaisvektori. Jos nyt vektorit v^j, $j = 1, 2, \dots, n$, ovat $n \times n$-matriisin A lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, saadaan niiden avulla systeemille (3) n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.

Lause 3.3. *Olkoon systeemin* (3) *kerroinmatriisilla n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita* $v^1, \dots, v^n$. *Tällöin systeemin yleinen ratkaisu on*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v^j,$$

missä λ_j *on ominaisvektoriin* v^j *liittyvä ominaisarvo ja luvut* c_j *ovat alkuarvosta määräytyviä vakioita.*

Todistus. Edellä olevan laskun nojalla yksittäinen ratkaisu on muotoa $e^{\lambda_j t}v^j$. Lauseen 3.2 nojalla ratkaisut virittävät n-ulotteisen vektoriavaruuden, joten yksittäisratkaisujen monikerrat ja summat ovat jälleen ratkaisuja. Siispä systeemin (3) yleinen ratkaisu on väitettyä muotoa. □

Lauseen 3.3 avulla on helppo löytää kaikki ratkaisut homogeeniselle differentiaaliyhtälösysteemille.

Esimerkki 3.4. Ratkaistaan differentiaaliyhtälösysteemi

$$x'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} x(t).$$

Etsitään ensin matriisin A ominaisarvot laskemalla sen karakteristisen polynomin nollakohdat:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = 3$. Etsitään näitä vastaavat ominaisvektorit u ja v Gaussin ja Jordanin eliminaatiolla:

$\lambda_1 = 4$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6-4 & -3 & 0 \\ 2 & 1-4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3s \\ u_2 = 2s \end{cases} \Rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6-3 & -3 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = s \\ v_2 = s \end{cases} \Rightarrow \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siispä funktiot

$$e^{4t}u = e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad e^{3t}v = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ovat kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Lauseen 3.3 nojalla yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä

$$x'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:B} x(t). \tag{5}$$

Etsitään matriisin B ominaisarvot:

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0 \quad \text{kaikilla } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Matriisilla B ei ole reaalisia ominaisarvoja eikä siten myöskään reaalisia ominaisvektoreita. Siispä lauseen 3.3 avulla ei suoraan saada ratkaisuja systeemille (5). *Kompleksilukujen* joukossa kaikilla polynomeilla on kuitenkin algebran peruslauseen nojalla astelukunsa verran juuria. Voitaisiinko systeemille löytää ratkaisuja kompleksilukujen avulla?

4 Kompleksiset ominaisarvot ja -vektorit

> ”The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.”
> —*Jacques Hadamard*

4.1 Kompleksinen vektoriavaruus

Lauseen 3.2 todistuksessa esiintyy vektoriavaruuden määritelmä. Reaalisen vektoriavaruuden vektoreille on määritelty komponenteittainen yhteenlasku ja *reaaliluvulla* kertominen. Yhtä hyvin vektoreille voidaan määritellä *kompleksiluvulla* kertominen, ja lauseen 3.2 todistus voitaisiinkin tehdä sanasta sanaan vaihtamalla vain reaaliluvut λ ja μ kompleksiluvuiksi. Tällaista vektoriavaruutta, jonka *kerroinkunta* on reaalilukujen kunnan $\mathbb{R}$ sijaan kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$, kutsutaan *kompleksiseksi vektoriavaruudeksi*.

Huomautus 4.1. Differentiaaliyhtälösysteemien tarkasteluihin liittyy oleellisesti kaksi kompleksista vektoriavaruutta: ratkaisujen virittämä (funktio)avaruus, sekä avaruus $\mathbb{C}^n$, johon ratkaisujen arvot kuuluvat.

Kun differentiaaliyhtälösysteemien tarkastelut siirretään kompleksisiin vektoriavaruuksiin, voidaan erityisesti matriiseille hyväksyä kompleksiset ominaisarvot. Tällöin ominaisarvoja löytyy aina ”riittävästi” eli karakteristisen polynomin asteluvun verran. Tämä johtaa myös siihen, että ominaisvektoreissa alkaa esiintyä kompleksisia komponentteja. Nämä kompleksiset vektorit, kuten luvutkin, voidaan esittää *reaaliosan* $\mathrm{Re}(v)$ ja *imaginaariosan* $\mathrm{Im}(v)$ avulla muodossa $\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)$. Kompleksisia vektoreita voi myös *konjugoida* samaan tapaan kuin kompleksilukujakin:

Määritelmä 4.2 (Vektorin kompleksikonjugaatti)**.** *Vektorin*

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \textit{kompleksikonjugaatti} \text{ on vektori} \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{bmatrix},$$

missä $\overline{v_i}$ on luvun v_i kompleksikonjugaatti. Samalla tavalla määritellään myös *matriisin kompleksikonjugaatti*.

Esimerkki 4.3. Esimerkissä 3.5 esiintyneen systeemin (5) kerroinmatriisin $B =$

$\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ (kompleksiset) ominaisarvot ovat $\pm i$. Etsitään näitä vastaavat ominaisvektorit u ja v:

$\lambda_1 = i$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_1 = is \\ u_2 = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -i$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = -it \\ v_2 = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esimerkin vektorit u ja v ovat lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Ne eroavat toisistaan vain imaginaariosansa merkin verran, kuten myös ominaisarvot, joita ne vastaavat. Ominaisarvot ovat siis toistensa kompleksikonjugaatteja, aivan kuten ominaisvektoritkin. Tämä havainto pätee yleisesti.

Lemma 4.4. *Olkoot $\lambda \in \mathbb{C}$ reaalisen neliömatriisin A ominaisarvo, ja v sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin myös luvun λ kompleksikonjugaatti $\overline{\lambda}$ on A:n ominaisarvo, ja $\overline{v}$ on sitä vastaava ominaisvektori.*

Todistus. Koska oletusten perusteella $Av = \lambda v$, niin myös $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$. Konjugoinnin ominaisuuksien perusteella tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Koska matriisi A on reaalinen, sen kompleksikonjugaatti on A itse. Siispä $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, eli $\overline{\lambda}$ on matriisin A ominaisarvo, ja $\overline{v}$ on sitä vastaava ominaisvektori. [1, s. 344]. □

4.2 Kompleksiarvoinen eksponenttifunktio

Kompleksisten ominaisarvojen ja -vektoreiden hyväksyminen johtaa siihen, että differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisun on myös oltava kompleksiarvoinen. Mutta mitä tarkoittaa $e^{\lambda t}$, jos $\lambda \in \mathbb{C}$? Kysymykseen vastaamiseen seuraavaksi käytettävät tiedot ovat peräisin Tero Kilpeläisen luentomonisteesta Kompleksianalyysi [3].

Määritelmä 4.5 (Kompleksinen eksponenttifunktio)**.** Olkoon $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Määritellään *kompleksinen eksponenttifunktio* asettamalla

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad exp(\lambda) := e^{\lambda} := e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)).$$

Tämä määritelmä on hyvä, sillä näin määriteltynä kompleksinen eksponenttifunktio yhtyy reaalisen eksponenttifunktion määrittelyyn, kun $\beta = 0$. Lisäksi kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätevät seuraavat, reaalisesta tapauksesta tutut laskusäännöt:

Lemma 4.6. *Kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätevät seuraavat laskusäännöt kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:*

(i) $e^{\lambda+\mu} = e^{\lambda}e^{\mu}$

(ii) $e^{(\lambda)^{-1}} = e^{-\lambda}$.

Todistus. Olkoot $\lambda = \alpha + i\beta$ ja $\mu = \gamma + i\delta$. Tällöin kompleksisen eksponenttifunktion määritelmän ja trigonometristen funktioiden laskusääntöjen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
e^{\lambda}e^{\mu} &= e^{\alpha}e^{\gamma}(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\delta + i\sin\delta) \\
&= e^{\alpha+\gamma}(\cos\beta\cos\delta + i(\cos\beta\sin\delta + \sin\beta\cos\delta) - \sin\beta\sin\delta) \\
&= e^{\alpha+\gamma}(\cos(\beta+\delta) + i\sin(\beta+\delta)) \\
&= e^{(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)} \\
&= e^{\lambda+\mu},
\end{aligned}$$

jolloin kohta (i) on todistettu. Tämän avulla saadaan $e^{\lambda}(e^{\lambda})^{-1} = (e^{\lambda})^{1}(e^{\lambda})^{-1} = (e^{\lambda})^{0} = 1$ ja $e^{\lambda}e^{-\lambda} = e^{0} = 1$, jolloin käänteisalkion yksikäsitteisyyden nojalla $(e^{\lambda})^{-1} = e^{-\lambda}$. □

Lemman 4.6 nojalla on järkevää määritellä kuvaus $t \mapsto e^{\lambda t}v$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v \in \mathbb{C}^n$. Koska kompleksisen eksponenttifunktion derivaatta on sen laskusääntöjen tapaan reaalisen tilanteen kanssa yhteensopiva (ks. [3]), on myös kuvauksen $t \mapsto e^{\lambda t}v$ derivaatta sitä. Siispä tämä kuvaus toteuttaa yhtälön (4) ja on siten systeemin (3) kompleksiarvoinen ratkaisu. Saattaisi luulla, ettei tällaisesta ratkaisusta ole juurikaan apua reaalimaailman ongelman ratkaisemisessa. Kompleksinen ratkaisu $t \mapsto e^{\lambda t}v$ antaa kuitenkin differentiaaliyhtälösysteemille aina kaksi reaalista ratkaisua [1, s. 341].

Lause 4.7. *Olkoon* $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ *ja olkoon funktio* $x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}v$ *differentiaaliyhtälösysteemin* (3) *kompleksiarvoinen ratkaisu. Tällöin funktio* x *on esitettävissä muodossa* $x(t) = y(t) + iz(t)$, *missä funktiot*

$$\begin{aligned} y(t) &:= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathrm{Re}(v) - \sin(\beta t)\mathrm{Im}(v)) \quad \textit{ja} \\ z(t) &:= e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\mathrm{Re}(v) + \cos(\beta t)\mathrm{Im}(v)) \end{aligned}$$

ovat systeemin (3) *reaaliarvoisia ratkaisuja.*

Todistus. Näytetään ensin, että funktio $x(t)$ on esitettävissä muodossa $x(t) = y(t) + iz(t)$ ja sitten, että funktiot y ja z todella ovat systeemin (3) reaalisia ratkaisuja. Kun vektori v esitetään reaali- ja imaginaariosiensa avulla, saadaan lemman 4.6 kohdan (i) nojalla

$$x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}v = e^{\alpha t}e^{i\beta t}(\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)).$$

Tämä voidaan kompleksisen eksponenttifunktion määritelmän avulla esittää muodossa

$$e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v)).$$

Tästä päästään sieventämällä haluttuun muotoon:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathrm{Re}(v) - \sin(\beta t)\mathrm{Im}(v)) + \\ &\qquad ie^{\alpha t}(\sin(\beta t)\mathrm{Re}(v) + \cos(\beta t)\mathrm{Im}(v)) \\ &=: y(t) + iz(t). \end{aligned}$$

Siispä funktio x on esitettävissä halutulla tavalla. Tämän jälkeen on helppoa näyttää, että funktiot y ja z ovat reaalisia ratkaisuja. Koska funktio x on systeemin (3) kompleksiarvoinen ratkaisu, niin

$$x'(t) = Ax(t) \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + iz'(t) = A(y(t) + iz(t)).$$

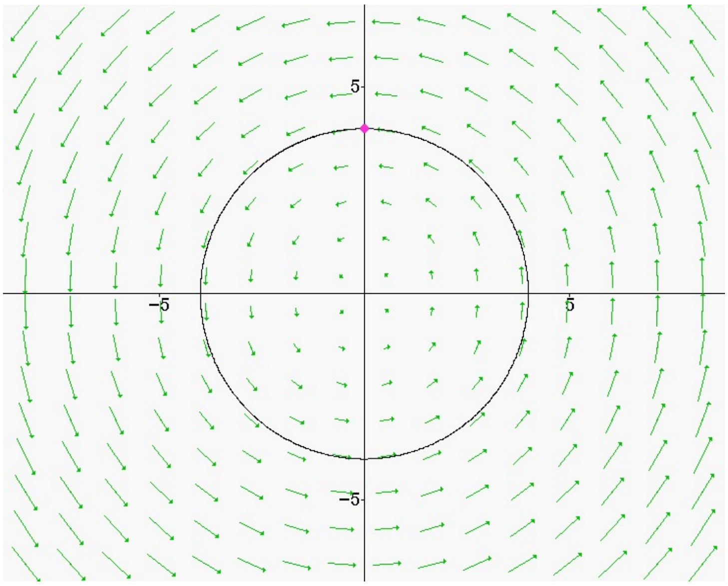
Toisaalta matriisien laskusääntöjen nojalla $A(y(t) + iz(t)) = Ay(t) + iAz(t)$, joten

$$y'(t) + iz'(t) = Ay(t) + iAz(t).$$

Kaksi kompleksilukua ovat samat täsmälleen silloin, kun niiden reaaliosat ja imaginaariosat ovat yhtä suuret. Siispä koska matriisi A on reaalinen,

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{ja} \quad z'(t) = Az(t),$$

joten y ja z ovat systeemin (3) reaaliarvoisia ratkaisuja. $\square$



Kuva 2. Differentiaaliyhtälösysteemin (5) ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (0, 4)$ on kuvaus $x(t) = (-4\sin(t), 4\cos(t))$. Katso esimerkit 3.5 ja 4.8.

Lauseen 4.7 ja lemman 4.4 nojalla minkä tahansa yhden kompleksisen ominaisvektorin löytäminen riittää kahden reaaliarvoisen ratkaisun määräämiseen. Lisäksi kompleksinen ominaisvektori ja sen kompleksikonjugaatti määräävät samat reaaliarvoiset ratkaisut, sillä ne eroavat toisistaan vain imaginaariosiensa merkeiltä, eikä tämä vaikuta reaalisten ratkaisujen muotoon. Tämän voi havaita lauseen 4.7 ratkaisufunktioiden lausekkeista.

Esimerkki 4.8. Etsitään differentiaaliyhtälösysteemin (5),

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = Bx(t)\,,$$

kaikki ratkaisut. Esimerkin 4.8 mukaan matriisin B ominaisarvot ovat $\pm i$, ja näitä vastaavat ominaisvektorit ovat

$$u = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad v = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 4.7 nojalla ratkaisufunktiot ovat

$$e^{0\cdot t}\left(\cos(1\cdot t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(1\cdot t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \cos(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

ja

$$e^{0\cdot t}\left(\sin(1\cdot t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(1\cdot t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \sin(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Siispä yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Huomautus 4.9. Edellä saadut ratkaisut ovat yksikköympyrän parametrisointeja. Lisäksi, jos ratkaisufunktiot ladotaan matriisin sarakkeiksi, saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix},$$

joka kuvauksena kiertää tasoa vastapäivään kulman t verran. Systeemin (5) kerroinmatriisi $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ itse puolestaan kiertää kuvauksena tasoa 90 astetta vastapäivään. Kompleksiluvun kertominen imaginaariyksiköllä i tekee saman asian kompleksitasossa. Matriisi $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ onkin *isomorfinen* imaginaariyksikön i kanssa.

5 Jordanin ketjut

Tähän mennessä kerätyillä tiedoilla pystytään ratkaisemaan mikä tahansa lineaarinen, vakiokertoiminen ja homogeeninen differentiaaliyhtälösysteemi, jonka kerroinmatriisilla on n kappaletta ominaisvektoreita. Näin on täsmälleen silloin, kun systeemin kerroinmatriisin ominaisarvojen λ geometristen kertalukujen $\mathrm{geom}(\lambda)$ summa on sama kuin niiden algebrallisten kertalukujen $\mathrm{alg}(\lambda)$ summa. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kerroinmatriisi on *diagonalisoituva*. Jos näin ei kuitenkaan ole, kuinka tarvittava määrä lineaarisesti riippumattomia vektoreita löytyy ja millaisia ratkaisut tällöin ovat? Tämän luvun tiedot pohjautuvat Jyväskylän yliopistossa kesällä 2013 järjestetyn Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssin luentomuistiinpanoihin [5] sekä Mikko Saarimäen teokseen Matriisiteoria [7].

5.1 Yleistetty ominaisavaruus

Olkoot vektorit v^j (neliö)matriisin A ominaisarvoon λ liittyviä ominaisvektoreita. Tällöin vektoreiden v^j summat ja monikerrat ovat jälleen ominaisarvoon λ liittyviä ominaisvektoreita. Ominaisarvoon λ liittyy siis aliavaruus, ja tätä aliavaruutta kutsutaan *ominaisavaruudeksi*.

Määritelmä 5.1 (Ominaisavaruus)**.** $n \times n$-neliömatriisin A ominaisarvoon λ liittyvä *ominaisavaruus* on joukko

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{x \in \mathbb{C}^n : \ Ax = \lambda x\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}^n : \ (A - \lambda I)x = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Ominaisavaruus on siis sama joukko, kuin lineaarikuvauksen $A - \lambda I$ ydin, joka on aliavaruus [8, s. 63]. Lisäksi ominaisavaruus $E_\lambda(A)$ on *A-invariantti*, eli jos $x \in E_\lambda(A)$, niin $Ax \in E_\lambda(A)$. Näin on, sillä $A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax)$. Siten lineaarikuvausta A voidaan käsitellä ominaisavaruuden $E_\lambda(A)$ lineaarikuvauksena.

Ominaisarvoon λ liittyvän ominaisavaruuden dimensio on sama, kuin ominaisarvon λ geometrinen kertaluku. Siispä jos jollekin ominaisarvolle $\mathrm{alg}(\lambda) > \mathrm{geom}(\lambda)$, ei ominaisavaruudessa "ole tarpeeksi" lineaarisesti riippumattomia vektoreita. Tällöin kysessä oleva matriisi on epädiagonalisoituva tai *puutteellinen*.

Lineaarista differentiaaliyhtälösysteemiä, jonka kerroinmatriisi on puutteellinen, kutsutaan tässä tutkielmassa myös puutteelliseksi.

Voitaisiinko puutteellisen kerroinmatriisin ominaisavaruuksia jotenkin "laajentaa"? Toisin sanoen, löytyisikö tilanteessa $\mathrm{alg}(\lambda) > \mathrm{geom}(\lambda)$ jokin sellainen invariantti aliavaruus $\tilde{E}_\lambda$, jolle $E_\lambda \subset \tilde{E}_\lambda$? Olkoon tarkastelua varten x ominaisavruuden $E_\lambda(A)$ vektori. Tällöin vektorille x pätee $(A - \lambda I)x = 0$. Mutta tällöinhän myös $(A - \lambda I)^r x = 0$, kun $r \geq 2$. Siispä ollaan havaittu, että $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^r$. Tämä johdattaa seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 5.2 (Yleistetty ominaisavaruus)**.** Olkoon $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neliömatriisin A ominaisarvoon λ liittyvä *yleistetty ominaisavaruus kertalukua r* on joukko

$$\begin{aligned} E_\lambda^r(A) &= \{x \in \mathbb{C}^n : \ (A - \lambda I)^r x = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^r. \end{aligned}$$

Yleistetty ominaisavaruus on lineaarikuvauksen ytimenä todella aliavaruus. Induktiolla on helppo osoittaa, että $A(A - \lambda I)^r = (A - \lambda I)^r A$ kaikilla $r \in \mathbb{N}$. Siispä

$$(A - \lambda I)^r Ax = A \underbrace{(A - \lambda I)^r x}_{=0} = 0,$$

eli jos $x \in E_\lambda^r(A)$, niin $Ax \in E_\lambda^r(A)$. Siten $E_\lambda^r(A)$ on myös A-invariantti. Aiemman laskun nojalla yleistetty ominaisavaruus on aina vähintään yhtä laaja, kuin alkuperäinen ominaisavaruus. Toisaalta jos $\mathrm{geom}(\lambda) = \mathrm{alg}(\lambda) = r$, niin välttämättä $E_\lambda(A) = E_\lambda^r(A)$. Erityisesti diagonalisoituvan kerroinmatriisin tapauksessa näin on jokaiselle ominaisarvolle. Puutteellisen kerroinmatriisin tapauksessa eri kertaluvun yleistettyjen ominaisavaruuksien ”väliin” jää siis välttämättä joitakin vektoreita. Jollekin ominaisarvolle λ on siis olemassa luku $k \geq 2$ ja vektori v^k siten, että $v^k \in E_\lambda^k(A)$, mutta $v^k \notin E_\lambda^{k-1}(A)$. Toisin sanoen, $(A - \lambda I)^k v^k = 0$, mutta $(A - \lambda I)^{k-1} v^k \neq 0$. Asetetaan nyt $v^j = (A - \lambda I)^{k-j} v^k$. Jos tällöin $j = 1$, niin

$$\begin{aligned} & v^1 = (A - \lambda I)^{k-1} v^k \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda I)v^1 = (A - \lambda I)^k v^k = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & Av^1 = \lambda v^1, \end{aligned}$$

eli v^1 on matriisin A ominaisvektori. Edelleen voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} & v^j = (A - \lambda I)^{k-j} v^k \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda I)v^j = (A - \lambda I)^{k-j+1} v^k = (A - \lambda I)^{k-(j-1)} v^k = v^{j-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda I)v^j = v^{j-1}. \end{aligned}$$

Näin muodostettua vektorijoukkoa

$$\left\{v^1, v^2, \ldots, v^k\right\}$$

kutsutaan ominaisvektorista v^1 alkavaksi *Jordanin ketjuksi*. Ketjun vektoreita $v^2, \ldots, v^k$ kutsutaan matriisin A *yleistetyiksi ominaisvektoreiksi*. Jordanin ketjun *pituus* on siihen kuuluvien vektorien lukumäärä.

Lause 5.3. *Jokaiseen ominaisarvoon liittyy sen geometrisen kertaluvun verran Jordanin ketjuja. Näiden ketjujen yhteenlaskettu pituus on sama, kuin ominaisarvon algebrallinen kertaluku.*

Lauseen 5.3 todistus on pitkä ja tekninen, eikä palvele tutkielman tarkoitusta. Tästä syystä lause hyväksytään tässä tutkielmassa ilman todistusta. Lauseen voi johtaa Mikko Saarimäen teoksen Matriisiteoria [7] tulosten pohjalta.

Esimerkki 5.4. Etsitään matriisiin

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

liittyvät Jordanin ketjut. Ensin täytyy tuttuun tapaan etsiä ominaisarvot:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2) - 2((4-\lambda)-2) - 3(-1-(1-\lambda)) \\
&= \ldots \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\lambda-2)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2.
\end{aligned}$$

Ainoa ominaisarvo on $\lambda = 2$. Etsitään sitä vastaavat omiaisvektorit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^1 = 0 \\ v_2^1 = 1 \\ v_3^1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vektori v^1 on matriisin A ainoa ominaisvektori. Siispä $\text{geom}(2) = 1$, joten lauseen 5.3 nojalla Jordanin ketjuja on vain yksi, ja sen pituus on kolme. Muodostetaan vektorista v^1 alkava Jordanin ketju. Sitä varten täytyy löytää ratkaisu yhtälöön $(A-2I)v^2 = v^1$, eli

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Käsitellään tätä yhtälöryhmänä ja sievennetään Gaussin ja Jordanin eliminaatiolla:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tästä nähdään, että voidaan valita esimerkiksi

$$v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{sillä} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla saadaa yhtälölle $(A-2I)v^3 = v^2$ ratkaisuksi esimerkiksi

$$v^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Eräs matriisiin A liittyvä Jordanin ketju on siis vektorijoukko

$$\left\{v^1, v^2, v^3\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.2 Puutteellisten differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisut

Jotta Jordanin ketjuista olisi hyötyä differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisemisessa, tulisi ketjujen vektoreiden olla lineaarisesti riippumattomia, ja sitä ne ovatkin:

Lause 5.5. *Olkoon vektorijoukko*

$$\left\{v^1, v^2, \ldots, v^k\right\}$$

Jordanin ketju. Tällöin vektorit $v^1, v^2, \ldots, v^k$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Jordanin ketjut muodostettiin asettamalla $v^j = (A - \lambda I)^{k-j} v^k$, joten vaatimus

$$c_1 v^1 + c_2 v^2 + \ldots + c_k v^k = 0$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$c_1 (A - \lambda I)^{k-1} v^k + c_2 (A - \lambda I)^{k-2} v^k + \ldots + c_k v^k = 0.$$

Kertomalla yhtälö $v^j = (A - \lambda I)^{k-j} v^k$ puolittain matriisilla $(A - \lambda I)^{j-1}$, saadaan

$$(A - \lambda I)^{j-1} v^j = (A - \lambda I)^{j-1} (A - \lambda I)^{k-j} v^k = (A - \lambda I)^{k-1} v^k \neq 0,$$

eli $(A - \lambda I)^{j-1} v^j \neq 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Siispä on oltava $c_j = 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$, mistä väite seuraa. $\square$

Jordanin ketjujen vektorit ensimmäistä lukuunottamatta eivät kuitenkaan ole matrsiisin A "oikeita" ominaisvektoreita, sillä $(A - \lambda I) v^j = v^{j-1} \Rightarrow Av^j - \lambda v^j = v^{j-1} \Rightarrow Av^j = \lambda v^j + v^{j+1}$. Siispä niiden avulla ei suoraan saada ratkaisuja muodossa $e^{\lambda t} v$. Mutta löytyisikö ratkaisuja jossain toisessa muodossa? Haetaan taas mallia "vastaanvanlaisesta" yksiulotteisesta tilanteesta, kuten tehtiin aiemmin hyvällä menestyksellä.

Seuraava tulos on esitetty Jyväskylän yliopiston kurssilla Differentiaaliyhtälöt [4]: Jos yksiulotteisessa tilanteessa korkeamman kertaluvun *vakiokertoimisen* ja *lineaarisen homogeeniyhtälön* karakteristisella polynomilla on k-kertainen nollakohta λ, niin kyseisen yhtälön ns. *ratkaisukannan* muodostavat funktiot

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Näiden funktioiden summat ja monikerrat ovat siis jälleen ratkaisuja. Koetetaan tältä pohjalta etsiä yksittäistä ratkaisua sellaisten vektoriarvoisten funktioiden summana, jotka muistuttavat edellä olevan ratkaisukannan funktioita. Tehdään tämä vaatimalla, että

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{\lambda t} v^j + \frac{t}{1!} e^{\lambda t} v^{j-1} + \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} v^{j-2} + \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t} v^1 \right) \\
= \quad & A \left(e^{\lambda t} v^j + \frac{t}{1!} e^{\lambda t} v^{j-1} + \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} v^{j-2} + \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t} v^1 \right),
\end{aligned}$$

missä $1 \leq j \leq k$. [10]. Lasketaan yhtälön vasen puoli auki:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\lambda t}v^j + \frac{t}{1!}e^{\lambda t}v^{j-1} + \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}v^{j-2} + \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t}v^1\right) \\
= \; & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^j + \frac{t}{1!}v^{j-1} + \frac{t^2}{2!}v^{j-2} + \frac{t^3}{3!}v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}v^1\right)e^{\lambda t} + \\
& \left(v^j + \frac{t}{1!}v^{j-1} + \frac{t^2}{2!}v^{j-2} + \frac{t^3}{3!}v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}v^1\right)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\lambda t}\right) \\
= \; & \left(v^{j-1} + \frac{t}{1!}v^{j-2} + \frac{t^2}{2!}v^{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}v^1\right)e^{\lambda t} + \\
& \left(\lambda v^j + \lambda\frac{t}{1!}v^{j-1} + \lambda\frac{t^2}{2!}v^{j-2} + \lambda\frac{t^3}{3!}v^{j-3} + \ldots + \lambda\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}v^1\right)e^{\lambda t} \\
= \; & e^{\lambda t}\left(\lambda v^j + v^{j-1}\right) + te^{\lambda t}\left(\lambda v^{j-1} + v^{j-2}\right) + \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\left(\lambda v^{j-2} + v^{j-3}\right) + \ldots + \\
& \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t}\left(\lambda v^1\right).
\end{aligned}
$$

Yhtälön oikealta puolelta taas saadaan

$$
\begin{aligned}
& A\left(e^{\lambda t}v^j + \frac{t}{1!}e^{\lambda t}v^{j-1} + \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}v^{j-2} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t}v^1\right) \\
= \; & e^{\lambda t}\left(Av^j\right) + te^{\lambda t}\left(Av^{j-1}\right) + \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\left(Av^{j-2}\right) + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t}\left(Av^1\right).
\end{aligned}
$$

Kun saatujen lausekkeiden kertoimet vaaditaan yhtä suuriksi, saadaan

$$
\begin{cases}
Av^j &= \lambda v^j + v^{j-1} \\
Av^{j-1} &= \lambda v^{j-1} + v^{j-2} \\
Av^{j-2} &= \lambda v^{j-2} + v^{j-3} \\
 & \vdots \\
Av^1 &= \lambda v^1
\end{cases}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{cases}
(A-\lambda I)v^j &= v^{j-1} \\
(A-\lambda I)v^{j-1} &= v^{j-2} \\
(A-\lambda I)v^{j-2} &= v^{j-3} \\
 & \vdots \\
(A-\lambda I)v^1 &= 0.
\end{cases}
$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että joukko $\{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$ on Jordanin ketju. Kyseessä oleva summa on kuitenkin vain yksi ratkaisu, eli tämäkään ei vielä riitä. Edellä olevista laskuista voidaan kuitenkin tehdä eräs tärkeä havainto: laskut nimittäin pätevät kaikissa tapauksissa, joissa $\text{alg}(\lambda) \geq k \geq \text{geom}(\lambda)$. Toisin sanoen, "lyhemmätkin summat" kelpaavat ratkaisuiksi, kunhan vain summissa esiintyvät vektorit muodostavat Jordanin ketjun.

Lause 5.6. *Olkoon λ systeemin* (3) *kerroinmatriisin ominaisarvo, jonka algebrallinen kertaluku on k. Tällöin ominaisarvoa λ vastaa k lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, jotka ovat*

$$\sum_{i=0}^{j} \frac{t^i}{i!} e^{\lambda t} v^{j+1-i}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

missä vektorijoukko $\{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$ on ominaisvektorista v^1 alkava Jordanin ketju.

Todistus. Edellä olevan laskun perusteella lauseessa esitetyt summat ovat ratkaisuja. Koska joukko $\{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$ on Jordanin ketju, sen vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin myös eri j:n arvoja vastaavat summavektorit

$$\sum_{i=0}^{j} v^{k-i}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Esimerkki 5.7. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$x'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{=A} x(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 5.4 löydettiin matriisiin A liittyvä Jordanin ketju

$$\left\{v^1, v^2, v^3\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Näistä v^1 on matriisin A ominaisvektori, joten sen avulla saadaan ratkaisu

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 5.6 nojalla saadaan lopuiksi ratkaisuiksi

$$e^{2t}\left(tv^1 + v^2\right) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t \end{bmatrix}$$

ja

$$e^{2t}\left(\frac{t^2}{2}v^1 + tv^2 + v^3\right) = e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} t+2 \\ \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2 \end{bmatrix}.$$

Yleinen ratkaisu on siten

$$x(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t \end{bmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{bmatrix} t+2 \\ \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2 \end{bmatrix}.$$

Alkuarvoehdosta saadaan yhtälö

$$x(0) = c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_3 \\ c_3 \\ 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tätä voidaan käsitellä yhtälöryhmänä, josta vakiot c_1, c_2 ja c_3 saadaan ratkaistuksi Gaussin ja Jordanin eliminaatiolla:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Siispä $c_1 = c_3 = 1$ ja $c_2 = -1$, ja alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$x(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} t+2 \\ \frac{t^2}{2} + t + 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t+1 \\ \frac{t^2}{2} + 1 \\ -\frac{t^2}{2} + t + 1 \end{bmatrix}.$$

Huomautus 5.8. Lauseista 3.3, 4.7 ja 5.6 voidaan havaita, että muotoa $x'(t) = Ax(t)$ olevien vakiokertoimisten differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisut on todella aina määritelty kaikilla reaaliluvuilla, kuten lauseessa 3.1 väitetään.

6 Epähomogeeniset differentiaaliyhtälöryhmät

Esimerkissä 1.1 sivulla 1 esiintynyt differentiaaliyhtälöryhmä on matriisimuodossa kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_1}{V_1} & 0 & 0 \\ \frac{f_1}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{f_2}{V_2} & \frac{f_3}{V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä systeemi on *epähomogeeninen*, eli yhtälön oikean puolen kuvaus on lineaariaffiini kuvaus. Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta 2.5 voidaan lemman 2.6 nojalla soveltaa, joten ratkaisuja löytyy aina ainakin jollakin aikavälillä. Epähomogeeninenkin lineaarinen systeemi voidaan ratkaista hakemalla mallia yksiulotteisista differentiaaliyhtälöistä, nimittäin *vakioiden varioinnilla*. Menetelmän käyttöön tarvitaan paitsi kaikki tietous homogeenisten systeemien ratkaisemisesta, myös entistä tehokkaampia merkintöjä. Menetelmä on esitelty Martin Braunin teoksessa [1, s. 360].

6.1 Yleinen matriisiratkaisu

Lauseen 3.2 nojalla lineaarisen systeemin yleinen ratkaisu on muotoa

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t).$$

Muodostetaan ratkaisuvektoreista x_j matriisi $\mathcal{X}(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$ ja vakioista c_j vektori $c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$. Näillä merkinnöillä yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$x(t) = \mathcal{X}(t)c,$$

missä matriisi $\mathcal{X}(t)$ on niin sanottu *yleinen matriisiratkaisu*.

Esimerkki 6.1. Huomautuksen 4.9 (s. 19) matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

on differentiaaliyhtälösysteemin (5),

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),$$

eräs yleinen matriisiratkaisu.

Lemma 6.2. *Matriisi $\mathcal{X}$ on systeemin* (3) *yleinen matriisiratkaisu täsmälleen silloin, kun* $\det \mathcal{X} \neq 0$ *ja* $\mathcal{X}'(t) = A\mathcal{X}(t)$. *Tässä matriisin $\mathcal{X}$ derivaatalla $\mathcal{X}'(t)$ tarkoitetaan matriisia* $\mathcal{X}'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)_1 & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t) \end{bmatrix}$.

Todistus.
"$\Rightarrow$" Jos $\mathcal{X}$ on yleinen matriisiratkaisu, sen sarakkeet ovat systeemin (3) ratkaisuina lineaarisesti riippumattomia, jolloin $\det \mathcal{X} \neq 0$. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{X}'(t) &= \begin{bmatrix} x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax_1 & \cdots & Ax_n \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \\ &= A\mathcal{X}(t). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Jos $\det \mathcal{X} \neq 0$, niin matriisin $\mathcal{X}$ sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos myös $\mathcal{X}'(t) = A\mathcal{X}(t)$, niin $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_j(t) = Ax_j(t)$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Siten matriisin $\mathcal{X}$ sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, ja $\mathcal{X}$ on yleinen matriisiratkaisu. □

6.2 Vakioiden variointi

Nyt ollaan valmiita siirtymään epähomogeenisten differentiaaliyhtälösysteemien tarkasteluun. Tavoitteena on löytää tapa ratkaista alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + g(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

Koska homogeenisen systeemin ratkaisut ovat muotoa $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t)$, on luontevaa etsiä alkuarvotehtävälle (6) ratkaisua muodossa

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \ldots + c_n(t)x_n(t),$$

missä funktiot $c_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia. (Tässä siis "vakioiden c_j annetaan riippua ajasta", mistä nimi vakioiden variointi juontaa juurensa.) Yleisen matriisiratkaisun avulla yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t) = \mathcal{X}(t)c(t),$$

missä siis $\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$ ja $c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) & \cdots & c_n(t) \end{bmatrix}^T$. Sijoittamalla tämä yrite alkuarvotehtävään (6), saadaan

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{X}(t)c(t) = A\mathcal{X}(t)c(t) + g(t).$$

Funktioiden tulon derivointisäännön nojalla

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{X}(t)c(t) = \mathcal{X}'(t)c(t) + \mathcal{X}c'(t) = A\mathcal{X}(t)c(t) + g(t).$$

Koska $\mathcal{X}(t)$ on yleinen matriisiratkaisu, lemman 6.2 nojalla $\mathcal{X}'(t) = A\mathcal{X}(t)$, ja päästään muotoon

$$\mathcal{X}c'(t) = g(t).$$

Edelleen, $\det \mathcal{X}(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten matriisi $\mathcal{X}(t)$ on kääntyvä. Kertomalla yhtälö puolittain käänteismatriisilla $\mathcal{X}^{-1}(t)$ saadaan ratkaistua kuvauksen c derivaatta:

$$c'(t) = \mathcal{X}^{-1}(t)g(t).$$

Tästä kuvaus c saadaan esille integroimalla yhtälön molemmat puolet ajanhetkestä t_0 hetkeen t saakka. Analyysin peruslauseen nojalla

$$\int_{t_0}^{t} c'(t)\mathrm{d}t = c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s,$$

missä matriisin ja vektorin integraali tarkoittaa kunkin alkion integroimista erikseen. Koska $x(t) = \mathcal{X}(t)c(t)$, niin $c(t) = \mathcal{X}^{-1}(t)x(t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Erityisesti $c(t_0) = \mathcal{X}^{-1}(t_0)x_0$. Siispä

$$c(t) = \mathcal{X}^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Kun näin löydetty kuvauksen c lauseke nyt sijoitetaan takaisin alkuarvotehtävään (6), saadaan kaava alkuarvotehtävän ratkaisulle.

Lause 6.3. *Olkoon $\mathcal{X}(t)$ homogeenisen differentiaaliyhtälösysteemin $Ax(t)$ yleinen matriisiratkaisu. Tällöin alkuarvotehtävän* (6) *yksikäsitteinen ratkaisu on*

$$x(t) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t_0)x_0 + \mathcal{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s.$$

Todistus. Tulos seuraa edellä olevasta laskusta. □

Epähomogeenisen systeemin ratkaisemiseksi tulee siis ensin tietää vastaavan homogeenisen systeemin yleinen ratkaisu. Tämän jälkeen tietyn alkuarvon kautta kulkeva ratkaisu voidaan laskea lauseen 6.3 avulla.

Esimerkki 6.4. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$x'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} x(t) + \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tätä vastaava homogeeninen systeemi $x'(t) = Bx(t)$ on ratkaistu esimerkissä 4.8, ja sen eräs yleinen matriisiratkaisu on

$$\mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Tässä tapauksessa käänteismatriisi $\mathcal{X}(t)^{-1}$ on helppo löytää. Matriisi $\mathcal{X}(t)$ on nimittäin *ortogonaalinen*, jolloin $\mathcal{X}(t)^{-1} = \mathcal{X}(t)^T$. Alkuarvotehtävän ratkaisemiseksi voidaan nyt soveltaa lausetta 6.3:

$$\begin{aligned}
x(t) = &\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ -\sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\
= &\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^s(\cos^2(s) + \sin^2(s)) \\ e^s(\cos(s)\sin(t) - \sin(s)\cos(t)) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\
= &\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Edeltävässä esimerkissä selvittiin laskennallisesti vähällä vaivalla muun muassa systeemin epähomogeeniosan sopivan muodon vuoksi. Lauseen 6.3 käyttäminen voi kuitenkin olla hyvin vaikeaa ja työlästä. Esimerkiksi yleisen matriisiratkaisun käänteismatriisin laskeminen voi osoittautua hankalaksi ilman vielä tehokkaampia merkintöjä ja määritelmiä.

7 Loppusanat

Tutkielman alussa asetettiin tavoitteeksi systemaattisen ratkaisutavan löytäminen kaikille differentiaaliyhtälöryhmille, jotka ovat sekä lineaarisia että vakiokertoimisia. Tähän tavoitteeseen on nyt vakioiden varioinnin myötä päästy hyödyntämällä tehokkaasti lineaarialgebran tarjoamia tuloksia. Seuraavaksi on toki luonnollista kysyä, kuinka löytää systemaattinen ratkaisutapa yleisemmälle differentiaaliyhtälöryhmälle (1). Vastaavaa, aina toimivaa menetelmää ei kuitenkaan yleisesti ole olemassa. Tilanne on jälleen kuten yksiulotteissa tapauksessa: vain harvat differentiaaliyhtälöt pystytään ratkaisemaan eksplisiittisesti. Ratkaisufunktion löytäminen ei kuitenkaan ole edes välttämätöntä, sillä differentiaaliyhtälöitä ja -yhtälöryhmiä on nykyteknologialla helppoa ratkaista laskennallisesti varsin riittävällä tarkkuudella. [1].

Vaikka lineaarisuus onkin sovelluskohteiden kannalta "rajoittava tekijä", jo lineaarisilla differentiaaliyhtälösysteemeillä on runsaasti sovelluskohteita. Lisäksi tietous lineaaristen differentiaaliyhtälösysteemien ratkaisusta on hyödyksi myös epälineaaristen systeemien ratkaisemisessa. Systeemin $x'(t) = f(x(t))$ käyttäytymistä *tasapainopisteidensä* $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ läheisyydessä voidaan arvioida varsin tarkasti *linearisoimalla* systeemi kuvauksen f Jacobin matriisin avulla. [5]. Differentiaaliyhtälösysteemien dynamiikka on kuitenkin jo useammankin oman tutkielmansa veroinen kokonaisuus.

Viitteet

[1] Martin Braun, *Differential equations and their applications, neljäs laitos*, Springer, 1993

[2] Grant B. Gustafson, UTAH:in yliopiston kurssi *Engineering math 2250*, luentomateriaali, http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf, linkkiin viitattu 13.4.2014

[3] Tero Kilpeläinen, *Kompleksianalyysi: luentomuistiinpanoja keväälle 2005* (Jyväskylän yliopiston luentomoniste), 2006, http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf, linkkiin viitattu 13.4.2014)

[4] Antti Käenmäki, Jyväskylän yliopiston kurssi *MATA114 (Differentiaaliyhtälöt)*, luentomuistiinpanot ja harjoitustehtävät, 2012

[5] Teemu Lukkari, Jyväskylän yliopiston kurssi *MATA218 (Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1)*, luentomuistiinpanot ja harjoitustehtävät, 2013

[6] Jouni Parkkonen, *Johdatus dynaamisiin systeemeihin* (Jyväskylän yliopiston luentomoniste), 2013, http://users.jyu.fi/~parkkone/Dyn2013/Dyn13.pdf, linkkiin viitattu 13.4.2014

[7] Mikko Saarimäki, *Matriisiteoria*, Jyväskylän yliopistopaino, 1994

[8] Mikko Saarimäki, *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa, 2. tarkistettu painos*, Jyväskylän yliopistopaino, 2011

[9] Mikko Saarimäki, *Reaalisia vektoriavaruuksia ja ominaisarvoja*, Jyväskylän yliopistopaino, 2012

[10] Vivek Srikrishnan, Pennsylvanian osavaltionyliopiston kurssi *Math 251 (Ordinary and Partial Differential Equations)*, luentomateriaali, 2009, https://www.math.psu.edu/srikrish/math251/notes/repeatedeigs.pdf, linkkiin viitattu 20.4.2014