Hyperbolisen geometrian analyyttisiä malleja

Petri Kymäläinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014

Tiivistelmä: P. Kymäläinen, *Hyperbolisen geometrian analyyttisiä malleja* (engl. *Analytic Models of Hyperbolic Geometry*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 32. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2014.

Tässä tutkielmassa esitellään viisi erilaista Riemannin monistoa, jotka toimivat hyperbolisen geometrian analyyttisinä malleina. Geometria voidaan karkeasti jakaa kahteen eri tapaukseen, euklidiseen ja epäeuklidiseen. Euklidisessa geometriassa pätee Eukleideen geometrian viides aksiooma, paralleeliaksiooma. Näin ei kuitenkaan ole laita hyperbolisessa geometriassa, joka luokitellaan epäeuklidiseksi geometriaksi. Analyyttisellä geometrialla taas tarkoitetaan koordinaatistoon sidottua geometriaa. Tässä tapauksessa nämä geometrian mallit ovat topologisia 2-ulotteisia pintoja euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Lisäksi tutkielman malleissa hyödynnetään näille pinnoille määriteltyä sileää differentiaalirakennetta, jolloin voidaan käyttää mallista nimitystä sileä monisto. Riemannin monistossa on määritelty 2-kovariantti tensorikenttä, Riemannin metriikka, jonka avulla voidaan selvittää geodeesi eli sileä polku, jonka kuva monistolla on kahden pisteen välinen lyhin reitti eli geometrinen jana. Myös sellaiset geometriset oliot kuin suora ja kulma määritellään Riemannin metriikan avulla.

Tutkielmassa johdetaan keino geodeesien laskemiseksi geodeettisen differentiaaliyhtälöryhmän

$$\ddot{\sigma}_k + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j \equiv 0$$

avulla. Tämän yhtälöryhmän ratkaisuna hahmotellaan suorat yhdessä hyperbolisen geometrian mallissa, Poincarén puolitasossa $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$. Lopuksi tutkielmassa esitellään metriikan siirto, joka on keino muodostaa alkuperäisen mallin kaltaisia uusia hyperbolisen geometrian malleja sopivien diffeomorfismien avulla. Tätä menetelmää käytetään neljän muun Riemannin moniston muodostamiseen.

Avainsanoja: differentiaaligeometria, geodeesi, geometria, metriikka, monisto.

Sisältö

Johdanto

Geometrian analyyttisellä mallilla tarkoitetaan sellaista metristä avaruutta (G, d), missä G on yhdesti yhtenäinen joukko (ts. ei sisällä ”reikiä”) ja $d : G \times G \to \mathbb{R}$ metriikka, jolla voidaan mitata joukon pisteiden välisiä etäisyyksiä. Esimerkiksi perinteinen euklidinen tasogeometria voidaan mallintaa metrisellä avaruudella $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{E}})$, missä tavanomainen euklidinen metriikka määritellään

$$d_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \mapsto \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Tässä geometrisessa mallissa kahta pistettä yhdistävä jana näyttää tavanomaisella suoralla viivaimella piirretyltä janalta. Tämä jana voidaan jatkaa suoraksi samaa viivainta käyttämällä. Kyseessä on siis euklidisen geometrian malli, joka toteuttaa ns. paralleeliaksiooman, joka voidaan muotoilla näin: ”Jokaisella suoralla ℓ ja pisteellä P, joka ei ole suoralla ℓ, on olemassa samassa tasossa täsmälleen yksi suora m pisteen P kautta siten, että suorat ℓ ja m eivät leikkaa (eli ovat yhdensuuntaisia)” [[**2**], s. 261].

Tätä aksioomaa pidettiin pitkään selviönä. Tämän tutkielman aikana tullaan kuitenkin rakentamaan useita malleja, joissa paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Paralleeliaksiooman negaatiohan kuuluu, että pisteen P kautta kulkevia suoran ℓ kanssa samassa tasossa yhdensuuntaisia suoria joko ei ole olemassa (ts. kaikki suorat leikkaavat jossain pisteessä) tai niitä on vähintään kaksi. Mikäli jälkimmäinen ehto on tosi, kyseessä on hyperbolisen geometrian malli.

Geometrian analyyttisiä malleja voisi lähteä tutkimaan suoraan edellä kuvaillun kaltaisina topologisina avaruuksina, mutta jatkon kannalta on edullista lisätä hieman rakennetta. Differentiaalirakenteen luominen mahdollistaa uusien mallien rakentamisen jonkun tunnetun mallin pohjalta. Perustietoina lukijan oletetaan perehtyneen differentiaalilaskennan perusteisiin sekä sellaisiin topologian peruskäsitteisiin kuten joukon avoimuus topologian (tai metriikan) suhteen sekä kuvausten jatkuvuus.

LUKU 1

Differentiaaligeometrian perusteita

Differentiaaligeometria voidaan hyvin laajasti määritellä geometriaksi, joka hyödyntää differentiaali- ja integraalilaskentaa. Newtonin ja Leibnizin päivistä lähtien on differentiaalilaskentaa sovellettu analyyttiseen geometriaan, mutta melkoisen sysäyksen tutkimukselle antoi saksalainen matemaatikko Carl Friedrich Gauss (1777-1855), joka käytti selvästi analyysin termejä geometrian tutkimuksessa. Hän kehitti differentiaaligeometrian termejä kuten polun kaarevuus ja kaarevuussäde. Itse asiassa Gauss oli ensimmäisiä matemaatikoita, jotka osoittivat, että epäeuklidisia (ts. muiden Eukleideen aksioomien paitsi paralleeliaksiooman täyttäviä) ristiriidattomia geometrioita on olemassa! [[**1**], s. 505, 506, 519-522]

Differentiaaligeometrialle on ajan myötä löytynyt niin monia sovelluksia luonnontieteissä, että siitä on muodostunut epäilemättä tärkein modernin geometrian tutkimusala. Siksi tutkielmassa rajaudutaan hyvin suppeaan differentiaaligeometrian osa-alueeseen, *Riemannin monistojen* teoriaan. Tästäkin teoriasta poimitaan vain tutkielman tavoitteen kannalta tärkeimmät tulokset, joiden avulla pystytään mallintamaan hyperbolista geometriaa kaksiulotteisilla Riemannin monistoilla. Tämän luvun tarkoituksena on määritellä tarpeelliset differentiaaligeometrian peruskäsitteet. Käsitteiden määrittely tapahtuu hyvin abstraktilla tasolla, joten todellista geometrista intuitiota aiheeseen saadaan vasta myöhemmissä luvuissa. Tutkielman lukujen 1 ja 2 merkinnät ja todistusten ideat perustuvat Enrico Le Donnen Jyväskylän yliopistossa syksyllä 2013 pitämien kurssien luentomuistiinpanoihin [**4**] ja [**5**] sekä kirjoihin [**6**] ja [**7**].

1.1. Sileä monisto $(M^n, \mathcal{A})$

MÄÄRITELMÄ 1.1. Euklidisessa mielessä jatkuva kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on *sileä*, $f \in C^\infty$, jos komponenttikuvausten f_i kaikki osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f_i}{\partial x_1^{k_1}, \partial x_2^{k_2}, \ldots, \partial x_n^{k_n}} \text{ kaikilla } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ ja kaikilla } k_1, k_2 \ldots k_n \in \mathbb{N}$$

ovat olemassa ja jatkuvia.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Topologinen avaruus M^n on *monisto*, jos se on Hausdorff-avaruus, sen topologialla on olemassa numeroituva kanta ja sen jokaisella pisteellä $p \in M^n$ on olemassa ympäristö $U \subseteq M^n$ siten, että kuvaus $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ on homeomorfismi (ts. jatkuva bijektio, jolla on jatkuva käänteiskuvaus) avoimien joukkojen U ja $\varphi(U)$ välillä. Homeomorfismia φ kutsutaan *koordinaattikuvaukseksi* ja paria (U, φ) *koordinaattisysteemiksi*. Lukua n kutsutaan moniston *dimensioksi*.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Olkoon M^n monisto. Koordinaattisysteemien kokoelma $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A)\}$ numeroituvalla indeksijoukolla A on *moniston M^n sileä atlas* jos

$$i) \qquad M^n = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \qquad \text{ja}$$

$$ii) \qquad \text{yhdistetty kuvaus } \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\text{on sileä kaikilla } \alpha, \beta \in A, \text{ joilla } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset.$$

Jos moniston M sileä atlas $\mathcal{A}$ ei sisälly mihinkään aidosti mahtavampaan sileään atlakseen, eli atlas on *maksimaalinen*, kutsutaan sitä *moniston M sileäksi differentiaalirakenteeksi* ja tällöin paria $(M^n, \mathcal{A})$ kutsutaan *sileäksi monistoksi.*

Tästä lähtien merkitään sileää monistoa lyhyesti $M := (M^n, \mathcal{A})$, kun moniston dimension ja differentiaalirakenteen suhteen ei ole epäselvyyttä. Yksi esimerkki sileästä monistosta on euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$, jonka sileä differentiaalirakenne koostuu yhdestä koordinaattisysteemistä $(\mathbb{R}^n, id)$. Toinen esimerkki on yksikköpallo

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

joka pystytään esittämään tasossa $\mathbb{R}^2$ (tai kompleksitasossa $\mathbb{C}$) vähintään kahden kartan, ns. stereografisen projektion, avulla. Tämän todistamiseksi riittää osoittaa, että käytettävät stereografiset projektiot ovat sileitä homeomorfismeja, mikä puolestaan seuraa siitä, että stereografinen projektio on konformikuvaus [[**3**], s. 72-75].

1.2. Tangenttiavaruus T_pM

Differentiaaligeometriassa tehdään usein ero termien kuvaus ja funktio (ts. reaaliarvoinen kuvaus) välille. Syy tähän nähdään pian.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoot $(M_1^n, \mathcal{A}_1)$ ja $(M_2^m, \mathcal{A}_2)$ sileitä monistoja.
Kuvaus $f : M_1^n \to \mathbb{R}$ on *sileä funktio*, $f \in C^\infty(M_1^n)$, jos kaikilla $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_1$ yhdistetty kuvaus

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

on sileä euklidisessa mielessä.

Vastaavasti kuvaus $F : M_1^n \to M_2^m$ on *sileä kuvaus*, $F \in C^\infty(M_1^n, M_2^m)$, jos kaikilla $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$, $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2$ yhdistetty kuvaus

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \mathbb{R}^m$$

on sileä euklidisessa mielessä.

Lyhyesti tiivistettynä sileällä kuvauksella tarkoitetaan differentiaaligeometriassa kuvausta monistolta monistolle. Tällöinhän, jos valitaan $M_2 = \mathbb{R}$ ja varustetaan se tavanomaisella euklidisella differentiaalirakenteella, nämä kaksi määritelmää ovat yhtenevät. Lisäksi kahden sileän kuvauksen F_1 ja F_2 yhdiste $F_2 \circ F_1$ on sileä kuvaus aina kun se on määritelty. Palataan sileisiin kuvauksiin myöhemmin tutkielmassa. Nyt tarkoituksena on selventää, mitä tarkoittaa *tangenttivektori* eli lineaarinen derivaatio sileiden funktioiden muodostamassa algebrassa.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon M sileä monisto, $p \in M$ ja olkoot U_1, U_2 pisteen p ympäristöjä. Sileät funktiot $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ kaikilla $i \in \{1, 2\}$ ovat *ekvivalentteja pisteessä* p, $f_1 \sim_p f_2$, jos on olemassa ympäristö $V \ni p$, jolle

$$V \subseteq U_1 \cap U_2 \quad \text{ja} \quad f_1|_V = f_2|_V .$$

Merkitään edellä määritellyn ekvivalenssirelaation muodostamaa *ekvivalenssiluokkaa* $\mathbf{f} := [f]_p = \{g : U \to \mathbb{R} : f \sim_p g\}$. Merkitään ekvivalenssiluokkien kokoelmaa

$$C^\infty(p) := \{\mathbf{f} : f \in C^\infty(U) \text{ ja } p \in U\}$$

ja määritellään tähän joukkoon vektoriavaruuden laskutoimitukset

$$\begin{aligned} + :& C^\infty(p) \times C^\infty(p) \to C^\infty(p) : (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mapsto [f + g]_p, \\ \cdot :& \mathbb{R} \times C^\infty(p) \to C^\infty(p) : (\lambda, \mathbf{f}) \mapsto [\lambda f]_p. \end{aligned}$$

Määritellään lisäksi kertolasku pisteessä p siten, että kaikilla $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ pätee

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(p) := f(p) \cdot g(p).$$

Nyt joukko $C^\infty(p)$ muodostaa *algebran* (ts. vektoriavaruuden, jossa on myös bilineaarinen kertolasku), sillä kaikilla $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a\mathbf{f} + b\mathbf{g} &= a[f]_p + b[g]_p = [af]_p + [bg]_p = [af + bg]_p \in C^\infty(p) \text{ ja} \\ (a\mathbf{f} \cdot b\mathbf{g})(p) &= ab([f]_p(p) \cdot [g]_p(p)) = ab(f(p) \cdot g(p)). \end{aligned}$$

Joukko

$$C^\infty(p)^0 := \{\mathbf{f} \in C^\infty(p) : \mathbf{f}(p) = f(p) = 0\}$$

on algebran $C^\infty(p)$ *ideaali*, sillä kaikilla $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ ja $\mathbf{g} \in C^\infty(p)^0$ pätee

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(p) &= f(p) \cdot 0 = 0 \text{ ja} \\ (\mathbf{g} \cdot \mathbf{f})(p) &= 0 \cdot f(p) = 0. \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 1.6. *Tangettivektori ν pisteessä* $p \in M$ on lineaarinen derivaatio $\nu : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, ts. toteuttaa kaikilla $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ lineaarisuusehdon (1) ja Leibnizin säännön (2):

$$\begin{aligned} (1):& \quad \nu(\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}) = \nu(\mathbf{f}) + \lambda\nu(\mathbf{g}), \\ (2):& \quad \nu(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f}(p)\nu(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)\nu(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

Sileän moniston M tangenttiavaruus pisteessä $p \in M$ on

$$T_pM := \{\nu : \nu \text{ tangenttivektori pisteessä } p \in M\}.$$

Tangenttivektorin lineaarisuusehdosta seuraa, että myös tangenttiavaruudet kaikissa moniston pisteissä ovat vektoriavaruuksia. Todistetaan seuraavaksi tärkeä lause, jonka mukaan $\dim(T_pM^n) = \dim(M^n) = n$ kaikilla $p \in M$. Tämän lauseen todistamiseksi on tarpeen valmistaa muutamia aputuloksia:

LEMMA 1.7. *Olkoon M sileä monisto, $p \in M$ ja U pisteen p ympäristö. Jos sileä funktio $f : U \to \mathbb{R}$ on vakiofunktio, niin kaikille tangenttivektoreille $\nu \in T_pM$ pätee $\nu(\boldsymbol{f}) = 0$.*

Todistus. Olkoon sileä funktio $g : U \to \mathbb{R}$ vakiofunktio $g(p) = 1$. Tällöin kaikilla $p \in U$ pätee $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})(p) = \mathbf{g}(p) \cdot \mathbf{g}(p) = 1 \cdot 1 = 1 = \mathbf{g}(p)$. Leibnizin sääntöä soveltamalla saadaan $\nu(\mathbf{g}) = \nu(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{g}(p)\nu(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)\nu(\mathbf{g}) = 2\nu(\mathbf{g})$, mistä seuraa $\nu(\mathbf{g}) = 0$. Toisaalta, koska funktio f on oletuksen mukaan vakio, niin lineaarisuuden nojalla $\nu(\mathbf{f}) = \nu(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \cdot \nu(\mathbf{g}) = \mathbf{f} \cdot 0 = 0$. $\square$

Lemma 1.8. *Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi, $f \in C^k$ jollain $k \geq 2$ ja olkoot $p, q \in U$. Tällöin*

$$f(q) = f(p)+\sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(q_i-p_i)(q_j-p_j)\int_0^1(1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p+t(q-p))dt.$$

Todistus. Todistus perustuu Taylorin kaavaan [[**6**], s. 426-428; [**9**], s. 17-20]. $\square$

Seuraavassa lemmassa käytetty merkintä $\left(C^\infty(p)^0 \middle/ (C^\infty(p)^0)^2\right)^*$ tarkoittaa kaikkia lineaarikuvauksia $L : C^\infty(p)^0 \to \mathbb{R}$, joille

$$\ker(L) \supseteq \operatorname{span}\{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} : \mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)^0\}.$$

Lemma 1.9. *Olkoon M sileä monisto. Kaikilla $p \in M$ vektoriavaruudet*

$$T_pM \text{ ja } \left(C^\infty(p)^0 \middle/ (C^\infty(p)^0)^2\right)^* \quad \text{ovat isomorfisia.}$$

Todistus. Merkitään lyhyesti algebraa $A := C^\infty(p)$ ja sen ideaalia $I := C^\infty(p)^0$. Koska aliavaruudelle I^2 pätee $I^2 = I \cdot I \subseteq I \cdot A \subseteq I$, niin myös tekijäavaruus I/I^2 on vektoriavaruus. Olkoon tangenttivektori $\nu \in T_pM$ eli $\nu : A \to \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in I$ seuraa Leibnizin säännöstä

$$\nu(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f}(p)\nu(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)\nu(\mathbf{f}) = 0 \cdot \nu(\mathbf{g}) + 0 \cdot \nu(\mathbf{f}) = 0.$$

Tangenttivektorin rajoittuma $\nu|_I : I \to \mathbb{R}$ siis häviää aliavaruudessa I^2. Näin ollen tangenttivektori ν on lineaarikuvaus tekijäavaruudessa I/I^2, ts. $\nu \in \left(I/I^2\right)^*$.

Toisaalta, olkoon nyt lineaarikuvaus $L \in \left(I/I^2\right)^*$, eli $L \in (I)^*$ siten, että $\ker(L) \supseteq I^2$. Määritellään $\nu_L : A \to \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $\mathbf{f} \in A$

$$\nu_L(\mathbf{f}) := L(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p)).$$

Tällöin ν_L on derivaatio, sillä

$$\begin{aligned}
\nu_L(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= L(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f}(p) \cdot \mathbf{g}(p)) \\
&\overset{1)}{=} L((\mathbf{f} - \mathbf{f}(p))(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) + \mathbf{f}(p)(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) + \mathbf{g}(p)(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p))) \\
&\overset{2)}{=} L(0 + \mathbf{f}(p)(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) + \mathbf{g}(p)(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p))) \\
&= \mathbf{f}(p)L(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) + \mathbf{g}(p)L(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p)) \\
&= \mathbf{f}(p)\nu_L(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)\nu_L(\mathbf{f}),
\end{aligned}$$

missä yhtäsuuruuden 1) kohdalla on lisätty termit

$$0 = (\mathbf{f}(p)\mathbf{g} - \mathbf{f}(p)\mathbf{g}), 0 = (\mathbf{g}(p)\mathbf{f} - \mathbf{g}(p)\mathbf{f}) \text{ ja } 0 = (\mathbf{f}(p)\mathbf{g}(p) - \mathbf{f}(p)\mathbf{g}(p))$$

ja yhtäsuuruus 2) seuraa siitä, että $(\mathbf{f} - \mathbf{f}(p))(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) \in I^2$. Näin ollen $\nu_L \in T_pM$ ja kuvaus $L \mapsto \nu_L$ on siis isomorfismi vektoriavaruuksien $\left(I \big/ I^2 \right)^*$ ja T_pM välillä. □

LAUSE 1.10. *Olkoon M sileä monisto, jolle* $\dim(M) = n$. *Tällöin kaikilla $p \in M$ pätee* $\dim(T_pM) = n$.

TODISTUS. Merkitään $I := C^\infty(p)^0$. Edellisen lemman perusteella voidaan päätellä, että koska vektoriavaruudet $\left(I \big/ I^2 \right)^*$ ja T_pM ovat isomorfisia kaikilla $p \in M$, niin tällöin dimensioille pätee kaikilla $p \in M$

$$\dim(T_pM) = \dim\left(\left(I \big/ I^2 \right)^* \right) = \dim\left(I \big/ I^2 \right).$$

Valitaan piste $p \in M$, sen ympäristö U ja koordinaattikuvaus $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, jolle pätee $\varphi(p) = 0$ ja jonka kuva $\varphi(U)$ on konveksi. Lauseen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että koordinaattikuvauksen φ komponenttifunktioden joukko $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset C^\infty(p)$ muodostaa kannan tekijäavaruuteen $I \big/ I^2$. Osoitetaan aluksi, että kaikilla $i \in \{1 \ldots, n\}$ funktiot φ_i virittävät vektoriavaruuden $I \big/ I^2$.

Olkoon $\mathbf{f} \in I$. Koska $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin ja konveksi, voidaan hyödyntää edellä mainittua differentiaalilaskennan lemmaa yhdisteeseen $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$. Kaikille $x \in \varphi(U)$ pätee euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannassa $\{x_1, \ldots, x_n\}$ siis

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f \circ \varphi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} txdt.$$

Ensimmäinen termi oikealla puolella häviää, sillä oletuksen mukaan pätee $f \circ \varphi^{-1}(0) = f(p) = 0$. Lyhennetään merkintöjä asettamalla $a_i := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \in \mathbb{R}$ ja $h \circ \varphi^{-1} := \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} txdt$, missä $h \in C^\infty$, jolloin

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \sum_{i=1}^n a_i (x_i \circ \varphi) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \circ \varphi)(x_j \circ \varphi) h \\
\mathbf{f} &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j h \\
\mathbf{f} &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \mod I^2,
\end{aligned}$$

sillä $\varphi_i \varphi_j h \in I^2$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Näin ollen komponenttifunktioiden joukko $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ virittää vektoriavaruuden $I \big/ I^2$.

Osoitetaan vielä, että funktiot φ_i ovat lineaarisesti riippumattomia. Oletetaan, että $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in I^2$ joillakin $a_i \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee myös $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in (C^\infty(0))^2$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kannassa $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Tällöin kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$ on

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0,$$

mistä seuraa, että $a_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Näin ollen komponenttifunktiot φ_i ovat lineaarisesti riippumattomia. $\square$

Nyt tiedetään, että jokaiselle n-ulotteisen sileän moniston M pisteelle p löytyy ympäristö $U \ni p$ ja koordinaattikuvaus $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to \mathbb{R}^n$, joka indusoi lineaarisesti riippumattoman kannan $\{(\partial_1)_p \ldots, (\partial_n)_p\}$ vektoriavaruuteen T_pM siten, että kaikilla $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$ kantavektorit $(\partial_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ määräytyvät kaavalla:

$$(\partial_i)_p(\mathbf{f}) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

Jokainen tangenttiavaruuden T_pM vektori voidaan siis aina esittää koordinaattikuvauksen indusoimassa kannassa. Toisin ilmaistuna kaikille koordinaattikuvauksen φ komponenttikuvauksille $\varphi_j \in C^\infty(p)$ pätee:

$$(\partial_i)_p(\varphi_j) = \frac{\partial(\varphi_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \delta_{ij},$$

jolloin mielivaltaiselle tangenttivektorille $\nu \in T_pM$ löytyy summaesitys

$$\nu(\varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} \nu(\varphi_i) \cdot \delta_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} \nu(\varphi_i)(\partial_i)_p \right)(\varphi_j).$$

Kun merkitään kertoimia $\nu_i := \nu(\varphi_i) \in \mathbb{R}$, saadaan

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(\partial_i)_p \quad .$$

1.3. Differentiaali

MÄÄRITELMÄ 1.11. Olkoot M ja N sileitä monistoja, $F : M \to N$ sileä kuvaus ja $p \in M$. Lineaarista kuvausta $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$, jolle pätee kaikilla $\nu \in T_pM$ ja $\mathbf{f} \in C^\infty(F(p))$

$$dF_p(\nu)(\mathbf{f}) = \nu(f \circ F),$$

kutsutaan *kuvauksen F differentiaaliksi pisteessä p.*

Koska reaaliakselilla $\mathbb{R}$ on vain yksi koordinaatti $\varphi(x) = x = id_\mathbb{R}(x)$, on kuvaus $\nu \mapsto \nu(id_\mathbb{R})$ isomorfismi tangenttiavaruuden $T_p\mathbb{R}$ ja euklidisen avaruuden $\mathbb{R}$ välillä. Tällöin sileän funktion $f : M \to \mathbb{R}$ tapauksessa havaitaan, että kaikilla $\nu \in T_pM$

$$df_p(\nu) = df_p(\nu)(id_\mathbb{R}) = \nu(id_\mathbb{R} \circ f) = \nu(f)$$

eli differentiaali $df_p(\nu)$ on itse asiassa tangenttivektori $\nu \in T_{f(p)}\mathbb{R}$.

1.4. Kotangenttiavaruus T_p^*M

MÄÄRITELMÄ 1.12. Moniston tangenttiavaruuden duaalivektoriavaruus, *kotangenttiavaruus* $(T_pM)^* =: T_p^*M$ *pisteessä* $p \in M$ on duaaliavaruuden määritelmän mukaan:

$$T_p^*M = \{\omega : T_pM \to \mathbb{R} : \omega \text{ lineaarimuoto}\},$$

missä lineaarimuodolla tarkoitetaan sellaista jatkuvaa funktiota, *kotangenttivektoria*, jolle pätee kaikilla $\nu_1, \nu_2 \in T_pM$ ja kaikilla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\omega(\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2) = \lambda_1\omega(\nu_1) + \lambda_2\omega(\nu_2) \in \mathbb{R}.$$

Olkoon φ koordinaattikuvaus, jolla indusoidaan kanta $\{(\partial_i)_p\}_{i=1}^n$ tangenttiavaruuteen T_pM. Merkitään tällöin kotangenttiavaruuden T_p^*M kantaa koordinaattikuvauksen φ differentiaaleina $\{(d\varphi_i)_p : T_p^*M \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ siten, että kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ pätee

$$(d\varphi_i)_p((\partial_j)_p) = (\partial_j)_p(\varphi_i) = \delta_{ij}.$$

Kaikille mielivaltaisille kotangenttivektoreille $\omega \in T_p^*M$ löytyy siis summaesitys koordinaattikuvauksen φ indusoimassa kannassa:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i (d\varphi_i)_p \qquad \text{missä } \omega_i \in \mathbb{R}, \text{ kaikilla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Lineaarialgebraan perehtynyt lukija saattaa tässä vaiheessa piirtää mielessään kuvan $n \times n$ -matriisista, jossa on n kappaletta sarake- ja rivivektoreita. Samaan tapaan differentiaaligeometriassa voidaan ajatella tangenttivektoreita rivivektoreina ja kotangenttivektoreita sarakevektoreina. Tästä lähtien on hyödyllistä pitää mielessä, että kaikki tutkielmassa käytettävät sileät monistot M ovat joko yhdesti yhtenäisiä ja avoimia pintoja vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja ne voidaan esittää yhden koordinaattikuvauksen avulla $\varphi : M \to \mathbb{R}^2$ tai yhdesti yhtenäisiä ja avoimia tason $\mathbb{R}^2$ joukkoja, joihin liitettävä koordinaattikuvaus on identtinen kuvaus $\varphi : M \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$. Kotangenttiavaruuden kantavektoreita merkitään tutummin euklidisen vektoriavaruuden kannassa $(d\varphi_i)_p = (dx_i)_p$.

1.5. Tensorialgebra $\mathcal{T}_r^k(TM)$

Sileän moniston M tangenttiavaruudet ja niitä vastaavat duaaliavaruudet ovat hyvin määriteltyjä jokaisessa pisteessä erikseen. Tämän luvun tarkoitus on yhdistää nämä kaikki vektoriavaruudet *tensorialgebraksi*. Tangenttiavaruudet voidaan paloittain yhdistää seuraavasti:

Määritelmä 1.13. Olkoon M sileä monisto. Tangenttiavaruuksien sekä näiden duaaliavaruuksien erillisiä yhdisteitä

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, \nu) \text{ kaikilla } p \in M \text{ ja } \nu \in T_pM\} \text{ ja}$$
$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \omega) \text{ kaikilla } p \in M \text{ ja } \omega \in T_p^*M\}$$

kutsutaan *tangentti- ja kotangenttikimpuiksi*, kun niihin liitetään surjektiiviset projektiokuvaukset vastaavassa järjestyksessä:

$$\pi : TM \to M : (p, \nu) \mapsto p,$$
$$\pi^* : T^*M \to M : (p, \omega) \mapsto p.$$

Kelvolliselta projektiokuvaukselta vaaditaan kaksi ehtoa. Ensiksi kaikilla $p \in M$ pätee alkukuville $\pi^{-1}(p) = T_pM$ ja $(\pi^*)^{-1}(p) = T_p^*M$. Toiseksi kaikilla $p \in M$ on olemassa ympäristö U, jossa on määritelty diffeomorfismit (eli sileät homeomorfismit)

$$X : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$
$$X^* : (\pi^*)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

joille pätee $\pi_1 \circ X = \pi$ ja $\pi_1^* \circ X^* = \pi^*$ ja joille kaikilla $q \in U$ kuvauksen rajoittumat

$$X|_{T_qM} : T_qM \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$$
$$X^*|_{T_q^*M} : T_q^*M \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$$

ovat isomorfismeja.

MÄÄRITELMÄ 1.14. Tangenttikimpun *leikkaus* on sileä kuvaus $V : M \to TM$, jolle pätee $\pi \circ V = Id_M$, ja sitä kutsutaan myös *tangenttikimpun TM vektorikentäksi.* Tangenttikimpun TM kaikkien leikkausten kokoelmaa merkitään

$$\Gamma(TM) := \{V : V \text{ tangenttikimpun } TM \text{ vektorikenttä}\}.$$

Tangenttikimppun TM leikkaus V on määritelmän mukaan sileä kuvaus, toisin sanoen kuvaus kahden moniston välillä. Tämän vuoksi on sopivaa tarkistaa, että joukko TM on todella sileä monisto.

LAUSE 1.15. *Olkoon M sileä monisto. Tällöin myös tangenttikimppu TM on sileä monisto.*

TODISTUS. Kiinnitetään piste $p \in M$. Olkoon $U_\alpha \ni p$ ympäristö, jossa on määritelty koordinaattikuvaus $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Koska jokaista pistettä $q \in U_\alpha$ vastaa yksikäsitteinen tangenttiavaruus T_qM, on kuvaus

$$\tilde{\varphi_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{q \in U_\alpha} T_qM \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (q, \nu) \mapsto (\varphi_\alpha(q), (d\varphi_\alpha)_q(\nu))$$

homeomorfismi ympäristöjen $\pi^{-1}(U_\alpha)$ ja $\tilde{\varphi_\alpha}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ välillä. Toisin sanoen numeroituvalla indeksijoukolla A kokoelma $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ muodostaa atlaksen ja sitä kautta differentiaalirakenteen tangenttikimpulle TM, jolloin TM on määritelmän mukaan sileä monisto. Tällöin myös on sopivaa kutsua leikkausta $V : M \to TM$ sileäksi kuvaukseksi. $\square$

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoot $V_1, \ldots, V_n$ vektoriavaruuksia ja $V_1^*, \ldots, V_n^*$ niitä vastaavat duaalivektoriavaruudet. Tällöin vektoriavaruuden $V_1 \times \ldots \times V_n$ *tensoritulo* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ on määritelty kokoelmaksi multilineaarisia funktioita

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n := \{T^n : V_1^* \times \ldots \times V_n^* \to \mathbb{R} : T^n \text{ multilineaarinen}\}.$$

Koska $(V^*)^*$ ja V ovat isomorfiset, saadaan vastaavasti

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^* := \{T_n : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{R} : T_n \text{ multilineaarinen}\}.$$

Yleisesti multilineaarinen funktio tarkoittaa sellaista funktiota $L : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{R}$, missä kaikille vektoreille $\nu_i, \upsilon_i \in V_i$ ja skalaareille $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots\ n\}$, pätee

$$\sum_{i=1}^n L(\nu_i + \lambda_i \upsilon_i) = \sum_{i=1}^n L(\nu_i) + \lambda_i L(\upsilon_i).$$

Olkoot $k, r \in \{1, \ldots\ n\}$. Tällöin vektoriavaruus $V_1 \times \ldots \times V_k \times V_1^* \times \ldots \times V_r^*$ yhdessä multilineaarisen tulon $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \otimes V_1^* \otimes \ldots \otimes V_r^*$ kanssa muodostaa (k, r)-*tensorialgebran.* Multilineaarista funktiota $T_r^k : V_1^* \times \ldots \times V_k^* \times V_1 \times \ldots \times V_r \to \mathbb{R}$ kutsutaan nimellä *k-kontravariantti-r-kovariantti tensori*, tai lyhyesti (k, r)-*tensori.*

Tangenttiavaruuden T_pM (k,r)-tensorien joukkoa merkitään

$$\mathcal{T}_r^k(T_pM) := \{T_r^k : (T_p^*M)^k \times (T_pM)^r \to \mathbb{R} : T_r^k \text{ multilineaarinen}\}.$$

Yhdessä tensoritulon $(T_pM)^k \otimes (T_p^*M)^r$ kanssa pari $(\mathcal{T}_r^k(T_pM), \otimes)$ on määritelmän mukainen (k,r)-tensorialgebra. Lisäksi tämä pistekohtainen tangenttiavaruuden tensorialgebra voidaan koota koko moniston M käsittäväksi tangenttikimpun tensorialgebraksi

$$\mathcal{T}_r^k(TM) := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{T}_r^k(T_pM),$$

johon liitetään kimpun määritelmän toteuttava surjektiivinen projektiokuvaus

$$\Pi : \mathcal{T}_r^k(TM) \to M : (p, \mathcal{T}_r^k(T_pM)) \mapsto p$$

ja sitä vastaava leikkaus, (k,r)-*tensorikenttä*

$$\Sigma : M \to \mathcal{T}_r^k(TM) \quad \text{siten, että} \quad \Pi \circ \Sigma = Id_M.$$

LUKU 2

Geodeesi Riemannin monistolla

Edellisessä luvussa määriteltiin differentiaaligeometrian termejä hyvin yleisellä tasolla. On aiheellista kysyä, miten tämä kaikki liittyy intuitiivisesti ymmärrettävään geometriaan. Eihän tähän mennessä ole esitelty muita geometrisia olioita kuin piste p jossain sileäksi monistoksi kutsutussa avaruudessa M. Tämän luvun tarkoituksena onkin luoda geometrisesti mielekäs ja ymmärrettävä tulkinta edellisessä luvussa määritellyille sileälle monistolle ja sen tangenttikimpun tensorialgebralle.

2.1. Riemannin monisto (M, g)

Tutkielman johdannossa viitattiin metriseen sisätuloavaruuteen, jolla mallinnetaan perinteistä euklidista tasogeometriaa. Lineaarialgebrassa reaaliarvoista euklidista sisätuloa voidaan merkitä

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

jolloin sisätulo täyttää kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ symmetrisyyden, lineaarisuuden ja positiividefiniittisyyden ehdot:

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\
\langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \\
\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ ja} \\
\langle x, x \rangle &\geq 0, \text{ missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos } x = 0.
\end{aligned}$$

Differentiaaligeometriassa Riemannin metriikka on analoginen lineaarialgebrassa määritellyn sisätulon kanssa. On syytä painottaa tässä vaiheessa sitä, että topologiassa metrisen avaruuden metriikalla tarkoitetaan eri asiaa kuin differentiaaligeometrian Riemannin metriikalla. Näiden kahden eri metriikan välinen yhteys käy kuitenkin pian ilmi.

Määritelmä 2.1. Olkoon M sileä monisto. Tällöin 2-kovariantti tensorikenttä

$$g : M \to \mathcal{T}_2^0(TM)$$

on *Riemannin metriikka*, jos kaikilla $p \in M$ tensori $g_p \in \mathcal{T}_2^0(T_pM)$ on

$$\begin{aligned}
\text{symmetrinen} : g_p(\nu_1, \nu_2) &= g_p(\nu_2, \nu_1) \quad \text{kaikilla } \nu_1, \nu_2 \in T_pM \text{ ja} \\
\text{positiividefiniitti} : g_p(\nu, \nu) &> 0 \quad \text{kaikilla } \nu \in T_pM \setminus \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}$$

Riemannin metriikka voidaan ilmaista koordinaattikuvauksen φ indusoimassa kannassa:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(d\varphi_i) \otimes (d\varphi_j) =: \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} d\varphi_i d\varphi_j,$$

missä kertoimet $g_{ij} \in C^\infty(M)$ muodostavat $n \times n$-matriisin. Merkitään myös kerroinfunktioita $g^{ij} \in C^\infty(M)$, joille $g_{ij} \cdot g^{jk} = \delta_{ik}$. Riemannin metriikan lineaarisuus toki seuraa suoraan tensorien määritelmän multilineaarisuudesta. Riemannin metriikalla g varustettua sileää monistoa M kutsutaan *Riemannin monistoksi* ja merkitään parina (M, g).

Oikeastaan nyt on määritelty tarpeeksi rakennetta, jotta päästään käsiksi lineaarialgebrasta tuttuihin sisätuloavaruuden käsitteisiin. Merkitään jatkossa lyhyesti Riemannin monistoa $M := (M, g)$, kun Riemannin metriikasta ei ole epäselvyyttä. Tällöin vektorikentän $V \in \Gamma(TM)$ *normi* eli pituus Riemannin metriikan g suhteen ympäristössä $U \subseteq M$ on

$$|V| := \sqrt{g(V, V)}$$

eli pisteittäin ajateltuna vektorin $V(p) =: V_p \in T_pM$ normi kaikilla $p \in U$ on

$$|V_p| = \sqrt{g_p(V_p, V_p)}.$$

Vektorikenttää V, jolle $|V| = 1$ jossain ympäristössä $U \subseteq M$, kutsutaan *lokaalisti normaaliksi* ja tällöin myös vektoreille pätee $|V_p| = 1$ kaikilla $p \in U$. Kaikilla $p \in M$ ja $\nu, \upsilon \in T_pM \backslash \{\mathbf{0}\}$ vektoreiden ν ja υ välinen *kulma* on

$$\angle(\nu, \upsilon) := \arccos\left(\frac{g_p(\nu, \upsilon)}{|\nu| \cdot |\upsilon|}\right).$$

Mikäli $g_p(\nu, \upsilon) = 0$ eli $\angle(\nu, \upsilon) = \frac{\pi}{2}$, sanotaan, että vektorit ν ja υ ovat *ortogonaalisia* eli kohtisuorassa toisiaan vasten. Myös kahta vektorikenttää $V, W \in \Gamma(TM)$ kutsutaan *lokaalisti ortogonaalisiksi*, jos kaikilla $p \in U \subseteq M$ pätee $g_p(V_p, W_p) = 0$. Ympäristössä $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ normaalien ja parittain ortogonaalisten vektorikenttien joukkoa $\{E_1, \ldots, E_n\}$ kutsutaan moniston M *tangenttikimpun lokaaliksi ortonormaaliksi kehykseksi*. Riemannin metriikan avulla päästään käsiksi sellaisiin itse moniston geometrisiin olioihin kuin jana ja suora.

Olkoon $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja $\sigma : I \to M$ sileä polku. Merkitään lyhyesti $\sigma \in C^\infty(I, M)$. Muistutuksena todettakoon, että sileä polku on siis differentiaaligeometrisessa mielessä sileä kuvaus monistolta $U \subset \mathbb{R}$ monistolle M, missä $U := (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ on avoin väli jollain $\varepsilon > 0$. Tällöin polku $\sigma(t)$ on siis differentoituva kaikilla $t \in [a, b]$, jolloin tangenttiavaruuden $T_{\sigma(t)}M$ tangenttivektorille $\sigma'(t)$ pätee kaikilla $\mathbf{f} \in C^\infty(\sigma(t))$:

$$\sigma'(t)(\mathbf{f}) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(t).$$

MÄÄRITELMÄ 2.2. Polun $\sigma \in C^\infty(I, M)$ *pituus* Riemannin metriikan g suhteen on

$$L_\sigma := \int_I \left|\frac{d\sigma(t)}{dt}\right| dt = \int_a^b g_{\sigma(t)}(\sigma'(t), \sigma'(t))dt.$$

Olkoot $p, q \in M$ kaksi Riemannin moniston pistettä. Merkitään sileän polun $\sigma : [0, 1] \to M$ kuvan eli *käyrän* $\sigma([0, 1])$ päätepisteitä

$$\sigma(0) =: p \text{ ja } \sigma(1) =: q.$$

Tällöin pisteiden p ja q välisen *Riemannin etäisyyden* määrää funktio

$$\begin{aligned} d &: M \times M \to \mathbb{R} : \\ &(p,q) \mapsto \inf\{L_\sigma : \sigma \in C^\infty([0,1],M) \text{ jolle } \sigma(0) = p, \sigma(1) = q\}. \end{aligned}$$

Kirjan lemmassa [[**7**], s. 94-95] osoitetaan, että jokainen yhtenäinen Riemannin monisto varustettuna edellä määritellyllä Riemannin etäisyydellä on metrinen avaruus, jonka indusoitu topologia on sama kuin Riemannin moniston topologia. Geometrisessa mielessä pisteiden p ja q välisellä *janalla* tarkoitetaan sellaisen sileän polun $\sigma \in C^\infty([0,1],M)$ kuvaa, jolle polun pituus L_σ valitun Riemannin metriikan g suhteen on Riemannin etäisyys $d(p,q)$. Janan jatkaminen *suoraksi* tarkoittaa siis analyyttisessä mielessä sitä, että laajennetaan tällaisen polun määrittelyväli $[0,1]$ koko reaaliakseliksi $\mathbb{R}$.

Geometrinen intuitiivinen käsitys suorista tulee siis Riemannin metriikan kautta. Nyt herää kuitenkin merkittäviä kysymyksiä. Milloin polun pituus saavuttaa minimin? Voiko janaa vastaavan polun jotenkin laskea? Voidaanko ylipäänsä olla varmoja, että kaikilla Riemannin monistoilla on olemassa yksikäsitteinen jana kahden mielivaltaisen pisteen välillä? Näihin kysymyksiin on useita lähestymistapoja. Aluksi on syytä todeta, että kaikilla Riemannin monistoilla janat eivät ole yksikäsitteisiä. Esimerkiksi tutkielman ensimmäisessä luvussa mainittu yksikköpallo voidaan varustaa Riemannin metriikalla, joka tekee janoista isoympyrän kaarenpätkiä. Tällöin pallon jokaisen pisteparin välinen Riemannin etäisyys on olemassa, mutta napapisteiden tapauksessa Riemannin etäisyyden määritelmän täyttävä sileä polku ei suinkaan ole yksikäsitteinen. Tässä tutkielmassa käsitellään sellaisia Riemannin monistoja, joissa janat ovat yksikäsitteisiä ja janaa vastaavat polut valitun Riemannin metriikan suhteen voidaan selvittää *geodeettisen differentiaaliyhtälöryhmän* ratkaisuna.

2.2. Moniston M lineaarinen konnektio ∇

Ajatellaanpa sileää polkua $\sigma : I \to M$ ja vektorikenttää $V \in \Gamma(TM)$, jolle pätee $\sigma = \pi \circ V$. Miten vektorikentän V projisoiman polun σ pisteiden tangenttivektoreita voidaan verrata toisiinsa, kun ne kaikki ovat eri tangenttiavaruuksien alkioita? Tämä onnistuu, kun osataan derivoida koko vektorikenttää.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon M sileä monisto. Sileä kuvaus $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : (V,W) \mapsto \nabla_V W$ on *lineaarinen konnektio monistolla* M, mikäli ∇ on $C^\infty(M)$-lineaarinen vektorikentän V suhteen, $\mathbb{R}$-lineaarinen vektorikentän W suhteen ja Leibnizin sääntö toteutuu. Toisin sanoen kaikilla $V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 \in \Gamma(TM)$, kaikilla $f, g \in C^\infty(M)$ ja kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned} C^\infty(M)\text{-lineaarisuus} &: \nabla_{fV_1+gV_2} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W \\ \mathbb{R}\text{-lineaarisuus} &: \nabla_V(\lambda W_1 + W_2) = \lambda \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2 \\ \text{Leibnizin sääntö} &: \nabla_V(fW) = f\nabla_V W + (Vf)W. \end{aligned}$$

Sanotaan, että $\nabla_V W$ on *vektorikentän W kovariantti derivaatta vektorikentän V suhteen.*

Olkoon nyt $U \subset M^n$ moniston ympäristö ja olkoon $\{E_1, \cdots, E_n\}$ kimpun TM lokaali ortonormaali kehys ympäristössä U. Tällöin lineaarinen konnektio ∇ monistolla

M voidaan esittää koordinaateissa siten, että kaikilla $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k,$$

missä funktioita $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ kutsutaan *Christoffelin symboleiksi*. Olkoot $V, W \in \Gamma(TM)$, jotka voidaan esittää muodossa

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i E_i \text{ kertoimilla } V_i \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad W = \sum_{i=1}^{n} W_i E_i \text{ kertoimilla } W_i \in \mathbb{R}.$$

Vektorikentän V kovariantti derivaatta vektorikentän W suhteen voidaan ilmaista kehyksen $\{E_1 \ldots, E_n\}$ koordinaateissa Christoffelin symbolien avulla:

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_V \sum_{j=1}^{n} W_j E_j \\
&= V \sum_{j=1}^{n} W_j E_j + \sum_{j=1}^{n} W_j \nabla_{\sum_i V_i E_i} E_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} V W_j E_j + \sum_{i,j=1}^{n} V_i W_j \nabla_{E_i} E_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} V W_k E_k + \sum_{i,j,k=1}^{n} V_i W_j \Gamma_{ij}^k E_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (V W_k + \sum_{i,j=1}^{n} V_i W_j \Gamma_{ij}^k) E_k.
\end{aligned}$$

Mikäli Christoffelin symboleille pätee $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ kaikilla indekseillä i, j, k, sanotaan lineaarista konnektiota ∇ *symmetriseksi*.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon M sileä monisto, $\pi : TM \to M$ tangenttikimpun projektiokuvaus, $\sigma \in C^\infty(I, M)$ sileä polku ja ∇ lineaarinen konnektio monistolla M. Vektorikenttää $V \in \Gamma(TM)$, jolle pätee $\pi \circ V = \sigma$, kutsutaan *vektorikentäksi polulla* σ. Tällöin siis kaikilla $t \in I$ vektori $V(t) \in T_{\sigma(t)}M$. Näiden vektorikenttien muodostamaa vektoriavaruutta merkitään

$$Vec(\sigma) := \{V \in \Gamma(TM) : \pi \circ V = \sigma\}.$$

Operaattoria $D : Vec(\sigma) \to Vec(\sigma) : V \mapsto \nabla_{\sigma'} V$ kutsutaan *kovariantiksi derivaataksi polulla* σ, jos sille pätee kaikilla $V, W \in Vec(\sigma)$, $f \in C^\infty(I)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\text{-lineaarisuus}: \; & D(\lambda V + W) = \lambda D(V) + D(W) \\
\text{tulosääntö}: \; & D(fV) = \frac{d}{dt} fV + fDV.
\end{aligned}$$

Jos Riemannin moniston (M, g) metriikalle g pätee kaikilla sileillä poluilla $\sigma \in C^\infty(I, M)$ ja kaikilla vektorikentillä $V, W \in Vec(\sigma)$:

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(DV, W) + g(V, DW),$$

niin sanotaan, että *lineaarinen konnektio* ∇ *on yhteensopiva Riemannin metriikan* g *kanssa.* Yksi erittäin vahva differentiaaligeometrian lause (engl. ”Fundamental Lemma of Riemannian Geometry”) osoittaa, että kaikilla Riemannin monistoilla (M, g) on olemassa täsmälleen yksi symmetrinen ja Riemannin metriikan g kanssa yhteensopiva lineaarinen konnektio [[**7**], s. 65-70]. Tämän *Riemannin konnektion* (tai *Levi-Civita -konnektion*) Christoffelin symbolit voidaan laskea euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalissa kannassa $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kaavalla:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}\right). \tag{2.1}$$

2.3. Geodeettinen differentiaaliyhtälöryhmä

Kuvitellaan kappaletta, jonka paikan monistolla M ajan $t \in I$ suhteen ilmaisee sileä polku $\sigma \in C^\infty(I, M)$. Tätä mielikuvaa hyödyntämällä polulla σ liukuvan kappaleen nopeutta kuvaa vektorikenttä $\sigma' \in Vec(\sigma)$ ja kovariantti derivaatta $D\sigma' = \nabla_{\sigma'}\sigma'$ voidaan tulkita kappaleen kiihtyvyytenä johonkin moniston suuntaan. Näin ollen klassisen Newtonin mekaniikan mielessä tuntuu luonnolliselta, että jos kappaleella ei missään pisteessä ole kiihtyvyyttä mihinkään moniston suuntaan (eli kuljetaan vakionopeudella $\nu \neq 0$), niin kappale liikkuu pitkin lyhintä reittiä päätepisteiden välillä. Nyt voidaankin antaa tarkka määritelmä geodeesille.

Määritelmä 2.5. Olkoot (M, g) Riemannin monisto ja ∇ Riemannin konnektio, joka on symmetrinen ja yhteensopiva Riemannin metriikan g kanssa. Tällöin sileä polku $\sigma \in C^\infty(I, M)$ on *geodeesi* (konnektion ∇ suhteen) jos

$$D(\sigma'(t)) = 0 \qquad \text{kaikilla } t \in I.$$

Geodeesin määritelmä siis riippuu sileän polun $\sigma \in C^\infty(I, M)$ parametrisoinnista sekä tietysti lineaarisesta konnektiosta ∇, joka Riemannin moniston tapauksessa on yksikäsitteinen. Seuraava lause kertoo, että kun kiinnitetään jokin polun kuvapiste monistolla M ja määritellään tangenttivektori tuossa pisteessä, voidaan geodeesin parametrisointi laskea.

Lause 2.6. *Olkoon* (M, g) *Riemannin monisto,* ∇ *Riemannin konnektio monistolla* M *ja* $I \subset \mathbb{R}$ *suljettu väli siten, että* $0 \in I$. *Valitaan lisäksi piste* $p \in M$ *ja* $\nu \in T_pM$. *Tällöin on olemassa yksikäsitteinen geodeesi* $\sigma \in C^\infty(I, M)$*, jolle hetkellä* $0 \in I$ *pätee* $\sigma(0) = p$ *ja* $\sigma'(0) = \nu$.

Todistus. Moniston M ortonormaaleissa koordinaateissa $(x_1, \ldots, x_n)$ ajatellen mielivaltaisen sileän polun $\sigma \in C^\infty(I, M)$ tangenttivektorikenttä σ' voidaan ilmoittaa komponenttien $\sigma_k := x_k \circ \sigma$ avulla

$$\sigma' = \sum_{k=1}^n \frac{d\sigma_k}{dt}(\partial_k \circ \sigma).$$

Merkitään jatkossa polun komponenttien derivaattaa ajan suhteen lyhyesti $\dot\sigma_k := \frac{d\sigma_k}{dt}$ ja $\ddot\sigma_k := \frac{d^2\sigma_k}{dt^2}$, jolloin kaikilla $t \in I$ pätee tangenttivektoreille

$$\sigma'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{d\sigma_k}{dt}(t)\partial_k = \sum_{k=1}^n \dot\sigma_k(t)\partial_k.$$

Koordinaateissa $(x_1,\dots,x_n)$ ilmaistuna geodeesille σ pätee kaikilla $t \in I$

$$\begin{aligned}
D(\sigma'(t)) &= \sum_{k=1}^{n} D(\dot{\sigma_k} \circ \partial_k \circ \sigma)(t) \\
&\overset{1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \ddot{\sigma_k}(t)(\partial_k \circ \sigma)(t) + \dot{\sigma_k}(t) \cdot D(\partial_k \circ \sigma)(t) \\
&\overset{2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \ddot{\sigma_k}(t)\partial_k(\sigma(t)) + \dot{\sigma_k}(t)(\nabla_{\sigma'(t)}\partial_k)(\sigma(t)) \\
&\overset{3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\ddot{\sigma_k}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)\dot{\sigma_i}(t)\dot{\sigma_j}(t) \right) \partial_k(\sigma(t)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

missä 1) seuraa operaattorin D tulosäännöstä, 2) kovariantin derivaatan määritelmästä ja 3) Christoffelin symbolien määritelmästä. Näin ollen tangenttivektorikentälle σ' pätee ehto $D\sigma' \equiv 0$ jos ja vain jos kaikilla $k \in \{1,\dots,n\}$ pätee ns. *geodeettinen differentiaaliyhtälöryhmä*

$$\ddot{\sigma_k} + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)\dot{\sigma_i}\dot{\sigma_j} \equiv 0. \tag{2.2}$$

Tämä geodeettinen differentiaaliyhtälöryhmä on siis toisen kertaluvun tavallinen homogeeninen differentiaaliyhtälöryhmä komponenttifunktioiden σ_k suhteen. Geodeettisella differentiaaliyhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu alkuarvoilla $\sigma(0) = p$ ja $\sigma'(0) = \nu$. Tämän ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys seuraa differentiaaliyhtälöiden teoriasta [[**7**], s. 58,59]. □

Kirjassa [[**7**], §6] esitellään kiinnostava kaksiosainen tulos, joka koskee geodeeseja Riemannin monistolla. Ensimmäiseksi voidaan osoittaa, että jokainen geodeesi on lokaalisti etäisyyden minimoiva, eli jos polku $\sigma \in C^\infty([0,1], M)$ on geodeesi pisteiden $\sigma(0) = p$ ja $\sigma(1) = q$ välillä, niin tällöin $L_\sigma = d(p,q)$. Toiseksi, jos polku $\sigma \in C^\infty([0,1], M)$ on etäisyyden minimoiva ja parametrisoitu vakionopeuden mukaan, eli $|\dot{\sigma}(t)| = c$ jollain $c > 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, niin tällöin se on myös geodeesi. Erityisesti näistä kahdesta edellinen lause osoittaa, että geodeettisen differentiaaliyhtälöryhmän avulla voidaan laskea janaa vastaavan polun parametrisointi. Tutkielman hyperbolisen geometrian malleissa kaikki janat ovat myös yksikäsitteisiä. Seuraavassa luvussa tullaan hahmottelemaan geodeesit yhdessä hyperbolisen geometrian mallissa.

LUKU 3

Poincarén puolitaso $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$

Nyt käytössä on tarpeeksi työkaluja hyperbolisen geometrian mallin rakentamiseen. Muistutuksena todettakoon, että tavoitteena on siis luoda sellainen tasogeometrian malli, jossa euklidisen geometrian paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Määritellään aluksi joukko

$$\mathbb{H} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

sekä 2-kovariantti tensorikenttä $g_{\mathbb{H}} : T\mathbb{H} \times T\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ siten, että kaikilla pisteillä $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}$ pätee tensorille

$$g_{\mathbb{H}}(x_1, x_2) := \frac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2). \tag{3.1}$$

Lause 3.1. *Pari $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ muodostaa Riemannin moniston.*

Todistus. Mikään ei estä määrittelemästä sileää monistoa yhden koordinaattikuvauksen avulla, jos se on mahdollista. Koska joukko $\mathbb{H}$ on avoin, voidaan mielivaltaiselle pisteelle $p \in \mathbb{H}$ valita ympäristöksi $U := \mathbb{H}$, jolloin identtinen kuvaus $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$ on sileä homeomorfismi ympäristöjen U ja $\varphi(U)$ välillä eli sopiva koordinaattikuvaus, jonka määrittelyjoukko peittää koko avaruuden $\mathbb{H}$. Näin ollen $\mathbb{H}$ on sileä monisto.

Merkitään euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaalia kantaa $\{x_1, x_2\}$. Olkoot $V, W \in \Gamma(T\mathbb{H})$ kaksi mielivaltaista vektorikenttää. Kuten ensimmäisessä luvussa todettiin, nämä vektorikentät voidaan esittää koordinaattikuvauksen φ indusoimassa kannassa $\{\partial_1, \partial_2\}$, missä

$$\partial_1 = \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial x_1}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$\partial_2 = \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial x_2}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Näin ollen on olemassa kertoimet $V_1, V_2, W_1, W_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ siten, että vektorikentille $V, W \in \Gamma(T\mathbb{H})$ pätee

$$V = V_1\partial_1 + V_2\partial_2$$
$$W = W_1\partial_1 + W_2\partial_2.$$

Koordinaattikuvaus φ indusoi myös kovektorikentille $V^* \in \Omega(T\mathbb{H})$ kannan $\{d\varphi_1, d\varphi_2\}$, joka nyt identtisen kuvauksen tapauksessa voidaan ilmaista vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaaleissa koordinaateissa $\{dx_1, dx_2\}$. Tällöin kaikilla $i \in \{1, 2\}$ on

$$dx_i(V) = dx_i\left(\sum_{k=1}^{2} V_k\partial_k\right) = \sum_{k=1}^{2} V_k dx_i(\partial_k) = \sum_{k=1}^{2} V_k\delta_{ki} = V_i.$$

Tarkistetaan tensorikentän $g_{\mathbb{H}}$ symmetrisyys. Kaikilla $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}$ on

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{H}}(V,W)(x_1,x_2) &= \frac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2)(V(p),W(p)) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left(dx_1^2(V(p),W(p)) + dx_2^2(V(p),W(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left((dx_1(V(p))dx_1(W(p)) + dx_2(V(p))dx_2(W(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left((V_1(p))(W_1(p)) + (V_2(p))(W_2(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left((W_1(p))(V_1(p)) + (W_2(p))(V_2(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left((dx_1(W(p))dx_1(V(p)) + dx_2(W(p))dx_2(V(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}\left(dx_1^2(W(p),V(p)) + dx_2^2(W(p),V(p))\right) \\
&= \frac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2)(W(p),V(p)) \\
&= g_{\mathbb{H}}(W,V)(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Tensorikentän $g_{\mathbb{H}}$ positiividefiniittisyys havaitaan helposti, sillä kaikki kertoimet ovat neliöityjä:

$$g_{\mathbb{H}}(V,V)(x_1,x_2) = \frac{1}{x_2^2}\left((V_1(p)^2 + V_2(p)^2\right) > 0.$$

Tensorikenttä $g_{\mathbb{H}}$ toteuttaa Riemannin metriikan ehdot, joten pari $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ on Riemannin monisto. $\square$

Riemannin monistoa $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ kutsutaan *Poincarén puolitasoksi*, *hyperboliseksi tasoksi* taikka *Bolyain ja Lobatševskin pinnaksi*, riippuen asiayhteydestä. Miltä näyttävät geodeesit Poincarén puolitasossa?

3.1. Geodeesit Poincarén puolitasossa

Olkoon nyt pari $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}} =: g)$ edellä määritelty Riemannin monisto ja ∇ Riemannin konnektio tuolla monistolla. Ensimmäinen askel kohti geodeesien ratkaisemista on selvittää Riemannin moniston Christoffelin symbolit. Poincarén puolitason Riemannin metriikka g voidaan esittää kaikilla $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}$ muodossa:

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} dx_i dx_j,$$

missä sileät kerroinfunktiot $g_{ij}, g^{ij} \in C^\infty(\mathbb{H})$ ja ovat Riemannin metriikan $g_\mathbb{H}$ määritelmän (3.1) mukaan

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = \frac{1}{x_2^2}, \\ g^{11} &= g^{22} = x_2^2, \\ g_{12} &= g_{21} = g^{12} = g^{21} = 0. \end{aligned}$$

Lasketaan Riemannin konnektion Christoffelin symbolit kaavalla (2.1):

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\left(g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + g^{12}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2^2\,(0+0-0) + 0\left(0+0+\frac{2}{x_2^3}\right)\right) = 0, \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\left(g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + g^{12}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2^2\left(0-\frac{2}{x_2^3}-0\right) + 0\,(0+0-0)\right) = -\frac{1}{x_2} = \Gamma^1_{21}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\left(g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) + g^{12}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_2^2\,(0+0-0) + 0\left(-\frac{2}{x_2^3}-\frac{2}{x_2^3}+\frac{2}{x_2^3}\right)\right) = 0, \\ \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\left(g^{21}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0\,(0+0-0) + x_2^2\left(0+0+\frac{2}{x_2^3}\right)\right) = \frac{1}{x_2}, \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\left(g^{21}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) + g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0\left(0-\frac{2}{x_2^3}-0\right) + x_2^2\,(0+0-0)\right) = 0 = \Gamma^2_{21}, \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\left(g^{21}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) + g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0\,(0+0-0) + x_2^2\left(-\frac{2}{x_2^3}-\frac{2}{x_2^3}+\frac{2}{x_2^3}\right)\right) = -\frac{1}{x_2}. \end{aligned}$$

Täten identtisesti nollasta poikkeavat Christoffelin symbolit ovat:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{x_2} \text{ ja } \Gamma^2_{11} = \frac{1}{x_2}.$$

Tavoitteena on selvittää se sileä polku $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [0,1] \to \mathbb{H}$, joka toteuttaa geodeettisen yhtälöryhmän (2.2) alkuarvoilla:

$$\sigma(0) = (x_1, x_2) \text{ ja } \sigma'(0) = (\dot\sigma_1(0), \dot\sigma_2(0)).$$

Sijoitetaan lasketut Christoffelin symbolit geodeettiseen yhtälöryhmään, jolloin saadaan Poincarén puolitason tapauksessa identiteetit:

$$\begin{cases} \ddot{\sigma}_1 - \dfrac{2}{\sigma_2}\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2 \equiv 0, \\ \ddot{\sigma}_2 + \dfrac{1}{\sigma_2}(\dot{\sigma}_1)^2 - \dfrac{1}{\sigma_2}(\dot{\sigma}_2)^2 \equiv 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On hyödyllistä käsitellä kaksi tapausta, kuten lähteessä [**8**]. Oletetaan aluksi että geodeesilla ei ole vaakasuoraa nopeuden komponenttia missään pisteessä, eli $\dot{\sigma}_1(t) = 0$ kaikilla $t \in [0,1]$, jolloin geodeesin ensimmäinen koordinaatti seuraa suoraan alkuarvosta $\sigma_1 \equiv x_1$. Geodeettisen differentiaaliyhtälöryhmän jälkimmäisestä identiteetistä jää jäljelle

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_2 - \frac{(\dot{\sigma}_2)^2}{\sigma_2} &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow \sigma_2\ddot{\sigma}_2 - (\dot{\sigma}_2)^2 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Tätä identiteettiä käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2}\right) &= \frac{\sigma_2\ddot{\sigma}_2 - (\dot{\sigma}_2)^2}{\sigma_2^2} \\ &\equiv \frac{0}{(\sigma_2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} &\equiv a \quad \text{jollain } a \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \qquad \dot{\sigma}_2 - a\sigma_2 &\equiv 0 \quad \text{jollain } a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on $\sigma_2(t) = e^{a(t-t_0)}$ joillain polun σ parametrisoinnista riippuvilla vakioilla $a, t_0 \in \mathbb{R}$. Kun $\dot{\sigma}_1 \equiv 0$, niin geodeesit Poincarén puolitasossa ovat siis muotoa $\sigma : [0,1] \to \mathbb{H} : t \mapsto (x_1, e^{a(t-t_0)})$. Kun määrittelyväli laajennetaan koko reaaliakseliksi, saadaan aikaan x_2-akselin suuntainen avoin puolisuora (olettaen, että vertikaalinen alkunopeus $\dot{\sigma}_2(0) \neq 0$, jolloin $a \neq 0$).

Tarkastellaan seuraavaksi tapaus $\dot{\sigma}_1(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$. Sovelletaan geodeettisen differentiaaliyhtälöryhmän identiteettejä

$$\sigma_2\ddot{\sigma}_1 - 2\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2 \equiv 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_2\ddot{\sigma}_2 + (\dot{\sigma}_1)^2 - (\dot{\sigma}_2)^2 \equiv 0$$

seuraavassa havainnossa:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_2\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1}\right) &= \frac{(\dot{\sigma}_2)^2}{\dot{\sigma}_1} + \frac{\sigma_2\ddot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} - \frac{\ddot{\sigma}_1\sigma_2\dot{\sigma}_2}{(\dot{\sigma}_1)^2} \\
&= \frac{\dot{\sigma}_1(\dot{\sigma}_2)^2 + \dot{\sigma}_1\sigma_2\ddot{\sigma}_2 - \ddot{\sigma}_1\sigma_2\dot{\sigma}_2}{(\dot{\sigma}_1)^2} \\
&= \frac{\dot{\sigma}_1(\dot{\sigma}_2)^2 + \dot{\sigma}_1\sigma_2\ddot{\sigma}_2 - \ddot{\sigma}_1\sigma_2\dot{\sigma}_2}{(\dot{\sigma}_1)^2} + \frac{(\dot{\sigma}_1)^3 - (\dot{\sigma}_1)^3}{(\dot{\sigma}_1)^2} + \frac{\dot{\sigma}_1(\dot{\sigma}_2)^2 - \dot{\sigma}_1(\dot{\sigma}_2)^2}{(\dot{\sigma}_1)^2} \\
&= \frac{\dot{\sigma}_1(\sigma_2\ddot{\sigma}_2 + (\dot{\sigma}_1)^2 - (\dot{\sigma}_2)^2) - \dot{\sigma}_2(\sigma_2\ddot{\sigma}_1 - 2\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2) - (\dot{\sigma}_1)^3}{(\dot{\sigma}_1)^2} \\
&\equiv \frac{0 - 0 - (\dot{\sigma}_1)^3}{(\dot{\sigma}_1)^2} = -\dot{\sigma}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{1)}{\Leftrightarrow} & \frac{\sigma_2\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} &\equiv -\sigma_1 + a, \quad \text{jollain } a \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow & \sigma_1\dot{\sigma}_1 + \sigma_2\dot{\sigma}_2 &\equiv a\dot{\sigma}_1, \qquad \text{jollain } a \in \mathbb{R} \\
&\overset{2)}{\Leftrightarrow} & \frac{1}{2}(\sigma_1)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2)^2 &\equiv a\sigma_1 + b, \quad \text{joillain } a, b \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

missä kohdissa 1) ja 2) on integroitu puolittain. Järjestämällä polun σ komponentit järjestykseen

$$(\sigma_1 - a)^2 + (\sigma_2)^2 \equiv a^2 + 2b =: r^2,$$

havaitaan, että geodeesit, joilla $\dot{\sigma}_1(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$, ovat $(a, 0)$-keskiksen ja r-säteisen ympyrän kaaria, kunhan polun parametrisoinnista riippuville vakioille a, b pätee $a^2 + 2b > 0$. Tällöin, jos geodeesin määrittelyväli laajennetaan koko reaaliakseliksi, saadaan aikaan avoin puoliympyrä (ks. liitteen kuva A.1).

Kaikki liitteen A kuvissa havainnollistetut hyperbolisen geometrian mallit tuovat esille tilanteen, jossa on kolme suoraa. Kaksi suoraa leikkaavat toisiaan ja kolmas suora on yhdensuuntainen kahden edellisen kanssa. Euklidisessa geometriassa tällainen tilanne olisi mahdoton, sillä yksi monista parralleeliaksiooman vaihtoehtoisista määritelmistä toteaa, että jos kaksi suoraa ovat yhdensuuntaisia kolmannen suoran kanssa, niin nämä edelliset suorat ovat myös keskenään yhdensuuntaisia. Todellisuudessa hyperbolisen geometrian tapauksessa suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää samassa tasossa äärettömän monta suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia ensimmäisen annetun suoran kanssa.

LUKU 4

Muita hyperbolisen geometrian malleja

4.1. Metriikan siirto

Olkoot M ja N kaksi sileää monistoa. Mikäli on olemassa diffeomorfismi $F : M \to N$, niin tätä kuvausta voidaan käyttää tensorien liikuttamiseen monistolta toiselle. Vektoreiden tapauksessa havaittiin jo, että diffeomorfismin $F : M \to N$ differentiaali siirtää vektorin $\nu \in T_pM$ vektoriksi $(dF)_p(\nu) \in T_{F(p)}N$. Tätä operaatiota kutsutaan *vektorien työntämiseksi* ja usein merkitään $(dF)_p =: F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$.

Mikäli (M, g_1) ja (N, g_2) ovat kaksi Riemannin monistoa, myös Riemannin metriikan pisteittäinen liikuttaminen onnistuu diffeomorfismin $F : M \to N$ avulla. Merkitään kaikilla $p \in M$

$$(g_1)_p = (g_2 \circ dF)_p = (g_2 \circ F_*)_p =: (F^* g_2)_p,$$

missä merkintää $F^* : (T^*_{F(p)}N)^2 \to (T^*_pM)^2$ kutsutaan *metriikan siirroksi.*

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoot (M, g_1) ja (N, g_2) kaksi Riemannin monistoa.

Jos Riemannin metriikoille g_1 ja g_2 pätee $g_1 = f \circ g_2$ jollain kerroinfunktiolla $f \in C^\infty(M)$, sanotaan, että metriikat ovat *konformiset* toisiinsa nähden.

Mikäli on olemassa diffeomorfismi $F : M \to N$ siten, että $F^* g_2 = f \circ g_1$ jollain kerroinfunktiolla $f \in C^\infty(M)$, niin Riemannin monistot M ja N ovat *konformisesti ekvivalentit.*

Mikäli on olemassa diffeomorfismi $F : M \to N$ siten, että $F^* g_2 = g_1$, niin Riemannin monistot M ja N ovat *isometriset* ja kuvausta F kutsutaan *isometriaksi.*

Metriikan siirto isometrian avulla on yksi tapa muodostaa uusia hyperbolisen geometrian malleja jo tunnetusta mallista [[**3**], §7]. Erityisesti sellaiset hyperboliset geometrian mallit, joiden Riemannin metriikka on konforminen perinteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ Riemannin metriikan $g_{\mathbb{E}} = \sum_{i=1}^n dx_i^2$ kanssa ovat hyödyllisiä, sillä niissä kahden sileän polun välinen kulman suuruus säilyy isometrian kautta joka pisteessä. Katsotaanpa esimerkkejä joistakin tunnetuista hyperbolisen geometrian malleista.

4.2. Poincarén kiekko $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$

Poincarén puolitaso $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ on siis yksi tasossa oleva hyperbolisen geometrian malli. Uuden mallin luomiseksi on helpointa ehkä aluksi miettiä jokin avoin joukko tasossa. Yksi tällainen joukko on avoin yksikkökiekko eli

$$\mathbb{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

tai ilmaistuna kompleksitasossa $\mathbb{C}$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 1\}.$$

Tässä tapauksessa kompleksilukumerkintä helpottaa tulevia laskutoimituksia. Eräs kompleksianalyysistä tuttu konformikuvaus, joka kuvaa avoimen yksikkökiekon avoimeksi puolitasoksi, on muotoa

$$F_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{H} : z \mapsto -i\frac{z+i}{z-i}.$$

Tämä on analyyttinen bijektio, siispä sopiva diffeomorfismi. Tällöin Riemannin metriikka $g_{\mathbb{D}}$ voidaan laskea metriikan siirtona:

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{D}}(z) &= F_\alpha^* g_{\mathbb{H}}(z) \\
&= g_{\mathbb{H}}(dF_\alpha(z)) \\
&= \frac{\left|\frac{dF_\alpha(z)}{dz}\right|^2}{Im(F_\alpha(z))^2} d|z|^2 \\
&= \frac{\left|\frac{-2}{(z-i)^2}\right|^2}{\left(\frac{-|z|^2+1}{|z-i|}\right)^2} d|z|^2 \\
&= \frac{\frac{4}{|z-i|^4}}{\frac{(1-|z|^2)^2}{|z-i|^4}} d|z|^2 \\
&= \cancelto{1}{\frac{|z-i|^4}{|z-i|^4}} \frac{4}{(1-|z|^2)^2} d|z|^2 \\
&= \frac{4}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}(dx_1^2+dx_2^2).
\end{aligned}$$

Tässä hyperbolisessa geometrian mallissa $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, ns. *Poincarén kiekossa*, yksikkökiekon halkaisijat ja kohtisuorassa yksikköympyrää leikkaavat ympyränkaaret ovat suoria (ks. liitteen kuva A.2). Yksi tapa havaita tämä liittyy siihen tosiasiaan, että molemmat Riemannin metriikat $g_{\mathbb{H}}$ ja $g_{\mathbb{D}}$ ovat konformisia euklidisen tason Riemannin metriikan $g_{\mathbb{E}}$ kanssa. Tällöin kaikki suorat kulmat myös näyttävät aidosti suorilta kulmilta näissä geometrian malleissa.

4.3. Puolipallomalli $(\mathbb{J}, g_{\mathbb{J}})$

Määritellään puolipallopinta

$$\mathbb{J} = \{((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$$

ja diffeomorfismi, joka kuvaa puolipallon $\mathbb{J}$ puolitasoksi $\mathbb{H}$:

$$F_\beta : \mathbb{J} \to \mathbb{H} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{2x_2}{x_1+1}, \frac{2x_3}{x_1+1}\right).$$

Merkitään aluksi kuvauksen F_β komponentteja

$$y_1 := \frac{2x_2}{x_1+1} \text{ ja } y_2 := \frac{2x_3}{x_1+1}.$$

Tällöin pätee differentiaaleille:

$$\begin{aligned} dy_1 &= -\frac{2x_2}{(x_1+1)^2}dx_1 + \frac{2}{(x_1+1)}dx_2 \\ dy_2 &= -\frac{2x_3}{(x_1+1)^2}dx_1 + \frac{2}{(x_1+1)}dx_3. \end{aligned}$$

Lisäksi puolipallon $\mathbb{J}$ määritelmästä havaitaan laskujen kannalta hyödylliset relaatiot:

$$\begin{aligned} & 1 - x_1^2 = x_2^2 + x_3^2, \\ & 0 = d0 = d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3) \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 dx_1 = -(x_2 dx_2 + x_3 dx_3). \end{aligned}$$

Riemannin metriikka $g_{\mathbb{J}}$ voidaan laskea metriikan siirtona:

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{J}}(x_1,x_2,x_3) &:= F_\beta^* g_{\mathbb{H}}(x_1,x_2,x_3) \\ &= g_{\mathbb{H}}(dF_\beta(x_1,x_2,x_3)) \\ &= \frac{1}{y_2^2}(dy_1^2 + dy_2^2) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2x_3}{x_1+1}\right)^2}\left(\left(-\frac{2x_2}{(x_1+1)^2}dx_1 + \frac{2}{x_1+1}dx_2\right)^2 + \left(-\frac{2x_3}{(x_1+1)^2}dx_1 + \frac{2}{x_1+1}dx_3\right)^2\right) \\ &= \cancel{\frac{(x_1+1)^2}{4}}\frac{1}{x_3^2}\left(\cancel{\frac{4}{(x_1+1)^2}}\left(\frac{x_2^2dx_1^2}{(x_1+1)^2} - \frac{2x_2dx_1dx_2}{x_1+1} + dx_2^2 + \frac{x_3^2dx_1^2}{(x_1+1)^2} - \frac{2x_3dx_1dx_3}{x_1+1} + dx_3^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{x_3^2}\left(\left(\frac{x_2^2+x_3^2}{(x_1+1)^2}\right)dx_1^2 - \frac{2(x_2dx_2 + x_3dx_3)}{x_1+1}dx_1 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \\ &\overset{1)}{=} \frac{1}{x_3^2}\left(\left(\frac{1-x_1^2}{(x_1+1)^2}\right)dx_1^2 + \frac{2x_1}{x_1+1}dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \\ &= \frac{1}{x_3^2}\left(\left(\cancelto{1}{\frac{1-x_1^2}{(x_1+1)^2} + \frac{2x_1}{x_1+1}}\right)dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \\ &= \frac{1}{x_3^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right), \end{aligned}$$

missä yhtäsuuruuden 1) kohdalla on käytetty edellämainittuja apurelaatioita. Tässä hyperbolisen geometrian mallissa $(\mathbb{J}, g_{\mathbb{J}})$ suorat ovat puolipallopinnan $\mathbb{J}$ ja (x_1, x_2)-tasoa kohtisuorien tasojen leikkausjoukkoja (ks. liitteen kuva A.3). Malli $(\mathbb{J}, g_{\mathbb{J}})$ toimii hyvänä apuvälineenä, kun määritellään vielä kaksi muuta hyperbolisen geometrian mallia.

4.4. Kleinin ja Beltramin kiekko $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{K}})$

Tason avoimessa yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ on toki olemassa muitakin Riemannin metriikoita kuin Poincarén kiekon Riemannin metriikka $g_{\mathbb{D}}$, vaikkakin tällöin täytyy luopua konformisuudesta euklidisen tason Riemannin metriikan $g_{\mathbb{E}}$ suhteen. Yksi historiallisesti merkittävä hyperbolisen geometrian malli $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{K}})$ on nimeltään *Kleinin ja*

Beltramin kiekko. Felix Klein (1849 – 1925) ja Eugenio Beltrami (1835 – 1900) kehittelivät muitakin epäeuklidisen geometrian malleja jo ennen Jules Henri Poincaréta (1854 – 1912), mutta tässä tutkielmassa pyritään säilyttämään ne nimitykset, jotka ovat olleet yleisesti käytössä. Kleinin ja Beltramin kiekko saadaan aikaan, kun litistetään puolipallo $\mathbb{J}$ yksikkökiekoksi $\mathbb{D}$. Vastaavasti tämän projektion käänteiskuvaus on nostokuvaus:

$$F_\gamma : \mathbb{D} \to \mathbb{J} : (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right).$$

Merkitään aluksi kuvauksen F_γ komponentteja

$$y_1 := x_1,\ y_2 := x_2 \text{ ja } y_3 := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Tällöin pätee komponenttien differentiaaleille:

$$\begin{aligned}
dy_1 &= dx_1, \\
dy_2 &= dx_2, \\
d(y_3^2) &= d(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
\Leftrightarrow \quad 2y_3 dy_3 &= -2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \\
\Leftrightarrow \quad dy_3 &= \frac{-(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)}{y_3} \\
\Leftrightarrow \quad dy_3 &= \frac{-(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}.
\end{aligned}$$

Riemannin metriikka $g_{\mathbb{K}}$ voidaan laskea metriikan siirtona:

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{K}}(x_1, x_2) &= F_\gamma^* g_{\mathbb{J}}(x_1, x_2) \\
&= g_{\mathbb{J}}(dF_\gamma(x_1, x_2)) \\
&= \frac{1}{y_3^2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \\
&= \frac{1}{1 - x_1^2 - x_2^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})^2}\right) \\
&= \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.
\end{aligned}$$

Tämä Riemannin metriikka $g_{\mathbb{K}}$ ei valitettavasti sievene helpompaan muotoon, joten se ei ole konforminen euklidisen Riemannin metriikan kanssa. Ainoa piste, jossa konformisuus ja kulmien suuruus säilyy läpi isometrian on origo. Kleinin ja Beltramin kiekossa $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{K}})$ kaikki suorat ovat euklidisten suorien rajoittumia joukkoon $\mathbb{D}$ (ks. liitteen kuva A.4).

4.5. Hyperboloidimalli $(\mathbb{L}, g_{\mathbb{L}})$

Viimeinen tutkielmassa tarkasteltava malli on nimeltään *hyperboloidimalli* tai *Minkowskin malli*, $(\mathbb{L}, g_{\mathbb{L}})$. Hermann Minkowski (1864 − 1909) tarkasteli geometriaa yleisellä tasolla $n-$monistolla, mutta tässä tutkielmassa riittää tarkastella kaksiulotteista pintaa, joka voidaan määritellä

$$\mathbb{L} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}.$$

Tämän ns. *hyperboloidipinnan* $\mathbb{L}$ ja puolipallon $\mathbb{J}$ välillä on olemassa diffeomorfismi

$$F_\delta := \mathbb{L} \to \mathbb{J} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{1}{x_3}\right).$$

Merkitään kuvauksen F_δ komponenttifunktioita

$$y_1 := \frac{x_1}{x_3},\ y_2 := \frac{x_2}{x_3} \text{ ja } y_3 := \frac{1}{x_3}.$$

Tällöin komponenttifunktioiden differentiaalit ovat:

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{1}{x_3}dx_1 - \frac{x_1}{x_3^2}dx_3 = \frac{1}{x_3}(dx_1 - \frac{x_1}{x_3}dx_3), \\ dy_2 &= \frac{1}{x_3}dx_2 - \frac{x_2}{x_3^2}dx_3 = \frac{1}{x_3}(dx_2 - \frac{x_2}{x_3}dx_3), \\ dy_3 &= -\frac{1}{x_3^2} = \frac{1}{x_3}\left(-\frac{1}{x_3}\right). \end{aligned}$$

Hyperboloidipinnan määritelmä antaa kaksi laskujen kannalta tärkeää apurelaatiota:

$$\begin{aligned} x_3^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 1 \quad \text{ja} \\ d(x_3^2) &= d(x_1^2 + x_2^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 2x_3dx_3 &= 2(x_1dx_1 + x_2dx_2) \\ \Leftrightarrow x_3dx_3 &= x_1dx_1 + x_2dx_2. \end{aligned}$$

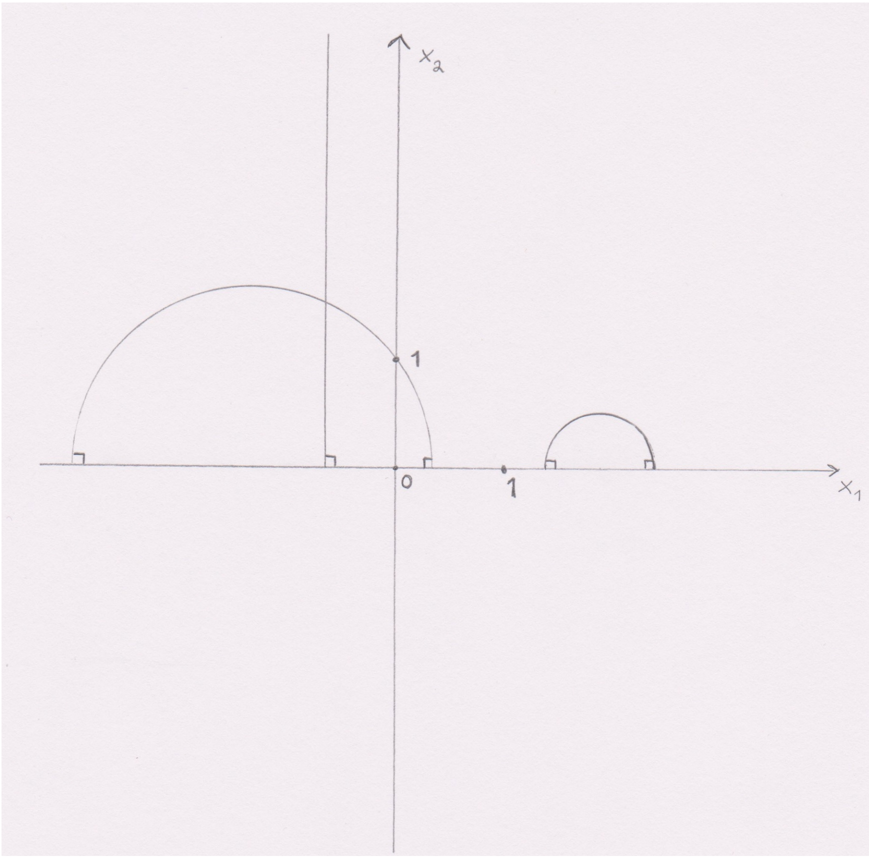
Riemannin metriikka $g_{\mathbb{L}}$ voidaan laskea metriikan siirtona:

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{L}}(x_1, x_2, x_3) &= F_\delta^* g_{\mathbb{J}}(x_1, x_2, x_3) \\
&= g_{\mathbb{J}}(dF_\delta(x_1, x_2, x_3)) \\
&= \frac{1}{y_3^2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \\
&= \frac{1}{\cancel{\frac{1}{x_3^2}}}\left(\cancel{\frac{1}{x_3^2}}\left(dx_1 - \frac{x_1}{x_3}dx_3\right)^2 + \cancel{\frac{1}{x_3^2}}\left(dx_2 - \frac{x_2}{x_3}dx_3\right)^2 + \cancel{\frac{1}{x_3^2}}\left(-\frac{1}{x_3}dx_3\right)^2\right) \\
&= dx_1^2 - \frac{2x_1 dx_1 dx_3}{x_3} + \frac{x_1^2 dx_3^2}{x_3^2} + dx_2^2 - \frac{2x_2 dx_2 dx_3}{x_3} + \frac{x_2^2 dx_3^2}{x_3^2} + \frac{dx_3^2}{x_3^2} \\
&= dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{x_3^2}(-2x_1 x_3 dx_1 dx_3 + x_1^2 dx_3^2 - x_2 x_3 dx_2 dx_3 + x_2^2 dx_3^2 + dx_3^2) \\
&= dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{x_3^2}((x_1^2 + x_2^2 + 1)dx_3^2 - 2x_3 dx_3(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)) \\
&\overset{1)}{=} dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{x_3^2}(x_3^2 dx_3^2 - 2x_3 dx_3(x_3 dx_3)) \\
&= dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,
\end{aligned}$$

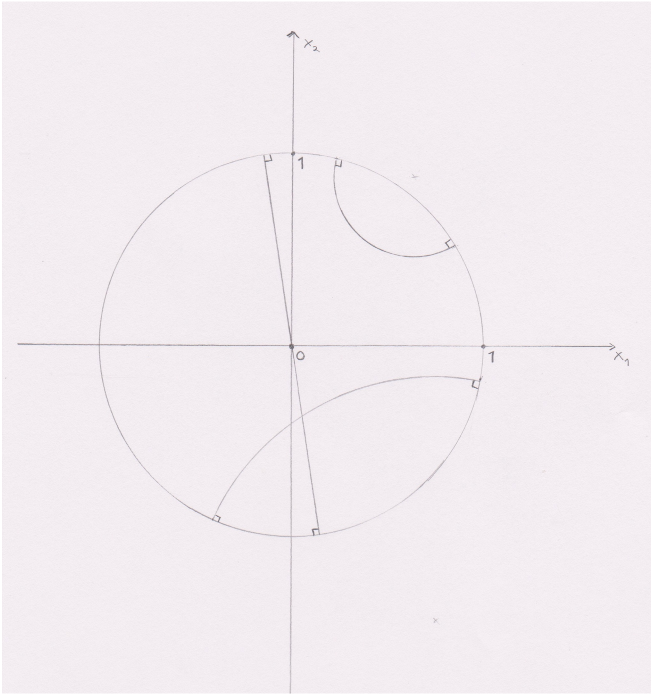
missä yhtäsuuruuden 1) kohdalla on käytetty edellämainittuja apurelaatioita. Hyperboloidimallissa suorat ovat hyperboloidipinnan $\mathbb{L}$ ja origon kautta kulkevien tasojen leikkausjoukkoja (ks. liitteen kuva A.5).

LIITE A

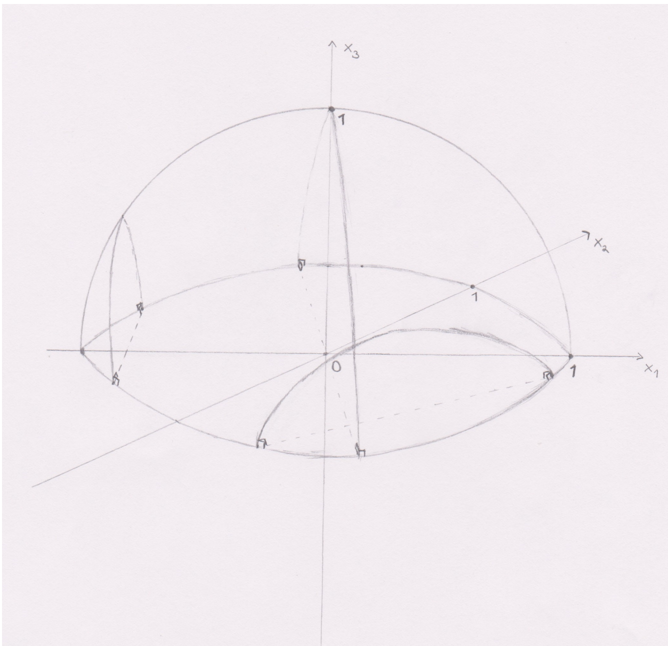
Kuvia



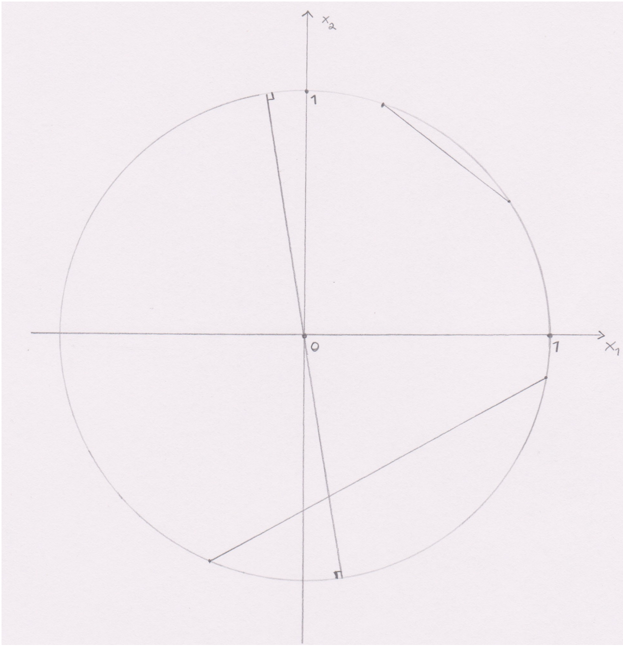
Kuva A.1. Suorat Poincarén puolitasossa $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$.



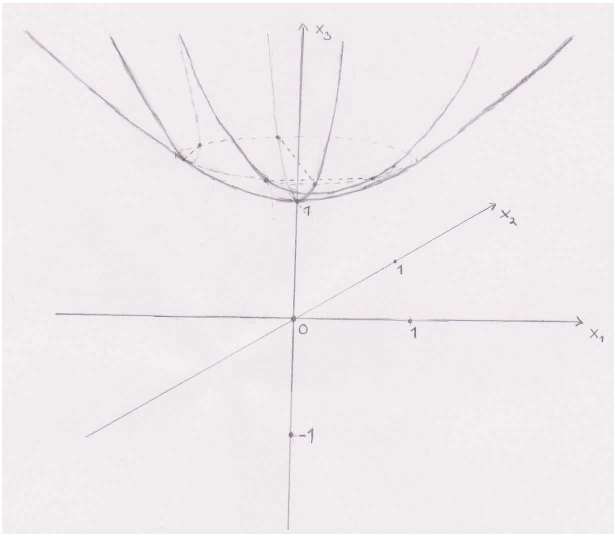
KUVA A.2. Suorat Poincarén kiekossa $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.



KUVA A.3. Suorat puolipallomallissa $(\mathbb{J}, g_{\mathbb{J}})$.



KUVA A.4. Suorat Kleinin ja Beltramin kiekossa $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{K}})$.



KUVA A.5. Suorat hyperboloidimallissa $(\mathbb{L}, g_{\mathbb{L}})$.

LIITE B

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko
$\mathbb{R}^n$	Euklidinen n-ulotteinen sisätuloavaruus
$(M, \mathcal{F})$	Sileä monisto M differentiaalirakenteella $\mathcal{F}$
(M, g)	Sileä monisto M Riemannin metriikassa g
C^∞	$\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f$ on euklidisessa mielessä sileä kuvaus$\}$
$C^\infty(M)$	$\{f : M \to \mathbb{R} : f$ on differentiaaligeometrisessa mielessä sileä funktio$\}$
$C^\infty(M, N)$	$\{F : M \to N : F$ on differentiaaligeometrisessa mielessä sileä kuvaus$\}$
$C^\infty(I, M)$	$\{\sigma : I \to M : \sigma$ on sileä polku suljetulla määrittelyvälillä $I \subset \mathbb{R}\}$
$C^\infty(p)$	Sileiden funktioiden muodostama algebra lähellä pistettä $p \in M$
$C^\infty(p)^0$	Algebran $C^\infty(p)$ ideaali $\{\mathbf{f} \in C^\infty(p) : \mathbf{f}(p) = 0\}$
T_pM	Tangenttivektoriavaruus $\{\nu : C^\infty(p) \to \mathbb{R} : \nu$ on lineaarinen derivaatio$\}$
T_p^*M	Kotangenttivektoriavaruus $\{\omega : T_pM \to \mathbb{R} : \omega$ on lineaarimuoto$\}$
TM	Tangenttikimppu $\{(p, \nu) : p \in M$ ja $\nu \in T_pM\}$ projektiokuvauksella $\pi : TM \to M$
$\Gamma(TM)$	Tangenttikimpun leikkaus $\{V : M \to TM : V$ on vektorikenttä, $V \circ \pi = Id_M\}$
$\mathcal{T}_r^k(TM)$	Tensorialgebra $\bigsqcup_{p \in M}\{T_r^k : (T_p^*M)^k \times (T_pM)^r \to \mathbb{R} : T_r^k$ on multilineaarinen$\}$
δ_{ij}	Kroneckerin delta: $\delta_{ij} = \{1$ kun $i = j, 0$ muutoin$\}$
∂_i	Osittaisderivaatta koordinaatin x_i suhteen: $\frac{\partial}{\partial x_i}$
dx_i	Differentiaali koordinaatin x_i suhteen: $dx_i(\partial_j) = \partial_j(x_i) = \delta_{ij}$
$\sum_{i,j,k=1}^n$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n$
$\dot{\sigma}$	Sileän polun σ ensimmäinen derivaatta ajan suhteen: $\frac{d\sigma}{dt}$
$\ddot{\sigma}$	Sileän polun σ toinen derivaatta ajan suhteen: $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$
∇	Riemannin moniston (M, g) lineaarinen konnektio
Γ_{ij}^k	Lineaarisen konnektion ∇ Christoffelin symboli
D	Kovariantti derivaatta sileällä polulla σ

Kirjallisuutta

[1] Carl B. Boyer: *A History of Mathematics.* Toinen laitos, John Wiley & Sons, inc., 1991.

[2] David A. Brannan, Matthew. F. Esplen ja Jeremy J. Gray: *Geometry.* Cambridge University Press, 1999.

[3] James W. Cannon, William J. FLoyd, Rirchard Kenyon ja Walter R. Parry: *Hyperbolic Geometry.* Julkaistu kirjassa *Flavors in Geometry* s.59-115, Cambridge University Press, 1997.

[4] Enrico Le Donne: *Differential Geometry.* Luentomateriaali, Jyväskylän yliopisto, 2014. https://sites.google.com/site/enricoledonne/lecture_notes/GeoDiff2013-3.pdf; Viitattu 7.10.2014.

[5] Enrico Le Donne: *Riemannian Geometry.* Luentomateriaali, Jyväskylän yliopisto, 2014. https://sites.google.com/site/enricoledonne/lecture_notes/GeoRiem2013.pdf; Viitattu 7.10.2014

[6] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, 2003.

[7] John M. Lee: *Riemannian Geometry: An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, 2003.

[8] Eric Moorhouse: *Differential geometry: The Hyperbolic Plane.* University of Wyoming, 2009. http://www.uwyo.edu/moorhouse/courses/5640/hyperbolic.pdf; Viitattu 7.10.2014.

[9] John W. Woll: *Functions of several variables.* Harcourt, Brace & World, 1966.