Johdatus fraktaaliderivaattoihin ja niiden sovelluksiin

Hanna Halinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2014

Tiivistelmä: Hanna Halinen, *Johdatus fraktaaliderivaattoihin ja niiden sovelluksiin* (engl. *An Introduction to Fractional Derivatives and Their Applications*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 46 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2014.

Fraktaaliderivaatta on derivaatta, jonka kertaluku on reaali- tai kompleksiluku. Fraktaaliderivaatta voidaan määritellä usealla eri tavalla, mutta mikään määritelmä ei ole selkeästi muita parempi. Koska fraktaaliderivaatan ominaisuudet riippuvat valitusta määritelmästä, ominaisuuksia ei voida suoraan yleistää kaikille fraktaaliderivaatoille. Tämän tutkielman tarkoitus on antaa lukijalle perustiedot reaalilukukertaisista fraktaaliderivaatoista ja niiden määritelmäsidonnaisista ominaisuuksista.

Tutkielmassa esitellään kolme yleisimmin viitattua määritelmää: Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ja Caputo. Grünwald-Letnikovin määritelmä yleistää klassisen derivaatan määritelmän suoraan reaali- ja kompleksiluvuille, minkä vuoksi se on helpoiten ymmärrettävissä analyysin perustietojen pohjalta. Riemann-Liouvillen määritelmä yhdistää fraktaaliderivaatan ja fraktaali-integraalin käsitteet. Caputon fraktaaliderivaatta on taas kehitetty sovellusten näkökulmasta.

Vaikka fraktaaliderivaatan ominaisuudet riippuvat valitusta määritelmästä, joitakin ominaisuuksia voidaan yleistää. Ensiksi, fraktaaliderivaatta on yhtäpitävä klassisen derivaatan kanssa, kun sen kertaluku on kokonaisluku. Toiseksi, fraktaalinen differintegraalioperaattori (engl. fractional differintegral operator) on lineaarinen. Määritelmästä riippuvia ominaisuuksia ovat esimerkiksi Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalien vaihdannaisuus sekä Riemann-Liouvillen / Caputon fraktaaliderivaatan additiivisuus klassisen derivaatan kanssa. Riemann-Liouvillen ja Caputon määritelmien välillä on kuitenkin se ero, että additiivisuus pätee toiselle päinvastaisessa järjestyksessä. Siten fraktaaliderivaatat eivät kommutoi. Riemann-Liouvillen differintegraalioperaattorin tärkeä ominaisuus on myös se, että derivointioperaattori on samaa kertalukua olevan integrointioperaattorin vasen käänteisoperaatio.

Määritettäessä funktioiden fraktaaliderivaatan lausekkeita Riemann-Liouvillen ja Grünwald-Letnikovin määritelmät antavat samat tulokset. Caputon määritelmä ei kuitenkaan ole yhtäpitävä edellisten määritelmien kanssa muulloin kuin erikoistapauksissa. Merkittävin ero näiden määritelmien välillä on, että vakion Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatat eivät ole nollia, kun taas Caputon fraktaaliderivaatta on nolla.

Fraktaaliderivaatan sovelluksia ovat erilaiset fraktaalidifferentiaaliyhtälöt. Fraktaalidifferentiaaliyhtälö saadaan, kun klassisen differentiaaliyhtälön derivaatta korvataan fraktaaliderivaatalla. Alkuarvotehtävissä Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan käyttö on kuitenkin ongelmallista, sillä se tuottaa alkuehdoiksi reaalilukukertaisia derivaattoja, joille ei ole keksitty fysikaalista tulkintaa. Caputon fraktaaliderivaattaa käytettäessä vastaavaa ongelmaa ei ole. Fraktaalidifferentiaaliyhtälöt ovat nykyään tärkeä tutkimuskohde muun muassa fysiikassa. Tässä tutkielmassa esitellään yksi esimerkki fysiikan sovelluksesta: fraktaalivärähtelijän differentiaaliyhtälö. Numeerisin menetelmin on havaittu, että fraktaalivärähtelijällä on sisäinen vaimenemismekanismi, joten se ei voi muodostaa lainkaan eristettyä systeemiä. Toistaiseksi on kuitenkin epäselvää, mistä fraktaalivärähtelijän sisäinen vaimenemismekanismi johtuu.

Sisältö

Johdanto

Differentiaalioperaattorit d/dx, d^2/dx^2, ..., d^n/dx^n ovat matematiikan opiskelijoille tuttuja merkintöjä. Osa opiskelijoista on saattanut pohtia, voiko derivaatan kertaluku n olla muukin kuin luonnollinen luku, kuten esimerkiksi $\frac{1}{2}$ tai $\sqrt{2}$. Vastaus tähän kysymykseen on: kyllä voi. Derivaatasta, jonka kertaluku on reaali- tai kompleksiluku, käytetään nimitystä fraktaaliderivaatta. Vastaavaa operaattoria kutsutaan differintegraalioperaattoriksi (engl. differintegral operator). Tässä tutkielmassa syvennytään pelkästään reaalilukukertaisiin fraktaaliderivaattoihin.

Ensimmäiset maininnat fraktaaliderivaatasta ajoittuvat 1600-luvun loppupuolelle, kun vuonna 1695 Marquis de L'Hôpital esitti Gottfried Wilhelm Leibnizille operaattoria d^n/dx^n koskevan kysymyksen: "What if $n = \frac{1}{2}$?" Tähän Leibniz vastasi: "Thus it follows that $d^{\frac{1}{2}}x$ will be equal to $x\sqrt{dx : x}$, an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."

1700-luvulla fraktaaliderivaatat jäivät muiden matematiikan tutkimuskohteiden varjoon, mutta uteliaisuus aihetta kohtaan säilyi. Vuonna 1730 L. Euler esitti funktion $f(x) = x^m$ fraktaaliderivaatan määritelmän hyödyntäen gammafunktiota, mutta hän ei esittänyt konkreettisia esimerkkejä. Vuonna 1772 J. L. Lagrange sivusi aihetta epäsuorasti osoittaessaan kokonaislukukertaisille derivaatoille tutun derivointisäännön:

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y.$$

Vasta vuonna 1812 S. F. Lacroix osoitti, että funktion $f(x) = x$ kertaluvun $\frac{1}{2}$ fraktaaliderivaatta on

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Tämän jälkeen kiinnostus fraktaaliderivaattoja kohtaan kasvoi huomattavasti. Muiden muassa J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823) ja J. Liouville (1835) esittivät omat määritelmänsä fraktaaliderivaatalle. Vuonna 1847 G. F. B. Riemann määritteli fraktaali-integraalin eli reaalilukukertaisen integraalin käsitteen. Liouvillen fraktaaliderivaatan ja Riemannin fraktaali-integraalin määritelmien pohjalta syntyi yksi suosituimmista fraktaaliderivaatan määritelmistä: Riemann-Liouvillen määritelmä. Toinen historiallisesti merkittävä määritelmä on Grünwald-Letnikovin määritelmä. [**1**, s. 1–15], [**2**]

1900-luvulla fraktaaliderivaattoja ja -integraaleja eli differintegraaleja (engl. differintegrals) käsittelevien julkaisujen määrä jatkoi kasvuaan. Differintegraalien teoria kehittyi merkittävästi ja niiden sovellukset - fraktaalidifferentiaaliyhtälöt - alkoivat kiinnostaa eri alojen tutkijoita. Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan käyttö alkuarvotehtävissä johti kuitenkin teorian ja käytännön väliseen ristiriitaan. Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan haitta nimittäin on, että se tuottaa alkuehdoiksi reaalilukukertaisia derivaattoja, joille ei ole vastaavaa fysikaalista tulkintaa, kuten ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatoille (vrt. $f'(0)$ alkunopeus ja $f''(0)$ alkukiihtyvyys). M. Caputo pyrki ratkaisemaan kyseisen ristiriidan, minkä tuloksena hän esitti oman määritelmänsä fraktaaliderivaatalle vuonna 1967. [**5**, s. 78–79]

Nykyään fraktaaliderivaatat ovat tärkeä työväline matematiikan, fysiikan, kemian, biologian, tekniikan ja taloustieteen tutkimuksessa. Korvaamalla klassisen differentiaaliyhtälön derivaatta fraktaaliderivaatalla saadaan tarkempia malleja luonnonilmiöille. Fraktaalidifferentiaaliyhtälöt ovat osoittautuneet hyödyllisiksi esimerkiksi kompleksisten systeemien analysoinnissa. Erityisesti fysiikassa fraktaalidifferentiaaliyhtälöt ovat olleet valtavan kiinnostuksen kohteena. Muun muassa mekaniikan, sähkömagnetismin, kvanttimekaniikan ja kenttäteorian sovelluksista on julkaistu useita artikkeleita. [**23**]

Tämän tutkielman tarkoitus on antaa lukijalle perustiedot fraktaaliderivaatoista ja niiden ominaisuuksista. Sisällön omaksumisen helpottamiseksi lukijalta edellytetään differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden tuntemusta sekä kiinnostusta matematiikkaa kohtaan. Tutkielman ensimmäisessä luvussa esitellään fraktaalidifferentiaalilaskennalle tyypilliset erikoisfunktiot, joita ei välttämättä ole tullut vastaan matematiikan perus- ja aineopinnoissa. Luvussa 1 on pyritty tiiviiseen ja pelkistettyyn esitystapaan, joten varsinaisen aiheen kannalta epäoleelliset todistukset on sivuutettu.

Luvussa 2 tutkielman aihetta lähestytään perinteisen analyysin näkökulmasta. Aluksi selvitetään, miten klassiset derivointi- ja integrointioperaattorit voidaan esittää yhdellä symbolilla. Seuraavissa aliluvuissa esitellään kolme kirjallisuudessa useimmin esiintyvää fraktaaliderivaatan määritelmää: Grünwald-Letnikovin, Riemann-Liouvillen ja Caputon määritelmä. Näistä kaksi ensiksi mainittua ovat suoria yleistyksiä klassisen differentiaali- ja integraalilaskennan tuloksista. Caputon määritelmä on taas kehitetty sovellusten näkökulmasta. Määritelmien ymmärtämistä tuetaan useilla konkreettisilla esimerkeillä.

Luvussa 3 todistetaan differintegraalien keskeisimpiä ominaisuuksia. Tullaan huomaamaan, että fraktaaliderivaatan käyttäytyminen riippuu valitusta määritelmästä. Tästä syystä ominaisuudet todistetaan erikseen Grünwald-Letnikovin, Riemann-Liouvillen ja/tai Caputon määritelmille. Luvussa 4 johdetaan derivointikaavat polynomifunktiolle ja sen erikoistapaukselle (vakiofunktiolle) sekä eksponenttifunktiolle. Luvussa 4 havainnollistetaan myös esimerkein, miten fraktaaliderivaatan lauseke riippuu valitusta tarkasteluvälistä.

Tutkielman viimeinen luku käsittelee fraktaalidifferentiaaliyhtälöitä. Aluksi johdetaan Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnokset, minkä jälkeen niitä hyödynnetään alkuarvotehtävien ratkaisemiseen. Tällöin selviää, mikä Caputon fraktaaliderivaatan etu on Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaattaan verrattuna. Viimeisessä aliluvussa ratkaistaan fraktaalivärähtelijän differentiaaliyhtälö käyttäen Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnosta. Tullaan huomaamaan, että yksinkertaisissakin sovelluksissa riittää vielä avoimia kysymyksiä.

Tutkielman päälähteinä on käytetty teoksia I. Podlubny *Fractional Differential Equations*, Keith B. Oldham & Jerome Spanier *The Fractional Calculus* ja Anatoly A. Kilbas, Hari M. Shrivastava, Juan J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Kaikki tutkielmassa käytetyt lähteet on mainittu lähdeluettelossa.

LUKU 1

Esitiedot

Tässä luvussa määritellään tutkielmassa käytettävät erikoisfunktiot: gammafunktio, epätäydellinen gammafunktio, betafunktio ja Mittag-Leffler-funktio. Lisäksi esitellään erikoisfunktioiden tärkeimmät ominaisuudet, joita tarvitaan tutkielman muissa luvuissa. Aliluvussa 1.5 perehdytään funktion Laplace-muunnokseen, jota sovelletaan myöhemmin fraktaalidifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Luvun 1 päälähteinä on käytetty teoksia [**1**, s. 16–22], [**3**, s. 613–630], [**5**, s. 6–7, 16–18, 103–104] ja [**10**, s. 251–259, 279–281].

1.1. Gammafunktio

Luonnollisen luvun $n \in \mathbb{N}$ kertoma määritellään rekursiivisesti asettamalla $1! = 1$ ja $n! = n(n-1)!$. Gammafunktio Γ on kertoman yleistys reaali- ja kompleksiluvuille. Se määritellään reaaliosaltaan positiivisille kompleksiluvuille seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.1. *Gammafunktio* Γ määritellään epäoleellisena integraalina

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad Re(z) > 0.$$

Kyseinen integraali suppenee, kun $Re(z) > 0$, mikä on todistettu teoksessa [**3**, s. 613–614].

Tutkitaan seuraavaksi, miten gammafunktion määritelmä voidaan laajentaa reaaliosaltaan negatiivisille kompleksiluvuille. Tätä varten sovelletaan määritelmää 1.1 funktioon $\Gamma(z+1)$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z}\, dt \\ &= \lim_{c\to\infty} \left(-t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=c} \right) + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

josta edelleen seuraa, että

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{1.1}$$

Tarkastellaan yhtälön (1.1) oikeaa puolta, kun $-1 < Re(z) < 0$. Havaitaan, että

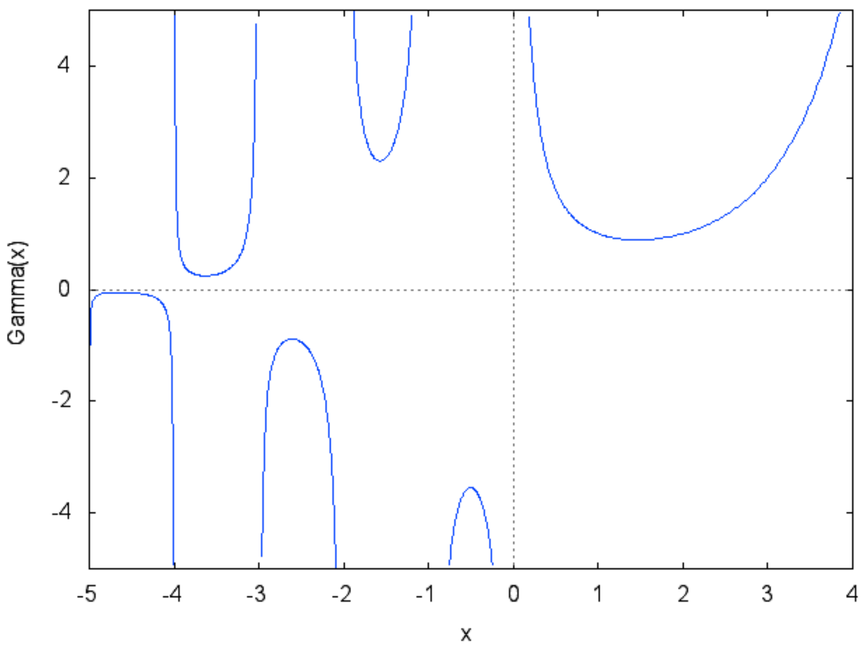
(1) $\Gamma(z+1)$ on analyyttinen yhdensuuntaisvyössä $-1 < Re(z) < 0$, koska $z+1$ kuuluu oikeaan puolitasoon,
(2) $1/z$ on analyyttinen yhdensuuntaisvyössä $-1 < Re(z) < 0$,
(3) analyyttisten funktioiden tulo on analyyttinen.

Gammafunktio $\Gamma(z)$ on siten analyyttinen, kun $-1 < Re(z) < 0$. Valitsemalla yhtälö (1.1) gammafunktion määritelmäksi, kun $Re(z) > -1$, $z \neq 0$, saadaan gammafunktion määritelmä laajennettua kompleksiluvuille z, joille $Re(z) > -2$, $z \neq 0, -1$. Edelleen, valitsemalla yhtälö (1.1) gammafunktion määritelmäksi, kun $Re(z) > -2$, $z \neq 0, -1$, saadaan määritelmä laajennettua kompleksiluvuille z, joille $Re(z) > -3$, $z \neq 0, -1, -2$. Näin jatkamalla gammafunktiolle saadaan seuraava analyyttinen laajennus [**4**, s. 7]:

LAUSE 1.2. *Gammafunktiolle* $\Gamma : \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\} \to \mathbb{C}$ *on voimassa*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Gammafunktion $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kuvaaja on esitetty kuvassa 1.1.



KUVA 1.1. Gammafunktion $\Gamma(x)$ kuvaaja, kun $x \in \mathbb{R}$ (vrt. [**17**, s. 8]).

Seuraavassa lauseessa luetellaan gammafunktion tärkeimmät ominaisuudet, joita sovelletaan luvuissa 2, 3 ja 4.

LAUSE 1.3. *Gammafunktiolle on voimassa*

(i) $\Gamma(1) = 1$,
(ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
(iii) $\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z), \qquad n = 1, 2, \dots,$
(iv) $\Gamma(n+1) = n!, \qquad n \in \mathbb{N}.$

TODISTUS. (Vertaa [**3**, s. 616–619]).

(i) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1.$

(ii) Määritelmän mukaan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$, joten käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = x^2$ saadaan

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(iii) Soveltamalla lausetta 1.2 n kertaa saadaan

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2)\\ &= \cdots = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z\Gamma(z).\end{aligned}$$

(iv) Sijoittamalla $z = 1$ kohdan (iii) lausekkeeseen saadaan

$$\Gamma(1+n) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!.$$

$\square$

Esimerkki 1.4. Lauseen 1.2 ansiosta voidaan laskea gammafunktion arvoja, kun $-1 < Re(z) < 0$. Esimerkiksi,

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

Vastaavasti, lauseen 1.3 kohdan (iii) yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z},$$

jonka avulla voidaan laskea Γ-funktion arvoja, kun $-n < Re(z) < -n+1$. Esimerkiksi,

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{5}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

Luvussa 2 perehdytään fraktaaliderivaattojen määritelmiin, minkä vuoksi binomikertoimien määritelmä laajennetaan kompleksiluvuille $z, w \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$:

$$\binom{z}{w} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\Gamma(z-w+1)}. \tag{1.2}$$

Binomikertoimien avulla voidaan edelleen johtaa yksinkertaisempia lausekkeita gammafunktioiden osamäärille. Luvussa 2 käsiteltäviä fraktaaliderivaattojen määritelmiä ja esimerkkilaskuja varten tarvitaan seuraavia muuntokaavoja:

$$\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} = \binom{m-\alpha-1}{m} = (-1)^m\binom{\alpha}{m}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}_+, m\in\mathbb{N}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma(N-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(N)}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}_+, N\in\mathbb{N}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m)} = \frac{-\alpha\Gamma(N-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(N-1)}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}_+, N\in\mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Fraktaaliderivaattojen ominaisuuksien todistamista varten tarvitaan lisäksi asymptoottinen laajennus:

$$\lim_{m\to\infty}\left[m^{c+\alpha+1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)}\right]=\lim_{m\to\infty}\left[m^{c+\alpha}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}\right]=\begin{cases}\infty, & c>0\\ 1, & c=0\\ 0, & c<0.\end{cases}\tag{1.6}$$

Muuntokaavojen ja asymptoottisen laajennuksen taustoihin ei perehdytä tässä tutkielmassa. Lisätietoa löytyy esimerkiksi teoksesta [**1**, s. 19–20].

1.2. Epätäydellinen gammafunktio

Edellisessä aliluvussa gammafunktio Γ määriteltiin epäoleellisena integraalina: lauseketta $t^{z-1}e^{-t}$ integroidaan nollasta äärettömään. Tällöin gammafunktiota sanotaan täydelliseksi gammafunktioksi. Kun integraalin yläraja muutetaan vakioksi $c \in \mathbb{R}$, saadaan määrätty integraali, jota sanotaan alemmaksi epätäydelliseksi gammafunktioksi.

MÄÄRITELMÄ 1.5. *Alempi epätäydellinen gammafunktio*, $\gamma : \mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, määritellään määrättynä integraalina

$$\gamma(z,c)=\int_0^c t^{z-1}e^{-t}\,dt, \qquad t\in\mathbb{R},$$

joka suppenee, kun $Re(z) > 0$.

HUOMAUTUS 1.6. Seuraava yhtälö pätee, kun $Re(z) > 0$ ja $c \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{c\to\infty}\gamma(z,c)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt=\Gamma(z).$$

HUOMAUTUS 1.7. Ylempi epätäydellinen gammafunktio $\Gamma : \mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ määritellään epäoleellisena integraalina

$$\Gamma(z,c)=\int_c^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \qquad t\in\mathbb{R}, \quad Re(z)>0.$$

Tällöin täydellinen gammafunktio on $\Gamma(z) = \Gamma(z, 0)$.

Alemmalle epätäydelliselle gammafunktiolle voidaan johtaa seuraava sarjakehitelmä eksponenttifunktion sarjakehitelmän ja gammafunktion ominaisuuksien avulla [**6**]:

$$\gamma(z,c)=c^z e^{-c}\Gamma(z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{\Gamma(z+k+1)}.\tag{1.7}$$

Sarjakehitelmää (1.7) tarvitaan luvussa 4 määritettäessä Mittag-Leffler-funktion lausekkeita.

1.3. Betafunktio

Betafunktio B on gammafunktion kaltainen ja se määritellään seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.8. *Betafunktio* $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on määrätty integraali

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt.$$

Fraktaaliderivaattojen ominaisuuksien todistuksissa (kts. luku 3) tarvitaan seuraavaa betafunktion ominaisuutta:

LAUSE 1.9. *Olkoon* $z, w \in \mathbb{R}_+$. *Tällöin*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

TODISTUS. (Vertaa [**7**].) Määritelmän 1.1 mukaan

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \int_0^\infty e^{-s}s^{w-1}\,ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{z-1}s^{w-1}\,dt\,ds.$$

Käytetään muuttujanvaihtoa $t = xy$ ja $s = x(1-y)$, jolloin $t+s = x$. Koska $0 < t < \infty$ ja $0 < s < \infty$, on $0 < x < \infty$ ja $0 < y < 1$. Muunnoksen Jacobin determinantti on

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}\right| &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(xy)}{\partial x} & \dfrac{\partial(xy)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(x(1-y))}{\partial x} & \dfrac{\partial(x(1-y))}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} \\
&= |-xy - x(1-y)| = |-x| = x,
\end{aligned}$$

sillä $x > 0$. Tällöin $dt\,ds = \left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy = x\,dx\,dy$ ja siten saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}y^{z-1}x^{w-1}(1-y)^{w-1}x\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty e^{-x}x^{z+w-1}\,dx \int_0^1 y^{z-1}(1-y)^{w-1}\,dy \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w),
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

1.4. Mittag-Leffler-funktio

Mittag-Leffler-funktio on eksponenttifunktion yleistys kompleksiluvuille.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Yleistetty *Mittag-Leffler-funktio* $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on sarjakehitelmä

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(ka+b)}, \qquad a, b \in \mathbb{R}_+.$$

Mittag-Leffler-funktiota tarvitaan luvussa 4 eksponenttifunktion fraktaaliderivaatan lausekkeen määrittämiseen sekä luvussa 5 fraktaalidifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

HUOMAUTUS 1.11. Mittag-Leffler-funktion määritelmästä seuraa, että

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Luvussa 5 tarvitaan lisäksi seuraavaa Mittag-Leffler-funktion ominaisuutta:

LAUSE 1.12. *Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$E_{a,b}(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} + zE_{a,a+b}(z).$$

TODISTUS. (Vertaa [**8**, s. 82].)

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ka+b)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(ka+a+b)} = \frac{1}{\Gamma(b)} + zE_{a,a+b}(z).$$

□

Taulukossa 1 on esitetty muutaman Mittag-Leffler-funktion alkeisfunktioesitykset, joita käytetään lukujen 4 ja 5 esimerkeissä. Alkeisfunktioesityksissä esiintyvä erf on Gaussin virhefunktio ja erfc on sen komplementti. Virhefunktio erf : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään integraalina

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Virhefunktion komplementti erfc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x).$$

Virhefunktioiden syvällisempi tarkastelu sivuutetaan. Lisätietoa löytyy esimerkiksi lähteistä [**11**] ja [**12**].

TAULUKKO 1. Mittag-Leffler-funktioiden alkeisfunktioesityksiä. [**20**]

$E_{\frac{1}{2},1}(-x) = e^{x^2}\operatorname{erfc}(x)$	
$E_{1,1}(x) = e^x$	
$E_{1,\frac{3}{2}}(x) = e^x \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,	$x > 0$
$E_{2,1}(-x^2) = \cos(x)$	

1.5. Laplace-muunnos

Jotta tietylle funktiolle voidaan määrittää Laplace-muunnos, funktion täytyy olla eksponentiaalista kertalukua jollakin vakiolla. Tätä varten tarvitaan seuraava määritelmä:

MÄÄRITELMÄ 1.13. Funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ on *eksponentiaalista kertalukua vakiolla K*, jos on olemassa vakiot $K, M, t_0 \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}$$

aina, kun $t \geq t_0 \geq 0$.

Eksponentiaalinen kertaluku takaa sen, että funktio $f(t)$ ei kasva eksponenttifunktiota e^{Kt} nopeammin, kun $t \to \infty$. Tällöin funktion Laplace-muunnos on olemassa, sillä seuraava integraali suppenee:

MÄÄRITELMÄ 1.14. Olkoon funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla K ja paloittain jatkuva ja olkoon $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > K\}$. Tällöin funktion f *Laplace-muunnos* on funktio $F : S \to \mathbb{C}$,

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt, \qquad t > 0.$$

HUOMAUTUS 1.15. Yleisesti funktion Laplace-muunnosta merkitään isolla kirjaimella ja alkuperäistä funktiota pienellä kirjaimella.

ESIMERKKI 1.16. (Vrt. [**10**, s. 252]) Olkoon $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ ja $a \in \mathbb{R}$. Määritelmän 1.14 mukaan funktion f Laplace-muunnos on

$$L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=R} = \frac{1}{s-a},$$

kun $s - a > 0$.

Laplace-muunnosta käytetään luvussa 5 fraktaalidifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Jotta differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista, tarvitaan käänteinen operaatio, joka muuntaa Laplace-muunnetun funktion takaisin alkuperäiseksi funktioksi.

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla K ja paloittain jatkuva ja olkoon $F(s) = L(f(t))$. Tällöin funktio $f(t)$ on funktion $F(s)$ *käänteinen Laplace-muunnos*, jota merkitään

$$L^{-1}(F(s)) = f(t).$$

ESIMERKKI 1.18. Esimerkiksi funktion $F(s) = \frac{1}{s-a}$, $a \in \mathbb{R}$, käänteinen Laplace-muunnos on $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$.

HUOMAUTUS 1.19. Sarjateorian avulla voidaan osoittaa (kts. [**9**, s. 6]), että

$$L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha),$$

missä $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $s^\alpha > |\lambda|$. Kyseistä käänteismuunnosta tarvitaan luvussa 5 Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaattojen Laplace-muunnosten määrittämiseen.

Laplace-muunnoksen yksi tärkeimpiä ominaisuuksia on lineaarisuus:

LAUSE 1.20. *Olkoot funktioilla $f(t)$ ja $g(t)$ Laplace-muunnokset $F(s)$ ja $G(s)$. Tällöin*

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ovat vakioita.

TODISTUS. Seuraa suoraan Laplace-muunnoksen määritelmästä ja integraalin lineaarisuudesta (kts. [**10**, s. 252]). $\square$

Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnosta varten tarvitaan konvoluution Laplace-muunnoksen kaava. Määritellään seuraavaksi, mitä konvoluutio tarkoittaa.

MÄÄRITELMÄ 1.21. Olkoot funktiot $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla K ja paloittain jatkuvia. Funktioiden konvoluutio $(f * g)$ määritellään integraalina

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau.$$

LAUSE 1.22. *(Konvoluutiolause) Olkoot funktiot $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eksponentiaalista kertalukua vakiolla K ja paloittain jatkuvia, ja olkoot niiden Laplace-muunnokset $F(s)$ ja $G(s)$. Tällöin jokaisella $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > K$, on*

$$L\left[(f * g)(t)\right] = F(s)G(s), \qquad t > 0.$$

TODISTUS. Todistuksessa tarvitaan Laplace-muunnoksen translaatiolausetta, joten todistus sivuutetaan. Konvoluutiolause on todistettu teoksessa [**10**, s. 280–281]. □

Fraktaaliderivaattojen Laplace-muunnoksia varten tarvitaan derivaatan Laplace-muunnoksen kaava.

LAUSE 1.23. *Olkoot funktiot $f^{(k)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, jatkuvia ja olkoon funktio $f^{(n)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva, ja olkoot kaikki edelliset funktiot eksponentiaalista kertalukua vakiolla K. Tällöin jokaisella $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > K$ pätee:*

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

TODISTUS. Todistus on suoraviivainen induktiotodistus, jossa sovelletaan Laplace-muunnoksen määritelmää 1.14 ja osittaisintegrointia. Lause on todistettu lähteessä [**10**, s. 258–259]. □

LUKU 2

Fraktaaliderivaatat ja -integraalit

Tässä luvussa tutkielman aihetta lähestytään perinteisen analyysin näkökulmasta. Aliluvun 2.1 tarkoitus on havainnollistaa, miten derivointi- ja integrointioperaatiot saadaan esitettyä yhdellä symbolilla. Seuraavissa aliluvuissa esitetään kolme erilaista fraktaaliderivaatan määritelmää: Grünwald-Letnikovin, Riemann-Liouvillen ja Caputon määritelmä. Lisäksi määritelmiä sovelletaan yksinkertaiseen polynomifunktioon $f(x) = x$. Luku 2 perustuu pääasiassa lähteisiin [**5**, s. 43–48, 62–63, 79], [**13**], [**15**, s. 69–70, 90–92] ja [**19**, s. 7–8, 11].

2.1. Derivointi- ja integrointioperaattori

Tarkastellaan funktiota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, joka on n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $[a, x]$, $a < x < b$. Johdetaan funktion f kertaluvun n derivaatalle yleinen lauseke.

Funktion f ensimmäisen kertaluvun derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$D^1 f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Soveltamalla derivaatan määritelmää funktioon $D^1 f(x)$ saadaan funktion f toisen kertaluvun derivaataksi

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{D^1 f(x) - D^1 f(x - h_1)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1} \left(\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x) - f(x-h_2)}{h_2} - \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x-h_1) - f(x - h_1 - h_2)}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Olettaen, että $h = h_1 = h_2$, saadaan

$$D^2 f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left(f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \right).$$

Kahden raja-arvon yhdistämisen syvällisempi tarkastelu sivuutetaan. Tarkempi perustelu on esitetty lähteessä [**19**, s. 8].

Soveltamalla vastaavaa päättelyä funktioon $D^2 f(x)$ saadaan funktion f kolmannen kertaluvun derivaataksi

$$\begin{aligned} D^3 f(x) &= \lim_{h' \to 0} \frac{D^2 f(x) - D^2 f(x-h')}{h'} \\ &= \lim_{h' \to 0} \frac{1}{h'} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. - \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h') - 2f(x-h'-h) + f(x-h'-2h)}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Olettaen, että $h = h'$, saadaan

$$D^3 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}.$$

Induktioperiaatteella voidaan edelleen osoittaa (kts. [**19**, s. 7]), että funktion f kertaluvun n derivaatta on

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh), \tag{2.1}$$

missä

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

on binomikerroin ja $m, n \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi tutkitaan operaattorin D^n merkitystä positiivisilla ja negatiivisilla kokonaisluvuilla sekä luvulla 0. Tätä varten otetaan käyttöön merkintä

$$f_h^{(p)}(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{p}{m} f(x - mh), \tag{2.2}$$

missä p on mielivaltainen kokonaisluku ja $n \in \mathbb{N}$, kuten edellä.

Tutkitaan ensin positiivisia kokonaislukuja p. Selvästi, jos $p = n$, niin

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p}{dx^p} f(x) = D^p f(x). \tag{2.3}$$

Yhtälö (2.3) pätee myös silloin, kun $p < n$, sillä tällöin binomikertoimen määritelmän mukaan kertoimet $\binom{p}{m}$ ovat nollia, kun $m > p$.

Kun $p = 0$, niin

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(0)}(x) = f(x) = D^0 f(x). \tag{2.4}$$

Tutkitaan seuraavaksi negatiivisia kokonaislukuja $-p$ ($p > 0$). Laajennetaan binomikertoimen määritelmä negatiivisille kokonaisluvuille seuraavasti:

$$\binom{-p}{m} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m p(p+1)\dots(p+m-1)}{m!} = (-1)^m \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix},$$

missä

$$\begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\dots(p+m-1)}{m!}.$$

Nyt lauseke (2.2) saadaan muotoon

$$f_h^{(-p)}(x) = h^p \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} f(x - mh). \tag{2.5}$$

Kun kokonaisluku n on kiinnitetty, lauseke $f_h^{(-p)}(x)$ lähestyy triviaalisti raja-arvoa 0, kun $h \to 0$. Tästä syystä on oletettava, että $n \to \infty$, kun $h \to 0$. Koska oletuksen mukaan funktio f on jatkuva välillä $[a, x]$, valitaan $h = \frac{x-a}{n}$. Käytetään jatkossa seuraavaa merkintää:

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh = x-a}} f_h^{(-p)}(x). \tag{2.6}$$

Tutkitaan, onko raja-arvoa (2.6) olemassa ja jos on, saadaanko sille informatiivisempi merkintä. Tarkastellaan ensin tapausta $p = 1$. Tällöin kaavan (2.5) mukaan

$$f_h^{(-1)}(x) = h\sum_{m=0}^{n} f(x - mh). \tag{2.7}$$

Hyödyntäen tietoa, että $h = \frac{x-a}{n}$, lauseke (2.7) voidaan esittää muodossa

$$f_h^{(-1)}(x) = hf(x) + h\sum_{m=1}^{n} f(x - mh) = \frac{x-a}{n}f(x) + \sum_{m=1}^{n}\frac{x-a}{n}f(x - m\frac{x-a}{n}). \tag{2.8}$$

Tarkastellaan lausekkeen (2.8) jälkimmäistä osaa. Summassa on n termiä, jotka ovat muotoa $\frac{x-a}{n}f(x-m\frac{x-a}{n})$. Nyt $\frac{x-a}{n}$ on osavälin pituus ja $f(x-m\frac{x-a}{n})$ on funktion arvo osavälin toisessa päätepisteessä, joten summa voidaan tulkita Riemannin summaksi. Kun jakoa tihennetään (eli $n \to \infty$), Riemannin summa lähestyy raja-arvoa, joka on määrätty integraali. Tällöin

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-1)}(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{x-a}{n}f(x) + \sum_{m=1}^{n}\frac{x-a}{n}f(x - m\frac{x-a}{n})\right]\\ &= 0 + \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten tapausta $p = 2$. Tällöin

$$\begin{bmatrix}2\\ m\end{bmatrix} = \frac{2\cdot 3\ldots(2+m-1)}{m!} = m+1,$$

jolloin kaavojen (2.5) ja (2.7) mukaan on

$$\begin{aligned}f_h^{(-2)}(x) &= h^2\sum_{m=0}^{n}(m+1)f(x-mh) = h^2\sum_{m=0}^{n}mf(x-mh) + h^2\sum_{m=0}^{n}f(x-mh)\\ &= h\sum_{m=0}^{n}mhf(x-mh) + hf_h^{(-1)}(x) = h\sum_{m=1}^{n}mhf(x-mh) + hf_h^{(-1)}(x)\\ &= \frac{x-a}{n}\sum_{m=1}^{n}m\frac{x-a}{n}f\left(x - m\frac{x-a}{n}\right) + \frac{x-a}{n}f_h^{(-1)}(x)\\ &= \sum_{m=1}^{n}\frac{x-a}{n}c_m f\left(x-c_m\right) + \frac{x-a}{n}f_h^{(-1)}(x), \qquad \text{missä} \qquad c_m = m\frac{x-a}{n}.\end{aligned}$$

Tarkastellaan yllä olevan lausekkeen summaa. Summassa on n termiä, jotka ovat muotoa $\frac{x-a}{n}c_m f\left(x-c_m\right)$. Kun $n \to \infty$, niin silloin

$$c_1 = \frac{x-a}{n} \to 0 \qquad \text{ja} \qquad c_n = n\frac{x-a}{n} \to x-a,$$

joten funktion tarkasteluväli on $[0, x-a]$. Koska $\frac{x-a}{n}$ on välin jako ja $c_m = m\frac{x-a}{n}$ ovat välin jakopisteitä, summa voidaan tulkita funktion $sf(x-s)$ Riemannin summaksi.

Kun jakoa tihennetään, saadaan raja-arvoksi

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-2)}(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{x-a}{n}c_m f\left(x-c_m\right)+\frac{x-a}{n}f_h^{(-1)}(x)\right]\\ &= \int_0^{x-a} sf(x-s)\,ds + 0 = \int_0^{x-a} sf(x-s)\,ds.\end{aligned}$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = x - s$, jolloin $s = x - t$ ja $ds = -dt$, saadaan integroimisrajoiksi

$$(x-s)\big|_{s=0} = x \quad \text{ja} \quad (x-s)\big|_{s=x-a} = a.$$

Tällöin

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-2)}(x) = -\int_x^a (x-t)f(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Vastaavat esitykset tapauksessa $p = 3$ ovat

$$\begin{bmatrix}3\\ m\end{bmatrix} = \frac{3\cdot 4\ldots(3+m-1)}{m!} = \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2},$$

$$\begin{aligned}f_h^{(-3)}(x) &= \frac{h^3}{1\cdot 2}\sum_{m=0}^{n}(m+1)(m+2)f(x-mh) = \frac{h^3}{2}\sum_{m=0}^{n}(m^2+3m+2)f(x-mh)\\ &= \frac{h^3}{2}\left[\sum_{m=0}^{n}m^2f(x-mh)+3\sum_{m=0}^{n}mf(x-mh)+2\sum_{m=0}^{n}f(x-mh)\right]\\ &= \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{n}(mh)^2f(x-mh)+\frac{3h^2}{2}\sum_{m=0}^{n}mhf(x-mh)+h^3\sum_{m=0}^{n}f(x-mh)\\ &= \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{n}(mh)^2f(x-mh)+\frac{3h}{2}f_h^{(-2)}(x)+h^2f_h^{(-1)}(x)\\ &= \frac{h}{2}\sum_{m=1}^{n}(mh)^2f(x-mh)+\frac{3h}{2}f_h^{(-2)}(x)+h^2f_h^{(-1)}(x).\end{aligned}$$

Kun yllä olevan lausekkeen ensimmäiseen osaan sovelletaan vastaavaa päättelyä kuin tapauksessa $p = 2$, summa voidaan tulkita funktion $s^2f(x-s)$ Riemannin summaksi. Tällöin raja-arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-3)}(x) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}}\left[\frac{h}{2}\sum_{m=1}^{n}(mh)^2f(x-mh)+\frac{3h}{2}f_h^{(-2)}(x)+h^2f_h^{(-1)}(x)\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{x-a}s^2f(x-s)\,ds+0+0 = \frac{1}{2}\int_0^{x-a}s^2f(x-s)\,ds.\end{aligned}$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = x - s$, kuten edellä, saadaan raja-arvoksi

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-3)}(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2f(t)\,dt.$$

Induktiolla voidaan osoittaa (kts. [**5**, s. 46–47]), että yleisesti pätee

(2.9)
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-p)}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} h^p \sum_{m=0}^{n} \left[\begin{matrix} p \\ m \end{matrix}\right] f(x-mh) = \frac{1}{(p-1)!}\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt.$$

Näytetään seuraavaksi, että kaava (2.9) on p-kertainen integraali. Tätä varten otetaan käyttöön seuraava merkintä:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(-p)}(x) = {}_aD_x^{-p} f(x),$$

missä D^{-p} on integrointioperaattori ja a ja x ovat integroimisvälin päätepisteet. Leibnizin säännön [**19**, s. 11] nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left({}_aD_x^{-p} f(x)\right) &= \frac{1}{(p-1)!}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^{p-1} f(t)\,dt + \frac{1}{(p-1)!}\left[(x-t)^{p-1} f(t)\right]_{t=x}\frac{d}{dx}x \\
&- \frac{1}{(p-1)!}\left[(x-t)^{p-1} f(t)\right]_{t=a}\frac{d}{dx}a \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^x (p-1)(x-t)^{p-2} f(t)\,dt + 0 - 0 \\
&= \frac{1}{(p-2)!}\int_a^x (x-t)^{p-2} f(t)\,dt \\
&= {}_aD_x^{-p+1} f(x).
\end{aligned}$$

Toisaalta, merkintä ${}_aD_x^{-p} f(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$${}_aD_x^{-p} f(x) = {}_aD_x^{-p} f(x) - \underbrace{{}_aD_a^{-p} f(a)}_{=0},$$

joka analyysin peruslauseen mukaan on

$${}_aD_x^{-p} f(x) = \int_a^x \frac{d}{ds}\,{}_aD_s^{-p} f(s)\,ds.$$

Tällöin edellä lasketun nojalla saadaan

(2.10)
$${}_aD_x^{-p} f(x) = \int_a^x \left({}_aD_s^{-p+1} f(s)\right)\,ds.$$

Vastaavasti Leibnizin säännön nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left({}_aD_x^{-p+1}f(x)\right) &= \frac{1}{(p-2)!}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{p-2}f(t)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{(p-2)!}\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^{p-2}f(t)\,dt + \frac{1}{(p-2)!}\left[(x-t)^{p-2}f(t)\right]_{t=x}\frac{d}{dx}x\\
&- \frac{1}{(p-2)!}\left[(x-t)^{p-2}f(t)\right]_{t=a}\frac{d}{dx}a\\
&= \frac{1}{(p-2)!}\int_a^x (p-2)(x-t)^{p-3}f(t)\,dt + 0 - 0\\
&= \frac{1}{(p-3)!}\int_a^x (x-t)^{p-3}f(t)\,dt\\
&= {}_aD_x^{-p+2}f(x).
\end{aligned}$$

Soveltamalla vastaavaa päättelyä yhtälöön (2.10) saadaan

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-p}f(x) &= \int_a^x \left({}_aD_s^{-p+1}f(s) - \underbrace{{}_aD_a^{-p+1}f(a)}_{=0}\right) ds\\
&= \int_a^x \left(\int_a^s \frac{d}{du}{}_aD_u^{-p+1}f(u)\,du\right) ds\\
&= \int_a^x \left(\int_a^s {}_aD_u^{-p+2}f(u)\,du\right) ds\\
&= \int_a^x ds \int_a^s {}_aD_u^{-p+2}f(u)\,du.
\end{aligned}$$

Näin jatkamalla saadaan lopulta

$$(2.11)\qquad {}_aD_x^{-p}f(x) = \underbrace{\int_a^x d\sigma_1 \int_a^{\sigma_1} d\sigma_2 \ldots \int_a^{\sigma_{p-1}}}_{p\ \text{kpl}} f(\sigma_p)\,d\sigma_p.$$

Kaavojen (2.3), (2.4) ja (2.11) perusteella derivointi- ja integrointioperaatiot ovat siis lausekkeen (2.2) raja-arvoja kokonaisluvun p eri arvoilla. Täten derivointi- ja integrointioperaatiot voidaan esittää yhteisellä symbolilla

$$(2.12)\qquad {}_aD_x^pf(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} f_h^{(p)}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x-a}} \frac{1}{h^p}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{p}{m}f(x-mh).$$

Yhteenvetona symbolille ${}_aD_x^p$ saadaan:

$$(2.13)\qquad {}_aD_x^p = \begin{cases} \frac{d^p}{dx^p}, & p\in\mathbb{Z}_+\\ 1, & p=0\\ \int_a^x d\sigma_1\int_a^{\sigma_1} d\sigma_2\ldots\int_a^{\sigma_{-p-1}} d\sigma_{-p} & p\in\mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

2.2. Grünwald-Letnikovin määritelmä

Grünwald-Letnikovin fraktaaliderivaatan määritelmä perustuu aliluvussa 2.1 esitettyyn analyyttiseen lähestymistapaan. Fraktaaliderivaatan lauseke saadaan, kun kaavan (2.12) kokonaisluku p korvataan reaaliluvulla α, $\alpha > 0$, ja binomikerroin yleistetään reaaliluvuille kaavan (1.2) mukaan. [**13**]

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ N kertaa jatkuvasti derivoituva, $a < x < b$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ja $N = \lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$[1]. Tällöin funktion f kertaluvun α *Grünwald-Letnikovin fraktaaliderivaatta* on

$$ {}_{a}^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh), $$

tai yhtäpitävästi

$$ {}_{a}^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{x-a}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f\left(x - m\left(\frac{x-a}{N} \right) \right). $$

Määritelmän 2.1 sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti jokaisella $\alpha > 0$ ja jokaiselle rajoitetulle funktiolle $f(x)$, joten raja-arvo on olemassa [**14**]. Teoksessa [**5**, s. 49–50] on osoitettu, että sarja suppenee myös silloin, kun $\alpha < 0$. Täten Grünwald-Letnikovin fraktaaliderivaatalle saadaan vaihtoehtoinen määritelmä, joka yhdistää derivointi- ja integrointioperaatiot:

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ N kertaa jatkuvasti derivoituva, $a < x < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $N = \lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$. Tällöin funktion f kertaluvun α *Grünwald-Letnikovin differintegraali* on

$$ {}_{a}^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{x-a}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f\left(\frac{Nx - mx + ma}{N} \right). $$

ESIMERKKI 2.3. Olkoon $f(x) = x, a = 0$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Grünwald-Letnikovin määritelmän 2.2 mukaan

$$ \begin{aligned} {}_{0}^{GL}D_x^{\frac{1}{2}} x &= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{N}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(m+1)} \left(\frac{Nx - mx}{N} \right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} \lim_{N \to \infty} \sum_{m=0}^{N-1} N^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(m+1)} \left(1 - \frac{m}{N} \right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left[\lim_{N \to \infty} \left(N^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(m+1)} \right) - \lim_{N \to \infty} \left(N^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{m\Gamma(m-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(m+1)} \right) \right]. \end{aligned} $$

[1] Merkintä $N = \lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin $\frac{x-a}{h}$.

Soveltamalla osasummiin muuntokaavoja (1.4) ja (1.5) saadaan

$$\begin{aligned}{}_{0}^{GL}D_x^{\frac{1}{2}}x &= x^{\frac{1}{2}}\left[\lim_{N\to\infty}\left(N^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(N)}\right)-\lim_{N\to\infty}\left(N^{-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{2}\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(N-1)}\right)\right]\\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\lim_{N\to\infty}\left(N^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(N)}\right)+\frac{\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\lim_{N\to\infty}\left(N^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(N-1)}\right)\right].\end{aligned}$$

Soveltamalla raja-arvoihin kaavaa (1.6) saadaan derivaatan lausekkeeksi

$${}_{0}^{GL}D_x^{\frac{1}{2}}x = x^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\cdot 1\right]=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

2.3. Riemann-Liouvillen määritelmä

Ennen Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan määritelmää, tarvitaan Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin määritelmä. Fraktaali-integraali saadaan korvaamalla kaavan (2.9) kokonaisluku p reaaliluvulla $\alpha, \alpha > 0$.

Määritelmä 2.4. Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, $a < x < b$ ja $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Tällöin funktion f kertaluvun α *Riemann-Liouvillen fraktaali-integraali* on

$${}_{a}^{RL}D_x^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Riemann-Liouvillen kertaluvun α fraktaaliderivaatta saadaan derivoimalla $(1-\alpha)$-kertaista fraktaali-integraalia, kun $0 < \alpha < 1$. [**15**, s. 69–70]

Määritelmä 2.5. Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, $a < x < b$ ja $0 < \alpha < 1$. Tällöin funktion f kertaluvun α *Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta* on

$${}_{a}^{RL}D_x^{\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}\left({}_{a}^{RL}D_x^{-(1-\alpha)}f(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Yleisesti, kun funktio f on n kertaa jatkuvasti derivoituva, *Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta* on

$${}_{a}^{RL}D_x^{\alpha}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left({}_{a}^{RL}D_x^{-(n-\alpha)}f(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},$$

missä $0 \le n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 2.6. Olkoon $f(x) = x, a = 0$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Riemann-Liouvillen määritelmän mukaan

$${}_{0}^{RL}D_x^{\frac{1}{2}}x=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $y = x - t$, jolloin $t = x - y$ ja $dt = -dy$, saadaan integroimisrajoiksi

$$(x-t)|_{t=0}=x \quad \text{ja} \quad (x-t)|_{t=x}=0.$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
{}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}}x &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_x^0 \frac{-(x-y)\,dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{(x-y)\,dy}{y^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(2xy^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}
$$

Vertaamalla esimerkkien 2.3 ja 2.6 tuloksia, havaitaan, että Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen määritelmät antavat saman tuloksen funktiolle $f(x) = x$. Voidaan osoittaa, että Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatat ovat samat kaikilla funktioilla (kts. lause 3.14).

Esimerkki 2.7. Lasketaan funktion $f(x) = x$, fraktaaliderivaatta, kun $\alpha = \frac{3}{2}$ ja $a = 0$. Nyt $n = 2$, jolloin Riemann-Liouvillen määritelmän mukaan on

$$
{}_0^{RL}D_x^{\frac{3}{2}}x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{t\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}.
$$

Hyödyntämällä esimerkin 2.6 integraalin tulosta saadaan

$$
{}_0^{RL}D_x^{\frac{3}{2}}x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.
$$

Tulos on hämmentävä. Klassisen differentiaalilaskennan perusteella voisi nimittäin olettaa, että kertaluvun $\frac{3}{2}$ fraktaaliderivaatta olisi nolla, sillä $f'(x)$ on vakio ja nyt $\alpha = \frac{3}{2}>1$. Luvussa 4 osoitetaan, että vakion Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta ei kuitenkaan ole nolla.

Esimerkki 2.8. Tutkitaan edelleen funktiota $f(x) = x$, mutta valitaan tarkasteluvälin alarajaksi $a = 1$. Hyödyntäen esimerkin 2.6 välivaiheita saadaan funktion f kertaluvun $\alpha = \frac{1}{2}$ fraktaaliderivaataksi

$$
\begin{aligned}
{}_1^{RL}D_x^{\frac{1}{2}}x &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(2xy^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=x} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \left(2x - \frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2\right) \\
&= \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}
$$

Verrattaessa saatua tulosta esimerkin 2.6 tulokseen havaitaan, että fraktaaliderivaatan arvo riippuu tarkasteluvälin alarajasta.

2.4. Caputon määritelmä

Caputon määritelmä perustuu Riemann-Liouvillen määritelmän tavoin iteroituihin integraaleihin. [**15**, s. 90–92]

MÄÄRITELMÄ 2.9. Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva ja $a < x < b$. Tällöin funktion f kertaluvun α *Caputon fraktaaliderivaatta* on

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f^{(n)}(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}, $$

missä $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$, $n \in \mathbb{N}$.

ESIMERKKI 2.10. Olkoon $f(x) = x, a = 0$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Nyt $n = 1$, joten Caputon määritelmän mukaan on

$$ {}_{0}^{C}D_{x}^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{x} \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-2(x-t)^{\frac{1}{2}} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(0 + 2\sqrt{x} \right) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. $$

Myös Caputon määritelmällä saadaan sama tulos kuin esimerkeissä 2.3 ja 2.6. Yleisesti Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaatat eivät kuitenkaan ole yhtäpitävät (kts. lause 3.15). Nyt esimerkkien 2.6 ja 2.10 tulokset ovat samat, sillä vaadittu ehto $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ toteutuu (kts. huomautus 3.16).

ESIMERKKI 2.11. Lasketaan funktion $f(x) = x$ fraktaaliderivaatta, kun $\alpha = \frac{3}{2}$ ja $a = 0$. Nyt $n = 2$ ja $f^{(2)}(x) = 0$, joten Caputon määritelmän mukaan on

$$ {}_{0}^{C}D_{x}^{\frac{3}{2}} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{x} \frac{0}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = 0. $$

Nyt tapauksessa $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ saadaan fraktaaliderivaataksi nolla, toisin kuin Riemann-Liouvillen määritelmällä (vrt. esimerkki 2.7).

ESIMERKKI 2.12. Lasketaan funktion $f(x) = x^3$ fraktaaliderivaatta, kun $\alpha = \frac{5}{2}$ ja $a = 1$. Nyt $n = 3$ ja $f^{(3)}(x) = 6$, joten määritelmän mukaan on

$$ \begin{aligned} {}_{1}^{C}D_{x}^{\frac{5}{2}} x^3 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} \int_{1}^{x} \frac{6}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \frac{6}{\Gamma(\frac{5}{2})} \left[-2(x-t)^{\frac{1}{2}} \right]_{t=1}^{t=x} = \frac{6}{\Gamma(\frac{5}{2})} \left(0 + 2\sqrt{x-1} \right) \\ &= \frac{12\sqrt{x-1}}{\Gamma(\frac{5}{2})}. \end{aligned} $$

Termin $\Gamma(\frac{5}{2})$ arvo saadaan soveltamalla lauseen 1.3 kohtaa (iii) arvolla $n = 2$. Fraktaaliderivaatan sievennetty esitys on siten

$$ {}_{1}^{C}D_{x}^{\frac{5}{2}} x^3 = \frac{12\sqrt{x-1}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{16\sqrt{x-1}}{\sqrt{\pi}}. $$

LUKU 3

Fraktaaliderivaatan ja -integraalin ominaisuuksia

Tässä luvussa todistetaan fraktaaliderivaatan ja -integraalin keskeisimpiä ominaisuuksia. Aliluvussa 3.1 todistetaan derivointioperaattorin lineaarisuus käyttäen Riemann-Liouvillen määritelmää. Aliluvussa 3.2 osoitetaan, että Caputon fraktaaliderivaatta yhtyy klassisen derivaatan kanssa, kun fraktaaliderivaatan kertaluku on kokonaisluku. Lisäksi todistetaan, että klassinen derivaatta on additiivinen fraktaaliderivaatan kanssa. Aliluvussa 3.3 todistetaan Riemann-Liouvillen differintegraalioperaattorin yksi tärkeimmistä ominaisuuksista: fraktaali-integraalien additiivisuus. Lisäksi osoitetaan, että fraktaaliderivaatta on samaa kertalukua olevan fraktaali-integraalin vasen käänteisoperaatio. Luvun viimeisessä aliluvussa osoitetaan, että Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan määritelmät ovat yhtäpitävät. Lisäksi todistetaan Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaattojen välinen yhtälö. Luku 3 perustuu useisiin eri lähteisiin ([**1**], [**5**], [**16**], [**17**] ja [**18**]).

3.1. Derivointioperaattorin lineaarisuus

Lause 3.1. *Olkoon* $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ja olkoon funktioilla* $f(x)$ *ja* $g(x)$ *kertaluvun* α *fraktaaliderivaatat. Tällöin fraktaaliderivaatta on lineaarinen operaattori, toisin sanoen*

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x).$$

Todistus. (Vrt. [**5**, s. 90–91]) Lineaarisuus seuraa suoraan fraktaaliderivaatan määritelmästä. Esimerkiksi Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta on lineaarinen, sillä integraali ja klassinen derivaatta ovat lineaarisia operaattoreita.

$$\begin{aligned}
{}_a^{RL}D_x^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(\lambda f(x) + \mu g(x))\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(x)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{g(x)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \\
&= \lambda {}_a^{RL}D_x^\alpha f(x) + \mu {}_a^{RL}D_x^\alpha g(x)
\end{aligned}$$

Todistus on vastaavanlainen Grünwald-Letnikovin ja Caputon fraktaaliderivaatoille.

□

Huomautus 3.2. Useat klassiset derivointisäännöt pätevät myös fraktaaliderivaatoille. Poikkeuksina ovat Leibnizin sääntö (funktioiden tulon derivointisääntö) sekä ketjusääntö (yhdistetyn funktion derivointisääntö). Tarasov on osoittanut, että mikäli fraktaaliderivaatta toteuttaa Leibnizin säännön, kertaluvun α on oltava 1 [**16**].

3.2. Fraktaaliderivaatan ja klassisen derivaatan välisiä tarkasteluja

Kuten kappaleessa 2.2 kävi ilmi, Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatat on yleistetty suoraan klassisen differentiaalilaskennan tuloksista. Täten lienee selvää, että näillä määritelmillä fraktaaliderivaatta yhtyy klassisen derivaatan kanssa, kun $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$. Lisäksi voidaan osoittaa, että Caputon fraktaaliderivaatta lähestyy kertaluvun n derivaattaa alhaalta päin.

LAUSE 3.3. *Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, $a < x < b$ ja olkoon funktiolla kertaluvun α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, Caputon fraktaaliderivaatta. Tällöin Caputon fraktaaliderivaatalle pätee*

$$\lim_{\alpha \to n-} {}_a^C D_x^\alpha f(x) = f^{(n)}(x).$$

TODISTUS. (Vrt. [**17**, s. 17]) Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Bigg|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \frac{-f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt}{n-\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt}{n-\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Soveltamalla lausetta 1.2 saadaan

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \left(f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt \right).
\end{aligned}$$

Siten raja-arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n-} {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \to n-} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1)} \left(f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt \right) \\
&= 1 \cdot \left(f^{(n)}(a) + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \right) \\
&= f^{(n)}(x),
\end{aligned}$$

mikä oli todistettava. [**17**, s. 17] $\square$

Seuraavaa alilukua varten todistetaan, että klassinen derivaatta on additiivinen Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan kanssa.

LEMMA 3.4. *Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n + k)$ kertaa jatkuvasti derivoituva, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ ja $n, k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\frac{d^k}{dx^k} \left({}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) \right) = {}_a^{RL} D_x^{\alpha+k} f(x).$$

Todistus. (vrt. [**5**, s. 73]) Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\left({}_a^{RL}D_x^{\alpha} f(x)\right) &= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(k+n-(\alpha+k))}\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+k-(k+n)+1}}\\ &= {}_a^{RL}D_x^{\alpha+k} f(x).\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.5. Olkoon $f(x) = x$, $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ja $k = 1$. Esimerkkien 2.6 ja 2.7 mukaan

$${}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{ja} \qquad {}_0^{RL}D_x^{\frac{3}{2}} x = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Havaitaan, että

$$\frac{d}{dx}\left({}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}} x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} = {}_0^{RL}D_x^{\frac{3}{2}} x.$$

Huomautus 3.6. Vastaavasti Grünwald-Letnikovin fraktaaliderivaatalle pätee (kts. [**1**, s. 48–49]):

$$\frac{d^k}{dx^k}\left({}_a^{GL}D_x^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{GL}D_x^{\alpha+k} f(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Caputon fraktaaliderivaatalle additiivisuus pätee päinvastaisessa järjestyksessä:

Lemma 3.7. *Olkoon funktio* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+k)$ *kertaa jatkuvasti derivoituva,* $a < x < b$, $0 \le n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *ja* $n, k \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$${}_a^{C}D_x^{\alpha}\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) = {}_a^{C}D_x^{\alpha+k} f(x).$$

Todistus. Caputon määritelmän 2.9 ja klassisen derivaatan additiivisuuden mukaan

$$\begin{aligned}{}_a^{C}D_x^{\alpha}\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{\frac{d^n}{dt^n} f^{(k)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n+k)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\\ &= \frac{1}{\Gamma((n+k)-(\alpha+k))}\int_a^x \frac{f^{(n+k)}(t)\,dt}{(x-t)^{(\alpha+k)+1-(n+k)}}\\ &= {}_a^{C}D_x^{\alpha+k} f(x).\end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.8. Olkoon $f(x) = x$, $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ja $k = 1$. Esimerkkien 2.10 ja 2.11 mukaan

$${}_0^{C}D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{ja} \qquad {}_0^{C}D_x^{\frac{3}{2}} x = 0.$$

Havaitaan, että

$$ {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx} x \right) = {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x \frac{0\, dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = 0 = {}_0^C D_x^{\frac{3}{2}} x, $$

mutta

$$ \frac{d}{dx} \left({}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} x \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \neq {}_0^C D_x^{\frac{3}{2}} x. $$

3.3. Riemann-Liouvillen differintegraalioperaattorin additiivisuus

Yksi Riemann-Liouvillen differintegraalioperaattorin hyödyllinen ominaisuus on fraktaali-integraalien additiivisuus, jota kutsutaan myös puoliryhmäominaisuudeksi.

LAUSE 3.9. *Olkoon funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, $a < x < b$ ja olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Tällöin*

$$ {}_a^{RL} D_x^{-\alpha} \left({}_a^{RL} D_x^{-\beta} f(x) \right) = {}_a^{RL} D_x^{-\alpha-\beta} f(x). $$

TODISTUS. (Vrt. [**5**, s. 59–60], [**18**, s. 3]) Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin määritelmän 2.4 mukaan

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL} D_x^{-\alpha} \left({}_a^{RL} D_x^{-\beta} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\left({}_a^{RL} D_x^{-\beta} f(t) \right) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{f(u)\, du}{(t-u)^{1-\beta}}. \end{aligned} $$

Vaihtamalla integrointijärjestystä saadaan

$$ {}_a^{RL} D_x^{-\alpha} \left({}_a^{RL} D_x^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u)\, du \int_u^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}. $$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = u + s(x-u)$, jolloin $dt = (x-u)ds$, $t-u = s(x-u)$ ja $x - t = (x-u)(1-s)$, saadaan integroimisrajoiksi

$$ \left. \frac{t-u}{x-u} \right|_{t=u} = 0 \quad \text{ja} \quad \left. \frac{t-u}{x-u} \right|_{t=x} = 1. $$

Sieventämällä lauseketta sekä soveltamalla lausetta 1.9 ja fraktaali-integraalin määritelmää 2.4 saadaan

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL} D_x^{-\alpha} \left({}_a^{RL} D_x^{-\beta} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u)\, du \int_0^1 \frac{(x-u)\, ds}{[(x-u)(1-s)]^{1-\alpha}[s(x-u)]^{1-\beta}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1}\, du \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1}\, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u)(x-u)^{\alpha+\beta-1}\, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{f(u)\, du}{(x-u)^{1-\alpha-\beta}} \\ &= {}_a^{RL} D_x^{-\alpha-\beta} f(x). \end{aligned} $$

□

HUOMAUTUS 3.10. Vaihtamalla fraktaali-integraalien kertalukujen järjestystä saadaan

$$ {}_a^{RL}D_x^{-\beta}\left({}_a^{RL}D_x^{-\alpha}f(x)\right) = {}_a^{RL}D_x^{-\beta-\alpha}f(x) = {}_a^{RL}D_x^{-\alpha-\beta}f(x) = {}_a^{RL}D_x^{-\alpha}\left({}_a^{RL}D_x^{-\beta}f(x)\right) $$

lauseen 3.9 nojalla. Kyseinen ominaisuus muistuttaa klassisen derivaatan ominaisuutta:

$$ \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right) = \frac{d^{m+n} f(x)}{dx^{m+n}}, \qquad m,n \in \mathbb{N}. $$

Seuraavaksi osoitetaan, että additiivisuus pätee myös fraktaaliderivaatalle ja fraktaali-integraalille.

LAUSE 3.11. *Olkoon funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva, $a < x < b$, ja olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq n < \alpha < n+1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$ {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\left({}_a^{RL}D_x^{-\beta}f(x)\right) = {}_a^{RL}D_x^{\alpha-\beta}f(x). $$

TODISTUS. (Vertaa [**5**, s. 60]) Koska $\alpha = (n+1) + (\alpha - n - 1)$ ja $\alpha - n - 1 < 0$, niin lemman 3.4 ja lauseen 3.9 nojalla saadaan

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\left({}_a^{RL}D_x^{-\beta}f(x)\right) &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[{}_a^{RL}D_x^{\alpha-n-1}\left({}_a^{RL}D_x^{-\beta}f(x)\right)\right] \\ &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[{}_a^{RL}D_x^{\alpha-\beta-n-1}f(x)\right] \\ &= {}_a^{RL}D_x^{\alpha-\beta}f(x). \end{aligned} $$

□

Lauseen 3.11 tärkeä erikoistapaus on, että Riemann-Liouvillen derivointioperaattori on samaa kertalukua olevan integrointioperaattorin vasen käänteisoperaatio.

SEURAUS 3.12. *Olkoon funktiolla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kertaluvun α Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta. Tällöin*

$$ {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\left({}_a^{RL}D_x^{-\alpha}f(x)\right) = f(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+. $$

HUOMAUTUS 3.13. Toisin kuin fraktaali-integraalit ja klassiset derivaatat, fraktaaliderivaatat eivät kommutoi. Jos $0 \leq m < \alpha < m+1$ ja $0 \leq n < \beta < n+1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$, niin

$$ {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\left({}_a^{RL}D_x^{\beta}f(x)\right) = {}_a^{RL}D_x^{\beta}\left({}_a^{RL}D_x^{\alpha}f(x)\right) = {}_a^{RL}D_x^{\alpha+\beta}f(x) $$

vain, jos funktiolle $f(x)$ pätee ehto

$$ f^{(k)}(a) = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, r-1), $$

missä $r = \max(n,m)$. Väitteen todistuksessa tarvitaan lausekkeen (2.12) raja-arvoa, joten todistus sivuutetaan. Väite on todistettu teoksessa [**5**, 60–62].

3.4. Eri määritelmien vertailua

Luvussa 2 havaittiin, että funktion $f(x) = x$ kertaluvun $\alpha = \frac{1}{2}$ Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatat ovat samat. Seuraavassa lauseessa todistetaan, että Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen määritelmät ovat yhtäpitävät kaikille funktioille.

Lause 3.14. *Olkoon funktiolla $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kertaluvun α Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen differintegraalit ja $a < x < b$. Tällöin jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$ pätee*

$$ {}_a^{GL}D_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x). $$

Todistus. (Vertaa [**1**, s. 51–52]) Olkoon funktio f mielivaltainen, mutta kiinnitetty välillä $[a, b]$ ja olkoon $N = \lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor$. Lasketaan ensin Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalien erotus. Kun $\alpha < 0$, niin määritelmien 2.2 ja 2.4 mukaan on

$$
\begin{aligned}
\Delta &= {}_a^{GL} D_x^\alpha f(x) - {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f(x-mh) \right] - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}
$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $u = x - t$, jolloin $t = x - u$ ja $dt = -du$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \lim_{N\to\infty} \left[h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f(x-mh) \right] - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{x-a}^0 \frac{-f(x-u)\,du}{u^{\alpha+1}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f(x-mh) \right] - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{f(x-u)\,du}{u^{\alpha+1}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f(x-mh) \right] - \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{h \cdot f(x-mh)}{(mh)^{\alpha+1}} \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{m=0}^{N-1} f(x-mh) \left[\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - m^{-\alpha-1} \right] \right) \\
&= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{Nx - mx + ma}{N} \right) N^\alpha \left[\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - m^{-\alpha-1} \right] \right).
\end{aligned}
$$

Käsitellään summaa kahdessa osassa: $0 \le m \le M - 1$ ja $M \le m \le N - 1$, missä luku M on riippumaton luvusta N ja tarpeeksi suuri, jotta jälkimmäiseen summaan voidaan käyttää asymptoottista laajennusta (1.6). Tällöin

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{M-1} f\left(\frac{Nx-mx+ma}{N}\right) N^{\alpha} \left[\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - m^{-\alpha-1}\right]\right) \\
&+ \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N}\sum_{m=M}^{N-1} f\left(\frac{Nx-mx+ma}{N}\right) N^{\alpha+1} m^{-\alpha-1} \left[m^{\alpha+1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - 1\right]\right) \\
&= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{M-1} f\left(\frac{Nx-mx+ma}{N}\right) N^{\alpha} \left[\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - m^{-\alpha-1}\right]\right) \\
&+ \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N}\sum_{m=M}^{N-1} f\left(\frac{Nx-mx+ma}{N}\right) \left(\frac{m}{N}\right)^{-\alpha-1} \left[m^{\alpha+1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)} - 1\right]\right).
\end{aligned}$$

Tarkastellaan ensin ensimmäista osasummaa. Lausekkeen hakasulkeissa oleva osa on rajoitettu, kun $-\alpha-1>0$ eli $\alpha<-1$. Koska oletuksen mukaan fraktaali-integraalit ovat olemassa, funktio f on rajoitettu ja siten myös termit $f([Nx-mx+ma]/N)$ ovat rajoitettuja. Koska termi $N^{\alpha}\to 0$, kun $\alpha<-1$ ja $N\to\infty$, niin ensimmäinen osasumma suppenee kohti nollaa.

Tarkastellaan sitten toista osasummaa. Lausekkeen hakasulkeissa oleva osa on rajoitettu, sillä se lähestyy asymptoottisesti nollaa kaavan (1.6) nojalla. Koska termit $f([Nx-mx+ma]/N)$ ovat myös rajoitettuja, osasumma suppenee kohti nollaa, sillä $\frac{1}{N}\to 0$ ja $\left(\frac{m}{N}\right)^{-\alpha-1}\to 0$ ($\frac{m}{N}<1$), kun $N\to\infty$. Väite siis pätee, kun $\alpha<-1$.

Kun $\alpha\geq -1$, niin lemman 3.4 ja huomautuksen 3.6 nojalla voidaan kirjoittaa

$$ {}_a^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left({}_a^{GL}D_x^{\alpha-k} f(x)\right) \qquad \text{ja} \qquad {}_a^{RL}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left({}_a^{RL}D_x^{\alpha-k} f(x)\right), $$

missä $k\in\mathbb{Z}_+$. Valitsemalla tarpeeksi suuri k siten, että $\alpha-k<-1$ väite toteutuu myös, kun $\alpha\geq -1$. □

Luvussa 2 havaittiin myös, että funktion $f(x)=x$ kertaluvun $\alpha=\frac{3}{2}$ Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaatat eivät ole samat. Riemann-Liouvillen ja Caputon määritelmien välille saadaan kuitenkin seuraava yhtälö:

Lause 3.15. *Olkoon funktio $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n kertaa jatkuvasti derivoituva, $n\in\mathbb{N}$, $a<x<b$ ja $0\leq n-1<\alpha<n$. Tällöin jokaiselle $\alpha\in\mathbb{R}_+$ pätee*

$$ {}_a^{C}D_x^{\alpha} f(x) = {}_a^{RL}D_x^{\alpha} f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(a)\frac{(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}. $$

Todistus. (Vertaa [**17**, s. 25–26]). Funktion $f(x)$ astetta $n-1$ oleva Taylorin polynomi kohdassa $x=a$ on

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + R_{n-1,a}f(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m+1)}(x-a)^m + R_{n-1,a}f(x),
\end{aligned}$$

missä

$$R_{n-1,a}f(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt = {}_a^{RL}D_x^{-n}f^{(n)}(x).$$

Hyödyntämällä Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan lineaarisuutta, polynomifunktion Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan lauseketta (kts. lause 4.5) sekä fraktaali-integraalin puoliryhmäominaisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
{}_a^{RL}D_x^{\alpha}f(x) &= {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\left(\sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m+1)}(x-a)^m + R_{n-1,a}f(x)\right)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m+1)}\,{}_a^{RL}D_x^{\alpha}(x-a)^m + {}_a^{RL}D_x^{\alpha}R_{n-1,a}f(x)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m+1)}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha} + {}_a^{RL}D_x^{\alpha}\,{}_a^{RL}D_x^{-n}f^{(n)}(x)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha} + {}_a^{RL}D_x^{\alpha-n}f^{(n)}(x)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha-n}}\\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha} + {}_a^{C}D_x^{\alpha}f(x),
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Huomautus 3.16. Lauseen 3.15 mukaan Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaatat ovat samat, kun $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

LUKU 4

Esimerkkejä fraktaaliderivaatoista

Tässä luvussa johdetaan derivointikaavat polynomifunktiolle ja sen erikoistapaukselle (vakiofunktiolle) sekä eksponenttifunktiolle. Lisäksi kaavoja havainnollistetaan yksinkertaisilla esimerkeillä. Luku perustuu lähteisiin [**17**] ja [**19**].

4.1. Vakiofunktio

Seuraavassa lauseessa todistetaan yllättävä tulos: vakion Grünwald-Letnikovin fraktaaliderivaatta ei ole nolla.

LAUSE 4.1. *Olkoon* $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ *ja* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Tällöin*

$$ {}_a^{GL}D_x^\alpha C = C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

TODISTUS. Soveltamalla Grünwald-Letnikovin määritelmään 2.2 muuntokaavaa (1.4) sekä asymptoottista laajennusta (1.6) saadaan

$$
\begin{aligned}
{}_a^{GL}D_x^\alpha C &= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-\alpha}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)}C \\
&= C\lim_{N\to\infty}\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-\alpha}\frac{\Gamma(N-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(N)} \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{N\to\infty}N^\alpha\frac{\Gamma(N-\alpha)}{\Gamma(N)} \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

□

HUOMAUTUS 4.2. Koska lauseen 3.14 mukaan Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen määritelmät ovat yhtäpitävät, myös Riemann-Liouvillen määritelmän mukaan

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha C = C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

ESIMERKKI 4.3. Olkoon $f(x) = 1$, $a = 0$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Tällöin funktion f Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatta on

$$ {}_0^{GL}D_x^\alpha 1 = {}_0^{RL}D_x^\alpha 1 = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. $$

Caputon määritelmän etu Grünwald-Letnikovin ja Riemann-Liouvillen määritelmiin verrattuna on, että vakion fraktaaliderivaatta on yhteensopiva klassisen derivointituloksen kanssa.

Lause 4.4. *Olkoon* $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *ja* $n \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$ {}_a^C D_x^\alpha C = 0. $$

Todistus. Määritelmän 2.9 mukaan

$$ {}_a^C D_x^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{0\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} = 0. $$

□

4.2. Polynomifunktio

Kuten esimerkissä 2.6 havaittiin, yksinkertaisenkin polynomifunktion Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan määrittäminen on työlästä, sillä integraalilaskuissa on käytettävä muuttujanvaihtoa. Seuraavassa lauseessa johdetaan polynomifunktioille Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan kaava.

Lause 4.5. *Olkoon* $f(x) = (x-a)^p$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *ja* $p, n \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$ {}_a^{RL} D_x^\alpha (x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha}. $$

Todistus. (Vrt. [**19**, s. 15–16]). Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan määritelmän 2.5 mukaan

$$ {}_a^{RL} D_x^\alpha (x-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(t-a)^p\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. $$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = a + s(x-a)$, jolloin $dt = (x-a)ds$, $t-a = s(x-a)$ ja $x - t = (x-a)(1-s)$, saadaan integroimisrajoiksi

$$ \left.\frac{t-a}{x-a}\right|_{t=a} = 0 \quad \text{ja} \quad \left.\frac{t-a}{x-a}\right|_{t=x} = 1. $$

Tällöin

$$ \begin{aligned} {}_a^{RL} D_x^\alpha (x-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \frac{[s(x-a)]^p (x-a)\,ds}{[(x-a)(1-s)]^{\alpha-n+1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 s^p (1-s)^{n-\alpha-1} (x-a)^{p-\alpha+n}\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{p-\alpha+n} \int_0^1 s^{p+1-1} (1-s)^{n-\alpha-1}\,ds \right]. \end{aligned} $$

Oletusten mukaan $p \in \mathbb{N}$ ja $\alpha < n$, joten nyt $p+1 > 0$ ja $n - \alpha > 0$. Tällöin määrätty integraali toteuttaa betafunktion määrittelyehdot (kts. määritelmä 1.8). Lauseen 1.9

ja klassisten derivointisääntöjen mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
{}_a^{RL}D_x^\alpha (x-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{p-\alpha+n} B(p+1, n-\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{p-\alpha+n} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{p-\alpha+n} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} (p-\alpha+n)(p-\alpha+n-1) \ldots (p-\alpha+1)(x-a)^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

Soveltamalla lauseen 1.3 kohtaa (iii) saadaan

$$\begin{aligned}
{}_a^{RL}D_x^\alpha (x-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(p-\alpha+n-1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha},
\end{aligned}$$

mikä oli todistettava. □

Vastaavalla tavalla voitaisiin johtaa funktiolle $f(x) = (x-a)^p$ Caputon fraktaaliderivaatan lauseke. Lauseen 3.15 mukaan Caputon fraktaaliderivaatta voidaan kuitenkin määrittää hyödyntämällä Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan lauseketta. Seuraavassa lauseessa johdetaan Caputon fraktaaliderivaatan kaava yksinkertaistelulle tapaukselle: $f(x) = x^p$.

LAUSE 4.6. *Olkoon $f(x) = x^p$, $(a = 0)$, $p > n-1$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ja $p, n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$ {}_0^{C}D_x^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}. $$

TODISTUS. (Vrt. [**17**, s. 30]) Koska $p > n-1$, funktio f on n kertaa derivoituva. Nyt $f^{(m)}(0) = 0$ jokaiselle $m = 0, 1, \ldots, n-1$, joten lauseiden 3.15 ja 4.5 mukaan

$$\begin{aligned}
{}_0^{C}D_x^\alpha x^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha} - \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(0) \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

ESIMERKKI 4.7. Olkoon $f(x) = x$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Nyt $p = 1$ ja $a = 0$, joten lauseiden 4.5 ja 4.6 mukaan

$$ {}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}} x = {}_0^{C}D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, $$

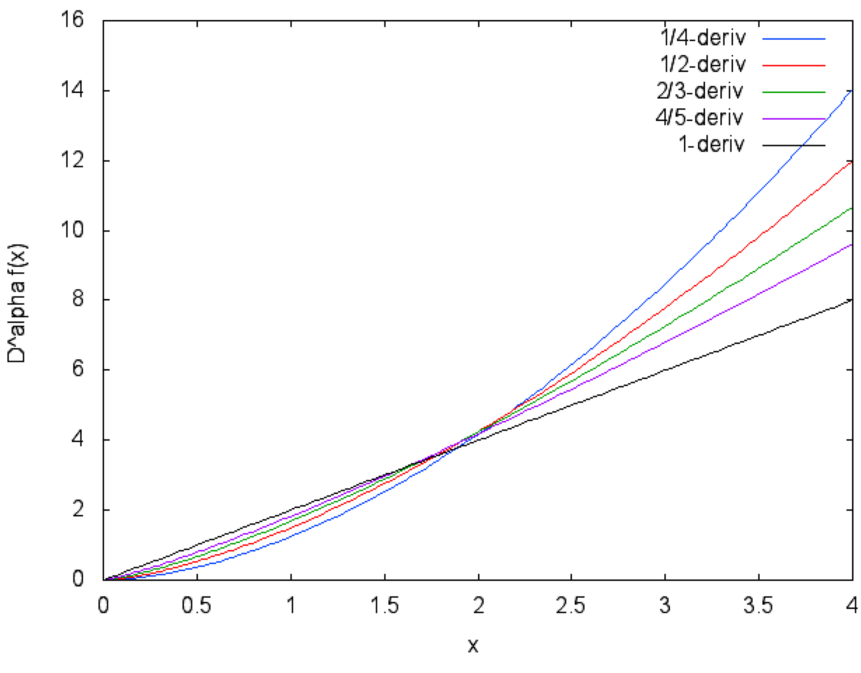
mikä on yhtäpitävää esimerkeissä 2.6 ja 2.10 laskettujen tulosten kanssa.

Esimerkki 4.8. (Vrt. [**17**, s. 31–32]). Tutkitaan tarkemmin funktiota $f(x) = x^2$. Nyt lauseen 4.6 mukaan funktion Caputon fraktaaliderivaatan yleinen lauseke on

$$ {}_0^C D_x^{\alpha} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha}. $$

Lasketaan funktion f fraktaaliderivaatat kertaluvuilla $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1$:

$$ \begin{aligned} \alpha = \frac{1}{4}: &\qquad {}_0^C D_x^{\frac{1}{4}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{11}{4})} x^{\frac{7}{4}} \approx 1.24 x^{\frac{7}{4}} \\ \alpha = \frac{1}{2}: &\qquad {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} \approx 1.50 x^{\frac{3}{2}} \\ \alpha = \frac{2}{3}: &\qquad {}_0^C D_x^{\frac{2}{3}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{3})} x^{\frac{4}{3}} \approx 1.68 x^{\frac{4}{3}} \\ \alpha = \frac{4}{5}: &\qquad {}_0^C D_x^{\frac{4}{5}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{11}{5})} x^{\frac{6}{5}} \approx 1.82 x^{\frac{6}{5}} \\ \alpha = 1: &\qquad {}_0^C D_x^{1} x^2 = \frac{2}{\Gamma(2)} x^{1} = 2x \end{aligned} $$



Kuva 4.1. Funktion $f(x) = x^2$ fraktaaliderivaatat.

Funktion $f(x) = x^2$ fraktaaliderivaatan kuvaajat on esitetty kuvassa 4.1. Havaitaan, että kertaluvun α kasvaessa fraktaaliderivaattafunktion kuvaaja lähestyy ensimmäisen kertaluvun derivaattakuvaajaa $f'(x) = 2x$. Tämä seuraa lauseesta 3.3.

4.3. Eksponenttifunktio

Tässä aliluvussa johdetaan funktiolle $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$, Caputon fraktaaliderivaatan lausekkeet käyttäen tarkasteluvälin alarajoina $a = 0$ ja $a = -\infty$. Derivointikaavoja johdettaessa sovelletaan luvussa 1 määriteltyjä erikoisfunktioita: epätäydellistä gammafunktiota ja Mittag-Leffler-funktiota (kts. määritelmät 1.5 ja 1.10). Ennen varsinaisten derivointikaavojen johtoa todistetaan kuitenkin seuraava aputulos:

Lemma 4.9. *Olkoon* $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *ja* $n \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$ {}_a^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \gamma(n-\alpha, \lambda(x-a)), $$

missä $\gamma(n-\alpha, \lambda(x-a))$ *on määritelmän 1.5 epätäydellinen gammafunktio parametrein* $z = n - \alpha$ *ja* $c = \lambda(x-a)$.

Todistus. (Vrt. [**19**, s. 16]). Caputon fraktaaliderivaatan määritelmän 2.9 mukaan

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha e^{\lambda x} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\lambda^n e^{\lambda t}}{(x-t)^{\alpha+1-n}} \, dt \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x [\lambda(x-t)]^{n-\alpha-1} e^{\lambda t} \, dt. \end{aligned} $$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $u = \lambda(x-t)$, jolloin $t = x - \frac{1}{\lambda}u$ ja $dt = -\frac{1}{\lambda}du$, saadaan integroimisrajoiksi

$$ \lambda(x-t)\big|_{t=x} = 0 \quad \text{ja} \quad \lambda(x-t)\big|_{t=a} = \lambda(x-a). $$

Tällöin

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha e^{\lambda x} &= \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha)} (-1) \int_{\lambda(x-a)}^0 u^{n-\alpha-1} e^{\lambda x - u} \frac{1}{\lambda} \, du \\ &= \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{\lambda(x-a)} u^{n-\alpha-1} e^{-u} \, du. \end{aligned} $$

Hyödyntämällä epätäydellisen gammafunktion määritelmää 1.5 saadaan lauseke muotoon

$$ {}_a^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \gamma(n-\alpha, \lambda(x-a)), $$

mikä oli todistettava. □

Seuraavaksi johdetaan funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ Caputon fraktaaliderivaatta tapauksessa $a = 0$.

Lause 4.10. *Olkoon* $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *ja* $n \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

$$ {}_0^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda x), $$

missä

$$ E_{1,n-\alpha+1}(\lambda x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} $$

on määritelmän 1.10 Mittag-Leffler-funktio parametrein $a = 1$ ja $b = n - \alpha + 1$.

TODISTUS. (Vertaa [**19**, s. 16–17].) Lemman 4.9 mukaan

$$ {}_0^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \gamma(n-\alpha, \lambda x). $$

Hyödyntämällä epätäydellisen gammafunktion sarjakehitelmää (1.7) saadaan lauseke muotoon

$$ \begin{aligned} {}_0^C D_x^\alpha e^{\lambda x} &= \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} (\lambda x)^{n-\alpha} e^{-\lambda x} \Gamma(n-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \\ &= \lambda^n x^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}. \end{aligned} $$

Soveltamalla Mittag-Leffler-funktion määritelmää 1.10 saadaan eksponenttifunktion fraktaaliderivaatan lausekkeeksi

$$ {}_0^C D_x^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda x). $$

□

ESIMERKKI 4.11. Tapauksessa $a = 0$ funktion $f(x) = e^{\lambda x}$, $x > 0$, fraktaaliderivaatat ovat monimutkaisia lausekkeita. Esimerkiksi, kun $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ ja $n = 1$, on

$$ {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} e^x = x^{\frac{1}{2}} E_{1,\frac{3}{2}}(x). $$

Funktion $E_{1,\frac{3}{2}}(x)$ alkeisfunktioesitys saadaan taulukosta 1. Siten

$$ {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} e^x = x^{\frac{1}{2}} e^x \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, $$

missä

$$ \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt $$

on Gaussin virhefunktio.

Seuraavaksi johdetaan funktion $f(x) = e^{\lambda x}$ Caputon fraktaaliderivaatta tapauksessa $a = -\infty$.

LAUSE 4.12. *Olkoon $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $0 \le n - 1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$ {}_{-\infty}^{\;\;C} D_x^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. $$

TODISTUS. (Vrt. [**19**, s. 16–17]). Lemman 4.9 mukaan

$$ {}_{-\infty}^{\;\;C} D_x^\alpha e^{\lambda x} = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \gamma(n-\alpha, \lambda(x-(-\infty))) = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \gamma(n-\alpha, \infty). $$

Huomautuksen 1.6 nojalla

$$ {}_{-\infty}^{\;\;C} D_x^\alpha e^{\lambda x} = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{c\to\infty} \gamma(n-\alpha, c) = \frac{\lambda^\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \Gamma(n-\alpha) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. $$

□

LUKU 5

Fraktaaliderivaatan sovelluksia

Tässä luvussa tarkastellaan homogeenisia lineaarisia vakiokertoimisia fraktaalidifferentiaaliyhtälöitä. Aliluvuissa 5.1 ja 5.2 johdetaan Riemann-Liouvillen ja Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnokset, joita hyödynnetään aliluvuissa 5.3 ja 5.4 alkuarvotehtävien ratkaisemiseen. Viimeisessä aliluvussa perehdytään yhteen fysiikan sovellukseen: fraktaalivärähtelijään. Luku 5 perustuu lähteisiin [**5**, s. 104–106, 138–139], [**15**, s. 284], [**17**, s. 46] ja [**23**].

5.1. Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos

Kuten aliluvussa 1.5 todettiin, funktiolla $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ on Laplace-muunnos, jos funktio f on eksponentiaalista kertalukua vakiolla K ja se on paloittain jatkuva (kts. määritelmä 1.14). Koska tarkasteluväli on $[0, \infty)$, fraktaaliderivaatan alarajaksi asetetaan $a = 0$. Valinta on perusteltu myös käytännön näkökulmasta, sillä esimerkiksi ajan alkupisteeksi on luontevaa asettaa $t = 0$.

Aliluvun 5.3 alkuarvotehtävää varten tarvitaan Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos. Ensiksi kuitenkin johdetaan kertaluvun α fraktaali-integraalin Laplace-muunnos:

Lause 5.1. *Olkoon $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > K\}$ ja olkoon $F : S \to \mathbb{C}$ funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Laplace-muunnos. Tällöin funktion f kertaluvun α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin Laplace-muunnos on*

$$L({}_0^{RL}D_x^{-\alpha} f(x)) = s^{-\alpha} F(s), \qquad x > 0.$$

Todistus. (Vrt. [**5**, s. 104]). Kirjoitetaan määritelmän 2.4 fraktaali-integraali funktioiden $g(x) = x^{\alpha-1}$ ja $f(x)$ konvoluutiona (kts. määritelmä 1.21):

$${}_0^{RL}D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x).$$

Määritelmän 1.14 mukaan funktion $g(x) = x^{\alpha-1}$ Laplace-muunnos on

$$G(s) = L(x^{\alpha-1}) = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1}\, dt.$$

Käyttämällä muuttujanvaihtoa $t = \frac{u}{s}$, jolloin $dt = \frac{1}{s}\, du$, saadaan lauseke muotoon

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, du = s^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\, du.$$

Vertaamalla epäoleellista integraalia gammafunktion määritelmään 1.1 havaitaan, että

$$G(s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}.$$

Soveltamalla konvoluutiolausetta 1.22 saadaan Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin Laplace-muunnokseksi

$$L({}_0^{RL}D_x^{-\alpha}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}G(s)F(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha)s^{-\alpha}F(s) = s^{-\alpha}F(s).$$

□

Nyt, kun fraktaali-integraalin Laplace-muunnos on johdettu, voidaan johtaa Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos.

LAUSE 5.2. *Olkoon $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > K\}$ ja olkoon $F : S \to \mathbb{C}$ funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Laplace-muunnos. Tällöin funktion f kertaluvun α Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos on*

$$L({}_0^{RL}D_x^{\alpha}f(x)) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}f(x)\right]_{x=0},$$

missä $x > 0$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. (Vrt. [**5**, s. 105]) Määritelmän 2.5 mukaan kertaluvun α fraktaaliderivaatta saadaan derivoimalla $(n-\alpha)$-kertaista integraalia, joten merkitään

$${}_0^{RL}D_x^{\alpha}f(x) = g^{(n)}(x),$$

missä

$$g(x) = {}_0^{RL}D_x^{-(n-\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt, \qquad 0 \leq n-1 < \alpha < n.$$

Lauseen 1.23 mukaan

$$L({}_0^{RL}D_x^{\alpha}f(x)) = s^nG(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \tag{5.1}$$

missä

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s) \tag{5.2}$$

lauseen 5.1 nojalla. Klassisen derivaatan ja fraktaali-integraalin additiivisuudesta (kts. lause 3.11) seuraa, että

$$g^{(n-k-1)}(x) = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\,{}_0^{RL}D_x^{-(n-\alpha)}f(x) = {}_0^{RL}D_x^{n-k-1-(n-\alpha)}f(x) = {}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}f(x). \tag{5.3}$$

Sijoittamalla lausekkeet (5.2) ja (5.3) lausekkeeseen (5.1) saadaan Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnokseksi

$$L({}_0^{RL}D_x^{\alpha}f(x)) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}f(x)\right]_{x=0}.$$

□

Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos on mainittu useissa fraktaalidifferentiaaliyhtälöitä käsittelevissä teoksissa (kts. esim. [**5**, s. 105], [**15**, s. 284] ja [**22**, s. 123]). Sen haitta kuitenkin on, että se sisältää arvoja $\left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}f(x)\right]_{x=0}$, joille ei ole löydetty fysikaalista tulkintaa.

5.2. Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos

Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin Laplace-muunnoksen avulla saadaan johdettua Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos.

LAUSE 5.3. *Olkoon $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > K\}$ ja $F : S \to \mathbb{C}$ funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Laplace-muunnos. Tällöin funktion f kertaluvun α Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnos on*

$$L({}_0^C D_x^\alpha f(x)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\alpha-k-1)} f^{(k)}(0),$$

missä $x > 0$, $0 \leq n-1 < \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. (Vrt. [**5**, s. 106]). Kirjoitetaan Caputon fraktaaliderivaatan määritelmä 2.9 Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin avulla:

$$ {}_0^C D_x^\alpha f(x) = {}_0^{RL} D_x^{-(n-\alpha)} g(x), \qquad 0 \leq n-1 < \alpha < n, \tag{5.4}$$

missä

$$g(x) = f^{(n)}(x).$$

Hyödyntämällä Riemann-Liouvillen fraktaali-integraalin Laplace-muunnosta (kts. lause 5.1) saadaan

$$L({}_0^C D_x^\alpha f(x)) = L({}_0^{RL} D_x^{-(n-\alpha)} g(x)) = s^{-(n-\alpha)} G(s), \tag{5.5}$$

missä

$$G(s) = L(f^{(n)}(x)) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} f^{(k)}(0) \tag{5.6}$$

lauseen 1.23 nojalla. Sijoittamalla lauseke (5.6) yhtälöön (5.5) saadaan Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnokseksi

$$L({}_0^C D_x^\alpha f(x)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\alpha-k-1)} f^{(k)}(0). \tag{5.7}$$

□

Koska funktion arvolle $f(0)$ ja derivaattojen arvoille $f'(0)$ ja $f''(0)$ on fysikaalinen tulkinta (esimerkiksi $f(0)$ alkupiste, $f'(0)$ alkunopeus ja $f''(0)$ alkukiihtyvyys), Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnosta käytetään muun muassa fysiikan sovelluksissa [**21**].

5.3. Alkuarvotehtävä Riemann-Liouvillen mukaan

Seuraavissa aliluvuissa sovelletaan Laplace-muunnostekniikkaa fraktaalidifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Yleisesti, differentiaaliyhtälön ratkaisuprosessissa on seuraavat kolme vaihetta:

(1) Differentiaaliyhtälön molempien puolien Laplace-muunnosten määrittäminen.
(2) Yhtälön ratkaiseminen termin $L(y(t)) = Y(s)$ suhteen.
(3) Yhtälön $L(y(t)) = Y(s)$ molempien puolien käänteisten Laplace-muunnosten määrittäminen. Tällöin yhtälö saadaan muotoon $y(t) = L^{-1}(Y(s))$, joka on differentiaaliyhtälön ratkaisu.

Sovelletaan ratkaisumekanismia ensin tavalliseen differentiaaliyhtälöön:

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan seuraavaa alkuarvotehtävää:

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = c_0, \\ y'(0) = c_1. \end{cases}$$

Vaihe (1): Määritetään yhtälön molempien puolien Laplace-muunnokset.

Soveltamalla Laplace-muunnoksen lineaarisuutta (kts. lause 1.20) ja derivaatan Laplace-muunnoksen kaavaa (kts. lause 1.23) saadaan

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = 0.$$

Vaihe (2): Ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä $Y(s)$.

$$\begin{aligned} Y(s)(s^2-1) &= sy(0) + y'(0) \\ Y(s) &= \frac{s}{s^2-1} y(0) + \frac{1}{s^2-1} y'(0) \\ Y(s) &= \frac{s}{s^2-1} c_0 + \frac{1}{s^2-1} c_1. \end{aligned}$$

Vaihe (3): Määritetään käänteiset Laplace-muunnokset puolittain.

Lähteen [**26**] mukaan on

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right] = \cosh(t) \qquad \text{ja} \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] = \sinh(t),$$

joten differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$y(t) = c_0 \cosh(t) + c_1 \sinh(t).$$

Tarkastellaan seuraavaksi fraktaalidifferentiaaliyhtälöitä. Tavallisesta alkuarvotehtävästä saadaan fraktaalinen versio, kun klassinen derivointioperaattori korvataan fraktaaliderivointioperaattorilla. Tehtävän alkuarvot ovat vastaavasti fraktaaliderivaatan arvoja tarkasteluvälin alarajalla. Seuraavassa lauseessa tarkastellaan alkuarvotehtävää, jossa klassinen derivointioperaattori on korvattu Riemann-Liouvillen derivointioperaattorilla.

Lause 5.5. *Olkoon alkuarvotehtävä*

(5.8)
$$\begin{cases} {}_0^{RL}D_x^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) & = 0, \quad x > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \le n-1 < \alpha < n, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, \\ \left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1} f(x)\right]_{x=0} & = c_k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Tällöin funktiot

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda x^{\alpha}) \tag{5.9}$$

ovat alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisuja.

TODISTUS. (Vrt. [**15**, s. 284–285]). Hyödyntämällä Riemann-Liouvillen fraktaaliderivaatan Laplace-muunnosta (kts. lause 5.2) sekä Laplace-muunnoksen lineaarisuutta (kts. lause 1.20) yhtälö (5.8) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1} y(x)\right]_{x=0} - \lambda Y(s) = 0 \\ s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k - \lambda Y(s) = 0, \end{aligned}$$

missä $Y(s)$ on funktion $y(x)$ Laplace-muunnos ja $c_k = \left[{}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1} y(x)\right]_{x=0}$ ovat fraktaalidifferentiaaliyhtälön (5.8) alkuehdot.

Ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä $Y(s)$:

$$\begin{aligned} s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k - \lambda Y(s) = 0 \\ s^\alpha Y(s) - \lambda Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \\ Y(s)\left(s^\alpha - \lambda\right) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k \\ Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{s^k}{s^\alpha - \lambda}. \end{aligned}$$

Soveltamalla käänteisen Laplace-muunnoksen kaavaa (kts. huomautus 1.19)

$$L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}\right] = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda x^\alpha)$$

arvolla $\beta = \alpha - k$ sekä hyödyntämällä Laplace-muunnoksen lineaarisuutta yhtälö saadaan muotoon

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k L(x^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda x^\alpha)) = L\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda x^\alpha)\right) \qquad (|s^{-\alpha}\lambda| < 1).$$

Ottamalla käänteiset Laplace-muunnokset puolittain saadaan

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\alpha-k-1} E_{\alpha,\alpha-k}(\lambda x^\alpha).$$

□

SEURAUS 5.6. *Alkuarvotehtävän (5.8) ratkaisu seuraavissa tapauksissa on:*

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \le 1: &\qquad y(x) = c_0 x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) \\ 1 < \alpha \le 2: &\qquad y(x) = c_0 x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) + c_1 x^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda x^\alpha). \end{aligned}$$

Esimerkki 5.7. (Vrt. [**5**, s. 138–139]) Ratkaistaan seuraava alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} {}_0^{RL}D_x^{\frac{1}{2}}y(x) + y(x) = 0, & x > 0, \\ \left[{}_0^{RL}D_x^{-\frac{1}{2}}f(x)\right]_{x=0} = C. \end{cases}$$

Nyt $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $\lambda = -1$ ja $c_0 = C$, joten seurauksen 5.6 mukaan ratkaisu on

$$y(x) = Cx^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-x^{\frac{1}{2}}).$$

Soveltamalla lausetta 1.12 sekä hyödyntämällä taulukon 1 alkeisfunktioesitystä Mittag-Leffler-funktiolle $E_{\frac{1}{2},1}(-x)$ saadaan

$$\begin{aligned} y(x) &= C\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \sqrt{x}E_{\frac{1}{2},1}(-x^{\frac{1}{2}})\right) = C\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{x}e^{(\sqrt{x})^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{x})\right) \\ &= C\left(\frac{1}{\sqrt{x\pi}} - e^x\mathrm{erfc}(\sqrt{x})\right). \end{aligned}$$

5.4. Alkuarvotehtävä Caputon mukaan

Tässä aliluvussa tarkastellaan alkuarvotehtävää, jossa derivointioperaattorina on Caputon derivointioperaattori.

Lause 5.8. *Olkoon alkuarvotehtävä*

(5.10)
$$\begin{cases} {}_0^{C}D_x^{\alpha}y(x) - \lambda y(x) & = 0, \quad x > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \le n-1 < \alpha < n, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, \\ y^{(k)}(0) & = c_k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Tällöin funktiot

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1}(\lambda x^{\alpha}) \tag{5.11}$$

ovat alkuarvotehtävän (5.10) ratkaisuja.

Todistus. Todistetaan vastaavalla tavalla kuin lause 5.5 (vrt. [**17**, s. 41–42]). Hyödyntämällä Caputon fraktaaliderivaatan Laplace-muunnosta (kts. lause 5.3) sekä Laplace-muunnoksen lineaarisuutta (kts. lause 1.20) yhtälö (5.10) saadaan muotoon

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0) - \lambda Y(s) = 0$$

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}c_k - \lambda Y(s) = 0,$$

missä $Y(s)$ on funktion $y(x)$ Laplace-muunnos ja $c_k = y^{(k)}(0)$ ovat fraktaalidifferentiaaliyhtälön (5.10) alkuehdot. Ratkaisemalla yllä olevasta yhtälöstä $Y(s)$ saadaan:

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} - \lambda}c_k.$$

Soveltamalla käänteisen Laplace-muunnoksen kaavaa (kts. huomautus 1.19)

$$L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\lambda}\right] = x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda x^\alpha)$$

arvolla $\beta = k+1$ sekä hyödyntämällä Laplace-muunnoksen lineaarisuutta yhtälö saadaan muotoon

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k L(x^k E_{\alpha,k+1}(\lambda x^\alpha)) = L\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1}(\lambda x^\alpha)\right) \qquad (|s^{-\alpha}\lambda| < 1).$$

Ottamalla käänteiset Laplace-muunnokset puolittain saadaan

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1}(\lambda x^\alpha).$$

□

SEURAUS 5.9. *Alkuarvotehtävän (5.10) ratkaisu seuraavissa tapauksissa on:*

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq 1: &\qquad y(x) = c_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) \\ 1 < \alpha \leq 2: &\qquad y(x) = c_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) + c_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha). \end{aligned}$$

ESIMERKKI 5.10. (Vrt. [**17**, s. 46]) Ratkaistaan seuraava alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} y(x) - y(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Nyt $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $\lambda = 1$ ja $c_0 = 1$, joten seurauksen 5.9 mukaan ratkaisu on

$$y(x) = E_{\frac{1}{2},1}(x^{\frac{1}{2}}).$$

Soveltamalla funktion $E_{\frac{1}{2},1}(-x)$ alkeisfunktioesitystä (kts. taulukko 1) saadaan ratkaisuksi

$$y(x) = e^{(-\sqrt{x})^2}\mathrm{erfc}(-\sqrt{x}) = e^x \mathrm{erfc}(-\sqrt{x}).$$

5.5. Fraktaalinen värähtelijä Caputon mukaan

Yksinkertainen harmoninen värähtelyliike on klassisen fysiikan kulmakiviä. Se on perustana esimerkiksi aalto-, ääni- ja sähköopin teorialle. Lisäksi atomifysiikan ilmiöitä, kuten molekyylien värähtelyä, voidaan approksimoida yksinkertaisella harmonisella värähtelijällä.

Yksinkertaisen harmonisen värähtelijän klassinen liikeyhtälö on

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{5.12}$$

missä m on kappaleen massa ja k on ns. jousivakio. Värähtelijän fraktaalidifferentiaaliyhtälö saadaan, kun klassinen derivointioperaattori korvataan fraktaaliderivointiooperaattorilla:

$$\frac{d}{dt} \to \frac{1}{\eta^{1-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha},$$

missä $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ tarkoittaa Caputon fraktaaliderivointioperaattoria ja η on fraktaalista aikaa kuvaava parametri. Nyt yhtälö (5.12) saadaan muotoon

$$\frac{m}{\eta^{2(1-\alpha)}}\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x + kx = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x + \eta^{2(1-\alpha)}\frac{k}{m}x = 0.$$

Merkitsemällä $\omega_f^2 = \eta^{2(1-\alpha)}\omega^2$, missä $\omega^2 = \frac{k}{m}$, saadaan värähtelijän fraktaalidifferentiaaliyhtälöksi

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x + \omega_f^2 x = 0. \tag{5.13}$$

Seurauksen 5.9 mukaan fraktaalidifferentiaaliyhtälön (5.13) ratkaisu on

$$x(t) = x(0)E_{2\alpha,1}(-\omega_f^2 t^{2\alpha}) + x'(0)tE_{2\alpha,2}(-\omega_f^2 t^{2\alpha}). \tag{5.14}$$

Huomautus 5.11. Kun $\alpha = 1$, yhtälö (5.13) palautuu klassiseksi differentiaaliyhtälöksi (5.12), sillä

$$\frac{1}{\eta^{1-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\bigg|_{\alpha=1} = \frac{d}{dt}.$$

Esimerkki 5.12. Jos valitaan fraktaalidifferentiaaliyhtälön (5.13) alkuehdoiksi $x(0) = 1$ ja $x'(0) = 0$, saadaan yhtälön ratkaisuksi

$$x(t) = E_{2\alpha,1}(-\omega_f^2 t^{2\alpha}). \tag{5.15}$$

Kun $\alpha \to 1$, funktio $x(t)$ lähestyy raja-arvoa

$$\lim_{\alpha\to 1} E_{2\alpha,1}(-\omega_f^2 t^{2\alpha}) = E_{2,1}(-\omega^2 t^2) = \cos(\sqrt{\omega^2 t^2}) = \cos(\omega t),$$

missä Mittag-Leffler-funktion $E_{2,1}(-\omega^2 t^2)$ alkeisfunktioesitys on saatu taulukosta 1. Koska saatu raja-arvo on klassisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, valituilla alkuehdoilla yhtälö (5.13) kuvaa fraktaalista värähtelijää. [**23**]

Lähteessä [**24**] on tutkittu numeerisesti, miten fraktaalivärähtelijän käyttäytyminen vaihtelee ajan funktiona ja miten tämä vaihtelu riippuu parametrista α. Laskut osoittavat, että fraktaalivärähtelijä käyttäytyy vaimennetun harmonisen värähtelijän tavoin, kun $\alpha < 1$. Toisin sanoen, fraktaalivärähtelijän liike on värähdysliikettä, mutta värähtelyn amplitudi pienenee ajan funktiona. Mitä pienempi parametrin α arvo on, sitä nopeammin amplitudi vaimenee kohti nollaa. Amplitudin vaimenemisesta johtuen on odotettavissa, että fraktaalivärähtelijän kokonaisenergia ei ole vakio.

Klassisen harmonisen värähtelijän tapauksessa sen kokonaisenergia säilyy, kun systeemi on eristetty. Kun harmoninen värähtelijä on vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa, energiaa siirtyy vaimenemisen kautta. Koska fraktaalivärähtelijään ei vaikuta ulkoisia voimia, liikkeen vaimenemisen oletetaan olevan sisäistä. Vaikuttaa siis siltä, että fraktaalivärähtelijä ei voi muodostaa lainkaan eristettyä systeemiä, koska vaimenemismekanismi on sen sisäinen ominaisuus. Toistaiseksi on vielä epäselvää, mistä sisäinen vaimenemismekanismi johtuu. Joitakin lausekkeita vaimenemisvoimille on esitetty (kts. esim. [**25**]), mutta fraktaalivärähtelijän dynamiikkaan liittyy vielä paljon avoimia kysymyksiä.

Lähdeluettelo

[1] Keith B. Oldham, Jerome Spanier: *The Fractional Calculus.* Academic Press, Inc., 1974.

[2] Mehdi Dalir, Majid Bashour: *Applications of Fractional Calculus.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 4 (2010) No.21, pp. 1021-1032.

[3] Mario O. González: *Classical Complex Analysis.* Marcel Dekker, Inc., 1991.

[4] Martti Kumpulainen: *800346A Differentiaaliyhtälöt II.* https://noppa.oulu.fi/noppa/kurssi/800346a/materiaali/800346A_luentomoniste.pdf. Viitattu: 25.5.2014.

[5] Igor Podlubny: *Fractional Differential Equations.* Academic Press, 1999.

[6] Wikipedia: *Incomplete gamma function.* http://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete_gamma_function. Viitattu: 26.4.2014.

[7] *The gamma and beta function.* http://homepage.tudelft.nl/11r49/documents/wi4006/gammabeta.pdf. Viitattu: 30.5.2014.

[8] A.M. Mathai, H.J. Haubold: *Special functions for Applied Scientists.* Hardcover, 2008. http://www.springer.com/978-0-387-75893-0. Viitattu: 27.4.2014.

[9] Saeed Kazem: *Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform.* International Journal of Non-linear Science Vol.16 (2013) No.1, pp. 3-11.

[10] Erwin Kreyszig: *Advanced Enzineering Mathematics.* 8th ed., John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[11] Wikipedia: *Error function.* http://en.wikipedia.org/wiki/Error_function. Viitattu: 26.4.2014.

[12] WolframMathWorld: *Erf.* http://mathworld.wolfram.com/Erf.html. Viitattu: 26.4.2014.

[13] xuru.org: *Introductory Notes on Fractional Calculus.* http://www.xuru.org/downloads/papers/IntrFrac.pdf. Viitattu: 19.4.2014.

[14] E. Sousa: *How to approximate the fractional derivative of order* $1 < \alpha \leq 2$. International Journal of Bifurcation and Chaos Vol. 22 (4) (2012).

[15] Anatoly A. Kilbas, Hari M. Shrivastava, Juan J. Trujillo: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, 2006.

[16] Vasily E. Tarasov: *No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative.* Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18 (2013) 2945-2948.

[17] Mariya Kamenova Ishteva: *Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator.* Department of Mathematics. Uppsala University, 2004. http://homepages.vub.ac.be/~mishteva/papers/Ishteva_MScThesis.pdf. Viitattu: 2.5.2014.

[18] Joakim Munkhammar: *Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series.* Department of Mathematics. Universität Karlsruhe, 2005. http://www2.math.uu.se/research/pub/Munkhammar.pdf. Viitattu: 2.5.2014.

[19] Bryan Crompton: *An Introduction to Fractional Calculus and the Fractional Diffusion-Wave Equation.* Department of Mathematical Sciences. University of Massachusetss Lowell, 2011. http://www.math.wisc.edu/~crompton/thesis.pdf. Viitattu: 2.5.2014.

[20] John W. Hanneken, B. N. Narahari Achar, Raymond Puzio, David M. Vaught: *Properties of the Mittag-Leffler function for negative alpha.* Physica Scripta T136 (2009) 014037 (5 pp).

[21] Carl F. Lorenzo, Tom T. Hartley: *Time-Varying Initialization and Laplace Transform of the Caputo Derivative: with Order Between Zero and One.* Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/fdta11/papers/DETC2011-47396.pdf. Viitattu: 2.5.2014.

[22] Kenneth S. Miller, Bertram Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[23] Hosein Nasrolahpour: *Time Fractional Formalism: Classical and Quantum Phenomena.* Prespacetime Journal, Vol. 3 (2012), no.1, pp. 99-108.

[24] B. N. Narahari Achar, J. W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke: *Dynamics of the fractional oscillator.* Physica A 297 (2001) 361-367.

[25] A. Tofighi, H. Nasrolah Pour: *ϵ-expansion and the fractional oscillator.* Physica A 374 (2007) 41-45.

[26] Paul's Online Math Notes: *Table of Laplace Transform.* http://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/laplace_table.aspx Viitattu: 2.5.2014.