

Katja Korhonen

**KÄSITTEIDEN HIERARKIOIDEN MUODOSTUMINEN  
YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA**

Erityispedagogiikan  
pro gradu -tutkielma  
Kevätlukukausi 2014  
Kasvatustieteiden laitos  
Jyväskylän yliopisto

**Supervisor of the graduate/  
Master's thesis**

Piia Björn, adj. prof.  
Department of Education

Special Education

University of Jyväskylä, Finland

**Co-director  
of the project**

Tanja Vehkakoski, PhD.

**Research project**

MUST (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen  
tausta)

**Research site**

Department of Education  
Special Education

University of Jyväskylä

## TIIVISTELMÄ

Korhonen, Katja. KÄSITTEIDEN HIERARKIOIDEN MUODOSTUMINEN YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA. Erityispedagogiikan pro gradu – tutkielma. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitos, 2014, 91 sivua. Julkaisematon.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, esiintyykö yläkoulun matematiikan opetuksessa käsitteiden hierarkioita ja jos esiintyy, niin millaisia ne ovat. Tutkimuksessa kuvailtiin, kuinka käsitteiden hierarkiat rakentuvat opetuksessa ja miten opettajakokemus vaikutti hierarkian ilmenemiseen. Tutkimus toteutettiin osana MUST-projektia, joka tutkii luokkahuonevuorovaikutusta matematiikan tunneilla ja käsitteiden opettamista sosiokulttuurisesta näkökulmasta.

Tutkimukseen osallistui kuusi matematiikan yläkoulun aineenopettajaa. Aineisto muodostui 30 oppitunnin litteraatista sekä kyselylomakkeilla kerätyistä opettajien taustatiedoista. Tutkimusmenetelminä toimivat sisällönanalyysi ja fenomenografia.

Tutkimuksen tulokset osoittivat, että yläkoulun matematiikan opetuksessa muodostuu selkeitä käsitteiden hierarkioita. Käsitteet eivät rakentuneet hierarkkisesti jokaisella oppitunnilla, vaan niiden rakentuminen oli oppitunti- ja opettajakohtaista. Matemaattiset käsitteiden hierarkiat voivat rakentua perus-, ala- ja yläkäsitteiden tasolle. Eniten opetuksessa ilmeni peruskäsitteitä, joiden runsas määrä ennakoi usealle käsitteen tasolle rakentuvaa hierarkiaa. Mitä moniulotteisemmasta käsitetasosta oli kyse, sitä vähemmän siinä esiintyi käsitteitä. Aineiston perusteella voidaan todeta, että matematiikan opetus voi usein typistyä peruskäsitteiden tasolle. Opetusta tulisi rakentaa tietoisesti kaksiportaisesti alakäsitteidenkin tasolle tai vaihtoehtoisesti kolmiportaisesti, jolloin opetuksessa esiintyy myös yläkäsitteitä. Tämä auttaa ilmiön syvällisemmässä ymmärtämisessä, joka on myös matematiikan opetuksen keskeinen tavoite.

Asiasanat: matemaattisten käsitteiden hierarkia, sosiokonstruktivismi, matematiikan opetus yläkoulussa, sisällönanalyysi, fenomenografia

# SISÄLLYS

1	KÄSITTEET MATEMATIIKAN OPETUKSESSA .....	6
2	KÄSITTEIDEN HIERARKKINEN RAKENTUMINEN JA MATEMATIIKAN OPETUS.....	9
2.1	Matemaattisen käsitteen oppiminen ja esikäsitykset .....	9
2.2	Käsitteiden hierarkioiden opettaminen .....	11
2.3	Kognition yhteys käsitteen oppimiseen .....	13
3	SOSIOKONSTRUKTIVISMI MATEMATIIKAN OPETUKSESSA.....	16
3.1	Sosiokonstruktivistisen opetuksen periaatteet.....	16
3.2	Matemaattinen oppimisvaikeus sosiokonstruktivismin näkökulmasta.....	19
4	TUTKIMUKSEN TAVOITTEET JA TOTEUTUS.....	22
4.1	Tutkimustehtävät .....	22
4.2	Tutkimusmenetelmät ja aineistonkeruu .....	22
4.2.1	Sisällönanalyysi.....	23
4.2.2	Fenomenografia.....	25
4.2.3	Aineiston keruu .....	27
4.2.4	Litterointiaineiston jatkokäsittely ja aineiston analyysi .....	28
4.2.5	Taustat.....	36
5	TUTKIMUSLÖYDÖT .....	38
5.1	Matemaattisten käsitteiden määrät .....	38
5.2	Matemaattisten käsitteiden ryhmittelyt.....	40
5.2.1	Peruskäsitteiden ilmeneminen.....	41
5.2.2	Ala- ja yläkäsitteiden rakentuminen opetuksessa.....	42
5.3	Käsitteiden hierarkkinen kuvaus .....	44
5.3.1	Opettajakokemuksen yhteys hierarkian muodostumiseen.....	50
5.4	Tulosten yhteenveto.....	53
6	POHDINTA .....	56
6.1	Tutkimuslöydösten tarkastelu .....	56

6.1.1 Käsitteiden hierarkioiden muodostuminen opetuksessa.....	57
6.1.2 Käsitteiden tasojen ilmeneminen opetuksessa .....	58
6.1.3 Oppilaan yksilöllisyydestä .....	59
6.1.4 Opettajakokemuksen vaikutus hierarkioiden opetukseen.....	61
6.2 Tutkimuksen luotettavuus .....	64
6.3 Tutkimuksen eettisyys .....	69
6.4 Tutkimuksen merkittävyys ja jatkokysymykset.....	71
<b>LÄHTEET</b> .....	<b>75</b>
<b>LIITTEET</b> .....	<b>83</b>
Liite 1: Tutkimuslupa.....	83
Liite 2: Tiedote oppilaille ja vanhemmille.....	84
Liite 3: Taustatietokysely opettajille. ....	85
Liite 4: Matemaattisten käsitteiden luettelo. ....	87
Liite 5: Ensimmäisen analyysivaiheen luokittelutaulukko. ....	88
Liite 6: Maijan opetuksen hierarkkinen rakentuminen. ....	89
Liite 7: Orvokin opetuksen hierarkkinen rakentuminen. ....	90
Liite 8: Karin opetuksen hierarkkinen rakentuminen. ....	91

# 1 KÄSITTEET MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Matematiikan osaamisen tarve on tämän päivän yhteiskunnassa lisääntynyt. Peruslaskutaitojen hallinnan lisäksi tarvitaan myös arkielämän matematiikan taitoja ja sovelluskykyä. (Korhonen 2006, 190.) Käsitteiden ymmärtäminen on keskeinen tekijä matematiikan oppimisessa ja niiden omaksuminen vaikuttaa merkittävästi kokonaisvaltaiseen suoriutumiseen matematiikassa. Vaikka uuden asian esittelyyn ja harjoitteluun oppitunneilla liittyviä tutkimuksia on aiemminkin tehty, opetuksessa rakentuvia konkreettisia käsitteiden hierarkioita ja niiden muodostumista on tutkittu vain vähän (ks. esim. Hiebert ym., 2003). Opettajien omaa ymmärrystä opetettavia käsitteitä kohtaan ei ole juurikaan tutkittu, vaikka tämä vaikuttaa merkittävästi opetusmenetelmien valintaan (Griffin ym. 2009, 321).

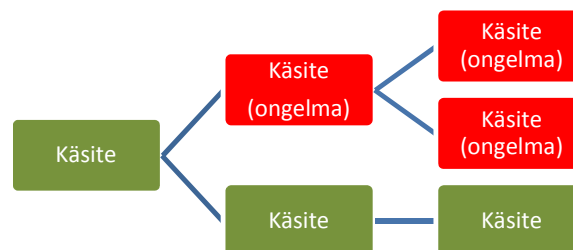
Eritoten heikko koulumenestys matematiikassa on runsaasti mielenkiintoa herättävä tutkimusaihe (Moran 2011, 2). Arviolta 3-6%:lla kouluikäisistä lapsista on oppimisvaikeuksia matematiikassa. Jos mukaan otetaan vielä ne oppilaat, joiden opetusta ei matematiikassa ole eriytetty vaikeuksista huolimatta, on määrä suurempi. (Bull & Espy 2001, 93.) Tutkimustrendin mukaisesti vaikeudet matematiikassa on aina mielletty niille oppilaille, jotka ovat matemaattisilta kyvyiltään heikkoja (Mazzocco & Meyer, 2003; Watson & De Geest, 2005). Bullin ja Espyn (2001, 94) mukaan kyseisen seikan myötä matemaattisia oppimisvaikeuksia on tutkittu runsaasti juuri niiden oppilaiden kohdalla, jotka kamppailevat matemaattisissa toimintatavoissaan ja kognitiivisissa prosesseissaan.

Matematiikan oppimisvaikeuksia tarkasteltaessa on kuitenkin tärkeää ottaa huomioon myös opetuksellinen näkökulma. Griffinin, Jitendran ja Leaguen (2009, 319) mukaan on merkittävää tutkia, kuinka oppilaat muodostavat matemaattisia käsitteitä omien toimintatapojensa kautta ja miten suuri merkitys opetuksella on kyseisissä prosesseissa. Allsopp, Lovin, Green ja Savage-Davis (2003, 308) korostavat sitä, kuinka jokin ongelma opetuksessa tai opetuksen sisällössä voi tehdä oppimisesta haastavaa, ja siksi opettajan on pohdittava tätä laadukkaamman opetuksen takaamiseksi. Lähestymistavan mukaisesti ajatus oppimisvaikeudesta yksilön ongelmana jää taka-alalle ja tutkimuksen keskiöön nousee opettajan pedagogiikan seurauksena syntyvä vaikeus matematiikassa.

Onkin todettu, että oppimisen laatuun vaikuttaa muun muassa opettajan pätevyys selittää termejä ja käsitteitä sekä tarjota oppilaille monipuolisesti esimerkkejä matemaattisista käsitteistä (Griffin ym. 2009, 320).

Edellä mainittujen tulosten takia yksilön vaikeuksien ja diagnosoinnin rinnalla tulisi tutkia opetusta. Tutkimus on olennaista, jotta oppimista voidaan ymmärtää kokonaisvaltaisemmin ja näin ollen parantaa (Griffin ym. 2009, 320; Hiebert ym., 2003). On osoitettu, että matematiikassa kommunikaatioon ja interaktioon luokassa perustuvat opettaminen ja oppiminen vaikuttavat toisiinsa (Griffin ym. 2009, 320; Zolkower & Shreyar, 2007). Lindgrenin (2004, 386) mukaan tutkimuksen tulisi keskittyä myös opettajan asenteisiin matematiikkaa kohtaan ja tämän ajatuksiin siitä, kuinka kyseistä oppiainetta tulisi opettaa. Opettajan asenne opetusta kohtaan on ratkaisevassa asemassa matematiikan oppimisen kannalta. Opettajan omat ajatusmallit vaikuttavat siihen, mitkä sisällöt tämä valitsee opetettavaksi, kuinka opetus organisoidaan ja millainen on tämän oma rooli matematiikan opettajana.

Käsitteiden rakenteen tutkimus antaa viitteitä siitä, tulisiko oppilaan vaikeuksien ilmetessä siirtyä opetuksessa taaksepäin. Syitä oppimisen haastavuudelle ei etsitä uudesta opetettavasta asiasta, vaan tarkastellaan, kuinka oppilas on rakentanut perustukset opetettavalle asialle. Oppimista arvioitaessa tarkastellaan, onko kaikki aikaisemmin opetetut käsitteet opittu uuden asian oppimisen edellyttämällä tavalla. Seuraava kuvio mallintaa sitä, kuinka oppilaan vaikeus oppia yksi matemaattinen käsite vaikuttaa seuraaviin hierarkian portaisiin.



KUVIO 1. Esimerkki käsitteiden hierarkkisesta rakentumisesta ja ongelmasta hierarkian portaalla

Tämä tutkimus on toteutettu osana laajempaa MUST-projektia (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen tausta, Björn & Vehkakoski 2012, käsikirjoitus tekeillä) joka tarkastelee matematiikan oppituntien luokkahuonevuorovaikutusta sosiokulttuurisesta näkökulmasta. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, esiintyykö yläkoulun matematiikan opetuksessa käsitteiden hierarkioita ja jos esiintyy, niin millaisia ne ovat. Tarkoituksena on keskittyä kuvaamaan, kuinka käsitteiden hierarkiat rakentuvat opetuksessa ja kuinka opettajan koulutustausta ja kokemus mahdollisesti vaikuttavat hierarkioiden muodostumiseen ja ilmenemiseen.



## **2 KÄSITTEIDEN HIERARKKINEN RAKENTUMINEN JA MATEMATIIKAN OPETUS**

Käsitteiden ymmärtämisen syventäminen on toinen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) vuosiluokille 6-9 esitetyistä matematiikan ydintavoitteista. Käsite on fyysisestä todellisuudesta riippumaton eli universaali. Tämä tarkoittaa sitä, että monilla käsitteillä ei ole vastinetta ulkoisessa fyysisessä todellisuudessa. (Syrjälä ym. 1994, 117.) Stovanovan mukaan (2008, 19) käsitteeseen kuuluu eri sääntöjä muun muassa symboleihin ja laskutapoihin liittyen. Käsitteillä on järjestelmällisiä suhteita toisiinsa nähden ja tällaista käsitteiden välistä suhdetta kutsutaan hierarkiaksi. Hierarkiassa käsitteet voivat rakentua joko tasoittain, luokittain tai rinnakkain. Hyvin järjestäytynyt tieto tuottaa parhaimmillaan selkeän käsitteiden hierarkian, joka voi laajentaa yksilön tietoutta uusia asiasisältöjä opittaessa. (Coley ym. 2004, 218-219.)

Usein matematiikan opettajat keskittyvät opettamaan ongelmanratkaisussa tarvittavia prosesseja ja kaavoja. Tässä yhteydessä pitäisi muistaa myös kerrata ja käyttää niitä käsitteitä, joihin kyseiset työkalut perustuvat. Opetustyyli, joka perustuu muistamiseen ja rutiineihin, edellyttää tällöin oppilailta käsitteiden käytön osaamista ennen kuin heillä on varsinaista kokemusta siitä. (Marshall, 2006.) Vamvakoussi ja Vosniadou (2004, 56) kuvailevat tietoa pikemminkin prosessina, jossa yksilö on jatkuvasti osallisena, kuin pelkästään hankittavana tuotteena. Olisi siten tärkeää, että oppilaan kokemukset ja esikäsitteet yhdistettäisiin matematiikan abstraktiin järjestelmään. Tällöin oppilaan on mahdollista omaksua matemaattisia käsitteitä ja rakenteita kokonaisvaltaisemmin. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 2004.)

### **2.1 Matemaattisen käsitteen oppiminen ja esikäsitteet**

Käsitteellä viitataan matemaattisen konstruktion viralliseen muotoon ja sen teoreettiseen ilmaisuun. Käsitys tai ymmärrys puolestaan tarkoittaa käsitteen pohjalta muodostuneiden sisäisten assosiaatioiden ja representaatioiden joukkoa. (Sfard, 1991.) Käsitys on kokemuksen ja ajattelun avulla muodostettu kuva jostain ilmiöstä, jolla luomme maailmakuvaa (Coley ym. 2004, 218; Syrjälä ym. 1994, 117). Käsitteet

muodostavat hierarkioita, mikä tarkoittaa niillä olevan järjestelmällisiä suhteita toisiinsa nähden (Coley ym. 2004, 218). Oppilaiden muodostamat esikäsitukset ja niiden vaikutus matemaattisten käsitteiden oppimiseen on ollut useiden tutkimusten fokuksessa (Panasuk, 2010). On tutkittu, kuinka käsitteiden oppiminen perustuu yksilön kognitioon ja kuinka matematiikan opettaja voi täten tehostaa käsitteen oppimista hyödyntämällä oppijan aiempaa kokemusmaailmaa opetuksessaan (McGowen & Tall 2010, 169).

Matematiikan oppimisessa korostuu yhteisten sopimusten omaksuminen. Uuden asian oppiminen tarkoittaa muutosta vanhassa tietorakenteessa. Näihin muutoksiin ja uuden oppimiseen vaikuttaa vahvasti oppilaiden omat ennakkokäsitykset ja mahdolliset väärät käsitykset. Oppiminen edellyttää yksilöltä omien käsitysten muuttamista yleisesti hyväksytyiksi ja tieteellisesti päteviksi. (McGowen & Tall 2010, 170; National Research Council 2004; Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 57.) Matematiikan oppiminen ei ole ainoastaan prosessi, johon yksilö osallistuu. Matematiikan oppiminen on myös tietoa, joka syntyy monimutkaisessa sosiaalisessa kanssakäymisessä. Oppiminen tapahtuu matematiikassa pääsääntöisesti asiantuntijan johdolla ja oppisisällöt ovat objektiivisia, usein käytännönelämästä irrallisia. Opetuksessa tulisi kuitenkin aina, kun se on mahdollista, pyrkiä tarkoituksenmukaiseen ongelmanratkaisuun, jonka konteksti voidaan liittää myös oppijan arkeen. (Jayanthi ym. 2008, 2-3.)

Kun matematiikan opetuksessa otetaan huomioon oppijan oman ajatteluprosessin luonne, voidaan tukea matemaattisten käsitteiden rakentamista sekä niiden ymmärtämistä. Jos opetus liitetään oppilaan omaan kokemusmaailmaan, voidaan käsitteiden oppimista tehostaa. Opetuksen ei siis tulisi passivoida oppilaita, etenkin matematiikan opetuksessa, kun oppilaalta vaaditaan taitoa pystyä jäsentämään uutta tietoa ja symboleita. (Allsopp ym. 2003, 315; Arzarello ym. 2005, 55–57.) Zain, Rasidi ja Abdin (2012, 324) korostavat sitä, kuinka opetuksen tulisi rohkaista oppilaita yhdistelemään uutta tietoa aiemmin opittuun ja näin johdattaa oppilaita matemaattiseen ajatteluun, jossa käsitteet on yhdistetty loogisiksi hierarkioiksi. Opetusprosessin tulisi perustua siihen ajatukseen, että oppija huomaa aiemmassa tietorakenteessaan ristiriidan, joka hänen on korjattava (National Research Council 2004).

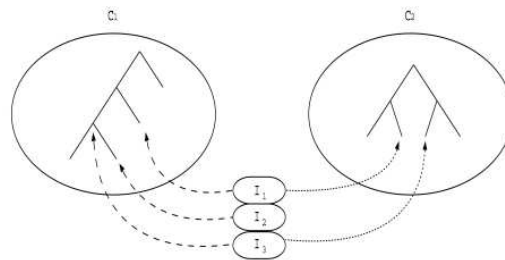
Opetuksen suunnittelijat usein keskittyvät oppimisen niin sanottuihin positiivisiin puoliin, jolloin opetuksen keskiössä ovat käsitteet, joita oppija tarvitsee tulevia oppisisältöjä varten. Voidaan puhua oppisisällön seuraavasta tasosta. Esikäsityksiä huomioon otettaessa tulisi kuitenkin muistaa myös mahdolliset ”negatiiviset” oppimiseen vaikuttavat tekijät – oppilaalla voi olla myös ristiriitaisia esikäsityksiä uudesta asiasta. Tällöin uuden asian omaksuminen ja esikäsitysten muuttaminen voi olla haastavampaa ja vaatia enemmän aikaa. (McGowen & Tall 2010, 170.)

## **2.2 Käsitteiden hierarkioiden opettaminen**

Käsitteiden universaalius on matematiikassa hyvin yleistä, mikä tarkoittaa käsitteiden ja kaavojen mahdollista oppijan ulkomuistin varaan perustumista. Matemaattisessa kaavassa voidaan nähdä olevan kyse tietyn yhteisön sopimuksesta ja sen käyttöön liittyy joukko yhteisiä ehtoja. (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 57; Voutilainen ym. 1991; Syrjälä ym. 1994, 117.) Tämänkin takia opetussuunnitelmassa tulisi keskittyä tiettyjen avainkäsitteiden ja niiden välisten mielle yhtymien syvempään ja laajempaan selittämiseen ja ymmärtämiseen. Opetuksessa tulisi ottaa huomioon niin matematiikan maailman sisällä tapahtuva kuin arkitodellisuudenkin huomioiva opetus. Näin on todennäköisempää, että käsitteiden väärinymmärryksiltä ja –yhdistelyiltä vältytään. (Allsopp ym. 2003, 315; Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 64.) Zain ja kumppanit (2012, 319) esittävätkin useita opetusmenetelmiä, kuten induktiivinen oppiminen ja oppilaskeskeinen oppiminen, joita opetuksessa toteuttamalla käsitteet voisi paremmin yhdistää oppijan arkitodellisuuteen.

Matemaattisten käsitteiden hierarkioiden rakentumista tarkasteltaessa on kokonaisvaltaisen oppimisen kannalta ensiarvoisen tärkeää, että hierarkian jokainen taso on opittu perusteellisesti. Oppilaan tulee ymmärtää käsitteiden välisiä suhteita sekä niiden vaikutuksia laskuoperaatioihin, jotta matemaattinen perustelu on mahdollista (Griffin ym. 2009, 320). Oppimisen myötä mieleen palauttamisesta tulee oppilaalle helpompaa ja uutta opetettavaa asiaa voidaan omaksua loogisesti jo aiemmin opitun varaan. Oppilas kykenee luomaan sulavia ajatusyhteyksiä, kun opetus ottaa oppijan oman kokemusmaailman huomioon (Ediger 2012, 235). Griffin ja muut (2009, 320)

toteavat laadukkaan opetuksen, jossa käsitteet rakentuvat hierarkkisesti, saavan jo itsessään sosiokonstruktivistista oppimiskäsitystä tukevia piirteitä. Kuviossa 2 esitellään Ichisen ja kumppaneiden (2001) malli käsitteiden hierarkkisesta muodostumisesta. Samankaltaista moniportaista hierarkkista mallintamista hyödynnetään myöhemmin tutkimuksen menetelmäosiossa sisällönanalyysin tukena.



KUVIO 2. Kaksi käsitteiden hierarkkia C1 ja C2 sekä kolme käsitteiden muodostukseen vaikuttavaa informaatiolähdettä I1, I2 ja I3 (Ichise ym. 2001, 101).

Kuvio 2 havainnollistaa matemaattisten käsitteiden moniulotteista rakentumista useille käsitteiden tasoille. Matemaattisten käsitteiden hierarkkinen jäsentyminen auttaa oppijoita omaksumaan yksittäisiä käsitteitä paremmin ja edelleen ymmärtämään niiden välisten suhteiden luonnetta. Tämän takia on tärkeää, että opettaja suunnittelee opetuksen huolellisesti. Parhaimmillaan opetus tekee oppijalle mahdolliseksi tutkia käsitteiden välisiä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia. (Stoyanova 2008, 17, Zain ym. 2012, 319.)

On tutkittu, että visuaalisten mallien hyödyntäminen käsitteiden hierarkioita opettaessa on hyödyllistä. Ensinnäkin se on tietylle oppimistyyliä ominaista. Toiseksi, pienen tekstmäärän käyttö mahdollistaa yleisesti käsitteen helpomman omaksumisen. Ennen kaikkea visuaalinen esittäminen havainnollistaa eri käsitteiden väliset suhteet. (Stoyanova 2008, 18.) Jos oppilas ei esimerkiksi ymmärrä jotain monimutkaista matemaattista käsitettä, on opetusmenetelmällä mahdollisesti suuri merkitys. Opettajan tulisi aina pyrkiä tuomaan opetukseen konkreettisempia opiskelutapoja, joiden avulla pienin askelin oppilas oppii laajemman ja

monimutkaisemman abstraktin käsitteen. Oppilaille tulisi olla mahdollista pystyä yhdistämään opetetut käsitteet suurempaan opetettavaan aihealueeseen, toisin sanoen matemaattisten käsitteiden hierarkiaan. (Ediger 2012, 235-236.)

### **2.3 Kognition yhteys käsitteen oppimiseen**

Käsitteiden avulla muodostettu käsitys voidaan nähdä konstruktiona, jonka varassa ihminen edelleen jäsentää uutta asiaa koskevaa tietoa (Syrjälä ym. 1994, 117). Aikaisemmissa osioissa osoitettiin, että käsitteet rakentuvat hierarkkisesti toisiinsa nojautuen. Täten on merkittävää tutkia, kuinka puute käsitteen ymmärtämisessä ja siihen vahvasti liittyvä kognitio voi aiheuttaa vaikeuksia matematiikassa – jopa matemaattiseen oppimisvaikeuden. Matematiikka oppiaineena sisältää useita eri ulottuvuuksia ja sen hallinta vaatii monia kognitiivisia prosesseja (Service & Lehto 2005, 242).

Kognitio tarkoittaa tiedon vastaanoton, käsittelyn ja varastoinnin erilaisia muotoja. Matemaattisessa kognition tutkimuksessa keskitytään muun muassa muistin prosessien käyttöön matemaattisten ongelmien ratkaisussa. Kognitiivis-neuropsykologiset matematiikan oppimista tutkivat suuntauksat jaetaan kahteen, toisistaan poikkeaviin teoreettisiin malleihin. Toinen on modulaarinen malli, joka korostaa toisistaan riippumattomia alaprosesseja. Toinen malli korostaa toisiinsa assosiativisesti liittyviä prosesseja, ja sitä kutsutaan integroiduksi malliksi. (Räsänen & Ahonen 2005, 210.) Tässä tutkimuksessa on piirteitä integroidusta mallista, minkä periaatteet ovat samankaltaisia sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen sekä käsitteiden hierarkkisen rakenteen kanssa.

Matematiikassa korostuu jatkuvasti se, kuinka hyvin aiemmat strategiat ja niiden käyttö on opittu (Griffin ym. 2009, 320). Tämä tarkoittaa sitä, että oppiminen helpottuu, kun uusi tieto opetetaan oppilaan kokemusmaailmaa ja aiempia tietorakenteita hyödyntäen. Matemaattinen ongelmanratkaisukyky paranee, kun oppilaan tietoisuus laskutoimituksista ja käsitteistä kehittyy (Morales, Shute & Pellegrino, 1985). Kaikkeen tarkoituksenmukaiseen oppimiseen liittyy objekti eli oppimisen kohde sekä tapa, millä

se omaksutaan (Patton 2001, 484). Tämä liittyy myös matemaattisten käsitteiden oppimiseen, kun abstrakti asia tulee käsitteellistää, minkä jälkeen sen opettaminen ja oppiminen on mahdollista koulussa. Kieli vaikuttaa oppimiseen myös siksi, että oppija käyttää sisäistä puhetta omaksuessaan uutta tietoa (Zain ym. 2012, 321).

Kognitiivisista toiminnoista mieleen palauttaminen on olennainen taito käsitteiden hierarkioita muodostettaessa. Jotta mieleen palauttaminen on mahdollista, tulee oppilaan kyetä useisiin kognitiivisiin prosesseihin, kuten työmuistin sujuvaan käyttöön ja käsitteenmuodostukseen (Moran 2011, 15). Oppilaan vaikeus palauttaa jo aiemmin opittua mieleen vaikeuttaa matematiikan oppimista.. Tällöin kerran onnistuneesti opittu tieto voidaan muistaa väärin eli palauttaa mieleen virheellisesti, mikä johtaa virheisiin ja ristiriitoihin laskutoimituksissa. (Allsopp ym. 2003, 313.)

Muistin vaikutusta oppimisvaikeuksiin on tutkittu paljon (Swanson, Cochran, & Ewers, 1990; Swanson & Saez, 2003). Vaikka oppilailla ei olisi ongelmia aistitoimintojensa kanssa, voi heille silti olla haastavaa tulkita näkemäänsä ja kuulemaansa. Oppilas voi esimerkiksi nähdä matemaattisen ongelman luokkahuoneen taululla ja pyrkii kirjoittamaan numerot, symbolit ja kirjaimet vihkoonsa muistia hyödyntäen. Oppilas yrittää kirjoittaa matemaattisen tehtävän paperille, mutta ei kykene kopioimaan sitä ilman virheitä. Tämä johtuu häiriöstä oppilaan keskushermostossa, jonka tehtävänä on vastaanottaa visuaalinen viesti ja muuttaa se motoriseen muotoon. Sama ongelma voi ilmetä myös auditiivisen informaation prosessoinnissa. (Allsopp ym. 2003, 312.) Zain ym. (2012, 320) kuvailevat oppimista aktiivisena prosessina, joka vaatii oppijalta sensoristen ärsykkeiden ja niihin pohjautuvien käsitteiden tunnistamista. Muisti on jatkuvasti osana oppimisprosessia. Esimerkiksi aritmeettiset tiedot ovat tallentuneet oppijan pitkäkestoiseen muistiin (Service & Lehto 2005, 242).

Oppimisessa voidaan puhua myös siirtovaikutuksesta eli siitä, kuinka uutta opittua tietoa pystytään liittämään aiempiin tietorakenteisiin ja tämän myötä soveltamaan tietystä asiayhteydestä opittua myös muihin asiayhteyksiin. Siirtovaikutuksen määrä riippuu siitä, kuinka paljon aiemmin opitun ja uuden asian välillä on päällekkäisyyttä.

Se, millaisia käsitteellisiä kartoja muodostetaan, riippuu asioiden yhteisien kognitiivisten elementtien määrästä. (National Research Council 2004.)

Metakognitioon puolestaan liittyy oppilaan kyky omaksua toimivia oppimisstrategioita, arvioida niiden tehokkuutta ja muuttaa niitä tarpeen vaatiessa. Oppilas, jolla on vaje metakognitiivisissa kyvyissään, ei välttämättä edes tiedosta mahdollisuutta hyödyntää tiettyjä strategioita matemaattisen tehtävän ratkaisemiseksi. Ongelmat metakognitiossa tulevat esille etenkin silloin, kun oppijan odotetaan käyttävän jo oppimiaan strategioita uusien käsitteiden yhteydessä. (Allsopp ym. 2003, 314.) Opetuksessa tulisi rohkaista oppilaita etsimään itselleen sopivia tapoja ongelmanratkaisuun (Ediger 2012, 236). Tällöin tehtävä- ja aihekohtainen strategian soveltaminen helpottuisi.

Ediger (2012) toteaa opettajien käyttämien keinojen ja mallien uusia asioita opetettaessa olevan vähemmän tutkittuja aiheita tarpeellisuudestaan huolimatta. Esimerkiksi opettajan tukeutuminen pääasiassa vain yhteen aistiärsykkeeseen kuten näköön, uutta käsitettä opettaessaan, voi hidastaa oppimista. Oppilaat, joilla on vaikeuksia kognitiivisessa prosessoinnissa, eivät välttämättä kykene omaksumaan opetuksen sisältöä. Tästä seuraa puutteita käsitteiden kokonaisvaltaisessa oppimisessä. (Allsopp ym. 2003, 312.)

### **3 SOSIOKONSTRUKTIVISMI MATEMATIIKAN OPETUKSESSA**

Oppijalla on usein yläkouluvaiheessa selkeät esikäsitteet numeroista, huolimatta siitä minkä tasoinen oppija on kyseessä. Oppija on muodostanut omat oletuksensa ja tietyt pääsäännöt matemaattisiin symboleihin liittyen. On osoitettu, että jopa ennen minkäänlaista opastusta lapset muodostavat alustavat käsityksensä numeroista, jotka perustuvat heidän kokemuksiinsa arkielämän numeroista. (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 59.) Aivot pyrkivät yhdistämään uutta tietoa vanhaan, minkä takia on hyödyllistä pohtia yhteyksiä oppilaan kokemusmaailman ja matemaattisten käsitteiden välillä. Myös ihmisen synnynnäiset biologiset mallit vaikuttavat merkittävästi siihen, kuinka käsitteellistämme ja jäsenämme asioita. Näin ollen sosiokonstruktivistinen, erilaisten oppilaiden kokemusmaailmat huomioonottava opetus, on väylä tehokkaampaan matematiikan oppimiseen. (Arzarello ym. 2005, 64; Ediger 2012, 235; McGowen & Tall 2010, 171; Zain ym. 2012, 321.)

#### **3.1 Sosiokonstruktivistisen opetuksen periaatteet**

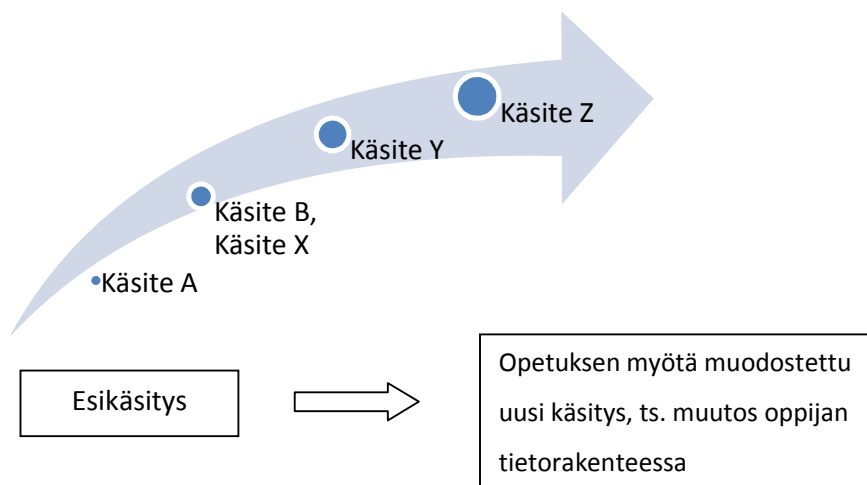
Jos opetuksen päätavoitteena on kokeiden läpäisy, kyseinen tavoite ei tue tiedon soveltamista tulevaisuuden työhön tai arkeen liittyen. On herätty siihen, että matematiikan opetuksen päätavoitteen tulisi olla oppilaille kestävien ja sovellettavissa olevien ajatusmallien opettaminen, jotka pohjaavat heidän omaan kokemusmaailmaansa. (The Economist 2014.) Leino (2004, 20) kirjoittaa siitä, kuinka sosiokonstruktivismiin osaltaan vaikuttaa matematiikan oppimiseen ja opetukseen. Konstruktivismiin hengessä vaaditaan matematiikan opetusta, joka on ymmärtämiseen pyrkivää. Uusi käsite ja asia tulevat ymmärrettäviksi vasta sitten, kun ne tulkitaan aikaisemmin rakentuneiden käsityksien ja tietojen avulla. (Puolimatka 2002; Siljander 2005; Yrjönsuuri 2004, 111-112.)

Käsitteiden opetusta on tärkeää tutkia, koska sen avulla voidaan todentaa oppimisvaikeuksien perimmäisiä syitä. Kyse ei välttämättä olekaan yksilön vaikeudesta



oppia, vaan puutteellisesta opetuksesta jossain käsitteiden hierarkian portaan vaiheessa. Ausubelin, Novakin ja Hanesianin (1968) mukaan tärkein opettamiseen vaikuttava tekijä on tiedostaa, mitä oppija on jo oppinut. Näin voidaan parantaa opetuksen laatua. Ongelma käsitteiden hierarkian alemmilla portailla johtaa ongelmiin myös ylemmillä portailla.

Zain ja kumppanit (2012, 320) toteavat oppimista tapahtuvan vasta silloin, kun oppija kokee uuden asian merkitykselliseksi. Sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan tieto ei ole opiskelijan ulkopuolella, vaan opiskelija rakentaa eli konstruoi tietoa itse sosiaalisessa konteksteissa ja vuorovaikutussuhteissa (Kauppila 2007, 47; Zain ym. 2012, 319). Kyseinen näkemys tarjoaa opettajalle mahdollisuuden kehittää oppilaan sisäistä motivaatiota ja edistää mielekästä oppimista samalla korostaen oppilaan omaa aktiivisuutta oppijana ja tiedon luoja (Kauppila 2007, 48). Oppimisen keskiössä on oppilaan sisäinen reflektio, jolloin opittu asia rakentuu oppilaan omien tietojen ja kokemusten varaan (Kauppila 2007, 51; McGowen & Tall 2010, 170; Zain ym. 2012, 319). Tämän takia opettajan on hyvä olla tietoinen oppilaiden esikäsitteistä. Kuvio 3 kuvaa uuden käsitteen muodostamista, kun se perustuu oppijan esikäsitteeseen. Kuviossa oppiminen liikkuu käsitteen tasolta toiselle, mikä kuvaa myös tämän tutkimuksen hypoteesia. Hypoteesin mukaan käsitteet rakentuvat opetuksessa hierarkkisesti.



KUVIO 3. Esikäsitteeseen perustuva opetus, joka tapahtuu portaittain kohti käsitteen oppimista (mukaillen Syrjälä ym. 1994, 120).

Matematiikan laadullisella oppimisella tarkoitetaan yksilön tietyn alueen tiedollisen rakenteen muuttumista. Oppimisen tuloksena skeemat ja sisäiset mallit muuttuvat ja rakentuvat uudelleen. (Yrjönsuuri 2004, 111; Zain ym. 2012, 319.) Zain ja muut (2012, 320) korostavat sitä, kuinka opetuksessa tulisikin yhä enemmän pyrkiä rohkaisemaan oppilasta itsenäiseen ajatteluun ja pohtimaan käsitteiden välisiä suhteita. Kun oppilas kiinnittää huomiota spontaanisti esimerkiksi määrällisiin suhteisiin, hän harjoittelee samalla määrällisten suhteiden tunnistamista niin matematiikan tunnilla kuin arkisissakin tilanteissa (McMullen 2014).

Juuri arkiset tilanteet muodostavat oppijalle tiettyä kontekstia, jossa hän tarkastelee oppimaansa. Kyseinen konteksti koostuu kotitaustasta sekä muista koulun ulkopuolisista tekijöistä, kuten median vaikutuksesta sekä harrasteryhmistä. Oppilaat kuitenkin rakentavat tätä oppimisen kontekstia myös itse. He tuovat kouluun ja luokkaan mukanaan ympäröivää kulttuuria, joka vaikuttaa opetuksen tavoitteisiin. (Patrikainen 2012, 57; Uljens 1997, 83-84.)

Tämä kulttuuri tulisi huomioida opetuksessa niin, että oppija kykenee rakentamaan uutta tietoa jo muodostuneisiin konteksteihinsa tukeutuen. Oppilaan turvautuessa ulkolukuun on matemaattisten symboleiden väärinkäyttö todennäköisempää. Opetuksessa tulisi pyrkiä tekemään oppimisesta yksilölle merkittävää siten, että oppisisällöt liitetään oppijan kokemuksiin ja käytäntöön. (Arzarello ym. 2005, 57; Vamvakoussi & Vosnidou 2004, 57.) Koska opetus vaikuttaa oppimiseen, on yksilön kognition lisäksi myös pedagogiikalla merkittävä rooli siinä, kuinka matikkaa opitaan. Oppilaiden tehtävänä on saada opetuksesta selvää ja konstruoida uusi tapa ymmärtää asioita. (Barnes, 2008.) Vuorovaikutus opettajan kanssa edistää tietorakenteiden oppimista, koska hän edustaa pitemmälle jäsenyneitä tietorakenteita eli käsityksiä, kuin oppilaat (Syrjälä ym. 1994, 118). Se, kuinka hierarkkisesti opettaja rakentaa opetustaan vaikuttaa siihen, millaisia käsitteiden hierarkioita opetuksessa ilmenee.

### **3.2 Matemaattinen oppimisvaikeus sosiokonstruktivismin näkökulmasta**

Ihminen on ajatteleva ja kehittyvä olento, joka taltioi ja tulkitsee uutta informaatiota läpi elämänsä. Rakennamme jatkuvasti kuvaa siitä sosiaalisesta ja fyysisestä maailmasta, jonka osana elämme. Tätä prosessia kutsutaan oppimiseksi. (Rauste-von Wright 2003, 50.) Kognitiivisen psykologian piirissä ihminen nähdään tiedon aktiivisena käsitteijänä, jolloin oppiminen ei ole pelkkä ärsyke-reaktio -ketju, vaan siinä korostuvat havaitseminen, muistaminen, ajatteleva ja päätöksenteko (Rauste-von Wright 2003, 51–52; 160–161). Lehto esittää artikkelissaan (2005), kuinka opetuksen tutkimus ja psykologinen tutkimus osoittavat oppimisen olevan vahvasti sidoksissa myös muun muassa oppijan henkilökohtaisiin ominaisuuksiin, kuten ikään, persoonallisuuden piirteisiin, kognitiivisiin kykyihin ja sosioekonomiseen taustaan.

Oppimisessa oppilaasta tulisi passiivisen oppijan sijaan tehdä aktiivinen osallistuja, joka kognitiivisen osallistumisen lisäksi voi hyödyntää oppimisessa omaa subjektiivisuuttaan ja näin ollen saavuttaa syvempää ymmärrystä käsitteistä (Jayanthi ym. 2008). Mitä yksinkertaisimmalta jokin matemaattisten käsitteiden hierarkia vaikuttaa, sitä todennäköisempää ovat sen virheelliset assosiaatiot oppijan oman kokemusmaailman kanssa. Mitä nuorempi oppija on kyseessä, sen yleisempää miellejohdon virheellisyys on, koska yksinkertaiset hierarkiat ovat lähellä lapsen omia vaistonvaraisia teorioita. (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 65.)

Usein oppilaan väärinkäsitykset johtuvat oppilaan yrityksestä muodostaa synteettisiä malleja käsitteistä. Tällöin oppija pyrkii rinnastamaan uutta tietoa heillä jo valmiiksi oleviin, mutta yhteen sopimattomiin tiedon rakenteisiin. Onkin todettu, että ongelmat käsitteiden hierarkioiden muodostamisessa ovat yksi pääsyy oppimisvaikeuksiin muun muassa murtolukujen alueella. (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 58-60.) Ongelmat oppilaan käsitteiden hierarkian muodostuksessa voivat johtaa laajempaan matemaattiseen oppimisvaikeuteen. Matemaattinen oppimisvaikeus voidaan käsittää esimerkiksi puutteena laskutaidossa: vaikeuksia voi olla luku- ja numerojärjestelmän ymmärtämisessä, peruslaskutoimitusten periaatteiden oppimisessa tai laskutaitojen

vähittäisessä automatisoitumisessa. (Räsänen & Ahonen 2002, 191; Linnanmäki 2004, 241; Das & Janzen 2004, 191-195.)

Matemaattinen oppiminen on yhteydessä verbaalisiin ja visuo-spatiaalisiin kykyihin. Myös muistin on todettu vaikuttavat matematiikan oppimiseen. Tietous numeroista ja peruslaskutoimituksista on edellytys työmuistin hyödyntämiselle. Matemaattiset oppimisvaikeudet johtuvat usein semanttisen muistin ja mieleen palauttamisen puutteellisuudesta. (Räsänen & Ahonen 2002, 193; Das & Janzen 2004, 192; Swanson & Jerman 2006, 249.) Kokemukset matematiikasta sekä itsestä matematiikan oppijana vaikuttavat myös suuresti kyseisen aineen oppimiseen ja motivaatioon (Huhtala & Laine 2004, 320). Oppilas, jolla on matemaattinen oppimisvaikeus, on matematiikan tunnilla passiivinen, kokee asioiden kognitiiviset vaatimukset kuormittaviksi ja usein käyttää rajallisia ja tehottomia laskustrategioita. Oppimisvaikeuden myötä oppilaan edistyminen on myös jatkuvasti ikäovereitaan hitaampaa. (Griffin ym. 2009, 320.)

Suuri ongelma matematiikan opetuksessa on opettajien pyrkimys edetä aihealueesta toiseen liian nopeasti. Tällöin oppilaan voi olla vaikeaa sisäistää kaikki uudet asiasisällöt, käsitteet ja yleistyksset, jotka on juuri opetettu. Opettajien tulisikin rytmittää opetustaan niin, että oppilaat voivat tuntea hallitsevansa opetetut asiat. (Ediger 2012, 235.) Oppiminen vaatii aikaa – käsitteitä täytyy pohtia useaan otteeseen ja järjestää niitä yhä uudelleen, kunnes luodut skeemat ovat uusien käsitteiden myötä eheitä (Zain ym. 2012, 320). Myös oppilaiden aktiivisen opetukseen osallistamisen on tutkittu tukevan heidän oppimistaan passiivisen vastaanottajan roolin sijaan (Ediger 2012, 235).

Matematiikan oppiminen voi olla vaikeaa myös oppilaan tarkkaavuuden häiriön vuoksi. On mahdollista, että paljon tärkeää tietoa jää rekisteröimättä tai oppilas ei huomaa olennaisia tekijöitä tehtävää ratkaistessaan. Oppilaat kuitenkin usein keskittyvät tunnilla niihin asioihin, jotka stimuloivat heidän aistejaan. (Allsopp ym. 2003, 310.) Jo tämänkin takia opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota oikeanlaisiin ärsykkeisiin. Keskittymisvaikeuksien takia oppilaalla saattaa jäädä laskun kannalta jokin olennainen tekijä huomaamatta. Voidaan todeta, että juuri tämän takia oppilaiden tietorakenteisiin

jää aukkoja. (Allsopp ym. 2003, 311.) Toisin sanoen tällöin käsitteiden hierarkian eri tasoissa ilmenee puutteita.

Oppija elää tällä hetkellä monimuotoisen informaatiotulvan ja arvomaailman keskellä. Opettaja on merkittävässä asemassa erottamassa oikean ja tarkoituksenmukaisen tiedon väärästä ja epäoleellisesta tiedosta. Oppilas, joka on itseohjautuva ja toimii pitkälti arkitietonsa varassa selviää tästä vaivalloisesti eikä saavuta riittävän syvää ymmärrystä. Opettajan tehtävänä on toteuttaa opetusta niin, että oppija kykenee jäsentämään ympäröivää maailmaa eri tieteenalojen tarjoamien käsitteiden ja menetelmien pohjalta. (Jussila 1999, 36-41.) Sosiokonstruktivistisen opetuksen myötä muun muassa opetettavan asian eli uuden käsitteen irrallisuus, oppilaan passiivisuus tunnilla tai esikäsitysten huomioimatta jättäminen voidaan parhaassa tapauksessa välttää. Sosiokonstruktivistisen opetuksen myötä edellä mainitut seikat eivät siten voi olla matemaattisen oppimisvaikeuden perimmäisinä syinä.

## **4 TUTKIMUKSEN TAVOITTEET JA TOTEUTUS**

### **4.1 Tutkimustehtävät**

Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, esiintyykö yläkoulun matematiikan opetuksessa käsitteiden hierarkioita ja jos esiintyy, niin millaisia ne ovat. Tarkoituksena on keskittyä kuvaamaan, kuinka käsitteiden hierarkiat rakentuvat opetuksessa ja kuinka opettajan opettajakokemus mahdollisesti vaikuttaa hierarkioiden muodostumiseen ja ilmenemiseen. Tutkimuksessa keskeistä on matematiikan opetuksen tutkiminen vahvasti luonnollisiin opetusprosesseihin ja -tilanteisiin liitettynä eli sellaisena kuin se käytännössä ilmenee.

Yksi tutkimukseni keskeisimmistä päämääristä on kuvata ja ymmärtää käsitteiden hierarkioiden muodostumista yläkoulun matematiikan opetuksessa eli niiden luonnollisessa kontekstissaan.

### **4.2 Tutkimusmenetelmät ja aineistonkeruu**

Alun perin tutkimuksen aineisto kerättiin videoimalla ja se muutettiin keskusteluanalyysin periaattein myös litteroituun muotoon. Tässä tutkimuksessa käytettiin kahta eri tutkimusmenetelmää. Ensimmäisenä tutkimusmenetelmänä käytettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysiä. Oppituntien litteraatit toimivat aineistona, joista sisällönanalyysin keinoin poimittiin kaikki matemaattiset käsitteet ja jatkettiin niiden luokitteluihin tutkimukselle merkittävällä tavalla. Luokitteluja tehtiin kaksi kappaletta, molemmat aineistolähtöisesti. Käsitteille luotiin kyseisissä analyysivaiheissa kuvauskategoriat.

Sisällönanalyysin avulla laskettiin myös tuntikohtaisesti käsitteiden ilmentymien määrät opetuksessa. Näiden kolmen analyysivaiheen lisäksi piirrettiin opettajittain kuviot, jotka ilmensivät käsitteiden hierarkista muodostumista opetuksessa. Tämä oli tarpeen, jotta rakenteelliset erot saatiin näkyville opettajakohtaisesti. Tämän jälkeen käsitteistä muodostuneita hierarkioita analysoitiin edelleen fenomenografian avulla. Näin saatiin

selville se, kuinka yläkoulun matematiikan opetuksessa ilmenee matemaattisten käsitteiden tasoittain rakentuminen. Hierarkioiden eroja analysoitiin edelleen. Viidennessä ja viimeisessä analyysivaiheessa opettajien kokemustaustat liitettiin hierarkkisten muodostumien rinnalle ja hierarkioiden rakentumista tarkasteltiin opettajakokemusten määriin peilaten. Seuraavaksi esitellään sisällönanalyysin ja fenomenografian periaatteet tutkimusmenetelminä, minkä jälkeen siirrytään aineiston keruuseen, analysointiin sekä eritellään vielä tarkemmin aineiston taustoja.

#### **4.2.1 Sisällönanalyysi**

Tutkimuksen menetelmäksi valikoitui sisällönanalyysi. Sisällönanalyysi pyrkii selvittämään ilmiöitä, joita teksteissä ei voi välittömästi havaita (Apo 1990, 62; Titscher ym. 2000). Sisällönanalyysi soveltuu syvemmän merkityksen tutkimiseen tekstin toimiessa analyysin lähtökohtana (Potter & Levine-Donnerstein 1999, 259). Sen avulla tutkittavasta ilmiöstä, tässä tapauksessa käsitteiden hierarkiasta, pystytään tekemään kuvaus yleisessä ja tiivistetyssä muodossa (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 23; Pietilä 1973; Potter & Levine-Donnerstein 1999, 260; Tuomi & Sarajärvi 2011, 103).

Sisällönanalyysi soveltuu tutkimukseen kirjoitetun kommunikaation analysointimenetelmäksi. Sen avulla voidaan tarkastella asioiden merkityksiä, seurauksia ja yhteyksiä. Sisällönanalyysin avulla voidaan muun muassa tutkia kommunikaation sisältöjä suhteessa kommunikaation tavoitteeseen, vertailla kommunikaation ja sen tiedon sisältämiä tiedon tasoja sekä kuvata kommunikaation sisällön painotuksia. (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 21–22.) Potter ja Levine-Donnerstein (1999, 259) kuvaavat analysointiprosessia työläänä, mutta sen myötä aineistosta on mahdollista tehdä hedelmällisiä löydöksiä. Sisällönanalyysin periaatteiden mukaisesti tutkimukseni perustuu maailmasuhteeseen, jossa oleellista on näkymättömän – tässä tapauksessa käsitteiden hierarkian – ymmärtäminen (Tuomi & Sarajärvi 2011, 104).

Sisällönanalyysin tarkoituksena on luoda tutkimusaineistosta teoreettinen kokonaisuus (Tuomi & Sarajärvi 2011, 95). Siinä on olennaista erottaa samanlaisuudet ja erilaisuudet tutkimusaineistosta sekä luokitella aineistoyksiköjä niiden merkitysten perusteella

(Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 23; Titscher ym. 2000, 58). Tuomen ja Sarajärven (2011) mukaan tutkimus ei rajoitu pelkästään sanojen ja sanontojen esiintymiskertojen laskemiseen, vaan keskittyy näiden sanojen ja sanontojen välisiin yhteyksiin. Tutkimuksessa kokonaisuuden luominen voi tapahtua aineistolähtöisesti, teorialähtöisesti tai teoriaohjaavasti. Tutkimusaineiston teorialähtöistä sisällönanalyysia voidaan kuvata myös Kyngäksen ja Vanhasen (1999, ss. 8–9) määrittämällä termillä strukturoitu analyysi.

Teorialähtöisen määritelmän mukaisesti aineistosta poimitaan niitä asioita, jotka sopivat käytössä olevaan analyysirunkoon. Analyysirunko hahmottuu tutkimustehtävän perusteella. Teorialähtöisessä sisällönanalyysissä aineiston luokittelu perustuu teoriaan, käsitejärjestelmään tai teoreettiseen viitekehykseen. Siinä analyysiä ohjaa jokin malli, teemat tai käsitekartta. (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 30; Titscher ym. 2000, 58–59; Tuomi & Sarajärvi 2011, 113.)

Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä ensimmäisenä tehdään tutkimustehtävän perusteella aineiston pelkistäminen, minkä jälkeen pelkistetyt ilmaukset kirjataan aineiston termein. Tämän jälkeen etsitään kyseisten ilmausten erilaisuuksia ja yhtäläisyyksiä. Ilmaukset luokitellaan ja samansisältöisistä luokista muodostetaan lopuksi yläluokkia. (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 26–29; Titscher ym. 2000, 58–59; Tuomi & Sarajärvi 2011, 108.) Tässä tutkimuksessa sisällönanalyysi on toteutettu aineistolähtöisesti.

Teoriaohjaavassa sisällön analyysissä puolestaan edetään tutkimusaineiston ehdoilla, mutta aineistolähtöisestä analyysistä poiketen luokitteluvaiheessa empiirinen aineisto liitetään teoreettisiin käsitteisiin. Tutkija poimii alkuperäisestä aineistosta ilmauksia tai asioita tietyn teorian mukaan. (Tuomi & Sarajärvi 2011, 117.)

Latvalan ja Vanhanen-Nuutisen (2003, 39–40) mukaan sisällönanalyysi voi parhaimmillaan lisätä tutkimuksen tiedonantajien tietoisuutta tutkittavasta asiasta. Tutkijan on tiedostettava kuinka mahdollinen tutkimuksen kohdejoukko vaikuttaa työhön sekä oma subjektiivisuutensa analyysiä tehdessään. Analyysi perustuu aina



aineiston sisältöön, mutta myös tutkijan omiin tarkastelukehysiin, skeemoihin. Sisällönanalyysistä voidaankin erottaa kaksi toteuttamistapaa: ensimmäisessä keskitytään itse tekstin rakenteisiin ja hahmoon, kun taas toisessa keskiöön nousevat tutkijan havainnot ja tulkinnat tekstin sisällöstä. (Potter & Levine-Donnerstein 1999, 259–261.)

#### **4.2.2 Fenomenografia**

Toisena tutkimusmenetelmänä toimii fenomenografia. Tieteenalana fenomenografia tutkii ympäröivän maailman ilmenemistä ja rakentumista ihmisten tietoisuudessa. Sen piirissä koetaan merkittäväksi esikäsitusten huomioon ottaminen, jos oppilaan käsitystä halutaan muuttaa. (Kakkori & Huttunen 2010, 10; Syrjälä ym. 1994, 114.) Fenomenografia keskittyy ihmisen omaan kokemukseen, ymmärrykseen ja merkityksen tunteeseen johonkin tilanteeseen tai ilmiöön liittyen (Hung-Ming & Han-Jen 2011, 2; Loughland ym. 2002, 190; Mayan 2009, 49). Huuskon ja Paloniemen (2006, 166) mukaan ilmiöstä tulee merkityksellinen, kun oppija suhteuttaa sen laajempaan kokonaisuuteen. Tällöin oppija suhteuttaa osakokonaisuuksia toisiinsa ja muodostaa ilmiöstä kokonaiskäsitksen, mitä tässä tutkimuksessa käsitteiden hierarkia edustaa.

Fenomenografian avulla on tarkoituksena tutkia, miten tutkimuksen kohteet - tässä tapauksessa yläkoulun matematiikan oppituntien opetus - kuvaavat jotain ilmiötä. Tarkoituksena on löytää ja systematisoida ajattelutapoja, jotka ovat sosiaalisesti merkittäviä ja jaettuja. Fenomenografia tutkii ihmisten kuvauksia, käsityksiä, käsitteellistämistä ja ymmärtämisen tapoja. (Hung-Ming & Han-Jen 2011, 2; Huusko & Paloniemi 2006, 162; Kakkori & Huttunen 2010, 8.) Tässä tutkimuksessa käsitteiden hierarkkista rakentumista lähestytään fenomenografian avulla, ja tarkastelu tapahtuu opetuksen näkökulmasta. Opetuksen käsitteellistäminen ja oppitunneilla ilmenevät kuvaukset ovat tutkimuksen keskiössä.

Tarkoituksena ei ole käyttää fenomenografiaa sen perinteiseen analysointikohteeseen eli ihmisten käsityksiin, vaan oppitunneilla käsitteiden pohjalta rakentuvien ilmiöiden eli hierarkioiden analysointiin. Huusko ja Paloniemi (2006, 165) nostavatkin fenomenografisen tutkimuksen lähtökohdaksi juuri pyrkimyksen tuoda esille eroja

tietyin ryhmän keskuudessa. Keskeistä tässä tutkimuksessa on se, kuinka ymmärrettäväksi opetus tekee käsitteen hierarkian oppimisen oppijalle. Kysymys ei ole kokemuksiin käsitteellistävistä yksilöistä, vaan käsitteistä, jotka ovat järjestäytyneet tietyllä tapaa suhteessa toisiinsa (Huusko & Paloneimi 2006, 165; Webb 1997, 195). Fenomenografian keinoin tutkitaan, kuinka opetuksessa käytetyt käsitteet mahdollistavat oppilaan käsitysten muodostumisen.

Käsityksen muodostaminen on oppimista, johon liittyy olennaisesti opetuksen sisältö. Sisältö on jokin tiedonala, jolla on omat tiedonmuodostuksen rakenteensa. Tämän takia oppimisen selvittämisen tulee olla laadullista – on otettava huomioon, että yhden asian oppiminen on erilainen prosessi kuin jonkin toisen tiedonalan asian. (Hung-Ming & Han-Jen 2011, 4; Patton 2001, 479; Syrjälä ym. 1994, 119.) Tutkimuksessa keskitytään käsitteiden laadulliseen erilaisuuteen ja pyritään löytämään teoreettisesti merkitseviä käsitteiden hierarkioita. Tarkoituksena on havainnollistaa tutkimusaineistosta esiin nousevia ja merkityksellisiä ilmiöitä (Loughland ym. 2002, 191).

Fenomenografisessa tutkimuksessa hankitaan empiirinen aineisto, josta tehdään johtopäätöksiä sekä lopulta kuvaus (Kakkori & Huttunen 2010, 9; Syrjälä ym. 1994, 122). Tutkimuksen analyysi on lopulta järjestäytynyt malli loogisesti toisiinsa liittyviä kategorioita, jotka kuvaavat käsityksiä tutkittavasta ilmiöstä. Nämä kategoriat mahdollistavat lopullisten johtopäätöksien tekemisen matemaattisten käsitteiden hierarkioiden muodostumisesta. Kategoriat raportoidaan niiden välisten suhteiden ja monimuotoisuuden perusteella ja ne määritellään niiden keskinäisten laadullisten eroavaisuuksien perusteella. (Hung-Ming & Han-Jen 2011, 3; Kakkori & Huttunen 2010, 9; Loughland ym. 2002, 190.) Tässä tutkimuksessa kategorioita edustavat käsitteistä rakentuvat hierarkiat. Niiden välisiä suhteita tutkimalla tehdään johtopäätöksiä siitä, kuinka käsitteiden hierarkiat ilmenevät opetuksessa ja kuinka ne eroavat toisistaan oppitunnista ja opettajasta riippuen.

Fenomenografisessa tutkimuksessa tutkimukseen osallistuvien henkilöiden subjektiivisuutta tutkitaan suhteessa objektiin eli ilmiöön (Loughland ym. 2002, 190). Tässä tutkimuksessa opettajan subjektiivisuus tuodaan esille peilaamalla opettajan

kokemustaustaa käsitteiden hierarkioiden muodostumiseen tämän opetuksessa. Tutkimusprosessin erottamattomana osana on teoria (Syrjälä ym. 1994, 123). Tässä tutkimuksessa ei käytetä teoriaa käsitysten ennakolta luokitteluun, vaan teoria muodostuu aineistopohjaisesti myös opettajien taustatietoja analysoitaessa. Fenomenografinen tutkimus suoritetaan empiirisen aineiston pohjalta ja aineisto toimii luokittelujen perustana. Teorianmuodostus tapahtuu tutkimusprosessin aikana. (Huusko & Paloniemi 2006, 166.)

### **4.2.3 Aineiston keruu**

Tämä opinnäyte toteutettiin osana MUST-projektia (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen tausta, Björn & Vehkakoski 2012, käsikirjoitus tekeillä). Tässä tutkimuksessa tarkastellaan yläkoulun matematiikan opetuksen käsitteiden hierarkkista rakentumista. Aineisto kerättiin videoimalla oppitunteja. Tutkimuksen analyysi perustuu käytössä olleisiin videoista materiaalista tehtyihin litteraatteihin. Lisäksi käytössä oli opettajia koskevat taustatiedot, jotka kerättiin opettajilta henkilökohtaisesti kyselylomakkeella (ks. liite 3). Taustoja eritellään lisää sivulta 36 alkaen.

Aineisto kerättiin huhti-, touko- ja kesäkuussa 2012 koko MUST-projektin käyttöön. Projektin nimissä on tehty tämän tutkimuksen lisäksi muitakin pro gradu –tutkielmia (ks. Jutila 2014; Kauttonen 2013; Kinnunen 2013). Sen tiimoilta on tutkittu esimerkiksi oppilaiden kysymysten ja kommenttien merkitystä opettajan antamien esimerkkien näkökulmasta, eriyttämistä sekä ymmärtämisen varmistamista oppitunneilla. Oppituntien kuvaamiseen osallistui kolme jo aiemmin pro gradu –tutkielmansa tehnyttä ja projektissa mukana ollutta opiskelijaa. Heidän keräämänsä aineisto koottiin yhdeksi suuremmaksi kokonaisuudeksi, joka on toiminut tämän tutkimuksen aineistona.

Tutkimukseen osallistui kuusi opettajaa kahdesta eri koulusta. Kultakin opettajalta kuvattiin viisi oppituntia keskimäärin viiden viikon seurantajakson aikana keväällä 2012. Aineisto muodostui siis 30 sellaisesta oppitunnista, joiden aikana opetettiin jokin uusi asia. Tunteja kuvasi kolme graduntekijää. Opettajien kanssa oli sovittu etukäteen kuvattavien tuntien aikataulusta niin, että he pystyivät opettamaan jokaisella kuvattavalla tunnilla jonkin uuden asian.

Kahta erityisopettajan avustuksella pidettyä oppituntia lukuun ottamatta paikalla tunneilla olivat vain aineenopettaja ja noin 20 oppilaan luokka. Alun perin tarkoituksena oli kuvata vain varsinainen uuden asian opetusosuus. Kuitenkin jo ensimmäisen tunnin aikana havaittiin, että myös oppilaiden itsenäinen työskentelyvaihe on tärkeä kyseisen MUST-projektin näkökulmasta. Kamera käynnistettiin tämän vuoksi uudelleen ensimmäisellä tunnilla, josta jäi kuvaamatta vain noin kymmenen minuuttia. Tästä eteenpäin kaikki tunnit kuvattiin alusta loppuun saakka, mutta kahden oppitunnin tallennus katkesi noin kymmenen minuutin kuvaamisen jälkeen. Kyseiset tunnit otettiin osaksi aineistoa siltä osin kuin ne olivat tallentuneet ja ne litteroitiin keskusteluanalyysin avulla, kuten muutkin oppitunnit.

#### **4.2.4 Litterointiaineiston jatkokäsittely ja aineiston analyysi**

Tässä tutkimuksessa litterointiaineistoa käsiteltiin edelleen usealla tavalla kattavan analyysin takaamiseksi. Ensimmäinen litterointiaineiston jatkokäsittelytapa oli alkuperäisilmausten listaaminen opettajittain tuntikohtaisesti. Listaamisen jälkeen litteraateissa esiintyville matemaattisille käsitteille tehtiin erilaisia luokitteluja, joissa käsitteille luotiin kuvauskategoriat. Ensiksi luokiteltiin aineistosta nousevat alkuperäisilmaukset ja niiden perusteella muodostettiin pelkistetyt käsitteiden ideaalit hierarkiat tunti- ja jaksokohtaisesti. Tämän jälkeen kaikki alkuperäisilmaukset myös laskettiin ja niiden lukumäärät merkattiin omaan taulukkoonsa, josta käy ilmi tunnin numero ja opettaja.

Seuraavassa alkuperäisilmausten luokitteluvaiheessa niistä muodostettiin täysin aineistolähtöinen luokittelu perus-, ala- ja yläkäsitteisiin. Kyseiseen luokitteluun perustuen luotiin myös opettajakohtaiset kuviot, jotka mallintavat suoraan matemaattisten käsitteiden hierarkkista rakentumista opetuksessa. Analyysin viimeisenä osana matemaattisten käsitteiden hierarkioista muodostetut kaaviot yhdistettiin opettajien kokemustaustoihin, joiden perusteella pyrittiin selittämään eroja hierarkioiden muodostumisessa. Tässä osiossa eritellään litterointiaineiston jatkokäsittelyä ja sen analyysia vaihe vaiheelta.

Aineiston analyysi aloitettiin sisällönanalyysin periaatteiden mukaan. Sisällönanalyysi on tekstianalyysiä (Tuomi & Sarajärvi 2011, 104), minkä avulla ilmenetään tutkimusaineistosta nousevia käsitteiden hierarkioita. Analysointitapa oli luonteeltaan aineistolähtöinen. Ennen analyysin aloittamista tutustuttiin kuitenkin lähdekirjallisuudessa esiintyviin erilaisiin luokittelukehyksiin, joita sisällönanalyysiä tehtäessä oli mahdollista hyödyntää. Hypoteesina tutkimusaineiston luokittelulle oli, että käsitteen hierarkkisen muodostumisen myötä luokittelusta tulee ketjumainen: sen jokaisella portaalla on jotain, liikkuen suppeammasta ja konkreetista käsitteestä kohti laajempaa, moniulotteisempaa ja abstraktimpaa käsitettä.

Sisällönanalyysin aineistoyksikkönä voidaan pitää jonkin muotoista dokumenttia, josta valikoituu tutkimukselle olennaiset analyysiyksiköt (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 25; Titscher ym. 2000, 58). Tämän tutkimuksen aineistoyksikkönä toimivat kirjalliset oppituntien litteraatit, mistä analyysiyksiköt eli tässä tapauksessa matemaattisen käsitteet ilmenevät selkeästi. Analyysissä kiinnitettiin huomiota asiayhteyteen, jossa matemaattiset käsitteet esiintyvät.

Karkeasi jaoteltuna sisällönanalyysi-prosessin etenemisestä voidaan erottaa viisi vaihetta. Se aloitetaan analyysiyksikön valinnalla sekä aineistoon tutustumisella. Tämän jälkeen aineisto pelkistetään, minkä perusteella tehdään luokittelu. Luokittelujen jälkeen on aika muodostaa tulkinnat. Viimeisenä vaiheena on luotettavuuden arviointi. (Latvala & Vanhanen-Nuutinen 2003, 24; Titscher ym. 2000, 60).

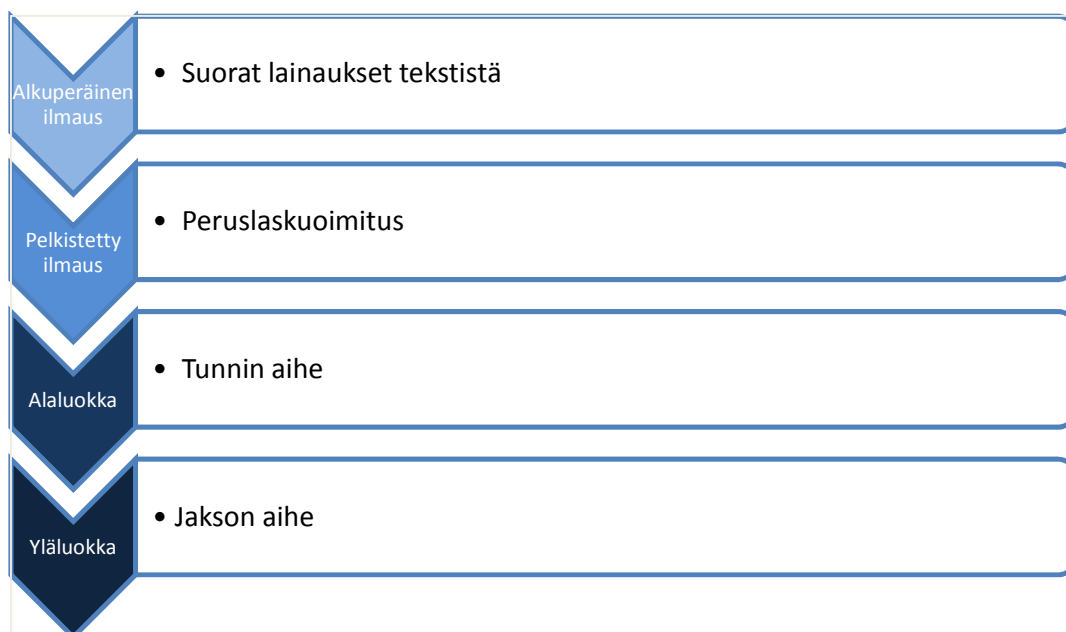
Tässä tutkimuksessa ensimmäinen aineiston analyysin vaihe voidaan jakaa kolmeen suurempaan kokonaisuuteen: aluksi toteutettiin aineiston redusointi eli pelkistäminen (Tuomi & Sarajärvi 2011, 108). Tässä tutkimuksessa analyysi aloitettiin aineistoyksiköihin eli litteraateihin tutustumisella. Kunkin opettajan litteraatit luettiin läpi ja samalla niistä alleviivattiin kaikki matemaattiset käsitteet. Tämän jälkeen itse pelkistäminen tapahtui niin, että kullekin opettajalle luotiin omat koontatiedostot word-dokumentteina (ks. liite 4). Opettajakohtainen tiedosto sisälsi jokaisen oppitunnin numeron sekä niiden alapuolille kirjoitetut litteraateista löydetyt matemaattiset käsitteet. Osa käsitteistä kirjoitettiin pelkistetyssä yhden sanan muodossa, kuten *eksponentti*. Jos

matemaattiseen käsitteeseen liittyi analyysin kannalta merkityksellinen lisätietoa tuottava asiayhteys, se kirjattiin itse ydinkäsitteen ympärille. Tästä esimerkkinä *eksponentiks tulee osottajaeksponentti miinus nimittäjäeksponentti*.

Toisessa vaiheessa aineisto klusteroidaan eli ryhmitellään (Miles & Huberman 1994; Tuomi & Sarajärvi 2011, 108). Lähdekirjallisuuteen ja muihin sisällönanalyttisiin tutkimuksiin perehtymisen jälkeen ryhmittelyä varten luotiin taulukko, joka mahdollisti johdonmukaisen etenemisen aineiston analysoinnissa. Erilaisten taulukointimenetelmien teoriataustaan tutustuminen mahdollisti tarkoituksenmukaisen keinon luokitella ja analysoida tutkimuksen aineistoa. Tutkimuksen taulukointi alkaa ryhmittelystä, joka listaa alkuperäiset aineistosta nousevat ilmaukset samaan sarakkeeseen (ks. liite 5).

Alkuperäisilmausten kirjaamisen jälkeen listattiin niiden sisältämät peruslaskutoimitukset omaan lokeroonsa alkuperäisilmauksen rinnalle. Peruslaskutoimituksiin kuuluvat laskutoimitukset, joiden kautta perustellaan monimutkaisempia matemaattisia laskuja. Peruslaskutoimituksia ovat esimerkiksi kertolasku, jakolasku ja potenssilasku. Ne pelkistettiin yksittäisiksi käsitteiksi, mikä on tutkimuksen kannalta loogista. Tämä pelkistettyjen ilmausten listaaminen havainnollisteen, minkä käsitteiden varaan käsitteen hierarkiaa aletaan rakentaa.

Pelkistettyjen käsitteiden pohjalta oli mahdollista sanallistaa tunnin aihe, vaikka se ei tulisikaan opetuksessa suoranaisesti esille. Tässä analyysin vaiheessa tunnin aihe nimettiin alaluokaksi. Kolmas ja tässä tapauksessa viimeinen prosessin vaihe on nimeltään abstrahointi eli teoreettisten käsitteiden luominen (Miles & Huberman 1994; Tuomi & Sarajärvi 2011, 108). Tässä tutkimuksessa käsitteet luotiin siten, että pelkistettyjen ilmausten avulla luodut alaluokat yhdistettiin edelleen yläluokiksi, mistä selviää jakson aihe. Yläluokkiin sisältyi kaikki tunnin aiheet kokoavat käsitteet, jotka voidaan nähdä myös käsitteiden hierarkioiden nimikkeinä (ks. Tuomi & Sarajärvi 2011, 109). Seuraava kuvio mallintaa luokittelun kulkua tämän tutkimuksen ensimmäisessä analyysivaiheessa.



KUVIO 4. Aineiston analyysin luokittelu sisällönanalyttisin perustein

Edellä esitellyssä ensimmäisessä analyysivaiheessa muodostuneet luokittelut mahdollistivat myös hypoteesien tekemisen mahdollisesta käsitteen hierarkian rakentumisesta, kun se muodostuu kokonaan aineistolähtöisesti. Tässä ensimmäisessä analyysivaiheessa ala- ja yläluokkia ei määritelty suoraan aineistolähtöisesti analyysiyksiköiden perusteella, vaan ne johdettiin pelkistetyistä ilmauksista. Kyseisen analyysivaiheen pelkistetyin ideaalin käsitteen hierarkian määrittäminen tarjosi vertailukohteen todellisuudessa rakentuville käsitteiden hierarkioille, mistä kirjoitetaan enemmän kappaaleen myöhemmässä vaiheessa. Ensimmäisessä analyysivaiheessa luodut luokittelut toimivat tutkijalle näkökulmaa laajentavina vertailukohteina ja mahdollistivat syvemmän käsitteiden hierarkioiden muodostumisen tarkastelun.

Tässä tutkimuksessa sisällön erittelyä jatkettiin edelleen niin, että kunkin opettajan käyttämien matemaattisten käsitteiden lukumäärät laskettiin aineistosta tuntikohtaisesti. Niiden lukumäärät kirjattiin ylös taulukkoon, mikä havainnollistaa erot matemaattisten käsitteiden määrissä oppitunneilla (ks. taulukko 2 s. 40). Tästä jatkettiin kolmanteen analyysivaiheeseen.

Matemaattisten käsitteiden syvempi sisällöllinen tarkastelu oli olennaista, jotta pystyttiin todentamaan sitä, muodostuiko opetuksessa matemaattisia käsitteiden hierarkioita. Analyysin seuraavassa vaiheessa käsitteiden luokittelua jatkettiin edelleen. Fenomenografisessa analyysissä merkitysyksiköiden luokittelussa liikutaan kohti abstraktimpaa kategorisointia (Huusko & Paloniemi 2006, 168). Opettaja- ja tuntikohtaisesti listattiin peruskäsitteiden jälkeen täten myös aineistossa esiintyvät ala- ja yläkäsitteet, jotka määrittyivät käsitteen sisällöstä riippuen. Ala- ja yläkäsitteille luotiin omat lokeronsa.

Tässä luokitteluvaiheessa ala- ja yläkäsitteet määriteltiin käsitteiden sisältöjen riippuvuuksien perusteella. Luokituksen määrittä se, miten usean käsitteen hallintaa luokiteltavan käsitteen oppiminen vaatii. Ala- ja yläkäsitteet on siis johdettu muista, sisällöltään yksinkertaisemmista käsitteistä. Esimerkiksi *samankantainen potenssi* edellyttää oppijalta potenssilaskun hallintaa sekä ymmärrystä, mitä *samankantainen* tarkoittaa. *Samankantainen potenssi* luokiteltiin alakäsitteeksi, kun taas yläkäsitteeksi luokiteltiin *samankantaisten potenssien tulo*. Tähän sisältyy vielä lisäksi tulo käsitteen määritelmän hallinta. Taulukko 1 havainnollistaa luokittelun kulkua ja käsitteiden jakautumista perus-, ala- ja yläkäsitteisiin.



TAULUKKO 1. Maijan 1., 2. ja 3. tunti sekä opetuksessa esiintyvät käsitteet lukumäärineen

Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä	Alakäsite	Yläkäsite
1	potenssi x 21 kerto x 16 tulo x 7 eksponentti x 7 tulontekijä x 5 summa x 3 yhteenlasku x 3 kantalu x 3	-	-
2	potenssi x 40 kantalu x 21 kerto x 20 eksponentti x 17 tulo x 10 osamäärä x 8 jako x 5 jaettava x 5 jakaja x 4 osoittaja x 1 nimittäjä x 1 supistaa x 1	samankantainen potenssi x 4 samankorkuinen potenssi x 3 yhteisen kantaluun potenssi x 2 samaeksponentti x 1	samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä x 1 samankantaisten potenssien tulo x 2
3	potenssi x 41 kerto x 17 tulontekijä x 14 tulo x 6 eksponentti x 7 kantalu x 4 sievennä x 3	tulon potenssi x 11	

Taulukoinnista jätettiin pois yksittäisiä matemaattisia käsitteitä, jotka eivät olleet merkittäviä käsitteiden hierarkian muodostumisen kuvaamisen kannalta. Kyseiset käsitteet olivat sisällöltään epämääräisiä, väärin lausuttuja tai kesken jääviä. Tämän takia käsitteiden lopullinen lukumäärä jää oheisessa taulukoinnissa hieman vajaaksi verrattuna käsitteiden lukumäärään kokonaisuudessaan.

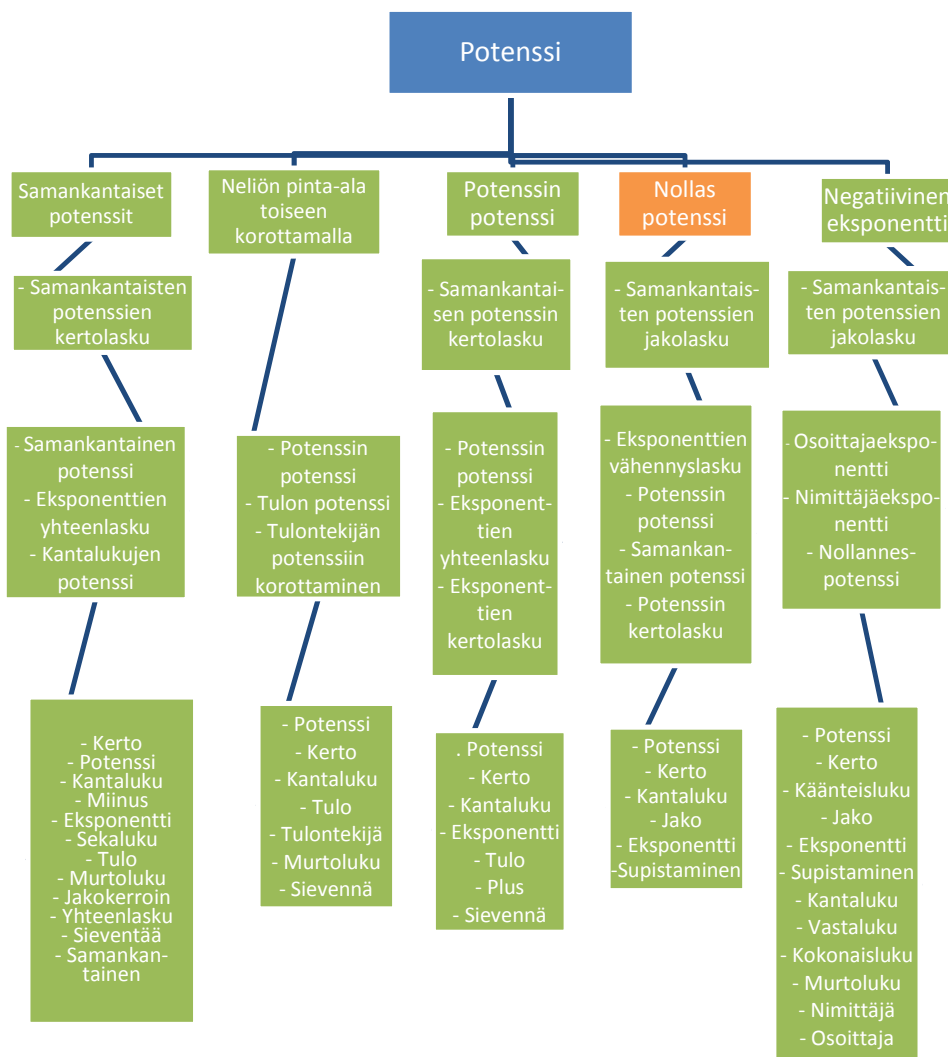
Tämän taulukoinnin avulla pystyttiin tarkastelemaan myös ala- ja yläkäsitteiden lukumääriä. Taulukointi havainnollisti sen, kuinka joillain oppitunneilla käsitteiden hierarkkista rakennetta ei ilmene ja kuinka osalla oppitunneista käsitteet rakentuvat toisiinsa nojautuen. Vertailu opettajien välillä on mahdollista, koska he etenivät samassa tahdissa ja kyseessä oli aina uusi opetettava asia kullakin oppitunnilla.

Jotta saatiin selville vielä se, kuinka yläkoulun matematiikan opetuksessa huomioidaan matemaattisten käsitteiden väliset suhteet, analyysiä jatkettiin fenomenografian avulla. Käsitteiden hierarkioiden tarkastelu ilmiön näkökulmasta tarkoitti sitä, että empiiristä aineistoa täytyi fenomenografian oppien mukaisesti käsitellä kokonaisuutena. Tämä siksi, että ilmiön osien luonne on riippuvainen kokonaisuudesta. Tässä tutkimuksessa ei keskitytä osiin eli käsitteisiin pelkästään yksittäisinä tapauksina, vaan niistä muodostettiin analyysissä kokonaisuus: käsitteiden hierarkia. Analyysin tarkoituksena oli löytää aineistosta rakenteellisia eroja, jotka selventävät käsitteiden rakenteellisia eroja suhteessa tutkittavaan ilmiöön (Huusko & Paloniemi 2006, 166).

Rakenteellisten erojen havainnoimiseksi opettajien välillä analyysiä jatkettiin edelleen luomalla opettajakohtaiset kaaviot. Nämä kaaviot osoittivat kunkin opettajan käsitteiden hierarkioiden rakenteet niin tunti- kuin jaksokohtaisestikin suurempana hierarkkisen kokonaisuutena. Rakenteellisten erojen perusteella on mahdollista muodostaa erilaisia käsitteellisiä kuvauskategorioita (Hung-Ming & Han-Jen 2011, 2; Huusko & Paloniemi 2006, 166).

Kaavion otsikoksi kirjattiin jakson aihe. Sen alle muodostettiin oppituntikohtaiset käsiteketjut. Käsiteketjut muodostuivat toisistaan irrallisina ja ne alkoivat jokaisen oppitunnin aiheen kirjaamisesta heti jakson aiheen alapuolelle. Oppitunnin aiheen käsitteellistämisestä jatkettiin edelleen muiden käsitteiden tasojen hierarkkiseen mallintamiseen. Oppitunnilla esiintyneet matemaattiset käsitteet sekä niiden luokitus nähtiin aiemmin analyysissä tehdystä luokittelusta (ks. esim. taulukko 1 s. 33).

Jos oppitunnin aikana opetuksessa esiintyi yläkäsitteitä, ne kirjattiin seuraavalle kaavion tasolle. Tämän jälkeen kirjattiin kaikki opetuksessa esiintyneet alakäsitteet. Edelleen ylä- ja alakäsitteiden jälkeen alimmalle hierarkian tasolle kirjattiin opetuksessa esiintyvät peruskäsitteet. Kaavio osoittaa käsitteiden hierarkkisen muodostumisen opettajakohtaisesti. Se mahdollistaa myös vertailun oppituntien välillä. Jos tunnin aihe ei suoranaisesti tullut opetuksessa sanallistetuksi, merkattiin tämä kaavioon oranssilla värillä.



KUVIO 5. Pirkon opetuksessa rakentuvat hierarkiat

Koska tunnin aihe oli mahdollista sanallistaa pelkkien peruskäsitteiden avulla, sitä ei ole tutkimuksen kannalta merkittävää käsitellä yhtenä hierarkian tasona. Täten tutkimuksessa ilmeni myös pieniä käsitteiden hierarkioita, jolloin hierarkia ei kuitenkaan rakentunut ala- tai yläkäsitteiden tasolle. Tällöin hierarkia muodostuu peruskäsitteisiin nojaten., ja tunnin aiheen sanallistaminen luo tunnilla esiintyville matemaattisille käsitteille nimikkeen.

Kuvioiden piirtäminen mahdollisti tutkimuksen kannalta oleellisen analyysin viimeisen vaiheen, jossa vertailtiin käsitteiden hierarkioiden rakentumista eri opettajien opetuksessa. Vertailussa otettiin huomioon kunkin opettajan opettajakokemus ja kuinka se mahdollisesti vaikutti käsitteiden hierarkioiden muodostumiseen opetuksessa. Analyysin viimeisessä vaiheessa opettajien taustatietoja peilattiin sisällönanalyysin keinoin muodostettuihin taulukoihin ja kuvioihin. Käsitteiden hierarkioiden muodostumista tai muodostumatta jäämistä tarkasteltiin opettajien opettajakokemuksen asettamassa valossa fenomenografian periaatteiden mukaisesti. Tässä analyysivaiheessa huomioon otettiin käsitteiden esiintymien lukumäärät sekä eri käsitteen tasojen muodostuminen. Käsitteiden jäsentymistä selitettiin opettajan henkilökohtaisen opettajakokemuksen vuosimäärän avulla.

Tämän tutkimuksen aineiston analyysi koostui edellä mainituista viidestä analyysivaiheesta. Kolme niistä oli aineistolähtöisiä ja tehtiin sisällönanalyysin periaattein. Neljäs vaihe eli rakenteellisten erojen analysoiminen kaavioiden avulla sai sisällönanalyysin lisäksi piirteitä fenomenografiasta. Viimeisenä analyysin vaiheena oli opettajien taustojen liittäminen edellä mainittuihin käsitteiden hierarkioita ilmentäviin kuvioihin. Viisi eri analyysivaihetta tuottivat runsaasti tietoa tutkimuskysymysten tarkastelua varten. Seuraavassa osiossa esitellään opettajien taustat vielä yksityiskohtaisemmin.

#### **4.2.5 Taustat**

Helmi-maaliskuussa 2012 MUST-projektin nimissä lähetettiin sähköpostia useisiin yläkouluihin. Yhteydenottoyritykset eivät tuottaneet tulosta huhtikuuhun mennessä, joten matematiikan opettajiin kahdelta koululta otettiin yhteyttä puhelimitse. Mukaan saatiin molemmista yläkouluista kolme pätevää matematiikan aineenopettajaa. Näiden opettajien keskuudessa varhaisin tutkinto oli vuodelta 1974 ja uusimmat tutkinnot olivat vuodelta 2009. Opettajat olivat opiskelleet pääaineenaan joko matematiikkaa, kemiaa tai fysiikkaa. Opettajakokemus vaihteli kahden ja 30 vuoden välillä, ja opettajat olivat iältään 26–65-vuotiaita. Opettajista käytetään tässä tutkimuksessa seuraavia nimiä: Maija, Venla, Orvokki, Pekka, Pirkko ja Kari.

Kyseiset taustatiedot kerättiin opettajilta etukäteen, ennen oppituntien kuvaamisen tai niiden litteroinnin aloittamista. Tietojen kartoittamiseen hyödynnettiin taustatietokyselylomaketta, jotka lähetettiin jokaiselle opettajalle henkilökohtaisesti kirjeitse (ks. liite 3). Taustatietolomakkeen lisäksi kirjeessä kerrottiin opettajille myös MUST-hankkeeseen liittyvistä keskustelutilanteista ja niiden aikatauluista.

Opettajilta kartoitettu tieto heidän opettajakokemuksensa määrästä vuosina tarkoittaa opettajan yleistä opettajakokemuksen määrää. Kysymystä ei rajattu ainoastaan opettajakokemukseen matematiikan saralla. Kaikki opettajat olivat kouluttautuneet maistereiksi, joten koulutuksen taso ei ollut merkittävä seikka tutkimuksen kannalta. Pääaineinaan opettajat olivat opiskelleet joko matematiikkaa, fysiikkaa tai kemiaa, ja kaikki olivat päteviä matematiikan aineenopettajia. Jokaisen opettajan pätevyyden myötä heidän pääaineitaan ei oteta tässä tutkimuksessa tarkastelun kohteeksi.

Opettajien anonymiteetin säilyttämiseksi opetuskokemusta ei tässä tutkimuksessa ilmoiteta tarkasti, vaan opetusvuodet määriteltiin kymmenen vuoden sykleissä aina kolmeenkymmeneen opetusvuoteen saakka. Kun opetuskokemuksen vuotuiset määrät sanallistetaan, käytetään seuraavia termejä: 0-9 vuotta, noviisi-opettaja; 10-19 vuotta, kokenut opettaja ja 20-30 vuotta, konkari-opettaja.

Tavoitteena oli, että oppituntien kuvaaminen tapahtuisi suunnilleen samaan aikaan ja oppituntien aihepiirit liittyisivät toisiinsa. Kyseinen tavoite toteutui vain puolittain. Saman koulun opettajia kuvattiin ja he käsittelivät samaa aihepiiriä. Eri kouluissa oli kuitenkin meneillään eri aihepiirin käsittely. Molempien koulujen käsiteltävät aihealueet liittyivät algebraan: opettajista kolme käsitteli opetuksessaan potenssilaskuja ja loput kolme opettajaa käsittelivät oppitunneillaan kirjainlausekkeita.

Opetusryhmät olivat kooltaan noin 20 oppilaan luokkia. Oppilaista yhdellä oli erilainen oppikirja kuin muulla luokalla, muttei esimerkiksi HOJKSia ilmeisesti oltu hänelle tehty. Kaikilta luokkien oppilailta kerättiin kirjalliset tutkimusluvut (ks. liite 1). Korkeintaan yksi oppilas luokkaa kohden ei osallistunut tutkimukseen.

## 5 TUTKIMUSLÖYDÖT

Seuraavaksi esitellään keskeiset tutkimuslöydöt siitä, kuinka matemaattiset käsitteet voivat rakentua hierarkkisesti opetuksessa. Tutkimuslöydöt tehtiin sisällönanalyysin ja fenomenografian keinoin. Jokaisella oppitunnilla esiintyi matemaattisia käsitteitä. Käsitteiden ryhmittely peruskäsitteisiin, alakäsitteisiin ja yläkäsitteisiin todisti, että matematiikan yläkoulun opetuksessa käsitteet rakentuvat hierarkkisesti. Tämä ei tapahdu kuitenkaan jokaisella oppitunnilla. Ryhmittely osoitti myös erot tuntikohtaisten käsitteiden hierarkioiden rakentumisessa.

Opettajasta riippuen matemaattisten käsitteiden määrät opetuksessa vaihtelivat ja hierarkioita muodostui eri tavoin. Viimeisenä tulososiossa esitellään opettajien opettajakokemuksen määrän yhteys käsitteiden hierarkkiseen muodostumiseen.

### 5.1 Matemaattisten käsitteiden määrät

Jokaisen oppitunnin opetuksessa esiintyi matemaattisia käsitteitä. Käsitteiden esiintymien määrä vaihteli opettajien ja oppituntien välillä, vaikka kaikki oppitunnit olivat 45 minuutin mittaisia. Kaikki oppitunnilla ilmenevät matemaattiset käsitteet kirjattiin ylös, vaikka ne olisivatkin tulleet jo aikaisemmin oppitunnilla esille. Seuraavaan taulukkoon on siten laskettu kaikkien oppitunnin aikana ilmenevien matemaattisten käsitteiden lukumäärät.

TAULUKKO 2. Opettajat ja matemaattisten käsitteiden lukumäärät opetuksessa yhden oppitunnin aikana

<p><b>Maija</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1. tunti 96</li> <li>○ 2. tunti 161</li> <li>○ 3. tunti 109</li> </ul>	<p><b>Venla</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1. tunti 83</li> <li>○ 2. tunti 38</li> <li>○ 3. tunti 86</li> <li>○ <b>4. tunti 33</b></li> <li>○ 5. tunti 35</li> <li>○</li> </ul>	<p><b>Orvokki</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1. tunti 101</li> <li>○ 2. tunti 62</li> <li>○ 3. tunti 53</li> <li>○ <b>4. tunti 21</b></li> <li>○ 5. tunti 32</li> </ul>
<p><b>Pekka</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1. tunti 225</li> <li>○ 2. tunti 245</li> <li>○ 3. tunti 212</li> <li>○ <b>4. tunti 257</b></li> <li>○ 5. tunti 174</li> </ul>	<p><b>Pirkko</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>1. tunti 265</b></li> <li>○ 2. tunti 214</li> <li>○ 3. tunti 258</li> <li>○ 4. tunti 135</li> <li>○ 5. tunti 169</li> </ul>	<p><b>Kari</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ 1. tunti 67</li> <li>○ 2. tunti 60</li> <li>○ 3. tunti 96</li> <li>○ 4. tunti 42</li> <li>○ <b>5. tunti 31</b></li> </ul>

Opettajien käsitteiden käytössä heidän omassa opetuksessaan on selkeitä määrällisiä eroja. Kun opettajia tarkastellaan yhtenä ryhmänä, niin vähimmillään käsitteitä ilmeni ainoastaan 21 kappaletta yhden oppitunnin aikana (Orvokin 4. tunti), kun taas enimmillään käsitteitä esiintyi 265 kappaletta yhden oppitunnin aikana (Pirkon 1. tunti).

Opettajakohtaisia kokonaisuuksia tarkasteltaessa esimerkiksi Pekan jokaisella oppitunnilla opetuksessa esiintyvien käsitteiden määrä on korkea. Vähimmilläänkin se on 174 kappaletta, kun esimerkiksi Karin tai Venlan opetuksessa ei millään oppitunnilla ylitetä sadan käsitteen määrää. Voidaan todeta, että matemaattisten käsitteiden määrä opetuksessa on myös opettajakohtaista. Opettajasta ja tämän opetuksesta riippuen tunnin uutta asiaa rakennetaan enemmän tai vähemmän matemaattisten käsitteiden varaan.

Käsitteiden välillä esiintyi paljon toistoa. Sama matemaattinen käsite saattoi toistua opetuksessa enimmillään 38 kertaa peräkkäin, ilman muiden käsitteiden käyttöä välillä. Samojen käsitteiden toistuminen ei aina tapahtunut peräkkäin. Esimerkiksi Pekan toisella tunnilla käsite *potenssiin* toistui opetuksessa sata kertaa. Voidaan havaita, että käsitteen toistuvuus on sitä suurempaa, mitä perustavammaksi käsite voidaan luokitella. Tällaiset yksinkertaiset käsitteet on tutkimuksen piirissä nimetty peruskäsitteiksi, joiden

varaan opetuksessa rakennetaan edelleen spesifimpiä käsitteitä. Peruskäsitteet ilman vaativia säännönmukaisuuksia toistuivat useammin kuin esimerkiksi suoranaisesti tunnin aihe ja siitä johdetut moniulotteiset matemaattiset käsitteet. Seuraava esimerkki havainnollistaa matemaattisten käsitteiden toistuvuutta opetuksessa.

Esimerkki 1, katkelma matemaattisten käsitteiden listasta, kun oppitunnin aiheena on potenssin potenssi (Pekan 4. tunti).

- 99. **kertaa**
- 100. **kertaa**
- 101. **potenssiin**
- 102. **potenssiin**
- 103. kerrotaan
- 104. tulontekijän kertolasku
- 105. **potenssiin**
- 106. kerrotaan
- 107. **kertaa**
- 108. samankantasia potensseja
- 109. kantalukuna
- 110. kertolasku
- 111. samankantasten kertolasku

Paljon toistuvien peruskäsitteiden varaan rakentui opetuksessa käsitteitä, jotka jaettiin alakäsitteisiin ja tästä edelleen moniulotteisempiin yläkäsitteisiin. Matemaattisten käsitteiden jakautuminen niiden ominaisuuksien perusteella peruskäsitteisiin, alakäsitteisiin ja yläkäsitteisiin oli selkeä. Jokaisen opettajan opetuksessa, tunnista riippumatta, peruskäsitteitä esiintyi eniten. Vähiten esiintyi yläkäsitteitä eikä esimerkiksi kolmen opettajan opetuksessa näitä esiintynyt lainkaan yhdenkään oppitunnin opetuksessa.

## 5.2 Matemaattisten käsitteiden ryhmittelyt

Tässä tulososiossa tarkastellaan matemaattisten käsitteiden ilmenemistä peruskäsitteiden sekä ala- ja yläkäsitteiden tasoilla. Tulososiossa eritellään myös kriteerit perus-, ala- ja yläkäsitteiden määritelmille. Käsitteiden jakaantumista eri luokkiin havainnollistetaan analyysivaiheessa muodostettujen taulukoiden avulla. Lisäksi osiossa tuodaan esille käsitteiden määrät eri käsitteentasoilla. Seuraavaksi



esitellään ryhmittelyssä ilmenevät merkittävät erot matemaattisten käsitteiden esiintymisessä opetuksessa.

### 5.2.1 Peruskäsitteiden ilmeneminen

Sisällöltään peruskäsitteiksi luokiteltiin peruslaskutoimitukset kuten kertolasku, jakolasku ja potenssilasku. Myös matemaattiset nimitykset, kuten tulontekijä, ja matemaattisten symboleiden nimet, kuten plus, luokiteltiin peruskäsitteisiin kuuluviksi. Matemaattisia peruskäsitteitä esiintyi opetuksessa jokaisella oppitunnilla, mutta niiden määrät erosivat merkittävästi opettajien välillä.

Erinimisten peruskäsitteiden esiintyminen opetuksessa monipuolisesti ei vaikuttanut peruskäsitteiden lopulliseen lukumäärään oppitunnilla. Esimerkiksi Pirkon kolmannella tunnilla esiintyy seitsemän eri peruskäsitteitä, yhteensä 244 kertaa. Maijan opetuksessa ensimmäisellä tunnilla peruskäsitteitä esiintyi kahdeksan kappaletta, toistojen jälkeen yhteensä 96 kertaa. Vaikka Maijan opetuksessa peruskäsitteitä ilmeni nimikkeiltään enemmän, niin silti Pirkon peruskäsitteiden käytön kokonaismäärä oli suurempi. Myös saman käsitteen toistamisen määrissä opetuksessa ilmeni eroja.

TAULUKKO 3. Eri peruskäsitteet ja niiden esiintymismäärät yhden oppitunnin aikana, vertailussa Maija ja Pirkko

Maija :

Pirkko :

Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä	Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä
1	potenssi x 21 kerto x 16 tulo x 7 eksponentti x 7 tulontekijä x 5 summa x 3 yhteenlasku x 3 kantalu x 3	1	potenssi x 112 kerto x 81 kantalu x 26 eksponentti x 21 tulo x 6 plus x 3 sievennä x 1

Matemaattisten peruskäsitteiden määrät opetuksessa vaihtelivat 21 peruskäsitteestä (Orvokin 4. tunti) 248 peruskäsitteeseen (Pirkon 1. tunti) yhden oppitunnin aikana. Runsas peruskäsitteiden määrä johti myös runsaampaan käsitteiden kokonaismäärään. Saman käsitteen toistuvuus opetuksessa oli yleistä, mutta myös yksittäisiä käsitteitä ilmeni. Opettaja saattoi myös käyttää opetuksessaan useampia peruskäsitteitä, jotka sisällöllisesti vastaavat toisiaan. Tästä esimerkkinä on *kertolasku-* ja *tulo-*käsitteiden käyttö.

### 5.2.2 Ala- ja yläkäsitteiden rakentuminen opetuksessa

Ala- ja yläkäsitteet määriteltiin käsitteiden sisältöjen riippuvuuksien perusteella. Luokituksen määrittä se, miten usean käsitteen hallintaa uuden käsitteen oppiminen vaati. Ala- ja yläkäsitteet on siis johdettu muista, sisällöltään yksinkertaisemmista käsitteistä. Esimerkiksi *samankantainen potenssi* edellyttää oppijalta potenssilaskun hallintaa sekä ymmärrystä, mitä *samankantainen* tarkoittaa. *Samankantainen potenssi* luokitellaan alakäsitteeksi, kun taas yläkäsitteeksi luokituu *samankantaisten potenssien tulo*. Tähän sisältyy vielä lisäksi tulon käsitteen määritelmän hallinta. Seuraava taulukko on ote tutkimuksen kolmannesta analyysivaiheesta. Toisiinsa suhteutuvat käsitteet on lihavoitu.

TAULUKKO 4. Maijan opetuksessa ilmenevien käsitteiden luokittelut sisällöllisesti perusteltuna

Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä	Alakäsite	Yläkäsite
2	<b>potenssi x 40</b> <b>kantaluku x 21</b> kerto x 20 eksponentti x 17 <b>tulo x 10</b> osamäärä x 8 jako x 5 jaettava x 5 jakaja x 4 osoittaja x 1 nimittäjä x 1 supistaa x 1	<b>samankantainen potenssi x 4</b> samankorkuinen potenssi x 3 <b>yhteisen kantaluvun potenssi x 2</b> samaeksponentti x 1	samankantaisten potenssien osamäärä x 1 <b>samankantaisten potenssien tulo x 2</b>

Määrällisesti ala- ja yläkäsitteiden esiintyminen opetuksessa oli huomattavasti peruskäsitteitä vähäisempää. Opettajat perustivat opetuksensa runsaaseen peruskäsitteiden käyttöön ja näin painottivat jo aikaisemmin opetettuja käsitteitä. Aikaisemmin opettujen peruskäsitteiden avulla perusteltiin sisällöltään moniulotteisemmat ala- ja yläkäsitteet. Mitä enemmän opetuksessa ilmeni peruskäsitteitä, sitä todennäköisemmin opetuksessa ilmeni myös ala- ja yläkäsitteitä.

Tämän kaltaisia jokaiselle käsitteen tasolle muodostuvia oppitunteja ilmeni yhteensä seitsemän kappaletta. Nämä oppitunnit jakautuvat kahden opettajan, Pirkon ja Pekan, kesken. Tutkimuksen kolmannen analyysivaiheen taulukointi osoitti myös sen, kuinka käsitteet jakaantuivat opetuksessa eri portaille ja kuinka nämä portaavat erosivat toisistaan määrällisesti. Seuraava katkelma taulukosta kuvaa Venlan kolmannen oppitunnin käsitteitä. Taulukko osoittaa, kuinka käsitteet voivat jakaantua kahdelle käsitteen tasolle.

TAULUKKO 5. Venlan opetuksen rakentuminen, kun yläkäsitteen tasoa ei saavuteta

Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä	Alakäsite	Yläkäsite
3	kerto x 52 jako x 5 summalauseke x 5 vastalauseke x 5 sieventää x 4 miinus x 4 tulo x 2 etumerkki x 2 murtoluku x 1 samanmuotoinen x 1	summalausekkeen tulo x 1	-

Jopa kymmenellä oppitunnilla kävi kuitenkin niin, ettei ala- tai yläkäsitteitä tullut opetuksessa ilmi ollenkaan. Oppitunnit muodostuivat täysin peruskäsitteiden varaan. Peruskäsitteiden varaan rakentuvista oppitunneista kahdella ei tunnin aihetta sanallistettu ollenkaan. Kuitenkin kahdeksalla näistä oppitunneista tunnin aihe sanallistettiin peruskäsitteiden avulla, joten opetuksessa ilmeni hierarkkinen rakenne.

Esimerkiksi Karin toisella oppitunnilla ilmeni vain peruskäsitteitä, mutta tunnin aihe sanallistettiin. Tämä löydös eritellään myöhemmin tulososiossa vielä tarkemmin (ks. liite 8).

Ala- ja yläkäsitteiden esiintyminen opetuksessa tarkoitti matemaattisen käsitteen hierarkian muodostumista. Eri tasojen käsitteiden määrässä oli huomattavia eroja – mitä ylemmäs luokittelussa eli hierarkiassa kavuttiin, sitä vähemmän hierarkian portaalla ilmeni matemaattisia käsitteitä. Hierarkia saattoi jäädä kokonaan muodostumatta tai vaihtoehtoisesti se muodostui kaksiportaisesti perus- ja alakäsitteiden tasolle. Kolmeportainen käsitteiden hierarkia muodostui perus- ja alakäsitteen tasojen lisäksi myös yläkäsitteen tasolle. Mahdollinen peruskäsitteiden avulla sanallistettu tunnin aihe antoi lisäksi hierarkialle käsitteellistetyn nimikkeen.

### **5.3 Käsitteiden hierarkkinen kuvaus**

Tässä tulososiossa vertaillaan edelleen sitä, kuinka matemaattisten käsitteiden tulisi johdonmukaisessa opetuksessa rakentua hierarkkisesti ja kuinka ne ilmenevät tässä tutkimusaineistossa. Opetuksessa muodostuvia käsitteiden kokonaisuuksia ilmenetään kuvioin. Kuviot havainnollistavat sen, kuinka hierarkian tulisi muodostua portaittain käsitteistä, joilla on suhteita toisiinsa nähden, ja kuinka se todellisuudessa rakentuu.

Esimerkiksi Venlan jakson aihe oli yhtälöt. Viiden oppitunnin aiheet olivat 1) kirjainlausekkeen arvo, 2) samanmuotoisten termien yhdistäminen, 3) luvun ja summalausekkeen tulo, 4) kirjainlausekkeen vähennyslasku sekä 5) yhtälön ratkaiseminen. Tuntien aiheet pääteltiin aineistosta nousevien alkuperäisilmausten perusteella. Kun oppituntien aiheiden pelkistettyjä ideaaleja käsitteiden hierarkioita verrataan opettajan opetustunneista puhtaasti aineistolähtöisesti tehtyihin sisällön luokitteluihin, havaitaan, etteivät käsitteet rakennu hierarkkisesti jokaisella oppitunnilla. Seuraavissa taulukoissa kuvataan pelkistetty, ideaali malli opetuksessa rakentuvasta hierarkiasta (taulukko 6) ja täysin aineistolähtöinen, peruskäsitteiden tasolle typistytvä oppitunti (taulukko 7).

TAULUKKO 6. Venlan 1. tunnin ideaali käsitteen hierarkian muodostuminen tunnin aiheen ja peruskäsitteiden perusteella

Alkuperäinen ilmaus	Pelkistetty ilmaus *peruslaskutoimitus	Alaluokka *tunnin aihe	JAKSON AIHE
<i>kirjainlausekkeessa muuttujan paikalle sijoitetaan sen arvo</i>	kirjainlauseke muuttuja sijoittaa arvo	kirjainlausekkeen arvo	
<i>Potenssi on se että luku kerrotaan niinku itsellään</i>	potenssi kerto	kirjainlausekkeen arvo	Yhtälöt
<i>kun tämä potenssiin kaksi täällä sen että sun pitää tämä kantaluku kertoa kahdesti</i>	potenssi kantaluku kerto	kirjainlausekkeen arvo	
<i>yks potenssiin kaks eli katopas kantaluvun kerrot itsellään</i>	potenssiin kantaluku kerto	kirjainlausekkeen arvo	

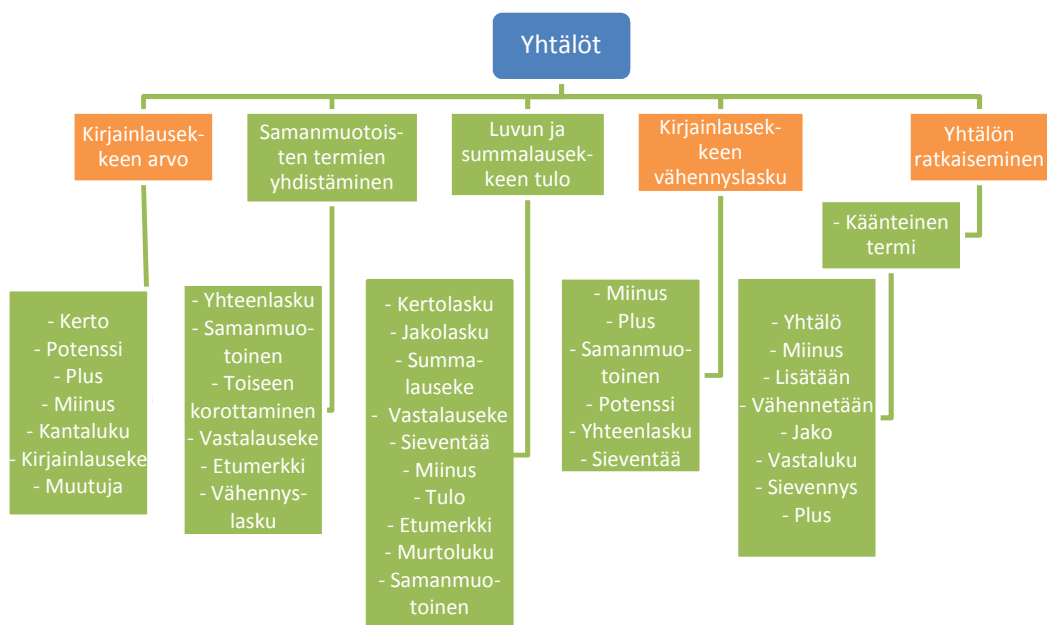
TAULUKKO 7. Täysin aineistolähtöinen käsitteiden sisällöllinen luokittelu, Venlan 1. tunti

Tunnin numero	Peruskäsite ja lukumäärä	Alakäsite	Yläkäsite
1	kerto x 38 potenssi x 12 plus x 8 miinus x 8 kantaluku x 4 kirjainlauseke x 2 muuttuja x 1	-	-

Edellä olevat taulukot havainnollistavat, kuinka Venlan ensimmäisellä oppitunnilla käsitteet rakentuisivat johdonmukaisessa opetuksessa hierarkkisesti. Kokonaan aineistolähtöinen käsitteiden luokittelu (taulukko 7) paljastaa, miten käsitteet ilmenevät todellisuudessa kyseisellä oppitunnilla.

Venlan opetuksessa käsitteiden hierarkiaa ei muodostu kahdella tunnilla, vaan opetus tyypistyy peruskäsitteiden tasolle. Yhdellä oppitunnilla opetuksessa ilmenee myös alakäsitteitä. Hierarkia voi muodostua pelkkiin peruskäsitteisiin nojaten, kun tunnin aihe on käsitteellistetty niiden avulla. Tällöin hierarkia saa tunnin aiheesta nimikkeen. Tällaisissa tapauksissa, joissa tunnin aihe on sanallistettu ja opetuksessa esiintyy ainoastaan peruskäsitteitä, on nähty muodostuvan pieni matemaattisten käsitteiden hierarkia. Tunnin aihetta ei kuitenkaan lasketa käsitteen portaaksi, toisin kuten ala- ja yläkäsitteet on määritelty.

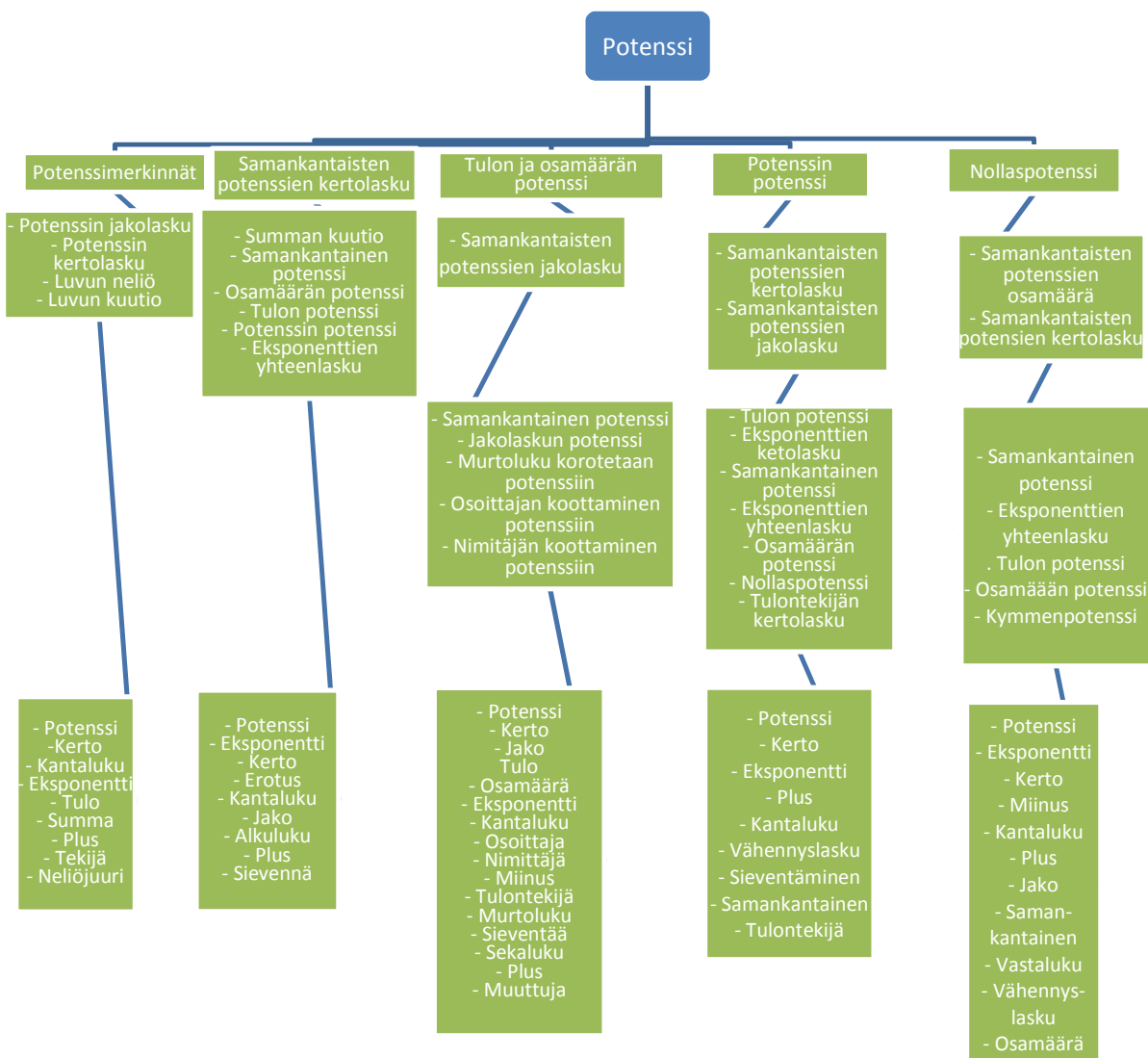
Seuraavassa kuviossa nähdään jakson aiheen eli yhtälöiden kokonaisvaltainen käsitteiden hierarkia Venlan opetuksessa. Käsitteiden hierarkia muodostuu oppitunnilla korkeintaan kahdelle tasolle. Oppitunnin aihetta ei ole käsitteellistetty opetuksessa kolmella oppitunnilla ollenkaan. Jakson aihe on kirjattu siniselle pohjalle, opetuksessa ilmenevät käsitteet vihreälle ja käsitteellistämättä jääneet tunnin aiheet oranssille pohjalle.



KUVIO 6. Vihreä väri edustaa Venlan opetuksessa rakentuvia käsitteiden hierarkioita

Yllä oleva kuvio osoittaa, ettei Venlan opetuksessa kahdella oppitunnilla muodostu matemaattista käsitteiden hierarkiaa. Opetus jää yksiportaiseksi, ainoastaan peruskäsitteiden tasolle. Oppitunnin aiheen käsitteellistämisenkin uupuessa ei opetuksessa muodostu minkään tasoista matemaattisten käsitteiden hierarkiaa.

Kun verrataan matemaattisen käsitteiden hierarkioiden rakentumista Venlan opetuksessa (kuvio 6) Pekan opetukseen (kuvio 7), on havaittavissa merkittäviä laadullisia eroja. Pekan opetuksessa hierarkiat rakentuvat useammille tasoille. Jokaisen tunnin aihe on sanallistettu ja sitä tukee niin perus-, ala- kuin yläkäsitteitäkin. Kun Venlan opetuksessa hierarkiaa ei kahdella oppitunnilla muodostunut ollenkaan tai se rakentui korkeintaan kaksiportaisesti, niin käsitteiden hierarkiat Pekan opetuksessa ovat kahdella oppitunnilla rakentuneet kaksiportaisesti ja kolmella oppitunnilla kolmiportaisesti.



KUVIO 7. Pekan opetuksessa muodostuvat käsitteiden hierarkiat

Kun vertaillaan Pekan ja Venlan opetuksen matemaattisten käsitteiden hierarkioita visuaalisesti, voidaan havaita Pekan opetuksen moniportaisuus. Pekan opetuksessa myös jokaisen tunnin aihe oli käsitteellistetty, mikä opetuksessa antaa oppijalle lisäinformaatiota hierarkian muodostamiseen. Myös Maijan (ks. liite 6) opetuksessa jokaisen oppitunnin aihe on käsitteellistetty. Ero Maija ja Pekan käsitteiden hierarkkisissa muodostumisissa on hierarkioiden tasojen määrässä. Maijan opetuksessa kahdella oppitunnilla ilmenee ainoastaan peruskäsitteitä tunnin aiheen



käsitteellistämisen lisäksi. Yhdellä oppitunnilla hierarkia muodostuu kaksiportaisesti, jolloin Maijan opetuksessa ilmenee myös alakäsitteitä.

Myös Orvokin opetuksessa (ks. liite 7) käsitteiden hierarkiat jäävät Maijan opetuksen tavoin kaksiportaisiksi. Yhdellä oppitunnilla käsitteen hierarkia muodostuu ainoastaan peruskäsitteiden ja näiden avulla käsitteellistetyn tunnin aiheen varaan. Kahdella oppitunnilla tunnin aihetta ei ole käsitteellistetty. Yläkäsitteitä ei esiinny opetuksessa lainkaan, joten hierarkkiset käsitteen muodostumat rakentuvat perus- ja alakäsitteiden tasoille.

Orvokin tavoin Pirkonkaan opetuksessa (ks. kuvio 5 s. 35) kaikkia tunnin aiheita ei ole sanallistettu. Hänen opetuksessaan käsitteiden hierarkia muodostuu kuitenkin jokaisella oppitunnilla. Yhdellä oppitunnilla esiintyy kaksiportaisesti rakentunut kokonaisuus, kun taas neljällä oppitunnilla esiintyy kolme eri matemaattisen hierarkian käsitteen porrasta. Ainoastaan yhdellä oppitunnilla ei esiinny yläkäsitteitä. Alakäsitteitä ilmenee opetuksessa jokaisella tunnilla.

Kun käsitteiden hierarkioiden muodostumista matematiikan opetuksessa verrataan Pirkon ja Karin (ks. liite 8) välillä, voidaan havaita selvä ero ala- ja yläkäsitteiden määrissä ja näin ollen myös hierarkioiden muodostumisissa. Kun Pirkon opetuksessa alakäsitteitä esiintyy jokaisella tunnilla, niin Karin opetuksessa alakäsitteitä ilmenee ainoastaan kahdella oppitunnilla. Pirkon opetuksessa yläkäsitteen porras on muodostunut neljälle oppitunnille, kun taas Karin opetuksessa yläkäsitteitä ei esiinny lainkaan. Jopa kolmella Karin oppitunneista käsitteet saavat hierarkkisen mallinsa ainoastaan tunnin aiheen sanallistamisen ansiosta. Karin opetuksessa jokaisen tunnin aihe onkin sanallistettu.

Matemaattisten käsitteiden hierarkkinen muodostuminen opetuksessa vaihtelee opettajasta ja oppitunnin aiheesta riippuen. Oppitunnin aihetta ei voida kuitenkaan nimetä erojen pääsyyksi, sillä jo tutkimusaineiston keruuvaiheessa pyrittiin varmistamaan se, että opettajat käsitteivät videoitavilla tunneilla samankaltaisia teemoja. Kolmen opettajan jakson aihe oli yhtälöt ja kolmen puolestaan potenssiin

korottaminen. Kuitenkin erot käsitteiden hierarkioiden muodostuksessa opettajien välillä ovat todistetusti merkittäviä. Opettajasta ja oppitunnista riippuen on nähtävissä joko hierarkian kokonaisvaltainen rakentuminen usealle käsitteen tasolle tai päinvastoin sen muodostumatta jääminen.

Tunnin aihe oli suurimmassa osassa oppitunteja käsitteellistetty, mutta kolmen opettajan kohdalla yhteensä kuudella oppitunnilla aihe jäi käsitteellistämättä. Ainoastaan kahden opettajan oppitunneilla esiintyi yläkäsitteitä ja jokaisen opettajan opetuksessa esiintyi alakäsitteitä ainakin yhdellä oppitunnilla. Eniten käsitteitä esiintyi peruskäsitteen tasolla, ja kyseinen käsitteen porras täytyikin jokaisella oppitunnilla. Toisinaan opetus tyypistyi ainoastaan peruskäsitteitä ilmentäväksi, jolloin matemaattista käsitteiden hierarkiaa ei muodostunut. On myös mahdollista, että opetus muodostuu peruskäsitteiden ja niiden avulla käsitteellistetyn tunnin aiheen varaan. Opettajakohtaiset erot käsitteiden hierarkioiden muodostumisessa ovat huomattavat. Selityksiä kyseiselle ilmiölle tarkastellaan seuraavassa kappaleessa, kun opettajien opettajakokemuksen määrää tarkastellaan käsitteiden hierarkioiden muodostumiseen vaikuttavana tekijänä.

### **5.3.1 Opettajakokemuksen yhteys hierarkian muodostumiseen**

Tutkimukseen osallistuneiden opettajien opettajakokemus vaihteli kahden ja kolmenkymmenen vuoden välillä. Kun kokemustaan verrattiin joko käsitteiden yleiseen lukumäärään yhden oppitunnin aikana tai käsitteiden hierarkkiseen muodostumiseen opetuksessa, huomattiin opettajakokemuksen yhteys opetukseen. Vertailu opettajien ja näiden opettajakokemuksen välillä oli mahdollista, koska opetuksessa edettiin samassa tahdissa ja kyseessä oli aina uusi opetettava asia kullakin oppitunnilla. Seuraavaan taulukkoon on koottu opettajakokemuksen määrät vuosissa opettajittain.

TAULUKKO 8. Opettajakokemuksen määrät vuosina

OPETTAJAKOKEMUKSEN MÄÄRÄ VUOSINA	0-9	10-19	20-30
OPETTAJAN NIMI	Venla Kari	Maija Pekka Pirkko	Orvokki

Karin tai Venlan opetuksessa ei millään oppitunnilla ylitetä sadan matemaattisen käsitteen määrää. He kuuluvat opettajakokemukseltaan 0-9 vuoden noviisien ryhmään, eli heillä oli myös vähiten opettajakokemusta. Pirkko, Pekka ja Maija puolestaan luokiteltiin kokeneiksi opettajiksi 10–19 vuoden haarukkaan lukeutuvalla opettajakokemuksellaan. Pirkon ja Pekan opetuksessa esiintyi erityisen runsaasti matemaattisia käsitteitä. Pekan opetuksessa neljällä oppitunnilla ylitettiin kahdensadan matemaattisen käsitteen määrä ja Pirkon opetuksessa sama ilmiö toistui kolmella oppitunnilla.

Toisaalta Maijalla, joka 10–19 vuoden haarukkaan lukeutuvalla opettajakokemuksellaan luokitellaan myös kokeneeksi opettajaksi, esiintyy opetuksessa huomattavasti vähemmän matemaattisia käsitteitä kuin Pekalla tai Pirkolla. Korkeimmillaan määrä on 161 kappaletta. Sama ilmiö toistuu konkariksi 20–30 vuoden opettajakokemuksellaan luokiteltavan Orvokin opetuksessa. Hänen opetuksessaan matemaattisten käsitteiden määrä tyypistyy yhdellä tunneista vain 21 kappaleeseen. Silti Orvokin jokaisella oppitunnilla rakentuu käsitteiden hierarkia.

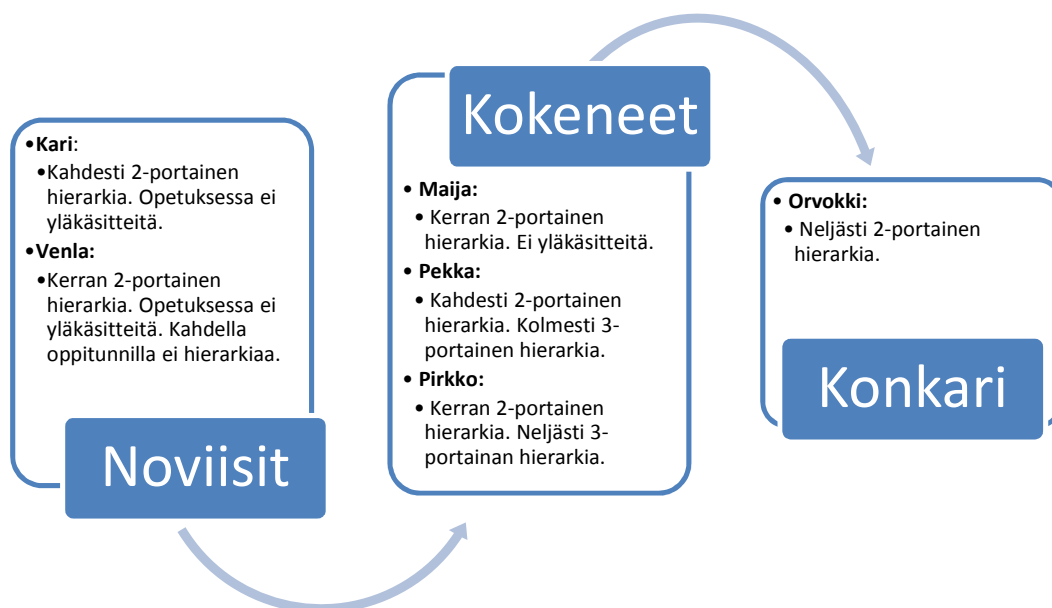
Matemaattisten käsitteiden hierarkian muodostuminen on yhteydessä opettajakokemukseen. Esiintyi opetuksessa sitten runsaasti tai vähän matemaattisia käsitteitä, oli kokeneempien opettajien opetuksen matemaattiset käsitteet hierarkkisesti jäsentyneempiä. Opettajakokemukseltaan noviisien Venlan ja Karin opetuksessa ei esiinny yläkäsitteitä ollenkaan. Venlan opetuksessa opetus muodostuu kahdelle käsitteen tasolle yhdellä oppitunnilla. Kahdella Venlan oppitunnilla ei muodostu

minkään tasoista matemaattisten käsitteiden hierarkiaa, kun tunnin aiheittakaan ei ole käsitteellistetty. Karin opetuksessa perus- ja alakäsitteitä puolestaan esiintyy kahdella oppitunnilla ja jokainen tunnin aihe on käsitteellistetty.

Kokeneiden ryhmään lukeutuvien Maijan, Pekan ja Pirkon jokaisella oppitunnilla matemaattiset käsitteet muodostivat hierarkian. Maijan opetuksessa ei esiintynyt yläkäsitteitä. Vastaavasti Pekan opetus rakentui kahdella oppitunnilla ja Pirkon yhdellä oppitunnilla kaksiporraisesti. Kaiken kaikkiaan Pirkon oppitunneista neljällä rakentui kokonaisvaltainen käsitteiden hierarkia niin perus-, ala- kuin yläkäsitteenkin tasolle. Pekan opetuksessa sama ilmiö toistui kolmella oppitunnilla.

Konkariksi opettajakokemukseltaan luokittuvan Orvokin opetuksessa neljällä oppitunnilla hierarkia muodostui kaksiporraisesti. Yhdellä oppitunnilla peruskäsitteiden lisäksi oli käsitteellistetty tunnin aihe. Orvokin opetuksessa hierarkia rakentui jokaisella oppitunnilla. Seuraava taulukko osoittaa merkittävimmät erot noviisien (0-9 vuotta opettajakokemusta), kokeneiden (10–19 vuotta opettajakokemusta) sekä konkarin (20–30 vuotta opettajakokemusta) opetuksessa rakentuvista matemaattisista käsitteistä ja hierarkioista.

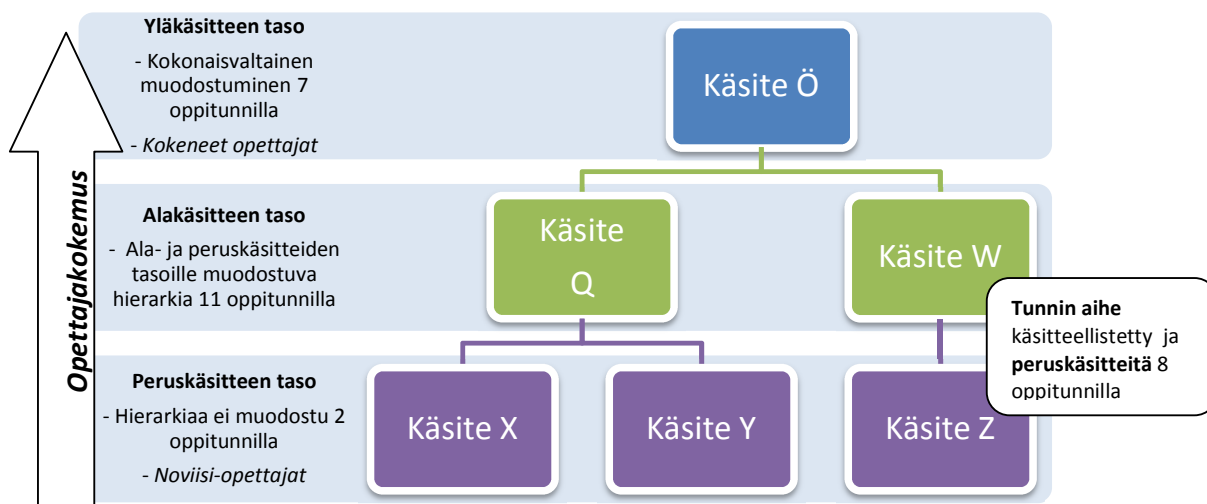
TAULUKKO 9. Opettajakokemus liitettynä tuloksiin matemaattisista käsitteistä ja niiden muodostamista hierarkioista



Noviisien ja kokeneiden opettajien opetuksen välillä on merkittävä ero, kun opetusta tarkastellaan matemaattisten käsitteiden hierarkkisen rakentumisen näkökulmasta. Kokeneiden opettajien hierarkiat olivat kokonaisvaltaisempia ja jakaantuivat useammin kahdelle tai kolmelle hierarkian eri portaalle. Kokeneiden opettajien opetus rakentui aina vähintään kaksiportaisesti, kun noviisien opetuksessa käsitteiden hierarkia saattoi jäädä kokonaan muodostumatta tai se mahdollisesti rakentui ainoastaan peruskäsitteiden ja niiden avulla sanallistetun tunnin aiheen varaan.

#### **5.4 Tulosten yhteenveto**

Tutkimuksen tuloksena havaittiin, että käsitteiden hierarkioita esiintyy matematiikan opetuksessa. Ne rakentuvat opetuksessa eri tavoin tunnin aiheesta ja opettajasta riippuen. On myös mahdollista, ettei matematiikan oppitunnilla muodostu käsitteiden hierarkiaa. Opettajan kokemustausta on yhteydessä opetuksessa muodostuvien käsitteiden hierarkioiden rakentumiseen. Seuraava kuvio kokoaa yhteen tämän tutkimuksen keskeisimmät löydökset käsitteiden hierarkkiseen muodostumiseen liittyen sekä osoittaa, millainen merkitys opettajakokemuksella on hierarkian rakentumisen kannalta. Kuviosta nähdään, kuinka hierarkia voi rakentua eri matemaattisten käsitteiden tasoille ja kuinka se oppitunnista ja opettajasta riippuen muodostuu.



KUVIO 8. Tulokset käsitteiden hierarkioiden muodostumisesta yhdistettynä opettajakokemukseen

Opettajasta ja tunnista riippuen matemaattisten käsitteiden määrät opetuksessa vaihtelivat ja hierarkioita muodostui eri tavoin. Kaiken kaikkiaan seitsemällä oppitunnilla kahdestakymmenestä kahdeksasta (7/28) käsitteet rakentuivat hierarkkisesti kokonaisvaltaisesti perus-, ala- ja yläkäsitteiden tasolle, matemaattisten käsitteiden keskinäisiä suhteita hyödyntäen. Tällöin hierarkian jokaisella tasolla oli sisältöä. Pelkkien peruskäsitteiden tasolle supistuvia oppitunteja oli kaksi kappaletta, eikä hierarkiaa tällöin muodostunut. Hierarkioita muodostui myös kaksiportaisesti, perus- ja alakäsitteiden tasoille rakentuen. Oli myös mahdollista, että opetus rakentui ainoastaan peruskäsitteiden tasolle ja tunnin aihe oli käsitteellistetty kyseisten käsitteiden avulla. Tällöin hierarkian katsotaan muodostuneen niin, että tunnin aihe toimii hierarkian nimikkeenä.

Opettajakokemuksen vuosimäärällä oli yhteys matemaattisten käsitteiden hierarkian muodostumiseen. Alle kymmenen vuotta opettajakokemusta kerryttäneiden opettajien käsitteiden hierarkioiden muodostuminen opetuksessa oli huomattavasti yli kymmenen vuotta opetustyötä tehneitä opettajia vähäisempää. Kokoneiden, yli kymmenen vuotta työssä olleiden opettajien matemaattisten käsitteiden hierarkiat olivat

todennäköisemmin moniulotteisesti rakentuneita niin perus-, ala- kuin yläkäsitteidenkin tasolle. Lisäksi runsaamman opettajakokemuksen myötä matemaattisia käsitteitä esiintyi opetuksessa määrällisestikin enemmän. Noviisi-opettajien käsitteet jäivät usein ainoastaan peruskäsitteiden tasolle eikä matemaattisten käsitteiden hierarkiaa opetuksessa muodostunut välttämättä ollenkaan.

## 6 POHDINTA

Tutkimukset osoittavat, että oppimisen laatuun vaikuttaa muun muassa opettajan pätevyys selittää käsitteitä ja opettaa niitä monipuolisten esimerkkien avulla (Griffin ym. 2009, 320). Oppiminen tuottaa parhaimmillaan selkeän käsitteiden hierarkian, joka laajentaa yksilön tietoutta uusia asiasisältöjä opittaessa (Coley ym. 2004, 218–219). Keskeisessä roolissa tällaisen hierarkian muodostumisessa on opettajan käyttämien käsitteiden vakiointi sekä loogisuus. Tässä osiossa tämän tutkimuksen tulokset yhdistetään aikaisemmin tehtyihin tutkimuksiin. Tutkimustuloksia tarkastellaan muista tutkimuksista saatujen tulosten asettamassa valossa. Osiossa pohditaan myös tutkimuksen luotettavuutta ja eettisyyttä. Lopuksi tarkastellaan vielä tutkimuksen merkittävyyttä ja jatkokysymyksiä alan tutkimukselle.

### 6.1 Tutkimuslöydösten tarkastelu

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, esiintyykö yläkoulun matematiikan opetuksessa käsitteiden hierarkioita ja jos esiintyy, niin millaisia ne ovat. Tutkimus keskittyi kuvaamaan, kuinka käsitteiden hierarkiat rakentuvat opetuksessa ja kuinka opettajan koulutustausta ja kokemus vaikuttavat hierarkioiden muodostumiseen ja ilmenemiseen. Tutkimuksen tuloksena havaittiin, että käsitteiden hierarkioita esiintyy matematiikan opetuksessa, mutta niiden muodostumista ei tapahdu jokaisella oppitunnilla. Matemaattisten käsitteiden hierarkiat rakentuvat opetuksessa eri tavoin tunnin aiheesta ja opettajasta riippuen. Myös opettajan opettajakokemuksen määrä vaikuttaa opetuksessa muodostuvien käsitteiden hierarkioiden rakentumiseen. Mitä enemmän opettajalla on opettajakokemusta, sitä todennäköisempää on matemaattisten käsitteiden käyttö ja niiden hierarkkinen muodostuminen.

Tässä kappaleessa osoitetaan se, kuinka tämän tutkimuksen tulokset puhuvat aiemman tutkimusnäytön puolesta. Yksi tutkimuksen luotettavuutta lisäävä tekijä onkin sen vahvistuvuus, joka tarkoittaa tutkimuksen tuloksien tukemista muiden tutkimustulosten avulla (Eskola & Suoranta 2008, 212). Lisäksi tämä tutkimus lisää tietoa matemaattisten



käsitteiden hierarkioiden muodostumisesta opetuksessa. Tätä pohditaan vielä syvemmin tulevassa osiossa, jossa eritellään tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttavia tekijöitä.

### **6.1.1 Käsitteiden hierarkioiden muodostuminen opetuksessa**

Allsoppin ym. mukaan (2003, 308) laadukkaana opetuksen takaamiseksi on pohdittava, tekeekö oppimisen haastavaksi jokin ongelma opetuksessa tai opetuksen sisällössä. Griffin ja kumppanit (2009, 320) nostavatkin opettajan pedagogiikan ja tämän pätevyyden opettaa käsitteitä oppilaan matemaattisten vaikeuksien pääsyyksi. On todettu, että käsitteiden johdonmukainen opetus ja niiden hierarkkinen rakentuminen helpottaa matematiikan oppimista.

Tutkimus osoitti, että matemaattisten käsitteiden hierarkioiden muodostumisessa on merkittäviä eroja eri opettajien opetuksessa. On siten tärkeää, että opettajat ovat tietoisia käsitteiden käytöstä ja niistä muodostuvista hierarkioista omassa opetuksessaan. Tämä mahdollistaa oppilaalle paremman opetuksen ja kokonaisvaltaisemman oppimisprosessin. Käsitteiden ymmärtämisen syventämien on toinen perusopetuksen perusteissa (2004) vuosiluokille 6-9 esitetyistä matematiikan ydintavoitteista. Tuloksiin nojaten onkin huolestuttavaa, että opetettavien käsitteiden määrät ja niiden tasot vaihtelevat niin suuresti eri opettajien matematiikan opetuksessa.

Käsitteeseen liittyvät säännöt ja niiden järjestelmälliset suhteet toisiinsa nähden luovat matemaattisten käsitteiden hierarkioita (Stovanova 2008, 19; Coley ym. 2004, 218–219). On ensiarvoisen tärkeää, että jokainen käsitteen hierarkian taso on opittu perusteellisesti. Tällöin matemaattisen sisällön oppiminen on selkeää ja laajentaa yksilön tietoutta jälleen uusia matemaattisia käsitteitä opeteltaessa. (Coley ym. 2004, 218–219.) Tutkimuksen tuloksiin viitaten matemaattisen käsitteen hierarkioiden eri portailla on puutteita. On valitettavaa, että osalla oppitunneista hierarkioita ei muodostu ollenkaan. Nämä tulokset yhdistettynä aiempaan tutkimusantiin osoittavat sen, että opettajan pedagogiikka ja opetuksen laatu voivat johtaa oppilaasta riippumattomiin oppimisen vaikeuksiin.

Jos opetuksen laatua halutaan parantaa, olisi se syytä aloittaa pohtimalla tiedostavatko opettajat puutteet opetuksessaan. On mahdollista, että opettaja ei ole tietoinen matemaattisen käsitteen hierarkkisesta rakentumisesta tai siitä, kuinka se kyetään esittämään omassa opetuksessa. Toisaalta tässä tutkimuksessa oli mukana myös opettajia, joiden opetuksessa rakentui loogisia, tasoittain ja rinnakkain käsitteistä rakentuvia hierarkioita, jotka etenevät oppisisällöissä johdonmukaisesti tasolta seuraavalle. Näissä hierarkioissa uusi opetettava käsite rakennetaan jo aiemmin opittujen esikäsitteiden pohjalta.

### **6.1.2 Käsitteiden tasojen ilmeneminen opetuksessa**

Opetuksessa tulee pyrkiä siihen, että oppitunnin aiheeseen liittyvät avainkäsitteet ja niiden väliset suhteet selitetään laajasti ja ymmärrettävästi. Tämä takaa kokonaisvaltaisemman oppimisen. (Allsopp ym. 2003, 315; Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 64.) Hierarkioiden eri käsitteen portailla oli nähtävissä puutteita jokaisen opettajan kohdalla ainakin yhdellä oppitunnilla. Tämä vaikeuttaa oppijan käsitteiden välisten suhteiden ymmärrystä ja loogista ajatusyhteyksien luomista. Ilmiötä havainnollistaa jo aikaisemmin tutkimuksessa esitelty kuvio 1 (s. 7).

Matematiikan tunnin aiheesta muodostetaan käsitys opetuksessa muodostuvan käsitteiden hierarkian perusteella. Tunnin aihe voidaan nähdä konstruktiona, jonka avulla ihminen jäsentää edelleen asiaa koskevaa uutta tietoa (Syrjälä ym. 1994, 117). Hierarkiasta muodostuu eheä, kun käsitteet rakentuvat jokaiselle hierarkian portaalille. Tätä tapahtuu kuitenkin harvoin. Opettajien tulisi ymmärtää käsitteiden opetuksen moniulotteisemmat vaikutukset. Kyse ei ole ainoastaan yhden käsitteen opettamista jättämisestä, vaan puutteesta koko jakson aiheen tietorakenteessa. Matematiikassa korostuu jatkuvasti se, kuinka hyvin aiemmat strategiat ja niiden käyttö on opittu (Griffin ym. 2009, 320). Puute tietorakenteessa voi täten johtaa oppilaan vaikeuteen niin kyseisen jakson kuin tulevienkin jaksojen matemaattisten sisältöjen hallitsemisessa.

Käsitteen opetuksessa olisi hyvä keskittyä niihin käsitteisiin, joita oppija tarvitsee tulevia oppisisältöjä varten (McGowen & Tall 2010, 170). Tutkimuksesta ilmenevä opettajien runsas peruskäsitteiden käyttö kertoo siitä, että opetus pyrkii huomioimaan

oppilaiden esikäsitukset. Samalla käsitteitä kerrataan ja ne palautetaan mieleen yhdessä. Tämä mahdollistaa onnistumisen kokemukset myös itsenäisessä työskentelyssä, mitä jokaisella oppitunnilla harjoitetaan. Tutkimuksen tuloksien myötä on syytä kuitenkin miettiä, hukataanko opettajan pedagogiikan puutteellisuuden seurauksena opetuksen resursseja. Pelkkä peruskäsitteiden opetus ei riitä kokonaisvaltaiseen matemaattisen ilmiön ymmärtämiseksi.

Laaja peruskäsitteiden esiintyminen opetuksessa luo toki niin sanottua ”kivijalkaa” ala-, ylä- sekä pääkäsitteiden (ts. tunnin aiheen) oppimiselle. Käsitteiden runsas käyttö opetuksessa helpottaa mieleen palauttamista. Oli mahdollista, että opetuksessa esiintyi ainoastaan peruskäsitteitä, mikä on huolestuttavaa.. Mitä yksinkertaisempi hierarkia on kyseessä, sitä todennäköisemmin oppija tekee virheellisiä assosiaatioita oman kokemusmaailmansa ja käsitteiden hierarkian välillä (Vamvakoussi & Vouniadou 2004, 65). Tätä ilmiötä voidaan pohtia myös kaksiportaisesti perus- ja alakäsitteiden tasoille rakentuvien hierarkioiden kohdalla.

### **6.1.3 Oppilaan yksilöllisyydestä**

Tutkimuksen tuloksista ilmenee, että käsitteiden hierarkian rakentuminen opetuksessa on usein puutteellista. Tämän myötä hierarkian vaillinaisuus jollain käsitteen portaalla voi johtaa oppilaan ulkolukuun, kun uutta käsitettä ei kyetä assosioimaan jo aiemmin opittuihin käsitteisiin johdonmukaisesti. Koska oppiminen tapahtuu asiantuntijan johdolla (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 56), on opettajalla vastuu opetuksesta ja siitä, millaiseen oppimiseen se johtaa. Jos käsite ei rakennu hierarkkisesti eli loogisesti toisiin käsitteisiin nojaten, tulee oppimisesta haasteellisempää. Puutteet opettajan pedagogisessa toiminnassa vaikeuttavat kokonaisvaltaista matemaattista oppimista. Oppilaan on tällöin oltava itse aktiivinen tiedon etsijä, jotta tietorakenteeseen ei jää aukkoja.

Oppilaan aktiivisen tiedon etsijän rooli ei kuitenkaan ole itsestäänselvyys. Kokemukset matematiikasta sekä itsestä matematiikan oppijana vaikuttavat myös suuresti kyseisen aineen oppimiseen ja motivaatioon (Huhtala & Laine 2004, 320). Oppilas voi olla passiivinen, epämotivoitunut eikä tämä välttämättä ymmärrä puutteita omissa

tietorakenteissaan. Haasteeksi nouseekin, kuinka opettaja kykenee havaitsemaan vaikeuksien perimmäisen syyn – on se sitten opettajan omasta pedagogiikasta tai oppijasta johtuva. On siis erittäin tärkeää, että opettaja kykenee tarkastelemaan omaa opetustaan ja siinä jäsentäviä tietorakenteita kriittisesti.

Matemaattisten käsitteiden opettaminen liittyy vahvasti sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen. Ideaalitilanteessa matemaattiset käsitteet rakentuisivat jo aiemmin opitun, mahdollisesti alemman tason käsitteen varaan. Matemaattisten käsitteiden opetuksessa otetaan huomioon oppilaan aikaisemmat kokemukset, tiedot ja taidot sosiokonstruktivistisen opetuksen periaatteiden mukaisesti. Uusi käsite on mahdollista oppia vasta sitten, kun se tulkitaan aikaisemmin rakentuneiden käsityksien ja tietojen avulla. (Puolimatka 2002; Siljander 2005; Yrjönsuuri 2004, 111–112.) Tällöin hierarkiasta voidaan rakentaa looginen kokonaisuus, joka yhdistää oppijan ajattelujärjestelmän matematiikan abstraktiin maailmaan.

Vaikka matemaattinen ongelmanratkaisu kehittyy oppilaan hallitessa matemaattiset käsitteet (Morales, Shute & Pellegrino, 1985), voi tunnin aiheen käsitteellistämättä jättäminen johtaa oppilaan vaikeuteen ymmärtää matemaattisen aiheen kokonaisuutta. Oppilas opettelee ainoastaan käsitteitä, tietämättä mihin ne varsinaisesti liittyvät. Kaiken lisäksi, vaikka matemaattiset käsitteet rakentuisivatkin opetuksessa loogisesti jokaiselle käsitteen portaalle, ei oppilaan uuden tiedon oppiminen ole itsestäänselvyys. Uuden tiedon oppimiseen vaikuttaa esimerkiksi opetuksen monipuolisuus ja eri aistikanavien hyödyntäminen (Katai ym. 2008, 1707; Katai 2008, 234).

Myös oppilaiden aktiivisen opetukseen osallistamisen on tutkittu tukevan heidän oppimistaan passiivisen vastaanottajan roolin sijaan (Ediger 2012, 235). Opetustilanteessa oppilaasta tulisi passiivisen oppijan sijaan tehdä aktiivinen osallistuja, joka kognitiivisen osallistumisen lisäksi voi hyödyntää oppimisessa omaa subjektiivisuuttaan ja näin ollen saavuttaa syvempää ymmärrystä käsitteistä (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 56).

Ongelmat oppilaan käsitteiden hierarkian muodostuksessa voivat johtaa laajempaan yksilön matemaattiseen oppimisvaikeuteen (Das & Janzen 2004, 191–195). Tämän tutkimuksen osoittaman matemaattisten käsitteiden hierarkkisen muodostumisen opetuksessa voidaan todeta olevan merkittävä matemaattiseen osaamiseen vaikuttava tekijä. Opettajan tulee tiedostaa tämä ja pyrkiä kehittämään pedagogista osaamistaan niin, että opetuksessa matemaattisista käsiteistä muodostuu loogisia hierarkioita. Tämä palvelee niin opettajan kuin yksilönkin etua.

#### **6.1.4 Opettajakokemuksen vaikutus hierarkioiden opetukseen**

Käsitteiden lukumäärien ja niiden hierarkkisten muodostumien vertaaminen opettajakokemuksen määrään osoittaa, että enemmän kokemusta kerryttäneiden opettajien opetusdiskurssi on hierarkkisesti jäsentyneempää. Tässä tutkimuksessa noviisien, alle kymmenen vuotta opettajakokemusta kerryttäneiden opettajien opetus oli käsitteiden määrienkin puolesta suppeampaa. Noviisi-opettajien opetuksessa käsitteiden hierarkioiden muodostuminen oli huomattavasti yli kymmenen vuotta opetustyötä tehneitä opettajia vähäisempää. Kokeneiden, yli kymmenen vuotta työssä toimineiden opettajien matemaattisten käsitteiden hierarkiat olivat noviiseja todennäköisemmin moniulotteisesti rakentuneita niin perus-, ala- kuin yläkäsitteidenkin tasolle.

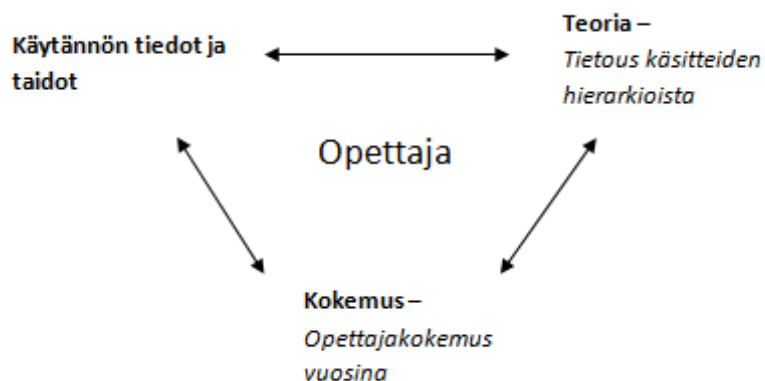
Tästä voidaan päätellä, että matematiikan opettajan käsitteiden hallinta ja hierarkkinen osaaminen kehittyy kokemuksen myötä. Asiantuntijuuden lisääntyessä opettaja kykenee erottamaan opetuksessa olennaiset tietorakenteet, mihin aloittelijat eivät välttämättä vielä kykene (National Research Council 2004, 44–45). Opettajakokemus tekee opetuksesta johdonmukaisempaa, jolloin se rakentuu moniulotteisemmin. Tällöin niin perus-, ala- kuin yläkäsitteiden ilmeneminen opetuksessa on todennäköisempää.

Opettajakokemuksen määrän vaikutuksista opetuksen laatuun on tehty aiempaa tutkimusta eri oppiaineissa, myös matematiikassa (Hogan ym. 2003, 235). On todettu, että opettajakokemuksen myötä opettajan ammattitaito kasvaa. Ammatissa työskenteleminen mahdollistaa opettajalle käytännön kokemukset opetuksesta, mikä edistää opettajan omien tietojen ja taitojen kehittämistä omaan oppiaineeseensa liittyen. Opettajan laajempi tietopohja ja kokonaisvaltaisempi ymmärrys oppiaineensa teoriasta

johtavat johdonmukaisempaan ja loogisempaan opetukseen. Opettajan sisäisiin ajatusmalleihin kehittyvät menetelmiä, jotka ohjaavat tätä parempaan opettamiseen ja opettajat oppivat tiedostamattaankin, millainen opetus on tehokasta ja miksi. (Hogan ym. 2003; Lunenberg & Korthagen 2009, 226–227.) Lunenbergin ja Korthagenin (2009, 227) mukaan tätä kutsutaan opettajan kontekstuaaliseksi viisaudeksi.

Shulman (1986) on puolestaan esittänyt teorian opettajan sisällöllisen viisauden kasvusta opettajakokemuksen myötä. Tässä tutkimuksessa konkari-opettajaksi lukeutuvan Orvokin vähäinen käsitteiden määrä opetuksessa voidaan nähdä juuri oppiaineen sisällöllisenä viisautena. Ei ole itsestään selvyyttä, että käsitteiden vähäinen määrä johtaisi aina heikkoon opetusdiskurssin hierarkkisuuuteen. Opettajakokemukseltaan hyvin kokenut opettaja pystyy ammattitaidollaan rakentamaan matemaattisten käsitteiden hierarkian opetuksessaan myös käyttämällä vähemmän käsitteitä. Tällöin opettajalta edellytetään erinomaista kykyä valikoida opetukseen juuri ne käsitteet, mitkä ovat tunnin aiheen kannalta keskeisiä. Opetussisältöjen hallinta tarkoittaa opettajan tietoisuutta näistä keskeisistä käsitteistä, mikä kasvaa opettajakokemuksen myötä. (Hogan ym. 2003, 236.) Tietoisuus tehokkaasta opetuksesta puolestaan ohjaa opettajien toimintaa luokassa (Huang & Li 2012, 420).

Seuraava kuvio mallintaa aikaisemmin tutkimuksen piirissä tarkasteltua opetuksen triangulaatiota. Se kuvaa opetuksen muodostumiseen keskeisesti vaikuttavia kolmea elementtiä: käytännön tietoja ja taitoja, teoriaa sekä kokemusta. Lunenbergin ja Korthagenin (2009) mukaan nämä kolme asiaa yhdistettynä opettajan omaan persoonaan muodostavat opetuksen. Kyseinen aiemmassa tutkimuksessa luotu malli on seuraavassa kuviossa yhdistetty tämän tutkimuksen tuloksiin.



KUVIO 9. Käytännön tietojen ja taitojen, teorian ja kokemuksen triangulaatio (mukaillen Lunenberg & Korthagen 2009, 229).

Keskeisten käsitteiden ymmärtämiseksi on opettajan siis oltava tietoinen opetussisältöjä koskevasta teoriasta. Opettajakokemuksen karttuessa tietoisuus käsitteiden hierarkioista kasvaa, joten tässä tutkimuksessa havaitut laadulliset erot opetuksessa voidaan ainakin osittain selittää opettajakokemuksen määrällä. Kokeneet opettajat ovat tietoisia oppilaiden matemaattista ajattelua kehittävästä opetustavoista ja kykenevät muuttamaan opetustaan tunnin aiheeseen sopivaksi (Huang & Li 2012, 430). Kognitiivinen ajattelu opetustyössä ei noviisilla opettajalla ole myöskään vielä niin kehittynyttä, kuin kauemmin opettajana toimineilla (Hogan ym. 2003, 237).

Lopputulemana voidaan todeta, että matematiikan opettajien hierarkkinen osaaminen ja tietoisuus käsitteistä kehittyvät opettajakokemuksen myötä. On todennäköistä, että opettajakokemuksen lisääntyessä myös matemaattiset käsitteet rakentuvat opetuksessa hierarkkisemmin. National Research Council (2004, 49) kirjoittaa, että asiantuntijan kyky tunnistaa asioita, joita aloittelija ei huomaa, on tärkeää opetuksen kehittämisen kannalta. Opettajakokemuksen lisääntyessä ammatillinen osaaminen syvenee ja täten syntyy mahdollisuus myös opetuksen laadun parantamiselle.

## 6.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, muodostuuko yläkoulun matematiikassa käsitteiden hierarkioita ja jos muodostuu, niin kuinka ne tällöin rakentuvat. Tarkoituksena oli tutkia myös, kuinka opettajan koulutustausta ja kokemus mahdollisesti vaikuttavat hierarkioiden muodostumiseen ja ilmenemiseen. Tutkimuksen luotettavuutta arvioitaessa on otettava huomioon tutkijan avoimuus eli suosiiko tutkimus tietoisesti tai tiedostamatta joitain ajatuksia vai onko se avoin kaikille hypoteeseille. Tässä tutkimuksessa hypoteesit luotiin ennen aineiston analyysiä. Tästä huolimatta tutkija oli jatkuvasti kriittinen omaa työskentelyään kohtaan. Jokainen aineistoyksikkö otettiin huomioon ja sisällytettiin analyysiin. Luotettavuuden parantamiseksi analyysivaiheen ratkaisujen kyseenalaistaminen oli säännöllistä, jotta tutkimuksen tulokset ilmenisivät mahdollisimman totuudenmukaisina.

Koska aineiston litterointiin on käytetty keskusteluanalyysiä, on tutkimuksen luotettavuuden kannalta pohdittava myös tätä tutkimuksen vaihetta. Videomateriaali muutettiin kirjalliseen muotoon keskusteluanalyysin periaattein. Keskusteluanalyysissä tarkastelun kohteena on jokin kommunikatiivinen tapahtuma, jossa muodostuu tietynlaisia keskusteluita kontekstiinsa liittyen (Titscher ym. 2000, 149; Wooffitt 2005). Se, että keskusteluanalyysissä on käytetty nauhoitteita, voidaan Heritagen (1996) mukaan nähdä parantavan tutkimuksen luotettavuutta.

Titscher, Meyer, Wodak ja Vetter (2000, 163) toteavat keskusteluanalyysin käytön olevan vaativa prosessi. Siinä tulee kääntää kirjalliseen muotoon kaikki tässä tapauksessa opetuksen tapahtumat niin, että lukija saa todenmukaisen kuvan keskustelusta. Työ vaatii tarkkuutta. Videotallenteiden yhdistämisen kirjalliseen aineistoon nähdään luotettavuutta parantavana tekijänä, koska tällöin on mahdollista ottaa esimerkiksi konteksti huomioon sekä tarkistaa mahdolliset litteroidun aineiston epäselvyydet (Flick 2006, 243). Videotallenteiden käyttöä luotettavuuden näkökulmasta tarkasteltaessa on myös tärkeää, ettei kamera ole hallitsevassa asemassa sosiaalisessa tilassa (Flick 2006, 242). Tässä tutkimuksessa kamera sijoitettiin jokaisella tunnilla jo valmiiksi ennen oppilaiden saapumista tilaan luokan taka-osaan. Kuvaaminen pyrittiin



pitämään mahdollisimman vähän huomiota herättävänä ja opettajille oli kerrottu etukäteen, että heidän opetustaan tullaan kuvaamaan.

Patrikainen ja Toom (2004) toteavat, että yksilö ei kykene kontrolloimaan käytöstään kuin lyhyen ajanjakson verran. Voidaan täten olettaa opettajien toimineen opetuksessa kuten normaalistikin, koska videointi kesti kauan. Tämän tutkimusaineiston kannalta videoinnissa olennaisinta oli äänen tallentuminen, mikä onnistui moitteitta. Flickin (2006, 242) mukaan videotallenteiden ongelma aineistonkeruumenetelmänä on kameran suuntaaminen, mikä ei myöskään alenna tämän tutkimusaineiston luotettavuutta.

Erilaiset voimasuhteet keskustelutilanteessa voivat myös vaikuttaa aineiston lopulliseen kirjalliseen muotoon (Titscher ym. 2000, 151). Tässä tutkimuksessa opettajan rooli opetuskeskustelun johtavana osapuolena voi johtaa vääristymiin kirjallisissa dokumenteissa. Kuitenkin useamman tutkijan osallistuminen aineiston keruuseen lisää sen luotettavuuden tasoa, niin videointi- kuin kirjoittamisvaiheessakin (Flick 2006, 243; Titscher ym. 2000, 67; Tuomi & Sarajärvi 2011, 140).

Koska tämä tutkimus toteutettiin laadullisena, on pohdittava myös aineiston suuruutta ja riittävyttä tulosten yleistettävyyden kannalta. Laadullisen aineiston kattavuuden määrittäminen etenkin ennakkoon on lähes mahdotonta (Eskola & Suoranta 2008, 215; Hirsjärvi ym. 2009, 181). Tässä tutkimuksessa aineiston koko oli ennalta määrätty, ja tutkimuskysymysten rajaamiseen vaikutti aineiston sisältö.

Useiden tutkimusmenetelmien hyödyntäminen ja analyysin monivaiheinen prosessointi vaati analyysiä tehtäessä paljon työtä. Eskolan ja Suorannan (2008, 210) mukaan laadullisessa tutkimuksessa tutkija on tutkimuksensa keskeinen tutkimusväline. Tämän takia tutkijalla oli velvollisuus kirjata jokainen tutkimuksen vaihe niin, että lukija pystyy seuraamaan tutkimuksen kulkua aineiston keruusta sen analysointiin asti. Tutkimusprosessin huolellinen kuvaaminen nostaa tutkimuksen luotettavuutta. (Flick 2000, 369; Titscher ym. 2000; Tuomi & Sarajärvi 2011, 141.) Raportoinnissa on kirjattu jokainen tutkimuksen vaihe tarkasti. Aineistosta nousevia matemaattisia käsitteitä on listattu hierarkkisiksi kuvioiksi ja taulukoiksi. Tällainen aineiston havainnollistaminen

tekee analyysivaiheen selkeäksi, jolloin lukijalla on mahdollisuus muodostaa aineistosta vielä oma analyysinsa (Seedhouse, 2005).

Laadullisessa tutkimuksessa on mietittävä sen siirrettävyyttä. Tulosten siirrettävyys täytyy kyseenalaistaa, koska laadullinen tutkimus keskittyy tiettyihin tapauksiin, prosesseihin tai olosuhteisiin (Flick 2006, 391). Tuomen ja Sarajärven mukaan (2011, 138) tulosten siirrettävyys on riippuvainen toisen kontekstin samankaltaisuudesta. Tutkimuksen aineisto kerättiin Suomessa yläkouluilla 8. luokan matematiikan opetuksessa, joten opetuksen konteksti kotimaan rajojen sisällä on samankaltainen paikkakunnasta riippumatta. Tämä on pääosin valtakunnallisen opetussuunnitelman ansiota. Tutkimustulosten siirrettävyyden ansiosta tutkimus lisää suomalaisten opettajien tietoutta matemaattisten käsitteiden hierarkkisesta rakentumisesta opetuksessa ja herättää opettajia oman opetuksensa laadulle.

Siirrettävyyden myötä opettajien kriittisyys omaa opetustaan kohtaan on mahdollista ja näin ollen voidaan parantaa opetuksen tasoa. Parhaimmassa tapauksessa tämän tutkimuksen myötä opettajien tietoisuus matemaattisten käsitteiden monitasoisista hierarkkisista rakenteista kasvaa ja he keskittyvät opetuksessaan eheään ja suunnitelmalliseen käsitteiden opetukseen. Hirsjärvi ja muut (2009, 182) toteavat, että yksittäisissä tapauksissa toistuu jokin yleinen ilmiö. Näin ollen tutkimalla riittävästi yksittäisiä tapauksia saadaan tietoa ilmiöstä myös yleisellä tasolla. Täten tämän tutkimuksen tulosten siirrettävyys on täysin mahdollista.

Toisaalta tutkimus keskittyi ainoastaan kuuteen eri opettajaan. Ihmistutkimuksessa yleistysten tekemisessä on aina omat ongelmansa. Ihminen on yksilö, jolla on oma tapansa toimia. Kuitenkin kuuden eri opettajan opettajakokemukseen peilaten tehdyt huomiot käsitteiden hierarkioiden rakentumisesta osoittavat sen, että tutkimustulokset ovat yleistettävissä. MUST-hankkeen aineistosta tehtävistä tutkimuksista oli kerrottu tutkimukseen osallistuneille opettajille etukäteen. He olivat tietoisia, että tutkimukset käsittelevät uuden asian opettamista ja käsitteiden selittämistä eriyttämisen, esimerkkien ja ymmärtämisen näkökulmasta. Opettajat tiesivät, että heidän opetusmenetelmänsä tulisivat olemaan tutkimuksen kohteena. Koska tutkittavia aiheita oli monipuolisesti ja

niistä tultiin tekemään useampia tutkimuksia, ei opettajan ollut mahdollista muuttaa opetuksessaan yhtä tutkittavaa tapaansa. Täten hankkeen monipuolisuuden voidaan nähdä nostavan tutkimuksen luotettavuutta.

Flick (2000, 371) toteaa laadullisen tutkimuksen perimmäiseksi ongelmaksi tutkijan subjektiivisuuden ja tämän omat intressit. Koska tutkimusta tehtäessä tutkija ja tutkittava ovat tekemisissä keskenään, on tutkija siksi mukana tilanteessa subjektiivisten kokemustensa kanssa (Syrjälä & Numminen 1988, 9). Eskolan ja Suorannan (2008, 212) mukaan tutkimuksen luotettavuuden lisäämiseksi on huomioitava tutkijan ennako-odotukset.

Tässä tutkimuksessa hypoteesina olivat käsitteiden hierarkkinen rakentuminen matematiikan yläkoulun opetuksessa ja opettajakokemuksen vaikutukset niiden muodostumiseen. Se, ettei tutkija ollut tavannut opettajia tai itse seurannut oppituntien kulkua, loi mahdollisuuden objektiiviselle litteroidun aineiston tarkastelulle. Tutkijalla ei ollut ennako-oletuksia opettajia kohtaan tai mielipiteitä heidän toiminnastaan. Tämä mahdollisti litteroidun aineiston analysoimisen puhtaasti alkuperäisilmauksiin perustuvana toimintana. Kukin opettaja edusti aineistossa itseään opetuksessa ilmenevien matemaattisten käsitteiden kautta. Myös tutkimustulosten yhdistäminen aiemmin saatuihin tuloksiin lisää tutkimuksen objektiivisuutta (Flick 2006, 375).

Tutkimukseen osallistuvien opettajien taustatiedot saatiin vasta sen jälkeen, kun analyysi käsitteiden hierarkioiden muodostumisesta oli tehty. Tämä tarkoittaa sitä, että analyysiin ei vaikuttanut tutkijan aiempi tietous tutkimukseen osallistuvien opettajien opettajakokemuksesta. Tutkija tiesi ainoastaan, että opettajien kokemustaustat poikkeavat toisistaan. Tietous opettajien taustoista ei täten ohjannut käsitteiden analyysiä tutkimustehtävän intressejä palvelemaan suuntaan. Matemaattisten käsitteiden ilmenemistä tarkasteltiin yhdistämällä ne opettajien taustatietoihin vasta luokittelujen ja kuvioiden tekemisen jälkeen.

Opettajien taustatiedot kerättiin kyselylomakkeella. Lomakkeet lähetettiin jokaiselle opettajalle henkilökohtaisesti. Täten tiedot opettajakokemuksesta perustuvat opettajien

henkilökohtaiseen tiedonantoon, eikä tutkimuksen tekijällä ollut mahdollisuutta tarkistaa tiedon todenperäisyyttä. On kuitenkin oletettavaa, että opettajat osasivat arvioida oman opettajakokemuksensa ainakin niin, että se tämän tutkimuksen kannalta on riittävän tarkka. Ei ole myöskään nähtävissä syytä, miksi opettaja valehtelisi oman opettajakokemuksensa määrän.

Tässä tutkimuksessa on otettava huomioon vielä MUST-hankkeen tarkoitus ja sen asettamat suuntaviivat tälle tutkimukselle. Tutkijan sekä muiden tutkimukseen vaikuttavien tahojen aiempi tieto aiheesta vaikuttaa tutkimuksen suuntaukseen (Titscher ym. 2000, 67). Valmiiksi kerätty tutkimusaineisto ja tutkimuksen aihe saatiin pro gradu –tutkielman ohjaajalta Piia Björniltä, joka toimii erityispedagogiikan lehtorina Jyväskylän yliopistossa. MUST-hanke tutkii matematiikan oppimisen sosiokulttuurista taustaa, ja aihe on kokonaisuudessaan merkittävä. Tämä tutkimus kattaa hankkeesta vain pienen osan, mutta tukee sen kokonaisvaltaista ilmiön selittämistä. Suuri ryhmä tutkimuksen takana merkitsee myös keskinäistä kritiikkiä, mikä edistää hyvän tieteen tekemistä.

Sisällönanalyysi mahdollisti useampia eri tapoja analysoida aineistoa. Aineistosta tehtiin monia eri luokitteluja ja sisällönanalyysin keinoin pystyttiin hyödyntämään yhteensä neljää eri analyysitapaa. Jokaista analyysirunkoa tukevat lukuisat esimerkit eli aineistosta suoraan lainatut käsitteet. Tämä parantaa analyysin luotettavuutta ja sitä, että luokittelussa on jatkuvasti pysynyt sama, tarkoituksenmukainen linja (Flick 2000, 369; Titscher ym. 2000, 60). Lisäksi jokainen analyysiyksikkö on otettu huomioon luokitteluja ja kuvioita tehtäessä.

Yhtenä käytettyjen tutkimusmenetelmien rajoituksena pidetään sisällönanalyysin keskittymistä ainoastaan juuri edellä mainittuihin kirjallisesta aineistosta kumpuaviin aineistoyksiköihin (Titscher ym. 2000, 58). Toisaalta tässä tutkimuksessa merkittävää on juuri opetuksessa sanallistetut käsitteet. On kuitenkin mahdollista, että jotkin opetuksessa ilmenevät matemaattiset käsitteet tulevat esiin ainoastaan kirjallisessa muodossa, kuten oppikirjaan kirjoitettuna. Tällöin sisällönanalyttisin keinoin ei ole mahdollista analysoida käsitteitä litteraateista ja liittää niitä käsitteiden hierarkkisen

rakentumisen tarkasteluun. Toisaalta opetus tapahtui oppitunneilla opettajajohtoisesti, joten mahdollinen käsitteiden uupuminen analyysistä ei ole merkittävä käsitteiden lopulliseen hierarkkiseen rakenteeseen vaikuttava tekijä. Lisäksi tutkimus tarkastelee matematiikan opetusta, joten itsenäinen kirjasta opiskelu ei ole tässä tapauksessa olennaista.

Aineiston analyysivaiheessa peruskäsitteiden koodausvirheet olivat mahdollisia, huolellisuudesta ja useiden eri analyysimenetelmien käytöstä huolimatta. Kaksi oppituntien litteraattia oli sisällöltään vajaita, koska videotallennus oli epäonnistunut ja keskeytynyt noin kymmenen minuutin kohdalla. Nämä tyngät litteraatit päätettiin sulkea tutkimuksen analyysin ulkopuolelle, koska ne eivät olleet sisällöltään merkittäviä käsitteiden kokonaisvaltaisen hierarkkisen rakentumisen kannalta. Tämä pienentää kyseisen opettajan opetuksen analyysiyksiköiden määrää. Nämä seikat eivät kuitenkaan alenna tutkimuksen luotettavuutta muutoin laajan aineiston ansiosta. Analyysiyksikköjä eli matemaattisia käsitteitä esiintyi aineistossa kaiken kaikkiaan 3360 kappaletta. Kokonaiskuvaan mahdollisten satunnaisten peruskäsitteiden puuttumisen vaikutus ei tässä tutkimuksessa ole merkittävä.

Useiden eri analysointimenetelmien triangulaatio edistää tutkimustulosten luotettavuutta (Flick 2006, 390). Sisällönanalyysin mahdollista tutkimusmenetelmällistä yksipuolisuutta tukemaan tutkimusmenetelmäksi valikoitui fenomenografia. Tämän tutkimusmenetelmän käyttö mahdollisti tutkimusaiheen tarkastelun ja analysoinnin myös ilmiön laajemmasta näkökulmasta sekä opettajakokemuksen yhdistämisen hierarkkiseen muodostumiseen. Täten se edistää myös tulosten yleistämisen mahdollisuutta.

### **6.3 Tutkimuksen eettisyys**

Laadullisessa tutkimuksessa tiedon hankintaprosessiin yhdistyy monia eettisiä kysymyksiä. Tutkijan tulee tehdä useita eettisiä päätöksiä työhönsä liittyen. (Eskola & Suoranta 2008; Flick 2006, 45; Hirsjärvi ym. 2009, 23.) Eskolan ja Suorannan (2008)

mukaan eettisten ongelmakohtien huomioimiseksi tulee tutkijalla olla tiettyä herkkyyttä. Vaikka laadullisen tutkimuksen eettisyyden kriteerit voidaan nähdä suosituksina, on tämän tutkimuksen uskottavuuden kannalta niiden tarkastelu tärkeää.

Tutkimuslupien eettisyyttä määriteltäessä on mietittävä, voiko tutkimus tuottaa tutkittaville ahdistusta (Eskola & Suoranta 2008, 53; Mayan 2009, 126). Tutkimusluvut (liite 1) kerättiin tutkimuksen alkuvaiheessa. Tutkimuksen tarkoitusta ja toteutusta kuvaileva tiedote (liite 2) lähetettiin oppilaille ja heidän vanhemmilleen tutkimusluvan mukana, mikä on eettisyyden kannalta tärkeää (Flick 2006, 46). Lähes jokaisesta luokasta ilmeni vähintään yksi ilman tutkimuslupaa jäänyt oppilas. Kyseisten oppilaiden toimintaa ei kuvattu, eikä heitä ole millään tavoin liitetty tähän tutkimukseen. Tämän tutkimuksen keskiössä oli opetus. Täten tutkimuskysymysten kannalta ei tiettyjen oppilaiden sulkeminen tutkimusaineistosta pois ollut ongelma. Tutkimuksen eettisyyttä nostaa tutkimushenkilöiden vapaaehtoinen tutkimukseen osallistuminen (Flick 2006, 49; Kuula 2006, 106; Mayan 2009, 127).

Anonymiteetti ja luottamuksellisuus ovat kaksi keskeisintä käsitettä tietojen käsittelyssä, ja ne on otettava huomioon myös tutkimusta julkistettaessa (Eskola & Suoranta 2008, 56–57; Flick 2006, 49; Kuula 2006, 64; Tuomi & Sarajärvi 2009, 131). Niin tutkija itse kuin muutkin tutkimusaineiston kanssa työskennelleet ovat pitäneet huolen siitä, etteivät tutkimukseen osallistuvien tiedot esiinny missään raporttien osissa. Osallistuvien opettajien nimet on muutettu, eikä yläkoulujen maantieteellistä sijaintia mainita. Opettajakokemuksen vuosimääriä ei ilmoiteta suoraan, vaan ne on jaettu useamman vuoden mittaisiin jaksoihin.

Ongelmia voi liittyä myös tutkimusaineiston keruuseen (Eskola & Suoranta 2008, 52). Tutkimukseen osallistuville opettajille ja oppilaille oli kerrottu videokuvaamisesta etukäteen. Lisäksi opettajat olivat tietoisia MUST-hankkeen suuntauksesta ja siitä, että aineistosta tehtävät tutkimukset käsittelevät käsitteiden selittämistä esimerkkien, ymmärtämisen ja eriyttämisen näkökulmista sekä uuden asian opettamista. On tärkeää tehdä yhteistyötä tutkittavien kanssa ja tutkimukseen osallistuville henkilöille tulisi kertoa tutkimuksen tarkoituksesta (Eskola ja Suoranta 2008, 54). Koska hankkeen

nimissä kerätystä aineistosta tultaisiin tekemään useampia tutkimuksia, ei kaikkien yksittäisten tutkimusaiheiden nimeäminen ollut mahdollista. Kuitenkin niin opettajat kuin oppilaatkin olivat tietoisia tutkimusten suuntaviivoista ja MUST-hankkeen tarkoituksesta. Oppilaiden tiedottamisesta vastasi heidän koteihinsa lähetetyt, jo aiemmin mainitut tiedotteet (liite 2).

Oppilaat eivät tiedäneet, olivatko kamera ja tutkija luokassa analysoimassa koko ryhmän toimintaa, opettajaa vai oppilaita. Oppilaille ei kerrottu tarkasti, minkälaisesta tutkimuksesta oli kyse. Tällaisessa tapauksessa on mietittävä, tuottaako tutkimus tutkittaville enemmän hyötyä vai haittaa (Eskola & Suoranta 2008, 56; Flick 2006, 48; Mayan 2009, 126). Tutkimus voidaan nähdä niin oppilaiden kuin opettajienkin tulevaisuutta ajatellen hyödyllisenä. Opettajien tietoisuuden omia opetusmenetelmiänsä kohtaan lisääntyessä he pystyvät kehittämään mahdollisia heikkouksiaan. Pedagogisen toiminnan parantuessa opetuksesta tulee johdonmukaisempaa, mikä helpottaa oppilaiden oppimista. Parhaimmassa tapauksessa tutkimus johtaa opetuksen laadun nousuun ja parempiin oppimistuloksiin.

Eskola ja Suoranta (2008, 53) sekä Flick (2006, 46) puhuvat tutkimuskohteen hyväksikäytöstä tutkimusprosessin ongelmana. Tässä tapauksessa tutkimushenkilöt tarjosivat tutkimuksen intressien mukaisen aineiston. Opettajien henkilökohtaisten taustatietojen avulla tutkimuksen tulokset saivat uuden näkökulman. Tutkimuksen perimmäinen tavoite on kuitenkin tuoda tutkimushenkilöidenkin ulottuville tietoa matemaattisten käsitteiden hierarkioista ja niiden opetuksesta. Tässä onnistuttiin, joten uuden tiedon luominen itsessään jo nostaa tutkimuksen eettisyyttä (Flick 2006, 48).

#### **6.4 Tutkimuksen merkittävyys ja jatkokysymykset**

Tutkimuksen tulokset osoittavat, että matematiikan yläkoulun opetuksessa esiintyy matemaattisia käsitteitä, jotka voivat rakentua hierarkkisesti toisiinsa nojautuen. Käsitteiden hierarkiat voivat rakentua opetuksessa usealle tasolle tai päinvastoin jäädä muodostumatta. Matemaattinen käsitteiden hierarkia voi myös jäädä vajaaksi, jolloin tunnin aiheen kannalta olennaisia käsitteitä ei opetuksessa esiinny lainkaan. Tämä

tarkoittaa epäjohdonmukaisuutta opetuksessa. Aukko oppijan tietorakenteessa voi johtaa vaikeuksiin uusien matemaattisten käsitteiden oppimisessa. Uusi käsite on mahdollista oppia vasta sitten, kun se tulkitaan aikaisemmin rakentuneiden käsityksien ja tietojen avulla. (Puolimatka 2002; Siljander 2005; Yrjönsuuri 2004, 111–112.) Täten tutkimustulokset osoittavat, että puutteellinen matemaattisten käsitteiden hierarkioiden opetus voi johtaa oppijasta riippumattomiin vaikeuksiin ja alempiin oppimistuloksiin matematiikassa.

Tämä tutkimus herättää pohtimaan laadukkaan opetuksen kriteerejä. Laadukkaamman opetuksen takaamiseksi on mietittävä, tekeekö oppimisen haastavaksi jokin ongelma opetuksessa tai opetuksen sisällöissä (Allsopp ym. 2003, 308). Tulokset osoittavat matemaattisten käsitteiden hierarkkisen rakenteen opetuksessa. Hierarkkinen muodostuminen ei ole itsestäänselvyys, vaan niiden muodostumisessa on huomattavia eroja opettajien välillä. Tutkimus osoittaa, että oppilaan matemaattisen vaikeuden taustalla voi olla jokin ongelma tai puute opetuksessa.

Tässä tutkimuksessa ei päästy käsiksi siihen, eroavatko oppilaiden oppimistulokset sen mukaan, millaisia käsitteiden hierarkioita opettajien opetusdiskursseissa esiintyi. Tutkimustulosten myötä lukijan on kuitenkin mahdollista tarkastella opettajan pedagogista toimintaa kriittisesti ja kyseenalaistaa, onko oppimistulosten perimmäinen syy oppijassa vai opettajassa. Näin ollen myös opettajille tarjoutuu keino tarkastella omaa toimintaansa pedagogisena toimijana uudesta näkökulmasta – opettajilla kun ei juuri ole mahdollisuuksia havainnoida muiden luokkahuoneiden tapahtumia (Marshall 2006).

On merkittävää tiedostaa myös opettajakokemuksen vaikutukset käsitteiden hierarkioiden muodostumiseen opetuksessa. Johdonmukainen käsitteiden hierarkioiden opettaminen todistetusti edistää oppimista (Ausubel ym. 1968; Ediger 2012; Stoyanova 2008; Zain ym. 2012) ja täten vähäisen opettajakokemuksen vaikutukset opetukseen on huomioitava jo opettajankoulutuksessa. Tutkimuksesta ilmenee, miten merkittävä tekijä opettajan kokemus on loogisen ja hierarkkisesti rakentuvan opetuksen muodostumiselle. Matematiikan opettajan hierarkkinen osaaminen kehittyy kokemuksen myötä, joten jo



matematiikan aineenopettajien koulutuksessa voitaisiin keskittyä matemaattisten käsitteiden hierarkkiseen rakentumiseen ja sen huomioimiseen tulevassa opettajan ammatissa.

Lunenberg ja Korthagen (2009) esittävät opettajankoulutukseen reflektiomallia, jossa korostettaisiin käytännön, kokemuksen ja teorian tuntemuksen merkityksiä tulevassa opettajan työssä. Opettajaopiskelijoille voitaisiin tarjota esimerkiksi hierarkkisen opetuksen suunnitelmaa. Tällöin jo ennen opetusjakson alkua jaksossa muodostuva käsitteiden hierarkia olisi määritelty valmiiksi. Teorian hallitseminen on aloittelevilla opettajilla heikompaa kuin kokeneilla opettajilla (Hogan ym. 2003; Lunenberg & Korthagen 2009, 237). Valmiiksi luodun, teoreettisen mallin avulla opetuksessa voitaisiin yhdessä oppilaiden kanssa seurata, kuinka opetuksen edetessä liikutaan hierarkiassa portaalta toiselle. Tämä edesauttaisi johdonmukaisen ja loogisen opetuksen suunnittelussa ja opettaja olisi jatkuvasti tietoinen opetuksensa johdonmukaisuudesta.

Käsitteiden hierarkioiden tutkiminen myös oppimisen näkökulmasta olisi oppimista edistävä, opetukseen lisää laatua tuova jatkotutkimusaihe. Oppilaat usein keskittyvät tunnilla niihin asioihin, jotka stimuloivat heidän aistejaan (Allsopp ym. 2003, 310). Pelkkä mekaaninen opetus ei riitä kokonaisvaltaisen oppimisen saavuttamiseksi. Tässä tutkimuksessa havaitaan, että matemaattiset käsitteet voivat rakentua opetuksessa hierarkkisesti, mutta tasojen määrä ja kokonaisvaltaisuus vaihtelevat. Opetustavan tarkasteleminen yksittäisten käsitteiden opettamisessa mahdollistaisi aiheen tarkastelun oppijakeskeisestä näkökulmasta.

Opetuskeskeisellekin jatkotutkimukselle on edelleen tarvetta. Tämä tutkimus tarjoaa uusia suuntaviivoja esimerkiksi opettajien omien käsitysten tarkastelulle. Tutkimuksen puitteissa ei ollut mahdollista tarkastella, kuinka merkittäväksi opettajat itse määrittävät käsitteen hierarkian muodostumisen opetuksessa tai kuinka he kokevat onnistuvansa käsitteiden opettamisessa. Myös taustatietojen syvempi tutkiminen esimerkiksi opettajien koulutuksen laatua tarkastelemalla olisi koulutusta kehittävä tutkimusaihe. Opettajien pätevyys ja koulutuksen laatukriteerit ovat Suomessa yleisesti mielenkiintoa herättävä tutkimusaihe.

Tutkimuksen piirissä olisi tärkeää tarkastella myös mahdollisia muutoksia opetuksessa, kun opettajien tietoisuus omaa opetustaan kohtaan syvenee. Tällöin mahdollisen pedagogisen toiminnan muutoksen seurauksena tutkimusta voitaisiin jatkaa edelleen, jolloin tarkasteltaisiin oppilaiden oppimistuloksia. Oppimistulosten paraneminen pedagogian muutoksen seurauksena olisi erittäin merkittävä löydös. Tämä voisi edelleen avata uusia tutkimusuria matemaattisten oppimisvaikeuksien perimmäisten syiden selvittämiseksi. Tämä tutkimus mahdollistaa suomalaisten opettajien tietouden lisäämisen matemaattisten käsitteiden hierarkkisesta rakentumisesta opetuksessa ja toivottavasti herättää opettajat sitä kautta tarkastelemaan ja aktiivisesti kehittämään oman opetuksensa laatua.

## LÄHTEET

- Apo, S. 1990. Kertomusten sisällön analyysi. Teoksessa Klaus Mäkelä (toim.)  
Kvalitatiivisen aineiston analyysi ja tulkinta. Helsinki: Gaudeamus, 62–80.
- Allsopp, D., Lovin, L., Green, G. & Savage-Davis, E. 2003. Why students with special  
needs have difficulty learning mathematics and what teachers can do to help.  
Mathematics Teaching in the Middle School, 8 (6), 308-314.
- Arzarello, F., Robutti, O. & Bazzini, L. 2005. Acting is learning: focus on the  
construction of mathematical concepts. Cambridge Journal of Education 35, 55-  
67.
- Ausubel, D. P, Novak, J. D. & Hanesian, H. 1968. Educational psychology: A cognitive  
view. 2. painos. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Barnes, D. 2008. Exploratory Talk for Learning. Teoksessa N. Mercer & S.  
Hodgkinson (toim.) Exploring Talk in Schools. Los Angeles: SAGE, 1-15.
- Björn, P. M. & Vehkakoski, T. 2012. Concept-use of Mathematics Teachers at the  
Upper level Classes. Manuscript under preparation.
- Bull, R. & Espy, K. A. 2001. Working Memory, Executive Functioning and Children's  
Mathematics. Teoksessa Wilson, K., Swanson, H. L. (toim.) Are mathematics  
disabilities due to domain general or domain-specific working memory deficits?.  
Journal of Learning Disabilities 34, 93-124.
- Coley, J. D., Hayes, B., Lawson, C. & Moloney, M. Knowledge, expectations, and  
inductive reasoning within conceptual hierarchies. Cognition, 90 (3), 217-253.
- Das, J. P. & Janzen, C. 2004. Learning Math: Basic concepts, math difficulties,  
and suggestions for intervention. Developmental Disabilities Bulletin, 32 (2),  
191-205.
- Ediger, M. 2012. Quality teaching in mathematics. Education, 133(2), 235-238.
- Eskola, J. & Suoranta, J. 2008. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. 8. painos.  
Jyväskylä: Gummerus.
- Flick, U. 2006. An introduction to qualitative research. 3. painos. Lontoo: SAGE.

- Griffin, C., Jitendra, A. & League, M. 2009. Novice Special Educators' Instructional Practices, Communication Patterns and Content Knowledge for Teaching Mathematics. *Teacher Education and Special Education* 32 (4), 319-336.
- Heritage, J. 1996. Harold Garfinkel ja etnometodologia. Suom. I. Arminen, O. Paloposki, A. Peräkylä, S. Vehviläinen & S. Veijola. Jyväskylä: Gaudeamus. Alkuperäisjulkaisu 1984.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P. & Stigler, J. 2003. Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study, U.S. Department of Education National Center for Education Statistics, Washington DC.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. 15.uudistettu painos. Hämeenlinna: Kariston Kirjapaino.
- Hogan, T., Rabinowitz, M. & Craven. J. A. 2003. *Educational Psychologist* 38 (4), 235-247.
- Huang, R. & Li, Y. 2012. What Matters Most: A Comparison of Expert and Novice Teachers' Noticing of Mathematics Classroom Events. *School science and mathematics* 112 (7), 420-432.
- Huhtala S. & Laine A. 2004. ”Matikka ei ole mun juttu” – Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka - Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 320-346.
- Huusko, M. & Paloniemi, S. 2006. Fenomenografia laadullisena tutkimussuuntauksena kasvatustieteissä. *Kasvatus* 37 (2), 162 – 173.
- Hung-Ming, L. & Han-Jen, N. 2011. A Phenomenographic Approach for Exploring Conceptions of Learning Marketing among Undergraduate Students. *Business and Economics Research* 1 (1), 1-12.
- Ichise, R., Takeda, H. & Honiden, S. 2001. Rule Induction for Concept Hierarchy Alignment. Tokio: Intelligent Systems Research Division, National Institute of Informatics. Viitattu 4.2.2014

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.5.6044&rep=rep1&type=pdf>

- Jayanthi, M., Gersten, R. & Baker, S. 2008. Mathematics Instruction for Students with Learning Disabilities or Difficulty Learning Mathematics: A Guide for Teachers. Portsmouth: Center of Instruction. Viitattu 29.5.2014  
<http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED521882.pdf>
- Jussila, J. 1999. Opetus, opiskelu ja tietämään oppiminen. Teoksessa P. Kansanen & J. Husu (toim.) Opetuksen tutkimuksen suuntaviivoja. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisu. Helsinki: Yliopistopaino, 31-43.
- Jutila, J. Eriyttäminen matematiikan oppitunneilla ja opettajien kokemukset eriyttämisestä. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. Pro gradu - tutkielma. 2014.
- Kakkori, L. & Huttunen, R. 2010. Fenomenologia, hermeneutiikka ja fenomenografinen tutkimus. Viitattu 26.2.2014  
<http://users.utu.fi/rakahu/fenomenografia2011.pdf>
- Katai, Z. 2008. Multi-Sensory Method for Teaching-Learning Recursion. Sapientia University Romania. Viitattu 10.6.2014  
<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cae.20305/pdf>
- Katai, Z., Juhasz, K. & Adorjani, A. K. 2008. On the Role of Senses in Education. Computers & Education, 51 (4), 1707-1717. Viitattu 10.6.2014  
[http://ac.els-cdn.com/S0360131508000663/1-s2.0-S0360131508000663-main.pdf?\\_tid=2911f3fb17730a1dbf999858eb476965&acdnat=1334904070\\_ac5c5f4c6ed5d171138e9caeb2d3be39](http://ac.els-cdn.com/S0360131508000663/1-s2.0-S0360131508000663-main.pdf?_tid=2911f3fb17730a1dbf999858eb476965&acdnat=1334904070_ac5c5f4c6ed5d171138e9caeb2d3be39)
- Kauppara, R. A. 2007. Ihmisen tapa oppia. Johdatus sosiokonstruktiviseen oppimiskäsitykseen. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Kauttonen, J. Opettajien käyttämät esimerkit yläkoulun matematiikan tunneilla. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. Pro gradu -tutkielma. 2013.
- Kinnunen, A. Pääsitkö kärryille? Ymmärtämisen varmistaminen yläkoulun matematiikan tunneilla. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. Pro gradu -tutkielma. 2013.
- Korhonen, H. 2006. Mitä kuuluu Suomen matematiikan opetukselle? Kasvatus, 37 (2), 187–190.

- Kuula, A. 2006. Tutkimusetiikka. Aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys. Tampere: Vastapaino.
- Kyngäs, H. & Vanhanen, L. 1999. Sisällön analyysi. *Hoitotiede* 11 (1), 3-12.
- Latvala, E. & Vanhanen-Nuutinen, L. 2003. Laadullisen hoitotieteellisen tutkimuksen perusprosessi: sisällönanalyysi. Teoksessa Sirpa Janhonen & Merja Nikkonen (toim.) *Laadulliset tutkimusmenetelmät hoitotieteessä*. 2. uusittu painos. Helsinki: WSOY, 21–43.
- Leino J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa *Matematiikkänäkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 20-31.
- Lehto, J. E. 2005. Konstruktivismi peruskoulun ohjenuoraksi? *Kasvatus*, 36 (1), 7-19.
- Lindgren, S. 2004. Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa T. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241-254.
- Linnanmäki K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa *Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 241-254.
- Loughland, T., Reid, A. & Petocz, P. 2002. Young People's Conceptions of Environment: A phenomenographic analysis. *Environmental Research* 8 (2), 187-197.
- Lunenberg, M. & Korthagen, F. 2009. Experience, theory, and practical wisdom in teaching and teacher education. *Teachers and Teaching: theory and practice* 15 (2), 225–240.
- Marshall, J. 2006. Math Wars 2: It's the Teaching, Stupid! *Phi Delta Kappan* 87 (5), 356–363.
- Mayan, M. J. 2009. *Essentials of Qualitative Inquiry*. California: Left Coast Press.
- Mazzocco, M. M. & Myers, G. F. 2003. Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school age years. *Annals of Dyslexia* 53 (1), 218-253.
- McGowen, M. A. & Tall, D. O. 2010. Metaphor or Met-Before? The effects of previous experience on practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 169–179.

- McMullen, J. 2014. Spontaneous Focusing on Quantitative Relations and the Development of Rational Number Conceptual Knowledge. Turun Yliopisto. Väitöskirja. Viitattu 25.2.2014  
<http://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/94538/AnnalesB380.pdf?sequence=2>
- Miles M. B. & Huberman A. M. 1994. Qualitative data analysis. 2. painos. California: Sage.
- Morales, R V., Shute, V. J., Pellegrino, J. W. 1985. Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and instruction* 2 (1), 41-57.
- Moran, A. S. 2011. The Effects of Comprehension Intervention on Mathematics Problem Solving for Students with Mathematics Disability. Santa Barbara: University of California. Tulostettu 2.2.2014.  
<http://search.proquest.com/eric/docview/908611132/fulltextPDF/322A74D085924A4CPQ/1?accountid=11774>
- National Research Council. 2004. Miten opimme. Aivot, mieli, kokemus ja koulu. Suom. A: Penttilä. Juva: WSOY.
- Panasuk, R. M. 2010. Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations. *Education* 131 (2), 235–257.
- Patrikainen, S. 2012. Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa. Helsingin Yliopisto. Väitöskirja. Viitattu 12.2.2014  
<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-10-7868-2>
- Patrikainen, S. & Toom, A. 2004. Stimulated recall – opettajan pedagogisen ajattelun ja toiminnan tutkimisen menetelmä. Teoksessa P. Kansanen & K. Uusikylä (toim.) Opetuksen tutkimuksen monet menetelmät Jyväskylä: PS-kustannus, 239–260.
- Patton, M. Q. 2001. Qualitative Research & Evaluation Methods. 3. uusittu painos. Sage Publications.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004: oppivelvollisille tarkoitetun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, perusopetuksen valmistavan

- opetuksen opetussuunnitelman perusteet, lisäopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.
- Pietilä, V. 1973. Sisällön erittely. Helsinki: Gaudeamus.
- Potter, J. & Levine-Donnerstein, D. 1999. Rethinking, validity and reliability in content analysis. *Journal of applied communications research* 27, 258-284.
- Puolimatka, T. 2002. Opetuksen teoria. Konstruktivismista realismiin. Helsinki: Tammi.
- Rauste-von Wright, M., von Wright, J. & Soini, T. 2003. Oppiminen ja koulutus. 9. uudistettu painos. Helsinki: WSOY.
- Räsänen, P. & Ahonen, T. 2005. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.) Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. Helsinki: WSOY, 191-234.
- Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.
- Seedhouse, P. 2005. Conversation Analysis as Research Methodology. Teoksessa K. Richards & P. Seedhouse (toim.) Applying conversation analysis. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 251-266.
- Service, E. & Lehto, J. E. 2005. Muisti ja oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.) Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. Helsinki: WSOY, 235-268.
- Shulman, L.S. 1986. Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. Teoksessa M.C. Wittrock (toim.) Handbook of research on teaching. 3. painos. New York: Macmillan, 3-36.
- Sigman, M. 2004. Bridging Psychology and Mathematics: Can the Brain Understand the Brain? *PLoS Biology* 2 (9), 1265 -1562.
- Siljander, P. 2005. Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen. Helsinki: Otava.
- Stoyanova, E. 2008. The Power of Concept Fields. *Australian Mathematics Teacher* 64 (1), 17-23.
- Swanson, H. & Jerman, O. 2006. Math Disabilities: A Selective Meta-Analysis of the Literature. *Educational Research* 76 (2), 249-274.
- Swanson, H. L., Cochran, K. F., & Ewers, C. A. 1990. Can learning disability be



- determined from working memory performance? *Journal of Learning Disabilities* 23 (1), 59-67.
- Swanson, H. L. & Saez, L. 2003. Memory difficulties in children and adults with learning disabilities. Teoksessa H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (toim.) *Handbook of Learning Disabilities*. New York: Guilford Press, 182-198.
- Syrjälä, L., Ahonen, S., Syrjäläinen, E. & Saari, S. 1994. *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Syrjälä, L. & Numminen, M. 1988. *Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia. Tapaustutkimus kasvatustieteessä*. Oulu: Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta.
- The Economist. 2014. Time for a ceasefire. Viitattu 10.2.2014  
<http://www.economist.com/news/international/21595476-technology-and-fresh-ideas-are-replacing-classroom-drill-and-helping-pupils-learn-time?zid=316&ah=2f6fb672faf113fdd3b11cd1b1bf8a77>
- Titscher, S. Meyer, M., Wodak, R. & Vetter, E. 2000. *Methods of Text and Discourse Analysis*. London: Sage.
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2011. *Laadullinen tutkimus ja sisällön analyysi*. 7. uudistettu painos. Vantaa: Tammi.
- Uljens, M. 1997. *School didactics and learning. A school didactic model framing an analysis of pedagogical implications of learning theory*. Hove, East Sussex: Psychology Press.
- Voutilainen, T. & Mehtäläinen, J. & Niiniluoto, I. 1991. *Tiedonkäsitys*. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Vosniadou, S. & Vamvakoussi, X. 2004. *Examining Mathematics Learning from a Conceptual Change Point of View: Implications for the Design of Learning Environments*. Viitattu 21.11.2013  
<http://calteach.ucsc.edu/aboutus/documents/vosniadou-mathlearningconcchg.pdf>
- Watson, A. & De Geest, E. 2005. *Principled Teaching for Deep Progress: Improving Mathematical Learning Beyond Methods and Materials*. *Educational Studies in Mathematics* 58 (2), 209-234.
- Webb, G. 1997. Deconstructing deep and surface: towards a critique of phenomenography. *Higher Education* 33, 195 – 212.

- Wooffitt, R. 2005. *Conversation Analysis and Discourse Analysis. A Comparative and Critical Introduction*. Lontoo: SAGE.
- Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.). *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111–122.
- Zain, S., Rasidi, F. & Abdin, I. 2012. Student-Centred Learning In Mathematics – Constructivism In The Classroom. *Journal of International Educational Research* 8(4), 319–329.
- Zolkower, B. & Shreyar, S. 2007. A Teacher's Mediation of a Thinking-Aloud Discussion in a 6th Grade Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics* 65 (2), 177-202.

## LIITTEET

Liite 1: Tutkimuslupa.

**Huom! Palautattehan lomakkeen mahdollisimman pian matematiikan opettajalle.**

### LUPA 1:

Arvoisat vanhemmat

Lapsenne luokka on valittu mukaan matematiikan opetusta ja luokahuonevuorovaikutusta selvittävään tutkimushankkeeseen. Tutkimukseen kuuluu luokahuonetilanteiden videonauhoituksia oppituntien aikana. Nauhoitukset toteutetaan 5 päivänä myöhemmin sovittavana ajankohtana. Tutkimukseen on saatu rehtorin ja opettajien lupa. Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa. Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhoitettaville oppitunneille osallistuvien opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot kaikissa tutkimusraporteissa. Videonauhoitteet tuhoetaan käytön jälkeen ja tekstitalenteet arkistoidaan virallisesti.

Näillä ehdoilla annan tutkimusryhmälle luvan videoida oppitunteja, joissa lapseni on mukana kevään 2012 aikana.

\_\_\_\_\_ :ssa \_\_/\_\_ 2012

---

Allekirjoitus

### LUPA 2:

Hyvä oppilas

Luokkasi on valittu mukaan matematiikan opetusta ja luokahuonevuorovaikutusta selvittävään tutkimushankkeeseen. Tutkimukseen kuuluu luokahuonetilanteiden videonauhoituksia oppituntien aikana. Nauhoitukset toteutetaan 5 päivänä myöhemmin sovittavana ajankohtana. Tutkimukseen on saatu rehtorin ja opettajien lupa. Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa. Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhoitettaville oppitunneille osallistuvien opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot kaikissa tutkimusraporteissa. Videonauhoitteet tuhoetaan käytön jälkeen ja tekstitalenteet arkistoidaan virallisesti.

Näillä ehdoilla annan tutkimusryhmälle luvan videoida oppitunteja, joissa olen mukana kevään 2012 aikana.

\_\_\_\_\_ :ssa \_\_/\_\_ 2012

---

Allekirjoitus

Liite 2: Tiedote oppilaille ja vanhemmille.

Tiedote oppilaille ja vanhemmille

### **VIDEONAUHOITUKSET MATEMATIIKAN OPETUSTA TUTKIVAAN TUTKIMUSHANKKEESEEN**

Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitos tekee kevätlukukauden 2012 aikana videonauhoituksia matematiikan oppituntien kulusta. Nauhoituksia käytetään tutkimusaineistona matematiikan opetusta ja luokahuonevuorovaikutusta selvittävässä hankkeessa (MUST-projekti: Björn & Vehkakoski).

#### **Nauhoituksiin kysytään aina lupa**

Oppituntitilanteita videoidaan vain, mikäli oppilas ja oppilaan huoltaja antavat siihen kirjallisen luvan samalla lomakkeella (ohessa). Ennen luvan kysymistä oppilailta ja vanhemmilta, lupa on saatu jo koulun matematiikan opettajalta ja rehtorilta.

#### **Nauhoituksia käytetään tutkimusaineistona**

Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa.

#### **Tutkimuksen tarkoituksena on kuvata oppituntien kulkua ja luokahuonevuorovaikutusta oppitunneilla**

Tutkimuksen tarkoituksena on luokahuonevuorovaikutuksen kuvaaminen matematiikan oppitunneilla. Tutkimusaineistoa kerätään useammalta luokalta yläkouluista.

Tutkimuksessa tarkastellaan luokahuoneen toimintaa yleisellä tasolla, ei yksittäisen oppilaan oppimista tai henkilökohtaisia ominaisuuksia. Välituntitilanteita tai muuta oppituntien ulkopuolista toimintaa ei kuvata. Videointi suoritetaan tavallisilla oppitunneilla, eikä se vaikuta oppituntien sisältöihin mitenkään. Näin saadaan opetustilanteita ja opetustapoja koskevaa uutta tietoa, jota voidaan käyttää hyväksi opetuksen ja opetustapojen kehittämisessä.

#### **Nimet ja muut tunnistetiedot muutetaan**

Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhojen sisältö muutetaan tekstiksi, jota analysoidaan. Opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot tutkimustulosten raportoinnissa. Näin taataan kaikkien osapuolten nimettömyys ja oppituntitilanteiden luottamuksellisuus.

#### **Tutkimusryhmän osoite**

Jyväskylän yliopisto  
 Kasvatustieteiden laitos / erityispedagogiikka  
 Piia Björn  
 PL 35 (Viveca)  
 40014 Jyväskylän yliopisto

Liite 3: Taustatietokysely opettajille.

Jyväskylän yliopisto  
Kasvatustieteiden laitos  
Erityispedagogiikka



**MUST-projekti** (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen tausta)  
Piia Björn & Tanja Vehkakoski

Hyvä opettaja!

Kiitos osallistumisestasi MUST-projektin aineistonkeruuseen. Tarvitsemme opetustuokioiden analyysin taustaksi muutamia tietoja. Sinulle yksilöllisesti varattu aika videoiden purkuun on \_\_\_/\_\_\_2012, klo \_\_\_\_\_. Keskustelu-aika on n. tunti ja tilanteet videoidaan.

Kaikki projektin yhteydessä kerätty materiaali säilytetään yliopistolla, eikä teitä voida tunnistaa missään vaiheessa tuloksia raportoitaessa.

Keskustelutilanteessa käymme kanssanne läpi tapaa, jolla itse analysoimme aineistoa sekä kuulemme mielellämme myös teidän näkemyksiänne matematiikan opetuksesta. Tarkoituksena on yhteisin keskusteluin kehittää välineitä matematiikan opetuksen pedagogiikkaan.

Mukana on vielä taustatietokysely ja palautuskuori.

Tapaamisiin!

Terv. Piia Björn  
Erityispedagogiikan dosentti, FT  
yliopistonlehtori  
puh. 0400 247 425  
[piia.bjorn@jyu.fi](mailto:piia.bjorn@jyu.fi)

Tanja Vehkakoski  
KT  
yliassistentti  
[tanja.vehkakoski@jyu.fi](mailto:tanja.vehkakoski@jyu.fi)

**MUST-opettajien taustatietokysely****Taustatietosi:**

1. Tutkintosi (KM, FM jne.) ja pääaine \_\_\_\_\_
2. Tutkinnon suorittamisvuosi \_\_\_\_\_
3. Sukupuoli \_\_\_\_\_
4. Ikäryhmäsi:
  - a) 18-25
  - b) 26-35
  - c) 36-45
  - d) 46-55
  - e) 56-65
  - f) 66-75
5. Minulla on opettajakokemusta \_\_\_\_\_ vuotta

## Liite 4: Matemaattisten käsitteiden luettelo.

**KARI****Tunti nro 1:**

1. kerroin
2. kirjainosa
3. kerroin
4. kirjainosa
5. kirjainosaa
6. termissä sitä lukua ei kirjaimen eessä on näkyvissä niin silloin luku on ykkönen
7. jos siinä on miinusmerkki niin silloin kerroin on miinus yksi
8. termit kerroin viis kirjainosa aa
9. sievennähte
10. kerroin
11. kerroin
12. kerroin
13. kerroin
14. kerroin
15. kerroin
16. kerroin
17. kirjainosa
18. kirjainosa
19. kirjainosa
20. kirjainosa
21. sieventää
22. kertaa
23. sieventää
24. sievennettää eli aina sievimpään mahdolliseen
25. sievennetään
26. kertaa
27. kertolaskut
28. sievennys
29. kirjainlauseke
30. kirjainlauseke
31. kirjainlauseke
32. termeistä saadaan lauseke niin että termejä erilaisia termejä laitetaan peräkkäin
33. uus termi alkaa aina kun tulee plus tai miinusmerkki
34. sieventää
35. summalauseke
36. summalauseke
37. summalausekkeessa termejä plussataan tai vähennetään
38. kirjainosa
39. kerroin
40. vakio
41. vakio
42. summattu kaikki sivujen sivut yhteen
43. sieventää
44. sieventää
45. montako aata summataan
46. sieventää
47. sieventää
48. piirin lauseke
49. kertaa
50. kanta kertaa korkeus
51. kahden kirjaimen tulo eli aa kertaa bee niin se sievennetään sillä tavalla että kertamerkki jätetään pois eli vastaus on aa bee
52. aa ja bee kerrotaan keskenään
53. kirjainlauseke
54. kirjainlauseke
55. kirjainlauseke
56. kertaa
57. kertaa
58. plus
59. miinus
60. kertolaskuna
61. sieventää
62. sieventää
63. sieventää
64. sieventää ne lausekkeet
65. pluslasku
66. poistat siitä ne sulkeet
67. plussa ja miinus on peräkkäin tulee miinusta

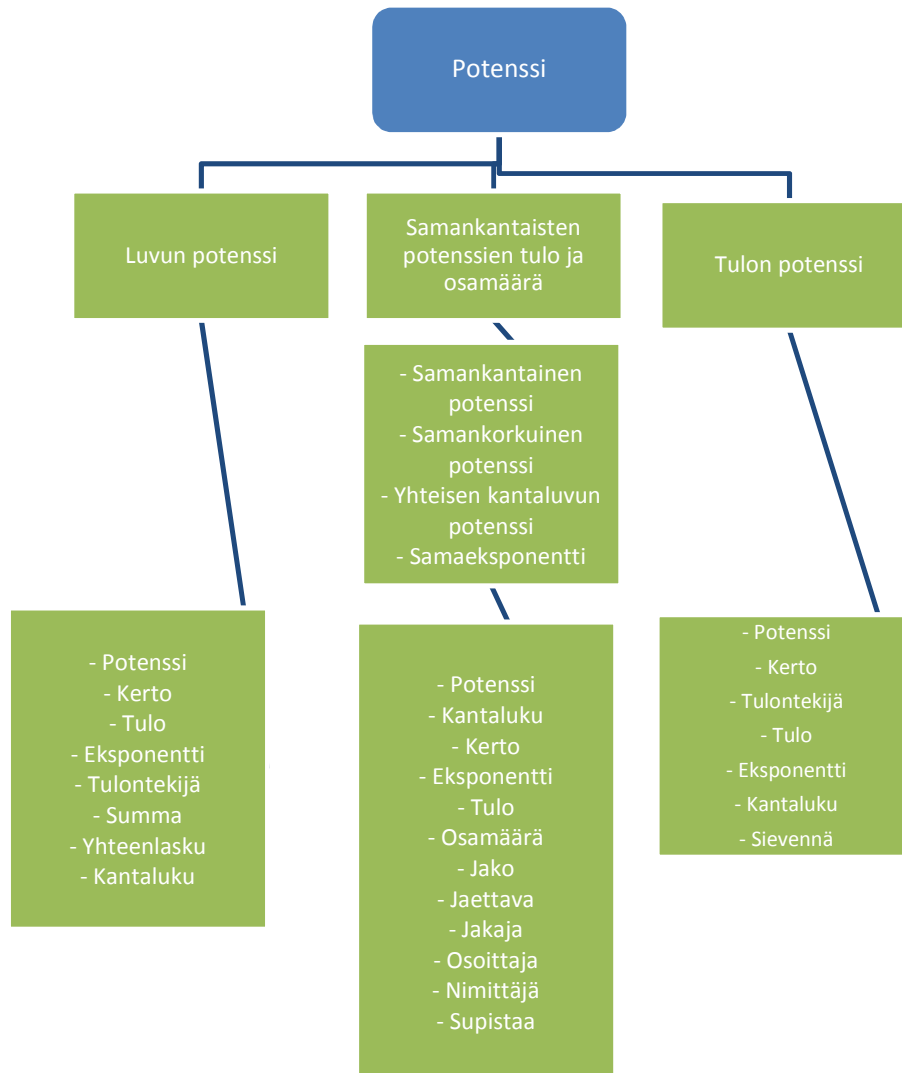
## Liite 5: Ensimmäisen analyysivaiheen luokittelutaulukko.

**MAIJA****Tunti nro 1:**

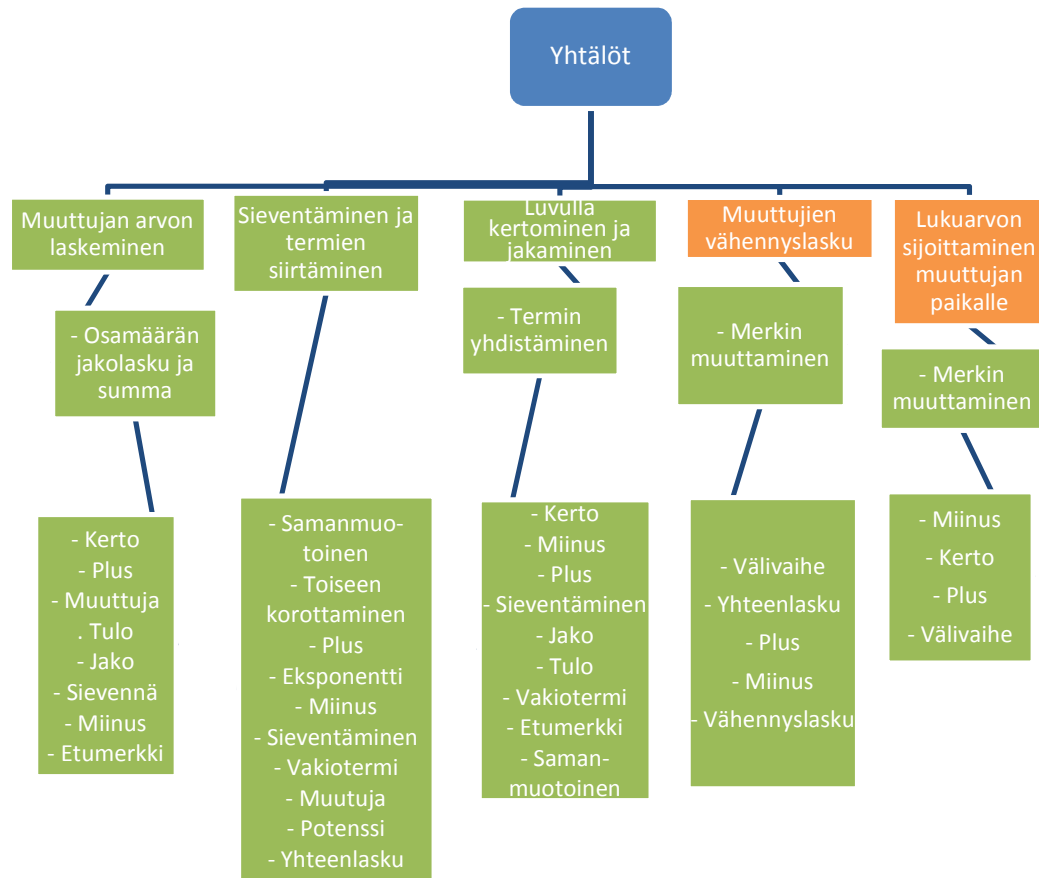
Alkuperäinen ilmaus	Pelkistetty ilmaus *peruslaskutoimitus	Alaluokka *tunnin aihe	JAKSON AIHE
<i>Eli jos on summa, jossa kaikki yhteenlaskettavat on samansuuruisia, se voidaan esittää tulona</i>	summa yhteenlaskettava samansuuruinen tulo	Luvun potenssi	
<i>Tuo merkintä on nyt se potenssi</i>	potenssi	Luvun potenssi	Potenssi
<i>siellä yläkulmassa olevalla lukumäärä ilmoittavalla on niinkin hieno nimi kun eksponentti</i>	eksponentti	Luvun potenssi	
<i>Ja tähän liittyy erilaisia nimityksiä, ensinnäkin tuota kakkosta sanotaan kantaluvuksi</i>	kantaluku	Luvun potenssi	
<i>viis potenssiin kaks, sitten voidaan sanoa myös että viisi toiseen</i>	potenssiin toiseen	Luvun potenssi	
<i>toinen potenssi sillä on semmonen nimi ku neliö ja kolmannella potenssilla on sellanen nimi ku kuutio</i>	potenssi neliö kuutio	Luvun potenssi	
<i>potenssin arvon laskeminen niin se tarkoittaa sitä, että lasketaan se tulo, joka siihen on merkitty eli sen tulon arvon, mitä siitä kertolaskusta tulee</i>	potenssin arvo tulo kertolasku	Luvun potenssi	



## Liite 6: Maijan opetuksen hierarkkinen rakentuminen.



## Liite 7: Orvokin opetuksen hierarkkinen rakentuminen.



## Liite 8: Karin opetuksen hierarkkinen rakentuminen.

