Tasainen suppeneminen ja sen sovellukset

Tuomas Hentunen

Matematiikan pro gradu tutkielma

Kesäkuu 2014

Tiivistelmä: Tuomas Hentunen, *Tasainen suppeneminen ja sen sovellukset* (engl. *Uniform convergence and its applications*), matematiikan pro gradu -tutkielma, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2014.

Tässä työssä tutkitaan tasaista suppenemista ja sen sovelluksia metrisissä avaruuksissa. Tämän työn päätuloksia ovat Arzelan ja Ascolin lause, Banachin kiintopistelause, kaksi versiota Peanon lauseesta sekä Stonen ja Weierstrassin lause.

Työssä lähdetään liikkeelle perusmääritelmistä, kuten metrinen avaruus ja tasainen suppeneminen, ja -tuloksista. Melkein heti ensimmäisten määritelmien jälkeen todistetaan työn kannalta erittäin hyödyllinen tulos, joka osoittaa tasaisesti suppenevan funktiojonon rajafunktion olevan jatkuva. Osassa työn tuloksista tarvitaan oletusta metrisen avaruuden täydellisyydestä, mikä tarkoittaa sitä, että jokainen kyseisen avaruuden Cauchyn jono suppenee. Täydellisyyden oletusta tarvitaan esimerkiksi, kun todistetaan Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle. Päätuloksia varten tarvittavat määritelmät ja tulokset mahdollistavat myös Tiezten lauseen todistamisen, joka on esitetty tässä tutkielmassa ensimmäisenä niin sanotusti uutena asiana. Tietzen lauseen mukaan jokaiselle metrisen avaruuden (M, d) suljetussa osajoukossa A määritellylle jatkuvalle ja rajoitetulle reaaliarvoiselle funktiolle f on olemassa avaruudessa M määritelty funktio g, joka saa saman arvon kuin f jokaisessa joukon A pisteessä.

Tutkielmassa esitetyn kiintopistelauseen tulos kertoo, että jokaisella täydellisen metrisen avaruuden kutistavalla kuvauksella on yksikäsitteinen kiintopiste. Tulos on nimeltään Banachin kiintopistelause ja sitä sovelletaan Peanon lauseen 1. versiossa, jossa osoitetaan, että yksinkertaiseen differentiaaliyhtälöön $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ liittyvällä alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu. Kyseisen lauseen 1. versiossa oletetaan funktiolle f jatkuvuus ja Lipschitz-ehto, joka mahdollistaa kiintopistelauseen soveltamisen.

Seuraavaksi määritellään työn kannalta tärkeät käsitteet kompaktisuus ja jonokompaktisuus ja osoitetaan niiden olevan ekvivalentteja kaikissa metrisissä avaruuksissa. Tulos on nimeltään Bolzanon ja Weierstrassin lause. Edellä mainitun lauseen todistus on mukana työssä, sillä sitä käytetään Arzelan ja Ascolin lauseen todistuksessa. Arzelan ja Ascolin lause väittää, että kompaktissa metrisessä avaruudessa määritellyistä jatkuvista funktioista koostuva perhe on kompakti täsmälleen silloin, kun se on suljettu, yhtäjatkuva ja pisteittäin kompakti. Arzelan ja Ascolin lausetta voi verrata avaruuden $\mathbb{R}^n$ tulokseen, jonka mukaan joukko on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.

Peanon lauseen 2. versio poikkeaa 1. versiosta siten, että funktiolle f oletetaan ainoastaan jatkuvuus. Tämä aiheuttaa sen, että differentiaaliyhtälölle $y' = f(x, y)$ löydetään ratkaisu, mutta sen yksikäsitteisyydestä joudutaan

luopumaan. Peanon lauseen 2. version todistus tehdään käyttäen hyväksi Arzelan ja Ascolin lausetta.

Ennen Stonen ja Weierstrassin lausetta todistetaan erikoistapaus, jonka mukaan jokaista välillä $[0, 1]$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota voidaan approksimoida polynomilla. Tuloksessa osoitetaan, että funktiolle f muodostettu jono Bernsteinin polynomeja suppenee tasaisesti kohti funktiota f. Edellä mainittua erikoistapausta käytetään hyväksi Stonen ja Weierstrassin lauseen todistuksessa. Stonen ja Weierstrassin lauseen mukaan jokaista jatkuvaa funktiota voidaan approksimoida jollakin toisella funktiolla, kuten polynomilla. Tulosta ei sovelleta tässä työssä, mutta sitä voidaan hyödyntää monenlaisessa matematiikan tutkimuksessa, sillä hankalasti käsiteltäviä funktioita voidaan approksimoida helposti käsiteltävällä funktiolla, kuten trigonometrisella polynomilla.

Avainsanat: tasainen suppeneminen, kompakti, jatkuvien funktioiden joukko, metrinen avaruus

Sisältö

1 Johdanto

Tämän työn tarkoituksena on tutkia tasaista suppenemista ja sen sovelluksia metrisissä avaruuksissa. Työssä lähdetään liikkeelle perusmääritelmistä, kuten metrinen avaruus, suppenevuuden määritelmät ja metrisen avaruuden täydellisyys. Jo työn alussa saadaan todistettua yhteys jatkuvuuden ja tasaisen suppenemisen välille ja tuon tuloksen lisäksi todistetaan Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle. Edellä mainittuja tuloksia hyödynnetään läpi työn. Perusmääritelmien jälkeen esitellään muutamia työkaluja, joilla voidaan tutkia sarjojen suppenemista. Työssä esitellyt perusmääritelmät ja suppenemistestit ovat kertauksen vuoksi esillä, mutta ne kuitenkin lienevät jo ennestään tuttuja suurimmalle osalle lukijoista.

Suppenemistestien jälkeisessä luvussa 3 esitellään ensimmäinen niin sanotusti uutena asiana tuleva tulos, Tietzen lause. Tietzen lauseen mukaan jokaiselle metrisen avaruuden (M, d) suljetussa osajoukossa A määritellylle jatkuvalle ja rajoitetulle reaaliarvoiselle funktiolle f on olemassa avaruudessa M määritelty funktio g, joka saa saman arvon kuin f jokaisessa joukon A pisteessä. Toisin sanoen funktion f graafi on ikään kuin katkaistu osa funktion g graafista.

Luvussa 4 todistetaan Banachin kiintopistelause, joka antaa jokaiselle täydellisen metrisen avaruuden kutistavalle kuvaukselle yksikäsitteisen kiintopisteen. Tätä hyödynnetään Peanon lauseen 1. version todistuksessa, jossa yksinkertaiseen differentiaaliyhtälöön $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ liittyvälle alkuarvotehtävälle saadaan yksikäsitteinen ratkaisu. Tässä 1. version muotoilussa oletetaan funktiolle f Lipschitz-ehto, jolloin todistuksessa päästään käyttämään hyväksi kiintopistelausetta. Peanon lauseen 2. versiossa ei Lipschitz-ehtoa oleteta, jolloin differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteisyydestä joudutaan luopumaan, mutta ratkaisun olemassaolo voidaan todistaa käyttäen hyväksi yhtä tämän työn keskeisintä tulosta Arzelan ja Ascolin lausetta, jota käsitellään luvussa 6.

Seuraavassa luvussa 5 määritellään jonokompaktisuuden ja kompaktisuuden käsitteet ja osoitetaan, että edellä mainitut määritelmät ovat ekvivalentteja kaikissa metrisissä avaruuksissa. Tuo tulos on nimeltään Bolzanon ja Weierstrassin lause. Lauseen todistuksen päättelyt on pilkottu lemmoiksi, mikä tekee todistuksesta helppolukuisemman. Tämän luvun jälkeen siirrytään käsittelemään Arzelan ja Ascolin lausetta.

Luvussa 6 määritellään ennen päätuloksen todistusta yhtäjatkuvuuden ja pisteittäin kompaktisuuden käsitteet, jotka ovat käytössä Arzelan ja Ascolin lauseen muotoilussa. Lause sanoo jatkuvista funktioista koostuvan perheen $\mathcal{B}$ kompaktisuuden olevan ekvivalenttia sille, että joukko $\mathcal{B}$ on suljettu, yhtäjatkuva ja pisteittäin kompakti. Lauseesta todistetaan ensimmäiseksi suunta, jossa oletetaan joukon $\mathcal{B}$ olevan suljettu, yhtäjatkuva ja pisteittäin kompakti. Tämän suunnan todistuksen idea on osoittaa, että jokaisella joukon $\mathcal{B}$ jonolla on tasaisesti suppeneva osajono. Lauseen toisessa suunnassa riittää osoittaa, että kun $\mathcal{B}$ on kokonaan rajoitettu, niin se on yhtäjatkuva. Todistuksessa valitaan joukon $\mathcal{B}$ peite, joka koostuu äärellisestä määrästä f_i keskeisiä palloja ja käytetään sitä hyväksi, jolloin saadaan osoitettua joukon $\mathcal{B}$ olevan yhtäjatkuva.

Seuraavaksi, alaluvussa 6.1, todistetaan Peanon lauseen 2. versio käyttäen hyväksi Arzelan ja Ascolin lausetta. Todistuksessa rakennetaan funktioperhe, joka koostuu likimääräisistä ratkaisuista lauseessa esiintyvälle differentiaaliyhtälölle. Tämän jälkeen näytetään Arzelan ja Ascolin lauseen avulla tuon perheen olevan kompakti, jolloin todistus voidaan viimeistellä kun tutkitaan tuon perheen jonoja ja niiden osajonoja.

Viimeisessä luvussa 7 todistetaan Stonen ja Weierstrassin lause, jonka tuloksena saadaan jokaiselle jatkuvalle funktiolle polynomiapproksimaatio. Polynomiapproksimaatiot ovat hyödyllisiä analyysin työkaluja, sillä polynomeja on usein helppoa käsitellä ja arvioida. Polynomiapproksimaatiot tulevat vastaan esimerkiksi Fourier-analyysissa, jossa funktioille rakennetaan approksimaatioita trigonometristen funktioiden avulla. Edellä mainitun kaltaisia approksimaatioita kutsutaan Fourier-sarjoiksi. Fourier-sarjojen avulla voidaan analysoida vaikeitakin funktioita, sillä sini- ja kosinifunktiot ovat helppoja käsitellä. Fourier-sarjoja ei kuitenkaan esitellä tässä työssä, mutta kirjallisuudesta löytyy runsaasti tutkimusta niistä.

Suurin osa työn merkinnöistä ja todistuksista noudattavat lähteen [1] linjaa. Luvun 3 todistukset perustuvat lähteeseen [3] ja Peanon lauseen 2. versio perustuu lähteeseen [2]. Työssä esiintyviä todistuksia on yritetty perustella tarkemmin kuin lähdeteoksissa.

2 Tasainen suppeneminen

Tässä luvussa määritellään ensiksi hieman suppenemiseen liittyviä peruskäsitteitä ja todistetaan muutamia perustuloksia, jonka jälkeen esitellään erilaisia suppenemistestejä.

2.1 Perusmääritelmiä

Kuten tiedetään, matematiikassa voidaan määritellä hyvin erilaisilla ominaisuuksilla varustettuja avaruuksia. Tässä työssä keskeisin ja tärkein avaruus, jossa liikutaan, on metrinen avaruus, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 2.1.1. Olkoon M joukko. Funktio $d : M \times M \to [0, \infty[$ on *metriikka*, jos kaikille $x, y, z \in M$ pätee:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tällöin sanotaan, että pari (M, d) on *metrinen avaruus*.

Esimerkki 2.1.2. Avaruus $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ on metrinen avaruus, kun metriikka on euklidinen normi, sillä tällöin sen vektoreille $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ pätee:

1. $d(x, y) \geq 0$, sillä $d(x, y) = ||x - y|| \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = ||x - y|| = ||-(y - x)|| = |-1|||y - x|| = ||y - x|| = d(y, x)$
4. $d(x, y) = ||x - y|| = ||(x - z) + (z - y)|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$.

Esimerkissä osoitettiin, että tavallisella euklidisella normilla varustettu $n-$ulotteinen reaalilukuavaruus on metrinen avaruus, koska se toteuttaa metrisen avaruuden määritelmässä vaaditut ehdot.

Esimerkki 2.1.3. Avaruus $(\mathcal{C}([a, b]), d)$, missä

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva}\}$$

ja

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

on metrinen avaruus, sillä funktioille $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b])$ pätee:

1. $d(f,g) \geq 0$, sillä $|f(x) - g(x)| \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, joten
$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \geq 0.$$
2. $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0$ kaikilla $x \in [a,b] \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, kaikilla $x \in [a,b] \Leftrightarrow f = g$
3. $d(f,g) = d(g,f)$, sillä $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ kaikilla $x \in [a,b]$, jolloin myös $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$.
4. $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, sillä kaikilla $x \in [a,b]$ pätee
$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$
mistä seuraa, että
$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|.$$

Edellinen esimerkki näyttää, että jatkuvista, suljetulla välillä määriteltyistä, reaaliarvoisista funktioista koostuva joukko varustettuna supremum metriikalla muodostaa metrisen avaruuden. Luvussa 6 tarkastellaan tarkemmin joukkoa $\mathcal{C}(A,N)$, missä (M,d_1) ja (N,d_2) ovat metrisiä avaruuksia ja $A \subset M$.

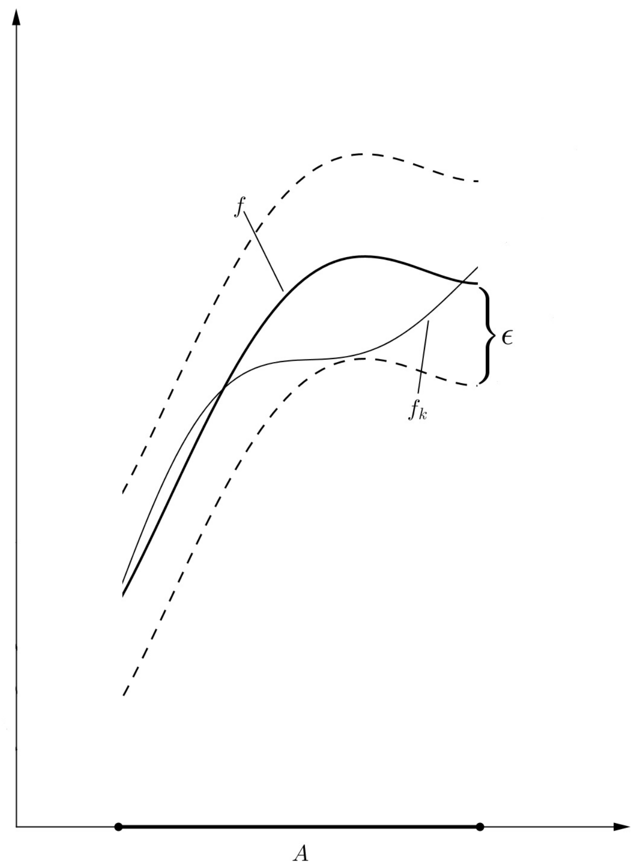
Huomautus 2.1.4. Esimerkin 2.1.3 tilanteessa $A = [a,b]$ ja $N = \mathbb{R}$, mutta avaruus $(\mathcal{C}(A,N),d)$ on myös metrinen avaruus, missä (M,d_1) ja (N,d_2) ovat metrisiä avaruuksia, $A \subset M$ ja d on supremum metriikka.

Seuraavaksi määritellään metrisissä avaruuksissa määriteltyjen funktioiden käyttäytymiseen liittyviä ominaisuuksia, joista jälkimmäinen on hyvin keskeisessä osassa tätä työtä.

Määritelmä 2.1.5. Olkoon (M,d) metrinen avaruus, A joukko ja $f_k : A \to M$, missä $k = 1,2,\ldots$. Jono funktioita (f_k) *suppenee pisteittäin* kohti funktiota $f : A \to M$, jos jokaiselle $x \in A$ pätee $f_k(x) \to f(x)$, kun $k \to \infty$. Toisin sanoen kun $f_k(x), f(x) \in M$, niin $f_k(x) \to f(x)$ täsmälleen silloin, kun $d(f_k(x), f(x)) \to 0$ kaikilla $x \in A$. Usein kirjoitetaan myös $f_k \to f$ (pisteittäin), jos jono (f_k) suppenee pisteittäin kohti funktiota f.

Määritelmä 2.1.6. Olkoon (M,d) metrinen avaruus ja A joukko. Olkoon $f_k : A \to M$ jono funktioita, joille pätee: kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa luku K siten, että kun $k \geq K$, niin $d(f_k(x), f(x)) < \epsilon$ kaikille $x \in A$. Tällöin jonon (f_k) sanotaan *suppenevan tasaisesti* kohti funktiota f joukossa A. Merkitään $f_k \to f$ tasaisesti.

Tässä on syytä huomata, että tasaisen suppenemisen määritelmässä luku K saattaa riippua luvusta ϵ, mutta se ei saa riippua pisteestä x. Kun $f_k \to f$ tasaisesti, niin visuaalisesti se tarkoittaa kuvan 1 mukaista tilannetta.



Kuva 1: Kuvassa $f_k \to f$ tasaisesti joukossa A.

Seuraava tulos on varsin merkittävä ja sitä käytetäänkin tässä työssä useaan otteeseen. Tulos kertoo tasaisen suppenevuuden ja jatkuvuuden välisestä yhteydestä.

Lause 2.1.7. *Olkoot (A, d_1) ja (M, d_2) metrisiä avaruuksia. Olkoon $f_k : A \to M$ jono jatkuvia funktioita siten, että $f_k \to f$ tasaisesti joukossa A. Tällöin funktio f on jatkuva joukossa A.*

Todistus. Koska $f_k \to f$ tasaisesti, niin annetulle $\epsilon > 0$ voimme löytää luvun K siten, että kun $k \geq K$, niin $d_2(f_k(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ kaikille $x \in A$. Valitaan piste $x_0 \in A$. Nyt koska funktio f_K on jatkuva, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $d_1(x, x_0) < \delta$, missä $x \in A$, niin $d_2(f_K(x), f_K(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$. Tällöin kun $d_1(x, x_0) < \delta$, niin

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(x_0)) &\leq d_2(f(x), f_K(x)) + d_2(f_K(x), f_K(x_0)) + d_2(f_K(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Nyt koska piste x_0 on mielivaltaisesti valittu, niin funktio f on jatkuva joukon A jokaisessa pisteessä. Toisin sanoen funktio f on jatkuva joukossa A. □

Sanoiksi puettuna edellinen lause siis sanoo, että tasaisesti suppeneva jono jatkuvia funktioita suppenee kohti jatkuvaa funktiota. Seuraavaksi esitellään esimerkki, jossa funktiojono f_k suppenee pisteittäin, mutta ei tasaisesti.

Esimerkki 2.1.8. Olkoon $f_k : [0, 2] \to \mathbb{R}, f_k(x) = \frac{x^k}{1+x^k}$. Jono (f_k) suppenee pisteittäin kohti funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun} \quad x = 1, \\ 1, & \text{kun} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Näin on, sillä nimittäjä $1 + x^k \geq 1$ kaikilla $x \in [0, 2]$, joten $|f_k(x)| \leq x^k$, kun $x \in [0, 2]$. Näin ollen $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, kun $0 \leq x < 1$, sillä $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$, kun $0 \leq x < 1$.

Jos $x = 1$, niin $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{2}$. Kun $1 < x \leq 2$, niin $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 1$, sillä $f_k(x) = \frac{1}{1+(1/x^k)}$, missä $1 < x \leq 2$. Koska rajafunktio f on epäjatkuva, niin jonon (f_k) suppeneminen ei ole tasaista lauseen 2.1.7 nojalla.

Ennen seuraavaa tulosta määritellään tasainen suppeneminen funktiosarjoille. Pääosin työssä liikutaan yleisissä metrisissä avaruuksissa, mutta funktiosarjojen kohdalla maaliavaruudeksi valitaan $\mathbb{R}^n$, sillä alkioiden yhteenlaskua ei ole välttämättä määritelty kaikissa metrisissä avaruuksissa.

Määritelmä 2.1.9. Olkoon A joukko ja olkoon $g_k : A \to \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota g tai $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ *tasaisesti*, jos osasummien,

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} g_n,$$

jono suppenee tasaisesti joukossa A. Toisin sanoen on olemassa funktio $g : A \to \mathbb{R}^n$ siten, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa luku K, jolle pätee

$$||S_k(x) - g(x)|| < \epsilon$$

kaikilla $x \in A$, kun $k \geq K$.

Seuraus 2.1.10. *Jos funktiot $g_k : A \to \mathbb{R}^n$ ovat jatkuvia ja $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ tasaisesti, niin funktio g on jatkuva.*

Todistus. Tämä seuraa lauseesta 2.1.7 soveltamalla sitä osasummien jonoon. □

Cauchy on nimi, johon matematiikkaa lukeva ihminen törmää usein. Seuraava määritelmä on yksi analyysin keskeisimmistä määritelmistä, tuo seuraava ja sitä seuraavat määritelmä ja lause ovatkin tämän työn kivijalkoja.

Määritelmä 2.1.11. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Jono (x_k), missä $x_k \in M$, on *Cauchyn jono*, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa luku K siten, että kun $k, l \geq K$, niin $d(x_k, x_l) < \epsilon$.

Cauchyn jonon määritelmä kertoo siis sen, että lukujonon häntäpäässä olevat termit ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Määritelmä 2.1.12. Metrinen avaruus (M, d) on *täydellinen* jos ja vain jos jokainen avaruuden M Cauchyn jono suppenee johonkin avaruuden M pisteeseen.

Täydellisen avaruuden Cauchyn jonot eivät siis niin sanotusti karkaa pois kyseisestä avaruudesta vaan suppenevat kyseisessä avaruudessa.

Lause 2.1.13 (Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle)**.** *Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja olkoon A joukko. Oletetaan avaruuden M olevan täydellinen ja olkoon $f_k : A \to M$ jono funktioita. Tällöin jono (f_k) suppenee tasaisesti joukossa A jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa luku K siten, että kun $l, k \geq K$, niin $d(f_k(x), f_l(x)) < \epsilon$ kaikille $x \in A$.*

Todistus. Jos $f_k \to f$ tasaisesti, niin annetulle $\epsilon > 0$ on olemassa vakio K siten, että kun $k \geq K$, niin $d(f_k(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ kaikille $x \in A$. Nyt jos $k, l \geq K$, niin

$$d(f_k(x), f_l(x)) \leq d(f_k(x), f(x)) + d(f_l(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Kääntäen oletetaan, että voidaan löytää annetulle $\epsilon > 0$ vakio K siten, että kun $k, l \geq K$, niin $d(f_k(x), f_l(x)) < \epsilon$ kaikille $x \in A$. Tällöin jono $(f_k(x))$ on Cauchyn jono avaruudessa M ja koska avaruus M on täydellinen, niin jono $(f_k(x))$ suppenee pisteittäin kohti jotain avaruuden M funktiota. Olkoon tuo rajafunktio f. Nyt koska $f_k(x) \to f(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in A$, niin jokaiselle luvulle x voidaan löytää luku K_x siten, että kun $l \geq K_x$, niin $d(f_l(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Olkoon $l \geq \max\{K, K_x\}$. Näin ollen jos $k \geq K$, niin

$$d(f_k(x), f(x)) \leq d(f_k(x), f_l(x)) + d(f_l(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Koska näin on jokaisessa pisteessä x, niin on löytynyt luku K siten, että kun $k \geq K$, niin $d(f_k(x), f(x)) < \epsilon$ kaikille $x \in A$. Tällöin $f_k \to f$ tasaisesti. $\square$

Cauchyn ehto ja lause 2.1.7 osoittautuu hyödylliseksi ja useaan kertaan käytetyksi yhdistelmäksi tässä työssä. Esimakua edellä mainittujen lauseiden käytöstä saadaan heti seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.1.14. Osoitetaan, että metrinen avaruus $(\mathcal{C}([a,b]), d)$ on täydellinen, missä

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Todistus. Olkoon (f_k) Cauchyn jono avaruudessa $(\mathcal{C}([a,b]), d)$. Tällöin määritelmän 2.1.11 mukaan on olemassa luku K siten, että kun $k, l \geq K$, niin

$$d(f_k, f_l) < \epsilon,$$

joten metriikan d määritelmän mukaan pätee

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_k(x) - f_l(x)| < \epsilon.$$

Tällöin pätee $|f_k(x) - f_l(x)| < \epsilon$ kaikilla $x \in [a,b]$. Nyt lauseen 2.1.13 nojalla on olemassa funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $f_k \to f$ tasaisesti joukossa $[a,b]$. Näin ollen lauseen 2.1.7 mukaan rajafunktio f on jatkuva joukossa $[a,b]$, mikä tarkoittaa sitä, että rajafunktio $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Tämä tarkoittaa sitä, että avaruus $(\mathcal{C}([a,b]), d)$ on täydellinen. $\square$

2.2 Suppenemistestejä

Tässä alaluvussa esitellään hieman työkaluja, joilla voi tutkia lukusarjojen ominaisuuksia, lähinnä suppenemista ja sen laatua.

Määritelmä 2.2.1. Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, missä $x_k \in \mathbb{R}$, suppenee itseisesti täsmälleen silloin, kun sarja $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ suppenee.

Huomautus 2.2.2. Itseisestä suppenemisesta seuraa suppeneminen, mutta ei kääntäen, sillä esimerkiksi vuorotteleva harmoninen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

suppenee, mutta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu.

Seuraavan lauseen tulos kertoo funktiosarjan suppenevan, jos jokin sitä majoroiva lukusarja suppenee.

Lause 2.2.3 (Weierstrassin M-testi)**.** *Pari $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ muodostaa täydellisen metrisen avaruuden, missä metriikka on euklidinen normi. Olkoot $g_k : A \to \mathbb{R}^n$ funktioita siten, että on olemassa vakiot M_k, joille $||g_k(x)|| \leq M_k$ kaikille $x \in A$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ suppenee. Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ suppenee tasaisesti ja itseisesti.*

Todistus. Koska $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ suppenee, niin kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa luku K siten, että kun $k \geq K$, niin

$$|M_k + \cdots + M_{k+p}| < \epsilon$$

kaikille $p = 1, 2, 3....$ Kun $k \geq K$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} ||g_k(x) + \cdots + g_{k+p}(x)|| &\leq ||g_k(x)|| + \cdots + ||g_{k+p}(x)|| \\ &\leq M_k + \cdots + M_{k+p} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

pätee kaikille $x \in A$. Tämä tarkoittaa sitä, että Cauchyn ehdon nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ suppenee tasaisesti. □

Esimerkki 2.2.4. Osoitetaan, että $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ on jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}$.

Todistus. Tässä ei voida valita lukua M_n jonon n:ksi termiksi, koska x ei ole rajoitettu. Tässä tapauksessa ei voida osoittaa tasaista suppenemista joukossa $\mathbb{R}$, mutta se voidaan osoittaa jokaisella välillä $[-a, a]$ valitsemalla $M_n = (\frac{a^n}{n!})^2$, joka on n. termin yläraja välillä $[-a, a]$. Suhdetestin mukaan jono $\sum M_n$ suppenee, sillä

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \left(\frac{a^{n+1}}{a^n}\right)^2 = \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

suppenee kohti lukua $0 < 1$. Nyt tasainen suppenevuus on osoitettu välillä $[-a, a]$ ja seurauksen 2.1.10 nojalla funktio f on jatkuva välillä $[-a, a]$. Nyt, koska luku a oli valittu mielivaltaisesti, niin funktio f on jatkuva koko avaruudessa $\mathbb{R}$. □

Määritellään seuraavaksi potenssisarja ja todistetaan kaksi tulosta potenssisarjoihin liittyen.

Määritelmä 2.2.5. Sarjaa kutsutaan *potenssisarjaksi*, sen ollessa muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

missä kertoimet a_k ovat reaalilukuja ja $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}.$$

Lukua R kutsutaan potenssisarjan *suppenemissäteeksi* ja joukkoa

$$\{x : |x - x_0| < R\}$$

suppenemisväliksi.

Huomautus 2.2.6. Sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

suppenemissäde voidaan myös yhtäpitävästi määritellä siten, että suppenemissäde on luku R, jolle pätee

$$R = \sup\{|x - x_0| : \text{sarja } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ suppenee}\}.$$

Nyt saatiin määriteltyä potenssisarja ja sille suppenemissäde. Seuraavassa tuloksessa käytetään hyväksi juuri määriteltyä suppenemissädettä. Määritelmän 2.2.5 mukainen suppenemissäteen määritelmä on intuitiivisesti hieman vaikea ymmärtää, mutta seuraavassa tuloksessa hyödynnetään sitä sellaisenaan. Huomautuksen 2.2.6 mukainen määrittely antaa suppenemissäteeksi konkreettisesti pienimmän ylärajan välin $|x - x_0|$ pituudelle, jolla sitä vastaava potenssisarja suppenee.

Lause 2.2.7. *Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ suppenee itseisesti kun $|x - x_0| < R$, tasaisesti kun $|x - x_0| \leq R'$, missä $R' < R$ ja hajaantuu jos $|x - x_0| > R$.*

Todistus. Määritelmän 2.2.5 mukaan $R^{-1} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$, kun $k \to \infty$. Olkoon $R' < R$. Valitaan R'' siten, että $R' < R'' < R$. Nyt riittävän suurelle n (limsupin määritelmä antaa)

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R''},$$

josta seuraa, että

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{R''}\right)^n.$$

Jos $|x - x_0| \leq R'$, niin

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq \left(\frac{R'}{R''}\right).$$

Koska oletuksen mukaan on $\frac{R'}{R''} < 1$, niin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

suppenee itseisesti ja tasaisesti, kun $|x - x_0| \leq R'$, Weierstrassin M-testin nojalla. Jos oletetaan, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

suppenee, niin

$$a_n(x - x_0)^n \to 0,$$

kun $n \to \infty$, joten on olemassa luku K siten, että $|a_n(x - x_0)^n| \leq 1$, kun $n \geq K$. Tällöin on myös $\sqrt[n]{|a_n|} \leq |x - x_0|^{-1}$, kun $n \geq K$. Tämän seurauksena $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq |x - x_0|^{-1}$, joten $|x - x_0| \leq R$. □

Lauseen 2.2.7 tulos antaa ehdot potenssisarjan suppenemiselle sen suppenemisvälin sisäpisteissä. Seuraava tulos on tässä työssä mukana, sillä se laajentaa lauseen 2.2.7 tulosta antamalla informaatiota potenssisarjan suppenemisesta sen suppenemisvälin päätepisteissä. Seuraavaa lausetta ei tarvita tämän työn muiden tulosten todistuksissa.

Lause 2.2.8 (Abel)**.** *Jos* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$, *niin* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *suppenee kun* $|x| < 1$ *ja* $\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$.

Todistus. Muuttamalla termiä a_0 voimme olettaa, että $A = 0$. Koska a_k on rajoitettu ja $a_k \to 0$, kun $k \to \infty$, niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee kun $|x| < 1$ lauseen 2.2.7 nojalla.

Olkoon nyt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Koska $A = 0$, niin $S_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Tällöin S_n on rajoitettu kun $n \to \infty$, joten myös sarja $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ suppenee kun $|x| < 1$. Nyt olkoon

$$f(x) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(S_k - S_{k-1})x^k = (1 - x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^k.$$

Nyt koska $S_n \to 0$, niin annetulle $\epsilon > 0$ voimme löytää n_0 siten, että $S_n \leq \epsilon$ kun $n > n_0$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq (1-x)|\sum_{k=1}^{n_0} S_k x^k| + (1-x)\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \epsilon x^k \\
&\leq (1-x)|\sum_{k=1}^{n_0} S_k x^k| + (1-x)\epsilon x^{n_0+1}(1-x)^{-1} \\
&\leq (1-x)|\sum_{k=1}^{n_0} S_k x^k| + \epsilon.
\end{aligned}
$$

Näin ollen $\limsup_{x\to 1^-} |f(x)| \leq \epsilon$. Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltaisesti valittu, niin $\limsup_{x\to 1^-} f(x) = 0$. □

3 Tietzen lause

Tässä luvussa todistetaan Tietzen lause, jonka mukaan metrisen avaruuden (M, d) suljetussa osajoukossa A määritellyt jatkuvat ja rajoitetut funktiot ovat niin sanotusti katkaistu jostain avaruudessa M määritellystä jatkuvasta ja rajoitetusta funktiosta. Ennen Tietzen lauseen todistusta on syytä tehdä ensin hieman valmisteluja.

Määritellään ensimmäiseksi pisteen ja joukon välinen etäisyys. Sanoiksi puettuna määritelmä sanoo, että kiinteän pisteen x ja joukon A etäisyys on pisteen x ja joukon A pisteen y etäisyyden suurin alaraja. Määritellään seuraavaksi kyseinen etäisyys täsmällisesti.

Määritelmä 3.0.1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $A \subset M$. *Pisteen $x \in M$ ja joukon A välinen etäisyys* $d(x, A)$ määritellään seuraavasti:

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Seuraava lemma näyttää, että edellä määritelty etäisyysfunktio on jatkuva avaruudessa M.

Lemma 3.0.2. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $A \subset M$. Olkoon $f(x)$ merkintä pisteen x ja joukon A väliselle etäisyydelle. Tällöin funktio f on jatkuva avaruudessa M. Itse asiassa*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y),$$

kun $x, y \in M$.

Todistus. Jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa piste $x_0 \in A$ siten, että

$$f(x) > d(x, x_0) - \epsilon.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &\leq d(x, y) + f(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Funktion f määritelmästä saadaan

$$f(y) \leq d(y, x_0) \leq d(x, y) + f(x) + \epsilon,$$

joten

$$f(y) - f(x) \leq d(x, y) + \epsilon.$$

Nyt, koska luku ϵ on mielivaltainen, niin pätee

$$f(y) - f(x) \leq d(x, y).$$

Vaihtamalla pisteiden x ja y roolit saadaan, että funktio f on jatkuva avaruudessa M. □

Seuraavan lemman tulos ei ole itsessään kovinkaan vahva, mutta tässä työssä se on erittäin hyödyllinen. Se nimittäin luo pohjan Tietzen lauseen todistukselle.

Lemma 3.0.3. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoon $A \subset M$ ja $B \subset M$ siten, että joukot A ja B ovat erilliset ja suljetut. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $\psi : M \to \mathbb{R}$ siten, että $\psi(x) = 0$, kun $x \in A$ ja $\psi(x) = 1$, kun $x \in B$ ja funktio ψ saa arvoja välillä $[0, 1]$ kaikilla $x \in M$.*

Todistus. Valitaan

$$\psi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Nyt funktio ψ on jatkuva, sillä etäisyysfunktiot $d(x, A)$ ja $d(x, B)$ ovat jatkuvia lemman 3.0.2 nojalla. Funktiolla ψ on myös muut vaaditut ominaisuudet, sillä $d(x, A) = 0$ ja $d(x, B) > 0$, kun $x \in A$. Kun $x \in B$, niin $d(x, B) = 0$ ja $d(x, A) > 0$. Tällöin kun $x \in B$, niin

$$\psi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + \underbrace{d(x, B)}_{=0}} = 1.$$

Lisäksi kun $x \in M \setminus (A \cup B)$, niin $d(x, A) > 0$ ja $d(x, B) > 0$, joten $\psi(x) \in (0, 1)$, sillä nyt $d(x, A) < d(x, A) + d(x, B)$. Lopuksi vielä todetaan, että $d(x, A) + d(x, B) > 0$ kaikilla $x \in M$, sillä joukot A ja B ovat erilliset. □

Huomautus 3.0.4. Olkoon luku $a > 0$ mikä tahansa. Tällöin funktiolle

$$\psi_1(x) = -a + 2a\psi(x)$$

pätee, $\psi_1(x) = -a$, kun $x \in A$, $\psi_1(x) = a$, kun $x \in B$ ja funktio ψ_1 saa arvoja välillä $[-a, a]$. Lisäksi funktio ψ_1 on jatkuva avaruudessa M.

Nyt on määritelty ja todistettu kaikki Tietzen lauseen todistukseen tarvittavat työkalut, joten tämän kappaleen päätulos voidaan todistaa.

Lause 3.0.5 (Tietze)**.** *Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja olkoon joukko $A \subset M$ suljettu. Olkoon funktio $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Määritellään luku $K = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $g : M \to \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$ ja $|g(x)| \leq K$ kaikilla $x \in M$.*

Todistus. Funktio g saadaan rajafunktiona jonolle $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$, joka määritellään jonojen $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ ja $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ avulla, jotka määritellään seuraavaksi. Asetetaan $f_1(x) = f(x)$, kun $x \in A$ ja määritellään joukot

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x : x \in A \text{ ja } f_1(x) \leq -\frac{1}{3}K\}, \\ B_1 &= \{x : x \in A \text{ ja } f_1(x) \geq \frac{1}{3}K\}. \end{aligned}$$

Koska funktio f on jatkuva, niin joukot A_1 ja B_1 ovat erilliset ja suljetut. Huomautuksen 3.0.4 mukaan on olemassa funktio ψ_1, joka on jatkuva avaruudessa M ja jolle pätee

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\frac{1}{3}K \text{ joukossa } A_1, \\ \psi_1(x) &= \frac{1}{3}K \text{ joukossa } B_1, \\ |\psi_1(x)| &\leq \frac{1}{3}K \text{ joukossa } M. \end{aligned}$$

Seuraavaksi määritellään

$$f_2(x) = f_1(x) - \psi_1(x) \text{ kun } x \in A$$

ja näytetään, että

$$|f_2(x)| \leq \frac{2}{3}K,$$

kun $x \in A$. Olkoon $x \in A_1$. Tällöin

$$f_2(x) = \frac{1}{3}K + f_1(x).$$

Nyt
$$-K \leq f_1(x) \leq -\frac{1}{3}K,$$
joten
$$|f_2(x)| \leq \frac{2}{3}K.$$

Olkoon nyt $x \in B_1$. Tällöin $f_2(x) = f_1(x) - \frac{1}{3}K$, joten joukon B_1 määritelmästä saadaan $|f_2(x)| \leq K - \frac{1}{3}K = \frac{2}{3}K$. Samaan tapaan, jos $x \in A \setminus (A_1 \cup B_1)$, niin funktioiden f_1 ja ψ_1 itseisarvot ovat pienempiä kuin luku $\frac{1}{3}K$.

Määritellään seuraavaksi joukot
$$A_2 = \{x : x \in A \text{ ja } f_2(x) \leq -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}K\},$$
$$B_2 = \{x : x \in A \text{ ja } f_2(x) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}K\}.$$
Joukot A_2 ja B_2 ovat erilliset ja suljetut. Samaan tapaan kuin aiemmin, on olemassa funktio $\psi_2(x)$, jolle pätee
$$\psi_2(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}K \text{ joukossa } A_2,$$
$$\psi_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}K \text{ joukossa } B_2,$$
$$|\psi_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}K \text{ joukossa } M.$$
Asetetaan
$$f_3(x) = f_2(x) - \psi_2(x)$$
ja kuten edellä, saadaan
$$|f_3(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 K,$$
kun $x \in A$. Aiemman mukaisesti määritellään joukot A_n ja B_n siten, että
$$A_n = \{x : x \in A \text{ ja } f_n(x) \leq -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} K\},$$
$$B_n = \{x : x \in A \text{ ja } f_n(x) \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} K\}.$$

Edelleen on olemassa funktio ψ_n siten, että

$$\psi_n(x) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} K \text{ joukossa } A_n,$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} K \text{ joukossa } B_n,$$

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} K \text{ joukossa } M.$$

Asetetaan nyt

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \psi_n(x),$$

joten epäyhtälö

$$|f_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n K$$

pätee, kun $x \in A$.

Seuraavaksi määritellään

$$g_n(x) = \psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x),$$

kun $x \in M$ ja osoitetaan, että jono (g_n) on tasaisesti suppeneva jono. Itse asiassa luvuille $m > n$ pätee

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &= |\psi_{n+1}(x) + \cdots + \psi_m(x)| \\
&\leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^m\right] K \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}\right] K \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{m-n} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right] K \\
&\leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right] K = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) K \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n K
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että jono (g_n) on Cauchy, joten se suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota lauseiden 2.1.13 ja 2.1.7 nojalla. Olkoon tuo rajafunktio g. Näytetään nyt, että $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$. Tässä on syytä huomata, että

$$g_n = \psi_1 + \cdots + \psi_n = \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i+1}) = f_1 - f_{n+1}.$$

Nyt koska $|f_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n K$ kun $x \in A$, niin $f_{n+1}(x) \to 0$ kun $n \to \infty$. Näin ollen $g_n \to g = f_1 = f$, kun $n \to \infty$. Lisäksi

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}K\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right] = K$$

kaikille $x \in M$.

□

4 Banachin kiintopistelause

Tässä luvussa esitellään Banachin kiintopistelause, joka on keskeisessä osassa differentiaaliyhtälöiden ratkaisuiden määrään liittyvän lauseen todistuksessa. Banachin kiintopistelauseen sovelluksena esitelläänkin yksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaololause, Peanon lauseen 1. versio.

Ennen Banachin kiintopistelauseen todistusta määritellään kutistava kuvaus.

Määritelmä 4.0.1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja funktio $f : M \to M$. Kuvauksen f sanotaan olevan *kontraktio* eli kutistus, jos on olemassa luku $k \in [0, 1[$, jolle pätee

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

kaikille $x, y \in M$.

Kuvaus on siis kutistus, jos se puristaa jokaisen pisteparin kuvapisteiden etäisyyden pienemmäksi kuin pisteparin etäisyys on määrittelyjoukossa.

Esimerkki 4.0.2. Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = \frac{x}{2}$. Tällöin kuvaus f on kontraktio.

Todistus. Nyt, koska pätee

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y),$$

niin kuvaus f on kontraktio. □

Seuraava lause kertoo, että jokaisella täydellisen metrisen avaruuden kutistavalla kuvauksella on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste. Lausetta sovelletaan tässä työssä differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaoloon ja niiden yksikäsitteisyyteen liittyvän lauseen 4.1.1 todistuksessa.

Lause 4.0.3 (Banachin kiintopistelause)**.** *Olkoon* (M, d) *täydellinen metrinen avaruus ja* $\Phi : M \to M$ *annettu kuvaus. Oletetaan, että kuvaus* Φ *on kontraktio. Tällöin kuvauksella* Φ *on olemassa yksikäsitteinen kiintopiste. Toisin sanoen on olemassa piste* $x_* \in M$ *siten, että* $\Phi(x_*) = x_*$*. Itseasiassa, jos* x_0 *on mikä tahansa piste avaruudessa* M *ja määritellään* $x_1 = \Phi(x_0),\ x_2 = \Phi(x_1), \ldots,\ x_{n+1} = \Phi(x_n), \ldots,$ *niin*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*.$$

Todistus. Ensin osoitetaan kiintopisteen olemassaolo, jonka jälkeen todistetaan sen yksikäsitteisyys. Olkoon $x_0 \in M$ ja $x_1, x_2, x_3 \ldots$ kuten lauseessa määriteltiin. Jos $x_1 = x_0$, niin $\Phi(x_0) = x_0$, joten piste x_0 on kiintopiste. Jos $x_0 \neq x_1$, niin $d(x_1, x_0) > 0$ ja osoitetaan, että pisteet $\{x_n\}$ muodostavat Cauchyn jonon joukossa M. Nyt siis pätee

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(\Phi(x_1), \Phi(x_0)) \leq kd(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(\Phi(x_2), \Phi(x_1)) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Jatkamalla samaan tapaan saadaan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Lisäksi koska kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n),$$

niin tällöin pätee myös

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0).$$

Geometrinen sarja $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ suppenee, kun $0 \leq k < 1$, joten sarja toteuttaa Cauchyn ehdon. Toisin sanoen annetulle $\epsilon > 0$ on olemassa luku N siten, että

$$k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n < \frac{\epsilon}{d(x_1, x_0)},$$

jos $n \geq N$ ja luku p on mielivaltainen. Nyt koska $d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon$, jos $n \geq N$ ja luku p on mielivaltainen, niin jono (x_n) on Cauchyn jono. Avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa avaruudessa M. Olkoon nyt

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Seuraavaksi osoitetaan kuvauksen Φ olevan jatkuva. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu ja $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. Tällöin kun

$$d(x, y) < \delta, \text{ niin } d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq kd(x, y) < k\delta = \epsilon.$$

Käsitellään pistettä $x_{n+1} = \Phi(x_n)$. Koska $x_{n+1} \to x_*$ ja kuvaus Φ on jatkuva, niin $\Phi(x_n) \to \Phi(x_*)$. Nyt siis $x_* = \Phi(x_*)$, joten piste x_* on kiintopiste. Lopuksi osoitetaan vielä kiintopisteen x_* yksikäsitteisyys. Olkoon y_* myös kiintopiste. Tällöin

$$d(x_*, y_*) = d(\Phi(x_*), \Phi(y_*)) \leq kd(x_*, y_*), \text{ eli } (1-k)d(x_*, y_*) \leq 0.$$

Nyt koska $k < 1$, niin $(1-k) > 0$, josta seuraa $d(x_*, y_*) = 0$, mikä tarkoittaa sitä, että $x_* = y_*$. Näin on osoitettu, että piste x_* on yksikäsitteinen, joten lause on todistettu. □

Esimerkki 4.0.4. Olkoon (M, d) täydellinen metrinen avaruus. Tällöin on olemassa kuvaus $\Phi : M \to M$, jolle pätee $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq d(x, y)$, mutta kuvauksella Φ ei ole yksikäsitteistä kiintopistettä. Näin todella on, sillä jos $M = \mathbb{R}$ yleisesti tunnetulla metriikalla $d(x, y) = |x - y|$ ja $\Phi(x) = x + 1$, niin kuvauksella Φ ei ole kiintopistettä lainkaan, sillä $x \neq x + 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kuitenkin $|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y|$.

Edellä oleva esimerkki näyttää Banachin kiintopistelauseessa olevan oleellista, että kuvaus Φ on kontraktio, jolloin pätee $0 \leq k < 1$, kuten määritelmässä 4.0.1. Tapaus $k = 1$ ei aina takaa kiintopisteen olemassaoloa.

4.1 Banachin kiintopistelauseen sovellus

Tässä alaluvussa todistetaan, Banachin kiintopistelausetta hyväksi käyttäen, yksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaololauseen versio. Seuraavasta lauseesta todistetaan myös hieman heikommilla oletuksilla varustettu versio luvussa 6, mikä tehdään Arzelan ja Ascolin lauseen avulla.

Todistetaan nyt edellä mainitun lauseen vahvemmilla oletuksilla varustettu versio. Todistuksen idea on etsiä differentiaaliyhtälölle ratkaisu, joka on jonkin kuvauksen kiintopiste. Tämän jälkeen osoitetaan tuon kuvauksen olevan kontraktio, jolloin löydetyn ratkaisun yksikäsitteisyys seuraa Banachin kiintopistelauseesta.

Lause 4.1.1 (Peano, 1. versio)**.** *Olkoon funktio f jatkuva pisteen $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ ympäristössä. Oletetaan myös, että funktio f toteuttaa Lipschitzehdon*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

kaikilla pisteen (t_0, x_0) ympäristön pisteillä (t, x_1) ja (t, x_2). Tällöin on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että yhtälöllä

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

on yksikäsitteinen C^1 ratkaisu $x = \varphi(t)$, missä $\varphi(t_0) = x_0$, kun $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$. Toisin sanoen $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Todistus. Ensin valitaan pallo pisteen (t_0, x_0) ympäristöstä siten, että $|f(t,x)| \leq L$ kaikilla (t,x), jotka kuuluvat valittuun palloon ja Lipschitzehto pätee. Sitten valitaan luku δ, jolle pätee ehdot

i. $|t - t_0| \leq \delta$, $|x - x_0| \leq L\delta \Rightarrow (t, x)$ sisältyy valittuun palloon ja

ii. $K\delta < 1$, missä luku K on Lipschitzvakio.

Olkoon

$$M = \{\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ on jatkuva}, \varphi(t_0) = x_0, \text{ ja } |\varphi(t) - x_0| \leq L\delta\} \\ \subset \mathcal{C}([t_0 - \delta, t_0 + \delta]).$$

Tässä on syytä huomata, että joukko M on suljettu avaruudessa $\mathcal{C}$, sillä jos (φ_n) on joukon M jono, jolle $d(\varphi_n, \varphi) \to 0$, kun $n \to \infty$, niin $\varphi \in M$. Näin ollen (M, d) on täydellinen metrinen avaruus ja sen metriikka on

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Olkoon $\Phi : M \to \mathcal{C}$ määritelty seuraavasti

$$\Phi(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Seuraavaksi käytetään hyväksi tietoa, että yhtälön (1) ratkaiseminen on ekvivalentti operaatio sille, että etsitään jatkuva funktio φ välillä $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ siten, että

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds. \tag{2}$$

Tämä taas on ekvivalenttia sille, että kuvauksella

$$\Phi : \varphi \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

on kiintopiste (2). Nyt osoitetaan, että kuvaus Φ on kontraktio, eli kutistus.

Ensimmäiseksi osoitetaan, että kuvaus Φ kuvaa avaruudesta M itselleen. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $\varphi \in M$, niin

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \in M.$$

Funktio ψ on jatkuva, sillä se toteuttaa Lipschitzehdon vakiolla L seuraavasti. Jos $s < t$, niin

$$|\psi(t) - \psi(s)| = \left| \int_s^t f(x, \varphi(x))\, dx \right| \leq \int_s^t |f(x, \varphi(x))|\, dx \leq L|t - s|.$$

Tässä on syytä huomata, että $\psi(t_0) = x_0$ ja

$$|\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leq L|t - t_0| \leq L\delta,$$

mikä tarkoittaa sitä, että $\psi \in M$. Seuraavaksi etsitään luku $k \in [0, 1[$ siten, että $d(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)) \leq kd(\varphi_1, \varphi_2)$. Nyt

$$\begin{aligned} d(\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)) &= \sup_t \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\, ds \right| \\ &\leq \delta K \sup_s |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \\ &= \delta K d(\varphi_2, \varphi_2) \end{aligned}$$

ja tässä luku δ valittiin siten, että $\delta K < 1$, joten valitaan $k = \delta K$.

Tällöin koska kuvaus Φ on kontraktio, niin Banachin kiintopistelauseen nojalla sillä on yksikäsitteinen kiintopiste, mikä tarkoittaa sitä, että yhtälöllä (1) on yksikäsitteinen ratkaisu. □

5 Kompakteista joukoista

Tässä luvussa käsitellään kompaktisuutta, joka on keskeinen käsite kun tutkitaan metrisiä avaruuksia ja siellä jatkuvia funktioita. Tämän kappaleen päätulos on Bolzanon ja Weierstrassin lause, jossa osoitetaan kompaktisuus ja jonokompaktisuus ekvivalenteiksi.

Ennen päätuloksen todistusta on syytä määritellä kompaktisuus ja jonokompaktisuus, mikä tehdään seuraavaksi.

Määritelmä 5.0.1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Avaruuden M osajoukko $A \subset M$ on *jonokompakti*, jos jokaisella joukon A jonolla on osajono, joka suppenee johonkin joukon A pisteeseen.

Määritelmä 5.0.2. Olkoon joukko A kuten määritelmässä 5.0.1. Joukko A on *kompakti*, jos jokaisella joukon A avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.

Määritellään seuraavaksi kokonaan rajoitettu joukko. Määritelmä on tarpeellinen Bolzanon ja Weierstrassin lauseen todistukseen liittyvissä päättelyissä. Määritelmässä joukon sanotaan olevan kokonaan rajoitettu, jos se sisältyy mielivaltaisen pienellä säteellä varustettujen x_i keskeisten pallojen äärelliseen yhdisteeseen.

Määritelmä 5.0.3. Joukko $A \subset M$ on *kokonaan rajoitettu*, jos kaikille luvuille $\epsilon > 0$ on äärellinen joukko $\{x_1, \dots, x_N\}$ joukossa M siten, että $A \subset \cup_{i=1}^{N} B(x_i, \epsilon)$.

Seuraavaksi esitellään tämän kappaleen päätulos, joka osoittaa kompaktisuuden ja jonokompaktisuuden ekvivalenteiksi.

Lause 5.0.4 (Bolzanon ja Weierstrassin lause)**.** *Metrisen avaruuden (M, d) osajoukko $A \subset M$ on kompakti jos ja vain jos joukko A on jonokompakti.*

Ennen varsinaista todistusta, todistetaan ensin kolme aputulosta:

Lemma 5.0.5. *Kompakti joukko $A \subset M$ on suljettu.*

Todistus. Riittää osoittaa, että joukko $M \setminus A$ on avoin. Olkoon $x \in M \setminus A$. Tutkitaan avointen joukkojen kokoelmaa

$$U_n = \{y \mid d(y, x) > \frac{1}{n}\}.$$

Koska kaikille $y \in A$ pätee $d(x, y) > 0$, on jokaiselle $y \in A$ olemassa jokin joukko U_n sillä tavalla, että $y \in U_n$. Näin ollen joukoista U_n koostuva perhe peittää joukon A, joten on olemassa äärellinen osapeite. Koska osapeite on äärellinen, niin yhdellä näistä osapeitteeseen kuuluvista joukoista U_n on suurin indeksi. Olkoon se joukko U_N. Nyt jos $\epsilon = \frac{1}{N}$, niin saadaan

$$B(x, \epsilon) \subset M \setminus A.$$

Näin ollen joukko $M \setminus A$ on avoin ja erityisesti siis joukko A on suljettu. □

Lemma 5.0.6. *Jos (M, d) on kompakti metrinen avaruus ja joukko $B \subset M$ on suljettu, niin joukko B on kompakti.*

Todistus. Olkoon $\{U_i\}$ joukon B avoin peite. Olkoon $V = M \setminus B$, jolloin joukko V on avoin. Näin ollen $\{U_i, V\}$ on joukon M avoin peite. Tällöin joukolla M on äärellinen peite $\{U_1, \dots, U_N, V\}$, joten $\{U_1, \dots, U_N\}$ on joukon B äärellinen avoin peite. □

Lemma 5.0.7. *Jos joukko A on jonokompakti, niin se on kokonaan rajoitettu.*

Todistus. Jos joukko A ei ole kokonaan rajoitettu, niin on olemassa luku $\epsilon > 0$ siten, että joukkoa A ei voida peittää äärellisellä määrällä ϵ-säteisiä palloja. Valitaan pisteet $y_1 \in A$ ja $y_2 \in A \setminus B(y_1, \epsilon)$. Oletuksen mukaan voimme jatkaa valintoja siten, että saadaan

$$y_n \in A \setminus [B(y_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(y_{n-1}, \epsilon)].$$

Tälle jonolle pätee $d(y_n, y_m) \geq \epsilon$ kaikilla luvuilla $n, m \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa sitä, että jonolla (y_n) ei ole suppenevaa osajonoa. Tämä on kuitenkin ristiriitaista, sillä oletuksen mukaan joukko A on jonokompakti. □

Seuraavaksi todistetaan Bolzanon ja Weierstrassin lause edellä esiteltyjen lemmojen 5.0.5-5.0.7 avulla.

Lauseen 5.0.4 todistus. Olkoon joukko A kompakti. Oletetaan, että on olemassa jono $(x_k) \subset A$, jolla ei ole suppenevia osajonoja. Tämä tarkoittaa sitä, että jonolla (x_k) on äärettömän monta eristettyä pistettä $y_1, y_2, \ldots$, sillä jos näin ei ole, niin on olemassa jokin jonon (x_k) piste x_i siten, että $B(x_i, \epsilon) \cap (x_k) \neq \emptyset$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että jonolla (x_k) on olemassa osajono, joka suppenee, mikä on vastoin oletusta.

Nyt koska jonolla (x_k) ei ole suppenevia osajonoja, niin on olemassa joku pisteen y_k ympäristö U_k, joka ei sisällä mitään pisteistä y_i. Jos jokaisessa pisteen y_k ympäristössä olisi jokin y_j, niin valistemalla ympäristöt $B(y_k, \frac{1}{m})$, jossa $m = 1, 2, \ldots$, saataisiin osajono joka konvergoi pisteeseen y_k. Väitetään, että joukko $\{y_1, y_2, \ldots\}$ on suljettu. Tämä johtuu siitä, että sillä ei ole kasautumispisteitä, sillä oletimme, että jonolla (x_k) ei ole suppenevia osajonoja. Joukko $\{y_1, y_2, \ldots\}$ on joukon A osajoukko, joten lemmasta 5.0.6 seuraa, että joukko $\{y_1, y_2, \ldots\}$ on kompakti. Kuitenkin $\{U_k\}$ on joukon $\{y_1, y_2, \ldots\}$ avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä, mikä on ristiriita. Niinpä jonolla (x_k) on oltava suppeneva osajono joukossa A, sillä A on suljettu lemman 5.0.5 nojalla.

Kääntäen oletetaan, että joukko A on jonokompakti. Olkoon $\{U_k\}$ joukon A avoin peite. Nyt pitää osoittaa, että peitteellä $\{U_k\}$ on äärellinen alipeite.

Olkoon luku $r > 0$ siten, että kaikille pisteille $y \in A$ pätee $B(y, r) \subset U_i$, jollekin joukolle U_i. Tällainen luku on, sillä jos näin ei ole, niin kaikille kokonaisluvuille n on olemassa jokin piste y_n siten, että avoin pallo $B(y_n, \frac{1}{n})$ ei sisälly mihinkään joukkoon U_i. Oletuksen nojalla jonolla (y_n) on suppeneva osajono $z_n \to z \in A$. Koska $\{U_i\}$ on joukon A peite, niin pätee $z \in U_{i_0}$ jollekin joukolle U_{i_0}. Valitaan $\epsilon > 0$ siten, että $B(z, \epsilon) \subset U_{i_0}$. Näin voidaan tehdä, sillä joukko U_{i_0} on avoin. Valitaan sitten luku K siten, että $d(z_K, z) < \frac{\epsilon}{2}$ ja $\frac{1}{K} < \frac{\epsilon}{2}$. Tällöin $B(z_K, \frac{1}{K}) \subset U_{i_0}$, mikä on ristiriita.

Nyt joukko A on kokonaan rajoitettu lemman 5.0.7 nojalla, joten pätee

$$A \subset B(y_1, r) \cup \dots \cup B(y_n, r)$$

äärellisen monelle pisteelle y_j. Luvun r valintaa koskevan päättelyn nojalla $B(y_j, r) \subset U_{i_j}$, missä $j = 1, \dots, n$, jollekin indeksille i_j. Tällöin $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ peittää joukon A. $\square$

Nyt on saatu todistettua tulos, joka on keskeisessä osassa Arzelan ja Ascolin lauseen todistuksessa, joka on yksi tämän työn päätuloksista. Lauseen 5.0.4 avulla voidaan myös todistaa seuraava tulos, joka antaa yhteyden metrisen avaruuden kompaktisuuden, täydellisyyden ja kokonaan rajoittuneisuuden välille. Tehdään se seuraavaksi.

Lause 5.0.8. *Metrinen avaruus (M, d) on kompakti täsmälleen silloin, kun se on täydellinen ja kokonaan rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan ensin avaruuden M olevan kompakti. Lauseen 5.0.4 nojalla avaruus M on jonokompakti ja lemman 5.0.7 nojalla myös kokonaan rajoitettu, joten riittää osoittaa, että avaruus M on täydellinen.

Nyt, jos jono (x_k) on Cauchy, niin sillä on osajono, joka suppenee. Tällöin koko jono suppenee, sillä Cauchyn jonon osajono suppenee kohti samaa pistettä kuin itse Cauchyn jono. Tällöin avaruus M on täydellinen.

Kääntäen oletetaan, että avaruus M on täydellinen ja kokonaan rajoitettu. Lauseen 5.0.4 nojalla riittää osoittaa, että avaruus M on jonokompakti.

Olkoon (y_k) jono avaruudessa M. Jonon (y_k) pisteiden voidaan olettaa olevan erillisiä, sillä jos jonolla (y_k) on äärettömän monta toisintoa, niin on olemassa triviaalisti suppeneva osajono. Jos toisintoja on äärellinen määrä, niin ne voidaan poistaa eli riittää tutkia jonon (y_k) osajonoa, jossa jokainen termi esiintyy vain kerran. Nyt koska avaruus M on kokonaan rajoitettu, niin annetulle luvulle K on olemassa avaruuden M peite, jossa on äärellinen määrä palloja $B(x_1, \frac{1}{K}), \dots, B(x_K, \frac{1}{K})$, joista yksi sisältää äärettömän monta jonon (y_k) termiä. Aloitetaan luvusta $K = 1$. Kirjoitetaan

$$M = B(x_1, 1) \cup \dots \cup B(x_K, 1),$$

jolloin voidaan valita jonon (y_k) osajono (y_{1k}), joka sisältyy johonkin näistä palloista. Toistetaan kun $K = 2$, jolloin saadaan jonon (y_{1k}) osajono (y_{2k}), joka sisältyy johonkin palloon, jonka säde on $\frac{1}{2}$ ja niin edelleen. Näin jatkamalla saadaan jonon (y_k) osajonot, joille pätee

$$(y_k) \supset (y_{1k}) \supset (y_{2k}) \dots .$$

Nyt valitaan jonon (y_k) osajono siten, että otetaan ensimmäisen jonon ensimmäinen jäsen, toisen jonon toinen jäsen ja jatketaan tätä. Syntyvä jono $(z_n) = y_{11}, y_{22}, \ldots$ on Cauchy, sillä jokaiselle $\epsilon > 0$, valitsemalla $K > 2/\epsilon$, pätee $d(z_n, z_m) \leq \frac{2}{K} < \epsilon$, kun $n, m \geq K$, sillä jonojen (y_{nk}) ja (y_{mk}) kaikki pisteet sisältyvät samaan $\frac{1}{K}$−säteiseen palloon. Koska avaruus M on täydellinen, niin jono suppenee. Näin ollen avaruus M on jonokompakti ja siten kompakti. $\square$

Esimerkki 5.0.9. Avaruus $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ei ole kompakti, sillä jonolla (f_n), missä $f_n(x) = x^n$, ei ole suppenevaa osajonoa, koska jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti epäjatkuvaa funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun} \quad x \neq 1, \\ 1, & \text{kun} \quad x = 1. \end{cases}$$

6 Arzelan ja Ascolin lause ja sovellukset

Tämän kappaleen ja työn päätulos, Arzelan ja Ascolin lause, antaa jatkuvista funktioista koostuvalle kompaktille joukolle ominaisuuksia. Lausetta voi verrata avaruuden $\mathbb{R}^n$ tulokseen, joka sanoo, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti täsmälleen silloin, kun se on suljettu ja rajoitettu. Arzelan ja Ascolin lauseen tulos pätee myös avaruutta $\mathbb{R}^n$ yleisimmissä metrisissä avaruuksissa. Ennen varsinaista päätulosta on syytä määritellä käsitteitä ja todistaa muutamia tuloksia.

Määritellään ensin tasainen jatkuvuus metrisissä avaruuksissa ja todistetaan sitten siihen liittyvä tulos, joka sanoo kompaktissa joukossa määritellyn jatkuvan funktion olevan tasaisesti jatkuva.

Määritelmä 6.0.1. Olkoot (M, d_1) ja (N, d_2) metrisiä avaruuksia. Olkoon $A \subset M$, $f : A \to N$ ja $B \subset A$. Funktion f sanotaan olevan *tasaisesti jatkuva* joukossa B, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $x, y \in B$ ja $d_1(x, y) < \delta$, niin $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Lause 6.0.2. *Olkoot A ja N kuten määritelmässä 6.0.1. Olkoon $f : A \to N$ jatkuva ja olkoon $B \subset A$ kompakti joukko. Tällöin funktio f on tasaisesti jatkuva joukossa B.*

Todistus. Valitaan luku δ_x annetuille $\epsilon > 0$ ja $x \in B$ siten, että kun $d(x, y) < \delta_x$, niin $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Pallot $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ peittävät joukon B ja ovat avoimia. Näin ollen on olemassa joukon B äärellinen peite

$$B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), \ldots, B(x_K, \frac{\delta_{x_K}}{2}).$$

Olkoon $\delta = \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_K}}{2}\}$. Nyt jos $d_1(x,y) < \delta$, niin on olemassa $x_i \in B$, jolle pätee $d_1(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$, sillä pallot $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ peittävät joukon B. Näin ollen pätee

$$d_1(x_i, y) \leq d_1(x, x_i) + d_1(x, y) < \delta_{x_i}.$$

Tällöin, luvun δ valinnan nojalla, pätee

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Esimerkki 6.0.3. Olkoon $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Osoitetaan, että funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[a, 1]$, kun $a > 0$.

Todistus. Tulos seuraa lauseesta 6.0.2, sillä joukko $[a, 1]$ on kompakti joukko ja funktio f on jatkuva välillä $]0, 1]$, joten se on jatkuva myös välillä $[a, 1]$. □

Määritellään vielä kaksi käsitettä ja todistetaan yksi aputulos. Tämän jälkeen todistetaan tämän luvun ja yksi tämän työn päätuloksista, Arzelan ja Ascolin lause.

Määritelmä 6.0.4. Olkoot A ja N, kuten määritelmässä 6.0.1. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A, N)$. Joukko $\mathcal{B}$ on *yhtäjatkuva* joukko funktioita, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $x, y \in A$ ja $d_1(x, y) < \delta$, niin $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ kaikille $f \in \mathcal{B}$.

Yhtäjatkuvuuden määritelmä on tasaisen jatkuvuuden määritelmän kanssa samankaltainen. Tässä on kuitenkin syytä huomata, että luvun δ valinta ei riipu funktiosta f.

Esimerkki 6.0.5. Olkoon luku $K > 0$ ja olkoon

$$\mathcal{B} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \text{ kaikille } x, y \in [a, b]\}.$$

Tällöin $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva joukko funktioita välillä $[a, b]$, kun valitaan $\delta = \frac{\epsilon}{K}$.

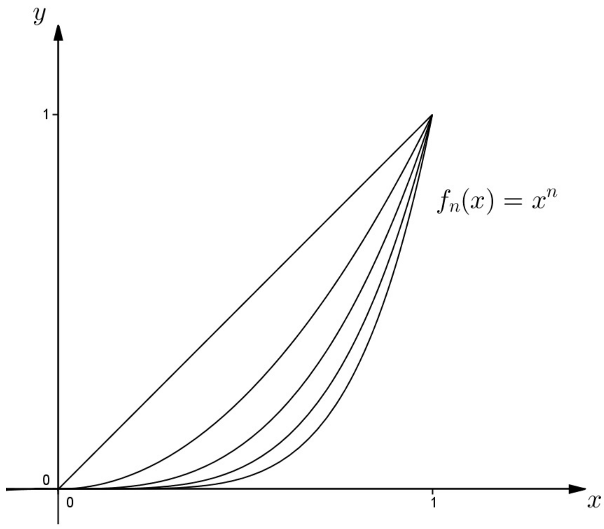
Esimerkki 6.0.6. Perhe $\{f_n\}$, missä

$$f_n(x) = x^n$$

ja $x \in [0, 1]$, ei ole yhtäjatkuva, sillä jos $\epsilon = \frac{1}{2}$ ja $\delta > 0$ mikä tahansa, niin

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(1) - f_n(1 - \delta)| = \lim_{n\to\infty} |1 - (1 - \delta)^n| = 1.$$

Kuvassa 2 on esitetty perheen $\{f_n\}$ viisi ensimmäistä funktiota.



Kuva 2: Funktioperhe $f_n(x) = x^n$ välillä $x \in [0, 1]$.

Määritelmä 6.0.7. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A, N)$. Olkoon $\mathcal{B}_x = \{f(x) \,|\, f \in \mathcal{B}\}$ jollekin kiinteälle pisteelle $x \in A$. Tämä on siis kaikkien joukon $\mathcal{B}$ funktioiden arvojen joukko pisteessä $x \in A$. Joukko $\mathcal{B}$ on *pisteittäin kompakti* jos ja vain jos joukko $\mathcal{B}_x$ on kompakti avaruudessa N kaikilla $x \in A$.

Lemma 6.0.8. *Olkoon A kompakti. Tällöin jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa äärellinen joukko $C_\delta = \{y_1, \dots, y_k\}$ siten, että jokaiselle $x \in A$ pätee $d(x, y_i) < \delta$ jollakin indeksillä $i = 1, \dots, k$.*

Todistus. Pallojen kokoelma $\{B(x, \delta) \,|\, x \in A\}$ peittää joukon A, joten kompaktisuuden nojalla myös äärellinen kokoelma $B(y_1, \delta), \dots, B(y_k, \delta)$ peittää joukon A. Voidaan siis valita $C_\delta = \{y_1, \dots, y_k\}$. $\square$

Nyt on määritelty ja todistettu kaikki Arzelan ja Ascolin lauseeseen tarvittavat käsitteet ja tulokset, joten Arzelan ja Ascolin lause voidaan nyt todistaa.

Lause 6.0.9 (Arzelan ja Ascolin lause)**.** *Olkoon $A \subset M$ kompakti ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A, N)$. Tällöin $\mathcal{B}$ on kompakti jos ja vain jos $\mathcal{B}$ on suljettu, yhtäjatkuva ja pisteittäin kompakti.*

Todistus. Osoitetaan ensimmäisenä suunta, jossa oletetaan joukon $\mathcal{B}$ olevan suljettu, yhtäjatkuva ja pisteittäin kompakti. Olkoon $C = \bigcup\{C_{1/n} \,|\, n = 1, 2, 3, \dots\}$. Tässä joukot $C_{1/n}$ ovat kuten lemmassa 6.0.8. Nyt koska jokainen $C_{1/n}$ on äärellinen, niin joukko C on numeroituva, kirjoitetaan $C =$

$\{x_1, x_2, \dots\}$. Olkoon (f_n) jono joukossa $\mathcal{B}$. Nyt $\{f_n\}$ sisältyy pisteittäin kompaktiin joukkoon $\mathcal{B}$, joten Bolzanon ja Weierstrassin lauseen nojalla on olemassa jonon $(f_n(x_1))$ osajono, joka suppenee. Merkitään tätä jonoa seuraavasti

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1) \dots.$$

Samaan tapaan jonolla $(f_{1k}(x_2))$, missä $k = 1, 2, \dots$, on suppeneva osajono

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2) \dots.$$

Edelleen jonolla $(f_{2k}(x_3))$, missä $k = 1, 2, \dots$, on suppeneva osajono

$$f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), \dots, f_{3n}(x_3) \dots.$$

Kun tällä tavoin jatketaan, niin saadaan $g_n = f_{nn}$, missä g_n on n. funktio, joka esiintyy n:ssä osajonossa. Jono (g_n) saadaan seuraavan kaavion diagonaalilta

$$\begin{array}{ll}
f_{11} f_{12} f_{13} \dots f_{1n} \dots & \text{(ensimmäinen osajono)} \\
f_{21} f_{22} f_{23} \dots f_{2n} \dots & \text{(toinen osajono)} \\
f_{31} f_{32} f_{33} \dots f_{3n} \dots & \text{(kolmas osajono)} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \\
f_{n1} f_{n2} f_{n3} \dots f_{nn} \dots & \text{(n. osajono)}
\end{array}$$

Edellä olevasta taulukosta nähdään, että jono (g_n) suppenee jokaisessa joukon C pisteessä, sillä jono (g_n) on jokaisen jonon (f_{mk}) osajono.

Osoitetaan seuraavaksi, että jono (g_n) suppenee myös jokaisessa joukon A pisteessä ja suppeneminen on tasaista. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon δ, kuten yhtäjatkuvuuden määritelmässä. Olkoon $C_\delta = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ äärellinen joukon C osajoukko siten, että jokaiselle pisteelle $x \in A$ pätee $d(x, y_i) < \delta$ jollakin indeksillä $i = 1, \dots, k$. Näin on siis lemman 6.0.8 mukaisesti. Nyt koska jonot

$$(g_n(y_1)), (g_n(y_2)), \dots, (g_n(y_k))$$

suppenevat, niin on olemassa luku $K \in \mathbb{N}$ siten, että jos $m, n \geq K$, niin

$$d_2(g_n(y_i), g_m(y_i)) < \epsilon \quad \text{kun } i = 1, 2, \dots, k.$$

Jokaiselle pisteelle $x \in A$ on olemassa $y_j \in C_\delta$ siten, että $d_1(x, y_j) < \delta$. Nyt yhtäjatkuvuuden nojalla pätee

$$d_2(g_n(x), g_n(y_j)) < \epsilon$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Näin ollen

$$\begin{aligned} d_2(g_n(x), g_m(x)) &\le d_2(g_n(x), g_n(y_j)) + d_2(g_n(y_j), g_m(y_j)) + d_2(g_m(y_j), g_m(x)) \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon, \end{aligned}$$

missä $m, n \ge K$. Tämä osoittaa, että

$$d_2(g_n, g_m) \le 3\epsilon,$$

kun $m, n \ge K$. Näin ollen jono (g_n) suppenee tasaisesti joukossa A Cauchyn ehdon nojalla. Raja-arvo on joukossa $\mathcal{B}$, sillä joukko $\mathcal{B}$ on suljettu. Tämä todistaa lauseen toisen suunnan, jossa oletetaan joukon $\mathcal{B}$ yhtäjatkuvuus ja pisteittäin kompaktisuus.

Kääntäen oletetaan, että joukko $\mathcal{B}$ on kompakti. Tällöin joukko $\mathcal{B}$ on myös suljettu ja pisteittäin kompakti. Lauseen 5.0.8 mukaan joukko $\mathcal{B}$ on kokonaan rajoitettu. Nyt tämän suunnan todistamiseksi riittää osoittaa, että jos joukko $\mathcal{B}$ on kokonaan rajoitettu, niin joukko $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. Oletetaan siis, että joukko $\mathcal{B}$ on kokonaan rajoitettu. Tällöin joukko $\mathcal{B}$ on rajoitettu joukossa $\mathcal{C}(A, N)$ ja on tällöin tasaisesti rajoitettu joukko funktioita. Osoitetaan nyt, että joukko $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon funktiot $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{B}$ siten, että f_i keskeiset $\frac{\epsilon}{3}$ säteiset pallot peittävät funktiojoukon $\mathcal{B}$. Tällainen peite on olemassa, sillä joukko $\mathcal{B}$ on kokonaan rajoitettu. Olkoon $f \in \mathcal{B}$. Tällöin on olemassa indeksi $j \le n$ siten, että

$$\max_{z \in A} d_2(f(z), f_j(z)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3}$$

Tällöin alkioille $x, y \in A$ pätee

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f_j(x)) + d_2(f_j(x), f_j(y)) + d_2(f_j(y), f(y)). \tag{4}$$

Kaikki funktiot f_i ovat tasaisesti jatkuvia, sillä joukko $\mathcal{B}$ on kompakti ja kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva lauseen 6.0.2 nojalla. Lisäksi funktioita f_i on äärellinen määrä, joten on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että

$$d_1(x, y) < \delta,\ 1 \le i \le n \Rightarrow d_2(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{5}$$

Nyt yhtälöistä (3), (4) ja (5) seuraa, että

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &\le d_2(f(x), f_j(x)) + d_2(f_j(x), f_j(y)) + d_2(f_j(y), f(y)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in A$, joille $d_1(x, y) < \delta$ ja kaikille funktioille $f \in \mathcal{B}$. Tämä tarkoittaa sitä, että joukko $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. □

Seuraavaksi hieman esimerkkejä siitä, kuinka Arzelan ja Ascolin lausetta käytetään.

Seuraus 6.0.10. *Olkoot $A \subset M$ kompakti ja $N = \mathbb{R}^m$. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^m)$ yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu. Tällöin jokaisella joukon $\mathcal{B}$ jonolla on tasaisesti suppeneva osajono.*

Todistus. Arvojen joukko $\{f(x)|f \in \mathcal{B}\}$ on rajoitettu jokaisella kiinteällä pisteellä $x \in A$, jolloin se sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon. Tällöin jokaiselle joukon $\mathcal{B}$ jonolle löytyy suppeneva osajono Arzelan ja Ascolin lauseen todistuksessa esiintyvään tapaan. □

Esimerkki 6.0.11. Olkoon $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $|f_n(x)| \leq 100$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $x \in [0,1]$. Lisäksi olkoot derivaatat f_n' olemassa ja tasaisesti rajoitetut välillä $]0,1[$. Tällöin jonolla (f_n) on tasaisesti suppeneva osajono.

Todistus. Osoitetaan, että joukko $\{f_n\}$ on yhtäjatkuva ja rajoitettu. Oletuksen mukaan on $|f_n'(x)| \leq K$, jollakin vakiolla $K \in \mathbb{R}$. Väliarvolauseen mukaan pätee

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|,$$

joten annetulle ϵ voidaan valita luvuista x,y ja n riippumaton luku $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Näin ollen joukko $\{f_n\}$ on yhtäjatkuva ja myös rajoitettu, sillä

$$||f_n|| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \leq 100.$$

□

Huomautus 6.0.12. Esimerkin 6.0.11 väite ei välttämättä päde ilman oletusta, että $|f_n(x)|$ on rajoitettu.

6.1 Peanon lauseen 2. versio

Seuraava lause muotoiltiin aiemmin hieman eritapaan lauseena 4.1.1, jolloin se pystyttiin todistamaan kiintopistelauseen avulla. Nyt on syytä huomata, että seuraavan lauseen muotoilussa on oletettu vain funktion f jatkuvuus. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteisyydestä joudutaan luopumaan, mutta todistus saadaan tehtyä käyttämällä hyväksi Arzelan ja Ascolin lausetta.

Lause 6.1.1 (Peano, 2. versio)**.** *Olkoon funktio f jatkuva avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{R}^2$ ja olkoon piste $(x_0, y_0) \in A$. Tällöin differentiaaliyhtälöllä*

$$y' = f(x, y)$$

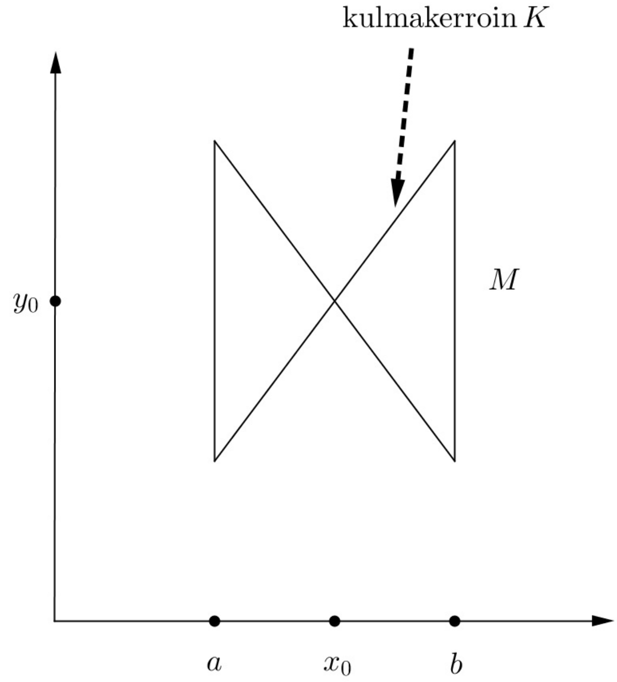
on ratkaisu, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.

Todistus. Nyt siis pyritään löytämään väli $[a, b]$, joka sisältää pisteen x_0 ja derivoituva funktio k, joka on määritelty välillä $[a, b]$ siten, että

$$k(x_0) = y_0 \text{ ja } k'(x) = f(x, k(x)) \tag{6}$$

kaikilla $x \in [a, b]$.

Tässä todistuksessa konstruoidaan perhe $\mathcal{B}$, joka koostuu likimääräisistä ratkaisuista, jotka kulkevat pisteen (x_0, y_0) kautta välillä $[a, b]$. Sitten näytetään, että $\overline{\mathcal{B}}$ on kompakti joukossa $\mathcal{C}([a, b])$ ja kompaktisuuden avulla näytetään funktion k olevan joukon $\overline{\mathcal{B}}$ alkio. Tässä joukko $\overline{\mathcal{B}}$ on joukon $\mathcal{B}$ sulkeuma, joka määritellään seuraavalla tavalla: funktio $k \in \overline{\mathcal{B}}$ jos ja vain jos on olemassa jono (k_n), missä $k_n \in \mathcal{B}$ siten, että $k_n \to k$ tasaisesti.



Kuva 3: Joukko M ja sen projektio välille $[a, b]$.

Valitaan ensin väli $[a, b]$. Olkoon joukko $X \subset A$ suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset ja piste (x_0, y_0) keskipiste. Tässä siis piste (x_0, y_0) on suorakaiteen muotoisen joukon X lävistäjien leikkauspiste, kuten kuvassa 3. Olkoon luku $K > 1$ yläraja funktion itseisarvolle $|f|$ joukossa X. Olkoon

$$M = \{(x, y) \in X : |y - y_0| \le K|x - x_0|\}$$

ja olkoon väli $[a, b]$ joukon M projektio x-akselille, kuten kuvassa 3.

Seuraavaksi etsitään perhe funktioita $\mathcal{B}$ siten, että ne ovat määritelty välillä $[x_0, b]$ ja ne ovat likimääräisiä ratkaisuja yhtälölle (6). Nyt koska joukko M on kompakti, niin funktio f on tasaisesti jatkuva joukossa M lauseen 6.0.2 nojalla. Tällöin jokaiselle luvulle $\epsilon > 0$ on olemassa luku $\delta \in (0, 1)$ siten, että jos pisteille $(x, y) \in M$ ja $(\overline{x}, \overline{y}) \in M$ pätee $|x - \overline{x}| < \delta$ ja $|y - \overline{y}| < \delta$, niin

$$|f(\overline{x}, \overline{y}) - f(x, y)| < \epsilon.$$

Valitaan pisteet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siten, että

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \text{ ja } |x_i - x_{i-1}| < \frac{\delta}{K}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Määritellään jatkuva funktio k_ϵ välillä $[x_0, b]$ seuraavaavasti: $k_\epsilon(x_0) = y_0$ ja välillä $[x_0, x_1]$ funktio k_ϵ on lineaarinen kulmakertoimella $f(x_0, y_0)$, välillä $[x_1, x_2]$ funktio k_ϵ on lineaarinen kulmakertoimella $f(x_1, k_\epsilon(x_1))$. Jatkamalla tähän tapaan saadaan funktio k_ϵ määriteltyä välillä $[x_0, b]$. Näin päädyttiin välillä $[x_0, b]$ määriteltyyn funktioon k_ϵ, jonka graafi on murtoviiva, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja sisältyy joukkoon M. Nyt koska janojen kulmakertoimet, jotka määräävät funktion k_ϵ graafin, ovat määritelty funktion f joukossa M olevien arvojen mukaisesti, niin pätee

$$|k_\epsilon(x) - k_\epsilon(\overline{x})| \leq K|x - \overline{x}| \tag{7}$$

kaikille luvuille $x, \overline{x} \in [x_0, b]$. Olkoon nyt $x \in [x_0, b]$, jolle pätee $x \neq x_i$, missä $i = 0, 1, \ldots, n$. Tällöin on olemassa $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ siten, että $x_{j-1} < x < x_j$. Nyt epäyhtälön

$$|x_i - x_{i-1}| < \frac{\delta}{K}$$

ja epäyhtälön (7) nojalla pätee

$$|k_\epsilon(x) - k_\epsilon(x_{j-1})| \leq K|x - x_{j-1}| < \delta.$$

Tästä seuraa, että

$$|f(x_{j-1}, k_\epsilon(x_{j-1})) - f(x, k_\epsilon(x))| < \epsilon.$$

Kuitenkin

$$k'_\epsilon(x) = f(x_{j-1}, k_\epsilon(x_{j-1})),$$

joten

$$|k'_\epsilon(x) - f(x, k_\epsilon(x))| < \epsilon. \tag{8}$$

Nyt epäyhtälö (8) pätee kaikille $x \in [x_0, b]$ poisluettuna ne äärellisen joukon $\{x_0, \ldots, x_n\}$ pisteet x, joissa funktion k_ϵ ei tarvitse olla derivoituva. Yhtälöstä (8) nähdään, että funktiot k_ϵ ovat likimääräisiä ratkaisuja yhtälölle (6).

Nyt on saatu rakennettua funktioperhe $\mathcal{B}$, jossa jokaista lukua $\epsilon > 0$ varten on yksi funktio. Perhe $\mathcal{B}$ on rajoitettu välillä $[x_0, b]$, sillä jokaisen funktion k_ϵ graafi sisältyy kompaktiin joukkoon M. Yhtälöstä (7) seuraa, että joukko $\mathcal{B}$ on yhtäjatkuva. Tällöin Arzelan ja Ascolin lauseesta seuraa, että $\overline{\mathcal{B}}$ on kompakti joukossa $\mathcal{C}([x_0, b])$.

Nyt todistus voidaan viimeistellä. Kaikille $x \in [x_0, b]$ pätee

$$\begin{aligned} k_\epsilon(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} k'_\epsilon(t)\, dt && (9) \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} (f(t, k_\epsilon(t)) + (k'_\epsilon(t) - f(t, k_\epsilon(t))))\, dt. \end{aligned}$$

Derivaatta k'_ϵ ei välttämättä ole olemassa kaikilla joukon $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pisteillä, mutta se ei vaikuta yllä olevaan integraaliin. Nyt koska $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$ ja joukko $\overline{\mathcal{B}}$ on kompakti, niin jonolla $(k_{(1/n)})$ on osajono $(k_{(1/n_i)})$, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin funktiota $k \in \overline{\mathcal{B}}$. Tässä on syytä huomata, että funktion k täytyy olla jatkuva välillä $[x_0, b]$. Nyt koska f on tasaisesti jatkuva joukossa M, niin funktiot $f(t, k_{1/n_i}(t))$ suppenevat tasaisesti kohti funktiota $f(t, k(t))$ välillä $[x_0, b]$. Lisäksi koska $k_\epsilon \to k$ tasaisesti, niin

$$\int_{x_0}^{x} f(t, k_\epsilon(t))\, dt \to \int_{x_0}^{x} f(t, k(t))\, dt. \tag{10}$$

Tällöin yhtälöistä (8) ja (9) ja kohdasta (10) voidaan päätellä, että

$$k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, k(t))\, dt$$

kaikilla $x \in [x_0, b]$. Tästä seuraa, että funktio k on yhtälön (6) ratkaisu välillä $[x_0, b]$. Ratkaisu $\overline{k}$ välillä $[a, x_0]$ saadaan samaan tapaan. Nyt funktio y, jolle pätee

$$y(x) = \begin{cases} k(x), & \text{missä} \quad x \in [x_0, b], \\ \overline{k}(x), & \text{missä} \quad x \in [a, x_0], \end{cases}$$

toteuttaa yhtälön (6) ehdot. Tässä on syytä vielä huomata, että koska jono $k_{(1/n_i)} \to k$ tasaisesti ja

$$|k'_{(1/n_i)}(x_0) - f(x_0, k_{(1/n_i)}(x_0))| < \epsilon$$

yhtälön (8) nojalla, joten pätee

$$k'(x_0) = f(x_0, k(x_0)).$$

Tämä tarkoittaa sitä, että todistus on valmis. $\square$

7 Stonen ja Weierstrassin lause

Tässä luvussa käsitellään funktioiden ja polynomien välistä yhteyttä. Stonen ja Weierstrassin lauseen tarkoitus on näyttää, että mitä tahansa jatkuvaa funktiota voidaan approksimoida helpommin käsiteltävällä funktiolla, kuten polynomilla. Polynomiapproksimaatiot ovat keskeisessä roolissa esimerkiksi Fourier-sarjoja käsiteltäessä, jotka ovat trigonometristen funktioiden avulla esitettyjä approksimaatioita funktioille. Niiden avulla päästään analysoimaan hankaliakin funktioita, sillä sini- ja kosinifunktiot ovat tunnetusti helppoja käsitellä ja niitä pystytään arvioimaan.

Ensimmäiseksi esitellään yksi aputulos ja kaksi esimerkkiä, joiden jälkeen todistetaan tämän kappaleen päätulos Stonen ja Weierstrassin lause.

Seuraava lause väittää, että jokaiselle välillä $[0, 1]$ määritellylle jatkuvalle reaaliarvoiselle funktiolle on olemassa approksimaatiopolynomi. Todistuksen idea on näyttää, että jono Bernsteinin polynomeja suppenee tasaisesti kohti funktiota f, jolloin funktiota approksimoiva polynomi löydetään kyseisestä polynomijonosta.

Lause 7.0.1. *Olkoon funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa polynomi $p(x)$ siten, että $d(p, f) < \epsilon$. Itse asiassa jono Bernsteinin polynomeja*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

suppenee tasaisesti kohti funktiota f, kun $n \to \infty$, missä

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

tarkoittaa binomikerrointa.

Todistus. Binomilauseen mukaan

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{11}$$

Derivoimalla yhtälöä (11) muuttujan x suhteen ja kertomalla muuttujalla x saadaan

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{12}$$

Samaan tapaan derivoimalla kahdesti, saadaan

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{13}$$

Olkoon

$$r_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Nyt yhtälöistä (11),(12) ja (13) ja sijoittamalla $y = 1-x$, saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} kr_k(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

Näistä seuraa, että on voimassa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) &= n^2x^2\sum_{k=0}^{n} r_k(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n} kr_k(x) + \sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) \\
&= n^2x^2 - 2nx\cdot nx + [nx + n(n-1)x^2] \\
&= nx(1-x). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Nyt valitaan luku K siten, että $|f(x)| \leq K$, missä $x \in [0,1]$. Koska funktio f on tasaisesti jatkuva, niin annetulle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kun $|x-y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Tavoitteena on arvioida lauseketta

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) r_k(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \\
&= \sum_{|k-nx|<\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) + \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).
\end{aligned}$$

Arviointi tehdään kahdessa osassa siten, että arvioidaan erikseen tilannetta, jossa $|k-nx| < \delta n$ ja $|k-nx| \geq \delta n$. Nyt jos

$$|k-nx| < \delta n,$$

niin

$$|x - \left(\frac{k}{n}\right)| < \delta,$$

joten

$$|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| < \epsilon.$$

Näin ollen

$$\sum_{|k-nx|<\delta n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) < \epsilon \overbrace{\sum_{|k-nx|<\delta n} r_k(x)}^{\leq 1} \leq \epsilon. \tag{15}$$

Jos taas $|k - nx| \geq \delta n$, niin

$$\begin{aligned} \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) &\leq 2K \sum_{|k-nx|\geq\delta n} r_k(x) \\ &\leq \frac{2K}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x), \end{aligned}$$

sillä $|\frac{k-nx}{\delta n}| \geq 1$. Nyt yhtälön (14) nojalla pätee

$$\begin{aligned} \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) &\leq \frac{2K}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) \\ &= \frac{2Kx(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{K}{2\delta^2 n}, \end{aligned} \tag{16}$$

sillä $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Epäyhtälö $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pätee, sillä muuttuja x saa arvoja väliltä $[0, 1]$, jolloin lauseke $x(1 - x)$ saa suurimman arvonsa sen derivaatan nollakohdassa $x = \frac{1}{2}$.

Nyt epäyhtälöiden (15) ja (16) nojalla jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &\leq \sum_{|k-nx|<\delta n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) + \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \\ &< \epsilon + \frac{K}{2\delta^2 n}. \end{aligned}$$

Niinpä, jos $n \geq \frac{K}{2\delta^2\epsilon}$, niin $\frac{K}{2\delta^2 n} < \epsilon$, joten

$$|f(x) - p_n(x)| < 2\epsilon.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että $p_n \to f$ tasaisesti. $\square$

Juuri todistetun lauseen tulos on jo itsessään melko vahva, vaikka se onkin tässä tutkielmassa vain aputuloksena.

Esimerkki 7.0.2. Olkoon (p_n) tasaisesti suppeneva jono polynomeja välillä $[0,1]$, joille pätee $f = \lim_{n\to\infty} p_n$. Näytetään, että funktion f ei välttämättä tarvitse olla derivoituva.

Todistus. Lauseen 7.0.1 nojalla mikä tahansa jatkuva funktio on jonkin polynomin rajafunktio ja on olemassa monia jatkuvia funktioita, jotka eivät ole derivoituvia. Esimerkkinä funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

□

Esimerkki 7.0.3. Osoitetaan, että välin $[a,b]$ polynomit ovat tiheitä joukossa $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Todistus. Olkoon $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Olkoon

$$f(x) = g(x(b-a)+a), \qquad 0 \le x \le 1,$$

jolloin $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Lauseen 7.0.1 mukaan, jos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $\epsilon > 0$, niin on olemassa polynomi p, jolle pätee $d(f,p) < \epsilon$. Olkoon

$$q(x) = p\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \qquad a \le x \le b,$$

joten $q : [a,b] \to \mathbb{R}$. Näin ollen q on myös polynomi. Osoitetaan nyt, että $d(g,q) < \epsilon$. Nyt

$$|g(x) - q(x)| = \left| f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right|,$$

joten $d(g,q) < \epsilon$, sillä $d(f,p) < \epsilon$. Tämä tarkoittaa sitä, että polynomit välillä $[a,b]$ ovat tiheässä. □

Huomautus 7.0.4. Esimerkin 7.0.3 voi todistaa myös seuraavan lauseen avulla, mikä tehdään myöhemmin.

Nyt voidaan todistaa tämän kappaleen päätulos.

Lause 7.0.5 (Stonen ja Weierstrassin lause)**.** *Olkoot (M,d) metrinen avaruus ja $A \subset M$ kompakti joukko. Olkoon $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A,\mathbb{R})$, jolle pätee:*

i. Joukko $\mathcal{B}$ on algebra. Siis jos $f, g \in \mathcal{B}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, niin pätee $f+g \in \mathcal{B}$, $f \cdot g \in \mathcal{B}$ ja $\alpha f \in \mathcal{B}$.

ii. Vakiofunktio $x \mapsto 1$ kuuluu joukkoon $\mathcal{B}$.

iii. Joukko $\mathcal{B}$ separoi pisteitä eli pisteille $x, y \in A$, $x \neq y$, on olemassa funktio $f \in \mathcal{B}$ siten, että $f(x) \neq f(y)$.

Tällöin joukko $\mathcal{B}$ on tiheä joukossa $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ eli $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Todistus. Otetaan käyttöön seuraava merkintä,

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \quad ja \quad (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Olkoon joukko $\overline{\mathcal{B}}$ joukon $\mathcal{B}$ sulkeuma, joka määriteltiin lauseen 6.1.1 todistuksessa eli funktio $f \in \overline{\mathcal{B}}$ jos ja vain jos on olemassa jono (f_k), missä $f_k \in \mathcal{B}$ siten, että $f_k \to f$ tasaisesti. Näin ollen summaamisen ja kertomisen jatkuvuuden nojalla joukko $\overline{\mathcal{B}}$ toteuttaa ehdon **i**. Se toteuttaa myös ehdot **ii** ja **iii** selvästi. Nyt siis halutaan osoittaa, että $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$. Lauseen 7.0.1 ja esimerkin 7.0.3 nojalla on olemassa jono polynomeja $(p_n(t))$ siten, että

$$||t| - p_n(t)| < \frac{1}{n}, \qquad \text{missä } -n \leq t \leq n.$$

Tällöin pätee myös

$$||f(x)| - p_n(f(x))| < \frac{1}{n}, \qquad \text{jos } -n \leq f(x) \leq n.$$

Tämä osoittaa, että kun $f \in \mathcal{B}$, niin $|f| \in \overline{\mathcal{B}}$, koska $p_n \circ f \in \mathcal{B}$, sillä joukko $\mathcal{B}$ on algebra.

Nyt on voimassa yhtäsuuruudet

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{ja} \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Näin ollen, jos $f, g \in \overline{\mathcal{B}}$, niin myös $f \vee g \in \overline{\mathcal{B}}$ ja $f \wedge g \in \overline{\mathcal{B}}$.

Olkoon $h \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ ja $x_1, x_2 \in A$, joille pätee $x_1 \neq x_2$. Valitaan $g \in \mathcal{B}$ siten, että $g(x_1) \neq g(x_2)$. Tämä on mahdollista, sillä joukko $\mathcal{B}$ on separoiva (**iii**). Olkoon $f_{x_1 x_2}(x) = \alpha g(x) + \beta$, missä

$$\alpha = \frac{[h(x_1) - h(x_2)]}{[g(x_1) - g(x_2)]} \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{[g(x_1)h(x_2) - g(x_2)h(x_1)]}{[g(x_1) - g(x_2)]}.$$

Tässä luvut α ja β on valittu siten, että $f_{x_1 x_2}(x_1) = h(x_1)$ ja $f_{x_1 x_2}(x_2) = h(x_2)$.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in A$. Luvulle $y \in A$ on olemassa ympäristö $U(y)$ siten, että $f_{yx}(z) > h(z) - \epsilon$, jos $z \in U(y)$. Näin on, sillä kuvaus h on jatkuva.

Olkoon $\{U(y_1), \ldots, U(y_t)\}$ joukon A äärellinen alipeite, joka on olemassa joukon A kompaktisuuden nojalla. Olkoon

$$f_x = f_{y_1 x} \vee \cdots \vee f_{y_t x}.$$

Näin ollen $f_x \in \overline{\mathcal{B}}$ ja

$$f_x(z) > h(z) - \epsilon$$

kaikille luvuille $z \in A$. Nyt pätee myös $f_x(x) = h(x)$. Tällöin on olemassa ympäristö $V(x)$ siten, että

$$f_x(y) < h(y) + \epsilon,$$

jos $y \in V(x)$. Olkoon $\{V(x_1), \ldots, V(x_k)\}$ joukon A peite ja asetetaan

$$f = f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_k}.$$

Tällöin pätee edelleen $f \in \overline{\mathcal{B}}$. Nyt

$$f(z) > h(z) - \epsilon$$

kaikilla $z \in A$, koska

$$f_{x_j}(u) > h(u) - \epsilon$$

kaikilla $u \in A$. Nyt pisteelle $y \in A$ pätee $y \in V(x_j)$ jollakin pisteellä x_j, siten

$$f(y) \leq f_{x_j}(y) < h(y) + \epsilon.$$

Tällöin $|f(z) - h(z)| < \epsilon$, joten $h \in \overline{\mathcal{B}}$. Näin ollen $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$. □

Esimerkki 7.0.6. Esimerkin 7.0.3 todistus lauseen 7.0.5 avulla.

Todistus. Olkoon $A = [a, b]$ ja asetetaan $\mathcal{B} = \{q \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \mid q \text{ on polynomi}\}$. Nyt joukko $\mathcal{B}$ toteuttaa selvästi lauseen 7.0.5 ehdot **i** ja **ii**. Myös ehto **iii** toteutuu, sillä jos $x \neq y$, niin voidaan asettaa

$$f(t) = t,$$

joten $f(x) \neq f(y)$. Tällöin joukko $\mathcal{B}$ on tiheä lauseen 7.0.5 nojalla. □

Viitteet

[1] Jerrold E. Marsden – Michael J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

[2] Brian S. Thomson – Judith B. Bruckner – Andrew M. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, Prentice-Hall, 2001.

[3] Murray H. Protter – Charles B. Morrey, *A First Course in Real Analysis Second Edition*, Springer-Verlag, New York 1991.

[4] Tero Kilpeläinen – *Analyysi 3 luentomoniste*, Jyväskylän Yliopisto, Jyväskylä 2005.