Johanna Kauttonen

ESIMERKKIEN RAKENTUMINEN YLÄKOULUN MATEMATIIKAN TUNNEILLA

Erityispedagogiikan
pro gradu -tutkielma
Syyslukukausi 2013
Kasvatustieteiden laitos
Jyväskylän yliopisto

Supervisor of the graduate/ Master's thesis	Piia Björn, adj. prof. Department of Education Special Education University of Jyväskylä, Finland
Co-director of the project	Tanja Vehkakoski, PhD.
Research project(s)	MUST (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen tausta)
Research site	Department of Education Special Education University of Jyväskylä

TIIVISTELMÄ

Kauttonen, Johanna. ESIMERKKIEN RAKENTUMINEN YLÄKOULUN MATEMATIIKAN TUNNEILLA. Erityispedagogiikan pro gradu –tutkielma. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitos, 2013. 70 sivua. Julkaisematon.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää millaisia esimerkkejä matematiikan aineenopettajat käyttävät opettaessaan oppilaille uutta matemaattista sisältöä ja millaisissa kontekstissa matemaattiset esimerkit tulevat esille. Tarkastelun kohteena olivat myös opettajien omat ajatukset oppitunneilla esiintyneistä matemaattisista esimerkeistä.

Tutkimus on osa MUST-projektia, jossa tutkitaan matematiikan oppituntien luokkahuonevuorovaikutusta ja käsitteiden opettamista sosiokulttuurisesta näkökulmasta käsin. Tutkimuksessa oli mukana kuusi matematiikan aineenopettajaa kahdesta eri yläkoulusta. Jokaiselta opettajalta kuvattiin viisi oppituntia ja kaikki kuvatut oppitunnit analysoitiin keskustelunanalyysin avulla. Kuvatuista oppitunneista valittiin lyhyitä videokatkelmia, jotka tutkimuksessa mukana olleet opettajat katsoivat stimulated recall –tilaisuuksissa. Näissä tilaisuuksissa opettajat reflektoivat omaa toimintaansa ja kertoivat tarkemmin tunneilla käyttämistään matemaattisista esimerkeistä. Myös nämä keskustelut videoitiin ja videoista tehdyt litteraatit ovat osa tutkimuksen aineistoa.

Tutkimustulosten mukaan uutta matemaattista aihetta käsittelevät esimerkit rakentuivat joko opettajajohtoisesti, yhteisen keskustelun kautta tai oppilaiden ajatusten mukaan. Opettajan johdolla läpi käydyt esimerkit olivat sellaisia, että opettaja oli päättänyt ne etukäteen ja ne vaikeutuivat asteittain. Esimerkkien aikana opettaja nimesi oppilaille uusia matemaattisia käsitteitä. Yhteisen keskustelun kautta rakentuvissa esimerkeissä tuli mukaan ongelmalähtöisiä esimerkkejä ja arkielämän tietoja ja havainnollistuksia, joiden kautta selvitettiin matemaattisten käsitteiden ja ongelmien sisältöjä. Oppilaiden ajatusten mukaan rakentuvissa esimerkeissä taas nousi esiin oppilaiden itse muotoilemia esimerkkilaskuja ja omia perusteluja laskujen ratkaisuprosesseille.

Sekä opettajan suoraan kertomilla, että yhteisen keskustelun kautta rakentuvilla esimerkeillä oli oma tehtävänsä uuden matemaattisen sisällön opetuksessa. Opettajat toivat esiin, että opettajajohtoisten esimerkkien tarkoituksena oli esitellä uusi aihe kaikille luokan oppilaille ja varmistaa, että jokainen tietää aiheeseen liittyvät peruskäsitteet. Tällöin liikuttiin proseduraalisen ymmärryksen tasolla. Oppilaiden kanssa keskustellen rakentuneiden ja oppilaiden omien ajatusten mukaan rakentuvien esimerkkien aikana oppilaat pääsivät syventämään ja monipuolistamaan aiheeseen liittyviä tietojaan, sekä rakentamaan omaa matemaattista ymmärrystään, jolloin päästiin konseptuaalisen ymmärryksen tasolle.

Avainsanat: matemaattinen käsite, yläkoulu, sosiokulttuurinen näkökulma, matemaattinen ongelma, keskustelunanalyysi

Sisällys

1 MATEMAATTISTEN KÄSITTEIDEN YMMÄRTÄMINEN

Kielellä on keskeinen rooli oppimisessa. Tämä on vaikuttanut siihen, että diskursiivinen näkökulma, vuorovaikutus ja kommunikaatio matematiikan oppimisessa ja opetuksessa ovat olleet esillä useissa viimeaikaisissa tutkimuksissa (Gresalfi, Martin, Hand & Greeno, 2009; Zolkower & Shreyar, 2007). Esimerkiksi Baxterin, Woodwardin ja Voorhiesin (2002) tutkimuksessa tarkasteltiin sitä, kuinka luokkahuoneessa käyty keskustelu kehittyi opettajajohtoisesta oppilaskeskeiseen. Lau, Singh ja Hwa (2009) taas tutkivat sitä, millainen opettajan ja oppilaiden välinen vuorovaikutus parantaa oppilaiden oppimista.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) vuosiluokkien 6-9 ydintavoitteissa korostetaan matemaattisten käsitteiden ja sääntöjen merkityksen ymmärtämistä. Oppilaiden matemaattisen ymmärryksen kehittymiseen vaikuttaa se, millaisessa kontekstissa matemaattiset ongelmat esitetään ja se, annetaanko oppilaille mahdollisuus itse valita menetelmä, jolla he ratkaisevat ongelman vai ratkaistaanko se ainoastaan opettajan esittelemällä menetelmällä (Hiebert ym., 2003).

Päättäjät, opettajat, oppilaat ja vanhemmat ihmettelevät usein, miksi matemaattisia oppimisvaikeuksia esiintyy ja miksi alttius epäonnistua matematiikan tehtävissä on niin suuri (Sfard, 2001). Monissa matematiikan oppimisvaikeuksissa voi olla kyse oppilaankielellisestä suoriutumisesta (Vilenius-Tuohimaa, 2005). Watsonin ja De Geestin (2005) mukaan onnistuneessa matematiikan opetuksessa huomion keskipisteenä on matemaattisen sisällön opiskelu, eikä siihen käytetty tekniikka, eli opiskelussa on kyse siitä, että oppilas oppii ajattelemaan ja puhumaan matemaattisesti (Lerman, 2001).

Matemaattiset ongelmat voidaan opetuksessa sitoa arkielämän tilanteisiin, niistä voidaan esittää erilaisia havainnollistavia kaaviota ja taulukkoja tai ongelman ratkaisun apuna voidaan käyttää erilaisia fyysisiä apuvälineitä (Hiebert ym., 2003). Sfard (2001) tuo esiin, että matematiikan oppimista käsittelevissä tutkimuksissa tulisi keskittyä niihin tapoihin joilla oppija ymmärtää uuden opiskeltavan sisällön ja luo siitä itselleen merkityksiä.

Tutkimuksissa on myös tarkasteltu keinoja, joilla parantaa heikosti matematiikassa suoriutuvien oppilaiden oppimistuloksia (Watson & De Geest, 2005). Monissa matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvissä tutkimuksissa on keskitytty jonkin tietyn intervention opetukseen erityistä tukea tarvitseville oppilaille ja sen vaikutusten tarkasteluun (ks. esim. van Garderen, 2007; Jitendran, Sczesniakin, Griffinin & Deatline-Buchmanin, 2010; Kajamies, Vauras & Kinnunen, 2010).

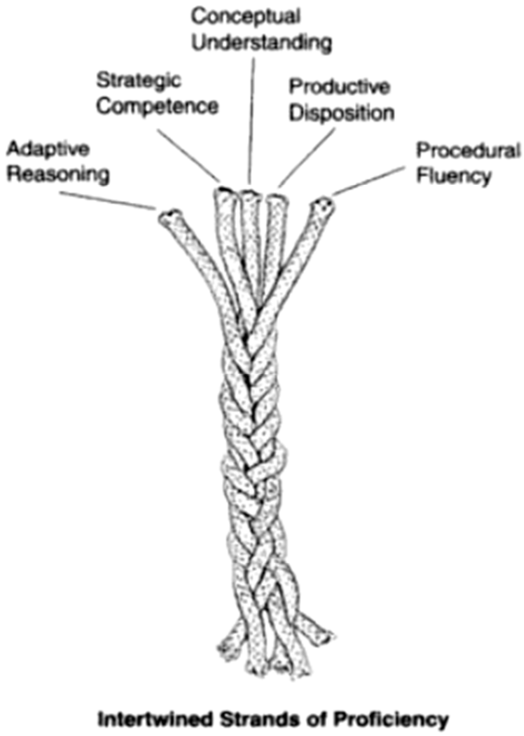
Myös opettajien tapoja esitellä uutta matemaattista sisältöä oppitunneilla on tutkittu aiemmin (ks. esim. Hiebert ym., 2003). Aikaisemmissa tutkimuksissa ei ole kuitenkaan keskitytty konkreettisiin esimerkkeihin, joilla opettajat käsittelevät uusia matemaattisia ongelmia ja käsitteitä. Opettajan opetustyyli ja se millaisia ratkaisuja opettajat tekevät luokkahuoneessa toimiessaan ovat suhteellisen uusia tutkimusaiheita. Opetuksen ja luokkahuoneen tapahtumien tutkiminen on tärkeää, koska niiden avulla voidaan ymmärtää ja parantaa oppilaiden oppimista Hiebert ym., 2003). Zackin ja Graven (2001) mukaan juuri videotallenteet ovat hyvä tapa tutkia luokkahuoneen tapahtumia, koska niiden avulla tunnistetaan vuorovaikutuksen kuvioita ja kehitystä, sekä muutosta matemaattisten käsitteiden käytössä.

Tämä tutkimus on osa laajempaa MUST-projektia, jossa tarkastellaan matematiikan oppituntien luokkahuonevuorovaikutusta ja käsitteiden opettamista sosiokulttuurisesta näkökulmasta. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaisia matemaattisia esimerkkejä matematiikan opettajat käyttävät opettaessaan uutta asiaa oppilailleen. Erityisesti tutkimuksessa tarkastellaan sitä, millaisessa kontekstissa esimerkit esitetään ja miten opettajat sitovat matemaattiset käsitteet ja arkielämän esimerkit uuteen käsiteltävään aiheeseen. Lisäksi ollaan kiinnostuneita siitä, miten opettajat itse reflektoivat käyttämiään esimerkkejä.

2 LUOKKAHUONEVUOROVAIKUTUKSESSA RAKENTUVA MATEMAATTINEN AJATTELU

Tapa jolla matematiikka oppitunneilla esitetään ja se miten opettajat ja oppilaat ovat vuorovaikutuksessa ja keskustelevat matematiikasta, on suoraan yhteydessä oppilaiden oppimiseen (Hiebert ym., 2003). Matemaattisen ajattelun rakentuminen on laaja kognitiivinen prosessi, johon tarvitaan havainnointia, kommunikaatiota, päättelyä ja perustelua (Sokolowski, Yalvac & Loving, 2011). Yhtenä matematiikan oppimisvaikeuksien selittäjänä voidaan pitää sitä, että oppilas tukeutuu arkikäsiteajatteluun, vaikka hänellä voisi olla potentiaalia abstraktimpaan matemaattiseen ajatteluun (Vilenius-Tuohimaa, 2005). Abstraktimman ajattelun kehittymiseksi oppilaille tulee tarjota työkaluja matemaattisen tiedon keräämiseen, aineiston prosessointiin ja analysointiin (Sokolowski, Yalvac & Loving, 2011).

Matemaattinen osaaminen koostuu Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) mukaan viidestä tekijästä (kuvio 1). Ensimmäinen näistä on käsitteellinen ymmärrys, johon kuuluu ymmärrys matemaattisista käsitteistä, prosesseista ja suhteista. Toisena on proseduraalinen sujuvuus, joka koostuu matemaattisten prosessien täsmällisestä ja tehokkaasta toteuttamisesta. Kolmantena tekijänä Kilpatrick ym., (2001) mainitsevat strategisen pätevyyden, johon kuuluu kyky muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Neljäntenä tulee joustava päättely, joka on kyvykkyyttä loogiseen ajatteluun, reflektioon ja perusteluihin. Viimeinen matemaattisen taitavuuden tekijä on kyky tuottaa, eli taipumus nähdä matematiikka mielekkäänä, hyödyllisenä ja merkityksellisenä ja yhdistää tämä omaan ahkeruuteen ja tehokkuuteen.



KUVIO 1 Matemaattinen osaaminen (Kilpatrickin, Swaffordin & Findellin, 2001: 5)

2.1 Käsitteen muodostus

Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen pohjautuvat matemaattisten käsitysten ja käsitteiden muodostumiseen (Joutsenlahti, 2005). Käsitykset perustuvat oppijan havaintoon, kokemukseen ja omaan ajatteluun, joten matematiikan opetuksessa tulisi ottaa huomioon oppilaita itseään kiinnostavat ongelmat ja niiden etsiminen, esittäminen ja ratkaiseminen (Leino, 2004).

Vygotsky (1982) erottaa käsitteiden muodostuksen kehityksessä kolme päävaihetta. Alimpana on synkreettisen järjestäytymättömän joukon muodostaminen, jossa lapsi muodostaa annetuista konkreettisista objekteista ryhmiä yrityksen ja erehdyksen kautta ja tavaroiden paikallinen ja ajallinen läheisyys vaikuttavat suuresti ryhmittelyyn. Tätä seuraava päävaihe on yhdistelmäajattelu, jossa lapsi alkaa yhdistää samanlaisia objekteja yhdeksi ryhmäksi objektiivisten siteiden perusteella. Yhdistelmäajattelun osavaiheena esiintyy pseudokäsite, joka toimii siltana siirryttäessä käsitteenmuodostukseen. Tässä vaiheessa lapsen ajattelussa syntyvän yleistyksen lopputulos voi olla sama kuin käsitteenmuodostuksessa, mutta lapsi muodostaa sen vielä yhdistelmäajattelun pohjalta. Lopullinen käsitteen muodostus edellyttää objektien yhdistelyn lisäksi erillisten elementtien erottamista, abstrahointia ja eriyttämistä, mikä on käsitteen muodostuksen ylin päävaihe. Lopulta varsinainen käsite muodostuu näitä synkreettista, yhdistelmällistä ja esikäsitteellistä vaiheita yhdistelevänä rakenteena. Vygotsky (1982) tuo esiin, että varsinaisia käsitteitä ei siis voi omaksua pelkän muistin välityksellä ulkoaoppimalla. Käsitteiden omaksuminen edellyttää, että lapsen ajattelu nousee sisäisessä kehityksessä korkeammalle tasolle, joten käsitteiden suora opettaminen on pedagogisesti hyödytöntä.

Lapsen todellisuutta koskevat käsitteet, joiden kehityksessä lapsen oma ajattelu on ratkaisevassa asemassa, on nimetty spontaaneiksi käsitteiksi. Tämän rinnalla ovat tieteelliset käsitteet, jotka syntyvät ympäristöstä omaksuttujen tietojen vaikutuksesta, eli yleensä kouluopetuksessa. Spontaaneiden ja tieteellisten käsitteiden kehityksessä on Vygotskyn mukaan kyse yhtenäisestä käsitteenmuodostusprosessista, joka vain tapahtuu erilaisissa sisäisissä ja ulkoisissa olosuhteissa. Spontaanit arkikäsitteet kehittyvät Vygotskyn käsitteenmuodostusprosessissa alhaalta ylöspäin ja tieteelliset käsitteet kehittyvät ylhäältä alaspäin. Arkikäsitteiden on saavutettava tietty taso, jota oppija voi omaksua tieteellisen käsitteen. (Vygotsky, 1982).

2.2 Sosiokulttuurinen oppimiskäsitys

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan luokkahuonevuorovaikutusta ja matematiikan opetusta ja oppimista sosiokulttuurisesta näkökulmasta. Sosiokulttuurisessa näkökulmassa korostetaan tiedon sosiaalista ja kulturaalista alkuperää. Tiedon käsitetään olevan sosiaalisessa vuorovaikutuksessa rakentuvaa ja oppimisen katsotaan olevan yksilön kasvamis- eli enkulturaatioprosessi häntä ympäröivään kulttuuriin ja sen arvoihin. (Salovaara, 1997.) Sosiokulttuurisen oppimiskäsityksen taustalla vaikuttaa Vygotskyn ajatusmaailmaan perustuva sosiokulttuurinen kehitysteoria (Salovaara, 1997; Tynjälä, 2004). Lisäksi sosiokulttuuriseen näkökulman rinnalle voidaan nostaa konstruktivistinen näkökulma oppimiseen (Packer & Goicoechea, 2000).

Keskeisiä tekijöitä oppimisen tarkastelussa ovat ihmisten välinen viestintä ja erilaiset yhteistyön muodot. Tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita siitä, miten yhteisöllinen tieto välitetään yksilölle sekä siitä, mitä yhteisöllisiä tietoja ja taitoja yksilö oppii. (Säljö, 2004.) Tätä prosessinomaista vuorovaikutustapahtumaa on tutkittu esimerkiksi keskustelunanalyysin tai diskurssianalyysin avulla. Nämä analysointitavat kuvaavat vuorovaikutuksen rakentumista yksityiskohtaisesti, jolloin saadaan tietoa siitä, miten yksilöt rakentavat keskustelua ja luovat yhteisiä merkityksiä sekä rooleja ja identiteettejä itselleen. (Hakulinen, 1998; Kumpulainen & Mutanen, 1999.)

2.2.1 Oppija aktiivisena osallistujana

Vygotskyn (1978) mukaan yksilön ajattelu rakentuu sosiaalisen vuorovaikutuksen avulla. Yhdessä muiden kanssa käyty keskustelu sisäistyy yksilönkehityksessä vähitellen sisäiseksi puheeksi, eli ajatteluksi. Sosiaalinen yhteisö siis määrittää yksilön ajattelua, oppimista ja osaamista. (Vygotsky, 1978.) Oppimisprosessissa on keskeistä, että oppija pääsee osalliseksi sosiaalisiin käytäntöihin ja niiden kautta luotuihin merkityksiin (Lerman, 2001; Tynjälä, 2004). Sosiokulttuurisessa oppimiskäsityksessä ihmisen tiedot, taidot, kyvyt ja motivaatio kehittyvät sosiaalisen vuorovaikutuksen kautta taitavamman henkilön kanssa toimittaessa (Pape, Bell & Yetkin, 2003). Tässä prosessissa yksilö nähdään aktiivisena toimijana, joka rakentaa ja muokkaa omia tietojaan ja taitojaan. Uuden tiedon rakennusprosessin aikana oppija luo yhteyksiä erilaisten oppimiensa asioiden välille ja vertailee eri lähteistä saamaansa tietoa aikaisempaan tietoonsa ja kokemuksiinsa. (Tynjälä, 2004.)

Vygotskyn teoria lähikehityksen vyöhykkeestä (Vygotsky, 1978) liittyy keskeisesti sosiokulttuuriseen oppimiskäsitykseen. Vygotskyn teorian mukaan kognitiivinen kehitys on mahdollista, kun oppilaat ovat akateemisilta kyvyiltään eritasoisissa asemissa. Opettaja tai taitavampi oppilas (ekspertti) voi aktiivisen sosiaalisen vuorovaikutuksen avulla auttaa vähemmän taitavaa oppilasta (noviisia) saavuttamaan laajempaa tietämystä. Tätä kutsutaan noviisin potentiaalisen kehitystason löytymiseksi. (Fawcett & Garton, 2005; Vygotsky, 1978.) Lähikehityksen vyöhykkeeseen liittyy myös käsite ”scaffolding”, jolla tarkoitetaan oppimisen oikea-aikaista tukemista. Siinä opettaja tai taitavampi vertainen ohjaa ja tukee oppilasta hänen ajattelu- ja oppimisprosessissaan, toimien samalla oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä. (Huyn & Davis, 2005; Tan, 2003.) Opettajan rooli oppilaan matemaattisen ajattelun kehityksessä nähdään siis tässä näkökulmassa merkittävänä (Pape ym., 2003).

2.2.2 Kielen merkitys matemaattisen ajattelun kehittymisessä

Kieli mahdollistaa sen, että ihmisellä on kyky jakaa kokemuksia muiden kanssa, eli kysymme, lainaamme ja vaihdamme jatkuvasti tietoja ja valmiuksia vuorovaikutuksessa muiden ihmisten kanssa (Säljö, 2004). Sosiokulttuurisen näkökulman mukaan oppija on osa häntä ympäröivää institutionaalista, kulttuurista ja historiallista kontekstia ja oppiminen ja tiedon rakentaminen tapahtuvat kielellisen toiminnan kautta sosiaalisissa vuorovaikutustilanteissa (Kumpulainen & Mutanen, 1999; Salovaara, 1997; Tynjälä, 2004). Kieli sallii tilanteesta riippumattoman viestinnän, eli sen avulla voimme keskustella jostakin mikä ei ole tilanteessa läsnä tai fyysisesti olemassa ja tämän vuoksi kielen merkitys matemaattisten käsitteiden opettamisessa nousee keskeiseksi (Säljö, 2004).
Ihminen pystyy myös muuntamaan kielellisiä ilmiöitä, termejä ja käsitteitä fyysiseksi toiminnaksi, esimerkiksi toimiessaan saamiensa ohjeiden mukaan. Keskustellessaan ja analysoidessaan konkreettisista toimintaansa, ihminen muodostaa ja välittää tietoa ja käytännön valmiuksia. (Säljö, 2004.) Ilaria (2009) määrittelee matemaattiseksi keskusteluksi sellaisen keskustelun, jossa oppilaat puhuvat käsityksistään matematiikasta joko keskenään tai opettajan kanssa. Matemaattisen keskustelun aikana oppilaat perustelevat omaa ajatteluaan ja toimintamallejaan tosilleen ja opettajalle. Oppilaita myös ohjataan käyttämään hyväksi aikaisempia tietoja, taitoja ja kokemuksiaan (Pape ym., 2003).

Keskustelu ja omien käsitysten sanallistaminen rakentavat oppilaan matemaattista ajattelua ja auttavat heitä jäsentämään sitä. Omien ratkaisujen selittäminen ja tiedon uudelleen jäsentäminen tekevät matemaattista ajattelua näkyväksi. (Ilaria, 2009.) Keskusteluissa myös opettaja vetää yhteyksiä opittujen asioiden välille (Pape ym., 2003). Matemaattisen ajattelun taidot tukevat oppilaita käyttämään myös matemaattisia käsitteitä puheessaan ja käytännössä (Ilaria, 2009).

2.3 Matemaattinen tieto

Matemaattinen tieto voidaan jakaa proseduraaliseen, eli menetelmä tietoon ja konseptuaaliseen, eli käsitteelliseen tietoon. Proseduraalinen tieto liittyy taitoihin soveltaa sääntöjä ja käyttää menetelmiä. Tällainen työskentely ei kuitenkaan välttämättä vaadi käsiteltävän asian ymmärrystä ja oppilas on sidottu tiettyyn ongelmaan tai tehtävään. (Haapasalo, 2004.) Matematiikan oppimisessa ei kuitenkaan ole kyse pelkästään aiheeseen liittyvien tietojen ja taitojen oppimisesta, vaan myös matemaattisen ajattelun kehittymisestä (Joutsenlahti, 2005). Konseptuaalista tietoa käyttäessään oppilas tietää mitä hän tekee ja miksi tekee näin. Tieto ei ole rajoittunut vain tiettyyn ongelmaan, vaan oppilas pystyy soveltamaan sitä erilaisiin konteksteihin. (Haapasalo, 2004.)

2.3.1 Proseduraalinen tieto

Perinteinen opettajajohtoinen matematiikan opetus perustuu paljolti kontekstivapaan matemaattisen tiedon muistamiseen ja keskittyy kokeisiin ja arviointeihin (Leino, 2004; Goos, 2004; Zwaneveld, 2000). Tällaisessa proseduraalisen tiedon opiskelussa matematiikan oppiminen nähdään neutraalina, kulttuurivapaana, hiljaisena ja itsenäisenä työskentelynä (Le Roux, 2008) ja matemaattisten faktojen ja laskuprosessien hallintaa pidetään merkkinä hyvästä matemaattisesta osaamisesta (Pape ym., 2003).

Matematiikan opiskelu koostuu peruslaskutoimituksista, prosessien täydentämisestä ja sanallisista tehtävätyypeistä (Le Roux, 2008). Matemaattisia ongelmia käsitellään usein niin, että opettaja opettaa oppilaille yhden tietyn tavan ongelman ratkaisemiseksi, jonka jälkeen oppilaille annetaan sarja samantyyppisiä harjoituksia tarkoituksena opetella käyttämään juuri kyseistä ratkaisutapaa (Hiebert ym., 2003). Tällöin matematiikan opetuksessa keskitytään sääntökokoelmiin, mutta ei siihen miksi säännöt toimivat niin kuin ne toimivat (Chapman, 2012). Tällaisessa työskentelyssä oppilaiden oma kiinnostus ja käsitykset jäävät usein taka-alalle (Leino, 2004; Goos 2004). Matemaattisten käsitysten omakohtainen rakentuminen on vaarassa epäonnistua ja oppilaat ajautuvat käyttämään matemaattisia symboleja mekaanisesti ja opettelemaan asioita ulkoa (Arzarello, Robutti & Bazzini, 2005).

Ratkaistessaan matemaattisia ongelmia oppilaat sulkevat pois arkisia näkökulmia, eivätkä ota niitä huomioon havainnoissaan ja päätelmissään (Bonotto, 2013). Esimerkiksi sanallisia tehtäviä ratkaistessaan oppilaat oppivat etsimään ja tunnistamaan tehtävän kannalta oleellisia avainsanoja ja tekemään tarvittavat laskutoimitukset opitun kaavan mukaisesti (Chamberlin, 2010). Tai oppilaat saattavat oppia käyttämään matemaattisia kaavoja, vaikka eivät ymmärrä niiden suhdetta mitattavaan ominaisuuteen tai mittayksikköön (Marshall, 2006). Tämä johtaa usein väärinymmärryksiin ja virheisiin eikä oppilaiden matemaattinen päättelykyky kehity (Zwaneveld, 2000).

2.3.1 Konseptuaalinen tieto

Koulussa käsiteltävien ongelmien rakennetta tulisikin Bonotton (2013) mukaan miettiä uudelleen. Niiden tulisi olla realistisempia, vähemmän stereotypisia ja ottaa huomioon oppilaiden oma kokemusmaailma. Uudet päämäärät matematiikan opetuksessa tähtäävät konseptuaaliseen ymmärrykseen, joustavaan päätelmien tekoon ja prosessinomaisten strategioiden käyttöön (Kilpatrick ym., 2001). Syvemmälle matemaattiseen ongelmaan pureuduttaessa käydään tulosten lisäksi läpi laskun eri vaiheita ja tehdään näkyviksi yhteyksiä eri vaiheiden välillä (Hiebert ym., 2003). Tällaisen konseptuaalisen tiedon rakentumisen tasolla liikkuvien ongelmien ratkaiseminen on usein vaativampaa kuin rutiininomaisten tehtäväsarjojen, mutta tekee oppimisesta oppilaille merkityksellisempää (Sokolowski ym., 2011).

Monet proseduraalisen tiedon tasolla liikkuvat tehtävät saavat merkityksen, sijainnin, ajan ja paikan vain koulussa ja oppilaat törmäävät harvoin matemaattisiin tehtäviin samassa muodossa koulun ulkopuolella (Bonotto, 2013). Oppilaille voidaankin peruslaskuharjoitusten lisäksi antaa erilaisia konteksteja, joihin opiskeltavia ratkaisutapoja tulee soveltaa. Sovellukset sisältävät usein sanallisia kuvauksia, tilastoja, diagrammeja tai muuta havainnollistaa tietoa, jota ei ole esitetty vain matemaattisin symbolein. (Hiebert ym., 2003.)

Chapmanin (2012) mukaan opettajan tulee etsiä autenttisia matemaattisia ongelmia myös oppikirjan ulkopuolelta. Bonotton (2013) tutkimuksessa matematiikan tehtävistä luotiin oppilaille merkityksellisiä käyttämällä opetuksessa sellaisia materiaaleja joita oppilaat kohtaavat arkielämässään, kuten esimerkiksi ravintoloiden ruokalistoja, mainoksia tai sääennusteita. Myös matemaattisten käsitteiden nimeäminen ja niiden yhdistäminen laskun eri vaiheisiin otetaan mukaan ratkaisuprosessiin (Hiebert ym., 2003).

Molempia matemaattisen tiedon lajeja tarvitaan matemaattisen ajattelun rakentumisessa. Peruslaskutoimituksiin keskittyvät harjoitukset ja sanalliset tehtävät kehittävät proseduraalisia taitoja, niiden avulla oppilaille kehittyy tietämys matemaattisista faktoista, säännöstä ja käsitteistä (Chamberlin, 2010). Uudet käsitteet rakentuvat aina aikaisemmin opittujen varaan, minkä vuoksi opetuksessa on tärkeä huomioida se, hallitsevatko oppilaat aikaisemmin opiskellut käsitteet ennen kuin heille opetetaan uusia (Joutsenlahti, 2005). Syvemmät ja monipuolisemmat matemaattiset ongelmat kehittävät oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja ja omaa matemaattista ajattelua (Chamberlin, 2010). Aktiivisen luokkahuoneilmapiirin luominen, kysymysten esittäminen ja ratkaiseminen, kognitiivisesti haastavat ongelmat, niiden reflektointi ja yhteinen keskustelu kasvattavat oppilaiden matemaattista ymmärrystä kaikilla tasoilla (Knott, 2010).

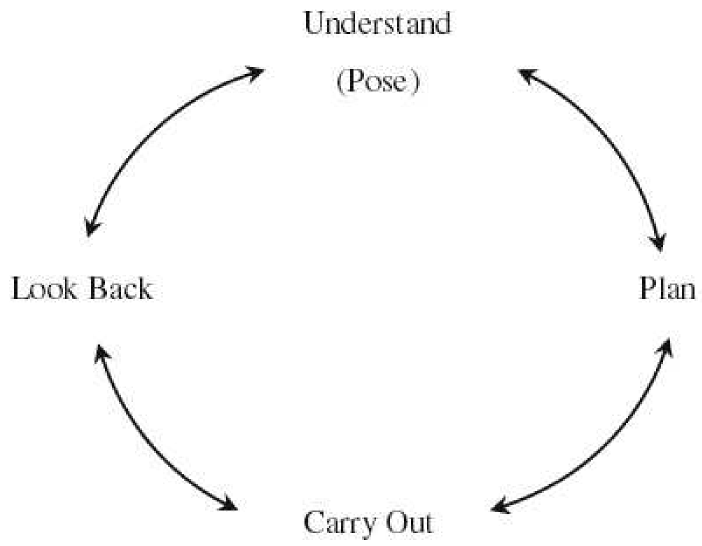
3 MATEMAATTISET ONGELMAT LUOKKAHUONEKESKUSTELUISSA

Schoenfield (1989) määrittelee matemaattiseksi ongelmaksi tehtävät joista oppilas on kiinnostunut ja joihin hän on sitoutunut ja joihin hän toivoo löytävänsä ratkaisun. Oppilaalla ei ole valmiita keinoja ongelman ratkaisemiseksi. Matemaattiseksi harjoitukseksi taas kutsutaan tehtävää, jossa oppilaalla on käytössään valmiit keinot harjoituksen ratkaisemiseksi (Van Harpen & Presmeg, 2013).

Chamberlin (2010) jakaa matemaattiset ongelmat neljään tyyppiin. Peruslaskuharjoitukset sisältävät mekaanista laskemista ja sääntöjen ulkoa muistamista. Sanalliset tehtävät koostuvat avainsanojen etsimisestä ja saman matemaattisen kaavan toistamisesta. Todelliset matemaattiset ongelmat ovat Chamberlinin (2010) mukaan sellaisia, joissa ei anneta valmiita kaavoja ongelman ratkaisemiseksi, vaan oppilaiden on kehiteltävä ne itse. Tällöin ratkaisuprosessi sisältää usein monia eri vaiheita. Viimeisenä Chamberlin (2010) nimeää autenttiset matemaattiset ongelmat, joissa matemaattisen ongelman ympärillä on aito konteksti, joka tuodaan oppilaille selvästi esiin. Autenttisissa ongelmanratkaisutehtävissä vaaditaan sekä alemman tason proseduraalisia taitoja että korkeamman tason konseptuaalisia taitoja.

3.1 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Leung (2013) esittää Polyaa (1945) mukaillen neljä vaihetta matemaattisen ongelman ratkaisussa (Kuvio 2). Nämä vaiheet ovat ongelman muotoileminen ja ymmärtäminen, suunnitelman tekeminen, suunnitelman toteuttaminen ja lopuksi saatujen tulosten arvioiminen. Ongelmanratkaisuprosessi ei kuitenkaan etene suoraviivaisesti näiden neljän vaiheen kautta, vaan eri vaiheiden välillä arvioidaan omia ratkaisuja ja muokataan niitä tarpeen mukaan. Myös uusia ongelmia voi tulla vastaan eri vaiheissa prosessia.



KUVIO 2 Matemaattinen ongelmanratkaisu (Leung, 2013: 105)

3.2 Matemaattisten ongelmien kontekstit luokkahuoneessa

Luokkahuoneen käytännönjärjestelyt ja toimintakulttuuri luovat puitteet oppilaiden oppimismahdollisuuksille (Robert & Rogalski, 2005). Oppimismahdollisuuksiin vaikuttavat se, millaisessa kontekstissa matemaattiset ongelmat esitetään (Knott, 2010) ja se, annetaanko oppilaille mahdollisuus valita menetelmä, jolla he ratkaisevat matemaattisen ongelman vai ratkaistaanko se ainoastaan opettajan esittelemällä menetelmällä (Hiebert ym., 2003).

Tapaa jolla yhteisö ja asiayhteys vaikuttavat yksilön matemaattiseen kielenkäyttöön ja tapaan ilmaista matemaattisia ajatuksiaan kutsutaan sosiomatemaattisiksi normeiksi (Yackel & Cobb, 1996). Tähän kuuluu esimerkiksi se, mitä oppilaiden edellytetään matematiikan tunnilla tuottavan, kuinka kauan kutakin tehtävää kohti on varattu aikaa ja millaiset ohjeet opettaja antaa tehtävän tekoon (Robert & Rogalski, 2005). Opettajan matemaattista ongelmaa koskevat kysymykset ja se millaisia vastauksia hän odottaa niihin saavansa ja kuinka hän neuvottelee ja rakentaa vastauksia yhdessä oppilaiden kanssa heijastuvat myös luokkahuoneen sosiaalisissa ja sosiomatemaattisissa normeissa (Knott, 2010). Lisäksi se kuinka opettaja puhuu oppilaille ja vastaa heidän puheenvuoroihinsa ja kuinka paljon oppilaiden omaa aktiivisuutta ja osallistumista opettaja tunnilla sallii tai odottaa oppilailta, eli kuinka paljon tunnilla on opettajan kontrollia ja kuinka paljon oppilaiden vapauksia, vaikuttavat kaikki oppimiseen (Robert & Rogalski, 2005).

3.2.1 Opettajajohtoinen luokkahuonevuorovaikutus

Luokkahuonevuorovaikutus koostuu usein kolmivaiheisesta syklistä, jossa opettaja toimii aloitteentekijänä esittämällä esimerkiksi kysymyksen. Oppilas reagoi opettajan aloitteeseen, jonka jälkeen opettaja antaa palautetta oppilaan vastaukseen tai tekee uuden aloitteen. (Leiwo, Kuusinen, Nykänen & Pöyhönen, 1987.) Opettajan kontrolloimassa luokkahuonekeskustelussa opettajat kysyvät oppilailta usein faktuaalisia ja suljettuja kysymyksiä, joihin opettaja tietää jo ennalta vastaukset (Myhill, 2006). Tämä johtaa usein siihen, että oppilaat pyrkivät lyhyillä ja nopeilla vastauksilla löytämään opettajan hakeman vastauksen (Baxter, Woodward & Voorhies, 2002), eikä heille välttämättä jää aikaa hahmottaa opiskeltavia asioita oman puheensa kautta (Leiwo ym., 1987).

Kysymys-vastaus-arvionti- vuorovaikutuksessa opettaja ei tartu oppilaiden esittämiin vastauksiin tarkemmin tai johdattele niistä syvempää matemaattista keskustelua, vaan vastaus arvioidaan usein vain oikeaksi tai vääräksi (Baxter ym., 2002). Vuorovaikutusta ohjailemalla opettajat pyrkivät säilyttämään luokkahuoneen kontrollin itsellään (Mercer & Daves, 2008), sekä varmistamaan että tunnille asetetut sisällölliset tavoitteet toteutuvat (Myhill, 2006).

3.2.2 Dialoginen luokkahuonevuorovaikutus

Opettajalla on keskeinen rooli luokkahuonekeskustelun muodostumisessa. Hän ohjaa kysymyksillään keskustelun rakentumista ja keskustelevan luokkahuonekulttuurin syntymistä (Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin, 2004; Ilaria, 2009.) Papen ym. (2003) tutkimuksessa opettajan kysymykset toimivat väylänä, jonka kautta oppilaat pääsivät käsiksi matemaattiseen ongelmaan. Opettaja luo luokkaan turvallisen ympäristön, jossa oppilaat voivat kysyä, tutkia, vertailla ja kyseenalaistaa omia ja toistensa ajatuksia ja päästä tätä kautta itse rakentamaan ja jakamaan matemaattista tietoa (Manouchehri & Mary, 1999). Opettaja kuuntelee oppilaiden keskustelua ja syventää sitä omilla kommenteillaan ja kysymyksillään (Baxter ym., 2002), eli osallistuu matemaattiseen ääneen ajatteluun yhdessä oppilaiden kanssa (Pape ym., 2003).

Avaintekijät oppimisen kannalta ovat ne tavat joilla matemaattisia ratkaisumenetelmiä kehitetään ja niistä keskustellaan (Hiebert ym., 2003). Opettaja voi reagoida oppilaiden puheenvuoroihin, kysymyksiin ja kommentteihin eritavoin. Hän voi tarttua oppilaan kysymykseen tai ideaan ja kehitellä sitä eteenpäin yhdessä oppilaan kanssa tai antaa myös toisten oppilaiden reagoida ja vastata siihen (Robert & Rogalski, 2005). Kun koko luokka työskentelee saman ongelman parissa, oppilailla on mahdollisuus ideoiden vaihtamiseen ja opiskeltavan asian syvempään ymmärtämiseen (Hiebert ym., 2003).

Opettajan tarjoamaan tukeen kuuluvat myös oikean vastauksen löytymiseen johdattelevat vastausvihjeet ja oppilaiden vastausten ääneen toistaminen sekä uudelleenmuotoileminen (Pape ym., 2003). Opettajan tehtävänä on myös ohjata oppilaita sanallistamaan omaa matemaattista ajatteluaan, niin että he tulisivat tietoisiksi omista ajatteluprosesseistaan ja käyttämistään matemaattisista strategioista, sekä pystyisivät tunnistamaan ja nimeämään käyttämiään ongelmanratkaisustrategioita (Baxter ym., 2002). Pilkkoessaan omilla kysymyksillään matemaattista ongelmaa pienempiin osiin, tarjoaa opettaja samalla oppilaille esimerkkejä kuinka ratkaistavaa tehtävää voi ajatella matemaattisesti ja prosessinomaisesti (Pape ym., 2003).

Zack ja Graves (2001) tuovat esiin, että opettajan oikea-aikainen tuki ja lähikehityksen vyöhyke nähdään kuitenkin usein liian kapea-alaisena. Myös erimielisyys ja väärinymmärrykset luovat uutta ja auttavat matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Opettajan tulee kannustaa oppilaita riskien ottamiseen, erilaisten näkökulmien esille tuomiseen ja omien mielipiteiden perustelemiseen (Pape ym., 2003). Lapsen väärät vastaukset ja ajattelutavat luovat pohjan keskustelulle ja perusteluille, jotka voivat johtaa syvempään ja selkeämpään ymmärrykseen ja matemaattisen ajattelun kehittymiseen (Zack & Graves, 2001).

3.3.3 Oppilaiden epätasainen osallistuminen matemaattiseen ongelmanratkaisuun

Dialogisen luokkahuonevuorovaikutuksen haasteena ovat eritasoiset oppilaat. Verbaalisesta lahjakkaat ja etevät oppilaat osallistuvat keskustelevaan opetustapahtumaan ja heikosti menestyvät oppilaat jäävät usein keskustelun ulkopuolelle. Esimerkiksi Baxterin ym. (2002) tutkimuksessa tuli esiin, että opettajalla oli vaikeuksia ottaa kaikentasoiset oppilaat mukaan syvään matemaattiseen keskusteluun. Verbaalisesti lahjakkaat ja etevät oppilaat olivat enemmän äänessä ja käyttivät matemaattisia termejä ja käsitteitä, joita heikommin suoriutuvat oppilaat eivät välttämättä ymmärtäneet.

Säljön (2004) mukaan ymmärtämisvaikeuksissa on kyse vaikeudesta yhdistää opetuksessa välitetyt taidot ja valmiudet muissa yhteyksissä saatuihin kokemuksiin. Jos oppilaan peruslaskutaidot eivät ole automatisoituneet, kuluu kaikki hänen kognitiivinen energiansa peruslaskutoimitusten tekemiseen, eikä hänelle jää aikaa tai energiaa esimerkiksi vastauksen mielekkyyden arvioimiseen tai laskun tarkistamiseen (Chapman, 2012). Heikkojen oppilaiden ongelmana voi olla myös se, etteivät he tiedä kuinka sanallistaa oma vastauksensa Jos matematiikassa heikosti suoriutuvat osallistuvat keskusteluun, on se usein tyypillistä opettajan esittämä kysymys - oppilaan esittämä lyhyt vastaus –keskustelua (Baxter ym., 2002).

Baxterin ym. (2002) tutkimustulosten mukaan heikosti suoriutuvat oppilaat tarvitsevat tarkkaa ja suoraa ohjausta opeteltaessa uusia taitoja ja käsitteitä. Watsonin ja Geestin (2005) toteuttamassa projektissa heikosti matematiikassa menestyvien oppilaiden matemaattista ajattelua kehitettiin ohjaamalla heitä keskittymään ja pohtimaan mieluummin tarkoin yhtä matemaattista kysymystä, kuin suorittamaan nopeasti ja pintapuolisesti useita ongelmia. Opettajat, jotka ylsivät parhaisiin tuloksiin, rohkaisivat oppilaita käytäntöön, kokeiluun ja matemaattiseen keskusteluun.

4 TUTKIMUKSEN TAVOITTEET JA TOTEUTTAMINEN

4.1 Tutkimustehtävät

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan sitä, millaisissa esimerkkejä opettaja käyttää opettaessaan oppilaille uutta matemaattista sisältöä. Lisäksi tarkastellaan sitä, kuinka opettajat esimerkeissään käyttävät matemaattisia käsitteitä ja termejä, sekä arkielämän esimerkkejä ja sitovat näitä toisiinsa. Tutkimuksessa tarkastellaan myös sitä, kuinka opettajat itse reflektoivat käyttämiään esimerkkejä nähdessään videotallenteita pitämistään oppitunneista.

Tutkimuskysymykset:

1. Millaisia matemaattisia esimerkkejä uuden aiheen opettamisessa käytetään?

2. Kuinka matemaattiset termit tulevat esiin esimerkeissä?

4.2 Tutkimusaineisto

Tämä opinnäytetyö on osa MUST-projektia (Matematiikan oppimisen sosiokulttuurinen tausta, Björn & Vehkakoski, 2012). Projektilla on kolme päätehtävää: 1) Tutkia sitä, kuinka yläkoulun matematiikan aineenopettajat käyttävät matemaattisia käsitteitä opetuksessaan, 2) Luoda videoaineistonanalyysin kautta uusia tapoja tulkita matemaattista opetusdiskurssia, 3) Luoda yhteisten moniammatillisten tapaamisten kautta matematiikan opettajille itsearvioinnin ja opetuksen välineitä opetuksensa strukturointiin.

Tutkimuksessa käytetty aineisto kerättiin videoimalla matematiikan oppitunteja. Tunnit videoitiin huhti- touko- ja kesäkuussa 2012. Projektin liittyy tämän tutkimuksen lisäksi myös muita pro gradu –tutkielmia. Kinnunen (2012) tutki ymmärryksen varmistamista matematiikan opetuksessa ja Jutila (tekeillä) tarkastelee opetuksen eriyttämistä. Kaikki projektissa mukana olleet graduntekijät osallistuivat oppituntien kuvaamiseen ja koko aineisto oli kaikkein käytettävissä.

Helmi-maaliskuussa 2012 lähetettiin sähköpostia useisiin eri yläkouluihin MUST-projektin tiimoilta. Nämä yhteydenotot eivät tuottaneet tulosta, joten kahden yläkoulun rehtoreihin ja matematiikan opettajiin otettiin huhtikuussa 2012 yhteyttä puhelimitse. Molemmilta kouluilta tutkimukseen lähti mukaan kolme matematiikan aineenopettajaa. Kaksi opettajista oli miehiä ja neljä naisia. Opettajien opetuskokemus vaihteli kahden ja 30 vuoden välillä. Ensimmäinen tutkinto oli suoritettu vuonna 1974 ja viimeisin vuonna 2009. Pääaineinaan opettajat olivat opiskelleet joko matematiikkaa, kemiaa tai fysiikkaa. Opettajien nimet on muutettu tutkimusta varten ja heistä käytetään tässä nimiä: Pirkko, Maija, Orvokki, Venla, Pekka ja Kari.

Opettajien matematiikan opetusryhmissä oli noin 20 oppilasta. Yhdellä oppilaista oli erityisopetukseen sopiva oppikirja, jota hän käytti opiskellessaan muuten muun ryhmän mukana. SR-tilaisuuksissa osa opettajista toi esiin, että heidän luokillaan oli muutamia oppilaita jotka tarvitsivat muita enemmän tukea opiskelussaan. Osa opettajista toi esiin sen, että oppilasryhmän heterogeenisyys tuo haasteita uuden asian opettamiseen ja käytettävien esimerkkien käsittelyyn. Kahdella kuvatuista oppitunneista koulun erityisopettaja osallistui myös opetukseen. Kaksi opettajista toi esiin, että he toivoisivat enemmän yhteistyötä erityisopettajan kanssa.

Kuvausten alkaessa tavoitteena oli, että eri opettajien oppitunteja kuvattaisiin niin, että tunneilla käsiteltäisiin aina samoja aiheita. Saman koulun opettajat etenivät opetuksessaan suunnilleen samaan tahtiin ja olivat myös tietoisia toisten opettajien aikatauluista. Tämän seurauksena saman koulun opettajien tuntien kuvaukset pystyttiin järjestämään niin, että käsiteltävät asiat vastasivat toisiaan. Eri kouluissa oli kuitenkin meneillään eri aihepiirien käsittely. Molemmissa kouluissa käsiteltiin kuitenkin algebraan liittyviä aiheita: kirjainlausekkeita ja potenssilaskuja.

Jokaiselta opettajalta kuvattiin viisi matematiikan oppituntia, joilla opettaja käsitteli ja opetti uutta asiaa. Yhteensä aineisto koostuu 30 kuvatusta oppitunnista. Kuvattavien tuntien aikataulu oli sovittu opettajien kanssa etukäteen niin, että pystyivät opettamaan jokaisella kuvatulla tunnilla oppilaille jonkin uuden asian.

Oppitunnit videoitiin alusta loppuun, lukuun ottamatta ensimmäistä kuvattua tuntia. Alun perin oli tarkoituksena kuvata vain se vaihe tunnista, jolloin opettaja opettaa oppilaille uuden asian. Kuitenkin jo ensimmäisen tunnin kuvaamisen aikana havaittiin, että myös muut tunnin vaiheet, kuten oppilaiden itsenäinen työskentely ovat oleellisia projektin näkökulmasta. Kahden oppitunnin tallennus katkesi noin kymmenen minuuttia kuvaamisen aloittamisen jälkeen, joten kyseiset tunnit otettiin osaksi aineistoa siltä osin kuin ne olivat tallentuneet. Kaikki oppitunnit litteroitiin keskustelunanalyysin merkkejä käyttäen (liite 1). Yleensä oppitunneilla olivat paikalla aineenopettaja ja noin 20 oppilasta. Kahdella tunnilla myös erityisopettaja osallistui opetukseen.

Kuvaamisen päätyttyä graduntekijät ja MUST-projektin vastuuhenkilöt Piia Björn ja Tanja Vehkakoski katsoivat yhdessä kuvattuja tallenteita. Tässä tapaamisessa videoista valittiin stimulated recall –tapaamisia varten katsottavaksi kaksi tai kolme videokatkelmaa kullekin opettajalle. Katkelmat olivat kestoltaan noin 1-3 minuuttia. Valitut katkelmat pohjautuivat pro gradu –tutkielmien aiheisiin. Jokaiselle opettajalle valittiin reflektoitavaksi yksi tilanne kunkin tutkielman aihepiiriin liittyen. Sama videokatkelma saattoi liittyä useampaan opinnäytetyön aiheeseen.

Jokaiselle opettajalle järjestettiin oma stimulated recall –tilaisuus. Näihin tilaisuuksiin osallistuivat haastateltavan opettajan lisäksi kaksi graduntekijää sekä Piia Björn MUST-projektin edustajana. Pari päivää ennen SR-tilaisuutta opettajat saivat omat oppituntinsa DVD-levyillä. Heille ei kuitenkaan kerrottu etukäteen, mitä katkelmia reflektointitilanteessa tullaan katsomaan tai millaisia kysymyksiä tilanteisiin liittyen tullaan esittämään. Opettajia ei myöskään ohjeistettu katsomaan näitä videoita etukäteen.

Stimulated recall –keskusteluissa opettajilla oli ensin tilaisuus kommentoida näkemäänsä videokatkelmaa vapaasti. Tämän jälkeen heille esitettiin puolistrukturoituja kysymyksiä kuhunkin pro gradu –tutkielman aiheeseen liittyen. Puolistrukturoidut kysymykset löytyvät liitteestä 2. Keskustelutilanne oli avoin ja tutkijat saattoivat esittää keskustelutilanteessa mieleen tulleita tarkentavia kysymyksiä tai tarttua tutkittavien esiin tuomiin tekijöihin (Rowe, 2009).

Yhden videokatkelman reflektointi kesti noin 10-15 minuuttia. Reflektointitilanteet videoitiin ja litteroitiin. Näin lopullinen tutkimusaineisto koostui sekä kuvattujen oppituntien, että niin ikään videoitujen SR-tapaamisten litteraateista ja graduntekijöiden kenttäpäiväkirjoista, joita kirjoitettiin oppituntien kuvaamisen aikana.

4.3 Tutkimusmenetelmät

Tässä tutkimuksessa käytettiin kahta eri tutkimusmenetelmää. Oppituntien analysoinnissa käytettiin keskustelunanalyysiä ja opettajien reflektoinneissa stimulated recall -menetelmää puolistrukturoiduin kysymyksin. Seuraavaksi kerrotaan molemmista menetelmistä ja kuvataan niiden käyttöä tässä tutkimuksessa.

4.3.1 Keskustelunanalyysi

Tutkimusmenetelmänä keskustelunanalyysi on aineistolähtöinen ja laadullinen (Lilja, 2011). Se pohjaa näkemyksensä yhdysvaltalaisen Harvey Sacksin 1960 ja 1970-luvuilla pitämiin luentoihin (Haakana, Laakso & Lindström, 2009; Hakulinen, 1998). Sacksin tavoitteena oli kehittää menetelmä, jonka avulla voitaisiin tutkia ihmisen sosiaalista toimintaa sellaisena kuin se todellisessa elämässä toteutuu (Lilja, 2011). Tämän vuoksi keskustelunanalyyttistä tutkimusta tehtäessä käytetään aina nauhoitettua aineistoa. Keskustelunanalyysiin eivät siis kuulu haastatteluun, havainnointiin, intuitioon tai kokeellisiin asetelmiin perustuvat tutkimusmenetelmät. (Heritage, 1984.)

Nauhoitetuista keskustelutilanteista ilmenee, että ihmisten vuorovaikutus on yksityiskohtiaan myöten järjestäytynyttä ja jäsentynyttä toimintaa, jossa ymmärrys ei synny sattumanvaraisesti (Hakulinen, 1998; Heritage, 1984; Lilja, 2011). Ymmärryksen syntymiseen vaikuttavat vastaanottaja, ympäristö, käytetyt sanat ja muu viestintä (Hakulinen, 1998). Keskustelunanalyysissä ollaan siis kiinnostuneita siitä, miten keskustelun osapuolet tulkitsevat ja ymmärtävät toisiaan tietyn kontekstin sisällä (Raevaara, Ruusuvuori & Haakana, 2001).

Toisin sanoen tällöin ollaan kiinnostuneita vuorovaikutuksen paikallisesta sekventiaalisesta vuorovaikutuskontekstista. Tämä tarkoittaa sitä, että kukin yksittäinen toiminto saa merkityksensä osallistujien tulkinnan myötä siinä kontekstissa, jossa se on tuotettu (Seedhouse, 2005). Esimerkiksi luokkahuoneessa oppilaat tulkitsevat usein opettajan esittämän väitelauseen heille suunnattuna kysymyksenä, johon odotetaan vastausta (Nikula & Kääntä, 2011). Keskustelunanalyysiin kuuluu siis tyypillisesti luonnollisten ja informaaleiden puhetilanteiden nauhoittaminen autenttisissa sosiaalisissa tilanteissa (Seedhouse, 2005). Tämä sopii yhteen sosiokulttuurisen näkökulman kanssa, koska tällöin tutkimuksen kohteena olevat vuorovaikutustilanteet ovat sellaisia, jotka olisivat tapahtuneet myös ilman tutkijoiden kiinnostusta kyseiseen vuorovaikutukseen (Tainio, 2007).

Vuorovaikutuskontekstin lisäksi keskustelunanalyysi huomio myös sen, että osallistujat eivät käytä pelkästään kieltä tuottaessaan eri toimintojen merkityksiä ja tulkintoja. Tällaisia muita viestintäkeinoja ovat muun muassa eleet, katseen suunta, kehon eri asennot, opetusmateriaalit ja – välineet sekä muu ympäröivä fyysinen konteksti. (Nikula & Kääntä, 2011.)

Luokkahuone on monimutkainen ja monimuotoinen ympäristö ja opettaminen on prosessi, joka sisältää monia eri osia. Tutkija kykeneekin hahmottamaan tästä kokonaisuudesta vain rajallisen osan kerrallaan. (Hiebert ym., 2003.) Oppimista voidaan analysoida kiinnittämällä huomiota osallistujien käyttäytymiseen sekä niihin keinoihin, joilla he vuorovaikutuksessa osoittavat suuntautuvansa oppimiseen (Lilja, 2011). Videoinnin avulla on mahdollista pilkkoa luokkahuoneen tapahtumia ja opetusta pieniin osiin ja keskittyä tarkemmin niiden analyysiin. Näin samaan asiaan voidaan palata useita kertoja. (Hiebert ym., 2003). Kiinnostuksen kohteena on usein oppimiskäyttäytyminen eli se toiminta, jonka avulla keskustelijat rakentavat vuorovaikutuksesta oppimistilanteen (Lilja, 2011).

Luokkahuoneessa voidaan käydä luonnollisten ja informaalisten keskusteluiden lisäksi myös formaaleja ja institutionaalisia keskusteluja (MacBeth, 2004). Institutionaalinen vuorovaikutus tarkoittaa sitä, että keskusteluun osallistuvilla on erityyppiset roolit ja heidän puheensa täyttää kyseiselle roolille asetetut vaatimukset (Haakana ym., 2009). Opettajalla on luokkahuoneessa institutionaalista valtaa, joka näkyy esimerkiksi siinä että opettaja ohjaa vuorovaikutusta ja keskustelua. Opettaja säätelee luokassa käytävää keskustelua, päättää käsiteltävät aiheet, kyselee kysymyksiä ja arvioi oppilaiden esittämiä vastauksia. Oppilaat taas ovat usein kuuntelijan tai yleisön roolissa. (Tan & Tan, 2006; Thornborrow, 2002.)

Kielellistä ja ei-kielellistä toimintaa kuvataan keskustelunanalyysissä kolmen eri jäsennyksen avulla (Tainio, 2007). Puhetoiminnot muodostavat toimintajaksoja, eli sekvenssejä. Sekvenssi on dialoginen jakso, johon osallistuu ainakin kaksi puhujaa, jotka tuottavat omia vuorojaan. (Haakana, 2008.) Sekvenssijäsennys kuvaa vuorojen välisiä yhteyksiä, jaksottumia ja siirtymäkohtia (Tainio, 2007). Sekvenssillä on rakenne ja keskeinen sekvenssijäsennys keskustelussa on vieruspari, esimerkiksi kysymys-vastaus. Vierusparin jäseniä kutsutaan etujäseneksi ja jälkijäseneksi. Kun puhuja on tuottanut tietyn etujäsenen, on odotuksenmukaista, että vastaanottaja tuottaa siihen sopivan jälkijäsenen. (Haakana, 2008.) Toinen jäsennys on vuoronvaihtojäsennys, jonka avulla neuvotellaan siitä, kuka milloinkin puhuu ja toimii ja kuinka pitkään. Sekvenssijäsennys ja vuoronvaihtojäsennys toimivat siis rinnakkain. Kolmannen, eli korjausjäsennyksen avulla osallistujat varmistavat, että ymmärsivät riittävästi toisten osallistujien toimintoja. (Tainio, 2007.)

4.2.2 Stimulated recall –menetelmä

Stimulated recall –menetelmän avulla voidaan tutkia ihmisten kognitiivisia strategioita ja oppimisprosesseja, sekä päästä käsiksi heidän ajatteluprosesseihinsa (Lyle, 2003). Sitä on perinteisesti käytetty laadullisissa tutkimuksissa, koska sen avulla voidaan huomioida subjektiivisuus, sekä ilmiön kuvaaminen ja ymmärtäminen tietyssä kontekstissa (Patrikainen & Toom, 2004).

SR-menetelmää on käytetty opetusta käsittelevissä tutkimuksissa ja se sopii hyvin luokkahuonevuorovaikutuksen tallentamiseen ja tutkimiseen (Lyle, 2003). Menetelmä toimii niin, että tietyn toiminnan suorittamisen jälkeen tutkittavia haastatellaan käyttäen apuna jotakin käsiteltävään aiheeseen liittyvää virikettä, kuten videotallennetta (Patrikainen & Toom, 2004). Santagatan & Barbierin (2005) tekemässä videoanalyyttisessä tutkimuksessa opettajat kokivat oman opetuksensa katsomisen nauhalta hyödylliseksi. He kokivat voivansa parantaa matematiikan opettamista ja oppimista nauhojen katselusta saamiensa tietojen ja ideoiden avulla.

SR -menetelmän avulla saadaan tietoa tutkittavan omasta kokemuksesta. Haastattelun aikana tutkittava ja tutkija rakentavat yhdessä ymmärrystä tarkasteltavana olevasta ilmiöstä. (Patrikainen & Toom, 2004.) Tutkijoiden tehtävänä on stimuloida tutkittavien omaa ajattelua, ei esittää omia näkökulmiaan tai mielipiteitään. Menetelmälle on tyypillistä, että tutkittavalle esitetään sarja strukturoituja, mutta suhteellisen avoimia kysymyksiä. Tämä voi tapahtua joko videoiden katselun aikana tai mahdollisimman pian sen jälkeen. (Lyle, 2003.) Tässä tutkimuksessa kysymykset esitettiin tutkittaville heti sen jälkeen, kun he olivat katsoneet videotallenteelta etukäteen valitun kohdan. Lylen

(2003) mukaan käsiteltävät videot tulisi katsoa mahdollisimman pian tarkasteltavan toiminnan jälkeen. Tässä tutkimuksessa oppituntien kuvaamisen ja SR-keskustelujen välillä kului aikaa muutama viikko. Opettajat saivat keskusteluissa käytetyt videot itselleen pari päivää ennen SR-tilaisuutta.

Videoiden katsominen mahdollistaa tutkittavien oman reflektoinnin ja vuorovaikutuksen analysoinnin (Sherin & Han, 2004). Videoiden katsomisen tavoitteena on, että tutkittava pystyisi palauttamaan alkuperäisen tilanteen mieleensä ja verbalisoimaan siihen liittyvää ajatteluaan (Patrikainen & Toom, 2004). Tässä tutkimuksessa pyrittiin pitämään reflektointitilanne mahdollisimman keskustelunomaisena ja välttämään tutkijoiden asiantuntija-asemaa. Opettajille näytettiin katkelmia heidän pitämistään oppitunneista. Tarkoituksena oli tutkia opettajien omia käsityksiä käyttämistään matemaattisista esimerkeistä ja opettamistaan ongelmanratkaisutaidoista. Opettajat pääsivät itse perustelemaan erilaisten menetelmien valintaa ja käyttöä erilaisissa tilanteissa.

Rowen (2009) toteuttamassa stimulated recall-menetelmällä tehdyssä tutkimuksessa tuli esiin se, että tutkimukseen osallistuneet opettajat pystyivät tarkastelemaan opetuksen ja oppimisen välistä suhdetta uudesta näkökulmasta. Opettajat pystyivät myös menetelmän avulla observoimaan itseään sellaisella tavalla, mikä ei ole normaaleilla oppitunneilla mahdollista. Santagatan ja Barbierin (2005) tutkimuksessa nauhojen katsominen lisäsi opettajien tietoisuuttaan omista opetuskäytännöistään. Lisääntyneen tietoisuuden avulla he pystyivät muokkaamaan omia rutiinejaan ja saivat vaihtoehtoisia ideoita matematiikan opetukseen.

4.4 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Keskustelunanalyysin luonteeseen kuuluu se, että tutkittavalle aineistolle pyritään tutkimusraporteissa antamaan mahdollisimman paljon tilaa (Lilja, 2011). Tässä tutkimuksessa on esitetty otteita nauhoitteiden pohjalta tehdyistä litteraateista ja niiden avulla pyritään tarjoamaan lukijalle mahdollisimman realistinen kuva luokkahuoneen tapahtumista. Näin lukija voi arvioida tutkimuksessa tehtyjen tulkintojen luotettavuutta vertaamalla niitä autenttiseen aineistoon (Vehkakoski, 2012).

Ennen oppituntien kuvaamista opettajia ohjeistettiin toimimaan luokkahuoneessa niin kuin he normaalistikin toimisivat. Tuntien kuvaaminen pyrittiin pitämään mahdollisimman vähän huomiota herättävänä. Ensimmäisen kuvatun tunnin jälkeen yksi opettajista toi esiin, ettei hän kameran läsnä ollessa kokenut oloaan yhtä rennoksi kuin ”normaalitilanteessa”. Toinen opettaja taas kyseli tutkijalta mielipiteitä siihen, missä kohden kuvaamisen kannalta olisi paras hetki käsitellä uusi opetettava asia. Opettajia rohkaistiin edelleen toimimaan samoin kuin ilman kameran ja tutkijan läsnäoloa. Patrikainen & Toom (2004) tuovat esiin sen, että yksilö pyrkii pitämään kiinni omista menettelytavoistaan, eikä yleensä yritä kontrolloida niitä pitkiä aikoja. Kuvaamisjakson jälkeen käydyissä Stimulated recall –keskusteluissa kaikki opettajat kertoivat että kameroiden ja tutkijoiden läsnäolo ei ollut vaikuttanut heidän tapaansa opettaa. Kolme opettajista toi esiin, että kuvaukset olivat vaikuttaneet tuntien ryhmitykseen. Koska oppituntien kuvaaminen jakaantui usealle eri viikolle, voidaan olettaa, että opettajat toimivat kuvatuilla oppitunneilla suurelta osin luonnolliseen tapaansa.

Laadulliselle tutkimukselle on tyypillistä, että aineiston analyysi ja tutkimuskysymysten muodostaminen kietoutuvat toisiinsa ja tapahtuvat osittain samanaikaisesti. Luokkahuonovuorovaikutuksen tutkimuksen varsinainen aineisto on ääni- tai videonauhoite. Litteraatio ei siis ole aineisto, vaan analyyttinen apuväline. Yleensä aineistosta tehdään ensin karkea litteraatio, jota muokataan sen mukaan mihin tutkimuksen aihe kohdistuu. Litteraation tekeminen on siis samalla jo analyysi tekemistä, koska sen aikana tutkija tekee valintoja siitä, mitä asioita ja kuinka tarkkaan hän litteraatteihin merkitsee. Litteraatiot toimivat myös tutkimuksen reliabiliteetin ja validiteetin mittareina, koska tarkkojen litteraattien avulla tutkija pystyy tekemään aineistosta tehdyt tulkinnat ja niiden perusteet näkyviksi lukijalle. (Nikula & Kääntä, 2011.)

Koska luokkahuonevuorovaikutuksen tutkimus perustuu aitojen oppituntien nauhoittamiseen, tulee oppilaiden ja opettajien yksityisyys eritavoin esille kuin monissa muissa aineistonkeruumenetelmissä. Tämän vuoksi tutkimuksesta tulee kertoa hyvissä ajoin ennen aineistonkeruuta kaikille tutkimuksen osapuolille. (Nikula & Kääntä, 2011.) Ennen tutkimuksen aloittamista koulujen rehtoreilta ja tutkimuksessa mukana olleilta opettajilta kysyttiin suostumusta tutkimukseen osallistumiseen. Tämän jälkeen tutkimukseen osallistuneiden luokkien oppilailta ja heidän vanhemmiltaan kerättiin tutkimusluvat (liite 3). Oppilaille ja heidän vanhemmilleen lähetettiin luvan mukana tiedote (liite 4), jossa kuvailtiin tutkimuksen toteutusta ja tarkoitusta. Lähes jokaisella luokalla oli vähintään yksi oppilas, jolla ei ollut tutkimuslupaa. Näiden oppilaiden toiminta luokkahuoneessa jätettiin kokonaan tutkimuksen ulkopuolelle.

5 TULOKSET: MATEMAATTISTEN ESIMERKKIEN RAKENTUMINEN LUOKKAHUONEESSA

Tässä luvussa esitellään sekä keskustelunanalyysin että SR-menetelmän pohjalta tehdyt keskeiset tutkimuslöydöt. SR-tilaisuuksissa esille tulleet opettajien ajatukset on merkitty sulkeisiin SR-merkinnöillä. Tutkimuslöydöt on jaoteltu kolmeen kategoriaan, sen mukaan kuka on aloitteen tekijänä esimerkin esittämisessä ja rakentumisessa. Nämä ovat opettajan etukäteen päättämät esimerkit, yhteisen keskustelun kautta rakentuvat esimerkit ja oppilaiden ajatusten mukaan rakentuvat esimerkit. Opettajajohtoisten esimerkkien tarkoituksena oli proseduraalisen tiedon rakentaminen, uusien matemaattisten käsitteiden nimeäminen ja vaihtoehtoisten ajattelutapojen esiintuominen. Yhteisen keskustelun kautta rakentuvat esimerkit lähtivät liikkeelle ongelmalähtöisestä tilanteesta tai opettajan esittämästä kysymyksestä. Niissä tuli myös mukaan oppilaiden erilaisia ajattelutapoja ja arkielämän havainnollistuksista. Oppilaiden ajatusten mukaan rakentuvissa esimerkeissä tuli esiin oppilaiden virheellisiä ajattelutapoja, sekä omia perusteluja ja esimerkkilaskuja.

Savola (2008) tutki suomalaisten matematiikan oppituntien rakennetta ja hänen löytämänsä oppitunnin vaiheet tulivat esiin myös lähes kaikilla tätä tutkimusta varten kuvatuilla oppitunneilla. Tyypillinen oppitunti alkoi kotitehtävien tarkistuksella. Seuraavaksi opettaja esitteli luokalle uuden asian ja näyttää siihen liittyviä esimerkkitehtäviä. Tämän jälkeen opettaja antoi oppikirjasta uuteen opeteltavaan aiheeseen liittyviä tehtäviä, joita oppilaat ratkaisivat itsenäisesti tai pareittain. Tunnin lopuksi opettaja antoi oppikirjasta uudet kotitehtävät. Vaiheiden järjestys, kesto ja esiintyminen vaihtelivat eri oppituntien ja opettajien välillä.

Käsitellyt matemaattiset esimerkit tulivat usein esiin silloin kun uutta aihetta käytiin tunnin aluksi opettajan johdolla läpi ja hän esitti siihen liittyviä esimerkkilaskuja tai matemaattisia ongelmia. Usein opettaja oli miettinyt nämä esimerkit valmiiksi ja niiden ratkaisu eteni opettajajohtoisesti. Kaikki esimerkinantotilanteet eivät kuitenkaan tulleet esiin juuri tässä vaiheessa. Välillä opettaja tai oppilas esitti keskustelua herättäneen kysymyksen tai matemaattisen ongelman joko esimerkkien antotilanteessa tai jossain muussa vaiheessa oppituntia. Nämä esimerkit olivat usein spontaanimpia ja rakentuivat vapaamman keskustelun myötä.

5.1 Opettajan etukäteen päättämät esimerkit

Institutionaaliselle luokkahuonekeskustelulle on tyypillistä osapuolten erilaiset asemat ja vuorovaikutuksen epäsymmetrisyys (Hakulinen, 1998). Yleensä opettaja on se, jolla on luokkahuoneessa institutionaalista valtaa ja tämä tulee esiin niin, että opettaja ohjaa vuorovaikutusta, säätelee luokassa käytävää keskustelua, päättää käsiteltävät aiheet, kyselee kysymyksiä ja arvioi oppilaiden esittämiä vastauksia (Tan & Tan, 2006; Thornborrow, 2002). Opettajajohtoiset esimerkit toimivat johdatteluna uuteen aiheeseen. Opettaja esitteli oppilaille uuden opeteltavan asian ja oppilaat kirjoittivat muistiinpanot ja esimerkkilaskut vihkoihinsa. Samalla opettaja usein nimesi uusia matemaattisia termejä ja käsitteitä oppilaille.

Oppilaiden rooli vuorovaikutuksessa oli usein passiivinen kuuntelijan rooli. Varsinkaan ensimmäisten aiheeseen johdattelevien esimerkkilaskujen kohdalla oppilaita ei rohkaistu soveltamaan aikaisempia tietojaan tai miettimään käsiteltävää asiaa erilaisista näkökulmista, vaan esimerkeissä opetettiin yksi tapa, jota toistettiin eri laskuissa (ks. Hiebert ym., 2003). Reflektoinneissa eräs opettaja kuvasi omaa rooliaan aiheeseen johdattelevissa esimerkinantotilanteissa näin:

> *Venla: on varmaan aika tyypillinen tai yleensä mä niinku mun idea on just se että otetaan niinku esimerkki ja tehään niinku se lasku otetaan kynät.*
> *Haastattelija: joo. tota ohjaako ne oppilaat sitte sitä sun esimerkkien antamista?*
> *Venla: no oikestaan ei.*
> *Haastattelija: joo. että onko ne sillälailla että sä oot etukäteen ne?*
> *Venla: joo kyllä. (SR Venla)*

5.1.1 Proseduraalisen tiedon rakentaminen

Tyypillinen tapa ratkaista opettajajohtoisia esimerkkilaskuja oli sellainen, että opettaja kirjoitti ensimmäisen laskun näkyviin ja kertoi kuinka se ratkaistaan, samalla hän nimesi laskuun liittyviä termejä. Seuraavaksi hän kirjoitti samantyyppisen laskun ja kyseli oppilaita kuinka se ratkaistaan edellisen kohdan tietojen perusteella. Ensimmäisten laskujen tarkoituksena oli saada kaikki oppilaat mukaan opetukseen ja ymmärtämään uuden aiheen perusasiat. Seuraavat esimerkit saattoivat olla haastavampia ja huomioida näin eri taitotasoisia oppilaita. Tunnin alussa opettajan johdolla käsitellyt esimerkit jätettiin usein taululle näkyviin koko tunnin ajaksi ja oppilaat pystyivät hyödyntämään niitä ratkaistessaan itsenäisesti laskettavia kirjan tehtäviä.

Aiheeseen johdattelevissa esimerkeissä harjoiteltiin siis usein proseduraalisen tiedon tasolla olevia asioita. Osan oppilaista kohdalla uuden asian opettamiseen käytetyt esimerkkilaskut jäivät näihin peruslaskuihin, joiden laskemiseen tarvittavan prosessin he oppivat mekaanisesti suorittamaan: *tavallaan opetellaan ulkoo sitten tekemään että välttämättä ei ymmärretä mitä tehään mutta osataan se tehä (…) tehä tuota kutenkin mekaanisesti (SR Pekka).* Osalla oppilaista peruslaskuharjoitukset toimivat pohjana, jolta oppilaat pystyivät myöhemmin omaksumaan myös konseptuaalista tietoa ja ratkaisemaan aiheeseen liittyviä haastavampia matemaattisia ongelmia: *et vähän niin kun pitäis osata myös ymmärtää että ei pelkästään se mekaaninen laskeminen (--) sitä ymmärrystäkin että mitä miks näin on tapahtuu (SR Pekka).*

Aineistokatkelma 1
Venlan 1. tunti esim.1

```
Opettaja: alotetaan sieltä aa kohasta (.)
laitetaan sen lausekkeen arvo ensin (.) kolme äks
miinus yksi JA aa kohdassa kerrottiin että (.)
äks on yksi JA NYT on se idea että me sijotetaan
tonne äksän paikalle tuo luku yksi ja ratkaistaan
mitä siitä tulee (.)
((opettaja kirjoittaa taululle ja oppilaat
vihkoon))
Opettaja: ja muistatte että tuolla välissä on se
piilokertomerkki (.)
((opettaja lisää kertomerkin 3:n ja x:n väliin))
Opettaja: eli kolme kertaa yksi miinus yksi (.)
mitäs tästä tulee (5.0) Noora?
Noora: kaks
Opettaja: Kaks
```

Aineistokatkelma 2
Maijan 1. tunti esim. 2

```
Opettaja: tuo merkintä on nyt se potenssi (.) ja
tähän liittyy erilaisia nimityksiä ensinnäkin
```

```
3.   tuota kakkosta sanotaan kantaluvuksi joku on näin
4.   määrännyt että sitä sanota- kutsutaan kantaluvuk
5.   si (.) ja sitte siellä yläkulmassa olevalla luku
6.   määrä ilmoittavalla on niinkin hieno nimi kun
7.   eksponentti (.)
```

Aineistokatkelma 1 on aivan oppitunnin alusta, jolloin aletaan käsitellä uutta aihetta, eli kirjainlausekkeen arvoa. Ensin opettaja kertoo lyhyesti kirjainlausekkeen arvon laskemisen periaatteen ja esittää sitten aiheeseen sopivan esimerkin. Kyseisen esimerkin ratkaisemiseksi ei tarvita päättelevää tai soveltavaa tietoa. Oppilaiden tulee vain mekaanisesti ymmärtää tällaisten laskujen ratkaisun periaate. Esimerkissä tulee sijoittaa valmiina annettu luku lausekkeessa termin x paikalle ja ratkaista näin syntynyt lasku.

Esimerkki etenee koko ajan opettajan johdolla ja tilanne koostuu lähes kokonaan hänen puheestaan. Aineistokatkelman lopussa opettaja esittää oppilaille hakukysymyksen: *mitäs tästä tulee?* (rivi 13). Opettaja yhdistää kysymyssanaan *mitä* liitepartikkelin *s*, joka kertoo siitä, että opettaja itse tietää vastauksen kysymykseen (VISK, § 837). Kysymyksen jälkeen Noora viittaa ja opettaja nimeää tämän vastaamaan. Noora vastaa opettajan kysymykseen oikein (rivi 14). Opettaja vahvistaa oikean vastauksen toistamalla sen (rivi 15). Kyseisen esimerkin jälkeen opettaja esittää oppilaille lisää samantyylisiä, mutta asteittain vaikeutuvia aiheeseen liittyviä esimerkkejä.

Monesti aiheeseen johdattelevat opettajajohtoiset esimerkit sisälsivät myös uusien matemaattisten käsitteiden esille tuontia. Aineistokatkelma 2 on tunnin alusta, jossa on juuri siirrytty uuteen aiheeseen, eli potenssilaskuun ja siitä tehdään muistiinpanoja vihkoon opettajan johdolla. Opettaja nimeää kirjoittamastaan esimerkkilaskusta oppilaille uusia matemaattisia käsitteitä *potenssi, kantaluku ja eksponentti* (rivit 1, 3 ja 7) ja oppilaat kirjoittavat ne vihkoihinsa.

Opettajan selittämien esimerkkien ja termien nimeämisen jälkeen seurasi usein opettajan valmiiksi miettimiä esimerkkejä, joita oppilaat saivat miettiä hetken yksin tai pienissä ryhmissä. Tämän jälkeen esimerkkilaskujen ratkaisut käytiin yhdessä koko luokan kanssa läpi opettajan johdolla. Reflektoinneissa Venla kuvasi etukäteen miettimiään asteittain vaikeutuvia esimerkkejä näin:

> *Venla: no se ensimmäinen esimerkki mikä varmasti tehään on niinku tavallaan kaikista heikoimmille. se on niinku niin yksinkertanen että siitä pitäis kaikkien niinku tavallaan ymmärtää se.*
> *Haastattelija: niin.*
> *Venla: ja sitte niinku vaikeutetaan sitä asiaa. (SR Venla)*

Aineistokatkelma 3
Mirjan 4. oppitunti esim.2

```
 1.   Jukka: hei ope vaikuttaako tuo miinus molempiin
 2.   suuntiin vai vaan tuohon jälkimmäiseen
 3.   Opettaja: tämä?
 4.   ((opettaja osoittaa laskua taululta))
 5.   Jukka: nii
 6.   Opettaja: se vaikuttaa aina jälkimmäiseen
 7.   Jukka: ookoo
 8.   Opettaja: eli kattokaa tarkkaan sieltä
 9.   esimerkistä eli miinus muuttaa aina merkit (.)eli
 10.  vähennetään sekä tämä kaks aa että tämä
 11.  kaheksikko
```

Aineistokatkelmassa 3 opettaja on etukäteen päättänyt ja kirjannut ylös uuteen aiheeseen liittyvät esimerkkilaskut. Ennen aineistokatkelman alkua opettaja on ohjeistanut oppilaita ottamaan kirjasta kyseiseen aiheen, eli kirjainlausekkeen vähennyslaskuun liittyvän esimerkkisivun esille. Taululle on heijastettuna laskuja, jotka tulee ratkaista käyttämällä hyväksi kirjan tietoja.

Kirjainlausekkeen yhteenlasku on oppilaille jo entuudestaan tuttu aihe, joten opettaja antaa oppilaiden miettiä vähennyslaskua kirjan esimerkin ja aikaisempien tietojen avulla itsenäisesti, ennen kuin alkaa käydä aiheen teoriaa ja esimerkkilaskujen ratkaisua läpi. Opettaja myös kehottaa oppilaita pohtimaan uutta aihetta ensin yhdessä. Aineistokatkelmassa tulee esiin, että oppilas on toiminut opettajan ohjeiden mukaan ja miettinyt laskun ratkaisua. Hän esittää opettajalle laskuun liittyvän kysymyksen: *hei ope vaikuttaako tuo miinus molempiin suuntiin vai vaan tuohon jälkimmäiseen* (rivit 1-2) Opettaja vastaa oppilaan kysymykseen (rivi 6) ja oppilas osoittaa ymmärtäneensä vastauksen (rivi 7). Samalla opettaja tulkitsee oppilaan kysymyksen niin, että on aika siirtää esimerkkilaskun laskeminen koko luokan yhteiseksi keskusteluksi: *eli kattokaa tarkaan sieltä esimerkeistä eli miinus muuttaa aina merkit (.)* (rivit 8-9).

5.1.2 Vaihtoehtoiset ajattelutavat

Opettajat toivat etukäteen päättämiensä esimerkkien aikana usein esiin vaihtoehtoisia ajattelutapoja samaan laskuun. Opettajat toivat esiin, että varsinkin matemaattisesti lahjakkaat oppilaat pystyivät yhdistelemään mielessään erilaisia tapoja ja hahmottamaan niiden takana olevaa laskukaavaa. Matematiikassa heikosti menestyvät oppilaat taas harjoittelivat usein yhden, opettajan suosittelеman ratkaisutavan.

Aineistokatkelma 4
Teemun 4. oppitunti esim. 2

```
 1.   Opettaja: mitä se vastalauseke (.) vastaluku tarkotti
 2.   sille mitä tehtiin sille etumerkille
 3.   Harri: muutettiin sitä se on miinus kolme äks kaks
 4.   plus äks miinus kaks
 5.   Opettaja: eli vastalauseke tarkottaa sitä että
 6.   vaihdetaan lausekkeen etumerkit päinvastaisiksi sitä
 7.   se yksinkertaisesti on (3) eli miten se lasketaan (.)
 8.   kaks vaihtoehtoa muodostaa se (2) mistä se saadaan
 9.   (3) Make tietää
 10.  Make: no se laitetaan miinus kolme äks toiseen plus
 11.  äks
 12.  Opettaja: joo ja miten laskutoimitukseen se merkataan
 13.  niin sama asia kerrotaan tämä lauseke miinus yhdellä
 14.  otetaan miinus yksi tämä lauseke (3)-
```

Aineistokatkelmassa 4 opettajan tarkoituksena on esitellä oppilaille kaksi tapaa muodostaa vastalauseke. Aineistokatkelma alkaa opettajan kysymyksellä: *mitä se vastalauseke (.) vastaluku tarkotti* (rivi 1) heti perään hän jatkaa lisäämällä kysymykseensä vastausvihjeen: *mitä tehtiin sille etumerkille* (rivi 2). Harri vastaa kysymykseen tekemällä taululla olevasta esimerkkilaskusta vastalausekkeen: *muutettiin sitä se on miinus kolme äks kaks plus miinus äks miinus kaks* (rivit 3-4). Harrin vastaus on oikein kyseisen laskun kohdalla, mutta opettaja hakee yleisempää määritelmää sille, miten vastalauseke muodostetaan: *eli vastalauseke tarkottaa sitä että vaihdetaan lausekkeen etumerkit päinvastaisiksi sitä se yksinkertaisesti on (3)* - (rivit 5-7). Tämän jälkeen opettaja tuo esiin että vastalausekkeen muodostamiseksi on kaks vaihtoehtoa: *eli miten se lasketaan (.) kaks vaihtoehtoa muodostaa se (2) mistä se saadaan* – (rivit 7-8). Samalla Make viittaa ja opettaja antaa hänelle vastausvuoron (rivit 10-11). Kuten Harri aiemmin, Makekin muodostaa taululla olevasta esimerkkilaskusta vastalausekkeen (rivi 10). Opettaja aloittaa seuraavan vuoronsa myötäilemällä: *joo* ja jatkaa tähän perään: *ja miten laskutoimitukseen se merkataan niin sama asia kerrotaan tämä lauseke miinus yhdellä* (rivit 12-13). Tämän jälkeen hän vahvistaa sanomaansa toistamalla sen: *otetaan miinus yksi kertaa tämä lauseke (3)* – (rivi 14). Aineistokatkelman jälkeen opettaja kirjoittaa ensimmäisen tavan taululle ja selittää sen samalla oppilaille. Tämän jälkeen hän kirjoittaa ensimmäisen tavan viereen toisen tavan muodostaa vastalauseke ja selittää sen oppilaille.

Aineistokatkelma 5
Pekan 1. oppitunti esim. 4

1. Opettaja: miten lasketaan tommosen neliön pinta-ala?
2. Timo (.)
3. Timo: neljä kertaa neljä
4. Opettaja: neljä kertaa neljä (.)
5. (-LYHENNETTY-)
6. Opettaja: miten tämä voiaan laittaa toisella tavalla
7. (…) miten tää voiaan merkata toisella tavalla (…)
8. Elina?
9. Elina: neljä potenssiin kaks
10. Opettaja: neljä potenssiin kaks (.) elikkä <kuustois
11. ta>
12. Opp?: (--)
13. Opettaja: elikkä (.) matikassa käytetään useesti sem
14. mosia termejä kun jokun luvun neliö tai jonkun luvun
15. kuutio (.) niin se neliönimitys tulee nimenomaan täs
16. tä näin elikkä (.)
17. ((opettaja kirjoittaa samalla taululle kirjoittaa))
18. Opettaja: <luvun neliö (…)tarkoittaa (…)luvun korot
19. tamista(…) toiseen potenssiin tai potenssiin kaks>
20. (…)

Tässä esimerkissä opettaja selittää oppilaille potenssimerkintää ja eri tapoja sanoa se. Hän aloittaa esimerkin piirtämällä taululle neliön ja kysymällä oppilailta, kuinka sen pinta-ala lasketaan (rivi 1). Timo vastaa opettajan kysymykseen oikein, eli muodostaa pinta-alasta kertolaskun (rivi 3). Näin opettaja on saanut sidottua uuden opeteltavan asiaan oppilaille jo ennestään tuttuun aiheeseen, eli pinta-alan laskemiseen. Tästä opettaja lähtee johtamaan esimerkkiä eteenpäin, esittämällä oppilaille kysymyksen, kuinka sama asia voitaisiin merkitä eri tavalla (rivit 6-7). Elina tuottaa opettajan hakeman vastauksen, eli neljä potenssiin kaksi (rivi 9). Opettaja toistaa Elinan sanoman laskun ja kertoo samalla laskun vastuksen, ja osittaa näin Elinan vastauksen oikeaksi (rivit 10-11).

Tämän jälkeen opettaja sitoo äsken käsitellyt asiat uuteen harjoiteltavaan asiaan, eli potenssilaskuun ja kirjoittaa ne taululle oppilaiden näkyviin. Hän nimeää oppilaille uudet termit: *elikkä (.) matikassa käytetään useesti semmosia termejä kun jonkun luvun neliö tai jonkun luvun kuutio (.)* (rivit 13-15). Sitten opettaja selittää näiden termien merkityksen: *<luvun neliö (…)tarkoittaa (…)luvun korottamista (…) toiseen potenssiin tai potenssiin kaks> (…)* (rivit 18-20). Koko esimerkki rakentuu opettajan ja kahden oppilaan vuoropuhelusta. Opettaja johtaa keskustelua, pitää sen haluamassaan aiheessa ja antaa oppilaille puheenvuorot. Havainnollistavan kuvan ja esillä olevan tekstin avulla oppilaat pysyvät paremmin mukana esimerkin rakentumisessa.

5.2 Yhteisen keskustelun kautta rakentuvat esimerkit

Vaikka opettajan ja oppilaiden roolit luokkahuonekeskustelussa ovat usein epäsymmetriset, otti opettaja oppilaiden näkemyksiä huomioon esimerkkien rakentamisessa. Opettaja johdatteli esimerkkiä eteenpäin omien kysymystensä ja vastausvihjeidensä avulla. Välillä oppilaat keskustelivat ongelmalähtöisestä esimerkistä ensin keskenään ja sitten keskustelu siirrettiin koko luokan tasolle. Peräkylä (1998) tuo esiin, että institutionaalista keskustelua rakennetaan usein niin, että myös asiakkaan tieto ja ymmärrys saadaan keskustelun kautta käyttöön. Oppilaiden ajatusten, kysymysten ja kommenttien mukaan rakentuvien esimerkkien aikana opettaja ei usein erikseen jakanut oppilaille puheenvuoroja, vaan he saivat osallistua vapaasti keskusteluun: --*suurimmalle osalle se, että ne niinku keskustelee siitä asiasta tai saa kysyä ja saa kysyä kaverilta ja saa niinku sanallistaa sitä niin suurimman osan oppimista se helpottaa. Tai on ehkä niinku tie siihen oppimiseen. (Pirkko SR).*

5.2.1 Ongelmalähtöiset esimerkit

Ongelmalähtöisissä esimerkeissä lähdettiin liikkeelle opettajan esittämästä ongelmasta. Oppilaat pohtivat ongelmaa yhdessä keskustellen ja omia näkökulmiaan ja ratkaisuehdotuksiaan esiin tuoden. Keskustelun jälkeen pohditusta aiheesta koottiin opettajan johdolla yhteinen ratkaisu. Koko tämä ongelman käsittely- ja ratkaisuprosessi toimi esimerkkinä uuteen käsiteltävään asiaan. Kun tavoitteena oli, että oppilaat osallistuivat itse esimerkin tuottamiseen, saattoi opettaja antaa heille apuvälineeksi erilaisia havainnollistamisvälineitä ja fyysisiä materiaaleja.

Aineistokatkelma 6
Pirkon 1. oppitunti esim.3

```
1.  Opettaja: mmm (.) tulee tälläne pieni pino (.) lappuja
2.  joissa on potensseja ja nämä pitäis ryhmitellä keksiä
3.  joku sääntö jonka mukaan ryhmittelette nämä (.)
4.  PORUKASSA siinä o teillä neljän hengen porukka (.)
5.  jonku säännön mukaan laitatte nämä kahteen tai
6.  useampaan ryhmään nämä laput (2) mietitte mikä se
7.  sääntö vois olla (.)
```

Aineistokatkelma 7
Pirkon 2. oppitunti esim.2

```
1.   Opettaja: ensin laski suurin osa kuution tilavuuden
2.   miten (2) Mira
3.   Mira: kolme palikkaa kertaa kolme palikkaa kertaa
4.   kolme palikkaa
5.   Opettaja: laita potensseiks sen
6.   Mira: kolme potenssiin [kolme]
7.   Opettaja: [kolme] potenssiin kolme (.)
```

Molemmat aineistokatkelmat liittyvät tilanteeseen, jossa opettaja esittää oppilaille matemaattisen ongelman, jonka ratkaisemiseksi hän ei anna valmiita toimintamalleja, vaan oppilaat pääsevät itse kokeilemaan erilaisia ideoita ja lähestymistapoja. Ensimmäisessä tilanteessa oppilaiden tulee ryhmitellä erilaisia potenssilappuja itse keksimiensä sääntöjen ja perustelujen mukaan. Opettaja korostaa erityisesti, että tätä ongelmaa tulee miettiä ryhmässä: *PORUKASSA (.) siinä o teillä neljän hengen porukka (.)* (rivi 4). Opettaja haluaa oppilaiden itse ideoivan ja perustelevan ongelmanratkaisua, joten hän ei anna heille valmiita toimintamalleja: *jonku säännön mukaan laitatte nämä kahteen tai useampaan ryhmään nämä laput (3) mietitte mikö se sääntö vois olla (.)* (rivit 5-7).

Toisessa aineistokatkelmassa opettaja on esittänyt oppilaille tunnin alussa matemaattisen ongelman, jonka tarkoituksena on havainnollistaa oppilaille potenssilaskun yhteyttä neliön pinta-alan ja kuution tilavuuden laskemiseen ja opettaja jakaa oppilasryhmille neliöt ja kuutiot. Oppilaat istuvat valmiiksi pienissä ryhmissä ja tarkoituksena on pohtia esitettyä tehtävää yhdessä oman ryhmän kanssa. Oppilaiden keskustellessa tehtävästä opettaja kiertää ryhmien luona ja esittää omia kommenttejaan, kyselee oppilailta perusteluja heidän ajatuksilleen ja rohkaisee heitä jatkamaan tehtävässä tiettyyn suuntaan. Kun oppilaat ovat pohtineet tehtävää keskenään, opettaja aloittaa yhteisen keskustelun ja alkaa koota yhteen äsken käsiteltyä asiaa.

Koska opettaja kierteli tehtävän miettimisen aikana oppilasryhmien luona, hänellä on kuva siitä, kuinka suurin osa oppilaita oli tehtävää lähtenyt ratkaisemaan. Hän tuo tämän ajattelutavan kaikkien oppilaiden tietoon esittämällä sen kysymyksen muodossa: *”ensin laski suurin osa kuution tilavuuden miten”* (rivi 1). Opettaja nimeää Miran vastaamaan esittämäänsä kysymykseen ja Miran vastauksesta saadaan selville, että kuution tilavuutta oli lähdetty hahmottamaan siihen sisältyvien palikoiden lukumäärän avulla (rivi 3). Opettaja johdattelee keskustelua eteenpäin esittämällä Miralle kehotuksen: *”laita potensseiks sen”* (rivi 4). Mira muotoilee potenssilaskun opettajan haluamalla tavalla. Opettaja osoittaa vastauksen oikeaksi toistamalla sen (rivi 7) ja siirtyy sen jälkeen laskussa askeleen eteenpäin.

5.2.2 Oppilaiden erilaiset ajattelutavat

Eräs tapa tuoda esiin erilaisia ajattelutapoja samaan aiheeseen, oli sellainen, että opettaja kehotti oppilaita ensin miettimään käsiteltävää ongelmaa itsekseen ja kirjaamaan ajatteluprosessiaan ylös: --*että niinku semmosta ajattelemista ja sitä, että osais prosessoida se ja pystyis siinä tilanteessa, että jos ei tiiä mitä se kaks potenssiin miinus kaks on että ees yrittää lähtee miettimään. (Pirkko SR).* Tämän jälkeen vaihtoehtoisa tapoja ajatella ongelmaa käytiin opettajan johdolla läpi. Uusi asia ja sitä käsittelevä esimerkki saatiin siis tuotua esiin oppilaiden erilaisista näkökulmista käsin. Watsonin ja Geestin (2005) tutkimuksessa parhaisiin opetustuloksiin yltäneet opettajat rohkaisivat oppilaita käytäntöön, kokeiluun ja arviointiin matemaattisten ongelmien kohdalla.

Aineistokatkelma 8
Pirkon 2. oppitunti esim.1

```
 1.  Opettaja: mitä se Juuso on muistanu niistä
 2.  samankantaisten potenssien jakolaskusta (.)
 3.  Opp?: se on miinusmerkki
 4.  Opettaja: se on miinusmerkki (.) se on muistanu että
 5.  siellähän voi supistaa eikö niin (.) kun siellä on
 6.  niitä kakkosia ylhäällä ja kakkosia alhaalla niin
 7.  sitte ne voi supistaa neljä kakkosta pois ja siitä
 8.  tuli se että samankantaisten potenssien jakolaskussa
 9.  ne eksponentit voi vähentää (.)no sitte jäähään
10.  pohtimaan mitä se neljä miinus neljä on
11.  Juuso: nolla
12.  Opettaja: nolla eli täältä tulis kaks potenssiin
13.  nolla mitä täältä jälkimmäisestä tulis
14.  Juuso: nolla potens[siin]
15.  Opettaja: [nolla] potenssiin nolla eikö niin (.)
```

Ensin opettaja kertoo koko luokalle Juuson tavan lähestyä esimerkkilaskua. Tämän jälkeen hän esittelee Mikon tavan ajatella samaa laskua.

Aineistokatkelma 9
Pirkon 2.oppitunti esim. 2

```
1.   Opettaja: mites Mikko on lähteny miettimään (2)
2.   samalla tavalla ku moni teistä muistakin elikkä niin
3.   Mika paljonko täältä tuli
4.   ((opettaja näyttää Mikon vihkoa))
5.   Opettaja: kaks potenssiin neljä on kuustoista ja kaks
6.   potenssiin neljä on kuustoista (.) ja kuustoista
7.   jaettuna kuuellatoista on yks eikö niin (.) no
8.   kumpiko nyt on oikeassa (.) Juuso joka on sitä mieltä
9.   että sieltä tuli kaks potenssiin nolla vai Mikko joka
10.  on sitä mieltä että sieltä tuli yks
```

Oppilaat ovat ensin ratkaisseet opettajan esittämää ongelmaa itsenäisesti ja kirjanneet ajatteluprosessiaan vihkoihinsa. Tämän jälkeen opettaja on ottanut Juuson ja Mikon vihkot ja lukee heidän muistiinpanojaan koko luokalle. Aineistokatkelma 8 alkaa opettajan puheenvuorolla: *mitä se Juuso on muistanu niistä samankantaisten potenssien jakolaskuista (.)* (rivit 1-2). Aineistokatkelman 9 alku on hyvin samanlainen, siinä opettaja lisäksi laajentaa Mikon ajatteluprosessia koko luokan tasolle: *mites Mikko on lähteny miettimään (2) samalla tavalla kun moni teistä muistaki* (rivit 1-2).

Samalla kun opettaja käy poikien muistiinpanoja läpi, hän tuo esiin laskusääntöjä ja nimeää käsitteitä, aineistokatkelma 8: - *se on muistanu että siellähän voi supistaa eikö niin (.) kun siellä on niitä kakkosia ylhäällä ja kakkosia alhaalla niin sitte ne voi supistaa neljä kakkosta pois ja siitä tuli se että samankantaisten potenssien jakolaskussa ne eksponentit voi vähentää* - (rivit 4-9). Pojat ovat laskeneet samaa laskua eri tavoin ja opettaja haluaa tuoda tämän esiin aineistokatkelmassa 9: *kumpiko nyt on oikeessa (.) Juuso joka on sitä mieltä että sieltä tuli kaks potenssiin nolla vai Mikko joka on sitä mieltä että sieltä tuli yks* (rivit 8-10).

5.2.3 Opettajan esittämät kysymykset

Kysymykset ovat yksi opettajan tärkeimmistä kielellisistä keinoista toteuttaa institutionaalista tehtävää, eli opettamista (Kleemola, 2007). Monet aineistossa rakennetut esimerkit muodostuivatkin opettajan esittämien kysymysten ja oppilaiden vastausten kautta. Oppilaan vastatessa opettajan esittämään kysymykseen opettaja voi osoittaa vastauksen oikeaksi toistamalla sen. Hän saattaa myös toistaa osan vastauksesta, mutta antaa oppilaalle mahdollisuuden kehitellä sitä vielä eteenpäin. Jos oppilaan vastaus on väärä, tyypillinen tapa opettajalta on korjata sitä epäsuorasti, muuttamalla esimerkiksi jotain vääriä sanoja vastauksesta tai kysymällä ovatko muut oppilaat samaa mieltä. (Robert & Rogalski, 2005.)

Aineistokatkelma 10
Maijan 3. oppitunti Esim.1

```
1.   Opettaja: eli miten tämän voisi muulla tavalla ki
2.   joittaa (…)
3.   Tiina
4.   Tiina: (--)
5.   Opettaja: mutku se on se eksponentti kaks
6.   Tiina: no (.) kolme aa (--)
7.   Opettaja: no (.) siis miten tämän vois muulla taval
8.   la kirjottaa (…) no miten Tiia kirjottais
9.   Tiia: kolme kertaa aa
10.  Opettaja: riittääkö se (.) mitä Santtu laittais lisää
11.  Santtu: kolme kertaa aa potenssiin kaks
12.  Opettaja: nii mutku sehä on nyt kirjotettu sinne
13.  Santtu: mutta siis tuon aan yläpuolelle (…) siis sil
```

14. lee kolme kertaa aa potenssiin kaks
15. Opettaja: Tota [(-) taustahälyä]
16. Jukka: [kolme kertaa kolme kertaa kolme]
17. Opettaja: Se ei oo sitten enää sama asia
18. Jukka: kolme kertaa kolme kertaa kolme
19. Opettaja: MIKÄ TÄSsä on kantaluku
20. Opp?: kolme
21. Opp?: aa
22. Opp?: *kolme aa*
23. Santtu: kolme kertaa aa
24. Opp?: kolme aa
25. Opetaja: kantaluku on se kolme kertaa aa ja kun ekspo
26. nentti on kaks niin se tarkottaa samaa kuin (…) no
27. (.) kolme aa kertaa kolme aa (…)

Aineistokatkelma 11
Orvokin 5. oppitunti esim. 4

1. Opettaja: mitenkä se meni se sääntö mitenkä saadaan
2. ykkösestä ykkönen kakkosesta kolmonen ja kolmosesta
3. viitonen (.) Tero?
4. Tero: lisätään kaks
5. Opettaja: äää mutta se ei nyt
6. Opp?: kaks kertaa miinus yks
7. Opettaja: mitenkä se tulis? kaks kertaa (…)
8. Tero: en mää tiiä
9. Opp?: miinus yks
10. Opettaja: ei sä ihan oikein laskit sen

Ensimmäisessä aineistokatkelmassa puretaan potenssilaskua kertolaskuksi. Se alkaa opettajan kysymyksellä: *eli miten tän voisi muulla tavalla kirjoitta* (rivi 1). Opettaja nimeää Tiinan vastamaan (rivi 2). Tiinan vastausta ei kuulu nauhalla, mutta se ei ole oikea ja opettaja osoittaa sen empimällä: *mutku se on eksponenti kaks* (rivi 5). Tiina yrittää vastata uudelleen, mutta vastausehdotus on edelleen väärin ja opettaja osoittaa sen toistamalla alunperin esittämänsä kysymyksen: *siis miten tän vois muulla tavalla kirjottaa* (rivit 7-8). Tämän jälkeen opettaja nimeää Tiian vastamaan (rivi 8). Tiiankaan vastaus ei ole täysin oikein, minkä opettaja tuo esiin, sanomalla: *riittääkö se (.) mitäs Santtu laittais lisää* (rivi 10). Myös Santun vastaus on virheellinen ja hän yrittää selittää ajatteluaan opettajalle (rivit 13-14).

Samalla kun opettaja miettii Santun selitystä, kun Jukka ottaa puheenvuoron ja ehdottaa vastaukseksi: *kolme kertaa kolme kertaa kolme* (rivi 16). Luokkaan on syntynyt keskustelun aikana hälyä, eikä opettaja välttämättä kuule Jukan vastausehdotusta. Opettaja vastaa Santulle, ettei hänen ehdottamansa vastaus käy tähän laskuun, (rivi 17) ja heti sen jälkeen Jukka toistaa uudelleen äskeisen vastausehdotuksensa (rivi 18).

Vastausta on haettu jo jonkin aikaa ja opettaja antaa vastausta helpottavan vihjeen: *MIKÄ TÄSsä on kantaluku* (rivi 19). Vihje sisältää oletuksen siitä että oppilaat muistavat käsitteen kantaluku merkityksen. Oppilaat heittelevät vastausvaihtoehtoja ja Santtu sanoo ääneen oikean vastauksen: *kolme kertaa aa* (rivi 23). Opettaja toistaa Santun oikean vastauksen (rivi 25) ja jatkaa ratkaisun johdattelemista eteenpäin: *ja kun eksponentti on kaks se tarkottaa samaa kuin (…)* (rivit 25-26). Samalla kun opettaja johdattelee ja avustaa oikean vastauksen löytymisessä, käyttää hän puheessaan mukana matemaattisia termejä. Opettaja pitää puheessaan tauon ja odottaa oppilailta vastauksia. Kun niitä ei kuulu, hän vastaa itse omaan kysymykseensä: *no (.) kolme aa kertaa kolme aa.* (rivit 26-27).

Toisessa aineistokatkelmassa on kyseessä samantyyppinen tilanne, eli esimerkkiin liittyvää keskustelua on käyty jo pidemmän aikaa, mutta opettaja ei anna oppilaille valmiita vastauksia, vaan esittää kysymyksiä joiden avulla oppilaat pysyvät mukana keskustelussa ja esimerkin ratkaisemisessa. Kysymyksellään: *mitenkä se meni se sääntö mitenkä saadaan ykkösestä ykkönen, kakkosesta kolmonen ja kolmosesta viitonen?* (rivit 1-3), opettaja johtaa keskustelua esimerkkilaskun ratkaisun suuntaan. Tero viittaa ja opettaja nimeää hänet vastaamaan (rivi 3). Teron tuottaa preferoimattoman, eli ei-toivotunlaisen vastauksen (ks. Kleemola, 2007). Jos oppilaan vastaus on väärä, tyypillinen tapa opettajalta on korjata sitä epäsuorasti (Robert & Rogalski, 2005), tässä opettaja tuo vastauksen sopimattomuuden esiin empimällä: *äää*. Opettaja osoittaa vastauksen virheellisyyttä myös jättämällä lauseensa kesken: *mutta ei se nyt* (rivi 5).

Seuraava oppilas kertoo oman vastausehdotuksensa: *kaks kertaa miinus yks* (rivi 6). Oppilaan vastaus ei ole kokonaan oikein ja opettaja osoittaa sen jatkamalla kyselyä: *mitenkä se tulis?* (rivi 7). Kuitenkin osa oppilaan vastauksesta on oikein ja opettaja osoittaa sen toistamalla oikean osan vastausta omassa vuorossaan: *kaks kertaa…* (rivi 7). Tero, joka on jo kerran vastannut väärin, alkaa tuskastua laskuun ja toteaa: *”en mää* *tiiä.”* (rivi 8) Lähes samaan aikaan toinen oppilas ehdottaa uudelleen jo kerran opettajan hylkäämää vastausta miinus yksi. Opettaja jättää Teron kommentin huomioimatta ja rohkaisee toista oppilasta väärästä vastauksesta huolimatta jatkamaan vielä esimerkin ratkaisemista: *ei. sä ihan oikein laskit sen.* (rivi 10). Oppilaan vastaus ei siis edelleenkään ole täysin oikea. Heti perään opettaja kuitenkin lisää, että väärästä vastauksesta huolimatta oppilas on laskenut laskun oikein.

5.2.4 Arkielämän esimerkit

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) vuosiluokkien 6-9 tavoitteissa todetaan, että oppilas oppii näkemään matematiikan ja reaalimaailman välisiä yhteyksiä. Opettaja saattoi ottaa pohdittavaan laskuun mukaan arkielämän tietoja ja kokemuksia: *yleensäkin yrittää sitten jos vaan mahollista niin keksiä aina jonkun (…) niin kun sekä tässä matikassa että fysiikassakin jonkun semmosen esimerkin mikä liittys niin kun (.) vois tulla oppilaille jossakin joskus vastaan tämmösissä arkipäivän tilanteissa (SR Pekka)*

Opettaja toi reflektointitilanteessa esiin, ettei hänen ollut aina helppo päättää käyttäisikö esimerkeissä matemaattisia termejä vai arkisia käsitteitä: --*pitäiskö käyttää osoittajaa ja nimittäjää voiko käyttää yläpuoli ja alapuoli (.) mutta sehän onki vähän semmonen että sitä voi ajatella kahelta kantilta (.) että ajatella niinku matemaatikko että tietenki pitäis käyttää niitä oikeita käsitteitä -- (SR Pirkko).* Mutta varsinkin heikommin matematiikassa suoriutuville oppilaille oli helpompaa ymmärtää asia arkikäsitteillä: -- *mutta toisaalta voi ajatella niin että että ajatella että se oppiminen on se ensimmäinen asia ja silloin yläpuoli ja alapuoli esimerkiksi on niinku voi olla oppilaalle tosi paljon helpompi ja päästä kiinni siihen (Pirkko SR)*

Aineistokatkelma 16
Pekan 1. oppitunti esim. 2

```
1.   Opettaja: elikkä (…) voitas semmonen esimerkki vaikka
2.   ottaa että jos meillä on vaikka neljä (…) tässä on
3.   neljä eturivissä neljä tyttöä lähössä illalla jon
4.   nekin diskoilemaan
5.   Akusti: JOOo
6.   Opettaja: ne miettiivät että mitä mitä vaatetta ne
7.   laittaa päälle (…) ja nyt sitte niillä kaikilla on
```

8. vain kolme paitaa joista se voi ne voivat valita
9. sen(…) kolme vaihtoehtoo mistä ne valihtee kuinka
10. monta paitaa niillä on yhteensä? näillä neljällä ty
11. töllä jos niillä jokasella on kolme paitaa

Aineistokatkelmassa 16 opettaja johdattelee oppilaita potenssilaskuun kertolaskun kautta. Hän viittaa neljään luokan eturivissä istuvaan tyttöön ja innostaa näin oppilaita miettimään laskua oman kokemuksen kautta: *elikkä (…) voitas semmonen esimerkki vaikka ottaa että jos meillä on vaikka neljä (…) tässä on neljä eturivissä neljä tyttöä lähössä illalla jonnekin diskoilemaan* (rivit 1-4). Oppilas innostuu opettajan esittämästä esimerkistä: *JOOo* (rivi 5). Opettaja esittää arkielämään sidotun matemaattisen ongelman: *ne miettiivät että mitä mitä vaatetta ne laittaa päälle (…) ja nyt sitte niillä kaikilla on vain kolme paitaa joista se voi ne voivat valita sen(…) kolme vaihtoehtoo mistä ne valihtee kuinka monta paitaa niillä on yhteensä?* (rivit 6-10).

Esimerkki johtaa pitkään ja pohdiskelevaan keskustellun opettajan ja oppilaiden välillä. Oppilaat miettivät erilaisia vaihtoehtoja muodostaa opettajan antamista tiedoista lasku. Laskun muodostus ei ensin onnistu, mutta oppilaat heittelevät vääristä vastauksista huolimatta uusia yrityksiä opettajalle. Tällainen oppilaita itseään lähellä oleva esimerkki näytti rohkaisevan oppilaita keskusteluun ja matemaattiseen pohdiskeluun.

Aineistokatkelma 17
Mirjan 3. oppitunti esim. 1

1. Tero: miten siitä tulee plus kaheksan?
2. Opettaja: miinus kaks ja plus kymmenen (.)
3. ((osoittaa taululta))
4. Tero: mut tekö se isompi luku oo eka?
5. Opettaja: sulla on niinku kaks euroo velkaa ja kymme
6. nen euro rahhaa

Aineistokatkelma 18
Pirkon 1. oppitunti esim. 4

1. Opettaja: nii sielläki olis kantaluku positiivinen(.)
2. no kumpi ois tässä ny sitte kantaluku negatiivinen
3. vai positiivinen
4. Hilda: varmaa negatiivine ku siinä otetaan alle yhen

```
5.   kerran ja (.)
6.   Opettaja: tulleeks siitä jos sinä euron jaat jaat
7.   vaikka (.) kahteen ossaan niin tuleeko siitä jottain
8.   negatiivista
9.   Hilda: £ei£
10.  Opettaja: ei mikä o onko niiden kantaluku
11.  positiivinen vai negatiivinen
12.  Jouni: posi[tii]
13.  Opettaja: [posi]tiivinen joo (.)
```

Molemmissa aineistokatkelmassa oppilaan kysymys tai virheellinen ajattelutapa johtaa opettajan käyttämään arkielämän esimerkkiä selventämään laskun laskemista. Ensimmäisessä aineistokatkelmassa opettaja havainnollistaa negatiivista lukua vertaamalla sitä siihen, että oppilas olisi jollekin velkaa saman verran rahaa. Positiivista lukua opettaja taas vertaa siihen, että oppilaalla olisi tämän verran rahaa itsellään.

Aineistokatkelman 17 esimerkki lähtee liikkeelle Teron esittämästä hakukysymyksestä. Taululla on yhdessä käsitelty laskua ja yhden vaiheen vastaus on kahdeksan. Tero ei ymmärrä mistä tämä vastaus on laskussa saatu, ja kysyy opettajalta: *miten siitä tulee plus kaheksan* (rivi 1). Opettaja näyttää taululta kohdan, jonka perusteella laskun vastaus on muodostettu. Tero jatkaa kuitenkin kyselyä: *mut eikö se isompi luku oo eka* (rivi 4). Opettaja ei vastaa suoraan oppilaan esittämään kysymykseen, vaan siirtää keskustelun käytännön elämän esimerkkiin, joka havainnollistaa laskua oppilaille: *sulla on niinku kaks euroo velkaa ja kymmenen euroo rahhaa* (rivit 5-6).

Aineistokatkelmassa 18 opettaja selittää oppilaalle sitä, että vaikka alle euronkin rahasumma jaetaan pienempiin osiin, ei lopputulos silti ole negatiivinen. Kyseessä tilanne, jossa oppilaat ovat miettineet kantalukuihin liittyviä potenssilaskuja pienessä ryhmässä keskustellen. Opettaja tulee ryhmän luo ja alkaa kysellä heiltä perusteluja omalle pohdinnalleen. Aineistokatkelman aluksi opettaja esittää kysymyksen: *no kumpi ois tässä ny sitte kantaluku negatiivinen vai positiivinen* (rivit 2-3). Hilda vastaa hieman empien ja selittää samalla ajatteluaan: *varmaa negatiivine ku siinä otetaan alle yhen kerran ja (.)* (rivit 4-5).

Huomattuaan oppilaan virheellisen ajattelutavan, opettaja tekee aiheesta arkielämän taitoihin liittyvän kysymyksen: *tulleeks siitä jos sinä euron jaat jaat vaikka (.) kahteen ossaan niin tuleeko siitä jottain negatiivista* (rivit 6-8). Hilda vastaa opettajan kysymykseen*: £ei£* (rivi 9)Tämän jälkeen opettaja esittää ryhmällä uudelleen alkuperäisen kysymyksen: *mikä o onko niiden kantaluku positiivinen vai negatiivinen* (rivit 10-11). Johon Jouni tuottaa oikean vastauksen osittain päällekkäin opettajan puheenvuoron kanssa: posi[tii] (rivi 12).

Molemmissa aineistokatkelmissa 17 ja 18 opettaja siirtää ajattelun oppilaan omaan kokemusmaailmaan ja konkreettisemmin käsiteltäviin asioihin kuin kyseessä olevissa laskuissa. Esimerkit rakentuvat oppilaiden ja opettajan vuoropuheluna kyseisissä tilanteissa. Tämä edellyttää sitä, että opettaja kuuntelee oppilaita ja heidän esittämiään kysymyksiä ja lähtee pohtimaan niitä yhdessä oppilaiden kanssa.

5.3 Oppilaiden ajatusten mukaan rakentuvat esimerkit

Oppilaiden ajatusten mukaan rakentuneet esimerkit olivat sellaisia joita opettaja ei ollut etukäteen miettinyt, vaan oppilaan esittämä kysymys tai kommentti aloitti esimerkin rakentumisen: -- *pyrin siis koko ajan kuuntelemaan sitä, mitä oppilailta tullee, koska sehän se sehän on ratkasevaa missä ne oppilaiden ajatukset on eikä se missä miun ajatukset on. (Pirkko SR).*

Kun tunnelma oppitunneilla oli rento ja keskustelunomainen, oppilaat uskalsivat tuoda esiin omia näkemyksiään ja keskeneräisiä ajatuksiaan. Opettajan lisäksi myös toiset oppilaat saattoivat tarttua näihin ajatuksiin ja kehitellä vastausta yhdessä eteenpäin. Tällöin liikuttiin konseptuaalisen tiedon tasolla ja yhdisteltiin erilaisia ajatuksia ja näkökulmia käsissä olevan tehtävän ratkaisemiseksi ja samaa teemaa käsiteltiin pidempään ja useammasta näkökulmasta: --*että jos oppilas ees jollain tavalla pystyis ymmärtämään sen miks se asia on niinku se on niin, niin silloin se vois sen niinku tai mie nään sen niin että silloin se oppii sen oikeesti. (Pirkko SR).*

5.3.1 Oppilaan virheellinen ajattelutapa

Tyypillinen tilanne, jossa esimerkki alkoi rakentua oppilaan aloitteesta, oli oppilaan virheellinen ajattelutapa kyseessä olevan matemaattisen ongelman kohdalla.

Aineistokatkelma 14
Teemun 2. oppitunti esim. 1

```
1.  Riina: tässä ei oo mitään vaikeeta (.) kakskytkaks
```

```
2.  miinus
3.  Kiia: [neljä]
4.  Riina: [neljä miinus yks (--)]
5.  Kiia: [kakskytkaks miinus]
6.  Riina: [nelkytyks nelkytyks aa (--)]
7.  Opettaja: mikä laskutoimitusta se tarkoittaa jos on
8.  kaksi äks (.) mikä laskutoimitus siinä on (.)
9.  Opp?: tuo ei tarkotakkaan kertomerkkiä
10. Opettaja: Alma
11. Alma: kaks kertaa äks
```

Aineistokatkelma 15
Pekan 2. oppitunti esim. 1

```
1.  Opettaja: elikkä siis aa on tässä viis ja bee on kol
2.  me (.) niin tässäkin nyt kun mietitään niin (.) tämä
3.  muistat mitä täällä oli?
4.  ((osoittaa ab –merkintää taululta)) (.)
5.  mitä mikä täällä on välissä vaikka sitä ei tässä
6.  näykkään (.) kahen kirjaimen välistä pysty jotakin
7.  jättämään pois (.) teemu (.)
8.  Teemu: kertomerkin
9.  Pekka: kertomerkki (.) elikkä se ei oo siis viiskyt
10. kolme vaan viis kertaa kolme
```

Molemmissa aineistokatkelmissa 14 ja 15 oppilaiden ajattelussa on samantyylinen virhe, eli he eivät muista kahden termin välissä olevaa piilokertomerkkiä. Teemun tunnilla opettaja on kirjoittanut taululle esimerkkilaskun, jota oppilaat lähtevät ratkaisemaan. Riina toteaa heti aineistokatkelman aluksi laskun olevan helppo (rivi 1) ja lähtee miettimään sitä ääneen. Ääneen pohtimisen etuna on se, että opettaja pääsee heti kiinni Riinan virheelliseen ajatteluun ja korjaa sitä esittämällä koko luokalle kysymyksen: *mitä laskutoimitusta se tarkottaa jos on kaks äks* (rivit 7-8). Alma vastaa opettajan kysymykseen oikein (rivi 11) ja samalla koko luokka saa muistutuksen tai varmennuksen siihen, että kyseessä on kertolasku.

Pekan tunnilla sama virheellinen ajattelutapa tulee esiin kotitehtävien tarkistuksen aikana. Oppilaat ovat laskeneet kotitehtävät taululle ja niitä käydään yhdessä läpi, kun opettaja huomaa virheen oppilaan ajattelutavassa. Opettaja osoittaa virheen aiheuttavaa kohtaa taululta ja esittää koko luokalle kysymyksen *mikä täällä on välissä vaikka sitä ei tässä näykkään* (rivit 5-6). Opettaja vielä johdattelee oppilaita oikeaan vastaukseen vastausvihjeiden avulla: *kahen kirjaimen välistä pysty jotakin jättämään pois* (rivi 6-7). Teemu vastaa opettajan kysymykseen oikein (rivi 8) ja opettaja vielä toistaa Teemun vastauksen. Tämän jälkeen opettaja selventää mitä se kyseisen laskun kohdalla tarkoittaa ja korjaa oppilaan väärin ratkaiseman vastauksen taululle (rivit 9-10).

5.3.2 Oppilaiden perustelut ja omat esimerkit

Yhtenä keinona matemaattisten ongelmien ratkaisussa opettajat käyttivät sitä, että pyysivät oppilaita itse selittämään laskua muille luokan oppilaille tai kertomaan käsiteltävää aihetta koskevan esimerkin. Watsonin ja Geestin (2005) toteuttamassa projektissa heikosti matematiikassa suoriutuvien oppilaiden matemaattista ajattelua tuki se, että heitä ohjattiin keksimään omia matemaattisia esimerkkejä ja esittämään hypoteeseja tulevista laskuista. Samalla kun oppilas kertoi käsittelevän esimerkin ja selitti omaa ajatteluaan ääneen muulle luokalle, sai opettaja kuvaa siitä, kuinka hyvin aihe oli oppilaalla hallussa. Oppilas osasi myös luultavasti kertoa sellaisen esimerkin ja käyttää sellaista kieltä, että muut luokan oppilaat ymmärsivät häntä.

Haapasalon (1998) mukaan on tärkeää, että oppilaat uskovat omiin matemaattisiin kykyihinsä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004) vuosiluokkien 6-9 tavoitteissa todetaan, että ”oppilas oppii ilmaisemaan ajatuksensa yksiselitteisesti ja perustelemaan toimintaansa ja päätelmiään”, sekä ”esittämään kysymyksiä ja päätelmiä havaintojen perusteella”. Ideoinnin, arvioinnin ja päättelyjen sekä perustelujen esittämisen myötä oppilaat kypsyvät matemaattisten ongelmien ratkaisijoiksi ja oppivat ilmaisemaan ajatuksensa matemaattisesti (Haapasalo, 1998).

Aineistokatkelma 12
Pekan 2. oppitunti esim.2

1. Teemu: eiks toi neljä potenssiin kolme kuulunu myös
2. Pekka: neljä potenssiin kolme
3. Teemu: nii
4. Pekka: ai siihen samaan ryhmään kun nämä muut?
5. Teemu: joo
6. Pekka: millä millä perusteella (.) HEI sanopas ilpo
7. (.) ilpo sano millä perusteella sinä laitoit nämä
8. samaan ryhmään nää kaks potenssiin vitonen kaks
9. potenssiin äks ja kaks potenssiin yheksän (.)
10. Ilpo: niissä on sama kantaluku

```
11. Pekka: niissä on sama kantaluku elikkä kakkonen on
12. kaikissa (…)
```

Esimerkkitilanne liittyy käsiteltävään harjoitukseen, jossa oppilaiden tehtävänä oli luokitella potenssimerkintöjä erilaisiin ryhmiin. Oppilaat miettivät luokitteluja ensin itsenäisesti ja nyt niitä on alettu käydä läpi opettajan johdolla. Ensimmäinen ryhmä on muodostettu ja Teemu esittää siihen liittyvän kysymyksen: *eiks toi neljä potenssiin kolme kuulunu myös* (rivi 1). Opettaja toistaa Teemun sanoman potenssin ääneen (rivi 2) ikään kuin kysyäkseen puhuvatko he samasta asiasta. Saatuaan Teemulta varmistuksen (rivi 3), opettaja varmistaa vielä uudelleen onko ymmärtänyt Teemun kysymyksen oikein: *ai siihen samaan ryhmään kun nämä muut?* (rivi 4).

Opettajan toistoista ja varmistuksista voi päätellä, ettei Teemun ehdotus tämän potenssin kuulumisesta samaan ryhmään ole mennyt oikein. Opettaja ei kuitenkaan suoraan tyrmää Teemun ehdotusta, vaan mietittyään asiaa hetken: *millä millä perusteella (.)* (rivi 6) siirtää vuoron suoran kysymyksen avulla Ilpolle, joka on äsken muodostanut keskustelun kohteena olevan potenssiryhmän: *HEI sanoppas Ilpo(.) Ilpo sano millä perusteella sinä laitoit nämä samaan ryhmään nämä kaks potenssiin vitonen kaks potenssiin äks ja kaks potenssiin yheksän (.)* (rivit 6-9). Kysymyksen lisäksi opettaja antaa vuorossaan oppilaille vastausvihjeen toistamalla kaikki samaan ryhmään kuuluvat potenssit. Ilpo vastaa opettajan esittämään kysymykseen: *niissä on sama kantaluku* (rivi 10). Opettaja hyväksyy Ilpon vastauksen toistamalla sen ja nimeämällä kantaluvun: *niissä on sama kantaluku elikkä kakkonen on kaikissa (…)* (rivit 11-12).

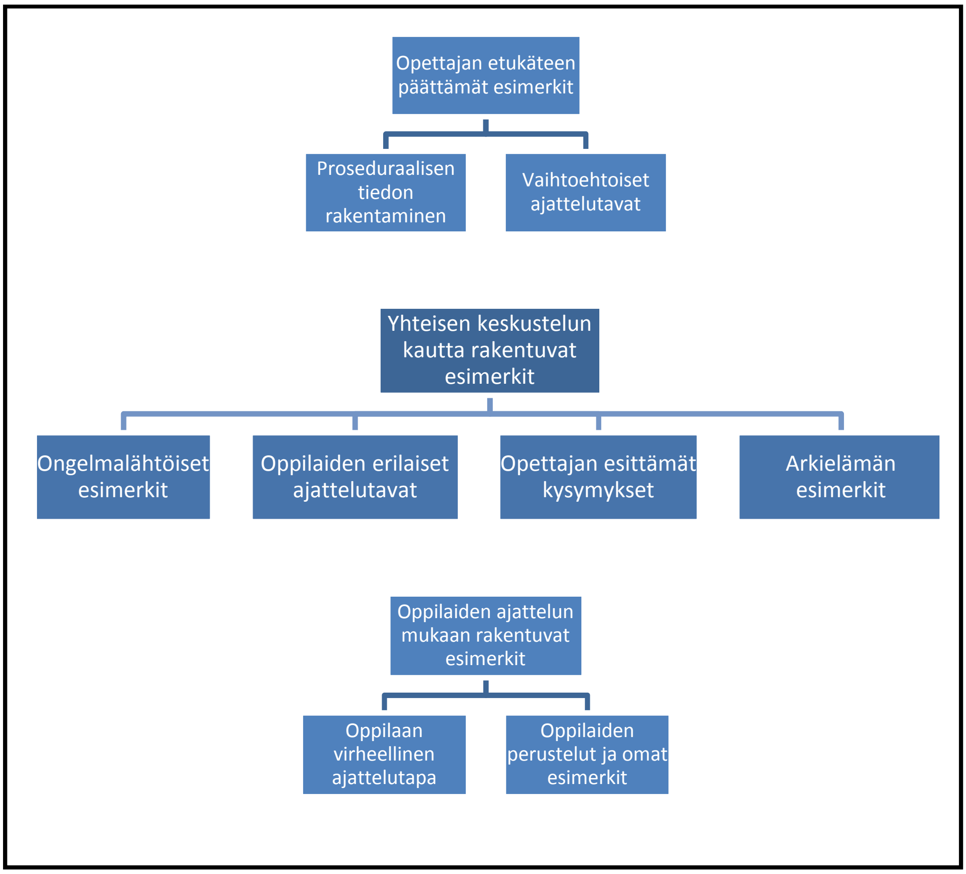
Aineistokatkelma 13
Pekan 1. oppitunti esim. 1

```
1.   Opettaja: kuinka moni on joskus kuullu potenssilas
2.   kuista jotakin (.) sanokaa joku esimerkki jostain po
3.   tenssilaskusta (…) Mervi (.)
4.   Mervi: öö siis kolme potenssiin kolme
5.   Opettaja: kolme potenssiin kolme (.) mitä se tarkot
6.   taa?
7.   ((opettaja nyökkää Merville))
8.   Mervi: siis silleen että menee kolme kertaa kolme
9.   kertaa kolme
10.  Opettaja: nonii (.) elikkä (.) näyttäs olevan että
11.  tämän ensimmäisen tunnin aihe on suurimmaks osaks
12.  tuttua
```

Tässä esimerkissä oppilas kertoo opettajan kehotuksesta potenssilaskua koskevan esimerkin (rivi 4). Opettaja tarkentaa esimerkkiä ja varmistaa oppilaan ymmärrystä esittämällä jatkokysymyksen *”kolme potenssiin kolme. mitä se tarkottaa?”* (rivit 5-6). Oppilas selittää ajatteluaan muuttamalla esimerkkinsä potenssilaskun kertolaskuksi (rivit 8-9). Opettaja pitää yhtä oppilasta koko luokan äänenä ja tulkitsee oppilaan esimerkin perusteella käsiteltävän aiheen olevan *”suurimmaks osaks tuttua”* (rivit 11-12).

5.4 Tulosten yhteenveto

Tunneilla käytetyt esimerkit jakautuivat kolmeen osaa: opettajan etukäteen päättämiin esimerkkeihin, yhteisen keskustelun kautta rakentuviin esimerkkeihin ja oppilaiden ajatusten mukaan rakentuviin esimerkkeihin. Kuviossa 3 on koottu yhteen nämä esimerkkien rakentumisen tavat ja niiden sisällä esiintyneet esimerkki tyypit.



KUVIO 3 Matemaattisten esimerkkien rakentuminen luokkahuoneessa

6 POHDINTA

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää millaisia esimerkkejä yläkoulun matematiikan tunneilla käytetään opiskeltaessa uutta oppisisältöä. Lisäksi tarkasteltiin sitä, miten uusien asioiden opettamisen yhteydessä käytetään matemaattisia käsitteitä. Tutkimuksen tulosten mukaan esimerkit ovat joko opettajan etukäteen päättämiä, yhteisen keskustelun kautta rakentuvia tai oppilaiden ajatusten mukaan rakentuvia. Kaikkien ryhmien sisällä esiintyi erilaisia esimerkin rakentumisen tapoja ja keinoja tuoda esiin matemaattisia käsitteitä.

6.1 Oppilaiden epätasainen osallistuminen esimerkkien rakentamiseen

Koulumatematiikan oppimisessa keskeistä on siis se, että oppilas pääsee jäseneksi niihin käytäntöihin joita matematiikan opiskelussa käytetään ja opettajalla on tässä prosessissa tärkeä rooli (Lerman, 2001). Opettajajohtoisten esimerkkien aikana opettajat käyttivät eritasoisia esimerkkejä opettaessaan oppilaille uutta asiaa. Esimerkit oli usein rakennettu niin, että alussa oli helpompia ja yksinkertaisia esimerkkejä, joihin kaikki oppilaat opettajan käsityksen mukaan pystyivät osallistumaan. Aste asteelta esimerkit vaikeutuivat, niin että viimeiset esimerkit oli suunnattu etevimmille oppilaille. Helppojen esimerkkien kohdalla kävi usein niin, että osa oppilaista kyllästyi ja totesi aiheen olevan liian helppoa. Helppojen esimerkkien kohdalla oppilaat eivät aina käyttäneet uutta opeteltavaa aihetta esimerkin ratkaisemiseen, vaan päättelivät sen aikaisemmilla tiedoillaan. Vaikeammissa esimerkeissä taas usein vain muutama oppilas osallistui keskusteluun, jota opettaja ohjasi ja johti.

Matematiikan oppimisen kannalta on oleellista se, pystyvätkö oppilaat jakamaan tietojaan ja ajatuksiaan toisilleen (Lerman, 2001). Baxter ym. (2002) havaitsivat tutkimuksessaan, että opettajalla oli vaikeuksia ottaa kaikentasoiset oppilaat mukaan syvään matemaattiseen keskusteluun. Verbaalisesti lahjakkaat ja etevät oppilaat olivat enemmän äänessä ja käyttivät matemaattisia termejä ja käsitteitä, joita heikommin suoriutuvat oppilaat eivät välttämättä ymmärtäneet. Tässä tutkimuksessa yhdessä keskustellen rakentuneiden esimerkkien aikana opettaja johdatteli matemaattista keskustelua esittämillään kysymyksillä ja ohjaili keskustelua haluamaansa suuntaan, mutta antoi oppilaille aikaa miettiä kysymyksiä ja vastata niihin. Tämän seurauksena luokassa saattoi ajoittain olla paljon päällekkäistä puhetta, eikä kaikki jutustelu tai oppilaiden huutelu liittynyt opiskeltavaan aiheeseen. Kuitenkaan kaikki oppilaat eivät osallistuneet yhteiseen keskusteluun, vaan äänessä olivat usein samat oppilaat. Avoin ja keskusteleva ilmapiiri saattoi kuitenkin auttaa myös hiljaisempia oppilaita ymmärtämään käsiteltävää asiaa. Kun keskustelu eteni enemmän oppilaiden kuin opettajan tahdissa, yhtä teemaa ja opeteltavaa asiaa käsiteltiin yleensä kauemmin. Oppilaat myös esittivät asian käyttäen sellaisia sanoja ja ajattelutapoja, että heidän vertaistensa oli niitä luultavasti helpompi ymmärtää. Tällaisen keskustelun aikana syntyi myös tilanteita, joissa oppilaat neuvoivat spontaanisti toisiaan.

Baxterin ym. (2002) tutkimuksessa kävi ilmi, että kun opettaja rohkaisi heikompia oppilaita osallistumaan keskusteluun, heidän puheenvuoronsa katkaisivat muiden oppilaiden intensiivisen keskustelun ja keskittymisen. Tässä tutkimuksessa opettaja otti välillä hiljaisempia oppilaita mukaan yhteiseen keskusteluun nimeämällä heitä vastaamaan, vaikka oppilas ei olisi itse osoittanut halukkuutta osallistumiseen esimerkiksi viittaamalla tai kysymyksiä esittämällä. Tällöin opettaja saattoi helpottaa hiljaisen oppilaan osallistumista antamalla vastausvihjeitä tai muokkaamalla oppilaan vastausta oikeaan suuntaan.

Opettajajohtoisten esimerkkien etuna oli se, että opettaja pystyi paremmin varmistamaan, että kaikki oppilaat kuuntelivat ja tekivät samoja tehtäviä. Raevaaran ym. (2001) mukaan institutionaalista ja järjestäytynyttä vuorovaikutusta tarvitaan luokkahuoneessa, koska sen avulla opettajan on mahdollista toteuttaa opetusta ja mahdollistaa oppilaiden oppiminen. Opettajan oli myös helpompi hallita luokan työrauhaa ja siirtyä tunnin eri vaiheesta toiseen. Se että laskuihin esitetään vain yksi ratkaisutapa, on helpompaa varsinkin suuren opetusryhmän kanssa. Opettajalla on paremmin mahdollisuus varmistaa, että kaikki ovat ymmärtäneet laskun perusidean ja pääsevät aloittamaan itsenäisen tehtävien teon.

6.2 Matemaattiseen ymmärrykseen tähtäävät esimerkit

Matemaattinen ymmärrys rakentuu eri tekijöistä. Kilpatrickin ym. (2001) mukaan käsitteellinen ymmärrys tarkoittaa tietämystä matemaattisista käsitteistä, prosesseista ja suhteista ja proseduraalinen sujuvuus matemaattisten prosessien tehokasta toteuttamista.

Tässä tutkimuksessa erityisesti opettajajohtoiset esimerkit tähtäsivät proseduraalisen tiedon hallintaan. Reflektointitilanteissa opettajat toivat esiin saman seikan, johon myös Chamberlin (2010) viittaa, eli sen että proseduraalisen tiedon tasolla liikkuvien tehtävien avulla oppilaille kehittyi perustietämys matemaattisista käsitteistä ja säännöstä. Peruslaskuihin keskittyvät esimerkit toimivat myös keinona tukea matematiikassa heikommin menestyviä oppilaita. Osa opettajista toi esiin, että produraalisen tiedon tasolla liikkuvat esimerkit oli suunnattu nimenomaan heikommille oppilaille, koska niiden avulla oppilaat pystyivät suoriutumaan kirjan perustehtävistä, vaikka eivät olisi ymmärtäneet laskun takana olevaa kaavaa tai ajattelutapaa.

Kilpatrick ym. (2001) mukaan matemaattiseen ymmärrykseen kuuluu myös kyky muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia, sekä oma looginen ajattelu, reflektointi ja perustelut. Yhdessä keskustellen rakentuneiden esimerkkien aikana oppilaat pääsivät itse muotoilemaan matemaattisia esimerkkejä, perustelemaan omia päätelmiään ja vertailemaan erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Tällöin opettajan tehtävänä oli aktiivisen luokkahuoneilmapiirin luominen, kysymysten esittäminen ja keskustelun johdatteleminen. Knottin (2010) mukaan yhteinen keskustelu kasvattaa oppilaiden matemaattista ymmärrystä kaikilla tasoilla. Toisaalta tutkimuksessa tuli myös esiin, että kun oppilasta pyydettiin keksimään oma matemaattinen esimerkki, oli se yleensä peruslasku, ei syvempi matemaattinen ongelma. Syvempien ongelmien esittäminen ja pohtiminen vaatisi harjoittelua ja neuvoja opettajalta (Roberts & Tayeh, 2012). Tunneilla keskityttiin usein vain sellaisiin tehtävätyyppeihin, laskuihin ja ratkaisuihin, jotka auttoivat kirjan tehtävien tekemisessä.

Yhdessä keskustellen rakentuvissa esimerkeissä opettaja teki ratkaisun sen välillä kertoiko hän suoraan vastauksen vai johdatteliko oppilaat mukaan keskusteluun, jossa esimerkkilasku ratkaistiin yhdessä. Hiebertin ym. (2003) tutkimuksessa saman ongelman parissa työskentely mahdollisti keskustelun opettajan ja oppilaiden välillä. Oppilaantuntemus ja luottamus omaan matemaattisen sisällön osaamiseen varmasti vaikuttavat siihen, uskaltaako opettaja heittäytyä matemaattiseen keskusteluun oppilaiden kanssa. Hiebertin ym. (2003) tutkimuksessa yhteisen keskustelun vaihtoehtona oli se, että oppilaat ratkaisivat esitetyn ongelman itsenäisesti, eikä siitä seurannut keskustelua. Tällöin eri oppilaat saattoivat tehdä tai olla tekemättä kyseistä tehtävää, eikä opettaja voinut olla varma heidän osaamisensa tasosta tai matemaattisen ajattelun taidoista.

Perinteisessä opettajajohtoisessa matematiikan opiskelussa oppilaiden omat matemaattiset käsitykset jäävät usein taka-alalle (Leino, 2004). Tässä tutkimuksessa tuli esiin tilanteita, joissa opettaja ja oppilas keskustelivat vaihtoehtoisista ratkaisutavoista ja tavan valinnasta (ks. Hiebert ym., 2003). Tällaisia tilanteita tuli esiin ongelmalähtöisissä esimerkeissä, joissa oppilaat pohtivat matemaattista ongelmaa ensin yksin tai pienissä ryhmissä ja kirjasivat ajatteluprosessiaan ylös. Tämän jälkeen opettaja keräsi oppilaiden muistiinpanot ja kertoi heidän ratkaisustrategiansa ja vastauksensa muulle luokalle. Eri oppilaiden käyttämiä strategioita myös verrattiin keskenään. Kun opettaja kertoi oppilaiden vastaukset, pystyi hän samalla varmistamaan, että oppilaat olivat tehneet annetun tehtävän ja ymmärtäneet sen sisällön. Hän pystyi myös tekemään yhteenvetoja oppilaiden ratkaisutavoista ja korjaamaan mahdollisia väärinymmärryksiä.

Hiebert ym., (2003) mainitsevat myös mittausvälineet ja erityiset matemaattiset materiaalit, joita käytettään tunnin aikana matemaattisen ongelman havainnollistamiseen ja ratkaisemiseen. Tässä tutkimuksessa tarkasteluilla oppitunneilla yksi opettaja käytti fyysisiä välineitä opetuksessaan. Hän antoi oppilaiden laskea konkreettisesti neliön pinta-alan ja kuution tilavuuden ja selittää omaa ajatteluaan. Tämän jälkeen opettaja toi esiin näiden laskujen yhteyden potenssilaskuun. Materiaalien käytön mielekkyys ja yleisyys on tietenkin yhteydessä käsiteltävään aiheeseen. Tässä aineistossa neliöiden pinta-alan ja kuutioiden ja tilavuuden laskemisen toi käsiteltävää aihetta lähemmäksi oppilaita. He saivat omakohtaisia kokemuksia ja tarttumapintaa. Tällaiset konkreettiset välineet ja mielikuvat voisivat hyödyntää varsinkin erityistä tukea tarvitsevia oppilaita ja parantaa heidän matemaattista ymmärrystään.

Opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa tulisi siis pohtia sitä, ohjaavatko käytetyt esimerkit proseduraalisen vai konseptuaalisen tiedon muodostumiseen. Tässä tutkimuksessa proseduraalisen tiedon opettelu nähtiin hyödyllisenä silloin kun uudesta opeteltavasta asiasta käytiin läpi perustietoja ja laskutapoja. Kuten Joutsenlahti (2005) tuo esiin, uudet käsitteet rakentuvat aina aikaisemmin opittujen varaan, joten opetuksessa on tärkeä huomioida se, hallitsevatko oppilaat aikaisemmin opiskellut käsitteet ennen kuin heille opetetaan uusia. Jos proseduraalisen tiedon tasolla liikkuvien peruslaskutoimitusten jälkeen tähdätään konseptuaaliseen tietoon, oppilaiden tulee valmiin tiedon toistamisen sijaan osallistua ongelmien kehittämiseen ja ratkomiseen. Tutkimuksen tuloksissa tuli esiin, että opettajan toiminnalla ja kannustuksella on hyvin keskeinen rooli siinä kuinka oppilaat lähtevä mukaan ongelmien esittämiseen ja ratkomiseen. Eniten yhteistä keskustelua syntyi niillä tunneilla, joilla opettajan uuteen aiheeseen johdattelevat esimerkki oli muotoiltu matemaattiseksi ongelmaksi, joka oppilaat saivat yhdessä pohtien ratkaista.

Koulussa opiskeltavien asioiden tulisi kytkeytyä oppilaan mielessä laajempaan kontekstiin (von Wright, 1996). Kuitenkin oppilaiden osaamisessa esiintyy usein ristiriita tietämisen ja tekemisen välillä, kun koulussa opittua tietoa ei osata soveltaa arkielämässä (Bonotto, 2013). Opettajalla on matemaattisen tiedon ja arkiajattelun yhdistämisen prosessissa merkittävä rooli. Kontekstiin sidotut matemaattiset ongelmat vaativat vähemmän korkeaa matemaattista ajattelua kuin abstraktit ongelmat ja soveltuvat siksi hyvin heikommille oppilaille (Le Roux, 2008). Tässä tutkimuksessa opettajat sitoivat arkielämän tilanteita käyttämiinsä esimerkkeihin yleensä juuri silloin kun havaitsivat oppilaan ajattelussa virheitä ja epäjohdonmukaisuuksia. Opettajat toivat myös esiin, että arkielämästä tuttujen termien käyttäminen matemaattisten käsitteiden tilalla helpotti heikosti matematiikassa menestyvien oppilaiden ymmärtämistä.

6.3 Tutkimuksen merkitys ja jatkotutkimusaiheet

Tässä tutkimuksessa on kuvattu matematiikan tunneilla esiintyneitä esimerkkejä. Tutkimustulosten yleistettävyyttä rajoittaa aineiston suhteellisen pieni koko. Peräkylä (2004) tuo kuitenkin esiin, että jokainen vuorovaikutuksen osa voi paljastaa muissa konteksteissa ilmeneviä sosiaalisia kaavoja ja struktuureja.

Tutkimuksessa tuli esiin, että monet esimerkit rakentuivat opettajan johdolla ja vaikka opettaja rohkaisi oppilaita yhteiseen keskusteluun, eivät kaikki luokan oppilaat siihen osallistuneet. Kuten Roberts ja Tayeh (2012) ovat todenneet, oppilaille tulee tietoisesti opettaa omien päätelmien ja ratkaisujen esiintuomista ja yhteistä luokkahuonekeskustelua. Baxterin ym. (2002) mukaan tukitoimet, jotka kokoavat yhteen vain heikosti suoriutuvia oppilaita eivät ole optimaalisia opetettaessa heikosti suoriutuville oppilailla matemaattista ongelmanratkaisua ja suullista kommunikaatiota, koska tällaisissa luokissa oppilaskeskeinen luokkahuonekeskustelu jää usein vähäiseksi ja oppilaan rooli passiiviseksi. Tämän tutkimuksen tulosten pohjalta opettajien kannattaisi rohkaista ja opettaa oppilaita yhteiseen matemaattiseen pohdintaan. Esimerkkien rakentumisessa oppilaiden omat selitykset ja muiden oppilaiden kuunteleminen toimivat apuna ja tukena monen luokan oppilaan ongelmanratkaisuprosessissa.

Marshall (2006) tuo esiin ettei opettajilla useinkaan ole mahdollisuutta nähdä, mitä muissa luokkahuoneissa tapahtuu. Tämän tutkimuksen avulla lukija saa kuva siitä, millaisia esimerkkejä matematiikan tunneilla käytetään ja millaista keskustelua esimerkkien rakentumiseen liittyy. Sherinin ja Hanin (2004) tutkimuksessa omien opetusvideoiden katsominen mahdollisti tutkittavien oman reflektoinnin ja vuorovaikutuksen analysoinnin. Oman reflektion jälkeen opettajat pystyivät tarkastelemaan opetuksen ja oppimisen välistä suhdetta uudesta näkökulmasta (Rowe, 2009). Santagatan ja Barbierin (2005) tutkimuksessa tämä lisäsi opettajien tietoisuuttaan omista opetuskäytännöistään, minkä avulla he pystyivät muokkaamaan omia rutiinejaan ja saivat vaihtoehtoisia ideoita matematiikan opetukseen.

Tämän tutkimuksen puitteissa ei ollut mahdollista seurata sitä, kehittivätkö opettajat käyttämiään opetusmenetelmiä ja matemaattisia esimerkkejä stimulated recall –tilaisuuden ja oman reflektion jälkeen. Chapman (2012) nimittäin tuo esiin, että matemaattisesti lahjakkaille oppilaille tulee tarjota ylemmän tason autenttisia matemaattisia ongelmia, muuten vaarana on kyllästyminen ja negatiiviset asenteet matematiikan opiskelua kohtaan. Tässä tutkimuksessa arkielämään sidotut esimerkit toimivat opiskeltavan asian havainnollistuksena eritoten heikosti matematiikassa suoriutuville oppilaille. Jatkossa olisi mielenkiintoista tutkia sitä, kuinka opettajat voivat muokata käyttämiään esimerkkejä sopivimmiksi luokan erilaisille oppijoille. Esimerkiksi kuinka arkielämässä esiintyviä ongelmia voitaisiin sitoa myös ylemmän tason matemaattisiin esimerkkeihin. Tutkimusta voitaisiin myös laajentaa oppilaiden omaan näkökulmaan ja siihen millaiset esimerkit he itse kokevat oman oppimisensa kannalta hyödyllisinä.

LÄHTEET

Arzarello, F., Robutti, O., & Bazzini, L. 2005. Acting is learning: focus on the construction of mathematical concepts. Cambridge Journal of Education 35 (1), 55–67.

Baxter, J., Woodward, J., Voorhies, J. & Wong, J. 2002. We talk about it, but do they get it? Learning Disabilities Research & Practice. 17 (3) 173–185.

Björn, P. M. & Vehkakoski, T. 2012. Concept-use of Mathematics Teachers at the Upper level Classes. Manuscript under preparation.

Bonotto, C. 2013. Artifacts as sources for problem-posing activities. Educational Studies in Mathematics, 83 (1), 37–55.

Chapman, O. 2012. Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. Pna, 6 (4), 135–146.

Chamberlin, S. 2010. Mathematical problems that optimize learning for academically advanced students in grades K-6. Journal of Advanced Academics, 22 (1), 52–76.

Fawcett, L. M., & Garton, A. F. 2005. The effect of peer collaboration on children's problem-solving ability. British Journal of Educational Psychology, 75 (2), 157–169.

Goos, M. 2004. Learning mathematics in a classroom of inquiry. Journal for Research in Mathematics Education, 355 (4), 258–291.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V., & Greeno, J. 2009. Constructing competence: An analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. Educational Studies in Mathematics, 70 (1), 49–70.

Haakana, M., Laakso, M. & Lindström, J. 2009. Introduction: Comparative dimesions of talk in interaction. Teoksessa M. Haakana, M. Laakso & J. Lindström (toim.) Talk in interaction: comparative dimensions, 15–47.

Haakana, M. 2008. Kieli toimintana: Keskustelunanalyysin näkökulma. Teoksessa T. Onikki-Rantajääskö & M. Siironen. (toim.) Kieltä kohti. Keuruu: Otava, 86–104.

Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50–83.

Haapasalo, L. 1998. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 80–98.

Hakulinen, A. 1998. Johdanto. Teoksessa L. Tainio (toim.) Keskustelunanalyysin perusteet. Tampere: Vastapaino. 13–17.

Hakulinen, A. 1998. Vuorottelujäsennys. Teoksessa L. Tainio (toim.) Keskustelunanalyysin perusteet. Tampere: Vastapaino, 32–55.

Heritage, J. 1984. Garfinkel and ethnometodology. Cambridge: Polity Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P. & Stigler, J. 2003. Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study, U.S. Department of Education National Center for Education Statistics, Washington DC.

Hihnala K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen: peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Väitöskirja.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. & Sherin, M. 2004. Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community. Journal for Research in Mathematics Education 35 (2), 81–116.

Hyun, E., & Davis, G. 2005. Kindergartners' conversations in a computer-based technology classroom. Communication Education, 54(2), 118–135.

Ilaria, D. 2009 Teacher questions that engage students in mathematical conversation. Viitattu 22.4.2013. http://rucore.libraries.rutgers.edu/rutgers-lib/25825/

Jitendra, A. K., & Star, J. R. 2011. Meeting the needs of students with learning disabilities in inclusive mathematics classrooms: The role of schema-based instruction on mathematical problem-solving. Theory into Practice, 50 (1), 12–19.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos Väitöskirja.

Jutila, J. Eriyttäminen matematiikan oppitunneilla ja opettajien kokemukset eriyttämisestä. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. Pro gradu -tutkielma. Tekeillä.

Kajamies, A., Vauras, M., & Kinnunen, R. (2010). Instructing low-achievers in mathematical word problem solving. Scandinavian Journal of Educational Research, 54 (4), 335–355.

Kilpatrick, J., Swafford, J. and Findell, B. 2001. Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Kinnunen, A. 2012. ”Pääsitkö kärryille?” Ymmärtämisen varmistaminen yläkoulun matematiikan tunneilla. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos. pro gradu –tutkielma.

Kleemola, S. 2007 Teoksessa L. Tainio (toim.) Vuorovaikutus luokkahuoneessa. Näkökulmana keskustelunanalyysi. Helsinki: Gaudeamus, 61–89.

Knott, L. 2010. Problem posing from the foundations of mathematics. Montana Mathematics Enthusiast, 7 (2), 413–432.

Kumpulainen, K. & Mutanen, M. 1999. Interaktiotutkimus sosiaalikulturaalisen ja konstruktivistisen oppimisnäkemyksen viitekehyksessä. Kasvatus, 30(1), 5–17.

Lau, P. N., Singh, P., & Hwa, T. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. Educational Studies in Mathematics, 72 (3), 307-324.

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma.

Lerman, S. 2001. Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 46 (1-3), 87–113.

Le Roux, K. 2008. A critical discourse analysis of a real-world problem in mathematics: Looking for signs of change. Language & Education: An International Journal, 22 (5), 307–326.

Leung, S. 2013. Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. Educational Studies in Mathematics, 83 (1), 103–116.

Leiwo, M. Kuusinen, J., Nykänen, P & Pöyhönen M-R. 1987. Kielellinen vuorovaikutus opetuksessa ja oppimisessa I: Luokkakeskustelu ja sen kuvaus. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 2.

Lilja N. 2011. Keskustelunanalyysi ja kielen oppimisen tutkimus. Teoksessa P. Kalaja, R. Alanen, & H. Dufva. (toim.) Kieltä tutkimassa: tutkielman laatijan opas. Tampere: Tammerprint, 68–87.

Lyle, J. 2003. Stimulated recall: a report on its use in naturalistic research. British Educational Research Journal 29 (6), 861–878.

MacBeth, D. 2004. The relevance of repair for classroom correction. Language in Society 33 (5), 703–736.

Manouchehri, A., & Mary, C. E. 1999. Promoting mathematical discourse: Learning from classroom examples. Mathematics Teaching in the Middle School, 4(4), 216–222.

Marshall, J. 2006. Math Wars 2: It’s the Teaching, Stupid! Phi Delta Kappan 87 (5), 356–363.

Mercer, N. & Dawes, L. 2008. The Value of Exploratory Talk. Teoksessa N. Mercer & S. Hodgkinson (toim.) Exploring Talk in Schools. Los Angeles: SAGE, 55–71.

Myhill, D. 2006. Talk, Talk, Talk: Teaching and learning in whole class discourse. Research Papers in Education 21 (1), 19–41.

Nikula, T. & Kääntä, L. 2011. Luokkahuonevuorovaikutuksen tutkimus. Teoksessa P. Kalaja, R. Alanen, & H. Dufva. (toim.) Kieltä tutkimassa: tutkielman laatijan opas. Tampere: Tammerprint, 49–67.

Packer, M. J. & Goicoechea, J. 2000. Sociocultural and Constructivist Theories of Learning: Ontology, Not Just Epistemology. Educational Psychologist 35 (4), 227–241.

Pape, S., Bel, C., & Yetkin, I. 2003. Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 53 (3), 179.

Patrikainen, S. & Toom, A. 2004. Stimulated recall – opettajan pedagogisen ajattelun ja toiminnan tutkimisen menetelmä. Teoksessa P. Kansanen & K. Uusikylä (toim.) Opetuksen tutkimuksen monet menetelmät Jyväskylä: PS-kustannus, 239–260.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.

Peräkylä, A. 1998. Institutionaalinen keskustelu. Teoksessa L. Tainio (toim.) Keskustelunanalyysin perusteet. Tampere: Vastapaino, 177–203.

Raevaara, L., Ruusuvuori, J. & Haakana, M. 2001. Institutionaalinen vuorovaikutus ja sen tutkiminen. Teoksessa J. Ruusuvuori, M. Haakana, M., & L. Raevaara, (toim.) Institutionaalinen vuorovaikutus: keskusteluanalyyttisiä tutkimuksia. Helsinki: SKS, 11–38.

Robert, A., & Rogalski, J. 2005. A cross-analysis of the mathematics Teacher's activity. an example in a french 10th-grade class. Educational Studies in Mathematics, 59 (1-3), 269–298.

Roberts, S.K. & Tayeh, C. 2010. Assessing Understanding through Reasoning Books. Mathematics Teaching in the Middle School 15 (7), 406–413.

Rowe, V.C. 2009. Using video-stimulated recall as a basis for interviews: some experiences from the field. Music Education Research 11 (4), 425–437.

Sfard, A. 2001. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics 46 (1–3), 13–57.

Salovaara, H. 1997. Teorioita ja käsityksiä oppimisesta. Oulun yliopisto. Viitattu 1.10.2012. http://www.edu.oulu.fi/okl/lo/kt2/wkonstr.htm

Santagata, R., & Barbieri, A. 2005. Mathematics teaching in italy: A cross-cultural video analysis. Mathematical Thinking & Learning, 7 (4), 291–312.

Savola, L. 2008. Video based analysis of mathematics classroom practice: examples from Finland and Iceland. Columbia University. Viitattu 1.9.2013. http://www.ru.is/publications/SoHE/LasseSavola2008.pdf

Seedhouse, P. 2005. Conversation Analysis as Research Methodology. Teoksessa K. Richards & P. Seedhouse (toim.) Applying conversation analysis. Basingstoke : Palgrave Macmillan, 251–266.

Sherin, M.G. & Han, S.Y. 2004. Teacher learning in the context of a video club. Teaching and Teacher Education 20, 163–183.

Schoenfeld, A. 1989. Teaching mathematical thinking and problem solving. Teoksessa L. Resnick & L. Klopfer (toim.) Toward the thinking curriculum: current cognitive research. Alexandria,VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 83–103.

Sokolowski, A., Yalvac, B., & Loving, C. 2011. Science modelling in pre-calculus: How to make mathematics problems contextually meaningful. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 42 (3), 283–297.

Säljö R. 2004. Oppimiskäytännöt. Sosiokulttuurinen näkökulma. Helsinki: WSOY

Tainio, L. 2007. Johdanto. Teoksessa L. Tainio (toim.) Vuorovaikutus luokkahuoneessa. Näkökulmana keskustelunanalyysi. Helsinki: Gaudeamus,15–58.

Tan, S., & Tan, A. 2006. Conversational analysis as an analytical tool for face-to-face and online conversations. Educational Media International, 43 (4), 347–361.

Thornborrow, J. 2002. Power talk. Language and interaction in institutional discourse. Great Britain: Pearson Education.

Tynjälä, P. 2004. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstuktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Tammi.

van Garderen, D. 2007. Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. Journal of Learning Disabilities, 40 (6), 540–553.

Van Harpen, X., & Presmeg, N. 2013. An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. Educational Studies in Mathematics, 83 (1), 117–132.

Vehkakoski, T. 2012. ‘More homework for me, too’. meanings of differentiation constructed by elementary-aged students in classroom interaction. European Journal of Special Needs Education, 27 (2), 157–170.

Vepsäläinen M. 2007. opettaja kysyy ja oppilas vastaa – vai toisinpäin? Teoksessa L. Tainio (toim.) Vuorovaikutus luokkahuoneessa. Näkökulmana keskustelunanalyysi. Helsinki: Gaudeamus, 156–180.

Vilenius-Tuohimaa, P. 2005. Vanhempien koulutustaso, lapsen kielellinen ilmaisu ja tehtäväorientaatio matemaattisten taitojen selittäjinä koulutien alussa. Helsingin yliopisto. Väitöskirja.

VISK = A. Hakulinen, M. Vilkuna, R. Korhonen, V. Koivisto, T-R. Heinonen & I. Alho 2004: Iso suomen kielioppi. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura. Verkkoversio, viitattu 7.8.2013. Saatavissa: http://scripta.kotus.fi/visk URN:ISBN:978-952-5446-35-7

von Wright, J. 1996. Oppimisen tutkimuksen opetukselle asettamia haasteita. Kasvatus 27 (1), 9–21.

Vygotsky, L. S. 1978. Mind in society: the development of higher psychological proesses. Cambridge: Harvard University.

Vygotsky, L. S. (1982) Ajattelu ja kieli. Suomentanut K. Helkama ja A. Koski-Jännes. Espoo: Weilin+Göös. Venäjänkielinen alkuteos 1931.

Watson, A. & De Geest, E. 2005 Principled Teaching for Deep Progress: Improving Matematical Learning Beyond Methods and Materials. Educational Studies in Mathematics, 58 (2), 209–234.

Yackel, E. & Cobb, P. 1996. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education 27 (4), 458–477.

Zack, V. & Graves, B. 2001. Making mathematical meaning through dialogue: 'once you think of it, the Z minus three seems pretty weird'. Educational Studies in Mathematics, 46 (1-3), 229–271.

Zolkower, B. & Shreyar, S. 2007. A Teacher's Mediation of a Thinking-Aloud Discussion in a 6th Grade Mathematics Classroom. Educational Studies in Mathematics 65 (2), 177–202.

Zwaneveld, B. 2000. Structuring mathematical knowledge and skills by means of knowledge graphs. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology 31 (3), 393–414.

LIITTEET

Liite 1: Litterointimerkit.

[päällekkäispuhunnan alku

] päällekkäispuhunnan loppu

(.) mikrotauko: 0.2 sekuntia tai vähemmän

(…) selvästi erottuva, pidempi tauko

°joo° ympäristöä vaimeampaa puhetta

JOO äänen voimistaminen

he he nauru

(-) sana, josta ei ole saatu selvää

(- -) pidempi jakso, josta ei ole saatu selvää

((itkee)) litteroijan kommentteja ja selityksiä tilanteesta

jo- sana jää kesken

@joo@ äänen laadun muutos

£joo£ hymyillen sanottu sana tai jakso

= kaksi vuoroa liittyy toisiinsa tauotta

>joo< nopeutettu jakso

<joo> hidastettu jakso

Liite 2: Stimulated recall -tilaisuuden kysymykset.

Esimerkkeihin liittyvät kysymykset:

1. Miten päädyit käsittelemään tätä asiaa juuri näin?
2. Kuinka oppilaat ohjasivat esimerkkiesi suuntaa kysymyksillään tai kommenteillaan?
3. Kuinka tarkkaan olit miettinyt esimerkit etukäteen? Kuinka paljon tilanne tai oppilaat ohjasivat esimerkkejäsi?

Ymmärryksen varmistamiseen liittyvät kysymykset (Kinnusen tutkielma):

Viidelle opettajalle esitetyt kysymykset:

1. Millaisena koit tilanteen oppilaiden ymmärryksen kannalta?
2. Miten sait tietoa siitä, että oppilaat ymmärsivät?
3. Koetko, että sait tarpeeksi tietoa kaikkien oppilaiden ymmärtämisen tasosta?
4. Millaisena koet tilanteen oppilaiden kannalta? Mitä uskot heidän ajatelleen tai tunteneen?

Yhdelle opettajalle esitetyt kysymykset:

1. Miksi toimit niin kuin toimit?
2. Mitä uskot oppilaiden ajatelleen?
3. Mikäli pääsisit hoitamaan tilanteen uudelleen, toimisitko eri tavalla?
4. Mitä tarkoitat sillä, että osalle riittää kun ymmärtää vain osan?

Eriyttämiseen liittyvät kysymykset (Jutilan tutkielma)

1. Minkälainen kyseinen ohjaustilanne oli? Oliko se tyypillinen?
2. Saavatko oppilaat toisiltaan tukea (pari- tai ryhmätyöt jne.)?
3. Kuinka muutat ohjaustilannetta oppilaan mukaan?

Liite 3: Tutkimuslupa.

Huom! Palautattehan lomakkeen mahdollisimman pian matematiikan opettajalle.

LUPA 1:

Arvoisat vanhemmat

Lapsenne luokka on valittu mukaan matematiikan opetusta ja luokkahuonevuorovaikutusta selvittävään tutkimushankkeeseen. Tutkimukseen kuuluu luokkahuonetilanteiden videonauhoituksia oppituntien aikana. Nauhoitukset toteutetaan 5 päivänä myöhemmin sovittavana ajankohtana. Tutkimukseen on saatu rehtorin ja opettajien lupa.

Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa. Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhoitettaville oppitunneille osallistuvien opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot kaikissa tutkimusraporteissa. Videonauhoitteet tuhotaan käytön jälkeen ja tekstitallenteet arkistoidaan virallisesti.

Näillä ehdoilla annan tutkimusryhmälle luvan videoida oppitunteja, joissa lapseni on mukana kevään 2012 aikana.

___________:ssa __/__ 2012

____

Allekirjoitus

LUPA 2:

Hyvä oppilas

Luokkasi on valittu mukaan matematiikan opetusta ja luokkahuonevuorovaikutusta selvittävään tutkimushankkeeseen. Tutkimukseen kuuluu luokkahuonetilanteiden videonauhoituksia oppituntien aikana. Nauhoitukset toteutetaan 5 päivänä myöhemmin sovittavana ajankohtana. Tutkimukseen on saatu rehtorin ja opettajien lupa.

Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa. Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhoitettaville oppitunneille osallistuvien opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot kaikissa tutkimusraporteissa. Videonauhoitteet tuhotaan käytön jälkeen ja tekstitallenteet arkistoidaan virallisesti.

Näillä ehdoilla annan tutkimusryhmälle luvan videoida oppitunteja, joissa olen mukana kevään 2012 aikana.

_____________:ssa __/__ 2012

____

Allekirjoitus

Liite 4: Tiedote oppilaille ja vanhemmille.

Tiedote oppilaille ja vanhemmille

VIDEONAUHOITUKSET MATEMATIIKAN OPETUSTA TUTKIVAAN TUTKIMUS-HANKKEESEEN

Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden laitos tekee kevätlukukauden 2012 aikana videonauhoituksia matematiikan oppituntien kulusta. Nauhoituksia käytetään tutkimusaineistona matematiikan opetusta ja luokkahuonevuorovaikutusta selvittävässä hankkeessa (MUST-projekti: Björn & Vehkakoski).

Nauhoituksiin kysytään aina lupa

Oppituntitilanteita videoidaan vain, mikäli oppilas ja oppilaan huoltaja antavat siihen kirjallisen luvan samalla lomakkeella (*ohessa*). Ennen luvan kysymistä oppilailta ja vanhemmilta, lupa on saatu jo koulun matematiikan opettajalta ja rehtorilta.

Nauhoituksia käytetään tutkimusaineistona

Nauhoitteita käytetään vain tutkimuksessa ja siihen liittyvässä opetuksessa.

Tutkimuksen tarkoituksena on kuvata oppituntien kulkua ja luokkahuonevuorovaikutusta oppitunneilla

Tutkimuksen tarkoituksena on luokkahuonevuorovaikutuksen kuvaaminen matematiikan oppitunneilla. Tutkimusaineistoa kerätään useammalta luokalta yläkouluista. Tutkimuksessa tarkastellaan luokkahuoneen toimintaa yleisellä tasolla, ei yksittäisen oppilaan oppimista tai henkilökohtaisia ominaisuuksia. Välituntitilanteita tai muuta oppituntien ulkopuolista toimintaa ei kuvata. Videointi suoritetaan tavallisilla oppitunneilla, eikä se vaikuta oppituntien sisältöihin mitenkään. Näin saadaan opetustilanteita ja opetustapoja koskevaa uutta tietoa, jota voidaan käyttää hyväksi opetuksen ja opetustapojen kehittämisessä.

Nimet ja muut tunnistetiedot muutetaan

Nauhoja ei esitetä julkisesti. Nauhojen sisältö muutetaan tekstiksi, jota analysoidaan. Opettajien ja oppilaiden tietosuoja turvataan muuttamalla nimet ja muut tunnistamisen mahdollistavat tiedot tutkimustulosten raportoinnissa. Näin taataan kaikkien osapuolten nimettömyys ja oppituntitilanteiden luottamuksellisuus.

Tutkimusryhmän osoite

Jyväskylän yliopisto
Kasvatustieteiden laitos / erityispedagogiikka
Piia Björn
PL 35 (Viveca)

40014 Jyväskylän yliopisto