Nollasummapelit ja muut yleisemmät summapelit

Teemu Orjatsalo

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013

Tiivistelmä: Teemu Orjatsalo, *Nollasummapelit ja muut yleisemmät summapelit*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 35 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2013.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua nollasummapeleihin ja muihin yleisiin summapeleihin. Nollasummapeleissä yhden pelaajan voitot ovat aina pois muilta pelaajilta. Esimerkiksi kakun leikkaaminen on nollasummapeli: jos henkilö leikkaa itselleen suuremman palan kakkua, jää muille vähemmän. Tutkielman aluksi tutustutaan kahden pelaajan nollasummapeleihin. Pelejä kuvataan strategisessa muodossa, mikä on kompakti tapa kuvata pelin matemaattista luonnetta. Käytännössä tämä tarkoittaa pelin kuvaamista tulosmatriisin avulla. Pelaajat valitsevat strategiansa yhtä aikaa ottaen huomioon muiden pelaajien mahdolliset strategiat. Von Neumannin minimax-lauseen mukaan tapauksessa, jossa pelaajat tietävät toistensa strategiat, on pelissä olemassa tulos, jonka toinen pelaaja voi taata odotetuksi voitokseen ja toinen pelaaja maksimaalikseksi tappiokseen. Tätä tulosta kutsutaan pelin arvoksi ja osoittautuu, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on sellainen.

Tutkielmassa esitellään erilaisia ratkaisutapoja nollasummapeleille. Yksi niistä on dominointi-menetelmä, jossa tulosmatriisin kokoa pienennetään, mikä helpottaa pelin arvon etsimistä. Yksinkertaiset matriisimuodossa olevat pelit voidaan ratkaista tutkimalla ensin, onko tulosmatriisilla satulapistetettä, ja jos ei ole, etsimällä minimax-strategiat. Kolmas esitelty ratkaisutapa kahden pelaajan nollasummapelille perustuu symmetriaan.

Tutkielman neljännessä luvussa käsitellään nollasummapelin esittämistä laajennetussa muodossa. Tällöin voidaan ottaa huomioon pelin luonteelle uusia ominaisuuksia. Laajennetussa muodossa olevaa peliä voidaan kuvata suunnatun kaavion avulla. Tätä kaaviota kutsutaan pelin puuksi. Luvussa tutkitaan myös strategisessa muodossa ja laajennetussa muodossa olevien pelien yhteyttä.

Tutkielman loppuosassa tarkastellaan yleisiä summapelejä. Tällöin pelaajien voittojen ja tappioiden summa ei ole enää nolla. Yleensä ei ole olemassa pelaajille yhteistä optimaalista strategiaa, mutta on olemassa yleistys von Neumannin minimax-lauseelle. Tätä yleistystä kutsutaan Nashin tasapainoksi. Nashin tasapaino on sellainen strategiaprofiili, ettei kenenkään pelaajan kannata vaihtaa strategiaansa, jos muut pelaajat eivät vaihda strategiaansa. Käy ilmi, että jokaisella yleisellä summapelillä on vähintään yksi Nashin tasapaino. Tämä tulos todistetaan käyttäen apuna Brouwerin kiintopistelausetta, jonka mukaan jatkuvalla funktiolla f, joka kuvaa konveksin ja kompaktin joukon itselleen, on kiintopiste.

Sisältö

Johdanto

Peliteoria on matematiikan osa-alue, joka käsittelee rationaalista ja itsekästä toimintaa tarkoin määritellyissä valintatilanteissa. Valintatilanteeseen eli peliin osallistuu vähintään kaksi pelaajaa, joiden tavoitteet voivat olla vastakkaisia. Pelaajien valinnat vaikuttavat pelin lopputulokseen, eivätkä pelaajat omaa valintaansa tehdessään yleensä tiedä toistensa valintoja. Toimiakseen parhaalla mahdollisella tavalla pelaajien on ajateltava strategisesti eli tehtävä oletuksia toisten pelaajien valinnoista ja hyödynnettävä oletusta siitä, että myös toiset pelaajat ovat itsekkäitä ja rationaalisia.

Tutkielman alkuosassa tarkastellaan kahden pelaajan nollasummapelejä. Pelejä kutsutaan nollasummapeleiksi, koska pelaajien voittojen ja tappioiden summa on aina nolla. Näissä peleissä pelaaja saa etua toisen pelaajan kustannuksella. Peliteorian ratkaisukäsitteiden avulla pyritään kuvaamaan sitä, millaisia valintoja pelaajien kannattaa tehdä ja miten pelaajat löytävät itselleen optimaaliset strategiat. Nollasummapeleille keskeinen tulos, von Neumannin minimax-lause, sanoo, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on arvo ja kummallakin pelaajalla on optimaalinen strategia, joka takaa tämän arvon.

Tutkielmassani esitellään erilaisia ratkaisutapoja nollasummapeleille ja tutkitaan myös sitä, miten strategisessa muodossa esitettyjä pelejä voidaan kuvata laajennetussa muodossa. Tutkielman loppuosassa tutustutaan yleisiin summapeleihin, joissa pelaajien tuottojen summa ei ole enää nolla, eikä pelaajilla enää ole optimaalisia strategioita. On kuitenkin olemassa strategioiden joukko, jota kutsutaan Nashin tasapainoksi. Tässä tilanteessa yksikään pelaaja ei saavuta etua vaihtamalla strategiaansa, jos muut pelaajat eivät vaihda strategioitaan. Osoittautuu, että jokaisella yleisellä summapelillä on vähintään yksi Nashin tasapaino. Tämä tulos todistetaan käyttämällä kappaleessa 1 esitettyä Brouwerin kiintopistelausetta.

Peliteorian tutkiminen on mielekästä monista eri syistä. Tässä tutkielmassa käsitellyt tulokset ovat hyvin keskeistä matemaattista peliteoriaa. Useat esitellyistä käsitteistä ovat klassisia peliteorian tuloksia, joita tutkitaan ja opiskellaan ympäri maailmaa. Peliteoriaa käytetään nykyään eri tavoin monilla eri tieteenaloilla, esimerkiksi taloustieteessä.

Tutkielmani tärkeimmät lähteet ovat [2] ja [6]. Erilaisiin peleihin tutustutaan yleensä aluksi jonkin esimerkin avulla. Luvussa 1 esitetään tutkielman sisältöä varten tärkeitä esitietoja ja aputuloksia. Luvut 2 ja 3 käsittelevät nollasummapelejä, niiden yksinkertaistamista ja ratkaisutapoja, päätuloksena Von Neumannin minimax-lause, lause 2.8. Luvussa 4 tehdään katsaus siihen, miten pelejä voidaan kuvata laajennetussa muodossa. Luvuissa 5, 6 ja 7 keskitytään yleisten summapelien tutkimiseen, päätuloksena Nashin lause, lause 7.1.

1. Esitietoja ja aputuloksia

Tässä luvussa kerrataan ja esitellään tämän tutkielman kannalta oleellisia merkintöjä, määritelmiä ja aputuloksia.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä joukko. Joukon A *supremum* $\sup A$ on joukon A pienin yläraja. Toisin sanoen $\sup A$ on sellainen luku M, jolle pätee

(i) M on joukon A yläraja eli $a \leq M$ kaikilla $a \in A$, ja
(ii) M on joukon A ylärajoista pienin eli jos G on jokin joukon A yläraja, niin $G \geq M$.

Vastaavasti, joukon A *infimum* $\inf A$ on joukon A suurin alaraja. Toisin sanoen $\inf A$ on sellainen luku m, jolle pätee

(i) m on joukon A alaraja eli $a \geq m$ kaikilla $a \in A$, ja
(ii) m on joukon A alarajoista suurin eli jos g on jokin joukon A alaraja, niin $g \leq m$.

Reaalilukujen täydellisyyden nojalla jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa $\sup A \in \mathbb{R}$. Vastaavasti jokaisella alhaalta rajoitetulla, epätyhjällä joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa $\inf A \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.2. Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *kasautumispiste*, jos

$$(B(x;r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \ \textit{kaikille}\ r > 0.$$

Määritelmä 1.3. Joukko on suljettu, jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.

Määritelmä 1.4. Joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos sen jokaisesta avoimesta peitteestä löytyy äärellinen alipeite.

Lause 1.5. *Joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että kompakti joukko K on sekä rajoitettu että suljettu. Kompakti joukko K todetaan rajoitetuksi esimerkiksi avointa peitettä $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $U_i := B(0;i)$, käyttäen: peitteestä löytyy oletuksen nojalla äärellinen alipeite $(U_{i_j})_{j=1}^{\ell}$, ja siten

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{i_j} = B(0;r) \ \text{ kun } r := \max\{i_1, \ldots, i_\ell\}.$$

Kompakti joukko K on myös suljettu, sillä se sisältää kasautumispisteensä: Jos näet joukolla K on kasautumispiste $a \in \overline{K} \setminus K$, niin silloin $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $U_i := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a; i^{-1})$, on joukon avoin peite. Tästä peitteestä löytyy nyt äärellinen alipeite $(U_{i_j})_{j=1}^{\ell}$. Mutta tällöin

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{i_j} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r) \ \text{ kun } r := \min\{1/i_1, \ldots, 1/i_\ell\},$$

joten $K \cap B(a;r) = \emptyset$, vaikka a on joukon K kasautumispiste.

Osoitetaan seuraavaksi, että suljettu ja rajoitettu joukko K on kompakti. Tämän osoittamiseksi oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa joukon K avoin peite $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$, josta ei löydy äärellistä alipeitettä.

Koska K on rajoitettu, niin jollekin $r > 0$ on $K \subset I := [-r, r]^n$. Puolitetaan välin I jokainen sivu, jolloin I jakautuu 2^n osaväliin. Valitaan näistä sellainen osaväli I^1, jolla

$I^1 \cap K$ ei peity äärellisen monella U_α. Näin käy ainakin yhdellä osavälillä. Jatketaan samaan tapaan, jolloin saadaan jono $I \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots$ n-välejä siten, että

1) $I^k \cap K$ ei peity äärellisen monella U_α, ja
2) Joukon I_k halkaisija $\delta(I^k) \to 0$ kun $k \to \infty$.

Koska nyt K ja siten jokainen $I^k \cap K$ on suljettu, niin on välttämättä olemassa a siten, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (I^k \cap K) = \{a\}.$$

Jos näet valitaan pisteet $x_k \in I^k \cap K$, niin jonolla (x_k) on suppeneva osajono $(x_{k_j})_j$; olkoon $a := \lim_{j\to\infty} x_{k_j}$. Silloin jokaiselle k on $x_{k_j} \in I^k \cap K$ kun $k_j > k$, joten $a \in I^k \cap K$, koska joukot $I^k \cap K$ ovat suljettuja. Toisaalta on

$$a \in K \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha.$$

Siten $a \in U_\alpha$ jollekin $\alpha \in J$, ja silloin, koska U_α on avoin, $B(a;\rho) \subset U_\alpha$ jollekin $\rho > 0$. Jos nyt valitaan k siten, että $\delta(I^k) < \rho/2$, niin on

$$I^k \cap K \subset B(a;\rho) \subset U_\alpha.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä välit I^k valittiin siten, että $I^k \cap K$ ei peity äärellisen monella U_α. □

Lemma 1.6. *Kompaktissa joukossa $K \subset \mathbb{R}$ jatkuva reaaliarvoinen funktio $f : K \to \mathbb{R}$ saavuttaa sekä suurimman että pienimmän arvonsa.*

Todistus. Koska K on kompakti, on $f(K)$ kompakti. Lauseen 1.5. mukaan $f(K)$ on täten suljettu ja erityisesti rajoitettu, joten $\sup f(K) < \infty$. Näin ollen $\sup f(K) \in f(K)$. Täten, on olemassa $x_0 \in K$ siten, että $\sup f(K) = f(x_0)$ ja siten

$$f(x) \leq f(x_0), \text{kaikilla}\, x \in K.$$

Vastaavasti, $\inf f(K)$ saavutetaan jollakin K:n arvolla. □

Määritelmä 1.7. Joukon $K \subseteq \mathbb{R}^d$ osajoukko $V \subset K$ on *konveksi* jos mille tahansa kahdelle pisteelle $a, b \in V$ pätee

$$\{pa + (1-p)b : p \in [0,1]\}.$$

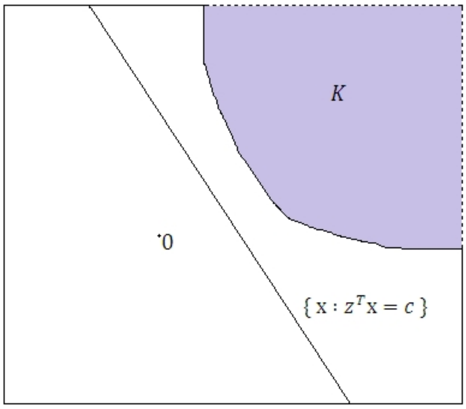
Lause 1.8 (Separoiva hypertaso -lause)**.** *Oletetaan, että $K \subseteq \mathbb{R}^d$ on suljettu ja konveksi. Jos $0 \notin K$, on olemassa $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ ja $c \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$0 < c < \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{v} \qquad \textit{kaikille}\, \boldsymbol{v} \in K.$$

Lauseen mukaan on olemassa *hypertaso* (jana tasossa, tai yleisemmin $\mathbb{R}^{d-1}$ affiini aliavaruus $\mathbb{R}^d$:ssä) joka erottaa 0:n K:sta. Erityisesti, millä tahansa jatkuvalla polulla 0:sta K:hon on jokin piste, joka sijaitsee tällä hypertasolla.

Separoiva hypertaso määritellään seuraavasti:

$$\{x \in \mathbb{R}^d : z^T x = c\}.$$



Kuva 1. Hypertaso, joka erottaa suljetun konveksin joukon K nollasta.

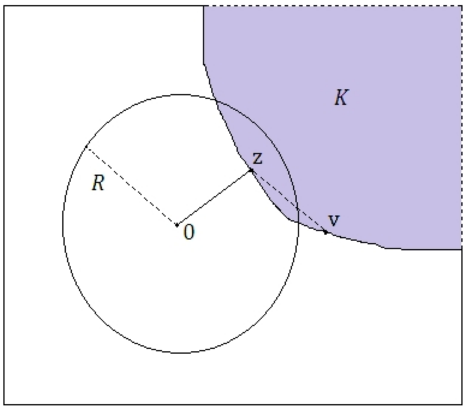
Todistus. Aluksi huomataan, että koska K on suljettu, on olemassa $z \in K$ jolle

$$\|\mathbf{z}\| = \inf_{\mathbf{v} \in K} \|\mathbf{v}\|.$$

Tämä on totta, sillä jos valitaan R siten, että R-säteinen, 0-keskeinen pallo leikkaa K:n, on funktio $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$, joka voidaan ajatella kuvauksena

$$f : K \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq R\} \to [0, \infty),$$

on jatkuva, joukolla joka on suljettu ja rajoitettu, täten siis kompakti Lauseen 1.5. mukaan.



Kuva 2. Kun leikataan K pallolla, saadaan epätyhjä, suljettu ja rajoitettu joukko.

Koska edellä mainittu kuvaus on jatkuva, saavuttaa se Lemman 1.6. mukaan pienimmän arvonsa jossain pisteessä $\mathbf{z} \in K$.

Nyt valitaan $c = (1/2)\|\mathbf{z}\|^2 > 0$. Osoitetaan, että $c < \mathbf{z}^T\mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in K$.

Oletetaan, että $\mathbf{v} \in K$. Koska K on konveksi, mille tahansa $\epsilon \in (0, 1)$ saadaan $\epsilon\mathbf{v} + (1 - \epsilon)\mathbf{z} \in K$. Täten

$$\|\mathbf{z}\|^2 \leq \|\epsilon\mathbf{v} + (1 - \epsilon)\mathbf{z}\|^2 = (\epsilon\mathbf{v}^T + (1 - \epsilon)\mathbf{z}^T)(\epsilon\mathbf{v} + (1 - \epsilon)\mathbf{z})$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa siitä, että $\mathbf{z}$ minimoi normin jokaisessa K:n pisteessä. Saadaan

$$\mathbf{z}^T\mathbf{z} \leq \epsilon^2\mathbf{v}^T\mathbf{v} + (1-\epsilon)^2\mathbf{z}^T\mathbf{z} + 2\epsilon(1-\epsilon)\mathbf{v}^T\mathbf{z}$$

Sieventämällä saadaan

$$\epsilon(2\mathbf{v}^T\mathbf{z} - \mathbf{v}^T\mathbf{v} - \mathbf{z}^T\mathbf{z}) \leq 2(\mathbf{v}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{z})$$

Nyt kun $\epsilon \to 0$ saadaan $0 \leq \mathbf{v}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{z}$, joten $\mathbf{v}^T\mathbf{z} \geq \|\mathbf{z}\|^2 = 2c > c$. □

Määritelmä 1.9. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$ sen topologinen aliavaruus ja $i : A \to X$ inkluusiokuvaus, $i(a) = a$ kaikille $a \in A$. Sanotaan, että jatkuva kuvaus $r : X \to A$ on *retraktio*, jos pätee

$$r \circ i = id_A.$$

Seuraavaa lausetta on käytetty apuna aputulokselle. Lauseen todistus sivuutetaan tässä yhteydessä. Todistus löytyy lähteestä [6, 91].

Lause 1.10 (Ei-retraktio lause)**.** *Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakti ja konveksi, ja olkoon sen sisus epätyhjä. Ei ole olemassa jatkuvaa kuvausta $F : K \to \partial K$ jonka rajoittuma ∂K:hon on identiteetti.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 1.11 (Brouwerin kiintopistelause)**.** *Jos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on suljettu, konveksi ja rajoitettu joukko, ja $T : K \to K$ on jatkuva, niin on olemassa $x \in K$ siten, että $T(x) = x$.*

Todistetaan seuraavaksi tämä lause, kun $n = 1$. Sen jälkeen hahmotellaan yleisen tapauksen todistus.

Todistus. Tutkitaan ensin tapausta, kun $n = 1$. Tällöin K on suljettu väli $[a, b]$. Asettamalla $f(x) = T(x) - x$ huomataan että $T(a) \geq a$ merkitsee sitä, että $f(a) \geq 0$ ja $T(b) \leq b$ merkitsee sitä, että $f(b) \leq 0$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa $x \in [a, b]$, jolle $f(x) = 0$, joten $T(x) = x$.

Tutkitaan seuraavaksi yleistä tapausta. Meillä on nyt jatkuva kuvaus $T : K \to K$, missä K on suljettu, rajoitettu ja konveksi joukko. Oletetaan, että T:llä ei ole kiintopistettä. Tällöin voidaan määritellä jatkuva kuvaus $F : K \to \partial K$ seuraavasti: Jokaiselle $x \in K$ voidaan piirtää suora $T(x)$:ltä x:n kautta kunnes se kohtaa ∂K:n. Asetetaan $F(x)$ yhtäsuureksi kuin tämä leikkauspiste. Jos $T(x) \in \partial K$, asetetaan $F(x)$ yhtäsuureksi kuin se säteen ja ∂K:n leikkauspiste, mikä ei ole yhtäsuuri kuin $T(x)$. Nyt tätä $T(x)$:ltä x:n kautta ∂K:lle piirrettyä suoraa tutkimalla eri tapauksissa voidaan todeta kuvauksen $F : K \to \partial K$ jatkuvuus. Tämä sivuutetaan tässä yhteydessä. Täten, F on K:n retraktio, mutta tämä on ristiriita lauseen 1.10. kanssa, joten T:llä on oltava kiintopiste. □

Huomautus 1.12. Seuraavien esimerkkien avulla huomataan, että jokainen lauseen oletuksista joukolle K on välttämätön:

(i) $K = \mathbb{R}$ (suljettu, konveksi, mutta ei rajoitettu) kun $T(x) = x + 1$
(ii) $K = (0, 1)$ (rajoitettu, konveksi, mutta ei suljettu) kun $T(x) = x/2$
(iii) $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in [1, 2]\}$ (rajoitettu, suljettu, mutta ei konveksi) kun $T(z) = -z$.

2. Kahden pelaajan nollasummapelit

2.1. Johdatus kahden pelaajan nollasummapeleihin. Nollasummapeli on peliteoreettinen tilanne, jossa toisen pelaajan, pelaajan I, voitot ovat aina pois toiselta pelaajalta, pelaajalta II. Peliä kutsutaan nollasummapeliksi, koska pelaajien tappioiden ja voittojen summa on aina nolla.

Tutustutaan nollasummapeleihin aluksi seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 2.1. Tässä esimerkissä esiintyy kaksi pelaajaa, pelaajat I ja II. Määritellään pelin nimeksi 'Valitse käsi' ja kutsutaan pelaajaa I valitsijaksi ja pelaajaa II piilottajaksi.

Pelin alussa pelaajalla II, piilottajalla, on kaksi kultakolikkoa takataskussaan. Vuoron alussa hän pistää molemmat kätensä selkänsä taakse ja ottaa joko yhden kolikon ja pitää sitä vasemmassa kädessään tai ottaa molemmat kolikot ja pistää ne oikeaan käteensä.

Pelaaja I, valitsija, valitsee nyt jomman kumman pelaaja II:n käden ja voittaa sen käden sisältämän summan, siis 0, 1 tai 2 kolikkoa.

Pelin mahdolliset tulokset voidaan esittää *tulosmatriisin* avulla, missä rivit ilmaisevat pelaajan I mahdollisia valintoja ja sarakkeet ilmaisevat vastaavasti pelaajan II valintoja.

Jokainen matriisin alkio a_{ij} on se määrä, jonka pelaaja II häviää pelaajalle I kun pelaaja I pelaa i ja pelaaja II pelaa j. Tätä pelin kuvausta kutsutaan sen normaaliksi tai *strategiseksi* muodoksi.

II / I	L	R
L	1	0
R	0	2

Oletetaan, että pelaaja II haluaa minimoida tappionsa laittamalla yhden kolikon vasempaan käteensä, jolloin hänen maksimitappionsa on yksi kolikko. Tämä on järkevä strategia, jos hän on varma siitä, että pelaaja I ei tiedä mitä hän aikoo tehdä. Mutta pelaaja I:n tietäessä pelaaja II:n strategian, pelaaja II häviää kolikkonsa vaikka hänen optimitilanteensa on olla häviämättä mitään. Tällöin, jos pelaaja II olettaa pelaajan I arvaavan hänen pelaavan L, hänellä on motivaatio pelata R. Selvästi, strategian 'pelaan L' (tai 'pelaan R') menestys riippuu siitä, kuinka paljon informaatiota pelaajalla I on. Pelaaja II voi tässä pelissä ainoastaan taata sen, että hänen maksimitappionsa on yksi kolikko.

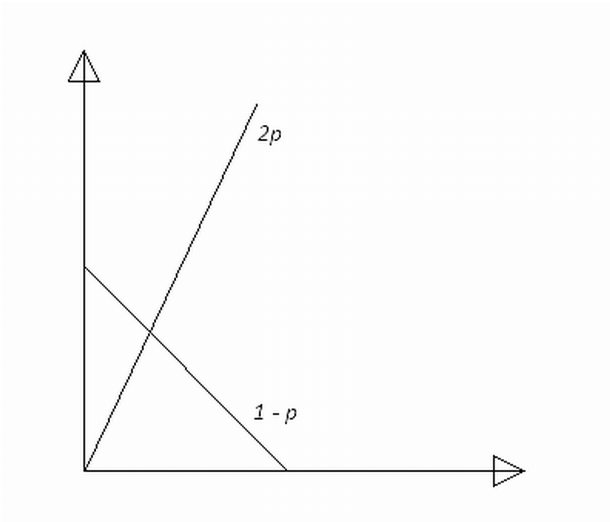
Vastaavasti, pelaaja I voi yrittää maksimoida voittoaan valitsemalla R, toivoen voittavansa kaksi kolikkoa. Jos pelaaja II arvaa tai saa selville pelaajan I strategian, hän voi taata että pelaaja I ei voita mitään. Tietämättä mitään siitä, mitä pelaaja II tietää, pelaaja I voi taata ainoastaan sen, että hän ei häviä mitään pelatessaan.

Ihannetapauksessa haluaisimme löytää strategian, jonka menestys ei riipu siitä, kuinka paljon informaatiota toisella pelaajalla on. Tapa saavuttaa tämä strategia on sisällyttää tietty epävarmuus pelaajien valintoihin.

Määritelmä 2.2. Strategia, jossa pelaaja asettaa tietyn todennäköisyyden jokaiselle mahdolliselle valinnalleen on nimeltään *sekastrategia*.

Sekastrategia, jossa jokin tietty siirto pelataan todennäköisyydellä yksi, on nimeltään *puhdas strategia.*

Jatketaan esimerkin 2.1. tarkastelua. Oletetaan nyt, että pelaaja I päättää noudattaa sekastrategiaa, jossa hän valitsee R:n todennäköisyydellä p ja L:n todennäköisyydellä $1-p$. Jos pelaaja II nyt noudattaisi puhdasta strategiaa R (eli piilottaisi kaksi kolikkoa vasempaan käteensä), hänen odotettu tappionsa olisi $2p$. Jos hän puolestaan noudattaisi strategiaa L, hänen odotettu tappionsa olisi $1-p$. Täten, jos hän jollakin tapaa saisi selville todennäköisyyden p, hän pelaisi strategialla joka vastaisi $2p$:n ja $1-p$:n minimiä. Tietäen tämän, pelaaja I maksimoisi voittonsa valitsemalla p:n siten, että saa maksimoitua lausekkeen $\min\{2p, 1-p\}$ arvon. Tätä tilannetta havainnollistetaan kuvassa 3. Huomaa, että edellä mainittu maksimi sijaitsee kohdassa $p = 1/3$, suorien leikkauspisteessä.



KUVA 3. Pelaajan I maksimi löytyy suorien leikkauspisteestä.

Täten noudattamalla sekastrategiaa, jossa pelaaja I valitsee R:n todennäköisyydellä 1/3 ja L:n todennäköisyydellä 2/3, hän takaa itselleen voitoksi 2/3, riippumatta siitä, tietääkö pelaaja II hänen strategiaansa. Kuinka pelaaja II voi puolestaan minimoida odotetun tappionsa?

Pelaaja II pelaa R jollakin todennäköisyydellä q ja L todennäköisyydellä $1-q$. Tulos pelaajalle I on $2q$ jos hän valitsee strategiakseen R ja $1-q$ jos hän valitsee L. Jos hän tietää q:n, hän valitsee strategian, joka vastaa edellä mainittujen kahden arvon maksimia. Jos vuorostaan pelaaja II tietää pelaaja I:n strategian, hän valitsee $q = 1/3$ minimoidakseen tätä maksimia, varmistaen että hänen odotettu voittonsa on 2/3.

Täten, pelaaja I voi taata itselleen odotetun voiton = 2/3 ja pelaaja II voi taata odotetun tappion = 2/3, riippumatta siitä, mitä pelaajat tietävät toistensa strategioista. Huomaa, että tilanteessa jossa pelaajilla on käytössään puhtaat strategiat, odotetut voitot/tappiot ovat yhtäsuuret. Seuraavassa kappaleessa todistettavan Von Neumannin minimax-lauseen mukaan tämä pätee aina kahden pelaajan nollasummapeleissä.

Huomautus 2.3. Selvästi tämän esimerkin peli ei ole mielekäs pelaajalle II ilman jonkinlaista ulkoista kannustinta, sillä hän voi vain hävitä pelatessaan. Voidaan esimerkiksi kuvitella pelaajan I maksavan pelaajalle II jonkin summan houkutellakseen hänet pelaamaan. Tässä tapauksessa 2/3 on maksimi, mitä pelaajan I pitäisi maksaa saadakseen pelaajan II osallistumaan peliin.

Tarkastellaan vielä toista yksinkertaista esimerkkiä, jotta esimerkissä 2.1 esitellyt käsitteet tulevat tutuiksi.

Esimerkki 2.4 (Pariton vai parillinen?)**.** Pelaajat I ja II huutavat samanaikaisesti joko numeron yksi tai kaksi. Pelaaja I voittaa pelissä, jos huudettujen lukujen summa on pariton. Pelaaja II voittaa, jos huudettujen lukujen summa on parillinen. Häviäjän voittajalle maksama summa on yhtäsuuri kuin huudettujen lukujen summa euroissa. Hahmotellaan nyt edellä annettujen tietojen pohjalta tälle pelille strateginen muoto ja tulosmatriisi:

II / I	1	2
1	-2	3
2	3	-4

Seuraavaksi tutkitaan kummalla pelaajista on etu tätä peliä pelattaessa. Voidaanko yllä olevasta tulosmatriisista suoraan päätellä kummalla?

Analysoidaan peliä ensin pelaajan I näkökulmasta. Oletetaan, että pelaaja I huutaa sattumanvaraisesti 'yksi' 3/5:lla kerroista ja 'kaksi' 2/5:lla kerroista. Tässä tilanteessa,

1) Jos pelaaja II huutaa 'yksi', pelaaja I häviää 2 euroa 3/5:lla kerroista ja voittaa 3 euroa 2/5:lla kerroista. Keskimäärin, hän voittaa $-2(3/5)+3(2/5) = 0$ eli hän pääsee omilleen pitkässä juoksussa.

2) Jos pelaaja II huutaa 'kaksi', pelaaja I voittaa 3 euroa 3/5:lla kerroista ja häviää 4 euroa 2/5:lla kerroista. Keskimäärin, hän voittaa $3(3/5) - 4(2/5) = 1/5$.

Pelaajan I valitessa strategiansa yllä kuvatulla tavalla peli päättyy tasan jokaisella kerralla kun pelaaja II huutaa 'yksi' ja pelaaja I voittaa keskimäärin 20 senttiä jokaisella kerralla kun pelaaja II huutaa 'kaksi'. Tätä yksinkertaista strategiaa käyttämällä pelaaja I jää pitkässä juoksussa vähintään omilleen riippumatta siitä mitä pelaaja II tekee. Voiko pelaaja I löytää strategiaa, jolla hän voittaisi aina riippumatta siitä, mitä pelaaja II tekee?

Olkoon p nyt se todennäköisyys, jolla pelaaja I huutaa 'yksi'. Yritetään valita p siten, että pelaaja I voittaa keskimäärin saman verran riippumatta siitä, huutaako pelaaja II 'yksi' vai 'kaksi'. Nyt pelaaja I:n keskimääräinen voitto pelaajan II huutaessa 'yksi' on $-2p + 3(1-p)$ ja pelaajan II huutaessa 'kaksi' $3p - 4(1-p)$. Tällä perusteella pelaajan I pitäisi valita p siten, että

$$
\begin{aligned}
-2p + 3(1-p) &= 3p - 4(1-p) \\
3 - 5p &= 7p - 4 \\
12p &= 7 \\
p &= 7/12
\end{aligned}
$$

Täten, pelaajan I pitäisi huutaa 'yksi' todennäköisyydellä 7/12 ja 'kaksi' todennäköisyydellä 5/12. Keskimäärin, pelaaja I voittaa $-2(7/12)+3(5/12) = 1/12$ jokaisella kerralla pelatessaan peliä, riippumatta siitä mitä pelaaja II huutaa.

Huomataan, että esimerkin pelissä pelaaja I:llä on selvä etu. Mietitään, voisiko hän voittaa keskimäärin vielä enemmän kuin 1/12 per peli? Vastaus tähän kysymykseen on ei, jos pelaaja II pelaa optimaalisesti. Itse asiassa, pelaaja II voisi käyttää samaa strategiaa kuin pelaaja I: huutaa 'yksi' todennäköisyydellä 7/12 ja 'kaksi' todennäköisyydellä 5/12.

Jos pelaaja I nyt huutaa 'yksi', pelajaan II keskimääräinen tappio on $-2(7/12) + 3(5/12) = 1/12$. Jos pelaaja I huutaa 'kaksi' pelaajan II keskimäärinen tappio on $3(7/12) + 4(5/12) = 1/12$.

Huomataan, että tämän esimerkin pelissä kävi kuten esimerkissä 2.1.: Pelaajalla I on menettelytapa mikä takaa hänelle vähintään keskimäärin 1/12:n voiton ja pelaajalla II on menettelytapa, joka pitää hänen keskimääräisen tappion enintään 1/12:ssa. Tällöin sanotaan, että 1/12 on pelin *arvo* ja menettelytapaa, jota molemmat käyttävät taatakseen tämän palautuksen kutsutaan *minimax-strategiaksi.*

Kehitetään nyt teoriallemme edellisten esimerkkien pohjalta muodollinen rakenne.

Määritelmä 2.5. Mielivaltaiselle kahden pelaajan nollasummapelille, jonka tulosmatriisi on muotoa $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$, sekastrategioiden joukkoa pelaajalle I merkitään

$$\Delta_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

ja sekastrategioiden joukkoa pelaajalle II

$$\Delta_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Huomaa, että tässä merkintätavassa puhtaat strategiat esitetään luonnollisilla kantavektoreilla.

Jos pelaaja I noudattaa sekastrategiaa $\mathbf{x}$ ja pelaaja II sekastrategiaa $\mathbf{y}$, odotettu tuotto pelaajalle I on

$$\sum x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

Kutsutaan $A\mathbf{y}$:tä pelaajan I sellaiseksi *tulosvektoriksi*, joka vastaa pelaajan II sekastrategiaa $\mathbf{y}$. Tämän vektorin komponentit esittävät niitä tuloksia pelaajalle I, jotka vastaavat hänen puhtaita strategioitaan. Vastaavasti, $\mathbf{x}^T Ay$ on pelaajan II *tulosvektori*, joka vastaa pelaajan I sekastrategioita $\mathbf{x}$. Tämän vektorin komponentit esittävät pelaajan II puhtaiden strategioiden tuottoja.

Seuraavaksi määritellään, mitä tarkoitetaan optimaalisella strategialla jokaiselle pelaajalle.

Määritelmä 2.6. Strategia $\widetilde{\mathbf{x}} \in \Delta_m$ on *optimaalinen pelaajalle I* jos

$$\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \widetilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

Vastaavasti, strategia $\widetilde{\mathbf{y}} \in \Delta_n$ on *optimaalinen pelaajalle II* jos

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\widetilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

2.2. **Von Neumannin minimax-lause.** Tässä kappaleessa osoitetaan, että jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on *arvo*. Todistuksemme pohjautuu luvussa 1 esitettyyn konveksin joukon keskeiseen lauseeseen.

Lemma 2.7. *Olkoot X ja Y suljettuja ja rajoitettuja joukkoja $\mathbb{R}$:ssä. Olkoon $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jatkuva kummankin koordinaattinsa suhteen. Tällöin*

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X} \min_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \min_{\boldsymbol{y}\in Y} \max_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Todistus. Olkoon $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in X \times Y$ annettu. Nyt selvästi

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \sup_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \text{ ja } \inf_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*),$$

mistä saadaan

$$\inf_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

Koska tämä epäyhtälö pätee mille tahansa $\mathbf{x}^* \in X$, se pätee $\sup_{\mathbf{x}^*\in X}$:n arvolle vasemmalla. Vastaavasti, koska epäyhtälö pätee kaikilla $\mathbf{y}^* \in Y$, sen täytyy päteä myös $\inf_{\mathbf{y}^*\in Y}$:n arvolle oikealla. Saadaan

$$\sup_{\mathbf{x}\in X} \inf_{\mathbf{y}\in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{y}\in Y} \sup_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Koska f on jatkuva ja X ja Y ovat suljettuja ja rajoitettuja, minimi ja maksimi saavutetaan. Näin lemma on todistettu. □

Lause 2.8 (Von Neumannin minimax-lause)**.** *Olkoon A muotoa $m \times n$ oleva tulosmatriisi ja olkoon Δ_m ja Δ_n pelaajien I ja II sekastrategioiden joukot. Tällöin*

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Delta_m} \min_{\boldsymbol{y}\in\Delta_n} \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} = \min_{\boldsymbol{y}\in\Delta_n} \max_{\boldsymbol{x}\in\Delta_m} \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}.$$

Todistus. Todistuksessa käytetään apuna lausetta 1.8. Lemmasta 2.7. seuraa suoraan, että

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \leq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y},$$

koska $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ on jatkuva funktio ja sekä $\Delta_m \in \mathbb{R}^m$ että $\Delta_n \in \mathbb{R}^n$ ovat suljettuja ja rajoitettuja. Oletetaan seuraavaksi, että

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} < \lambda < \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Voimme nyt määritellä uuden pelin tulosmatriisilla $\hat{A}$ siten, että $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \lambda$. Tälle pelille saadaan

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T \hat{A}\mathbf{y} < 0 < \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T \hat{A}\mathbf{y}. \tag{2.1}$$

Jokainen sekastrategia $\mathbf{y} \in \Delta_n$ pelaajalle II antaa tulosvektorin $\hat{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Annetaan K:n ilmaista niiden vektorien u joukkoa, joille on olemassa tulosvektori $\hat{A}\mathbf{y}$ siten, että u dominoi $\hat{A}\mathbf{y}$:tä. Nyt siis

$$K = \{\mathbf{u} = \hat{A}\mathbf{y} + \mathbf{v} : \mathbf{y} \in \Delta_n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \geq 0\}.$$

Yllä merkintä $\mathbf{v} \geq 0$ tarkoittaa sitä, että vektorin $\mathbf{v}$ kaikki komponentit ovat epänegatiivisia. Seuraavaksi todetaan, että K on konveksi ja suljettu: Valitaan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$

siten, että $\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{v_x}$ ja $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{y}_1 + \mathbf{v_y}$. Oletetaan, että $t \in [0,1]$ jolloin konveksin joukon määritelmän nojalla $\mathbf{x}t + (1-t)\mathbf{y}$ on myös K:ssa. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}t + (1-t)\mathbf{y} &= \mathbf{x}t - \mathbf{v}t + \mathbf{y}\\ &= (\hat{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{v_x})t - (\hat{A}\mathbf{y}_1 + \mathbf{v_y})t + \hat{A}\mathbf{y}_1 + \mathbf{v_y}\\ &= \hat{A}\mathbf{x}_1 t + \mathbf{v_x}t - \hat{A}\mathbf{y}_1 t + \mathbf{v_y}t + \hat{A}\mathbf{y}_1 + \mathbf{v_y}\\ &= \hat{A}(\mathbf{x}_1 t - \mathbf{y}_1 t + \mathbf{y}_1) + \mathbf{v_x}t - \mathbf{v_y}t + \mathbf{v_y}\end{aligned}$$

Nyt $(\mathbf{x}_1 t - \mathbf{y}_1 t + \mathbf{y}_1) \in \Delta_n$, koska $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ ja $(\mathbf{v_x}t - \mathbf{v_y}t + \mathbf{v_y}) \in \mathbb{R}^m$ kun $t \in [0,1]$ ja merkitään $(\mathbf{x}_1 t - \mathbf{y}_1 t + \mathbf{y}_1) = \hat{\mathbf{y}}$ ja $(\mathbf{v_x}t - \mathbf{v_y}t + \mathbf{v_y}) = \mathbf{v}$, missä $\mathbf{v} \geq 0$, jolloin

$$\mathbf{x}t + (1-t)\mathbf{y} \ \text{ on edelleen muotoa } \ \hat{A}\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{v},$$

joten K on konveksi.

Joukko K on myös suljettu, sillä Δ_n, joukko todennäköisyysvektoreita, jotka vastaavat pelaajan II sekastrategioita, on suljettu. Näin on, koska joukko $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \geq 0\}$ on suljettu ja konveksi. Lisäksi K ei voi sisältää nollavektoria, koska jos näin olisi, olisi olemassa sekastrategia $\mathbf{y} \in \Delta_n$ siten, että $\hat{A}\mathbf{y} \leq 0$, mistä mille tahansa $\mathbf{x} \in \Delta_m$ saataisiin $\mathbf{x}^T\hat{A}\mathbf{y} \leq 0$. Tämä on ristiriita (2.1):n oikean puolen kanssa. Siis joukko K on suljettu.

Täten K toteuttaa lauseen 1.8. ehdot, joten saadaan $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ja $c > 0$ siten, että $0 < c < \mathbf{z}^T\mathbf{w}$ kaikille $\mathbf{w} \in K$. Siis

$$\mathbf{z}^T(\hat{A}\mathbf{y} + \mathbf{v}) > c > 0 \quad \text{kaikilla } \mathbf{y} \in \Delta_n, \mathbf{v} \geq 0. \tag{2.2}$$

Tulee olla $z_i \geq 0$ kaikilla i, koska jos olisi $z_j < 0$, jollekin j voitaisiin valita $\mathbf{y} \in \Delta_n$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ siten, että $\mathbf{z}^T\hat{A}\mathbf{y} + \sum_i z_i v_i$ olisi negatiivinen (olkoon $v_i = 0, i \neq j$ ja $v_j \to \infty$), mikä olisi ristiriidassa (2.2):n kanssa.

Ehdon (2.2) mukaan kaikki z_i:t eivät myöskään voi olla nollia. Tämä tarkoittaa sitä, että $s = \sum_{i=1}^m z_i$ on positiivinen ja voidaan asettaa

$$\mathbf{x} := (1/s)(z_1, ..., z_m)^T = (1/s)\mathbf{z} \in \Delta_m$$

valitsemalla $\mathbf{x}^T\hat{A}\mathbf{y} > c/s > 0$ kaikilla $\mathbf{y} \in \Delta_n$.

Toisin sanoen, $\mathbf{x}$ on pelaajan I sekastrategia, joka antaa positiivisen odotetun tuloksen mitä tahansa pelaajan II sekastrategiaa vastaan. Tämä on ristiriidassa (2.1):n epäyhtälön vasemman puolen kanssa, mikä sanoo että pelaaja I voi taata enintään negatiivisen tuloksen. □

Määritelmä 2.9. Edellisen lauseen perusteella pätee

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = v = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Lukua v kutsutaan pelin *arvoksi*, tulosmatriisilla A.

Huomautus 2.10. Lauseen 2.8 todistus osoittaa vain sen, että että minimax-arvo on aina olemassa; se ei anna keinoa löytää sitä. Nollasummapelin arvon löytämiseksi on ratkaistava lineaarinen ohjelma, johon tarvitaan yleensä tietokonetta. Joissain tapauksissa tulosmatriisia voidaan yksinkertaistaa niin, että se on ratkaistavissa "käsin". Tästä lisää seuraavassa luvussa.

3. Nollasummapelin yksinkertaistaminen ja ratkaiseminen

3.1. Dominointi-menetelmä. Dominoinniksi kutsutaan menetelmää, jolla voidaan pienentää pelin tulosmatriisin kokoa. Tällöin tulosmatriisin analysoiminen ja samalla pelin arvon etsiminen helpottuu. Jos jokainen tulosmatriisin rivin alkio i_1 on on vähintään yhtä suuri kuin vastaava rivin i_2 alkio, toisin sanoen jos $a_{i_1j} \geq a_{i_2j}$ kaikilla j, niin pelin arvon selvittämiseksi voidaan eliminoida rivi i_2. Vastaavasti, jos $a_{ij_1} \leq a_{ij_1}$ kaikilla i, voidaan sarake j_2 elimoida vaikuttamatta pelin arvoon. Tutustutaan tähän menetelmään seuraavan esimerkin avulla ja perustellaan menetelmän taustalla olevaa ideaa esimerkin jälkeen vielä tarkemmin.

Esimerkki 3.1. Olkoon pelillä seuraava tulosmatriisi:

II / *I*	*A*	*B*	*C*
1	0	-1	1
2	0	0	2
3	-1	-2	3

Koska rivin 2 alkiot ovat $\geq$ vastaavat alkiot rivillä 1, rivi 2 dominoi riviä 1. Tällöin eliminoimalla rivi 1 saadaan tulosmatriisi muotoon:

II / *I*	*A*	*B*	*C*
2	0	0	2
3	-1	-2	3

Koska sarakkeen B alkiot ovat $\leq$ sarakkeen A vastaavat alkiot, sarake B dominoi saraketta A. Vastaavasti sarake B dominoi saraketta C. Tulosmatriisi saadaan muotoon:

II / *I*	*B*
2	0
3	-2

Nyt rivi 2 dominoi riviä 3, joten voidaan eliminoida rivi 3 ja saadaan 1×1 -matriisi:

II / *I*	*B*
2	0

Tämän esimerkin tapauksessa peli saatiin ratkaistua dominointi-menetelmällä. Yleensä dominointia ei kuitenkaan saada vietyä loppuun asti ja pelin ratkaisua joudutaan hakemaan eri menetelmällä. Tästä lisää kappaleessa 3.2.

Tutkitaan vielä miksi näin voidaan tehdä, toisin sanoen miksi dominointia voidaan iteroida? Jos oletetaan, että $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}$ kaikilla i, jos pelaaja II vaihtaa sekastrategiasta

$\mathbf{y}$ sekastrategiaan $\mathbf{z}$ asettamalla $z_{j_1} = y_{j_1} + y_{j_2}, z_{j_2} = 0$ ja $z_l = y_l$ kaikilla $l \neq j_1, j_2$, tällöin

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \sum_{i,l} x_i a_{i,l} y_l \geq \sum_{i,l} x_i a_{i,l} z_l = \mathbf{x}^T A\mathbf{z}$$

koska $\sum_i x_i(a_{i,j_1}y_j + a_{i,j_2}y_{j_2}) \geq \sum_i x_i a_{i,j_1} z_j + z_{j_2}$. Täten, strategia $\mathbf{z}$, jossa ei ole mukana tulosmatriisin saraketta j_2, on vähintään yhtä hyvä pelaajalle II kuin strategia $\mathbf{y}$.

Yksinkertaisemmin sanottuna, mitä tahansa pelaaja II saavuttaa dominoitua riviä (tai saraketta) käyttämällä, hän saavuttaa vähintään saman käyttämällä riviä (tai saraketta), joka sitä dominoi. Toisin sanoen, *dominoidun rivin tai sarakkeen poistaminen ei vaikuta pelin arvoon.*

Dominoinnilla saatu pienempi matriisi ei ole yksikäsitteinen, koska dominointi voidaan suorittaa tietyssä tilanteessa monessa eri järjestyksessä, jolloin tuloksena voi olla erilaisia pienempiä matriiseja.

Määritelmä 3.2. Jos jokin tulosmatriisin alkio a_{ij} toteuttaa seuraavat ehdot

(i) a_{ij} on rivin i minimi, ja
(ii) a_{ij} on sarakkeen j maksimi,

niin sanotaan, että a_{ij} on *satulapiste.*

Huomautus 3.3. Jos a_{ij} on satulapiste, niin pelaaja I voi voittaa vähintään summan a_{ij} valitsemalla rivin i, ja pelaaja II voi pitää häviönsä maksimissaan a_{ij}:n suuruisena valitsemalla sarakkeen j. Täten a_{ij} on pelin arvo. Merkitään tätä jatkossa v:llä.

Esimerkki 3.4. Olkoon tulosmatriisi A muotoa

II / *I*	*A*	*B*	*C*
1	4	1	-3
2	3	2	5
3	0	1	6

Huomataan, että 2 on samalla sekä rivin 2 minimi että sarakkeen 2 maksimi. Tällöin matriisin A satulapiste on 2, mikä on myös pelin arvo, kuten edellä selitettiin.

3.2. **Yksinkertaisen nollasummapelin ratkaiseminen.** Tutkitaan seuraavaksi, miten ratkaistaan 2×2 -matriisimuodossa esitetty peli. Tämä on hyödyllistä myös siinä mielessä, että joskus dominoinnin avulla päästään 2×2 -matriisiin, mutta ei pidemmällä. Tarkastellaan nyt 2×2 -tulosmatriisia, joka on muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}.$$

Määrittääksemme pelin arvon ja vähintään yhden optimaalisen strategian kummallekin pelaajalle, edetään seuraavalla tavalla:

1. Tutkitaan, onko tulosmatriisilla satulapistettä.
2. Jos satulapistettä ei ole, ratkaistaan peli etsimällä minmax-strategia.

Näytetään seuraavaksi, että esimerkeissä 2.1. ja 2.3. esitelty menetelmä toimii aina ja pelin arvo sekä optimaaliset strategiat voidaan selvittää, kun tulosmatriisilla ei ole satulapistettä.

Oletetaan nyt, että satulapistettä ei ole. Jos $a \geq b$, niin $b < c$, koska muuten b olisi satulapiste. Koska $b < c$, niin täytyy olla $c > d$, koska muuten c olisi satulapiste. Vastaavasti nähdään, että $d < a$ ja $a > b$. Toisin sanoen, jos $a \geq b$, niin $a > b < c > d < a$. Symmetrian nojalla, jos $a \leq b$, niin $a < b > c < d > a$.

Edellisen nojalla, jos pelillä ei ole satulapistettä, niin on joko $a > b, b < c, c > d$ ja $d > a$, tai $a < b, b > c, c < d$ ja $d > a$.

Kehitetään seuraavaksi ratkaisumallit optimaalisille strategioille ja yleisen 2×2 -pelin arvolle. Jos pelaaja I valitsee ensimmäisen rivin todennäköisyydellä p, voidaan määrittää hänen keskimääräinen voittonsa pelissä kun pelaaja II käyttää sarakkeita 1 ja 2. Toisin sanoen, pelaaja I käyttää sekastrategiaa $(p, 1-p)$ ja minmax-periaatteen nojalla voidaan muodostaa seuraava yhtälö:

$$ap + d(1-p) = bp + c(1-p)$$

Ratkaisemalla tästä p, saadaan

$$p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)}.$$

Koska pelillä ei ole satulapistettä, niin $(a-b)$ ja $(c-d)$ eivät ole joko kummatkin positiivisia tai kummatkin negatiivisia; siten $0 < p < 1$. Pelaaja I:n keskimääräinen tuotto tätä strategiaa käyttämällä on

$$v = ap + d(1-p) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

Jos pelaaja II valitsee ensimmäisen sarakkaan todennäköisyydellä q, voimme määrittää hänen keskimääräisen tappionsa pelissä kun pelaaja I käyttää rivejä 1 ja 2. Toisin sanoen, pelaaja II käyttää sekastrategiaa $(q, 1-q)$ ja minimax-periaatteen nojalla voidaan muodostaa seuraava yhtälö:

$$aq + b(1-q) = dq + c(1-q)$$

Siten

$$q = \frac{c-b}{a-b+c-d}.$$

Taas, koska pelillä ei ole satulapistettä, on $0 < q < 1$. Pelaaja II:n keskimääräinen tappio käyttämällä tätä strategiaa on

$$aq + b(1-q) = ap + d(1-p) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d} = v,$$

mikä on sama arvo, jonka pelaaja I voi pelissä saavuttaa. Näin on selvitetty, että pelillä on arvo v ja että pelaajilla on optimaaliset strategiat. Minimax-lausehan sanoi näin olevan kaikille äärellisille peleille.

Esimerkki 3.5. Olkoon tulosmatriisi muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)} = \frac{-4-3}{2-3-4-3} = 7/12$$

ja

$$q = \frac{-4-3}{-2-3-4-3} = 7/12$$

Pelin arvo

$$v = \frac{ac-bd}{a-b+c-d} = \frac{8-9}{-2-3-4-3} = 1/12$$

Huomautus 3.6. Vertaa edellä saatua tulosta esimerkkiin 2.3.

Esimerkki 3.7. Olkoon tulosmatriisi muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$p = \frac{2-1}{0+10+2-1} = 1/11$$

ja

$$q = \frac{2+10}{0+10+2-1} = 12/11,$$

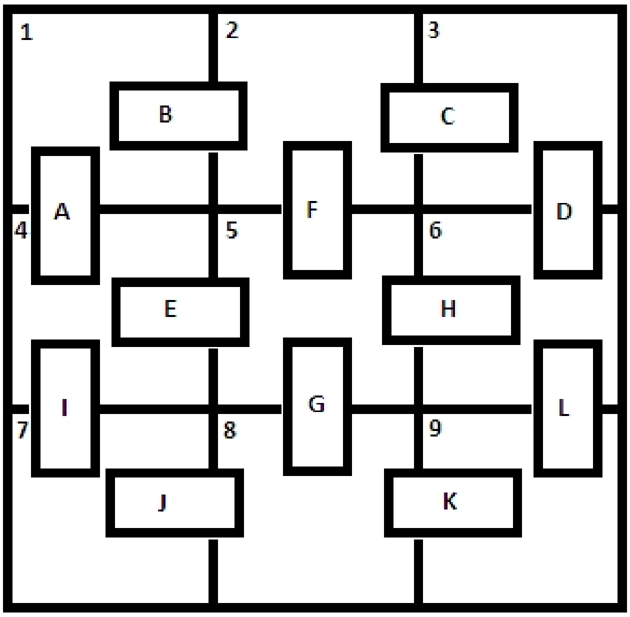
mutta piti olla $0 < q < 1$. Mikä meni pieleen? Unohdimme tutkia onko matriisilla satulapistettä. Huomataan, että matriisin vasen alakulma, siis alkio 1, on satulapiste. Tällöin $p = 0$ ja $q = 1$ ovat optimaaliset strategiat ja pelin arvo $v = 1$.

3.3. **Symmetria-menetelmä.** Toinen tapa yksinkertaistaa pelin analysoimista on *symmetria-menetelmä*. Havainnollistetaan tätä seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 3.8. Sukellusvene sijaitsee kahden vierekkäisen neliön päällä 3×3 -ruudukossa. Pelaaja I, pommittaja, joka ei näe veden alla sijaitsevaa sukellusvenettä, pudottaa pommin yhdelle yhdeksästä ruudusta. Pelaaja I voittaa 1 euron, jos hän osuu sukellusveneeseen ja häviää 1 euron, jos hän ei osu siihen. Pommittajalla on nyt yhdeksän puhdasta strategiaa ja sukellusveneellä 12 puhdasta strategiaa. Kuvassa 4 pommittajan strategiat ovat ruudut 1-9 ja sukellusveneen strategiat ovat sukellusveneen mahdolliset paikat A-L.

Alla esitetty pelin tulosmatriisi on siten varsin laaja, mutta symmetria-argumentin avulla sitä voidaan yksinkertaistaa reilusti.

SUK *POM*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1
5	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
9	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1



Kuva 4. Sukellusveneen asemat, kun pommittaja pudottaa pommin jollekin ruudulle.

Huomataan, että pommittajalla on kolme keskenään samanarvoista siirtoa: hän voi pudottaa pommin keskiruutuun, keskelle sivua tai kulmaan. Vastaavasti, sukellusveneen on mahdollista sijoittua kahteen erilaiseen asemaan: sukellusvene osuu aina joko keskiruutuun tai kulmaruutuun.

Näitä tietoja käyttäen, voidaan muodostaa helpommin käsiteltävä tulosmatriisi:

Sukellusvene Pommittaja	keskiruutu	kulmaruutu
kulma	0	1/4
sivu	1/4	1/4
keski	1	0

Tässä kohtaa huomataan, että satulapisteen määritelmän nojalla $1/4$ on tulosmatriisin rivin 2 minimi ja sarakkeen 2 maksimi. $1/4$ olisi siis myös pelin arvo. Tutkitaan seuraavaksi, päästäänkö tähän päätelmään myös symmetria-menetelmän avulla.

Uuden tulosmatriisin arvot poikkeavat hieman alkuperäisen tulosmatriisin arvoista. Tämä johtuu siitä, että kun pommittaja ja sukellusvene molemmat käyttävät strategiaa *kulma*, on vain $1/4$:n todennäköisyys että tulee osuma. Tarkalleen ottaen, puhdas strategia *kulma*:lle pommittajan näkökulmasta tässä pienennetyssä pelissä vastaa alkuperäisen pelin sekastrategiaa, jossa pommitetaan jokaista kulmaa todennäköisyydellä $1/4$. Vastaava tilanne pätee jokaisen puhtaan strategian kohdalla pienennetyssä pelissä.

Matriisia voidaan pienentää edelleen käyttämällä dominointi-menetelmää. Pommittajalle, strategia *sivu* dominoi strategiaa *kulma* (koskiessaan kulmaa, sukellusveneen on kosketteva myös sivua). Näin saadaan tulosmatriisi muotoon:

Sukellusvene Pommittaja	keskiruutu	kulmaruutu
sivu	1/4	1/4
keski	1	0

Nyt sukellusveneelle strategia *kulmaruutu* dominoi strategiaa *keskiruutu*, joten tulosmatriisi voidaan kirjoittaa muodossa:

Sukellusvene Pommittaja	kulmaruutu
sivu	1/4
keski	0

Pommittaja valitsee nyt itselleen paremman vaihtoehdon - soveltamalla tässäkin dominointi-menetelmää - ja valitsee strategian *keski*. Pelin arvo on 1/4 ja pommi putoaa yhdelle neljästä sivuruudusta todennäköisyydellä 1/4 jokaiselle. Sukellusvene on piilossa yhdestä kahdeksasta mahdollisesta asemasta (parit vierekkäisiä ruutuja) lukuun ottamatta keskiruutua, valiten yhden niistä todennäköisyydellä 1/8.

Matemaattisesti symmetria-argumenttia voidaan ajatella seuraavalla tavalla. Oletetaan, että on olemassa kaksi kuvausta, π_1, pelaajan I mahdollisten siirtojen permutaatio, ja π_2, pelaajan II mahdollisten siirtojen permutaatio. Näille tulokset a_{ij} toteuttavat yhtälön

$$a_{\pi_1(i),\pi_2(j)} = a_{ij}.$$

Jos tämä on totta, on olemassa optimaaliset strategiat pelaajalle I jotka antavat samanlaisen painoarvon $\pi_1(i)$:lle ja i:lle kaikilla i. Vastaavasti, pelaajalle II on olemassa sekastrategia, joka on optimaalinen ja antaa saman painoarvon siirroille $\pi_2(j)$:lle ja j:lle kaikilla j.

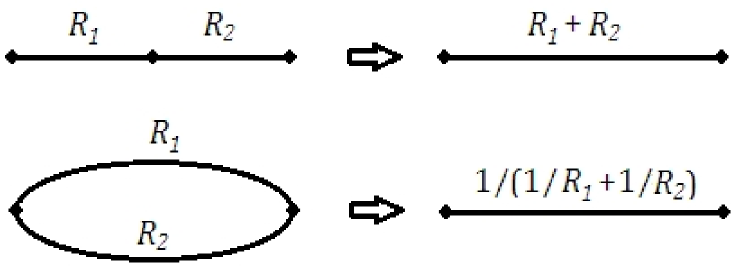
Tässä esimerkissä tämä periaate näyttää seuraavalta: Olkoon kuvaus π_1, joka vaihtaa alkuperäisen 9×12 -matriisin ensimmäisen ja kolmannen sarakkeen. Vastaavasti valitaan kuvaus π_2, joka tekee saman sukellusveneen asemalle. Toisena esimerkkinä voidaan valita kuvaus π_1, joka kiertää pommittajan asemaa 90 astetta vastapäivään ja vastaavasti π_2 tekee saman sukellusveneen asemalle.

3.4. **Vastusverkot ja peikko-pelit.** Tässä kappaleessa analysoidaan nollasummapeliä, jota pelataan kaksi kaupunkia, kaupungit A ja B, yhdistävällä tieverkolla. Tämän pelin tarkastelu liittyy läheisesti vastusverkkoihin, missä vastukset vastaavat kaupunkeja.

Muistetaan, että jos kaksi pistettä on yhdistetty vastuksella, jonka *resistanssi* on R ja pisteiden välistä jännitettä pienennetään määrällä V, niin vastuksen läpi kulkevan sähkövirran suuruus on V/R. *Konduktanssi* on puolestaan resistanssin käänteisarvo. Kun kaksi pistettä on yhdistetty sarjaan kahdella vastuksella, joiden resistanssit ovat R_1 ja R_2, niin *kokonaisresistanssi* pisteiden välillä on $R_1 + R_2$, koska sähkövirta mikä kulkee vastusten läpi on $V/(R_1+R_2)$. Kun vastukset ovat rinnankytkettyjä, niin niiden kokonaiskonduktanssi on $1/R_1+1/R_2$, joten kokonaisresistanssi on $1/(1/R_1+1/R_2) = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

Rajoitetaan tarkastelu tieverkkoihin, jotka ovat rakennettu muuttamalla kaupungista A kaupunkiin B kulkeva suora tie kahdella erilaisella askelten sarjatyypillä:

sarja-askelilla ja *rinnakkaisilla* askelilla. Molemmat askelten tyypit on esitetty kuvassa 5. Askelten tyypit vastaavat edellä kuvattuja resistansseja vastusverkossa. Tällaisia tieverkkoja kutsutaan *rinnan-sarja verkoiksi.*



KUVA 5. Yllä kuvattu sarja-askel tieverkossa, alla rinnakkainen askel.

Tyypillisellä verkolla on seuraava muoto: kiinteälle rinnan-sarja verkolle, katso seuraavaa peliä:

Esimerkki 3.9 (Peikko ja matkustaja)**.** Peikko ja matkustaja valitsevat kumpikin reitin, jolla he matkustavat kaupungista A kaupunkiin B ja sen jälkeen he paljastavat reittinsä toisilleen. Jokaisella tiellä on oma tullimaksunsa. Tilanteessa, missä peikko ja matkustaja ovat valinneet saman tien, matkustaja maksaa peikolle tullimaksun.

Tämä on selvästi nollasummapeli. Kuten kohta nähdään, tämäntyyppiselle pelille on olemassa yleinen ratkaisutapa.

Voimme tulkita tieverkon virtapiirinä, missä tullimaksut ovat resistansseja. Muistetaan, että konduktanssi on resistanssin käänteisarvo. Kun virtapiirin osat ovat kytkettyinä sarjaan, niiden kokonaisresistanssi on summa niiden yksittäisistä resistansseista. Vastaavasti, segmentille jossa osat ovat rinnankytkettyjä, kokonaiskonduktanssi on summa osien yksittäiskonduktansseista.

Väitetään nyt, että optimaaliset strategiat molemmille pelaajille ovat samat: Pelaajan, joka suunnittelee reittiään optimaalisen strategian mukaisesti, tulee tienhaaran kohdatessaan liikkua mitä tahansa tienhaarasta peräisin olevaa reunaa pitkin todennäköisyydellä joka on vastaava kyseisen reunan konduktanssiin.

Nähdäksemme miksi tämä strategia on optimaalinen, tarvitsemme hieman uutta terminologiaa:

Määritelmä 3.10. Olkoot G_1 ja G_2 nollasummapelejä ja olkoot v_1 ja v_2 niiden arvot. Näiden summapelien *sarja-summapeli* tarkoittaa pelien G_1 ja G_2 pelaamista peräkkäin. Tämän sarja-summapelin arvo on $v_1 + v_2$. *Rinnakkaissummapelissä* kumpikin pelaaja valitsee joko pelin G_1 tai G_2. Jos molemmat valitsevat saman pelin, niin se on peli jota pelataan. Jos valinnat eroavat, niin kumpaakaan peliä ei pelata, ja pelin tulos on nolla.

Tulosmatriisi voidaan tässä tapauksessa kirjoittaa seuraavalla tavalla:

II / I		
	G_1	0
	0	G_2

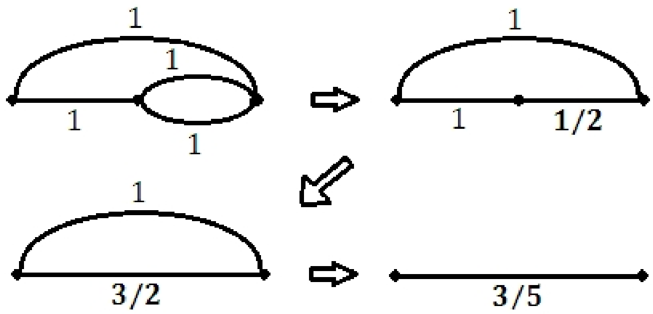
Jos molemmat pelaajat pelaavat G_1 ja G_2 optimaalisesti, tulosmatriisi näyttää seuraavalta:

I \ II		
	v_1	0
	0	v_2

Optimaalinen strategia kummallekin pelaajalle koostuu minimax-periaatteen mukaisesti G_1:n pelaamisesta todennäköisyydellä $v_2/(v_1+v_2)$ ja G_2:n pelaamisesta todennäköisyydellä $v_1/(v_1+v_2)$. Koska on

$$\frac{v_1 v_2}{v_1+v_2} = \frac{1}{1/v_1 + 1/v_2},$$

tämä selittää optimaalisen strategian muodon peikko-matkustaja -peleissä sarjaan-rinnan - kaavioissa.



Kuva 6. Kuvan vasemmassa yläkulmassa esitetyn verkon kokonaisresistanssi on 3/5.

Yleisissä kaavioissa, joissa on kaksi kärkipistettä A ja B, peli täytyy määritellä seuraavalla tavalla: Jos peikko ja matkustaja kulkevat tietyn reunan eri suuntiin, peikko maksaa tiemaksun matkustajalle. Tällöin pelin arvoksi saadaan *kokonaisresistanssi* A:n ja B:n välillä.

Jos nyt esimerkiksi esitetään kuvan 6 vasemman alakulman tilanne matriisimuodossa, saadaan

I \ II		
	1	0
	0	3/2

Tästä nähdään vastaavalla tavalla kuin kappaleessa 2, että yllä olevan matriisimuodossa esitetyn pelin arvo on todellakin 3/5.

4. Pelin laajennettu muoto

Aiemmin tutuksi tullut pelin strateginen muoto on kompakti tapa kuvata pelin matemaattista luonnetta. Lisäksi se mahdollistaa suoraviivaisen menetelmän pelin analysoimiseen. Monissa tapauksissa pelin luonne kuitenkin häviää näin yksinkertaista mallia käytettäessä. Toinen matemaattinen malli pelille, pelin laajennettu muoto, perustuu perusoletuksiin asemista ja siirroista. Nämä käsitteet eivät ole ilmeisiä kun tutkitaan pelin strategista muotoa. Pelin laajennetussa muodossa voidaan ottaa huomioon pelin luonteelle uusia ominaisuuksia, esimerkiksi bluffaaminen ja signalointi. Kun tutkitaan pelin laajennettua muotoa, esitellään kolme uutta käsitettä: pelin puu, satunnainen siirto ja informaatiojoukko.

Pelin laajennettua muotoa voidaan mallintaa käyttämällä suunnattua kaaviota.

Määritelmä 4.1. *Suunnattu kaavio* on pari (T, F), missä T on epätyhjä joukko verkon kärkiä ja F on funktio, joka antaa jokaiselle $x \in T$ osajoukon $F(x) \subset T$, jota kutsutaan x:n seuraajiksi.

Kun suunnatulla kaaviolla kuvataan peliä, kärjet kuvaavat pelin asemia. Aseman x seuraajat $F(x)$ ovat niitä asemia jotka voi saavuttaa x:stä yhdellä siirrolla.

Määritelmä 4.2. *Polku* kärjestä t_0 kärkeen t_1 on ketju, $x_0, x_1, ..., x_n$, kärkiä siten, että $x_0 = t_0$, $x_n = t_1$ ja x_i on x_{i-1}:n seuraaja, kun $i = 1, ..., n$.

Pelin laajennettua muotoa tarkastellessa käsittelemme erityistä suunnattua kaaviota, jota kutsutaan puuksi.

Määritelmä 4.3. *Puu* on suunnattu kaavio (T, F), missä on olemassa kärki t_0, jota kutsutaan juureksi tai ensimmäiseksi kärjeksi, siten, että jokaiselle muulle kärjelle $t \in T$, on olemassa yksikäsitteinen polku alkaen t_0:sta päättyen t:hen.

Polun olemassaolo ja yksikäsitteisyys merkitsevät sitä, että puu on yhtenäinen, sillä on yksikäsitteinen juuri ja sillä ei ole kierroksia tai silmukoita.

Pelin laajennettussa muodossa peli alkaa ensimmäisestä kärjestä ja jatkuu pitkin jotakin polkua päättyen lopulta viimeisessä kärjessä. Viimeisessä kärjessä pelin säännöt määrittävät voiton tai tappion. Koska käsittelemme vielä kahden pelaajan nollasummapelejä, voimme määrätä tämän tuoton olevan se määrä, jonka pelaaja I voittaa pelaajalta II. Kärjille, jotka eivät ole viimeisiä kärkiä, on kolme mahdollisuutta. Jotkin näistä kärjistä on osoitettu pelaajalle I, joka voi päättää siirron siinä asemassa. Loput ovat osoitettu pelaajalle II. Jotkin kärjistä ovat puolestaan määritetty asemiksi joissa tehdään *satunnainen siirto*.

Monissa peleissä on satunnaisia siirtoja. Esimerkiksi nopan heittämistä pelissä kuten monopoli kutsutaan satunnaiseksi siirroksi. Sama pätee korttien jakamiseen esimerkiksi pelattaessa pokeria. Tällaisissa peleissä satunnaisilla siirroilla on iso rooli. Oletetaan, että pelaajat tietävät erilaisten satunnaisten siirtojen taustalla olevat todennäköisyydet, esimerkiksi noppaa heitetettäessä.

Informaatio pelin aikaisemmista siirroista on toinen tärkeä tekijä, jota tulee tarkastella kun tutkitaan pelejä niiden laajennetussa muodossa. Esimerkiksi pokerissa pelaaja on tietoinen siitä, että korttien sekoittaminen ja jakaminen on täysin satunnainen tapahtuma. Hän on myös tietoinen siitä, mitkä kortit hänelle itselleen jaetaan, mutta hän ei ole tietoinen siitä, mitkä kortit vastustajalle on jaettu. Tämä johtaa bluffaamisen mahdollisuuteen.

Määritellään seuraavaksi, mitä tarkoitetaan informaatiojoukolla, kun tutkitaan pelejä laajennetussa muodossa.

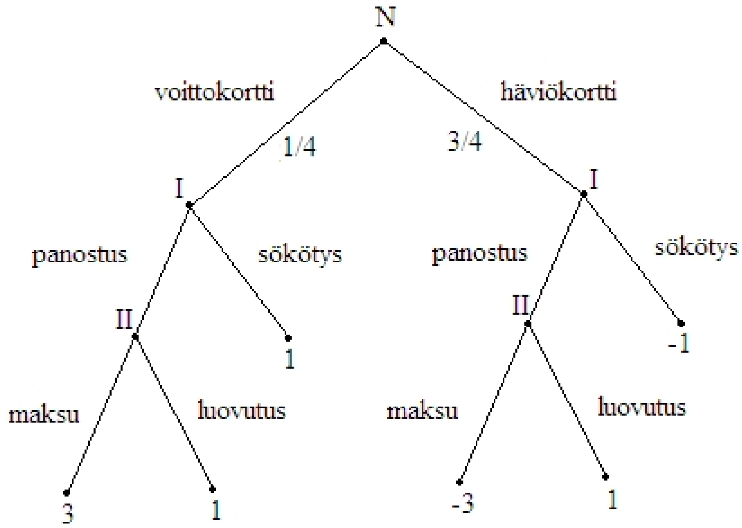
Määritelmä 4.4. *Informaatiojoukoksi* kutsutaan pelin puun kärkien joukkoa, joissa pelaaja tietää olevansa. Kaikissa kärjissä pelaajalla on samat valintamahdollisuudet. Jos informaatiojoukko on yksikköjoukko, pelaajalla on täydellinen informaatio siitä mitä pelissä on tapahtunut. Jos informaatiojoukossa on kaksi tai usempi kärkeä, pelaaja ei yksikäsitteisesti tiedä, mitä pelissä on tapahtunut.

4.1. **Yksinkertainen loppupeli pokerin viimeisellä panostuskierroksella.** Tutustutaan seuraavaksi erääseen yksinkertaiseen ja hyödylliseen matemaattiseen malliin tilanteessa, jossa kaksi pelaajaa pelaavat pokeria keskenään. Tämä on malli tilanteesta, johon toisinaan törmätään kun kaksi pelaajaa on pelissä mukana ja heillä on yksi panostuskierros jäljellä. Peliä pelataan seuraavasti: Molemmat pelaajat laittavat aloituspanoksen, olkoon se yksi euro, pöydän keskelle. Rahaa pöydän keskellä, aluksi siis kahta euroa, kutsutaan potiksi. Seuraavaksi pelaajalle I jaetaan yksi kortti 52 kortin pakasta. Tämä kortti on voittokortti, eli pelajaa voittaa potin tällä kortilla, pelaajalle I todennäköisyydellä 1/4 ja häviökortti, eli pelaaja häviää potin tällä kortilla, todennäköisyydellä 3/4. Pelaaja I näkee kortin, mutta pitää sen näkymättömissä pelaajalta II. Pelaaja II ei saa korttia. Seuraavaksi pelaaja I joko sököttää (eli ei panosta mitään) tai panostaa. Jos hän sököttää, hänen korttinsa tarkastetaan; jos hänellä on voittokortti, niin hän voittaa potin ja täten pelaajan II:n asettaman euron aloituspanoksen. Muutoin hän häviää oman aloituspanoksensa pelaajalle II. Jos pelaaja I panostaa sököttämisen sijaan, hän laittaa kaksi euroa lisää pottiin. Tällöin pelaaja II:n täytyy tietämättä pelaaja I:n korttia joko maksaa tai luovuttaa. Jos pelaaja II luovuttaa, hän häviää potin riippumatta siitä, mikä kortti pelaajalla I on kädessään. Jos pelaaja II maksaa, myös hän laittaa kaksi euroa lisää pottiin. Tällöin pelaaja I:n kortti paljastetaan ja pelaaja I joko voittaa kolme euroa (aloituspanos ja maksu), jos hänellä on voittokortti tai häviää kolme euroa (aloituspanos ja panostus), jos hänellä on häviökortti.

Laaditaan tästä pelistä puu. Pelissä on enimmillään kolme siirtoa: (1) satunnainen siirto, joka valitsee kortin pelaajalle I, (2) pelaaja I:n siirto, jossa hän joko sököttää tai panostaa, ja (3) pelaaja II:n siirto, jossa hän joko luovuttaa tai maksaa. Merkitään jokaiseen pelin puun kärkeen kumman pelaajan siirto tapahtuu kyseisestä asemasta. Satunnaisia siirtoja merkitään yleensä N:llä (moves by nature). Katso kuva 7.

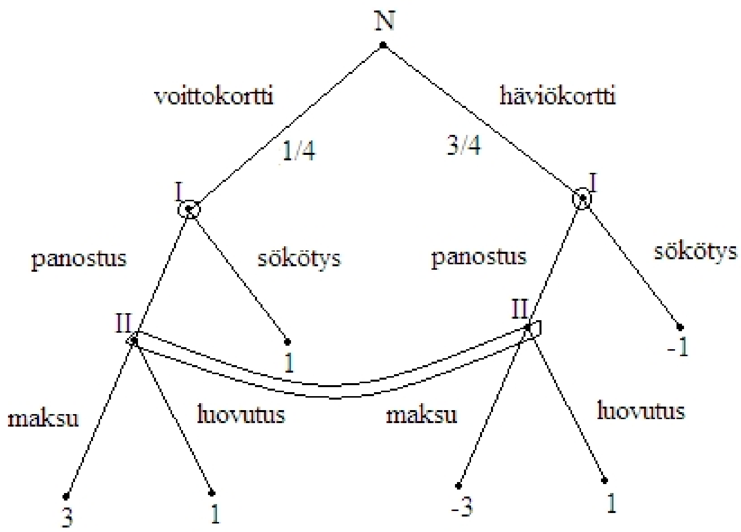
Siirrot oletetaan kulkevan ylhäältä alaspäin. Jos kärkeen on merkitty N satunnaiseksi siirroksi, merkitään tästä kärjestä lähtevien sivujen alapuolelle todennäköisyydet, jolla siirrot tapahtuvat. Jokaisen viimeisen kärjen alapuolelle merkitään numeerinen arvo pelaaja I:n voitosta (pelaaja II:n tappiosta).

Kuvasta 7 puuttuu enää yksi olennainen ominaisuus. Pyritään siihen, että pelin puusta voidaan rekonstruoida kaikki pelin olennaiset säännöt. Näitä ei vielä voida lukea kuvasta 7, sillä emme ole ilmaiseet sitä, että hetkellä jolla pelaaja II tekee siirtonsa hän ei tiedä minkä kortin pelaaja I on saanut käteensä. Toisin sanoen, pelaaja II:n siirron hetkellä, hän ei tiedä kummassa mahdollisessa asemassa hän on. Ilmaistaan tämä kaaviossa ympyröimällä nämä asemat suljetulla käyrällä ja sanotaan, että nämä kaksi kärkeä muodostavat informaatiojoukon. Kaksi kärkeä, joihin pelaaja I voi siirtyä muodostavat kaksi erillistä informaatiojoukkoa, koska hänelle on kerrottu satunnaisen siirron tulos. Ilmaistaan tämä kaaviossa piirtämällä pienet ympyrät



KUVA 7. Yllä kuvatun pelin puu.

näiden kärkien ympärille. Toinen pelaaja II:lle osoitetun kärjen merkeistä voidaan poistaa, sillä kärjet kuuluvat samaan informaatiojoukkoon. Pelin valmis puu näyttää seuraavalta:

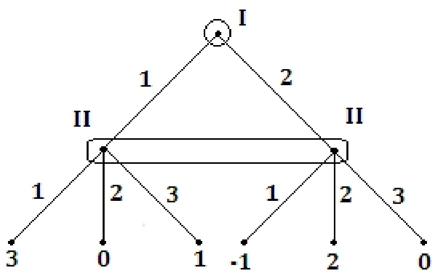


KUVA 8. Kaaviosta voidaan nyt lukea kaikki pelin olennaiset säännöt.

4.2. **Pelin esittäminen laajennetussa muodossa.** Pelin esittäminen strategisessa muodossa on varsin yksinkertaista. Aiemmin tässä kappaleessa esitetyn tiedon perusteella laajennetussa muodossa peli näyttää hieman hankalammalta. Se kuvataan pelin puulla, jossa jokainen kärki, joka ei ole puun viimeinen kärki, merkitään joko satunnaiseksi siirroksi tai pelaajan siirroksi. Puussa on eritelty jokainen informaatiojoukko, satunnaisille siirroille ilmoitettu todennäköisyydet ja jokaiseen viimeiseen kärkeen merkitty pelaajan voiton/tappion arvo. Näyttäisi siltä, että laajennetussa muodossa esitettyyn peliin liiittyvä teoria on paljon kattavampaa kuin strategisessa muodossa olevien pelien. Pian huomataan kuitenkin, että kun tarkastellaan vain laajennetussa muodossa olevan pelin strategioita ja keskimääräisiä tuottoja, voidaan peli supistaa strategiseen muotoon.

Tarkistetaan ensin, että strategisessa muodossa oleva peli voidaan esittää laajennetussa muodossa. Strategisessa muodossa esitetyssä pelissä pelaajien katsotaan tekevän päätöksensä yhtäaikaisesti, kun taas laajennetun muodon pelissä yhtäaikaiset siirrot eivät ole sallittuja. Kuitenkin, yhtäaikaiset siirrot voivat tapahtua peräkkäin seuraavalla tavalla: annetaan toisen pelaajista, olkoon pelaaja I, tehdä siirtonsa ensin, ja annetaan tämän jälkeen pelaaja II:n tehdä siirtonsa tietämättä pelaaja I:n siirtoa. Tämä tiedon puute voidaan kuvata käyttämällä sopivaa informaatiojoukkoa. Esimerkki alla kuvaa tätä.

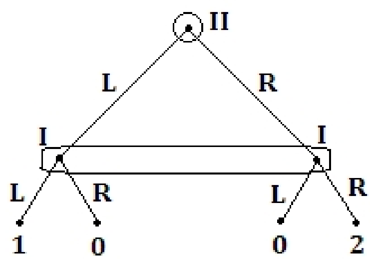
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



Kuva 9. Vasemmalla peli esitetty strategisessa muodossa, oikealla vastaava peli laajennetussa muodossa.

Pelaajalla I on kaksi puhdasta strategiaa, pelaajalla II on kolme. Kuvitellaan, että pelaaja I tekee siirtonsa ensin valitsemalla joko rivin 1 tai rivin 2. Sitten pelaaja II tekee siirtonsa, tietämättä pelaaja I:n tekemää siirtoa. Tätä on kuvattu pelaaja II:lle merkityllä informaatiojoukolla. Tämän jälkeen pelaaja II tekee siirtonsa valitsemalla sarakkeen 1, 2 tai 3, jolloin pelille saadaan lopputulos.

Yritetään nyt hahmotella esimerkin 2.1. peli 'Valitse käsi' laajennetussa muodossa. Muistetaan, että pelaaja II aloittaa pelin valitsemalla joko yhden kolikon vasempaan käteensä tai kaksi kolikkoa oikeaan käteensä. Tämän jälkeen pelaaja I valitsee jomman kumman pelaaja II:n käsistä ja voittaa sen sisältämän summan, siis 0, 1 tai 2 kolikkoa. Pelin puu näyttää seuraavalta:



Kuva 10. Esimerkin 2.1. peli kuvattu laajennetussa muodossa.

Esimerkki 4.5. Etsitään strateginen muoto pelille "Yksinkertainen loppupeli pokerin viimeisellä panostuskierroksella", jota käsiteltiin aiemmin ja jonka puu esitettiin kuvassa 7. Pelaajalla I on kaksi informaatiojoukkoa. Kummassakin joukossa hänen on tehtävä valinta kahden vaihtoehdon väliltä. Täten hänellä on $2 \cdot 2 = 4$ puhdasta strategiaa. Merkitään niitä seuraavasti:

(p, p) : panostus voitto- ja häviökortilla.

(p, s) : panostus voittokortilla, sökötys häviökortilla.

(s, p) : sökötys voittokortilla, panostus häviökortilla.

(s, s) : sökötys voitto- ja häviökortilla.

Olkoon nyt $X = \{(p, p), (p, s), (s, p), (s, s)\}$. On syytä huomata, että X sisältää kaikki puhtaat strategiat riippumatta siitä ovatko ne hyviä vai huonoja. Tässä tapauksessa esimerkiksi (s, p) vaikuttaa varsin huonolta strategialta.

Pelaajalla II on vain yksi informaatiojoukko. Nimetään sitä Y:llä, $Y = \{m, l\}$, missä

m : jos pelaaja I panostaa, maksu.

l : jos pelaaja I panostaa, luovuttaminen.

Nyt voidaan määrittää tulosmatriisi. Oletetaan, että pelaaja I käyttää strategiaa (p, p) ja pelaaja II strategiaa m. Nyt jos pelaaja I saa voittokortin (mikä tapahtuu todennäköisyydellä 1/4), hän panostaa, pelaaja II maksaa ja pelaaja I voittaa kolme euroa. Mutta jos pelaaja I saa häviökortin (mikä tapahtuu todennäköisyydellä 3/4), hän panostaa, pelaaja II maksaa ja pelaaja I häviää kolme euroa. Pelaaja I:n keskimääräinen voitto on

$$V((p, p), m) = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}.$$

Näin on saatu alla esitetyn tulosmatriisin vasemmassa yläkulmassa oleva alkio. Muut alkiot löydetään vastaavilla laskuilla ja voidaan muodostaa tulosmatriisi:

	m	l
(p, p)	-3/2	1
(p, s)	0	-1/2
(s, p)	-2	1
(s, s)	-1/2	-1/2

Nyt tämä 4×2 -peli voidaan ratkaista käyttäen tässä tutkielmassa aiemmin esiteltyjä menetelmiä. Huomataan, että matriisin ensimmäinen rivi dominoi kolmatta riviä ja toinen rivi dominoi neljättä riviä. Tässä kohtaa havaitaan yksi jo etukäteen selvältä tuntunut ominaisuus tälle pelille: jos pelaaja I saa voittokortin, hänen ei luonnollisesti kannata sököttää. Panostamalla hän voittaa vähintään yhtä paljon ja mahdollisesti enemmän. Kun tulosmatriisin kaksi alinta riviä on eliminoitu, saadaan matriisi muotoon

$$\begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Tästä muodosta voidaan ratkaista pelin arvo samalla tavalla kuin kappaleessa 3.2. Pelin arvoksi saadaan $v = -1/4$. Pelaaja I:n optimaalinen strategia on sekoittaa strategioita (p, p) ja (p, s) todennäköisyyksillä $1/6$ ja $5/6$. Pelaaja II:n optimaalinen strategia on sekoittaa strategioita m ja l todennäköisyydellä $1/2$ kummallekin. Strategiaa (p, p) voidaan kutsua pelaaja I:n bluffausstrategiaksi, koska se sisältää panostuksen häviökortilla. Strategia (p, s) on pelaaja I:n 'rehellinen' strategia, koska tällöin pelaaja I panostaa voittokortillaan ja sököttää tappiokortillaan. Pelaaja I:n optimaalinen strategia sisältää siis jonkin verran bluffaamista ja jonkin verran rehellistä pelaamista.

5. Yleiset summapelit

5.1. **Esimerkkejä.** Tarkastellaan seuraavaksi nollasummapeleistä poikkeavia pelejä, joita voidaan kutsua *yleisiksi summapeleiksi*. Näiden pelien analysointi on välttämättä monimutkaisempaa kuin nollasummapelien kohdalla. Koska pelaajien tuottojen summa ei ole enää nolla, esimerkkipelaajan tuoton maksimointi ei enää vastaa vastapelaajan tuoton minimointia. Yleiset summapelit esitetään strategisessa muodossa matriisien A ja B avulla. Näiden matriisien alkiot esittävät niitä tuloksia, jotka vastaavat kahden pelaajan yhteisiä puhtaita strategioita. Yleensä ei ole olemassa pelaajille yhteistä optimaalista strategiaa, mutta on kuitenkin olemassa yleistys von Neumannin minimax-lauseelle, niin sanottu Nashin tasapaino. Nämä tasapainot antavat strategiat, joita 'järkevä' pelaaja voi noudattaa. Usein on kuitenkin olemassa monta eri Nashin tasapainoa ja niiden väliltä valitessa voi olla optimaalista että pelaajien välillä on jonkin verran yhteistyötä. Lisäksi, kaksi strategiaa pohjautuen yhteistyöhön voi olla parempi valinta molemmille pelaajille kuin yksikään Nashin tasapainoista. Tarkastellaan ensin seuraavaa esimerkkiä.

Esimerkki 5.1 (Vangin dilemma)**.** Yksi klassisista peliteorian käsittelemistä valintatilanteista on nimeltään Vangin dilemma. Sen kehittivät Merrill Flood ja Melvin Dresher vuonna 1950 toimiessaan Rand Corporationissa. He eivät vielä tällöin puhuneet pelistä sen nykyisellä nimellä, vaan pelin formalisoi myöhemmin Albert Tucker, joka otti käsittelyyn vankeusrangaistukset ja nimesi pelin Vangin dilemmaksi. Siinä kaksi rikoksen tehnyttä henkilöä ovat jääneet kiinni ja heitä kuulustelee poliisi. Poliisi pyytää epäilyjä joko tunnustamaan rikoksen tai olemaan hiljaa. Syyte on vakava, mutta poliisin todistusaineisto on heikko. Jos toinen epäillyistä tunnustaa ja toinen on hiljaa, rikoksen tunnustanut pääsee vapaaksi ja hiljaa pysytellyt saa kymmenen vuoden tuomion. Jos molemmat tunnustavat, molemmat saavat kahdeksan vuoden tuomion. Jos taas molemmat ovat hiljaa, tuomio on molemmille yksi vuosi vankeutta. Jos merkitään H = 'epäilty on hiljaa' ja T = 'epäilty tunnustaa rikoksen' ja kirjataan tulosmatriisi siten, että negatiivinen tulos vastaa vuosia vankilassa, niin saadaan seuraava tulosmatriisi:

II / I	H	T
H	(-1,-1)	(-10,0)
T	(0,-10)	(-8,-8)

Tulosmatriisit pelaajille I ja II ovat ne 2×2 -matriisit, jotka muodostuvat ensimmäisen tai toisen alkion yhdistelmistä yllä esitetyssä matriisissa. Tässä tapauksessa nämä 2×2 -matriisit ovat muotoa

II / I	H	T
H	-1	-10
T	0	-8

II / I	H	T
H	-1	0
T	-10	-8

Ylempi matriiseista on siis pelaajan I tulosmatriisi ja alempi pelaajan II tulosmatriisi.

Jos pelaajat pelaavat vain yhden kierroksen, niin molempien pelaajien optimaalinen strategia olisi tunnustaa: tulos, jonka pelaaja pystyy itselleen takaamaan on parempi kuin vaihtoehto, jossa hän on hiljaa, riippumatta toisen pelaajan valinnasta. Kuitenkin tämä tulos on paljon huonompi kummallekin pelaajalle kuin se, jonka he saavuttavat olemalla hiljaa. Vain kerran pelattavassa pelissä, yleisesti suotavampi tulos jossa molemmat pelaajat ovat hiljaa kuulusteluissa, voi tapahtua vain jos molemmat pelaajat tukahduttavat halunsa saavuttaa parhaan tuloksen itselleen. Tämä pätee myös peleissä, joissa on toistuvat siirrot ja joiden lopetusaika tiedetään. Peleissä, joissa on toistuvat siirrot ja jotka päättyvät satunnaisella hetkellä, yleisesti suotavampi tulos voidaan saavuttaa myös itsekkäällä pelillä.

Esimerkki 5.2 (Sukupuolten välinen taisto)**.** Olkoon olemassa aviopari, jonka vaimo haluaa viettää illan miehensä kanssa tanssikurssilla, mutta mies haluaisi käyttää illan katsellen jalkapalloa. Kumpikaan ei ole tyytyväinen, jos he viettävät illan eri paikoissa. Määritellään vaimo pelaaja I:ksi ja mies pelaaja II:ksi ja kuvataan tilannetta tulosmatriisilla, jossa T = 'ilta tanssikurssilla' ja J = 'ilta katsellen jalkapalloa'.

II / I	T	J
T	(4,1)	(0,0)
J	(0,0)	(1,4)

Huomataan tässä tilanteessa kaksi muutosta verrattuna von Neumannin minimaxteoriaan. Ensimmäiseksi, pelaajat eivät oleta minkäänlaista rationaalista ajattelua vastapelaajalta, joten he haluavat taata tuloksen olettaen huonoimman mahdollisen tilanteen. Pelaaja I voi taata niin sanotun turvallisuus-arvon $\max_{\mathbf{x}\in\Delta_2} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_2} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$, missä A ilmaisee matriisina pelaajan saamat tulokset. Tämä antaa pelaajalle I strategian $(1/5, 4/5)$, taatun tuoton ollessa $4/5$, mikä ei riipu siitä mitä pelaaja II tekee. Vastaava strategia pelaajalle II on $(4/5,\ 1/5)$, samalla taatulla tuotolla $4/5$. Huomataan, että nämä arvot ovat pienempiä kuin ne mitä pelaajat saisivat yksinkertaisesti suostumalla menemään sinne minne toinen haluaa.

Toinen muutos minimax-lähestymistavasta on se, että pelaaja I ilmaisee hänen todennäköisyytensä mennä tanssikurssille p, olettaen että pelaaja II maksimoi tuottonsa tällä p:n arvolla. Tämän jälkeen pelaaja I maksimoi tuloksensa p:n mukaan. Kuitenkin toisin kuten nollasummapeleissä, yleisessä summapelissä strategian ilmaiseminen ja sen mukaan toimiminen voi nostaa ilmaisijan tuottoa, ja siten nousee kysymys kuinka malli voi sopia tälle mahdollisuudelle. Meidän pelissämme kumpikin pelaaja voisi vain ilmoittaa heidän suosikkivalintansa ja olettaa puolisonsa tekevän 'järkevän' valinnan eli olevan samaa mieltä. Tämä johtaisi katastrofiin, ellei jompi kumpi pariskunnasta ehtisi tehdä valintaansa ennen toista ja samalla toinen puoliso uskoisi ettei tätä valintaa voi muuttaa ja toimisi 'järkevästi'.

Tässä esimerkissä on varsin alkeellisesti oletettu, että kaksi pelaajaa ei voi neuvotella keskenään eikä pelissä ole toistuvia siirtoja. Joka tapauksessa, tämä esimerkki osoittaa ettei minimax-lähestymistapa ole enää sopiva.

5.2. **Nashin tasapaino.** Esitetään nyt keskeinen käsite yleisille summapeleille:

Määritelmä 5.3 (Nashin tasapaino)**.** Pari vektoreita $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, missä $\mathbf{x}^* \in \Delta_m$ ja $\mathbf{y}^* \in \Delta_n$, määritellään *Nashin tasapainoksi*, jos kumpikaan pelaaja ei saavuta etua poikkeamalla yksipuolisesti sovitusta strategiasta. On siis

$$\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{y}^*$$

kaikille $\mathbf{x} \in \Delta_m$, ja

$$\mathbf{x}^{*T} B \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^T B \mathbf{y}^*$$

kaikille $\mathbf{y} \in \Delta_n$. Peliä sanotaan *symmetriseksi*, jos pelaajilla on sama strategiajoukko ja pelin tuotto riippuu ainoastaan käytetyistä strategioista, ei siitä kuka niitä käyttää. Symmetriselle pelille on siis $m = n$ ja $A_{ij} = B_{ji}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Strategioiden paria $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sanotaan symmetriseksi, jos $x_i = y_i$ kaikilla $i = 1, ..., n$.

Tarkastellaan nyt symmetristä tilannetta, missä $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ on Nashin tasapaino. Osoitetaan, että on olemassa myös toinen Nashin tasapaino. Suoraan Nashin tasapainon määritelmästä voidaan kirjoittaa:

$$\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{y}^* \text{ kaikille } \mathbf{x} \in \Delta_m$$

Tämä saadaan transpoosin määritelmää käyttämällä muotoon

$$\mathbf{y}^{*T} A^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{y}^{*T} A^T \mathbf{x}$$

ja symmetriaa $A^T = B$ käyttämällä saadaan

$$\mathbf{y}^{*T} B \mathbf{x}^* \geq \mathbf{y}^{*T} B \mathbf{x}.$$

Vastaavasti

$$\mathbf{x}^{*T} B \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^T B \mathbf{y}^*$$
$$\mathbf{y}^{*T} B^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{y}^T B^T \mathbf{x}^*$$
$$\mathbf{y}^{*T} A \mathbf{x}^* \geq \mathbf{y}^T A \mathbf{x}^*$$

Joten on löydetty toinen Nashin tasapaino, $(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*)$.

Pian huomataan, että Nashin tasapaino on aina olemassa ja että niitä voi olla useita. Jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat yksikkövektoreita, missä 1 on jokin koordinaatti ja kaikki muut koordinaatit ovat nollia, niin tasapainon sanotaan olevan *puhdas*. Ei-puhdasta tasapainoa sanotaan puolestaan *sekatasapainoksi*.

Esimerkin 6.2., "Sukupuolten välinen taisto", tilanteessa on kaksi puhdasta tasapainoa: ne ovat TT ja JJ. Selvästi nämä ovat Nashin tasapainoja, sillä kumpikaan pelaaja ei saavuta etua muuttamalla strategiaansa näissä tapauksissa. On myös olemassa sekatasapaino, (4/5, 1/5) pelaajalle I ja (1/5, 4/5) pelaajalle II, jolla on arvo 4/5.

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin edellä mainittua Nashin sekatasapainoa ja todetaan, että kyseessä varmasti on Nashin tasapaino. Olkoon nyt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan tilannetta ensin pelaaja I:n näkökulmasta. Tällöin

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Nyt saadaan

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} p \ , & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p \ , & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$
$$= 4pq + (1-p)(1-q) =: g(p,q)$$

Sijoitetaan nyt $q = 1/5$ saatuun $g(p,q)$ ja saadaan

$$g(p, 1/5) = 4p(1/5) + (1-p)4/5 = 4/5p + 4/5 - 4/5p = 4/5$$

Huomataan, että $g(p,q)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(p,q) = (5q-1)p + (1-q)$$

Tämä on p:n suhteen tulkittuna suora, joka riippuu q:n arvosta. Derivoimalla $g(p,q)$ p:n suhteen saadaan

$$g_p(p,q) = 5q - 1$$

Nähdään, että $g_p(p,q) = 5q - 1 \begin{cases} = 0, \text{kun } q = \frac{1}{5} \\ < 0, \text{kun } q < \frac{1}{5} \\ > 0, \text{kun } q > \frac{1}{5} \end{cases}$

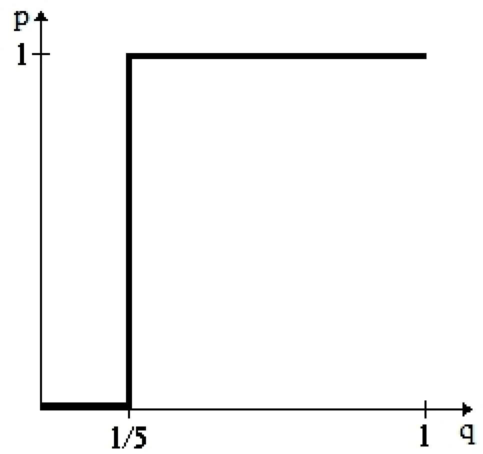
Derivaatan merkkiä tutkimalla nähdään, mitkä p:n arvot ovat optimaalisia pelaajalle I eri q:n arvoilla. Kuvasta 11 nähdään, että kaikilla $q < 1/5$ pelaaja I:n on parasta käyttää strategiaa J. Kun $q > 1/5$, pelaaja I:n on parasta käyttää strategiaa T, kun taas tilanteessa, missä $q = 1/5$, ei ole merkitystä kumman strategian hän valitsee.

Vastaavasti, pelaajan II näkökulmasta tilanne näyttää seuraavalta: Nyt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ja kuten $g(p,q)$ edellä, nyt saadaan $f(p,q)$ laskemalla

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} p \ , & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p \ , & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$
$$= pq + 4(1-p)(1-q) =: f(p,q)$$



KUVA 11. Yllä kuvattu pelaaja I:n parhaita valintoja eri q:n arvoilla.

Nyt $f(p,q)$ voidaan kirjoittaa muodossa

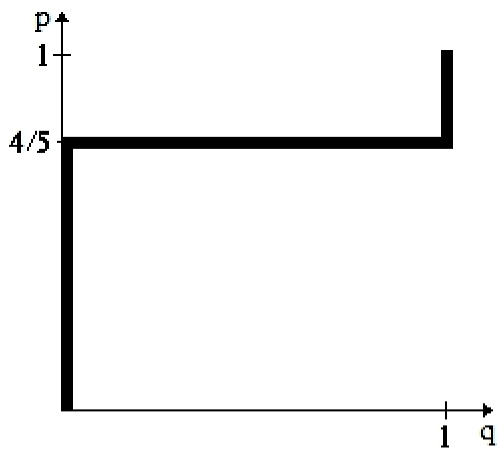
$$f(p,q) = q(5p-4) + 4(1-p)$$

Tämä on suora, joka saa maksimin kun $p = 4/5$. Derivoimalla $f(p,q)$ q:n suhteen saadaan

$$f_q(p,q) = 5p - 4$$

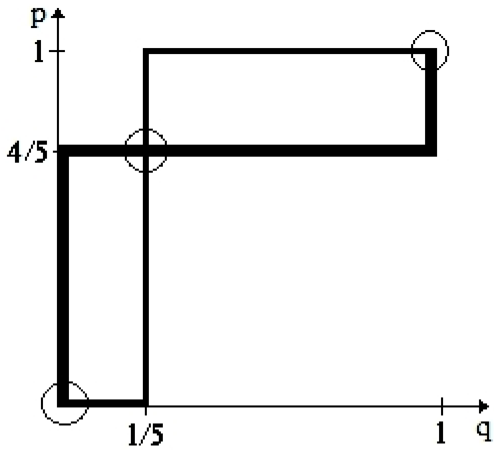
$$\text{Nähdään, että } f_q(p,q) = 5p-4 \begin{cases} = 0, \text{kun}\, p = \frac{4}{5} \\ \neq 0, \text{kun}\, p \neq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Derivaatan merkkiä tutkimalla nähdään, mitkä q:n arvot ovat optimaalisia pelaajalle II eri p:n arvoilla. Kuvasta 12 nähdään, että kaikilla $p < 4/5$ pelaaja II:n on parasta käyttää strategiaa J. Kun $p > 4/5$, pelaaja II:n on parasta käyttää strategiaa T, kun taas tilanteessa, missä $q = 1/5$, ei ole merkitystä kumman strategian hän valitsee.



KUVA 12. Yllä kuvattu pelaaja II:n parhaita valintoja eri p:n arvoilla.

Kun yhdistetään kuvat 11 ja 12, löydetään kuvaajien leikkauspisteistä Nashin tasapainot, jotka on ympyröity kuvassa 13 sivulla 29. Ainoa mahdollinen sekatasapaino löytyy siis silloin, kun $p = 4/5$ ja $q = 1/5$.



Kuva 13. Sekatasapaino sijaitsee kuvaajien leikkauspisteessä.

Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaista mallia, jossa kaksi gepardia jahtaa kahta antilooppia. Gepardit pystyvät ottamaan kiinni sen antiloopin, jonka ne valitsevat. Jos gepardit valitsevat saman antiloopin, niiden täytyy jakaa saalis. Muutoin saalista ei jaeta. Antiloopeista toinen on iso ja toinen pieni, ja niiden arvot gepardeille ovat i ja p. Seuraava tulosmatriisi kuvaa tilannetta:

II / *I*	I	P
I	$(i/2, i/2)$	(i, p)
P	(p, i)	$(p/2, p/2)$

Jos isompi antilooppi on arvoltaan vähintään kaksi kertaa yhtäsuuri kuin pienempi ($i \geq 2p$), niin pelaajan I suhteen ensimmäinen rivi dominoi toista riviä. Vastaavasti pelaajalle II, ensimmäinen sarake dominoi toista saraketta. Siten kummankin gepardin tulisi vain jahdata isompaa antilooppia. Jos $p < i < 2p$, niin on olemassa kaksi Nashin tasapainoa, (I, P) ja (P, I). Tämä sopisi varsin hyvin kummallekin gepardille, mutta kuinka kaksi tervettä gepardia sopisi keskenään sen, kumpi jahtaa pientä antilooppia? Siksi on syytä etsiä symmetristä sekatasapainoa.

Jos ensimmäinen gepardi jahtaa isoa antilooppia todennäköisyydellä q, niin odotettu tuotto toiselle gepardille tämän jahdatessa isompaa antilooppia vastaa lauseketta

$$\frac{i}{2}q + (1-q)i,$$

ja jahdatessa pienempää antilooppia vastaa lauseketta

$$qp + (1-q)\frac{p}{2}.$$

Nashin sekatasapaino ilmestyy siinä x:n arvossa, missä nämä kaksi suuretta ovat yhtäsuuret, koska millä tahansa muulla q:n arvolla pelaajan II olisi poikettava sekastrategiasta $(q, 1-q)$ parempien puhtaiden strategioiden ollessa saatavilla. Nyt huomataan että

$$q = \frac{2i - p}{i + p}.$$

Tämä antaa symmetrisen sekatasapainon.

Entä jos vallitsee tilanne, jossa kaksi gepardia jahtaa kolmea antilooppia, joista yksi on iso ja kaksi pientä? Kuten edellisessä tilanteessa, nytkin ison antiloopin arvo gepardille on i ja pienen antiloopin p, siten, että $i \geq 2p$ ja $p_1 = p_2$. Kuvataan ensin tilannetta tulosmatriisin avulla:

II / I	I	P_1	P_2
I	$(i/2, i/2)$	(i, p_1)	(i, p_2)
P_1	(p_1, i)	$(p_1/2, p_1/2)$	(p_1, p_2)
P_2	(p_2, i)	(p_2, p_1)	$(p_2/2, p_2/2)$

Huomataan, että tilanne on osittain samanlainen kuin edellisessä tapauksessa, mutta tässä on huomionarvoista se, että gepardit voivat jahdata samaa pientä antilooppia. Huomataan myös, että (P_1, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_1) ja (P_2, P_2) eivät ole Nashin tasapainoja, sillä on selvää että näissä tapauksissa kummallakin gepardilla on parempia strategioita.

Nashin symmetriset sekatasapainot ovat erityisen kiinnostavia. On kokeellisesti tutkittu, että joissain biologisissa tilanteissa järjestelmät lähestyvät tämänkaltaista tasapainoa, oletettavasti luonnonvalinnan mekanismilla. Lisätietoa tästä esimerkiksi lähteessä [1]. Selitetään lyhyesti miten tämä voisi toimia. Ensiksi, on luonnollista käsitellä symmetrisiä strategiapareja, koska jos kaksi pelaajaa on valittu sattumanvaraisesti samasta laajasta populaatiosta, niin todennäköisyydet millä he noudattavat tiettyä strategiaa ovat samat. Lisäksi Nashin tasapainolla on erityinen rooli käsiteltäessä symmetrisiä strategiapareja. Tarkastellaan yllä esitettyä symmetristä Nashin sekatasapainoa, missä $p_0 = (2i - p)(i + p)$ on todennäköisyys, jolla gepardi jahtaa isoa antilooppia. Oletetaan, että gepardien populaatio esittää kokonaistodennäköisyyden $p > p_0$ tälle käytökselle (on joko liian monta ahnetta gepardia, tai jokainen gepardi on hieman liian ahne). Nyt, jos jokaiselle gepardille on satunnaisesti valittu kilpailija tästä populaatiosta, niin pienen antiloopin jahtaamisella on korkeampi tuotto kyseiselle gepardille kuin ison antiloopin jahtaamisella. Siten, mitä vaatimattomampi gepardi on, sitä isompi etu sillä on verrattuna keskimääräiseen gepardiin. Samoin, jos gepardien populaatio on keskimääräisesti liian vaatimaton, eli $p < p_0$, niin kunnianhimoisemmalla gepardilla on etu verrattuna keskimääräiseen gepardiin. Ylipäänsä, populaatio näyttää olevan evoluution johdosta pakotettu jahtaamaan antilooppeja Nashin symmetrisen sekatasapainon mukaan.

6. Yli kahden pelaajan yleiset summapelit

On olemassa myös useamman pelaajan summapelejä. Myös tällaisia pelejä tarkasteltaessa voidaan käyttää Nashin tasapainon käsitettä. Kuvataan nyt formaalisti systeemi pelille, jossa on $k \geq 2$ pelaajaa. Jokaisella pelaajalla i on joukko S_i puhtaita strategioita. Jos jokaiselle $i \in \{1, ..., k\}$ pelaaja i käyttää strategiaa $l_i \in S_i$, niin pelaajan j tuotto on $F_j(l_1, ..., l_k)$, missä funktiot $F_j : S_1 \times S_2 \times ... \times S_k \to \mathbb{R}$, kaikilla $j \in \{1, ...k\}$, on annettu.

Esimerkki 6.1 (Ekologia-peli)**.** Kolme yritystä joko saastuttavat tai puhdistavat järveä tulevana vuotena. Yritykset maksavat yhden yksikön puhdistaakseen järveä, mutta saastuttaminen on ilmaista. Jos kaksi tai kolme yritystä saastuttavat, niin järven vedestä tulee käyttökelvotonta ja jokainen yritys joutuu maksamaan kolme yksikköä vedestä, jonka he joutuvat hankkimaan muualta. Jos enimmillään yksi yritys saastuttaa järven vettä, niin vesi säilyy käyttökelpoisena ja yrityksille ei tule lisäkuluja.

Jos oletetaan, että yritys III puhdistaa vettä, niin kustannusmatriisi on seuraavanlainen:

II / I	Pu	Sa
Pu	(1,1,1)	(1,0,1)
Sa	(0,1,1)	(3,3,3+1)

Jos yritys III saastuttaa järven vettä, niin kustannusmatriisi on muotoa:

II / I	Pu	Sa
Pu	(1,1,0)	(3+1,3,3)
Sa	(3,3+1,3)	(3,3,3)

Jotta voimme tarkemmin analysoida peliä, esitellään ensin käsite Nashin tasapainolle tapauksessa, jossa pelissä on enemmän kuin kaksi pelaajaa.

Määritelmä 6.2. *Puhdas Nashin tasapaino* pelissä, jossa on k pelaajaa, on joukko puhtaita strategioita jokaiselle pelaajalle,

$$(l_1^*, ..., l_k^*) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$$

siten, että jokaiselle $j \in \{1, ..., k\}$ ja $l_j \in S_j$,

$$F_j(l_1^*, ..., l_{j-1}^*, l_j, l_{j+1}^*, ..., l_k^*) \leq F_j(l_1^*, ..., l_{j-1}^*, l_j^*, l_{j+1}^*, ..., l_k^*).$$

Yleisemmin, *Nashin sekatasapaino* on sarja sekastrategioita, joita on k kappaletta, missä $\mathbf{x}_i^* \in \Delta_{|S_i|}$ on pelaajan i sekastrategia, siten, että jokaiselle pelaajalle $j \in \{1, \ldots, k\}$ ja todennäköisyysvektorille $\mathbf{x}_j \in \Delta_{|S_i|}$ saadaan

$$\overline{F_j}(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}^*, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}^*, \ldots, \mathbf{x}_k^*) \leq \overline{F_j}(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}^*, \mathbf{x}_j^*, \mathbf{x}_{j+1}^*, \ldots, \mathbf{x}_k^*).$$

Tässä

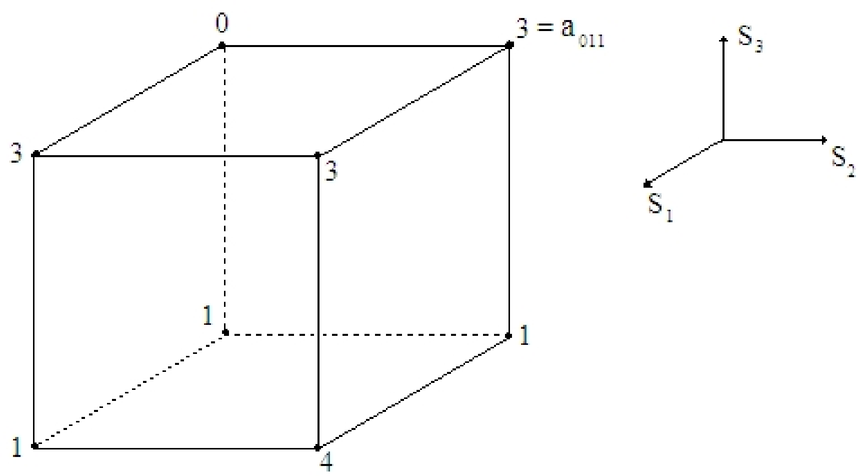
$$\overline{F_j}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) := \sum_{l_1 \in S_1, \ldots, l_k \in S_k} \mathbf{x}_1(l_1) \ldots \mathbf{x}_k(l_k) F_j(l_1, \ldots, l_k),$$

missä $\mathbf{x}_i(l)$ on se todennäköisyys millä pelaaja i valitsee puhtaan strategian l sekastrategiassa $\mathbf{x}_i$.

Palataan esimerkkiin 6.1. Yritysten puhtaita strategioita voidaan nyt kuvata seuraavasti: $S_1 = \{0,1\}$, $S_2 = \{0,1\}$, $S_3 = \{0,1\}$, missä $0 =$ yritys puhdistaa järven vettä ja $1 =$ yritys saastuttaa järven vettä. Yritykset ovat tässä esimerkissä pelaajat I, II ja III, joille voidaan muotoilla funktiot $F_1 : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \mathbb{R}$, $F_2 : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \mathbb{R}$ ja $F_3 : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \mathbb{R}$. Tässä siis $S_1 \times S_2 \times S_3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$. Nyt sivun yläosassa esitettyä kustannusmatriisia katsomalla huomataan, että esimerkiksi $F_1(0,1,1) = 3+1$ (yritys I puhdistaa, yritykset II ja III saastuttavat). Voidaan kirjoittaa määritelmän 6.2 merkinnöillä esimerkiksi $F_3(l_1,l_2,l_3)$ muodossa

$$F_3(l_1,l_2,l_3) = \sum_{i,j,k=0}^{1} a_{ijk} l_1^i l_2^j l_3^k$$

Nyt (a_{ijk}):t muodostavat kolmiulotteisen taulukon, ks. kuva 14. Kuvaan on merkitty esimerkkinä $a_{011} = 3$.



KUVA 14. Ekologia-esimerkin kolmiulotteinen esimerkkitaulukko.

Puhdas tasapaino muodostuu siis tapauksista, joissa joko jokainen yritys saastuttaa järven vettä tai yksi yrityksistä saastuttaa ja kaksi muuta puhdistavat vettä. Etsitään nyt sekatasapainoa. Olkoot p_1, p_2, p_3 todennäköisyydet sille, että yritys I, II, III puhdistaa vettä, jokaiselle erikseen. Jos yritys III puhdistaa vettä, niin sen odotettu kustannus on

$$p_1p_2 + p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)4(1-p_1)(1-p_2).$$

Jos se saastuttaa, niin odotettu kustannus on

$$3p_1(1-p_2) + 3p_2(1-p_1) + 3(1-p_1)(1-p_2).$$

Jos haluamme tasapainon, missä $0 < p_3 < 1$, niin näiden kahden arvon täytyy olla yhtäsuuria, muuten kyseessä ei ole Nashin sekatasapaino. Nyt saadaan

$$1 = 3(p_1 + p_2 - 2p_1p_2).$$

Vastaavasti, olettaen, että $0 < p_2 < 1$ saadaan

$$1 = 3(p_1 + p_3 - 2p_1p_3).$$

ja olettaen, että $0 < p_1 < 1$ saadaan

$$1 = 3(p_2 + p_3 - 2p_2p_3).$$

Vähentämällä toinen yhtälö ensimmäisestä saadaan

$$0 = 3(p_2 - p_3)(1 - 2p_1).$$

Jos $p_2 = p_3$, niin kolmannesta yhtälöstä tulee toisen asteen yhtälö p_2:n suhteen ja sillä on kaksi ratkaisua, $p_2 = p_3 = (3 \pm \sqrt{3})/6$, molemmat välillä $(0, 1)$. Sijoittamalla nämä ratkaisut ensimmäiseen yhtälöön, molemmat antavat $p_1 = p_2 = p_3$, joten on olemassa kaksi symmetristä sekatasapainoa. Jos valitaan ($p_2 = p_3$:n sijaan), että $p_1 = 1/2$, niin ensimmäinen yhtälö tulee muotoon $1 = 3/2$, mikä ei ole totta. Tämä tarkoittaa sitä, että ei ole vähintään kahden sekastrategian asymmetrista tasapainoa. On helppo nähdä, että ei ole olemassa kahden puhtaan ja yhden sekastrategian tasapainoa. Täten olemme löytäneet kaikki Nashin tasapainot: on olemassa yksi symmetrinen ja kolme epäsymmetristä puhdasta tasapainoa ja kaksi symmetristä sekatasapainoa.

7. Nashin lause

Tutkielman viimeisessä luvussa muotoillaan kuuluisa Nashin lause ja esitetään sille todistus käyttäen apuna Brouwerin kiintopistelausetta, mikä todistettiin luvussa 1. Todistus pohjautuu lähteeseen [6]. Muistutus: Brouwerin kiintopistelauseen mukaan jokaisella jatkuvalla funktiolla, joka kuvaa konveksin ja kompaktin joukon itselleen, on kiintopiste.

Lause 7.1. *Jokaiselle yleiselle summapelille, jossa pelaajien lukumäärä on $k \geq 2$, on olemassa vähintään yksi Nashin tasapaino.*

Todistus. Esitetään todistus vain tapauksessa, missä pelillä on kaksi pelaajaa ja että se on määritelty tulosmatriiseilla $A_{m\times n}$ ja $B_{m\times n}$ pelaajille I ja II. Olkoon nyt $K = \Delta_m \times \Delta_n$. Määritellään kuvaus $F : K \to K$ kahden pelaajan strategiaparilta jollekin toiselle strategiaparille. Huomataan ensin, että K on konveksi, suljettu ja rajoitettu. Määritellään seuraavaksi, kun $\mathbf{x} \in \Delta_m$ ja $\mathbf{y} \in \Delta_n$,

$$c_i = c_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{A_{(i)}\mathbf{y} - \mathbf{x}^T A\mathbf{y}, 0\},$$

missä $A_{(i)}$ kuvaa matriisin A i:ttä riviä. Siten, c_i vastaa pelaajan I tuottoa kun hän vaihtaa strategiasta $\mathbf{x}$ puhtaaseen strategiaan i, jos tämä tuotto on positiivinen: muutoin se on nolla. Vastaavasti määritellään

$$d_j = d_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{\mathbf{x}^T B^{(j)} - \mathbf{x}^T B\mathbf{y}, 0\},$$

missä $B^{(j)}$ kuvaa matriisin B j:ttä saraketta. Suureet d_j voidaan tulkita samalla tavalla pelaajalle II kuin c_i pelaajalle I. Nyt voidaan määritellä kuvaus $F : K \to K$ asettamalla $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, missä

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{x}_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k}$$

kun $i \in \{1, ..., m\}$, ja

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \frac{\mathbf{y}_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^n d_k}$$

kun $j \in \{1,...,n\}$. Huomataan, että F on jatkuva, koska c_i ja d_j ovat jatkuvia. Brouwerin kiintopistelauseen avulla huomataan, että on olemassa $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in K$, jolle $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})$. Väitetään nyt, että näille valituille $\mathbf{x}$:lle ja $\mathbf{y}$:lle jokainen $c_i = 0$ kun $i \in \{1,...,m\}$ ja $d_j = 0$ kun $j \in \{1,...,n\}$. Jotta nähtäisiin, että näin on, oletetaan esimerkiksi, että $c_1 > 0$. Huomataan, että pelaajan I tulos on painotettu keskiarvo $\sum_{i=1}^{m} x_i A_{(i)}\mathbf{y}$. Keskiarvon ominaisuuksien nojalla on oltava olemassa $\ell \in \{1,...,m\}$, jolle $\mathbf{x}_\ell > 0$ ja $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \geq A_{(\ell)}\mathbf{y}$. Tälle ℓ saadaan määritelmän mukaan $c_\ell = 0$. Tämä merkitsee sitä, että

$$\tilde{\mathbf{x}}_\ell = \frac{\mathbf{x}_\ell}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k} < \mathbf{x}_\ell,$$

koska $c_1 > 0$. Siten oletus, jonka mukaan $c_1 > 0$ johtaa ristiriitaan. Tämä perustelu voidaan toistaa jokaiselle $i \in \{1,...,m\}$, siten osoittaen, että jokainen $c_i = 0$. Vastaavasti jokainen $d_j = 0$. Voidaan päätellä, että $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \geq A_i\mathbf{y}$ kaikilla $i \in \{1,...,m\}$. Tämä merkitsee sitä, että

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \geq \mathbf{x'}^T A\mathbf{y}$$

kaikille $\mathbf{x'} \in \Delta_m$. Vastaavasti

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{y} \geq \mathbf{x}^T B\mathbf{y'}$$

kaikille $\mathbf{y'} \in \Delta_n$. Siten $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ on Nashin tasapaino.

□

Kun pelaajien määrä $k > 2$, voidaan edelleen käsitellä funktioita

$$c_i^{(j)}(\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{kun } i,j = 1,\ldots,k,$$

missä $\mathbf{x}^{(j)} \in \Delta_{n(j)}$ on sekastrategia pelaajalle j ja $c_i^{(j)}$ on se tuotto pelaajalle j, minkä hän saa siirtymällä strategiasta $\mathbf{x}^{(j)}$ puhtaaseen strategiaan i, mikäli tämä tuotto on positiivinen. Yksinkertainen matriisi-merkintä $c_i^{(j)}$:lle ei ole voimassa, mutta todistus pätee yhä.

Viitteet

[1] Vincent P. Crawford, *Nash Equilibrium and Evolutionary Stability in Large and Finite Populations.* Verkkojulkaisu, Department of Economics, University of California, San Diego. http://www.jstor.org/stable/20075868, luettu 23.8.2013.

[2] Thomas S. Ferguson, *Game Theory, Part II. Two-Person Zero-Sum Games.* Verkkojulkaisu, Mathematics Department, UCLA. http://www.math.ucla.edu/ tom/Game_Theory/mat.pdf, luettu 25.8.2013.

[3] Ignacio García-Jurado, María Gloria Fiestras-Janeiro, Julio González-Díaz, *An Introductory Course on Mathematical Game Theory.* The American Mathematical Society, 2010.

[4] Tero Kilpeläinen, *Analyysi 1.* Verkkojulkaisu, Jyväskylän yliopisto. http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf, luettu 18.10.2012.

[5] Lassi Kurittu, *Algebrallinen topologia.* Verkkojulkaisu, Jyväskylän yliopisto. http://users.jyu.fi/ lkurittu/algtopo.pdf, luettu 20.5.2013.

[6] Yuval Peres, *Game Theory, Alive.* Verkkojulkaisu, University of California, Berkeley, 2010. http://www.stat.berkeley.edu/ peres/gtlect.pdf, luettu 25.8.2013.

[7] Veikko Purmonen, *Euklidiset avaruudet.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 49, 2005.

[8] Anatol Rapoport, *Two-Person Game Theory: The Essential Ideas.* Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1966.

[9] Branislav L. Slantchev, *Game Theory: Dominance, Nash Equilibrium, Symmetry.* Verkkojulkaisu, Department of Political Science, University of California, San Diego. http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/04-strategic-form.pdf, luettu 24.4.2013.

[10] Stanford Encyclopedia of Philosophy, *Game Theory.* http://plato.stanford.edu/entries/game-theory/, luettu 21.5.2013.