Tiedonleviämisprosessi täydellisessä verkossa

Pekka Aalto

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013

Tiivistelmä

Pekka Aalto, Tideonleviämisprosessi täydellisessä verkossa (engl. Information spreading process in the complete graph), matematiikan pro gradu -tutkielma, 44 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2013.

Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään jatkuva-aikaista stokastista tiedonleviämisprosessia täydellisessä n:n solmun verkossa. Tiedonleviämisprosessi tarkoittaa seuraavanlaista prosessia. Alkutilassa yhdellä verkon solmulla on tieto. Prosessin kuluessa tietävät solmut heräilevät satunnaisilla ajanhetkillä. Herätessään tietävä solmu ottaa yhteyttä johonkin toiseen solmuun, jolle tietävä solmu siirtää tiedon. Kirjoitelmassa käsitellään tavallisen tiedonleviämisprosessin yleistystä, jossa tietävä solmu ryhtyy levittämään tietoa todennäköisyydellä p_n. Muussa tapauksessa, eli todennäköisyydellä $1-p_n$, solmusta tulee passiivinen kuuntelija, eikä se tällöin osallistu tiedon levitykseen. Saturaatiohetkeksi sanotaan ajanhetkeä, jolloin kaikki verkon solmut ovat saaneet tiedon, ja informointihetkeksi ajanhetkeä, jolloin yksi kiinnitetty solmu on saanut tiedon. Kirjoitelmassa osoitetaan, että verkon koon n kasvaessa äärettömään saturaatiohetki kasvaa vauhdilla $\frac{1}{p_n}(\log n + \log p_n n)$ ja informointihetki vauhdilla $\frac{1}{p_n} \log p_n n$. Työssä osoitetaan myös tarkemmat jakaumakonvergenssi tulokset edellä mainituille ajanhetkille. Lisäksi monen eri solmun informointihetkien asymptoottinen riippuvuusrakenne selvitetään tarkasti. Analyyttisen osuuden lisäksi selvitetään simuloinnin avulla miten nopeasti konvergenssi rajajakaumiin suunnilleen tapahtuu.

Työn alussa käydään melko kattavasti läpi perusasiat Poisson-prosesseista sekä esitellään lyhyesti numeroituvan tila-avaruuden jatkuva-aikaiset Markov-prosessit. Kirjoitelmassa myös esitetään kirjallisuuteen pohjautuen funktionaalinen suurten lukujen laki Markov-prosesseille. Tämän tuloksen avulla tietynlaisten Markov-prosessien käyttäytymistä voidaan approksimoida determinististen differentiaaliyhtälöiden avulla. Kyseistä tulosta käytetään tässä kirjoitelmassa tiedonleviämisprosessin yhteydessä. Markov-prosessien suurten lukujen lakiin liittyen käydään myös läpi Markov-prosessin esittäminen tietyn stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisuna.

Avainsanat: täydellinen verkko, tiedonleviämisprosessi, SI-prosessi, epidemiamalli, Poisson-prosessi, jatkuva-aikainen Markov-prosessi

Sisältö

1 Johdanto **4**

2 Poisson- ja Markov-prosessit **6**
2.1 Eksponentti- ja Gumbel-jakauma 6
2.2 Poisson-prosessi 8
2.3 Markov-prosessi 11

3 Suurten lukujen laki Markov-prosesseille **12**

4 Tiedonleviämisprosessi **19**
4.1 Saturaatiohetki tavallisessa tiedonleviämisprosessissa 20
4.2 Saturaatiohetki ohennetussa tiedonleviämisprosessissa 23
4.3 Tiedonleviäminen yksittäisille solmuille 31
4.4 Tiedonleviämisprosessin yhteys satunnaisiin etäisyyksiin 35
4.5 Konvergenssin nopeus 36

5 Johtopäätökset **38**

A Liite **39**

1 Johdanto

Tiedonleviämisprosessi tarkoittaa seuraavanlaista prosessia. Otamme ensin äärellisen joukon toimijoita, joita kutsutaan tässä solmuiksi. Solmuja voi ajatella esimerkiksi yksittäisinä ihmisinä. Alkutilassa yhdellä solmulla on tieto. Prosessin kuluessa solmut heräilevät satunnaisilla ajanhetkillä. Herätessään solmu valitsee satunnaisesti jonkin toisen solmun, johon se ottaa yhteyttä. Mikäli heräävällä solmulla on tieto, se lähettää tiedon eteenpäin satunnaisesti valitsemalleen naapurisolmulle. Tällöin solmusta, jolle tieto lähetettiin, tulee myös tietävä solmu, ja sekin voi nyt osallistua tiedon levitykseen. Jos heräävä solmu lähettää tiedon solmulle, jolla tieto on jo valmiiksi, niin tällöin lähetyshetkellä ei tapahdu mitään.

Tiedonleviämisprosessi tunnetaan myös nimellä SI-prosessi (Susceptible, Infected) [19]. Tämä nimi johtuu siitä, että tiedon tilalle prosessissa voi ajatella myös sairauden, eli sairastuneet solmut alkavat tartuttaa sairautta terveisiin solmuihin. Tiedonleviämisprosessi on osa laajempaa epidemiamallien joukkoa (esim. [13]). Muita epidemiamalleja ovat esimerkiksi SIR-prosessi (esim. [9]) ja SIS-prosessi (esim. [20]). SIR-prosessissa (Susceptible,Infected,Removed/Recovered) sairastuneet solmut levittävät sairautta vain jonkun aikaa, jonka jälkeen ne poistuvat prosessista, eli parantuvat saaden immuniteetin tautiin tai kuolevat. SIS-prosessissa solmut voivat parantua, mutta ne voivat parantumisen jälkeen sairastua uudelleen. Tässä työssä ei tutkita muita epidemiamalleja kuin SI-prosessia. Sairauden leviämisen lisäksi yksi tärkeä tiedonleviämisprosessin sovellus on informaation siirtyminen tietoverkoissa [14].

Tässä kirjoitelmassa yleistetään tavallinen tiedonleviämisprosessi siten, että osa verkon solmuista on passiivisia kuuntelijoita, jotka eivät levitä tietoa eteenpäin. Tätä prosessia kutsutaan tässä työssä ohennetuksi tiedonleviämisprosessiksi, ja tavallinen tiedonleviämisprosessi saadaan sen erikoistapauksena. Ohennettu tiedonleviämisprosessi on siis eräänlainen SI- ja SIR-prosessien välimuoto.

Tässä työssä tutkitaan tiedonleviämistä ainoastaan täydellisessä verkossa. Tämä tarkoittaa sitä, että mikä tahansa solmu voi ottaa yhteyttä mihin tahansa toiseen solmuun. Mikään ei tietysti estäisi tutkimasta tiedonleviämistä myös yleisemmässä ei-täydellisessä verkossa, jossa kaikkien solmujen välillä ei välttämättä ole linkkiä. Tämä on kuitenkin huomattavasti hankalampaa.

Ennen varsinaista asiaa käsitellään perusasioita Poisson- ja Markov-prosesseista Luvuissa 2.2 ja 2.3. Luvussa 3 todistetaan kirjaan [12] pohjautuen Markov-prosesseille tärkeä raja-arvotulos, jota käytetään Luvussa 4.3.

Luvuissa 4.1 ja 4.2 tarkastellaan sitä, miten nopeasti tieto leviää kaikille solmuille. Tämä ajanhetki voidaan ajatella myös etäisyytenä lähtösolmusta siitä kauimpana olevaan solmuun verkossa, jossa linkkien pituudet vaihtelevat. Luvussa 4.3 tarkastellaan sitä, miten nopeasti jotkin ennalta valitut solmut saavat tiedon. Vastaavasti tämä ajanhetki voidaan ajatella etäisyytenä lähtösolmusta kiinnitettyihin solmuihin. Näille ajanhetkille sopivasti normalisoituna johdetaan rajajakaumat verkon koon kasvaessa äärettömään. Lukujen 4.2 ja 4.3 tuloksia ei ole tietojeni mukaan esitetty muualla. Luvussa 4.4 selitetään tarkemmin miten tiedonleviämisaika liittyy edellä mainittuihin etäisyyksiin. Luvussa 4.5 tutkitaan lyhyesti simuloinnin avulla, miten nopeasti konvergenssi rajajakaumiin tapahtuu.

Stokastiikan perusasiat (riippumattomuus, todennäköisyysavaruudet, satunnaismuuttujat, ehdolliset odotusarvot etc.) oletetaan tunnetuksi, eikä niihin puututa tässä.

Merkintöjä ja sopimuksia

Tässä kirjoitelmassa tiedonleviämistä tutkitaan tilanteessa, jossa verkon koko n kasvaa äärettömään. Kaikki jatkossa määriteltävät asiat eivät välttämättä ole järkeviä pienille n. Yleensä on kuitenkin selvää, että riittävän suurille n asiat ovat kunnossa. Tällaisessa tapauksessa oletetaan aina, että n on riittävän suuri ilman eri mainintaa. Lisäksi sovitaan, että luvuilla n^α, $\frac{n}{2}$ etc. tarkoitetaan aina ylöspäin pyöristettyä kokonaislukua silloin, kun nämä luvut esiintyvät indeksinä tai muuten tilanteessa, jossa selvästi vaaditaan kokonaislukua.

Jakaumakonvergenssin merkintää $\xrightarrow{d}$ käytetään varsin liberaalisti. Esimerkiksi merkintä $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1)$ tarkoittaa, että $X_n \xrightarrow{d} X$, missä $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Huomaa myös, että stokastinen suppeneminen vakioon on yhtäpitävää jakaumasuppenemisen kanssa. Eli $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) \to 0$ kaikilla $\varepsilon > 0$, jos ja vain jos $X_n \xrightarrow{d} c$ (ks [21] Theorem 2.7). Tästä syystä tällaisessa tilanteessa konvergenssia merkitään aina $\xrightarrow{d}$.

Kirjoitelmassa käytetään varsin vakiintunutta matematiikan ja stokastiikan notaatiota, joka ei tuottane epäselvyyksiä. Alle on koottu muutama ehkä ei-niin-yleinen merkintä. Tässä listassa X ja Y ovat satunnaismuuttujia.

- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - Reaalisten Borel-joukkojen kokoelma.
- $\mathbb{P}_X$ - Jakaumamitta: $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- $X \leq_{st} Y$ - Stokastinen suuruusjärjestys: $\mathbb{P}(X > t) \leq (Y > t)$ kaikille $t \in \mathbb{R}$.
- $X =_{st} Y$ - Jakaumien yhtäsuuruus: $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$
- m.v. - Melkein varmasti eli todennäköisyydellä 1.
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
- $x \wedge y = \min(x, y)$
- $x \vee y = \max(x, y)$
- $\#A$ - Joukon A alkioiden lukumäärä.
- $\sigma(X)$ - Satunnaismuuttujan X generoima sigma-algebra.
- $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos tapahtuma } A \text{ tapahtuu} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$

Lisäksi "pikku-o" merkintää käytetään vakiintuneella tavalla. Siis funktio $f(x) = o(g(x))$, jos $f(x)/g(x) \to 0$, kun x:lle suoritetaan tilanteesta ilmeinen rajankäynti (yleensä $x \to \infty$ tai $x \to 0$). Eli esimerkiksi merkintä $o(h)$ tarkoittaa sellaista h:n funktiota f, jolle pätee $f(h)/h \to 0$, kun $h \to 0$.

Stokastista prosessia $(X_t)_{t\geq 0}$ merkitään joskus sen esittelemisen jälkeen vain lyhyesti symbolilla X. Tilanteesta on kuitenkin tällöin selvää, että tarkoitetaan nimenomaan koko prosessia eikä yhtä satunnaismuuttujaa. Merkinnät $X_t = X(t)$ tarkoittavat luonnollisesti yhtä ja samaa satunnaismuuttujaa eli prosessin $(X_t) = (X(t))$ arvoa hetkellä t.

2 Poisson- ja Markov-prosessit

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti perusasioita eksponenttijakaumasta sekä Poisson- ja Markov-prosesseista. Lisäksi määritellään Gumbel-jakauma ja esitetään yksi tärkeä sitä koskeva tulos (Lause 2.8), jota tarvitaan jatkossa Luvussa 4. Ne todistukset, jotka löytyvät helposti kirjallisuudesta, on tässä luvussa sivuutettu.

2.1 Eksponentti- ja Gumbel-jakauma

Määritelmä 2.1. Satunnaismuuttuja X noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$, jos kaikilla $t \geq 0$ pätee

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

Tällöin merkitään

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Huomautus 2.2. Lisäksi mukavuussyistä tässä kirjoitelmassa sovitaan, että eksponenttijakauma parametrilla 0 on äärettömään keskittynyt jakauma ja parametrilla ∞ nollaan keskittynyt jakauma.

Välittömästi määritelmästä saadaan seuraavat kaksi lausetta.

Lause 2.3. *Jos* $X_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k)$ *ja* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, *niin* $X_k \xrightarrow{d} 0$.

Lause 2.4. *Olkoon* $0 < \lambda \leq \alpha$, $X \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. *Tällöin*

i) $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$ *ja* $\mathrm{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}$.

ii) $X \leq_{st} Y$.

iii) kaikille $\beta > 0$ *pätee* $\beta X \sim \mathrm{Exp}(\frac{\alpha}{\beta})$.

Lause 2.5. *Olkoon* $X \sim Exp(\lambda)$ *ja* Y *ei-negatiivinen* X*:stä riippumaton satunnaismuuttuja. Tällöin, ehdolla* $X > Y$, *satunnaismuuttujat* $X - Y$ *ja* Y *ovat riippumattomia sekä kaikilla* $t \geq 0$ *pätee* $\mathbb{P}(X - Y > t | X > Y) = \mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$.

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mathbb{P}(X - Y > t,\ Y \in A) = \int_A \mathbb{P}(X > y + t) d\mathbb{P}_Y = \int_A e^{-\lambda(y+t)} d\mathbb{P}_Y(y)$$
$$= e^{-\lambda t} \int_A e^{-\lambda y} d\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > Y,\ Y \in A).$$

Jakamalla yllä olevan yhtälön molemmat puolet luvulla $\mathbb{P}(X > Y)$ saadaan

$$\mathbb{P}(X - Y > t, Y \in A | X > Y) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y \in A | X > Y),$$

mikä on juuri se mitä väitettiin. □

Lause 2.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{N}$ indeksijoukko ja $X_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k)$, $k \in I$, riippumattomia. Oletetaan, että $\lambda := \sum_{k \in I} \lambda_k < \infty$. Tällöin $\inf_{k \in I} X_k = X_m$ täsmälleen yhdelle $m \in I$ m.v. ja lisäksi pätee*

$$\inf_{k \in I} X_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Merkitään M:llä sitä satunnaista indeksiä, jolla minimi saavutetaan. Tällöin pätee

$$\inf_{k \in I} X_k \perp\!\!\!\perp M \text{ ja } \mathbb{P}(M = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda}.$$

Todistus. [17] Theorem 2.3.4. □

Määritelmä 2.7 (Gumbel-jakauma)**.** Sanotaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa standardia Gumbel-jakaumaa eli

$$\xi \sim \mathrm{Gumbel}(0, 1),$$

jos $\mathbb{P}(\xi \leq x) = \exp(-e^{-x})$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lause 2.8. *Olkoon $Y_k \sim \mathrm{Exp}(1)$ ja $X_k \sim \mathrm{Exp}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\max_{1 \leq k \leq n} Y_k =_{st} \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

ja

$$\max_{1 \leq k \leq n} Y_k - \log n \xrightarrow{d} \mathrm{Gumbel}(0, 1), \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Havaitaan ensiksi, että kaikille $x \geq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k \leq x\right) = \mathbb{P}(Y_k \leq x \text{ kaikilla } 1 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n = (1 - e^{-x})^n.$$

Osoitetaan sitten induktiolla, että satunnaismuuttujien X_k summalla on sama kertymäfunktio. Tapaus $n = 1$ on triviaalisti tosi. Olettamalla sitten, että väite on totta $(n-1)$:lle saadaan

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \le x) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{n-1} \le x - X_n) \\
&= \int_0^x \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{n-1} \le x - s) n e^{-ns} ds \\
&= \int_0^x \mathbb{P}\Big(\max_{k \le n-1} Y_k \le x - s\Big) n e^{-ns} ds \\
&= \int_0^x (1 - e^{-(x-s)})^{n-1} n e^{-ns} ds \\
&= \int_0^x (e^{-s} - e^{-x})^{n-1} n e^{-s} ds = (1 - e^{-x})^n.
\end{aligned}
$$

Väitteen toisen osan todistus on suoraviivainen lasku. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\max_{1 \le k \le n} Y_k - \log n \le x\Big) = \mathbb{P}(Y_k \le x + \log n \;\text{ kaikilla } 1 \le k \le n) \\
=&\mathbb{P}(Y_1 \le x + \log n)^n = (1 - e^{-(x + \log n)})^n = \Big(1 - \frac{e^{-x}}{n}\Big)^n \\
\to& \exp(-e^{-x}), \text{ kun } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

□

Lause 2.9. *Olkoon* $S_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k)$, $k \in I \subset \mathbb{N}$, *riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin*

i)

$$\textit{Jos } \sum_{k \in I} \frac{1}{\lambda_k} < \infty, \textit{ niin } \mathbb{P}\Big(\sum_{k \in I} S_k < \infty\Big) = 1.$$

ii)

$$\textit{Jos } \sum_{k \in I} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \textit{ niin } \mathbb{P}\Big(\sum_{k \in I} S_k = \infty\Big) = 1.$$

Todistus. [17] Theorem 2.3.2. □

2.2 Poisson-prosessi

Määritelmä 2.10 (hyppyprosessi, hyppyhetket ja odotusajat)**.** Olkoon $(X_t)_{t \ge 0}$ oikealta jatkuva paloittain vakio prosessi numeroituvassa tila-avaruudessa. Tällöin sanotaan, että X on *hyppyprosessi*. Olkoon $\tau_0 = 0$ ja rekursiivisesti

$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : X(t) \ne X(\tau_{k-1})\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olkoon

$$S_k = \tau_k - \tau_{k-1}.$$

Jos $\tau_{k_0} = \infty$ jollain k_0, niin määritellään $\tau_k = \infty$ kaikilla $k > k_0$. Tällöin S_k:ta ei määritellä, kun $k > k_0$. Sanotaan, että $\tau_1, \tau_2, \ldots$ ovat prosessin (X_t) *hyppyhetkiä* ja $S_1, S_2, \ldots$ sen *odotusaikoja*.

Prosessin hyppyhetkiä ja odotusajoista puhuttaessa on olennaista, että kyseinen prosessi on hyppyprosessi. Määritelmän 2.10 hyppyhetket ja odotusajat eivät toimi järkevästi muille kuin oikealta jatkuville paloittain vakioille prosesseille. Tässä kirjoitelmassa kaikki eteentulevat prosessit ovat kuitenkin hyppyprosesseja.

Lause 2.11. *Olkoon $\lambda > 0$. Olkoon $(Y(t))_{t\geq 0}$ oikealta jatkuva kasvava prosessi, jolle $Y(0) = 0$ ja $Y(t) \in \mathbb{N}$ kaikilla $t \geq 0$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) Y:n odotusajat $S_1, S_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $S_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ja $Y(\tau_k) = k$.

(ii) Prosessilla Y on riippumattomat lisäykset, eli kaikille $s, t \geq 0$ pätee $Y(t+s) - Y(t) \perp\!\!\!\perp \sigma(\{Y(u), 0 \leq u \leq t\})$. Lisäksi kaikilla $t \geq 0$ pätee

$$\mathbb{P}(Y(t+h) - Y(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h),$$
$$\mathbb{P}(Y(t+h) - Y(t) = 1) = \lambda h + o(h),$$

kun $h \downarrow 0$.

(iii) Prosessilla Y on riippumattomat lisäykset, ja kaikille $t \geq 0$ ja $s > 0$ pätee

$$\mathbb{P}(Y(t+s) - Y(t) = k) = \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}, \quad k \in \mathbb{N},$$

eli $Y(t+s) - Y(t) \sim Poisson(\lambda s)$.

Todistus. [17] Theorem 2.4.3. □

Määritelmä 2.12 (Poisson-prosessi)**.** Olkoon prosessi $(Y(t))_{t\geq 0}$ kuten Lauseessa 2.11, jolle pätee jokin (eli kaikki) lauseen kolmesta ehdosta. Tällöin sanotaan, että $(Y(t))$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Lauseen 2.11 kohdan (i) ja Lauseen 2.5 perusteella on selvää, että mikäli Poisson-prosessi aloitetaan alusta jollain siitä riippumattomalla satunnaisella ajanhetkellä, niin saadaan uusi Poisson-prosessi, joka on riippumaton alkupään tapahtumista. Tähän ominaisuuteen viitataan jatkossa yleensä *"Poisson-prosessin unohdusominaisuutena"*. Eli jos $(Y(t))$ on Poisson-prosessi ja Z siitä riippumaton ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, niin tällöin myös prosessi $(\widehat{Y}(t)), \widehat{Y}(t) = Y(Z+t)$, on Poisson-prosessi, joka ei riipu siitä mitä prosessissa Y on tapahtunut ennen ajanhetkeä Z.

Seuraavat kolme lausetta ovat Poisson-prosessien tärkeyden perusta. Kaksi ensimmäistä (Lauseet 2.13 ja 2.14) sanovat, että Poisson-prosesseja voidaan summata ja paloitella eri osiin ja tuloksena saadaan Poisson-prosesseja. Lisäksi yhteenlaskettu intensiteetti säilyy samana. Kolmas eli Lause 2.15 taas sanoo, että Poisson-prosessin intensiteetti on ainoastaan ajan skaalaus. Näin ollen yleensä riittää tutkia vain yksikköintensiteettisiä Poisson-prosesseja.

Lause 2.13. *Olkoot $I \subset \mathbb{N}$ ja $(Y_k(t))_{t\geq 0}$, $k \in I$, riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λ_k. Oletetaan, että $\lambda := \sum_{k\in I} \lambda_k < \infty$. Tällöin*

$$(Y(t))_{t\geq 0}, \quad Y(t) := \sum_{k\in I} Y_k(t),$$

on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Todistus. Koska kaikille prosesseille $Y_k(t)$ pätee Lauseen 2.11 kohta (iii), ja koska Poisson(α) jakauman odotusarvo on tunnetusti α, niin kaikille $t \geq 0$ pätee

$$\mathbb{E}Y(t) = \mathbb{E}\sum_{k\in I} Y_k(t) = \sum_{k\in I} \mathbb{E}Y_k(t) = \lambda t < \infty.$$

Näin ollen $Y(t) \in \mathbb{N}$ kaikilla $t \geq 0$ m.v. Lisäksi tästä nähdään, että prosessi Y on oikealta jatkuva, koska kullakin ajanhetkellä vain äärellinen määrä prosesseista Y_k poikkeaa nollasta ja oikealta jatkuvien funktioiden äärellinen summa on myös oikealta jatkuva. Selvästi Y on myös kasvava, koska se on kasvavien prosessien summa.

Osoitetaan, että prosessille Y pätee Lauseen 2.11 kohta (ii). Koska kaikilla prosesseilla Y_k on riippumattomat lisäykset, niin näin on myös prosessilla Y. Edelleen soveltamalla Lauseen 2.11 kohtaa (iii) prosesseihin Y_k saadaan

$$\mathbb{P}(Y(t+h) - Y(t) = 0) = \prod_{k\in I} e^{-\lambda_k h} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h),$$

ja

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y(t+h) - Y(t) = 1) \\ =& \sum_{k\in I} \mathbb{P}(Y_k(t+h) - Y(t) = 1,\ Y_j(t+h) - Y(t) = 0 \text{ kaikilla } j \neq k) \\ =& \sum_{k\in I} \lambda_k h e^{-\lambda_k h} e^{-(\lambda-\lambda_k)h} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

□

Lause 2.14. *Olkoon $(Y(t))_{t\geq 0}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ sekä $J_1, J_2, \ldots$ toisistaan ja prosessista Y riippumattomia samoinjakautuneita kokonaislukuarvoisia satunnaismuuttujia. Merkitään $p_k = \mathbb{P}(J_1 = k)$ ja $K = \{k \in \mathbb{Z} : p_k > 0\}$. Määritellään prosessit Y_k, $k \in K$ kaavalla*

$$Y_k(t) = \sum_{i=1}^{Y(t)} \mathbb{1}_{\{J_i = k\}}. \tag{1}$$

Tällöin prosessit Y_k ovat toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $p_k\lambda$.

Todistus. Olkoot $(Y_k(t))$ toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $p_k\lambda$. Nyt edellisen lauseen nojalla $Y = \sum_{k\in K} Y_k$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Määritellään satunnaismuuttujat J_i siten, että J_i saa arvokseen sen prosessin Y_k indeksin, joka hyppäsi prosessin Y i:nnellä hyppyhetkellä. Huomaa, että yhtälö (1) pätee näille prosesseille Y ja Y_k.

Soveltamalla Lausetta 2.6 prosessin Y odotusaikoihin saadaan $\mathbb{P}(J_i = k) = p_k$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $k \in K$. Lisäksi edelleen Lauseen 2.6 ja Poisson-prosessin unohdusominaisuuden perusteella nämä satunnaismuuttujat ovat toisistaan ja prosessista Y riippumattomia.

Nyt huomataan, että edellinen konstruktio voidaankin tehdä määrittelemällä ensin Poisson-prosessi Y sekä siitä riippumattomat satunnaismuuttujat J_i, ja sen jälkeen jakamalla prosessi Y prosesseihin Y_k kuten yhtälössä (1). □

Lause 2.15. *Olkoon $\alpha > 0$ ja (Y_t) Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Tällöin*

$$(\widehat{Y}_t), \ \widehat{Y}_t := Y_{\alpha t},$$

on Poisson-prosessi intensiteetillä $\alpha\lambda$. Erityisesti valitsemalla $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ saadaan Poisson-prosessin yksikköintensiteetillä.

Todistus. Sovelletaan Lausetta 2.4 prosessin $(\widehat{Y}_t)$ odotusaikoihin. □

2.3 Markov-prosessi

Seuraavaksi esitellään lyhyesti jatkuva-aikainen Markov-prosessi numeroituvassa tila-avaruudessa S. Tässä ei yritetä antaa kovin yleistä määritelmää, vaan lähinnä kertoa asiaan perehtymättömälle millaisia tässä kirjoitelmassa esiintyvät jatkuva-aikaiset Markov-prosessit ovat. Tarkemmin jatkuva-aikaisesta Markov-prosessista katso esim. [8] Luku 8 tai [17] Luvut 2 ja 3.

Ensiksi Markov-prosessille tarvitaan *intensiteettimatriisi* Q. Olkoon $Q = (q_{x,y} : x, y \in S)$ matriisi, jolle pätee

$$q_{x,y} \geq 0, \ \text{kun } x \neq y$$

ja

$$q(x) := \sum_{y\neq x} q_{x,y} < \infty, \ \text{kaikilla } x \in S. \tag{2}$$

Yhtälön (2) merkintää $q(x)$ käytetään jatkossa aina tässä merkityksessä. Yleensä lisäksi määritellään intensiteettimatriisin diagonaalialkioille $q_{x,x} = -q(x)$. Tätä tarvitaan, jos intensiteettimatriiseilla halutaan suorittaa laskutoimituksia. Tässä työssä diagonaalialkioilla ei ole väliä.

Markov-prosessi (X_t) intensiteettimatriisilla Q saadaan rakennettua seuraavasti. Laitetaan jokaiseen tila-avaruuden S pisteeseen x riippumattomat Poisson-prosessit $(Y_{x,y}(t))$ vastaavilla intensiteeteillä $q_{x,y}$ jokaista pistettä $y \in S$ kohti, joille $q_{x,y} > 0$. Sovitaan sitten, että jos (X_t) sattuu olemaan tilassa x silloin, kun prosessissa $Y_{x,y}$ tapahtuu hyppy, niin tällöin X siirtyy kyseisellä hyppyhetkellä tilasta x tilaan y. Määritellään (X_t) vielä oikealta jatkuvaksi, eli siten, että hyppyhetkillä ollaan jo uudessa tilassa. Prosessinalkuarvolla X_0 voi olla mikä tahansa jakauma, ja se joudutaan prosessia määriteltäessä antamaan matriisin Q lisäksi. Huomaa, että Poisson-prosessin unohdusominaisuuden nojalla tällä Markov-prosessilla X on todella Markov-ominaisuus eli sen tulevaisuus ei riipu sen menneisyydestä, jos nykyhetki on tiedossa.

Intensiteettimatriisi Q kertoo prosessin X käyttäytymisestä seuraavaa. Kiinnitetään ensin ajanhetki t. Merkitään sitten S_t:llä odotusaikaa hetken t jälkeen X:n seuraavaan hyppyyn. Nyt Lauseesta 2.6 seuraa, että ehdolla $X_t = x$ pätee $S_t \sim \mathrm{Exp}(q(x))$. Oletetaan sitten, että $q(x) > 0$ ja merkitään M:llä X:n seuraavaa arvoa ajanhetken t jälkeen. Edelleen lauseesta 2.6 saadaan, että $\mathbb{P}(M = y | X_t = x) = \frac{q_{x,y}}{q(x)}$.

Joskus saattaa käydä niin, että Markov-prosessin (X_t) hyppyhetkille τ_k pätee aidosti positiivisella todennäköisyydellä $\tau_\infty := \lim_{k\to\infty} \tau_k < \infty$. Tällöin edellisen konstruktion lisäksi joudutaan sopimaan mitä prosessilla tapahtuu ajanhetken τ_∞ jälkeen, jos prosessi halutaan määritellä kaikille $t \geq 0$. Seuraava lause takaa, että tätä ongelmaa ei pääse syntymään, mikäli intensiteetti matriisi Q on tietyllä tavalla rajoitettu.

Lause 2.16. *Olkoon (X_t) Markov-prosessi intensiteettimatriisilla Q, jolle pätee*

$$\sup_x q(x) < \infty.$$

Tällöin (X_t):n hyppyhetkille τ_k pätee

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k \to \infty = \infty \text{ m.v.}$$

Todistus. [17] Theorem 2.7.1. □

3 Suurten lukujen laki Markov-prosesseille

Tässä luvussa muotoillaan ja todistetaan ensin suurten lukujen laki Poisson-prosessille (Lause 3.3). Sen jälkeen vastaava tulos saadaan myös kaikille Markov-prosesseille, joilla on tarpeeksi hyvin käyttäytyvät siirtymäintensiteetit (Lause 3.5). Aluksi tarvitaan kuitenkin pari lemmaa.

Lemma 3.1. *Olkoot $I \subset \mathbb{N}$ ja $(Y_k(t))_{t\geq 0}$, $k \in I$, toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä λ_k. Olkoot $\alpha_k \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $\sum_{k\in I} |\alpha_k|\lambda_k < \infty$. Tällöin*

$$Z(t) := \sum_{k\in I} \alpha_k Y_k(t)$$

on kaikille $t \geq 0$ hyvin määritelty m.v. ja lisäksi pätee

$$n^{-1} Z(nt) \xrightarrow{m.v.} t \sum_{k\in I} \alpha_k \lambda_k.$$

Todistus. Merkitään

$$\overline{Z}(t) = \sum_{k\in I} |\alpha_k| Y_k(t).$$

Olkoon $t \geq 0$. Koska

$$\mathbb{E}\overline{Z}(t) = \sum_{k \in I} |\alpha_k| \mathbb{E} Y_k(t) = t \sum_{k \in I} |\alpha_k| \lambda_k < \infty,$$

niin kiinnitetylle t pätee, että $\overline{Z}(t) < \infty$ m.v. Toisaalta, koska $\overline{Z}(t)$ on kasvava prosessi, niin $\overline{Z}(t) < \infty$ kaikilla $t \geq 0$ m.v. Siispä $Z(t)$:n määrittelevä summa suppenee itseisesti kaikilla $t \geq 0$ m.v. Näin ollen $Z(t)$ on hyvin määritelty.

Edelleen

$$\mathbb{E}Z(t) = \mathbb{E} \sum_{k \in I} \alpha_k Y_k(t) = \sum_{k \in I} \alpha_k \mathbb{E} Y_k(t) = t \sum_{k \in I} \alpha_k \lambda_k.$$

Mikäli I on ääretön, niin yllä summauksen ja odotusarvon järjestyksen vaihtamiseen voidaan käyttää dominoidun konvergenssin lausetta (Lause A.13), sillä kaikki äärelliset osasummat ovat ylhäältä rajoitettuja satunnaismuuttujalla $\overline{Z}(t)$.

Lopuksi huomataan, että

$$Z(nt) = \sum_{i=1}^{n} \left(Z(it) - Z((i-1)t) \right),$$

missä summattavat ovat toisistaan riippumattomia ja jakautuneet kuten $Z(t)$ (Lause 2.11). Näin ollen vahvan suurten lukujen lain perusteella:

$$n^{-1} Z(nt) \xrightarrow{m.v.} \mathbb{E}Z(t).$$

□

Lemma 3.2. *Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $f_1, f_2, \cdots : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ kasvavia funktioita, joille*

$$\lim_{k \to \infty} f_k(q) \to f(q) \text{ kaikilla } q \in \mathbb{Q}_+.$$

Tällöin kaikilla $t \geq 0$ pätee

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{s \leq t} |f_k(s) - f(s)| = 0.$$

eli $f_k \to f$ tasaisesti kaikissa rajoitetuissa joukoissa.

Todistus. Koska $f_k \to f$ pisteittäin $\mathbb{Q}_+$:ssa, niin f on kasvava $\mathbb{Q}_+$:ssa. Tästä saadaan, että f on kasvava koko $\mathbb{R}_+$:ssa, sillä se on jatkuva.

Olkoon $t \geq 0$. Tarvittaessa korvaamalla t jollain sitä suuremmalla rationaaliluvulla voidaan olettaa, että $t \in \mathbb{Q}_+$. Olkoon $0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = t$ rationaalisia. Käyttämällä hyväksi funktioiden f ja f_k kasvavuutta saadaan:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \sup_{s \in [0,t]} |f_k(s) - f(s)| \\
\leq &\lim_{k \to \infty} \max_{i \in \{0, \ldots, n-1\}} \Big(|f_k(q_i) - f(q_{i+1})| + |f_k(q_{i+1}) - f(q_i)| \Big) \\
\leq &\lim_{k \to \infty} \max_{i \in \{0, \ldots, n-1\}} \Big(|f_k(q_i) - f(q_i)| + |f_k(q_{i+1}) - f(q_{i+1})| + 2|f(q_i) - f(q_{i+1})| \Big) \\
=&2 \max_{i \in \{0, \ldots, n-1\}} |f(q_i) - f(q_{i+1})|.
\end{aligned}$$

Koska f on rajoitetulla välillä tasaisesti jatkuva, niin yllä olevan laskun viimeinen termi saadaan jakoa tihentämällä mielivaltaisen pieneksi. $\square$

Lause 3.3. *Olkoot $(Y_t)_{t\geq 0}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Silloin kaikilla $t \geq 0$ pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t} n^{-1}|Y(ns) - \lambda ns| = 0 \quad m.v.$$

Todistus. Olkoon $t \geq 0$. Nyt Lemman 3.2 avulla saadaan

$$\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \{\lim_{n\to\infty} n^{-1}|Y(nq) - \lambda nq| = 0\} \subset \{\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t} n^{-1}|Y(ns) - \lambda ns| = 0\}, \tag{3}$$

koska Poisson-prosessi on kasvava ja funktio $s \to \lambda s$ on jatkuva. Valitsemalla Lemmassa 3.1 vain yksi Poisson-prosessi ja sen kertoimeksi ykkönen saadaan, että kaikilla $u \geq 0$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}|Y(nu) - \lambda nu| = 0 \quad m.v.$$

Näin ollen yhtälön (3) vasen puoli on numeroituva leikkaus melkein varmoista tapahtumista, ja väite seuraa tästä. $\square$

Lause 3.3 kertoo, että kun tarkasteltavaa aikaväliä suurennetaan, mutta samalla pienennetään mittakaavaa, niin prosessin polut alkavat muistuttaa melkein varmasti suoraa viivaa. Tämän voi ajatella myös siten, että otospoluksi saadaan suora viivan millä tahansa aikavälillä, jos hyppyjen tahtia nopeutetaan äärettömään, mutta samalla niiden kokoa pienennetään sopivalla nopeudella.

Poisson-prosessi on yksiulotteinen prosessi, joka kasvaa koko ajan keskimäärin samalla nopeudella. Näin yksinkertaiseen tilanteeseen ei kuitenkaan tarvitse tyytyä. Seuraavaksi Lause 3.3 yleistetään paljon suuremmalle joukolle Markov-prosesseja. Ensiksi ratkaistaan eräänlaisen stokastinen integraaliyhtälö. Tästä eteenpäin tämä luku seurailee kirjan [12] sivujen 327 ja 455–457 esitystä.

Lause 3.4. *Olkoot $\beta_l : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+,\ l \in \mathbb{Z}^d$, funktioita, joille $M := \sup_x \sum_l \beta_l(x) < \infty$. Olkoon Y_l toisistaan riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteetillä 1. Tällöin on olemassa $\mathbb{Z}^d$-arvoinen Markov-prosessi $(X_t)_{t\geq 0}$ siirtymäintensiteeteillä $q_{x,x+l} = \beta_l(x)$, joka toteuttaa kaikilla $t \geq 0$ m.v. yhtälön*

$$X(t) = X(0) + \sum_l lY_l\left(\int_0^t \beta_l(X(s))ds\right), \quad X(0) \in \mathbb{Z}^d \text{ ei-satunnainen vakio.} \tag{4}$$

Todistus. Määritellään $X_0(t) = X(0)$ kaikilla $t \geq 0$. Oletetaan sitten, että samassa todennäköisyysavaruudessa kuin Y_l:t on määritelty prosessi X_{k-1}, joka saa korkeintaan k eri arvoa m.v. Määritellään prosessi

$$\widehat{X}_k(t) = X(0) + \sum_l lY_l\left(\int_0^t \beta_l(X_{k-1}(s))ds\right). \tag{5}$$

Osoitetaan, että $\widehat{X}_k$ on hyvin määritelty hyppyprosessi. Merkitään ensiksi $\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}^d) = \{J \subset \mathbb{Z}^d : \#J \leq k\}$. Havaitaan nyt, että mille tahansa $t \geq 0$ ja $J \in \mathcal{P}_k$ pätee

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sum_l Y_l\Big(t \max_{x \in J} \beta_l(x)\Big) = \sum_l \mathbb{E} Y_l\Big(t \max_{x \in J} \beta_l(x)\Big) = t \sum_l \max_{x \in J} \beta_l(x) \\
\leq & t \sum_l \sum_{x \in J} \beta_l(x) = t \sum_{x \in J} \sum_l \beta_l(x) \leq t \sum_{x \in J} \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_l \beta_l(x) \leq tkM < \infty.
\end{aligned}$$

Yllä olevasta saadaan, että $\sum_l Y_l\Big(t \max_{x \in J} \beta_l(x)\Big) < \infty$ kaikilla $t \geq 0$ m.v. Koska $\mathcal{P}_k(\mathbb{Z}^d)$ on numeroituva joukko, saadaan edelleen, että kyseinen summa on äärellinen kaikilla $t \geq 0$ ja kaikilla $J \in \mathcal{P}_k(\mathbb{Z}^d)$ m.v.

Merkitään sitten $K = \{x \in \mathbb{Z}^d : X_{k-1}(t) = x \text{ jollain } t \geq 0\}$. Huomataan, että $\#K \leq k$, m.v. koska oletettiin, että X_{k-1} saa korkeintaan k eri arvoa m.v. Nyt kaikilla $t \geq 0$ pätee, että

$$\sum_l Y_l\left(\int_0^t \beta_l(X_{k-1}(s))ds\right) \leq \sum_l Y_l\Big(t \max_{x \in K} \beta_l(x)\Big) < \infty.$$

Tästä saadaan että yllä olevan yhtälön ensimmäinen termi on kaikilla $t \geq 0$ m.v. äärellinen, ja siten myös yhtälössä (5) oikealla olevassa summassa on äärellisen monta nollasta poikkeavaa termiä kaikilla ajanhetkillä t. Näin ollen $\widehat{X}_k$ on hyvin määritelty sekä paloittain vakio ja oikealta jatkuva, koska Poisson-prosessit ovat sitä ja äärellinen summaus selvästikin säilyttää nämä ominaisuudet.

Merkitään $\widehat{X}_k$:n k:nnetta hyppyhetkeä τ_k:lla. (Huomaa, että tässä vaiheessa indeksi k viittaa sekä prosessin indeksiin, että hyppyhetken järjestysnumeroon.) Määritellään sitten prosessi X_k seuraavasti:

$$X_k(t) = \widehat{X}_k(t \wedge \tau_k),$$

Nyt X_k on myös oikealta jatkuva ja sen k:nnes hyppyhetki on myös τ_k (tässä voi olla $\tau_k = \infty$, mutta tämä ei haittaa mitään). Saatiin siis määriteltyä prosessit X_k kaikille $k \in \mathbb{N}$ siten, että prosessi X_k hyppää korkeintaan k kertaa. Sovitaan vielä, että $\tau_0 = 0$.

Osoitetaan nyt, että

$$X_k(t) = X_{k-1}(t), \text{ kun } t < \tau_k. \tag{6}$$

Väite pätee selvästi kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, k:lle. Osoitetaan väite $k+1$:lle. Olkoon $t \leq \tau_k$. Tällöin

$$\widehat{X}_{k+1}(t) = X(0) + \sum_l l Y_l\Big(\int_0^t \beta_l(\underbrace{X_k(s)}_{=X_{k-1}(s)})ds\Big) = \widehat{X}_k(t) = X_k(t). \tag{7}$$

Erityisesti huomataan vielä, että k ensimmäistä hyppyhetkeä ovat samat prosesseille $\widehat{X}_{k+1}$ ja X_k, joten $\tau_k \leq \tau_{k+1}$. Siten laskusta (7) saadaan, että kun $t \leq \tau_k$, niin

$$X_{k+1}(t) = \widehat{X}_{k+1}(t) = X_k(t).$$

Jos taas $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$, niin

$$X_{k+1}(t) = \widehat{X}_{k+1}(t) = \widehat{X}_{k+1}(\tau_k) = X_k(\tau_k) = X_k(t).$$

Merkitään $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \tau_\infty$. Tämä raja-arvo on varmasti olemassa, koska (τ_k) on kasvava jono, kuten edellä todettiin. Nyt voidaan määritellä prosessi $(X_t)_{0\leq t<\tau_\infty}$ asettamalla

$$X(t) = \lim_{k\to\infty} X_k(t), \quad t < \tau_\infty. \tag{8}$$

Faktasta (6) seuraa, että tämä raja-arvo on olemassa kaikilla $t < \tau_\infty$. Lisäksi havaitaan, että (X_t) toteuttaa yhtälön (4) kaikilla $t < \tau_\infty$.

Tässä sivuutetaan todistus siitä, että (X_t) on Markov-prosessi halutuilla siirtymäintensiteeteillä (Ks. [12] Theorem 4.1 s 327). Kun tämä on tiedossa, niin Lauseesta 2.16 saadaan, että

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \ m.v. \tag{9}$$

Näin ollen X on määritelty kaikilla $t \geq 0$, ja väite on siten todistettu.

$\square$

Seuraavaksi Markov-prosessi laitetaan hyppimään nopeammin, mutta samalla pienennetään hyppyjen kokoa. Olkoot β_l, $l \in \mathbb{Z}^d$, funktioita, joille pätevät Lauseen 3.4 oletukset. Oletetaan kuitenkin nyt, että funktiot β_l on määritelty koko $\mathbb{R}^d$:ssä. Olkoon sitten $n \in \mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}^d$:ssä funktiot $\beta_l^{(n)}(x) := n\beta_l(x/n)$. Huomataan, että kiinnitetylle n funktiot $\beta_l^{(n)}$ toteuttavat samat oletukset kuin funktiot β_l, joten Lauseen 3.4 avulla voidaan määritellä $\mathbb{Z}^d$:ssä Markov-prosessi $(\widehat{X}_n(t))$, jolla on siirtymäintensiteetit $q_{x,x+l} = \beta_l^{(n)}(x)$, ja jolle pätee yhtälö

$$\widehat{X}_n(t) = \widehat{X}_n(0) + \sum_l lY_l\Big(\int_0^t \beta_l^{(n)}\big(\widehat{X}_n(s)\big)ds\Big), \tag{10}$$

missä Y_l:t ovat riippumattomia Poisson-prosesseja yksikköintensiteetillä ja $\widehat{X}_n(0)$ ei ole satunnainen.

Merkitään

$$B(x) = \sum_l l\beta_l(x). \tag{11}$$

Oletetaan, että funktiot β_l ovat sellaisia, että summa oikealla puolella kaavassa (11) suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$. Jos funktiot β_l ovat Markov-prosessin siirtymäintensiteettejä, niin $B(x)$ on vektori $\mathbb{R}^d$:ssä, joka kertoo kyseisen prosessin keskimääräisen muutosnopeuden eri suuntiin pisteessä x.

Olkoon sitten $X_n(t) = n^{-1}\widehat{X}_n(t)$. Tällöin X_n on Markov-prosessi $n^{-1}\mathbb{Z}^d$:ssä siirtymäintensiteeteillä $q^{(n)}_{\frac{x}{n},\frac{x+l}{n}} = \beta_l^{(n)}(x)$. Merkitsemällä $\widetilde{Y}_l(t) = Y_l(t) - t$ ja käyttämällä yhtälöä (10) saadaan:

$$
\begin{aligned}
X_n(t) = n^{-1}\widehat{X}_n(t) = X_n(0) + n^{-1}\sum_l lY_l\Big(n\int_0^t \beta_l\big(X_n(s)\big)ds\Big) \\
= X_n(0) + n^{-1}\sum_l l\widetilde{Y}_l\Big(n\int_0^t \beta_l\big(X_n(s)\big)ds\Big) + \sum_l\int_0^t l\beta_l\big(X_n(s)\big) \\
= X_n(0) + n^{-1}\sum_l l\widetilde{Y}_l\Big(n\int_0^t \beta_l\big(X_n(s)\big)ds\Big) + \int_0^t B\big(X_n(s)\big)ds.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihtaminen onnistuu, koska prosessi X_n saa hetkeen t mennessä vain äärellisen monta eri arvoa ja oletuksen mukaan $\sum_l |l|\beta_l(x) < \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$.

Lausetta 3.4 seuranneiden oletuksin ja merkinnöin voidaan nyt muotoilla seuraava lause.

Lause 3.5 (Suurten lukujen laki Markov-prosesseille)**.** *Olkoon $T \geq 0$. Oletetaan, että*

i) On olemassa ei-satunnainen funktio $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$, jolle pätee

$$X(t) = x_0 + \int_0^t B(X(s))ds, \quad 0 \leq u \leq T.$$

ii) On olemassa $\delta > 0$ siten, että joukolle

$$K := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - X(u)| \leq \delta \text{ jollekin } 0 \leq u \leq T\}$$

pätee

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |l| \sup_{x\in K} \beta_l(x) < \infty,$$

ja että on olemassa M siten, että

$$|B(x) - B(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in K.$$

iii) $\lim_{n\to\infty} X_n(0) = x_0$.

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_n(t) - X(t)| = 0 \quad m.v.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että koko $\mathbb{R}^d$:ssä pätee

$$\sum_l |l| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \beta_l(x) < \infty, \tag{13}$$

ja että on olemassa M siten, että

$$|B(x) - B(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{14}$$

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät

$$\overline{\beta_l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \beta_l(x),$$

$$\epsilon_n = \sup_{t \le T} \Big| \sum_l n^{-1} l \widetilde{Y}_l \Big(n \int_0^t \beta_l\big(X_n(u)\big) du \Big) \Big|$$

ja

$$f_n(t) = \sup_{s \le t} |X_n(s) - X(s)|.$$

Nyt käyttämällä yhtälöä (12) ja oletusta (14) saadaan

$$\begin{aligned}
& f_n(t) = \\
& \sup_{s \le t} \big| X(0) - x_0 + \sum_l n^{-1} l \widetilde{Y}_l \Big(n \int_0^s \beta_l\big(X_n(u)\big) du \Big) + \int_0^s B\big(X_n(u)\big) - B\big(X(u)\big) du \big| \\
& \le |X_n(0) - x_0| + \epsilon_n + \int_0^t M |X_n(u) - X(u)| du \\
& \le |X_n(0) - x_0| + \epsilon_n + M \int_0^t f_n(u) du, \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

Huomaa, että f on äärellisellä välillä rajoitettu, koska X on jatkuva ja X_n tekee äärellisessä ajassa vain äärellisen monta hyppyä. Siten Gronwallin epäyhtälöstä (Lause A.10) seuraa

$$f_n(T) \le \big(|X_n(0) - x_0| + \epsilon_n \big) e^{MT}.$$

Osoitetaan sitten, että $\epsilon_n \xrightarrow{m.v.} 0$, kun $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\epsilon_n & \le \sum_l n^{-1} |l| \sup_{u \le T} \Big| \widetilde{Y}_l \Big(n \int_0^u \beta_l\big(X_n(s)\big) ds \Big) \Big| \\
& \le \sum_l n^{-1} |l| \sup_{u \le T} \big| \widetilde{Y}_l (n \overline{\beta}_l u) \big| \le \sum_l n^{-1} |l| \big(Y_l(n \overline{\beta}_l t) + n \overline{\beta}_l t \big),
\end{aligned} \tag{15}$$

missä viimeinen epäyhtälö pätee termeittäin.
Lemmasta 3.1 saadaan:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_l n^{-1} |l| \big(Y_l(n \overline{\beta}_l t) + n \overline{\beta}_l t \big) = 2 \sum_l |l| \overline{\beta}_l t = \sum_l \lim_{n \to \infty} n^{-1} |l| \big(Y_l(n \overline{\beta}_l t) + n \overline{\beta}_l t \big).$$

Nyt käyttämällä arvioita (15) ja soveltamalla dominoidun konvergenssin lausetta (Lause A.13) summauksen ja rajankäynnin järjestyksen vaihtamiseen saadaan

$$\lim_{n \to \infty} \epsilon_n \le \lim_{n \to \infty} \sum_l n^{-1} |l| \sup_{u \le T} \big| \widetilde{Y}_l (n \overline{\beta}_l u) \big| = 0, \quad m.v.,$$

koska Lause 3.3 sanoo että jokainen summattava termi menee melkein varmasti nollaan.

Siirrytään nyt yleiseen tapaukseen, missä (13) ja (14) eivät välttämättä päde koko avaruudessa. Tämä ei kuitenkaan tuota enää mitään ongelmia, koska $X_n(s)$ pysyy lähellä $X(s)$:ää kaikilla $s \leq T$, kunhan n on tapreeksi iso. Siten funktioiden β_l ja B arvoilla ei ole mitään väliä K:n ulkopuolella.

Olkoon B^*, β_l^* funktioita, joille

$$B^*(x) = B(x), \; \beta_l^*(x) = \beta_l(x) \text{ kaikilla } x \in K, l \in \mathbb{Z}^d$$

sekä

$$\sum_l l\beta_l^*(x) = B^*(x), \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^d,$$

ja joille (13) ja (14) pätevät koko $\mathbb{R}^d$:ssä (olemassaolo ks. Lause A.8).

Olkoon Markov-prosessit $(X_n^*(t))_{t\geq 0}$, jotka on kukin samoin määritelty kuin vastaava X_n, mutta joiden määrittelyssä on funktioiden β_l sijasta käytetty funktioita β_l^*. Yhtälöstä (12) huomataan, että $X_n^*(t) = X_n(t)$ kaikilla $u \leq T_n := \inf\{t \geq 0 : X_n^*(t) \in K^c\}$. Havaitaan, että

$$\sup_{t\leq T} |X_n^*(t) - X(t)| < \delta \Rightarrow T_n \geq T \Rightarrow X_n^*(t) = X_n(t), \; u \leq T,$$

ja koska todistuksen alkuosan perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_n^*(t) - X(t)| = 0, \quad m.v.,$$

niin sama pätee myös prosesseille X_n. □

Seuraus 3.6. *Olkoot funktiot X ja β_l kuten Lauseessa 3.5. Olkoot $(X_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, Markov-prosesseja $n^{-1}\mathbb{Z}^d$:ssä siirtymäintensiteeteillä $q^{(n)}_{\frac{x}{n},\frac{x}{x+l}} = n\beta_l(\frac{x}{n})$. Tällöin kaikilla $t \geq 0$ pätee*

$$X_n(t) \xrightarrow{d} X(t), \; \textit{kun } n \to \infty.$$

Lauseella 3.5 on paljon käyttöä monessa sovelluksessa, sillä usein Markov-prosesseilla on hyvin käyttäytyvä "drift"-funktio B. Lisäksi monesti on luonnollista tutkia systeemejä, joissa tapahtuu paljon pieniä hyppyjä. Tällöin Markov-prosessia voidaan siis approksimoida deterministisen differentiaaliyhtälön avulla. Esimerkiksi tässä kirjoitelmassa Lemman 4.15 todistuksessa Lause 3.5 on tärkeässä roolissa. Lisää esimerkkejä löytyy esimerkiksi [12] Luku 11 ja [11]. Estimaatteja todennäköisyydelle $\mathbb{P}(\sup_{u\leq t} |X_n(u) - X(u)| > \epsilon)$, katso [11].

4 Tiedonleviämisprosessi

Siirrytään nyt tämän kirjoitelman pääasiaan eli tutkimaan tiedonleviämisprosessia. Tässä luvussa kokonaisluku n on verkon koko, ja tiedonleviämisprosessin käyttäytymistä tutkitaan, kun $n \to \infty$. Melkein kaikki satunnaismuuttujat tässä luvussa riippuvat n:stä, mutta indeksiä n ei ole aina merkattu näkyviin, jos riippuvuus siitä selviää satunnaismuuttujan määrittelyn yhteydessä.

Ensiksi kerrotaan täsmällisesti, minkälaisesta prosessista on kysymys. Alkutilassa yhdellä verkon solmulla on tieto. Prosessin kuluessa solmut heräilevät satunnaisilla ajanhetkillä toisistaan ja aiemmista tapahtumista riippumatta. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaiseen solmuun liitetään muista riippumaton $\lambda = \lambda_n$ -intensiteettinen Poisson-prosessi, ja solmu herää aina sitä vastaavan Poisson-prosessin hyppyhetkillä. Herätessään solmu valitsee satunnaisesti tasajakaumasta kaikesta muusta riippumatta jonkin verkon solmun ja ottaa siihen yhteyttä. Tässä oletetaan merkintöjen helpottamiseksi, että solmu voi valita myös itsensä. Tällä oletuksella ei ole kuitenkaan tulosten kannalta mitään merkitystä (ks. huomautus 4.6.) Mikäli heräävällä solmulla on tieto, mutta solmulla, johon otettiin yhteyttä, sitä ei ole, niin herväävä solmu siirtää heräämishetkellä tiedon eteenpäin solmulle, johon se otti yhteyttä. Jos heräävä solmu siirtää tiedon jo tietävälle solmulle tai heräävällä solmulla ei ole tietoa, kyseisellä heräämishetkellä ei tapahdu mitään.

4.1 Saturaatiohetki tavallisessa tiedonleviämisprosessissa

Merkitään symbolilla $T_{sat} = T_{sat}^{(n)}$ pienintä ajanhetkeä, jolloin kaikki verkon solmut ovat saaneet tiedon. Eli T_{sat} on se ajanhetki, jolloin viimeinen tiedonsiirto tapahtuu. Tätä ajanhetkeä sanotaan jatkossa *saturaatiohetkeksi*. Seuraava lause antaa rajajakauman sopivasti normalisoidulle saturaatiohetkelle.

Lause 4.1. *Täydellisessä verkossa tiedonleviämisprosessin saturaatiohetkelle pätee*

$$\lambda T_{sat} - 2\log n \xrightarrow{d} \xi_1 + \xi_2,$$

missä $\xi_1, \xi_2 \sim \mathrm{Gumbel}(0,1)$ *ja* $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$.

Edellinen lause on annettu ja todistettu papereissa [15] ja [14]. Tässä sovelletaan kuitenkin hiukan erilaista menetelmää, jossa ei käytetä generoivia tai karakteristisia funktioita, kuten edellä mainituissa papereissa. Paperista [14] löytyy vastaava tulos myös Erdősin–Rényin satunnaisverkolle (ks. Lause 4.12). Lausetta 4.1 vastaava tulos diskreetissä ajassa löytyy esimerkiksi paperista [18].

Todistetaan seuraavaksi Lause 4.1. Ensiksi otetaan käyttöön muutamia merkintöjä ja huomataan että solmujen heräilyintensiteetti λ ei ole todistuksissa olennainen.

Huomautus 4.2. Olkoon $\widehat{T}$ jokin hyppy- eli informointihetki tiedonleviämisprosessissa, jossa solmujen heräilyintensiteetti on 1, ja T vastaava hyppyhetki tiedonleviämisprosessissa, jossa solmujen heräilyintensiteetti on λ. Nyt Lauseen 2.15 nojalla $\lambda T =_{st} \widehat{T}$. Tästä syystä jatkossa koko Luvussa 4 oletetaan yleisyyttä menettämättä, että $\lambda = 1$ kaikilla n.

Olkoon T_k ajanhetki jolloin k:nnes solmu saa tiedon, eli jolloin $k-1$:s tiedonsiirto tapahtuu. Tässä siis $T_1 = 0$, ja n:n solmun verkossa $T_{sat} = T_n$. Heti huomataan, että saturaatiohetki T_{sat} voidaan kirjoittaa teleskooppisena summana

$$T_{sat} = \sum_{k=1}^{n-1} (T_{k+1} - T_k).$$

Hetkellä T_k prosessissa on k tietävää solmua ja todennäköisyys, että seuraavaksi heräävä tietävä solmu ottaa yhteyttä solmuun, jolla tietoa ei vielä ole, on $\frac{n-k}{n}$. Näin ollen käyttämällä Poisson-prosessien unohdusominaisuutta ja Lausetta 2.14 havaitaan, että summattavat edellisessä kaavassa ovat toisistaan riippumattomia, ja $T_{k+1} - T_k \sim \mathrm{Exp}(\frac{k(n-k)}{n})$.

Olkoot $(X_k)_{k=1}^{n-1}$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$X_k \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{k(n-k)}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{16}$$

Jatkossa tässä luvussa satunnaismuuttujat X_k esiintyvät aina tässä roolissa.

Mikäli n on pariton, niin

$$T_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} \Big(T_{k+1} - T_k\Big) + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \Big(T_{k+1} - T_k\Big),$$

missä oikean puolen summat ovat toisistaan riippumattomia sekä symmetrisyyden ja aiempien huomioiden nojalla molemmat jakautuneet kuten $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} X_k$. Jos taas n sattuu olemaan parillinen, niin

$$T_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \Big(T_{k+1} - T_k\Big) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \Big(T_{k+1} - T_k\Big) + \big(T_{\frac{n}{2}+1} - T_{\frac{n}{2}}\big),$$

missä oikean puolen viimeinen termin erotus suppenee jakaumassa nollaan (Lause 2.3), ja kaksi muuta termiä ovat jakautuneet kuten $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} X_k$. Edelliset huomiot motivoivat seuraavan lemman. Jatkossa indeksit $\frac{n}{2}, n^\alpha$ jne. tarkoittavat ylöspäin pyöristettyä kokonaislukua.

Lemma 4.3.

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} X_k - \log n \xrightarrow{d} \mathrm{Gumbel}(0,1), \ \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Olkoon $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Jaetaan todistus kahteen osaan seuraavasti:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} X_k - \log n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n^\alpha} X_k - \log n^\alpha}_{1)\ \xrightarrow{d} \mathrm{Gumbel}(0,1)} + \underbrace{\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2-1} X_k - \log n^{1-\alpha}}_{2)\ \xrightarrow{d} 0}.$$

1) Olkoot $E_k \sim \mathrm{Exp}(\frac{k^2}{n})$ toisistaan ja kaikista satunnaismuuttujista X_k riippumattomia satunnaismuuttujia. Määritellään $\widehat{X}_k := \min(X_k, E_k) \sim \mathrm{Exp}(k)$ (Lause 2.6). Merkitään

$$A := \{X_k = \widehat{X}_k \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n^\alpha\} = \{E_k \geq X_k \text{ kaikilla } k = 1, \dots, n^\alpha\}.$$

Käyttämällä Lausetta 2.6 saadaan

$$\mathbb{P}(E_k < X_k) = \frac{\frac{k^2}{n}}{\frac{k^2}{n} + \frac{k(n-k)}{n}} = \frac{k}{n},$$

joten

$$\mathbb{P}(A^c) \leq \sum_{k=1}^{n^\alpha} \mathbb{P}(E_k < X_k) = \sum_{k=1}^{n^\alpha} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \frac{n^\alpha(n^\alpha + 1)}{2} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Siispä $\mathbb{P}(A) \to 1$, kun $n \to \infty$.

Lauseen 2.8 nojalla $\sum_{k=1}^{n^\alpha} \widehat{X}_k - \log n^\alpha \xrightarrow{d}$ Gumbel$(0,1)$. Siten Lauseesta A.4 saadaan, että myös

$$\left(\sum_{k=1}^{n^\alpha} X_k - \log n^\alpha\right) \mathbb{1}_A = \left(\sum_{k=1}^{n^\alpha} \widehat{X}_k - \log n^\alpha\right) \mathbb{1}_A \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0,1), \text{ kun } n \to \infty.$$

Väitteen ensimmäinen osa seuraa tästä edelleen Lauseen A.4 avulla.

2) Lauseen 2.3 perusteella $X_{\frac{n}{2}}$ suppenee jakaumassa nollaan, joten summaus voidaan yksinkertaisuuden vuoksi tehdä saman tien $\frac{n}{2}$:een asti.

Huomataan, että $\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$. Kirjoitetaan tämän avulla

$$\begin{aligned} \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} X_k - \log n^{1-\alpha} &= \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \left(X_k - \frac{n}{k(n-k)}\right) \\ &+ \left(\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \frac{1}{k} - \log \frac{n^{1-\alpha}}{2}\right) + \left(\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \frac{1}{n-k} - \log 2\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Huomataan, että

$$\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=n/2}^{n-n^\alpha-1} \frac{1}{k}.$$

Siten hajotelman (17) alemman rivin molemmat termit suppenevat nollaan Lauseen A.12 nojalla.

Käyttämällä Lausetta 2.4 ja satunnaismuuttujien X_k riippumattomuutta saadaan

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \left(X_k - \frac{n}{k(n-k)}\right)\right] &= \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \text{Var } X_k = \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \left(\frac{k(n-k)}{n}\right)^{-2} \\ = \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)^2 &\leq 4 \sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} \frac{1}{k^2} \leq 4 \sum_{k=n^\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \end{aligned}$$

Koska lisäksi

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=n^\alpha+1}^{n/2} X_k - \frac{n}{k(n-k)}\right) = 0 \text{ kaikilla } n,$$

niin soveltamalla Markovin epäyhtälöä (Lause A.1) nähdään, että myös hajotelman (17) ensimmäinen termi suppenee jakaumassa nollaan. Toisen osan ja samoin koko lemman väite seuraa käyttämällä Slutskyn lemmaa (Lause A.2). $\square$

Merkitään jatkossa T_{puoli} pienintä ajanhetkeä, jolloin vähintään puolet verkon solmuista on informoitu. Eli n:n solmun verkossa $T_{puoli} = T_{\frac{n}{2}}$.

Lemma 4.4. *Täydellisessä verkossa pätee*

$$T_{puoli} - \log n \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0,1), \text{ kun } n \to \infty.$$

$$T_{sat} - T_{puoli} - \log n \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0,1), \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Seuraa suoraan Lemmasta 4.3 ja sitä edeltävistä päättelyistä. $\square$

Lause 4.1 seuraa nyt Lauseesta A.6, sillä $T_{puoli} \perp\!\!\!\perp (T_{sat} - T_{puoli})$.

4.2 Saturaatiohetki ohennetussa tiedonleviämisprosessissa

Seuraavaksi siirrytään ohennettuun tiedonleviämisprosessiin, jossa solmu tiedon saatuaan alkaa levittää sitä todennäköisyydellä $p = p_n \in (0,1]$. Todennäköisyydellä $1-p$ solmusta tulee pelkkä kuuntelija, ja tällöin se ei tiedon saatuaan tee prosessin loppuaikana enää mitään. Se, ryhtyykö solmu levittäjäksi vai kuuntelijaksi, ei riipu muitten solmujen valinnoista, eikä mistään muustakaan mitä prosessissa on aiemmin tapahtunut. Jatkossa tavallisella tiedonleviämisprosessilla tarkoitetaan tiedonleviämisprosessia, jossa kaikki solmut ovat levittäjiä. Tavallinen tiedonleviämisprosessi saadaan siis ohennetusta tiedonleviämisprosessista valitsemalla $p = 1$.

Lause 4.1 yleistyy ohennetulle tiedonleviämisprosessille. Lauseen 4.1 merkinnöin saadaan seuraava tulos.

Lause 4.5. *Oletetaan, että $pn^{1-\epsilon} \to \infty$, kun $n \to \infty$, jollain $\epsilon > 0$. Tällöin täydellisessä verkossa ohennetun tiedonleviämisprosessin saturaatiohetkelle pätee*

$$p\lambda T_{sat} - 2\log n - \log p \xrightarrow{d} \xi_1 + \xi_2.$$

Huomautus 4.6. Tilanne, jossa solmun ei sallitakaan ottaa yhteyttä itseensä, vastaa tilannetta, jossa jokainen solmu heräilee intensiteetillä $\frac{n-1}{n}\lambda$ (Lause 2.14). Merkitään saturaatiohetkeä tällaisessa prosessissa symbolilla T_{sat}. Nyt lauseen 4.5 nojalla

$$\frac{n-1}{n}\lambda T_{sat} - 2\log n - \log p \to \xi_1 \to \xi_2,$$

mutta koska $(\frac{n}{n-1} - 1)(\log n + \log pn) \to 0$ niin Lauseen A.5 nojalla myös

$$T_{sat} - 2\log n - \log p \xrightarrow{d} \xi_1 + \xi_2.$$

Todistetaan ensin muutamia lemmoja, joista voidaan sitten koota todistus Lauseelle 4.5. Otetaan ensiksi käyttöön hieman merkintöjä ja määritelmiä. Jatkossa *levittäjiksi* sanotaan solmuja, jotka alkavat tiedon saatuaan levittää sitä eteenpäin. *Levittäviksi* solmuiksi sanotaan levittäjiä, joilla on tieto.

Olkoon $L_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } i\text{:s tiedon saanut solmu on levittäjä} \\ 0, & \text{jos } i\text{:s tiedon saanut solmu on kuuntelija,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$

Siis $L_1 = 1$ ja $L_i \sim Ber(p)$, kun $i \geq 2$. Olkoon $S_k := \sum_{i=1}^{k} L_i$. Eli S_k on levittävien solmujen määrä hetkellä T_k. Tässä T_k on luonnollisesti edelleen samassa roolissa kuin aiemminkin, eli ajanhetki kun k:nnes solmu saa tiedon. Seuraavan lemman avulla saturaatiohetken T_{sat} jakauma saadaan heti kirjoitettua tunnettujen jakaumien avulla.

Lemma 4.7. *Olkoon $n \geq 2$ ja $X_k \sim \mathrm{Exp}\big(\frac{k(n-k)}{n}\big)$, $k = 1, \ldots, n-1$, keskenään ja kaikista L_i:stä riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin pätee*

$$\left(\frac{k}{S_k} X_k\right)_{k=1}^{n-1} =_{st} (T_{k+1} - T_k)_{k=1}^{n-1}.$$

Erityisesti saturaatiohetkelle pätee

$$T_{sat} =_{st} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{S_k} X_k.$$

Todistus. Merkitään $\underline{S} = (S_1, \ldots, S_{n-1})$ ja $K = \{\underline{x} \in \mathbb{N}^{n-1} : \mathbb{P}(\underline{S} = \underline{x}) > 0\}$. Käyttämällä hyväksi Lausetta 2.4 saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_2 - T_1 \leq t_1, \ldots, T_n - T_{n-1} \leq t_{n-1}) \\
=&\sum_{\underline{x} \in K} \mathbb{P}(T_2 - T_1 \leq t_1, \ldots, T_n - T_{n-1} \leq t_{n-1} | \underline{S} = \underline{x}) \mathbb{P}(\underline{S} = \underline{x}) \\
=&\sum_{\underline{x} \in K} \mathbb{P}\left(\frac{1}{x_1} X_1 \leq t_1, \ldots, \frac{n-1}{x_{n-1}} X_{n-1} \leq t_{n-1}\right) \mathbb{P}(\underline{S} = \underline{x}) \\
=&\mathbb{P}\left(\frac{1}{S_1} X_1 \leq t_1, \ldots, \frac{n-1}{S_{n-1}} X_{n-1} \leq t_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus voidaan perustella samaan tapaan kuin tehtiin luvun alussa ennen Lemmaa 4.3. Nyt nimittäin ehdolla $\underline{S} = \underline{x} \in \mathbb{N}^{n-1}$ prosessissa on x_k kappaletta levittäjiä hetkellä T_k ja todennäköisyys, että seuraavaksi heräävä levittäjä ottaa yhteyttä ei-tietävään solmuun on $\frac{(n-k)}{n}$. Näin ollen ehdolla $\underline{S} = x$ pätee $T_{k+1} - T_k \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{x_k(n-k)}{n}\right) = \frac{k}{x_k} \mathrm{Exp}\left(\frac{k(n-k)}{n}\right)$, sillä oletuksen mukaan $\underline{S}$ on riippumaton siitä mitä huhuleviämisprosessissa muuten tapahtuu. Lisäksi Poisson-prosessin unohdusominaisuuden nojalla ehdolla $\underline{S} = \underline{x}$ satunnaismuuttujat $T_{k+1} - T_k$ ovat toisistaan riippumattomia. $\square$

Seuraavaksi havaitaan, että levittäjien suhteellinen osuus on suurella todennäköisyydellä lähellä p_n:ää suurilla n:n arvoilla.

Lemma 4.8. *Olkoon $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ja $\alpha + \frac{1}{2} < \beta \leq 1$ sekä $0 < c \leq 1$. Määritellään*

$$A_n = \left\{ |S_k/k - p| \leq \delta\sqrt{p}n^{-\alpha} \ \ \text{kaikilla } cn^\beta \leq k \leq n \right\}.$$

Oletetaan, että $np \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tällöin kaikilla $\delta > 0$ pätee

$$\mathbb{P}(A_n) \to 1, \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Havaitaan ensiksi, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n^c) =& \mathbb{P}\left(|S_k - pk| > \delta k\sqrt{p}n^{-\alpha} \ \ \text{jollain } cn^\beta \leq k \leq n\right) \\
\leq& \mathbb{P}\left(|S_k - pk| > \delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} \ \ \text{jollain } cn^\beta \leq k \leq n\right) \\
=& \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - pk| > \delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha}) \\
\leq& \mathbb{P}\Big(|1-p| + \max_{2\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=2}^{k}(L_i - p)\Big| > \delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha}\Big) \\
\leq& \mathbb{P}\Big(\max_{2\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=2}^{k}(L_i - p)\Big| > \delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1\Big).
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $np \to \infty$, joten myös $\delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} \to \infty$. Siten kun n on riittävän suuri, niin $\delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1 > 0$, ja Kolmogorovin maksimaaliepäyhtälön nojalla (Lause A.9) saadaan

$$\mathbb{P}\Big(\max_{2\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=2}^{k}(L_i - p)\Big| > \delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1\Big) \leq \text{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}(L_i - p)\right)(\delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1)^{-2}.$$

Lisäksi $\text{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}(L_i - p)\right) = (n-1)p(1-p) \leq np$. Näin ollen

$$\text{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}(L_i - p)\right)(\delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1)^{-2} \leq np(\delta c\sqrt{p}n^{\beta-\alpha} - 1)^{-2} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

□

Levittävien solmujen osuus tietävistä solmuista tiedetään siis kohtalaisen tarkasti, kunhan prosessi on ollut käynnissä jonkin aikaa. Prosessin loppupään jakaumaan päästään siis käsiksi Lemman 4.7 avulla. Prosessin alussa levittävien solmujen suhteellinen osuus tietävistä solmuista voi kuitenkin vaihdella hyvinkin paljon. Tämä ongelma ratkaistaan siten, että hetkeen T_{puoli} asti tutkitaan pelkkien levittäjien muodostamaa aliverkkoa. Tässä aliverkossa nimittäin on käynnissä tavallinen tiedonleviämisprosessi, missä kuuntelijoita ei ole ollenkaan. Seuraava lemma kertoo, että puolet kaikista verkon solmuista on saanut tiedon suunnilleen samaan aikaan kuin puolet kaikista levittäjistä. Merkitään ensin

$$\kappa = \inf\{k : S_k \geq S_n/2\}$$

eli κ on se indeksi k, jolla osasumma S_k ylittää puolet koko summasta S_n. Nyt siis T_κ on se ajanhetki, kun puolet levittäjistä on saanut tiedon.

Lemma 4.9. *Jos $pn^{1-\epsilon} \to \infty$ jollain $\epsilon > 0$, niin*

$$p|T_{puoli} - T_\kappa| \xrightarrow{d} 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Olkoon $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sellainen, että $\sqrt{p}n^\alpha \to \infty$, kun $n \to \infty$. Määritellään tapahtuma

$$A_n = \{|S_k - pk| \le \sqrt{p}kn^{-\alpha} \text{ kaikilla } \frac{n}{4} \le k \le n\}.$$

Perustellaan ensiksi, että A_n:ssä κ on lähellä lukua $\frac{n}{2}$.

Joukossa A_n pätee

$$S_{\frac{n}{4}} \le \frac{pn}{4} + \sqrt{p}n^{1-\alpha} \le \frac{pn}{2} - \sqrt{p}n^{1-\alpha} \le \frac{S_n}{2}.$$

Keskimmäinen epäyhtälö on totta suurille n, koska $\sqrt{p}n^\alpha \to \infty$. Tästä saadaan, että tarpeeksi suurille n pätee

$$\mathbb{1}_{A_n}\kappa \ge \mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge 1 : S_k \ge \frac{pn}{2} - \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} = \mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge \frac{n}{4} : S_k \ge \frac{pn}{2} - \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\}.$$

Nyt käyttämällä tietoa, että A_n:ssä $S_k \le kp + \sqrt{p}n^{1-\alpha}$ kaikilla $\frac{n}{4} \le k \le n$ saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge \frac{n}{4} : S_k \ge \frac{pn}{2} - \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} \\
\ge&\mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge \frac{n}{4} : kp + \sqrt{p}n^{1-\alpha} \ge \frac{pn}{2} - \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} \\
=&\mathbb{1}_{A_n} \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{2}{\sqrt{p}}n^{1-\alpha} \right\rceil.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä yllä olevat laskut ja merkitsemällä $n_- := \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{2}{\sqrt{p}}n^{1-\alpha} \right\rceil$ saadaan siis, että riittävän suurilla n pätee

$$\mathbb{1}_{A_n}\kappa \ge \mathbb{1}_{A_n}n_-.$$

Vastaavin perustein saadaan riittävän suurille n

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{A_n}\kappa \le \mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge 1 : S_k \ge \frac{pn}{2} + \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} \\
=&\mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge \frac{n}{4} : S_k \ge \frac{pn}{2} + \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} \\
\le&\mathbb{1}_{A_n} \inf\left\{k \ge \frac{n}{4} : kp - \sqrt{p}n^{1-\alpha} \ge \frac{pn}{2} + \sqrt{p}n^{1-\alpha}\right\} \\
=&\mathbb{1}_{A_n} \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{2}{\sqrt{p}}n^{1-\alpha} \right\rceil = \mathbb{1}_{A_n}n_+,
\end{aligned}$$

missä siis $n_+ = \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{2}{\sqrt{p}}n^{1-\alpha} \right\rceil$.

Edellisistä arvioista $\mathbb{1}_{A_n}\kappa$:lle saadaan, että riittävän suurille n pätee

$$p\mathbb{1}_{A_n}|T_{puoli} - T_\kappa| \le p\left(T_{n_+} - T_{n_-}\right) = p\sum_{k=n_-}^{n_+-1}\left(T_{k+1} - T_{k\cdot}\right) =_{st} p\sum_{k=n_-}^{n_+-1}\frac{k}{S_k}X_k \tag{18}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin Lemmaa 4.7.

Huomataan vielä, että jos n on riittävän suuri, niin $n_- \geq \frac{n}{4}$. Tällöin suoraan tapahtuman A_n määritelmästä saadaan

$$p\mathbb{1}_{A_n} \sum_{k=n_-}^{n_+-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq \frac{p}{p-\sqrt{p}n^{-\alpha}} \sum_{k=n_-}^{n_+-1} X_k. \tag{19}$$

Koska $\sqrt{p}n^{\alpha} \to \infty$, niin $\frac{p}{p-\sqrt{p}n^{-\alpha}} \to 1$. Lemman 4.8 nojalla $P(A_n) \to 1$. Siispä arvioiden (18) ja (19) sekä Lauseen A.4 nojalla riittää osoittaa, että

$$\sum_{k=n_-}^{n_+} X_k \xrightarrow{d} 0, \text{ kun } n \to \infty. \tag{20}$$

Koska $\mathbb{E}X_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$, niin Markovin epäyhtälön (Lause A.1) avulla saadaan, että kaikille $\delta > 0$ pätee

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=n_-}^{n_+} X_k > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta}\sum_{k=n_-}^{n_+}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{\delta}\sum_{k=n_-}^{n_+}\frac{1}{k} + o(1) \leq \frac{2}{\delta}\frac{n_+ - n_-}{n_-} + o(1) \to 0.$$

Konvergenssi seuraa siitä, että $\sqrt{p}n^{\alpha} \to \infty$. □

Seuraavaksi osoitetaan pieni tekninen lemma.

Lemma 4.10. *Jos $pn^{1-4\epsilon} \to \infty$, niin*

$$n^{\epsilon}\left|\frac{S_n}{pn} - 1\right| \xrightarrow{d} 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Kaikille $\delta > 0$ pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(n^{\epsilon}\left|\frac{S_n}{pn} - 1\right| > \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \delta p n^{-\epsilon}\right) \\ \leq &\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \delta\sqrt{p}n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \to 0, \text{ kun } n \to \infty, \end{aligned}$$

missä epäyhtälö pätee riittävän suurille n, koska jos on n on iso, niin $\sqrt{p} > n^{-\frac{1}{2}+2\epsilon}$. Konvergenssi seuraa Lauseesta 4.8. □

Lemma 4.11. *Jos $pn^{1-\epsilon} \to \infty$ jollain $\epsilon > 0$, niin*

$$pT_{puoli} - \log pn \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0,1).$$

Todistus. Kirjoitetaan ensiksi

$$\begin{aligned} &pT_{puoli} - \log pn \\ =&\frac{S_n}{n}T_{\kappa} - \log S_n + \left(p - \frac{S_n}{n}\right)T_{\kappa} + \log\frac{S_n}{pn} + p(T_{puoli} - T_{\kappa}) \\ =&\left(\frac{S_n}{n}T_{\kappa} - \log S_n\right)\left(1 + \frac{p - \frac{S_n}{n}}{\frac{S_n}{n}}\right) + \left(\frac{p - \frac{S_n}{n}}{\frac{S_n}{n}}\right)\log S_n + \log\frac{S_n}{pn} + p(T_{puoli} - T_{\kappa}). \end{aligned} \tag{21}$$

Kun tutkitaan pelkästään levittäjien muodostamaa aliverkkoa, niin saadaan tavallinen tiedonleviämisprosessi täydellisessä verkossa, jossa on S_n kappaletta solmuja, ja jossa solmut heräilevät intensiteetillä $\frac{S_n}{n}$, sillä todennäköisyys, että levittäjä ottaa herätessään yhteyttä toiseen levittäjään on $\frac{S_n}{n}$. Koska lisäksi $S_n \xrightarrow{d} \infty$, kun $n \to \infty$, niin Lemmasta 4.4 (ks. myös huomautus 4.2) saadaan, että

$$\frac{S_n}{n} T_\kappa - \log S_n \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0, 1).$$

Lemman 4.9 nojalla $p(T_{puoli} - T_\kappa) \xrightarrow{d} 0$.

Lemman 4.10 nojalla $\frac{S_n}{pn} \xrightarrow{d} 1$, joten Lauseen A.7 nojalla $\log \frac{S_n}{pn} \xrightarrow{d} 0$.

Havaitaan vielä, että $S_n \leq n$ aina, joten kun $\epsilon > 0$, niin isoilla n pätee

$$\left| \frac{\frac{S_n}{n} - p}{\frac{S_n}{n}} \right| \log S_n = \left| \frac{\frac{S_n}{pn} - 1}{\frac{S_n}{pn}} \right| \log S_n \leq \frac{n^\epsilon \left| \frac{S_n}{pn} - 1 \right|}{\left| \frac{S_n}{pn} \right|} \xrightarrow{d} 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Konvergenssi seuraa Slutskyn lemmasta (Lause A.2), sillä Lemman 4.10 nojalla nimittäjä konvergoi ykköseen ja osoittaja nollaan, kunhan ϵ on riittävän pieni.

Nyt koko lemman väite seuraa Slutskyn lemmasta, kun edellä olevat konvergenssit sijoitetaan hajotelmaan (21). □

Seuraavaksi voidaankin jo koota todistus Lauseelle 4.5.

Lauseen 4.5 todistus. Kirjoitetaan

$$pT_{sat} - 2 \log n - \log p = \Big[pT_{puoli} - \log pn \Big] + \Big[p(T_{sat} - T_{puoli}) - \log n \Big].$$

Edellä jo osoitettiin, että ensimmäinen summattava eli prosessin alkuosa konvergoi Gumbel-jakaumaan. Tehtävänä on siis enää todeta toisen termin suppeneminen ja summattavien asymptoottinen riippumattomuus.

Määritellään tapahtuma

$$A_n = \left\{ |S_k - p| \leq k\sqrt{p} n^{-\alpha} \;\text{ kaikilla } \frac{n}{2} \leq k \leq n \right\},$$

missä $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ on sellainen, että $\frac{\sqrt{p} n^\alpha}{\log n} \to \infty$. Olkoot satunnaisuuttujat $(X_k)_{k=1}^{n-1}$ kuten Lemmassa 4.7 ja $t, s \in \mathbb{R}$. Lemmasta 4.7 saadaan

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(p(T_{sat} - T_{puoli}) - \log n \leq t,\ pT_{puoli} - \log pn \leq s \Big) \\ =&\mathbb{P}\Big(p \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log n \leq t,\ p \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log pn \leq s \Big). \end{aligned}$$

Lemman 4.8 nojalla $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, joten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log n \le t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s\Big)\\
=&\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log n \le t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s, A_n\Big) + o(1).
\end{aligned}$$

Merkitsemällä $a_n = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+n^{-\alpha}}$ suoraan A_n:n määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log n \le t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s, A_n\Big)\\
\le&\mathbb{P}\Big(a_n\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \le t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s\Big).
\end{aligned}$$

Siitä, että satunnaismuuttujat X_k ovat toisistaan ja satunnaismuuttujista S_k riippumattomia seuraa

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(a_n\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \le t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s\Big)\\
=&\mathbb{P}\Big(a_n\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \le t\Big)\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s\Big).
\end{aligned}$$

Käyttämällä uudestaan Lemmaa 4.7 saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(a_n\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \le t\Big)\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{k}{S_k}X_k - \log pn \le s\Big)\\
=&\mathbb{P}\Big(a_n\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \le t\Big)\mathbb{P}\Big(pT_{puoli} - \log pn \le s\Big).
\end{aligned} \tag{22}$$

Kun käännetään summaus toisinpäin, Lemmasta 4.3 saadaan että

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1}X_k - \log n \xrightarrow{d} \text{Gumbel}(0,1),\ \text{kun } n \to \infty. \tag{23}$$

Edelleen α:n valinnasta seuraa, että $(a_n - 1)\log n \to 0$, ja siten yhtälön (23) sekä Lauseen A.5 nojalla yhtälön (22) ensimmäinen tulontekijä suppenee lukuun $F_\xi(t) := \mathbb{P}(\xi_1 \le t)$. Toinen tulontekijä suppenee lukuun $F_\xi(s)$ Lemman 4.11 nojalla. Siten edellisistä arvioista saadaan, että

$$\mathbb{P}\Big(p(T_{sat} - T_{puoli}) - \log n \le t,\ pT_{puoli} - \log pn \le s\Big) \le F_\xi(t)F_\xi(s) + o(1).$$

Vastaavin perustein käyttämällä lisäksi neljännelle riville mentäessä alkeellista epäyhtälöä $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c)$ saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(p(T_{sat} - T_{puoli}) - \log n \leq t,\ pT_{puoli} - \log pn \leq s\Big) \\
=&\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log n \leq t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log pn \leq s\Big) \\
\geq&\mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - n^{-\alpha}} \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} X_k - \log n \leq t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log pn \leq s, A_n\Big) \\
\geq&\mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - n^{-\alpha}} \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} X_k - \log n \leq t,\ p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log pn \leq s\Big) - o(1) \\
=&\mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - n^{-\alpha}} \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} X_k - \log n \leq t\Big)\mathbb{P}\Big(p\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k - \log pn \leq s\Big) - o(1) \\
=&\mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - n^{-\alpha}} \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} X_k - \log n \leq t\Big)\mathbb{P}\Big(pT_{puoli} - \log pn \leq s\Big) - o(1) \\
&\to F_\xi(t)F_\xi(s),\ \text{kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Edellisistä arvioista saadaan siis, että

$$\Big(p(T_{sat} - T_{puoli}) - \log n \leq t,\ pT_{puoli} - \log pn \leq s\Big) \xrightarrow{d} (\xi_1, \xi_2),$$

missä $\xi_1, \xi_2 \sim \mathrm{Gumbel}(0,1)$ ja $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$. Väite seuraa nyt käyttämällä Lausetta A.7, koska $(x,y) \mapsto x + y$ on jatkuva funktio. □

Esitetään tämän luvun loppuun vertailun vuoksi vielä Lauseen 4.5 näköinen tulos Erdősin–Rényin satunnaisverkossa paperista [14]. Olkoon $G = G(n,p)$ verkko, jossa on n solmua ja kunkin solmun välillä linkki muista linkeistä riippumatta todennäköisyydellä $p = p_n \in (0,1]$. Määritellään tähän verkkoon tavallinen tiedonleviämisprosessi aivan vastaavasti kuin täydelliseen verkkoonkin. Eli solmu voi ottaa yhteyttä mihin tahansa verkon muuhun solmuu, mutta nyt lisävaatimuksena sille, että tieto voi siirtyä solmulta i solmulle j on, että i:n ja j:n välillä on linkki. Huomaa, että Lauseen 2.14 nojalla voitaisiin tämä prosessi määritellä yhtäpitävästi myös siten, että jokainen solmu lähettää tietoa intensiteetillä $\frac{1}{n}$ jokaiseen siitä lähtevään linkkiin.

Lause 4.12 ([14] Theorem 3.1)**.** *Oletetaan, että* $\frac{pn}{(\log n)^3} \to \infty$*, kun* $n \to \infty$*. Tällöin tavallisen tiedonleviämisprosessin saturaatiohetkelle* T_{sat} *verkossa* G *pätee*

$$p\lambda T_{sat} - 2\log n \to \xi_1 + \xi_2,$$

missä $\xi_1, \xi_2 \sim \mathrm{Gumbel}(0,1)$ *ja* $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$*.*

Huomaa, että valitsemalla $p = 1$ joko Lauseessa 4.5 tai Lauseessa 4.12 saadaan Lause 4.1.

4.3 Tiedonleviäminen yksittäisille solmuille

Tässä alaluvussa jatketaan edelleen samoilla merkinnöillä kuin aiemminkin tässä luvussa. Tarkastellaan ohennettua tiedonleviämisprosessia parametrilla $p = p_n$ täydellisessä n:n solmun verkossa. Valitaan tasajakaumasta k kappaletta solmuja riippumatta kaikesta mitä prosessissa muuten tapahtuu, mutta ei kuitenkaan valita sitä solmua, jolla on tieto prosessin alkaessa. Numeroidaan valitut solmut $1, \ldots, k$ ja merkitään τ_i:llä hetkeä, jolloin solmu i saa tiedon. Seuraava lause kertoo ajanhetkien τ_i asymptoottisen jakauman ja riippuvuusrakenteen. Huomaa, että k on nyt kiinnitetty eikä se riippu n:stä.

Lause 4.13. *Oletetaan, että on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että $pn^{1-\epsilon} \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tällöin*

$$(p\lambda\tau_j - \log pn)_{j=1}^k \xrightarrow{d} (\xi + Z_j)_{j=1}^k, \text{ kun } n \to \infty,$$

missä $\xi, Z_1, \ldots, Z_k$ ovat toisistaan riippumattomia ja $\xi \sim \mathrm{Gumbel}(0, 1)$ sekä Z_j:t ovat standardeja logistisesti jakautuneita satunnaismuuttujia eli

$$F(t) := \mathbb{P}(Z_i \leq t) = \frac{e^t}{e^t + 1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tapauksessa $p = 1$ tämä Lause on esitetty ja todistettu paperissa [2] ja hieman erilaisella menetelmällä paperissa [1]. Paperista [2] löytyy myös vastaava tulos Erdősin–Rényin satunnaisverkossa yhdelle solmulle eli tapaukselle $k = 1$ (ks. Lause 4.17). Vastaava tulos konfiguraatiomallille eri asteluvun jakaumille tapauksessa $k = 1 = p$ löytyy esim. papereista [3] ja [4].

Jatkossa voidaan olettaa, että $\lambda = 1$ (ks. Huomautus 4.2).

Määritellään

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} X_k - \sum_{k=1}^{n/2-1} X_k \leq t \Big).$$

Tässä X_k:t ovat edelleen samoja kuin aiemminkin tässä luvussa (kuten Lemmassa 4.7). Sovitaan määritelyssä, että tyhjä summa on 0.

Lemma 4.14. *Kaikilla $t \in \mathbb{R}$ pätee*

$$F_n(t) \xrightarrow{d} F(t), \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Olkoon

$$\beta(x) = x(1 - x) \vee 0.$$

Nyt $(F_n(t))_{t \geq 0}$ on Markov-prosessi $n^{-1}\mathbb{Z}_+$:ssa siirtymäintensiteeteillä

$$q_{\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}} = \frac{k(n-k)}{n} = n\beta(k/n), \quad \frac{n}{2} \leq k \leq n - 1.$$

Havaitaan, että F toteuttaa logistisen differentiaaliyhtälön $F'(t) = \beta(F(t))$, eli

$$F(t) = \frac{1}{2} + \int_0^t \beta(F(s))ds.$$

Lisäksi $F_n(0) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \frac{1}{n} \to \frac{1}{2} = F(0)$. Väite ei-negatiivisille t saadaan tästä Seurauksen 3.6 avulla, sillä β on rajoitettu ja Lipschitz-jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Määritellään sitten

$$\widetilde{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} X_k - \sum_{k=1}^{n/2-1} X_k < -t \Big), \quad t \geq 0.$$

Huomaa, että mikäli $-t$ ei ole prosessin $(F_n(t))$ hyppyhetki niin $\widetilde{F}_n(t) = F_n(-t)$. Koska kiinnitetyllä t prosessi $(F_n(t))$ ei m.v. hyppää, niin riittää osoittaa, että $\widetilde{F}_n(t) \xrightarrow{d} F(-t)$ kaikilla $t > 0$.

Havaitaan, että $(\widetilde{F}_n(t))_{t \geq 0}$ on Markov-prosessi siirtymäintensiteeteillä

$$q_{\frac{k}{n}, \frac{k-1}{n}} = \frac{k(n-k)}{n} = n\beta(k/n), \quad 2 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1.$$

Lisäksi $\widetilde{F}(t) = F(-t)$ toteuttaa yhtälön $\widetilde{F}' = -\beta(\widetilde{F})$ ja $\lim_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(0) = \widetilde{F}(0)$. Näin ollen taas Seurausta 3.6 hyväksi käyttäen kaikilla $t < 0$ pätee

$$\widetilde{F}_n(-t) \xrightarrow{d} \widetilde{F}(-t) = F(t), \text{ kun } n \to \infty.$$

$\square$

Parannetaan vielä hiukan edellistä lemmaa.

Lemma 4.15. *Olkoon* (a_n) *lukujono, jolle pätee* $\lim_{n\to\infty} a_n \to 1$. *Tällöin kaikilla* $t \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$F_n(a_n t) \xrightarrow{d} F(t).$$

Todistus. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Koska F on jatkuva voidaan valita sellainen $\delta > 0$, että $\epsilon_1 := |F(t+\delta) - F(t)| + |F(t-\delta) - F(t)| < \epsilon/2$. Olkoon n riittävän suuri, jotta $|a_n t - t| < \delta$. Tällöin käyttämällä hyväksi prosessin F_n kasvavuutta saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|F_n(a_n t) - F(t)| > \varepsilon) \\
\leq &\mathbb{P}(|F_n(t-\delta) - F(t)| + |F_n(t+\delta) - F(t)| > \varepsilon) \\
\leq &\mathbb{P}(|F_n(t-\delta) - F(t-\delta)| + |F_n(t+\delta) - F(t+\delta)| + \epsilon_1 > \varepsilon) \\
\leq &\mathbb{P}(|F_n(t-\delta) - F(t-\delta)| + |F_n(t+\delta) - F(t+\delta)| > \epsilon/2) \\
\leq &\mathbb{P}(|F_n(t-\delta) - F(t-\delta)| > \varepsilon/4) + \mathbb{P}(|F_n(t+\delta) - F(t+\delta)| > \epsilon/4) \\
&\to 0, \text{ kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Todistetaan vielä yksi lemma. Otetaan sitä varten käyttöön muutama merkintä. Olkoon $N(t) = N_n(t)$ tietävien solmujen määrä hetkellä t ohennetussa tiedonleviämisprosessissa. Määritellään

$$H_n(t) = \frac{N(T_{puoli} + t/p)}{n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 4.16. *Oletetaan, että on olemassa sellainen* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$*, että* $\sqrt{p}n^{\alpha} \to \infty$*, kun* $n \to \infty$*. Tällöin kaikilla* $t \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$H_n(t) \xrightarrow{d} F(t), \text{ kun } n \to \infty.$$

Todistus. Lemmaa 4.7 hyväksi käyttäen havaitaan, että

$$H_n(t) =_{st} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{k}{S_k} X_k - \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq t/p \Big), \tag{24}$$

missä S_k määritellään samoin kuin Lauseen 4.5 todistuksessa. Huomaa tässä, että $T_{puoli} =_{st} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{k}{S_k} X_k$. Määritelläänkin nyt $H_n(t)$ uudestaan kuten kaavassa (24), niin että jakaumien yhtäsuuruuden sijasta pätee otosten yhtäsuuruus. Tässä ei menetetä mitään, koska tavoitteena on todistaa ainoastaan $H_n(t)$:n jakauman suppeneminen.

Kiinitetään $t < 0$.

Olkoon $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ja $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ sellaisia, että $\sqrt{p}n^{\alpha} \to \infty$ ja $\frac{1}{2} + \alpha < \beta < 1$. Kirjoitetaan ensiksi

$$\begin{aligned} H_n(t) =& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{k}{S_k} X_k - \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq t/p \Big) \\ =& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}\Big(- \sum_{k=i}^{n/2-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq t/p \Big) \\ =& \frac{1}{n} \sum_{i=n^{\beta}}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}\Big(- \sum_{k=i}^{n/2-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq t/p \Big) + o(1). \end{aligned} \tag{25}$$

Määritellään sitten tapahtuma

$$A_n = \{k^{-1}|S_k - pk| < \sqrt{p}n^{-\alpha} \text{ kaikilla } n^{\beta} \leq k \leq n\}.$$

Ehdolla A_n pätee $\frac{1}{p+\sqrt{p}n^{-\alpha}} \leq \frac{k}{S_k} \leq \frac{1}{p-\sqrt{p}n^{-\alpha}}$ kaikilla $n^{\beta} \leq k \leq n$. Siten, käyttämällä $H_n(t)$:lle esitystä (25), saadaan A_n:ssä arviot

$$H_n(t) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=n^{\beta}}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}\Big(- \sum_{k=i}^{n/2-1} X_k \leq \frac{p - \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} t \Big) + o(1) = F_n\left(\frac{p - \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} t \right) + o(1)$$

ja

$$H_n(t) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=n^{\beta}}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}\Big(- \sum_{k=i}^{n/2-1} X_k \leq \frac{p + \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} t \Big) + o(1) = F_n\left(\frac{p + \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} t \right) + o(1).$$

Koska $\frac{p \pm \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} \to 1$, niin Lemman 4.15 nojalla $F_n\left(\frac{p \pm \sqrt{p}n^{-\alpha}}{p} t \right) \xrightarrow{d} F(t)$. Lemman 4.8 nojalla $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, kun $n \to \infty$, joten edellisten arvioiden ja Lemman A.4 nojalla myös $H_n(t) \xrightarrow{d} F(t)$.

Olkoon sitten $t \geq 0$. Väite saadaan todistettua tässä tilanteessa melkein samanlaisella laskulla kuin äsken. Kirjoitetaan ensiksi

$$H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \mathbb{1}\Big(\sum_{k=\frac{n}{2}}^{i-1} \frac{k}{S_k} X_k \leq t/p \Big) + \frac{1}{n} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

Tämän avulla saadaan, samoin kuin äsken, A_n:ssä arvio

$$F_n\left(\frac{p - \sqrt{p} n^{-\alpha}}{p} t \right) \leq H_n(t) \leq F_n\left(\frac{p + \sqrt{p} n^{-\alpha}}{p} t \right),$$

mistä väite seuraa. □

Lauseen 4.13 todistus. Kirjoitetaan

$$p\tau_i - \log pn = (pT_{puoli} - \log pn) + p(\tau_i - T_{puoli}).$$

Merkitään

$$L_n = pT_{puoli} - \log pn.$$

Osoitetaan, että

$$(p(\tau_1 - T_{puoli}), \ldots, p(\tau_k - T_{puoli}), L_n) \xrightarrow{d} (Z_1, \ldots, Z_k, \xi),$$

jolloin väite seuraa siitä, että funktio $(x_1, \ldots, x_k, y) \mapsto (y + x_1, \ldots, y + x_k)$ on jatkuva.

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ mielivaltainen. Numeroimalla tarvittaessa valitut solmut uudestaan voidaan olettaa, että $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Määritellään tapahtuma

$$\begin{aligned} A_n &:= \{p(\tau_1 - T_{puoli}) \leq a_1, \ldots, p(\tau_k - T_{puoli}) \leq a_k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \{\text{solmulla } i \text{ on tieto hetkellä } T_{puoli} + a_i/p\}. \end{aligned}$$

Kiinnitetään $t \in \mathbb{R}$ ja osoitetaan, että

$$\mathbb{P}(A_n, L_n \leq t) \xrightarrow{d} F(a_1) \ldots F(a_k) F_\xi(t),$$

missä $F_\xi(t) = \exp(-e^{-t})$ on siis Gumbel(0, 1) jakauman kertymäfunktio.

Merkitään edelleen $N(t)$:llä tietävien solmujen määrää hetkellä t. Nyt

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n} | \sigma(N)\right] = \max\Big(0, H_n(a_1)\big(H_n(a_2) - \frac{1}{n}\big) \cdots \big(H_n(a_k) - \frac{k-1}{n}\big)\Big) =: G_a^{(n)},$$

sillä solmut, joiden tiedonsaantia tarkastellaan, oli valittu riippumatta siitä, mitä prosessissa muuten tapahtuu. Tässä voidaan esimerkiksi ajatella, että solmut valitaankin vasta sen jälkeen, kun tiedonleviämisprosessi on jo tapahtunut. Tällöin edellinen yhtälö on ilmeinen. Toisaalta, jos prosessin N arvot tiedetään jokaisella ajanhetkellä t, niin tällöin tiedetään myös L_n:n arvo. Tästä saadaan, että

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_n, L_n \leq t) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{L_n \leq t\}} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{L_n \leq t\}} | \sigma(N)\right)\right] \\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{L_n \leq t\}}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_n} | \sigma(N)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{L_n \leq t\}} G_a^{(n)}\right] \end{aligned} \tag{26}$$

Merkitään $F_a = F(a_1)\cdots F(a_k)$. Yhtälöstä (26) saadaan

$$\begin{aligned}
&|F_a F_\xi(t) - \mathbb{P}(A_n, L_n \le t)| = |F_a F_\xi(t) - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{L_n \le t\}} G_a^{(n)}\right]| \\
=&\left|\mathbb{E}\left(F_a \frac{F_\xi(t)}{\mathbb{P}(L_n \le t)} - G_a^{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{L_n \le t\}}\right| \\
\le&\mathbb{E}\left|F_a \frac{F_\xi(t)}{\mathbb{P}(L_n \le t)} - G_a^{(n)}\right|.
\end{aligned} \tag{27}$$

Lemman 4.16 ja Slutskyn lemman (Lause A.2) nojalla $G_a^{(n)} \xrightarrow{d} F_a$. Lemman 4.11 nojalla

$$\mathbb{P}(L_n \le t) \to F_\xi(t), \text{ kun } n \to \infty.$$

Siten edelleen Slutskyn lemmasta saadaan, että

$$F_a \frac{F_\xi(t)}{\mathbb{P}(L_n \le t)} - G_a^{(n)} \xrightarrow{d} 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Lisäksi tämä satunnaismuuttuja on rajoitettu. Näin ollen yhtälön (27) alin rivi suppenee nollaan, kun $n \to \infty$, ja siten lause on todistettu.

□

Esitetään tämän luvun loppuun vielä Lauseen 4.5 näköinen tulos Erdősin–Rényin satunnaisverkossa. Olkoon $G = G(n,p)$ Erdősin–Rényin satunnaisverkko.

Lause 4.17 ([2] Theorem 7)**.** *Oletetaan, että* $\frac{pn}{(\log n)^2} \to \infty$, *kun* $n \to \infty$. *Tällöin lauseen 4.13 merkinnöin tavalliselle tiedonleviämisprosessille verkossa G pätee.*

$$p\lambda\tau_1 - \log n \xrightarrow{d} \xi + Z, \text{ kun } n \to \infty,$$

missä $\xi \sim \mathrm{Gumbel}(0,1)$ *Z on logistisesti jakautunut* ξ*:stä riippumaton satunnaismuuttuja.*

4.4 Tiedonleviämisprosessin yhteys satunnaisiin etäisyyksiin

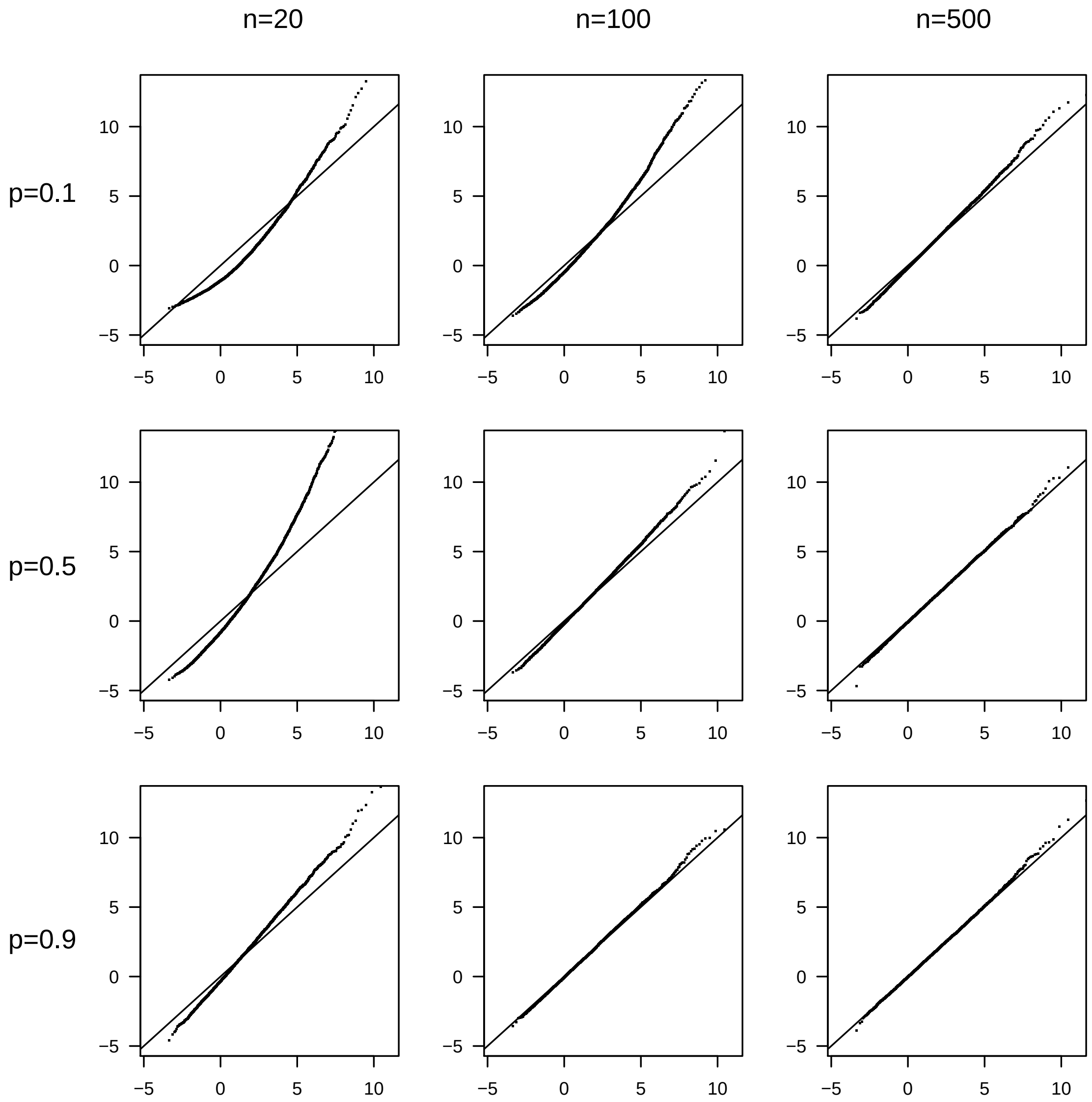
Olkoon G suuntaamaton n:n solmun verkko, jossa linkkien pituudet ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa parametrilla 1. Valitaan tarkasteltavaksi jokin verkon solmu. Kysytään, miten pitkä matka tästä solmusta on siitä kauimpana olevaan solmuun, kun kuljetaan lyhintä reittiä pitkin. Tämä välimatka on jakaumaltaan sama kuin tavallisen tiedonleviämisprosessin saturaatiohetki prosessissa, jossa solmut lähettävät tietoa jokaiseen linkkiin erikseen intensiteetillä 1. Tämä voidaan nähdä siten, että määritellään verkkoon G tiedonleviämisprosessi siten, että jokainen solmu lähettää tietoa intensiteetillä 1 jokaiseen siitä lähtevään linkkiin. Otetaan verkosta kaksi solmua i ja j, joiden välillä on linkki. Oletetaan, että näistä kahdesta solmusta tiedon sai aiemmin solmu i. Määritellään linkin $(i \sim j)$ pituudeksi aika siitä, kun i sai tiedon, siihen, kun i lähetti tiedon ensimmäisen kerran solmulle j. Nyt kaikilla linkeillä nämä pituudet ovat toisistaan riippumattomia ja eksponenttijakautuneita parametrilla 1. Voidaan ajatella, että lähtösolmusta lähdetään kulkemaan jokaista mahdollista reittiä yksikkönopeudella. Kauimpana oleva solmu saavutetaan tällöin täsmälleen saturaatiohetkellä.

Mikäli sovitaan, että solmun läpi voi kulkea vain todennäköisyydellä p, niin välimatka kauimmaiseen solmuun vastaa ohennetun tiedonleviämisprosessin saturaatiohetkeä. Täydellisessä verkossa tälle pituudelle saadaan rajajakauma Lauseesta 4.5. Tässä siis solmujen kokonaisheräilyintensiteetti $\lambda = n - 1$. Vastaavasti Lause 4.13 voidaan ajatella siten, että kysytään etäisyyttä kauimmaisen solmun sijasta kahden satunnaisen solmun välillä.

Tietokoneiden ja reitittimien yhteydessä linkkien pituus voidaan ajatella linkin vahvuutena. Tiedonleviämisprosessi voidaan tällöin tulkita siten, että halutaan lähettää yksikkömäärä tietoa kaikkiin verkon laitteisiin, ja linkkien vahvuus eli tiedonsiirtonopeus vaihtelee. Ohennettua tapausta voidaan ajatella siten, että vain osalla verkon laitteista on tiedonlähetysmahdollisuus.

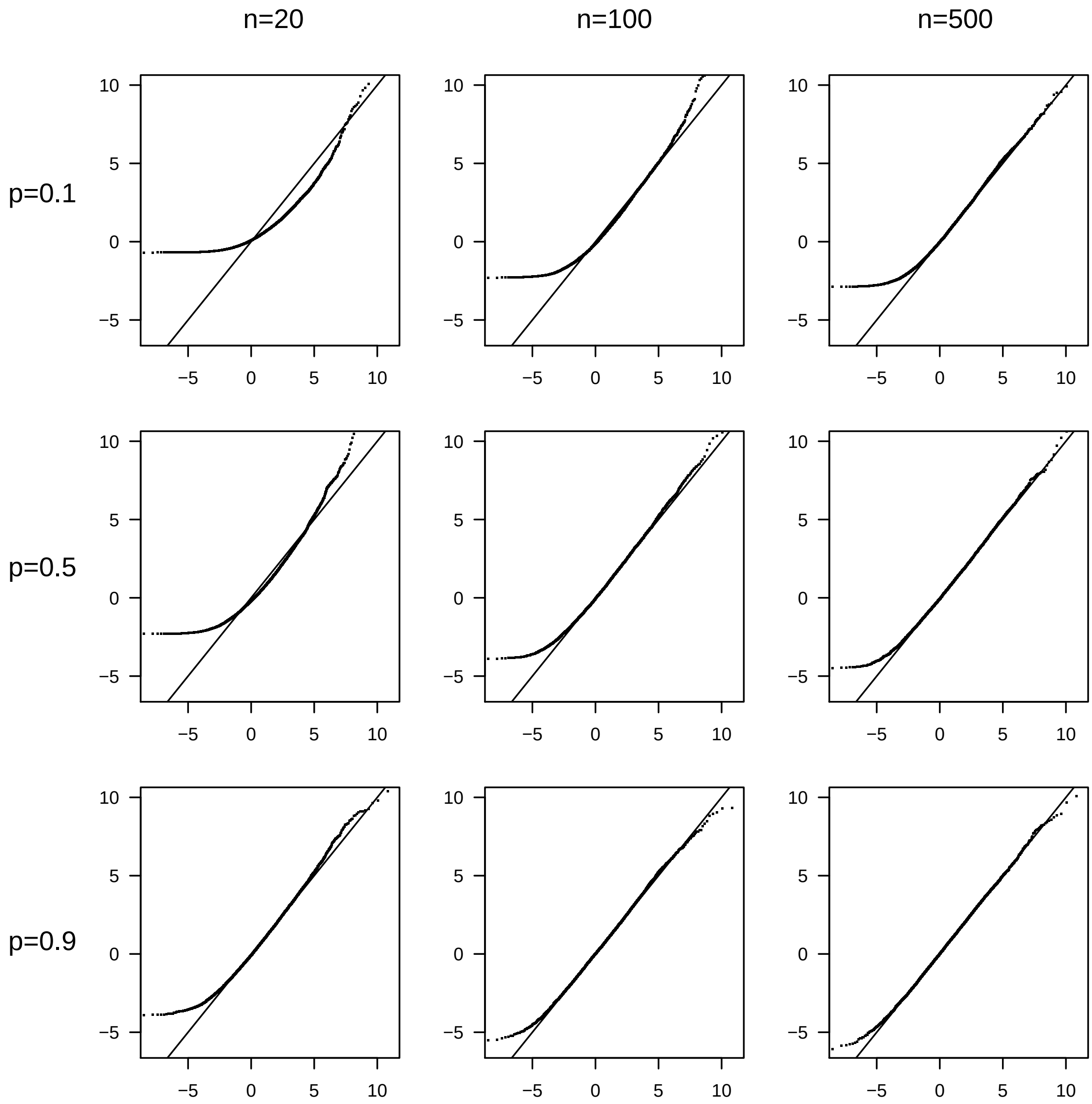
4.5 Konvergenssin nopeus

Tutkitaan seuraavaksi miten nopeasti Lauseiden 4.5 ja 4.13 konvergenssit suurin piirtein tapahtuvat. Luvussa 4.2 osoitettiin, että sopivasti normeerattuna saturaatiohetki tiedonleviämisprosessissa konvergoi jakaumassa kahden riippumattomaan Gumbel-jakautuneen satunnaismuuttujan summaan. Karkeasti voisi sanoa, että kunhan $pn \approx 100$, niin konvergenssi on ainakin ehtinyt jo tapahtua. Kuvassa 1 on verrattu satunnaismuuttujaa $pT_{sat} - 2\log n - \log p$ sen rajajakaumaan eri p:n ja n:n arvoilla. Mitä paremmin pisteet ovat viivalla $x = y$ sitä lähempänä jakaumat ovat toisiaan. Tarkemmin QQ-plotista katso [10].



Kuva 1: QQ-plot. Satunnaismuuttuja $pT_{sat} - 2\log n - \log p$ verrattuna kahden riippumattoman Gumbel(0,1) jakautuneen satunnaismuuttujan summan jakaumaan. (Ks. Lause 4.5.) Simulointeja 10000 kullekin (n, p) parille.

Vastaavasti voidaan tarkastella Lauseen 4.13 konvergenssin nopeutta yhden ennalta valitun solmun tapauksessa. Osoittautuu, että tässä rajajakaumaan päästään hitaammin. Kuvasta 2 huomataan, että pienellä p edes 500 ei ole riittävä verkon koko, jotta rajajakauma-approksimaatio toimisi kovin hyvin.



Kuva 2: QQ-plot. Satunnaismuuttuja $p\tau_1 - \log pn$ verrattuna Logistisen ja Gumbel-jakautuneen satunnaismuuttujan riippumattoman summan jakaumaan. (Ks. Lause 4.13.) Simulointeja 10000 kullekin (n, p) parille.

5 Johtopäätökset

Tässä työssä tutkittiin ohennettua tiedonleviämisprosessia täydellisessä verkossa. Osoitettiin, että sopivasti normalisoituna saturaatiohetki konvergoi kahden riippumattoman Gumbel-jakauman summaan. Myös rajajakauma äärellisen monen solmun informointihetkelle laskettiin. Tässä tuloksessa mielenkiintoista oli erityisesti asymptoottinen riippuvuusrakenne, joka saatiin tarkasti selvitettyä. Tähän tulokseen tarvittiin Luvussa 3 esiteltyä suurten lukujen lakia Markov-prosesseille, joka on myös sinällään mielenkiintoinen tulos.

Havaittiin, että molemmissa yllämainituissa tuloksissa rajajakauma, ja ehkä hieman yllättäen myös normalisointi lukua $\log p$ vaille, oli ohennetussa tiedonleviämisprosessissa sama kuin vastaavassa tuloksessa tavallisessa tiedonleviämisprosessissa Erdősin–Rényin satunnaisverkossa.

Tiedossani ei ole, että Luvun 4 tuloksia ohennetulle huhunleviämisprosessille olisi esitetty täydellistä verkkoa yleisemmille verkkomalleille. Luvun 4 lauseiden yleistäminen yleisemmille verkkomalleille saattaa osoittautua haasteelliseksi tehtäväksi.

A Liite

Lause A.1 (Markovin epäyhtälö).
Okoon X ei-negatiivinen satunnaismuuttuja ja $a > 0$. Tällöin

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq a^{-1}\mathbb{E}X.$$

Erityisesti siis

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y| \geq a) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y|^2 \geq a^2) \leq a^{-2}\text{Var } Y$$

mille tahansa satunnaismuuttujalle Y, jolla on äärellinen odotusarvo.

Todistus.

$$a\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq \mathbb{E}X.$$

□

Lause A.2 (Slutskyn lemma). *Olkoon satunnaismuuttujajonot $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} y$ ja $Z_n \xrightarrow{d} z$, missä $y, z \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Tällöin*

$$Y_nX_n + Z_n \xrightarrow{d} yX + z.$$

Todistus. [21] Lemma 2.8. □

Kirjoitelmassa tarvitaan seuraavia (Lauseet A.3-A.5) Slutskyn lemman seurauksia, jotka on tässä selvyyden vuoksi erotettu omiksi lauseiksiin.

Lause A.3. *Olkoon $c \neq 0$ ja $X_nY_n \xrightarrow{d} cX$ ja $Y_n \xrightarrow{d} c$. Tällöin*

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

Todistus. Slutskyn lemman nojalla $\frac{Y_n}{c} \to 1$ ja $X_n\frac{Y_n}{c} \xrightarrow{d} X$, joten riittää osoittaa väite tapauksessa $c = 1$. Olkoon $1 > \delta > 0$. Tällöin

$$\mathbb{P}(|\mathbb{1}_{\{Y_n \neq 0\}}\frac{1}{Y_n} - 1| > \delta) = \mathbb{P}(\frac{1}{1+\delta} \leq Y_n \leq \frac{1}{1-\delta}) \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Joten $\mathbb{1}_{\{Y_n \neq 0\}}\frac{1}{Y_n} \xrightarrow{d} 1$ selvästi myös $\mathbb{1}_{\{Y_n = 0\}} \xrightarrow{d} 0$ ja siten Slutskyn lemmasta saadaan

$$X_n = \mathbb{1}_{\{Y_n \neq 0\}}\frac{1}{Y_n}Y_nX_n + \mathbb{1}_{\{Y_n = 0\}}X_n \xrightarrow{d} X.$$

□

Lause A.4. *Olkoon A_n on jono tapahtumia siten, että $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, kun $n \to \infty$. Tällöin $X_n \xrightarrow{d} X$, jos ja vain jos $\mathbb{1}_{A_n} X_n \xrightarrow{d} X$.*

Todistus. Seuraa suoraan Lausesista A.2 ja A.3 sillä $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{d} 1$. □

Lause A.5. *Oletetaan, että $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X$. Oletetaan myös, että $Z_n \xrightarrow{d} 1$ ja että $(Z_n - 1)Y_n \xrightarrow{d} 0$. Tällöin*

$$Z_n X_n - Y_n \xrightarrow{d} X.$$

Todistus. Slutskyn lemman nojalla

$$Z_n X_n - Y_n = Z_n(X_n - Y_n) + (Z_n - 1)Y_n \xrightarrow{d} X.$$

□

Lause A.6. *Olkoon $X_n \xrightarrow{d} X$ ja $Y_n \xrightarrow{d} Y$, siten, että $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ kullekin n ja lisäksi $X \perp\!\!\!\perp Y$. Tällöin $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.*

Todistus. Suoraa suoraan karakterististen funktioiden ominaisuuksista. Ks esim. [5] section 26. □

Lause A.7. *Olkoon $\mathbb{R}^d$ arvoiset satunnaisvektorit $X_n \xrightarrow{d} X$, ja $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ jatkuva funktio. Tällöin $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$. Lause pätee myös mikäli jakaumakonvergenssin tilalle vaihdetaan stokastinen tai m.v.-konvergenssi.*

Todistus. [21] Theorem 2.3. □

Lause A.8. *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^d$ ja $M, S > 0$. Oletetaan, että on funktiot $\beta_l : K \to \mathbb{R}_+$ $l \in \mathbb{Z}^d$, ja $B : K \to \mathbb{R}^d$, joille kaikilla $x, y \in K$ pätee*

(i) $|B(x) - B(y)| \leq M|x - y|$.

(ii) $|B(x)| \leq S$.

(iii) $\sum_l |l| \sup_{x \in A} \beta_l(x) < \infty$.

(iv) $\sum_l l\beta_l(x) = B(x)$.

Tällöin funktiot β_l ja B voidaan jatkaa koko avaruuteen $\mathbb{R}^d$ siten, että ylläolevat neljä oletusta pätevät kaikille $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Todistus. Jatketaan ensiksi funktio B koko avaruuteen siten, että (i) ja (ii) pätevät (ks esim. [6] M9). Merkitään koordinaatiakselien suuntaisia yksikkövektoreita $e_i, i \ldots, d$. Eli siis $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ jne. Merkitään vielä B:n komponenttifunktioita B_i, eli $B(x) = (B_1(x), \ldots, B_d(x))$. Määritellään nyt kaikille $x \in K^c$

$$\begin{aligned}
&\beta_{e_i}(x) = B_i(x) \vee 0 \\
&\beta_{-e_i}(x) = -(B_i(x) \wedge 0) \\
&\beta_l(x) = 0, \text{ kun } l \neq e_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Nyt jos $x \in K^c$, niin (iv) pätee selvästi. Lisäksi

$$\sum_l \sup_{x \in K^c} |l| \beta_l(x) = \sum_{i=1}^d |B_i(x)| \le dS < \infty.$$

□

Lause A.9 (Kolmogorovin maksimaaliepäyhtälö). *Olkoon X_k riippumattomia neliöintegroituvia satunnaismuuttujia, joille $\mathbb{E}X_k = 0$ kaikilla k, ja olkoon $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Tällöin kaikille $r > 0$*

$$\mathbb{P}(\max_{1 \le kn} |S_k| > r) \le r^{-2} \mathrm{Var} S_n.$$

Todistus. [16] Lemma 3.15. □

Lause A.10 (Gronwallin epäyhtälö). *Olkoon $M, R, \epsilon > 0$ ja $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ rajoitettu funktio, jolle*

$$0 \le f(t) \le \epsilon + M \int_0^t f(s) ds, \quad \textit{kaikilla } 0 \le t \le R. \tag{28}$$

Tällöin

$$f(t) \le \epsilon e^{Mt}, \quad t \in [0, R].$$

Todistus. Tämä todistus on esitetty myös [12] s. 498.

Olkoon $K > 0$, jolle $f(t) < K, \quad t \in [0, R]$. Iteroimalla yhtälöä (28) saadaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f(t) \le \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(Mt)^k}{k!} + M^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \dots ds_1 \le \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(Mt)^k}{k!} + K \frac{(Mt)^n}{n!}.$$

Nyt antamalla oikealla puolella $n \to \infty$ saadaan väite. □

Lause A.11 (Eulerin vakio).

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \to \gamma \in \mathbb{R}, \ \textit{kun } n \to \infty.$$

Lukua γ kutsutaan yleensä Eulerin vakioksi.

Todistus. Seuraa suoraan Eulerin-Maclaurinin summa-lauseesta. [7] Theorem 13.32. □

Lause A.12. *Olkoon $g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktioita, joille $f > g$, $\lim_{n \to \infty} f(n) = \infty = \lim_{n \to \infty} g(n)$. Tällöin*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=g(n)}^{f(n)} \frac{1}{k} - \log \frac{f(n)}{g(n)} \right) = 0.$$

Todistus. Olkoon γ_n kuten lauseessa A.11.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=g(n)}^{f(n)} \frac{1}{k} - \log \frac{f(n)}{g(n)} = \log f(n) + \gamma_{f(n)} - \log g(n) - \gamma_{g(n)} - \log \frac{f(n)}{g(n)} \\ =&(\gamma_{f(n)} - \gamma_{g(n)}) \to 0, \text{ kun } n \to \infty.\end{aligned}$$

$\square$

Lause A.13 (Lebesguen dominoidun konvergenssin lause)**.** *Oletetaan, että on mitta-avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ja mitalliset funktiot g_k, g, f_k, f, joille $g_k \to g,\ f_k \to f,\ |f_k| \leq g_k$ kaikilla k ja $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k\ d\mu = \int_\Omega g\ d\mu < \infty$. Tällöin pätee*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\ d\mu = \int_\Omega f\ d\mu.$$

Todistus. [16] Theorem 1.21. $\square$

Lause A.14. *Olkoon $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ satunnaismuuttujia, joille X_k:t ovat keskenään riippumattomia ja samoin Y_k:t. Oletetaan, että kaikille $i = 1, \ldots, n$ pätee $X_i \leq_{st} Y_i$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \leq_{st} \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Todistus. Osoitetaan väite ensin kun $n = 2$. Todistuksessa voidaan olettaa, että X_1, X_2, Y_1, Y_2 ovat kaikki keskenään riippumattomia, koska tarvittaessa ne voidaan korvata riippumattomilla kopioilla, jotka ovat jakaumaltaan samat kuin alkuperäiset muuttujat. Näiden kopioiden summan jakauma on luonnollisesti sama kuin alkuperäisten satunnaismuuttujien, koska lauseessa oletetaan, että ainakin $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ ja $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq t) = \int_\mathbb{R} \mathbb{P}(X_1 \leq t - x) d\mathbb{P}_{X_2}(x) \geq \int_\mathbb{R} \mathbb{P}(Y_1 \leq t - x) d\mathbb{P}_{X_2}(x) \\ =&\mathbb{P}(Y_1 + X_2 \leq t) = \int_\mathbb{R} \mathbb{P}(X_2 \leq t - y) d\mathbb{P}_{Y_1}(y) \geq \int_\mathbb{R} \mathbb{P}(Y_2 \leq t - x) d\mathbb{P}_{Y_1}(y) \\ =&\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq t).\end{aligned}$$

Nyt kakkosta suuremmille n tulos voidaan osoittaa suoraviivaisella induktiolla tarkastelemalle summaa $\sum_{k=1}^{n-1} X_k + X_n$ ja käyttämällä hyväksi induktio-oletusta sekä tapausta $n = 2$. $\square$

Viitteet

[1] David J. Aldous, *When knowing early matters: gossip, percolation and nash equilibria*, Prokhorov and Contemporary Probability Theory, Springer, 2013, pp. 3–27.

[2] Shankar Bhamidi, *First passage percolation on locally treelike networks. I. Dense random graphs*, Journal of Mathematical Physics **49** (2008), 125218.

[3] Shankar Bhamidi, Remco van der Hofstad, and Gerard Hooghiemstra, *Extreme value theory, Poisson-Dirichlet distributions, and first passage percolation on random networks*, Advances in applied probability **42** (2010), no. 3, 706–738.

[4] ______, *First passage percolation on random graphs with finite mean degrees*, The Annals of Applied Probability **20** (2010), no. 5, 1907–1965.

[5] Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, third ed., John Wiley & Sons Inc., 1995.

[6] ______, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, 2009.

[7] K. G. Binmore, *Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, 1977.

[8] Pierre Brémaud, *Markov Chains*, Springer-Verlag, 1999.

[9] Tom Britton and Mathias Lindholm, *The early stage behaviour of a stochastic SIR epidemic with term-time forcing*, Journal of Applied Probability **46** (2009), no. 4, 975–992.

[10] J.M. Chambers, *Graphical Methods for Data Analysis*, Wadsworth, 1983.

[11] R. W. R. Darling and J. R. Norris, *Differential equation approximations for Markov chains*, Probab. Surv. (2008), 37–79.

[12] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz, *Markov Processes*, John Wiley & Sons Inc., 1986.

[13] Herbert W Hethcote, *A thousand and one epidemic models*, Lecture Notes in Biomathematics (1994), 504–504.

[14] Remco van der Hofstad, Gerard Hooghiemstra, and Piet van Mieghem, *The flooding time in random graphs*, Extremes **5** (2002), no. 2, 111–129.

[15] Svante Janson, *One, two and three times log n/n for paths in a complete graph with random weights*, Combinatorics, Probability and Computing **8** (1999), no. 04, 347–361.

[16] Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer-Verlag, 1997.

[17] J. R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1998.

[18] Boris Pittel, *On spreading a rumor*, SIAM J. Appl. Math. **47** (1987), no. 1, 213–223.

[19] Devavrat Shah and Tauhid Zaman, *Rumors in a network: who's the culprit?*, IEEE Trans. Inform. Theory **57** (2011), no. 8, 5163–5181.

[20] P. van den Driessche and James Watmough, *A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation*, Journal of mathematical biology **40** (2000), no. 6, 525–540.

[21] A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, 1998.