DERIVAATTAFUNKTION OMINAISUUKSIA

Annika Katariina Harja

Matematiikan pro gradu

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto

Kesä 2013

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Tiivistelmä: Harja, A. 2013. *Derivaattafunktion ominaisuuksia,* Jyväskylään yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, matematiikan pro gradu -tutkielma.

Derivaattafunktio on eräs analyysin keskeisistä käsitteistä. Sitä tarkastellaan kuitenkin melko vähän opintojen aikana analyysin kursseilla, joten siihen liittyvät ominaisuudet ja tulokset voivat olla monilta osin vieraita. Tämän tutkielman tarkoituksena onkin tutustua lähemmin derivaattafunktioon ja sen eri ominaisuuksiin sekä näin laajentaa matemaattista ymmärrystä analyysin saralta. Päätavoitteena tässä työssä on siis selvittää, mitä derivaattafunktion jatkuvuus- ja integroituvuusominaisuuksista voidaan saada selville.

Derivaattafunktion jatkuvuusominaisuuden tarkastelussa tullaan huomaamaan, ettei derivaattafunktio ole aina jatkuva, vaan se voi olla myös epäjatkuva. Sen vuoksi työssä tullaan tarkemmin tarkastelemaan epäjatkuvuutta sekä selvitetään minkälaisia epäjatkuvuuden tyypit: hyppäys-, poistuva- ja oleellinen epäjatkuvuus, oikein ovat. Se, millä tavoilla derivaattafunktio voi olla epäjatkuva, ei ole aivan selvää. Tämän asian tutkimiseen tarvitaan Darboux-ominaisuuden tuntemusta. Darboux-ominaisuus kuvaa derivaattafunktion väliarvo-ominaisuutta. Sen todistuksessa on huolehdittava, ettei siinä missään vaiheessa käytetä oletusta funktion jatkuvuudesta, koska kaikki derivaattafunktiot eivät ole jatkuvia. Kun derivaattafunktiota sitten tutkitaan Darboux-ominaisuuden valossa, havaitaan, että jos derivaattafunktio on epäjatkuva, on se aina oleellisesti epäjatkuva. Työssä esitellään myös erilaisia esimerkkejä epäjatkuvista derivaatoista.

Tutkielmassa tarkastellaan myös derivoituvuuden ja integroituvuuden välistä yhteyttä, jota kuvaa Analyysin peruslause. Sen pohjalta tullaan tutkimaan derivaattafunktion integroituvuusominaisuutta. Sitä tarkastellaan kahden esimerkkitapauksen, Volterran ja Pompeiun funktion, avulla. Näissä tutkimuksissa havaitaan, että kaikki derivaattafunktiot, myös rajoitetut, eivät ole aina Riemann-integroituvia. Tämän havainnon osoittamiseksi on tutustuttava ensin Smith-Volterra-Cantor -joukkoihin ja niiden ominaisuuksiin sekä Lebesguen ehtoon Riemann-integroituvuudelle.

Näiden lisäksi tässä työssä tutkitaan vielä derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon kokoa. Sen perusteella voidaan tehdä päätelmiä siitä, onko derivaattafunktion määrittelyjoukossa enemmän jatkuvuus- vai epäjatkuvuuspisteitä sekä miten nämä joukot suhteutuvat toisiinsa. Derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon kokoon liittyvissä tutkimuksissa tarvitaan funktion heilahtelun sekä Bairen kategoria -lauseen tuntemusta. Näiden asioiden tuntemusta tarvitaan myös derivaattafunktion integroituvuusominaisuuden tutkimisessa. Lopputuloksena havaitaankin, että derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukko on aina tiheä funktion määrittelyjoukossa.

Sisältö

Johdanto

Derivaattafunktio on yksi analyysin keskeisimmistä käsitteistä. Sen avulla pystytään määrittämään toisistaan riippuvien suureiden muutoksia, sillä derivaatan avulla voidaan kuvata tutkittavan tilanteen muutoksen nopeutta, kasvua ja vähenemistä. Tämän vuoksi derivaattafunktiolla on useita sovellusmahdollisuuksia monilla eri aloilla. Derivaattaan ja derivaattafunktioon tutustutaan jo lukion matematiikan opetuksessa, mutta silloin niitä tarkastellaan vain yksinkertaisissa tilanteissa toisin sanoen, kun kaikki tutkittavat funktiot ovat jatkuvia ja derivoituvia. Tämän tutkielman tarkoituksena onkin syventyä tarkastelemaan myös niitä tilanteita, joissa derivaattafunktio ei ole jatkuva.

Analyysi matematiikan tieteenalana ei ole kovinkaan uusi, sillä sen katsotaan syntyneen jo 1600-luvulla Newtonin ja Leibnizin aikana. Differentiaalilaskentaa on kuitenkin harjoitettu jo antiikin ajoilta saakka erilaisten infinitesimaalimenetelmien kautta sekä tutkittaessa tähtitiedettä. [**1, 10**] Tässä tutkielmassa käsiteltävät analyysin osat, derivaattafunktio ja sen erilaiset ominaisuudet, ovat kuitenkin analyysin uudempaa teoriaa, 1800-luvun lopulta sekä 1900-luvulta.

Tässä työssä tarkastellaan vain reaaliarvoisia funktioita sekä niiden derivaattafunktioita. Näiden funktioiden määrittelyjoukko on jokin reaalilukujoukon väli. Kyseinen väli voi siis olla avoin, puoliavoin tai suljettu, äärellinen tai ääretön. Jos jokin työssä esitelty määritelmä tai lause edellyttää funktion määrittelyjoukolta jotain erityistä, on se mainittu kyseisen määritelmän ja lauseen yhteydessä erikseen. Muulloin määrittelyjoukko voi olla millainen tahansa, eli se ei vaikuta kyseiseen tulokseen ja sen ominaisuuksiin millään tavalla.

Tutkielma koostuu kuudesta luvusta, joista keskeisimpiä ovat luvut 3, 4 ja 5. Nämä luvut käsittelevät derivaattafunktion jatkuvuusominaisuutta, jatkuvuuspisteiden joukon kokoa sekä integroituvuusominaisuutta. Ensimmäinen luku pohjustaa työn aihetta kokonaisuudessaan käsittelemällä derivaattaa, derivaattafunktiota sekä muita työn keskeisiä käsitteitä ja niiden määritelmiä. Luvussa kaksi tarkastellaan epäjatkuvuutta, joka pohjustaa seuraavassa luvussa derivaattafunktion epäjatkuvuustyypin selvittämistä Darboux-ominaisuuden avulla. Viiden ensimmäisen luvun aikana tarkastellaan laajasti uudempaa differentiaalilaskentaa, joten työn lopuksi luvussa kuusi palataan ajassa taaksepäin ja esitellään hieman differentiaalilaskennan historiaa. Luvun tarkoituksena on esitellä, mistä tämän päivän differentiaalilaskentaan on tultu ja ketkä suuret matemaatikot ovat vaikuttaneet sen kehittymiseen.

LUKU 1

Derivaattafunktio

Derivaattafunktio ja siihen läheisesti liittyvät käsitteet derivaatta ja derivoituvuus ovat varmasti kaikki käsitteinä tuttuja jo lukiosta, mutta niiden matemaattinen tausta ja määrittelyt voivat olla vieraampia. Sen vuoksi derivaattafunktiota ja sen ominaisuuksia on mielekästä tutkia tarkemmin tässä työssä. Aloitetaan aiheeseen perehtyminen tarkastelemalla käsitettä derivaatta hieman tarkemmin. Tämän jälkeen mietitään, miten derivaattafunktio ja muut tämän työn keskeiset käsitteet oikein matemaattisesti määritellään. Luvun lähdeteoksina ovat Courant & Johnin *Introduction to Calculus and Analysis 1* sekä Kilpeläisen *Analyysi 1 ja 2*.

1.1. Derivaatan käsite ja sen geometrinen tulkinta

Derivaatta on yksi tärkeimmistä differentiaalilaskennan käsitteistä ja tämän käsitteen nimityksen otti käyttöön vuonna 1797 italialais-ranskalainen matemaatikko Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) [**6**, s.82]. Geometrian näkökulmasta derivaatta tarkoittaa funktion kuvaajalle tiettyyn pisteeseen $(x, f(x))$ piirrettyä tangentin kulmakerrointa ja sen arvo kertoo muutoksen voimakkuuden ja suunnan kyseisessä pisteessä. Derivaatta kuvaa myös funktion muutosnopeutta (kasvua tai vähenyvyyttä). Sen avulla voidaan määrittää esimerkiksi liikkuvan kappaleen hetkellinen nopeus.

Tutkitaan derivaatan käsitettä aluksi intuitiivisesti geometrisesta lähtökohdasta käsin. Tarkastelun kohteena on siis jatkuvan funktion f graafi. Määritetään kyseiselle funktiolle ensin tangentti T pisteeseen $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Tangentti T saadaan määritettyä pisteiden P_0 ja $P_1 = (x_1, f(x_1))$ kautta kulkevaa sekanttisuoraa S käyttäen. Kun pistettä x_1 lähdetään liikuttamaan lähemmäksi pistettä x_0, piste P_1 alkaa lähestyä pistettä P_0 funktion f graafia pitkin. Samalla sekanttisuora S alkaa lähestyy tangenttisuoraa T, joka kulkee pisteen P_0 kautta.

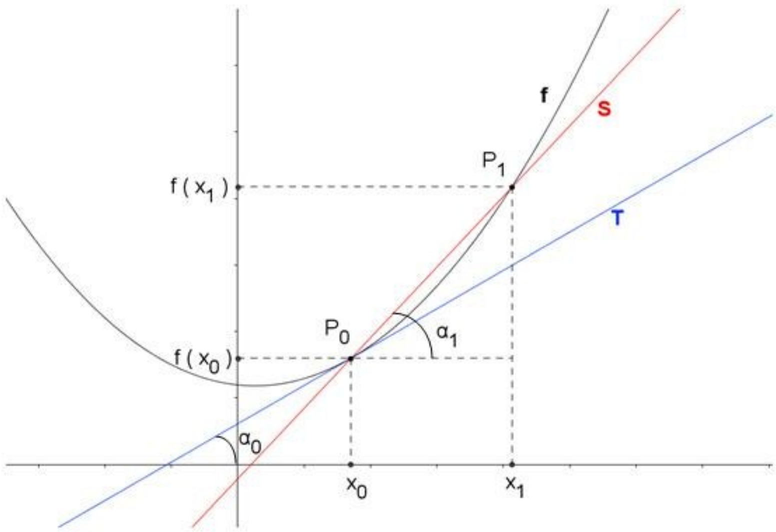
Olkoon α_0 kulma, joka muodostuu tangenttisuorasta T ja positiivisesta x-akselista. Vastaavasti, olkoon α_1 kulma, joka muodostuu sekanttisuorasta S ja positiivisesta x-akselista. Tällöin saadaan

$$\tan \alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Kulma α_0 saadaan nyt raja-arvona

$$\tan \alpha_0 = \lim_{x_1 \to x_0} \tan \alpha_1 = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Tangentin kulmakerrointa $\tan \alpha_0$ sanotaan nyt funktion f derivaataksi pisteessä x_0. Derivaatan geometrista tulkintaa havainnollistaa Kuva 1.1.



Kuva 1.1. Derivaatan geometrinen tulkinta.

1.2. Keskeisten käsitteiden määritelmiä

Funktion derivoituvuuden määritteli Augustin Louis Cauhcy (1789–1857) vuonna 1821 julkaistussa teoksessaan *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* [**6**, s.233]. Derivaatan määritelmä pohjautuu raja-arvon käsitteeseen, joten tätä varten tarvitaan vielä määritelmä funktion raja-arvolle sekä sen toispuoleisille raja-arvoille, joita tarvitaan erityisesti luvussa 2. Sen jälkeen on mielekästä antaa määritelmät myös tutkielman keskeisimmille käsitteille: funktion derivoituvuudelle sekä derivaattafunktiolle.

Määritelmä 1.2.1. Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, *raja-arvo* pisteessä $x_0 \in I$ on luku $L \in \mathbb{R}$, merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $0 < |x - x_0| < \delta$.

Huomautus 1.2.2. Raja-arvon määritelmässä (Määritelmä 1.2.1) olevan funktion f ei tarvitse olla määritelty pisteessä x_0. Tämä on oleellista, kun määritellään derivaatan käsitettä Määritelmässä 1.2.4, sillä erotusosamäärä ei ole olemassa, kun $x = x_0$.

Määritelmä 1.2.3. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funktio. Funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä $x_0 \in I$ on luku $a \in \mathbb{R}$, merkitään

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.
Vastaavasti, funktion f *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä $x_0 \in I$ on luku $b \in \mathbb{R}$, merkitään

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = b,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $x \in]x_0 - \delta, x_0[$.

Määritelmä 1.2.4. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *derivoituva* avoimen välin I pisteessä x_0, jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on äärellisenä olemassa. Tämä raja-arvo on *funktion derivaatta* pisteessä x_0 ja sille käytetään merkintää $f'(x_0)$.
Funktio f on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, eli välillä I, jos se on derivoituva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$.

Määritelmä 1.2.5. Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, derivoituva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$. Tällöin funktion f derivaatta onkin funktio $f^{'} : I \to \mathbb{R}$, jolle

$$x \mapsto f^{'}(x).$$

Saatua funktiota f' kutsutaan funktion f *derivaattafunktioksi.*

Nyt kun derivaattafunktio on saatu määriteltyä, on sitä mielekästä tutkia tarkemmin. Seuraavaksi käydään läpi esimerkki, kuinka derivaattafunktio muodostetaan Määritelmän 1.2.4 avulla. Tätä toimenpidettä kutsutaan yleisesti derivoinniksi.

Esimerkki 1.2.6. Olkoon $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = \frac{1}{x^2},$$

tutkittava funktio. Ensin on tutkittava Määritelmää 1.2.4 käyttäen, onko funktio f derivoituva koko määrittelyjoukossaan $(0, \infty)$. Olkoon $x_0 \in (0, \infty)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0^2 - x^2}{x_0^2 x^2 (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)(x + x_0)}{x_0^2 x^2 (x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{-(x + x_0)}{x_0^2 x^2} \\
&= \lim_{x \to x_0} -\Big(\frac{1}{x x_0^2} + \frac{1}{x^2 x_0}\Big) = -\frac{2}{x_0^3},
\end{aligned}$$

jonka perusteella funktio f on derivoituva koko joukossa $(0, \infty)$, sillä piste x_0 on mikä tahansa määrittelyjoukon $(0, \infty)$ piste. Näin ollen funktion f derivaattafunktio on $f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, jolle

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

LUKU 2

Epäjatkuvuus ja epäjatkuvat derivaatat

Tämän luvun tavoitteena on määritellä epäjatkuvuuden käsite sekä tutkia epäjatkuvuuden eri tyyppejä. Edellä mainittujen käsitteiden ymmärrys on oleellista tässä työssä, sillä kaikki tutkittavat derivaattafunktiot eivät ole jatkuvia, ja näin ollen epäjatkuvuuteen liittyvät ominaisuudet on tunnettava. Luvun lopussa esitellään muutamia esimerkkejä funktioista, joiden derivaattafunktiot ovat epäjatkuvia. Tämän luvun lähdeteoksina ovat Courant & Johnin *Introduction to calculus and analysis 1* sekä Thomson, Bruckner & Brucknerin *Elementary real analysis*.

2.1. Epäjatkuvuuden määrittely

Ennen kuin aletaan pohtia epäjatkuvuutta ja sen määritelmää tarkemmin, palautetaan mieleen, mitä jatkuvuus tarkoittaa. Intuitiivisesti jatkuvuus tarkoittaa, että pieni muutos lähtöarvoissa x ei aiheuta suurta muutosta funktion arvoihin $y = f(x)$. Tämän havainnon ymmärsi jo vuonna 1821 ranskalainen matemaatikko Augustin Louis Cauhcy [**6**, s.203], joka on muotoillut jatkuvuuden määritelmän seuraavaan muotoon:

> *"muuttuja $f(x+\alpha)-f(x)$ tulee mielivaltaisen pieneksi, kun muuttuja α pienenee rajatta"*

[**10**, s.72]. Matemaatikot Bolzano (1817) ja Weierstrass (1874) olivat jatkuvuuden määritelmän suhteen vielä tarkempia. Heidän mukaan erotus $f(x) - f(x_0)$ on mielivaltaisen pieni, jos erotus $x - x_0$ on riittävän pieni. [**6**, s.203] Jatkuvuuden matemaattinen määritelmä on muotoiltu seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 2.1.1. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *jatkuva* pisteessä $x_https://koppa.jyu.fi/avoimet/maths0 \in I$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$. Funktio f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, jos sen on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$.

Jatkuvuuden intuitiivisen päätelmän mukaan epäjatkuvuus aiheuttaa vastaavasti suuria muutoksia arvojoukon arvoihin $y = f(x)$, vaikka lähtöjoukon arvoissa x niin ei tapahtuisi. Matemaattisesti epäjatkuvuus määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.1.2. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *epäjatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos se ei ole jatkuva pisteessä x_0, toisin sanoen, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ löydetään piste $x \in I$, jolle $|x - x_0| < \delta$, mutta nyt

$$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Jatkuvuuden ja epäjatkuvuuden määrittelyjä voidaan tarkastella myös käyttämällä raja-arvoa. Koska epäjatkuvuutta tullaan tarkastelemaan raja-arvojen kautta (luku 2.2), esitetään myös jatkuvuuden määritelmä käyttäen raja-arvoja (Lause 2.1.3).

Lause 2.1.3. *Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos ja vain jos*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

2.2. Epäjatkuvuuden tyypit

Funktio voi olla epäjatkuva kolmella eri tavalla. Epäjatkuvuuden tyypit ovat hyppäysepäjatkuvuus, poistuva epäjatkuvuus sekä oleellinen epäjatkuvuus. Seuraavaksi tarkastellaan näitä epäjatkuvuuden tyyppejä hieman tarkemmin määritelmien ja esimerkkien avulla.

Hyppäysepäjatkuvuus on kaikista epäjatkuvuuden tyypeistä ilmeisin ja se on helpoin ymmärtää funktion graafin avulla. Epäjatkuvuuskohta näkyy funktion graafissa selkeänä hyppäyskohtana, jossa funktion kuvaaja kirjaimellisesti katkeaa. Tämän takia hyppäysepäjatkuvuus on kovin intuitiivinen. Matemaattinen määritelmä hyppäysepäjatkuvuudelle on seuraavanlainen.

Määritelmä 2.2.1. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *hyppäysepäjatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos funktion toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja erisuuret kyseisessä pisteessä, toisin sanoen jos

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

Toispuoleisten raja-arvojen erotus

$$\left| \lim_{x \to x_0+} f(x) - \lim_{x \to x_0-} f(x) \right|.$$

kuvaa hypyn suuruutta.

Määritelmässä 2.2.1 tarkasteltavan funktion arvolla $f(x_0)$ ei ole merkitystä hyppäysepäjatkuvuuskohdan olemassaololle. Hyppäysepäjatkuvuutta havainnollistavat Esimerkin 2.2.2 funktio sekä sen graafi, joka on esitetty Kuvassa 2.1.

Esimerkki 2.2.2. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x \leq 2 \\ -x + 3, & \text{kun } x > 2. \end{cases}$$

Funktion f jatkuvuuden voi rikkoa ainoastaan kohta $x = 2$. Tutkitaan siksi funktion f toispuoleisia raja-arvoja kyseisessä pisteessä. Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo saa arvon

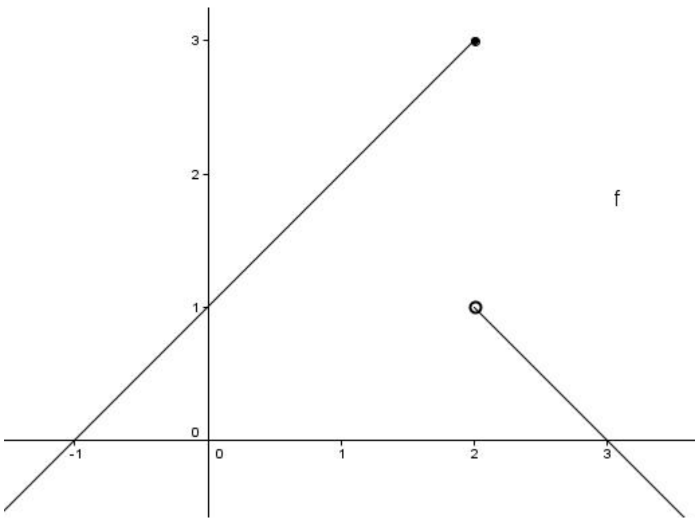
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (-x + 3) = 1$$

ja vasemmanpuoleinen raja-arvo vastaavasti

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x + 1) = 3.$$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret, on funktio f hyppäysepäjatkuva kohdassa $x = 2$. Hypyn suuruus on

$$\left| \lim_{x \to 2+} f(x) - \lim_{x \to 2-} f(x) \right| = |1 - 3| = 2.$$



Kuva 2.1. Esimerkin 2.2.2 funktion graafi.

Poistuva epäjatkuvuus on myös helppo ymmärtää intuitiivisesti, sillä funktion arvo tietyssä tarkastelupisteessä x_0 poikkeaa funktion raja-arvosta kyseisessä pisteessä ja saa silloin uuden, täysin poikkeavan arvon raja-arvoon nähden. Kuva auttaa hahmottamaan sekä helpottamaan ymmärrystä tässäkin tapauksessa. Poistuva epäjatkuvuus voidaan poistaa muuttamalla funktion arvoa pisteessä x_0, jolloin tuloksena on tässä pisteessä jatkuva funktio. Poistuvan epäjatkuvuuden matemaattinen määritelmä on esitetty seuraavaksi.

MÄÄRITELMÄ 2.2.3. Funktiolla $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *poistuva epäjatkuvuus* pisteessä $x_0 \in I$, jos sen raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa, mutta funktion arvolle pätee pisteessä x_0, että

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Poistuvaa epäjatkuvuutta havainnollistaa Esimerkin 2.2.4 funktio sekä sen graafi, joka on esitetty Kuvassa 2.2.

ESIMERKKI 2.2.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 0 \\ 4, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

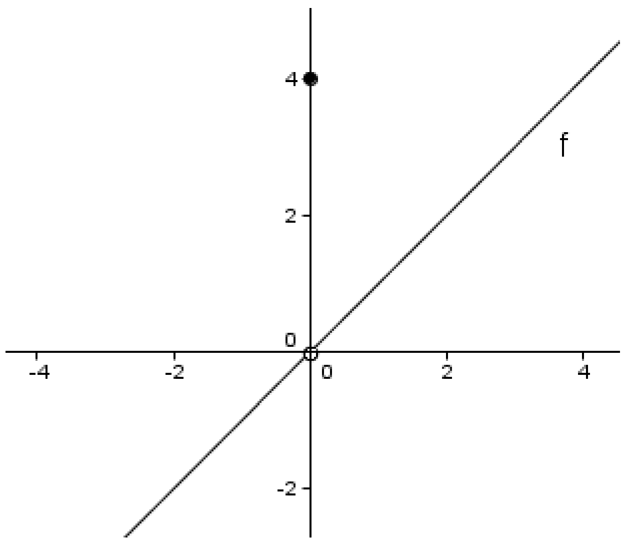
Funktion f jatkuvuuden voi rikkoa vain tarkastelupiste $x = 0$. Funktio f saa pisteessä $x = 0$ arvon $f(0) = 4$. Raja-arvo, kun x lähenee nollaa, taas on

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Koska nyt

$$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x),$$

on funktiolla f poistuva epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 0$.



KUVA 2.2. Esimerkin 2.2.4 funktion graafi.

HUOMAUTUS 2.2.5. Jatkuvuuden tavoin myös epäjatkuvuus on lokaali ominaisuus. Siihen vaikuttaa vain funktion käyttäytyminen tarkastelupisteen läheisyydessä. Funktion kulusta ei siis voida olettaa mitään, vaikka se näyttäisi epäjatkuvuuspistettä lukuun ottamatta täysin jatkuvalta kuvan perusteella. Tätä havainnollistaa Esimerkki 2.2.6 (vrt. Esimerkkiä 2.2.4 ja Esimerkkiä 2.2.6).

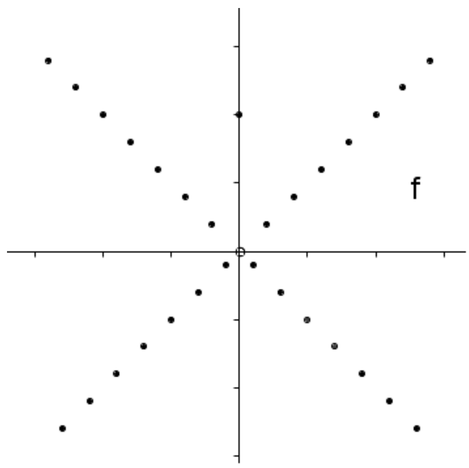
ESIMERKKI 2.2.6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ -x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällä funktiolla on poistuva epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 0$, sillä $f(0) = 1$, mutta

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Sen lisäksi kyseinen funktio ei ole missään pisteessä jatkuva. Tätä havainnollistaa myös tutkittavan funktion graafi Kuvassa 2.3.



KUVA 2.3. Esimerkin 2.2.6 funktion graafi.

Oleellinen epäjatkuvuus on hankalin epäjatkuvuuden kaikista kolmesta tyypistä. Oleellinen epäjatkuvuus määritellään matemaattisesti seuraavasti.

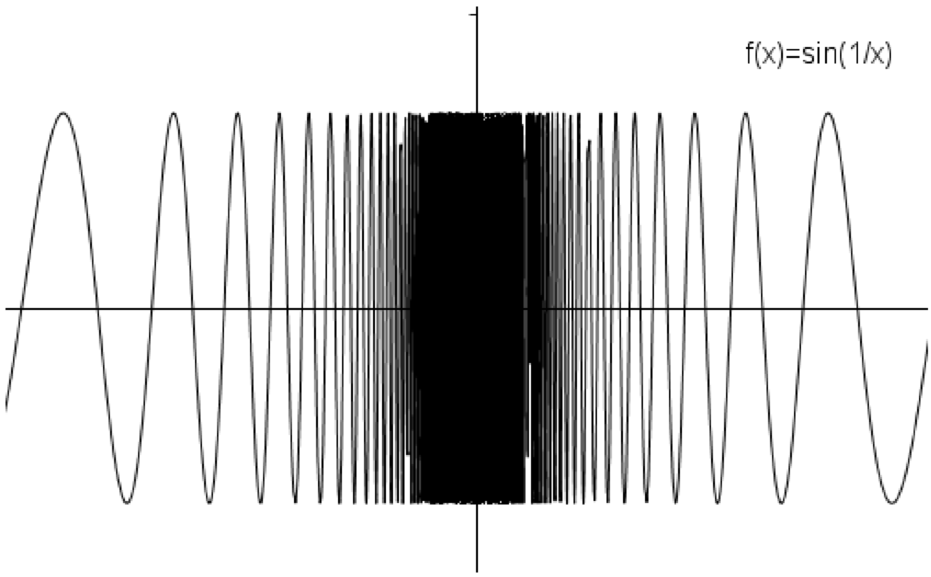
MÄÄRITELMÄ 2.2.7. Funktiolla $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *oleellinen epäjatkuvuus* pisteessä $x_0 \in I$, jos raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ei ole olemassa, toisin sanoen jos jompikumpi, tai mahdollisesti molemmat, sen toispuoleisista raja-arvoista $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ ja $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ eivät ole olemassa.

Määritelmässä 2.2.7 tarkasteltavan funktion arvolla $f(x_0)$ ei ole merkitystä oleellisen epäjatkuvuuskohdan olemassaololle. Oleellisen epäjatkuvuuden tapauksessa funktion graafilla voi esimerkiksi tapahtua voimakasta heilahtelua. Tällöin tietyn määrittelyjoukon pisteen x_0 ympäristössä funktion arvoissa tapahtuu suuria muutoksia, eikä sillä näin ollen ole olemassa toispuoleisia raja-arvoja. Näin käy aina, vaikka tarkastelua rajoitettaisiin miten pieneen pisteen x_0 sisältämään väliin tahansa. Tämän kaltaista tilannetta havainnollistaa Esimerkissä 2.2.8 tarkasteltava funktio.

Esimerkki 2.2.8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tarkasteltaessa funktion f käyttäytymistä nollan läheisyydessä sen graafin avulla, huomataan sen heilahtelevan siinä todella voimakkaasti (ks. Kuva 2.4). Kaikilla $x \neq 0$ funktion saamat arvot kuuluvat välillä $[-1, 1]$, sillä $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. Tarkastellaanpa miten pientä nollan sisältämää väliä tahansa, tapahtuu funktion arvoissa aina suuria muutoksia. Näin ollen funktiolla f ei ole olemassa raja-arvoa nollassa, joten funktiota ei saada jatkuvaksi pisteessä $x = 0$, vaan sillä on oleellinen epäjatkuvuuskohta kyseisessä pisteessä.



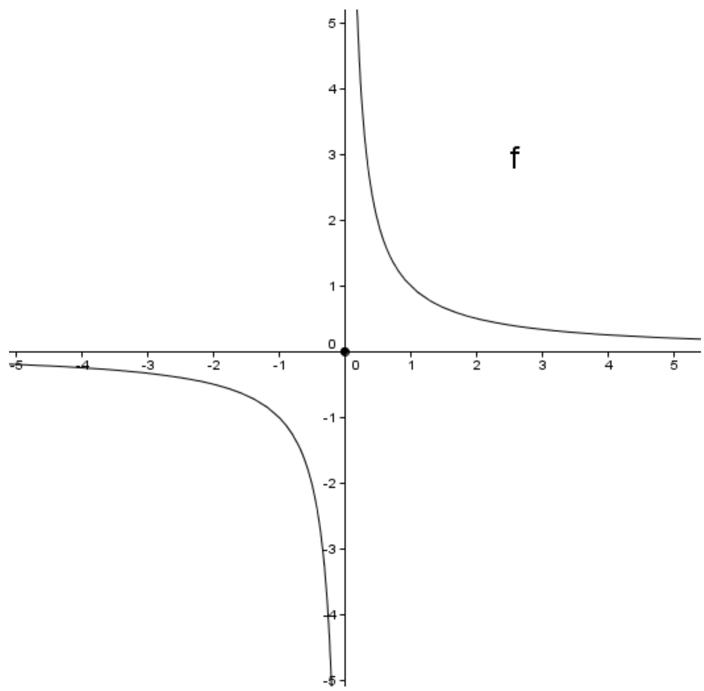
Kuva 2.4. Esimerkin 2.2.8 funktion graafi.

Toinen tapaus, joka kuvaa oleellista epäjatkuvuutta, on funktion arvojen äkillinen karkaaminen äärettömyyteen tietyssä pisteessä. Tällöin funktiolla ei ole olemassa äärellisiä toispuoleisia raja-arvoja. Äärettömyyteen karkailua havainnollistaa Esimerkin 2.2.9 funktio ja sen graafi, joka on esitetty Kuvassa 2.5.

Esimerkki 2.2.9. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Funktion f jatkuvuuden voi rikkoa vain kohta $x = 0$. Kyseistä pistettä lähestyttäessä funktion oikeanpuoleinen raja-arvo karkaa äärettömyyteen $(+\infty)$ ja vasemmanpuoleinen vastaavasti miinus äärettömyyteen $(-\infty)$. Näin ollen funktion toispuoleiset raja-arvot pisteessä nolla eivät ole olemassa äärellisinä, joten kyseessä on oleellinen epäjatkuvuuspiste.



KUVA 2.5. Esimerkin 2.2.9 funktion graafi.

2.3. Esimerkkejä epäjatkuvista derivaatoista

Ennen kuin tarkastellaan erilaisia epäjatkuvia derivaattafunktioita, esitetään yleisesti voimassa oleva yhteys derivoituvuudelle ja jatkuvuudelle.

LAUSE 2.3.1. *Jos funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, on derivoituva pisteessä $x_0 \in I$,niin tällöin funktio on myös jatkuva kyseisessä pisteessä.*

Vaikka derivoituvuudella ja jatkuvuudella on yllä mainittu käyttökelpoinen yhteys, ei tämän tuloksen perusteella voida päätellä mitään derivaattafunktion f' jatkuvuudesta. Tästä huolimatta vielä 1800-luvun lopussa ja jopa 1900-luvun alussa suurin osa matemaatikoista uskoi, että jatkuva funktio on aina derivoituva [**12**]. Klassinen esimerkki, joka rikkoo tämän uskomuksen, on itseisarvofunktio. Se on jatkuva koko reaalilukujoukossa, mutta pisteessä $x = 0$ se ei ole derivoituva. Näin ollen voidaan todeta, että kaikki derivoituvat funktiot ovat jatkuvia, mutta kaikki jatkuvat funktiot eivät ole derivoituvia.

Tuon ajan matemaatikot kyllä tiesivät, että on olemassa funktioita, joilla yksittäisissä pisteissä, esimerkiksi terävissä kärjissä, derivaattaa ei voida määrittää.

Siitä ei kuitenkaan oltu tuolloin kiinnostuneita, koska uskottiin, että jatkuvalla funktiolla on enemmän niitä pisteitä, joissa derivaatta pystytään määrittämään. Haluttiin siis yhä uskoa, että jatkuva funktion on derivoituva kaikkialla - paitsi tietyissä yksittäisissä pisteissä. Ranskalainen Andre-Marie Ampere (1775-1836) yritti jopa esittää teoreettisia perusteluita kyseiselle väitteelle 1806. [**12**]

Vuonna 1872 Karl Weierstrass osoitti tämän uskomuksen vääräksi esittelemällä julkisesti funktion, joka on kaikkialla jatkuva, mutta joka ei ole missään derivoituva. Tämä Weierstrassin funktio on seuraavanlainen:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

missä a on reaaliluku väliltä $(0, 1)$, b on pariton kokonaisluku ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Tämä ei ollut kuitenkaan ensimmäinen konstruktio jatkuvasta, ei-missään derivoituvista funktioista, sillä muun muassa matemaatikot Bernard Bolzano vuonna 1830 ja Charles Cellérier 1860 olivat muotoilleet tällaisia funktioita, mutta ne julkaistiin vasta myöhemmin. [**12**]

Toinen esimerkki ei-missään derivoituvasta funktiosta on Van der Waederin -funktio, joka on muotoa

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \operatorname{dist}(10^k x, \mathbb{Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \inf_{m \in \mathbb{Z}} [10^k x - m].$$

Se on peräisin vuodelta 1930 ja sen on keksinyt Bartel Leendert van der Waeder (1903-1996). Yksityiskohtaiset todistukset van der Waeder -funktion jatkuvuuden ja ei-missään derivoituvuuden osoittamisesta sivuutetaan tässä kohtaa. Jos tämä todistus kuitenkin kiinnostaa, katso [**11**], s. 174-175.

Näistä jatkuvista, ei-missään derivoituvista funktioista löytyy lukuisia erilaisia esimerkkejä. Mikäli tällaiset funktiot kiinnostavat, niihin liittyen löytyy paljon tietoa [**12**], s. 11-70.

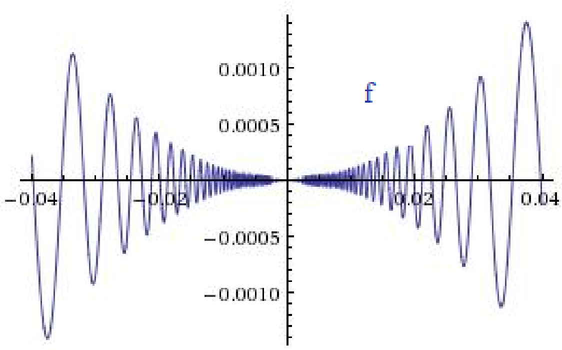
Seuraavaksi tarkastellaan esimerkkiä funktiosta, joka on derivoituva ja siten jatkuva koko määrittelyjoukossaan, mutta jonka derivaattafunktio ei olekaan kaikkialla jatkuva.

Esimerkki 2.3.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Osoitetaan ensin funktion f derivoituvuus, jolloin se on myös jatkuva Lauseen 2.3.1 nojalla. Koska koko funktion määrittelyjoukossa on voimassa $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, niin silloin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $|f(x)| \leq x^2$. Näin ollen funktion f graafi rajoittuu käyrien

$y = x^2$ ja $y = -x^2$ väliin. Tilannetta havainnollistaa Kuvassa 2.6 esitetty funktion graafi.



KUVA 2.6. Funktion f graafi.

Tarkastellaan nyt erotusosamäärää pisteessä $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Tämän avulla saadaan laskettua

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x|,$$

jolloin

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Näin ollen saadaan

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

eli $f^{'}(0) = 0$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä $x_0 = 0$, jolloin se on myös jatkuva tässä pisteessä.

Kun $x \neq 0$, funktio f on selvästi derivoituva ja funktion derivaatta voidaan laskea yleisten derivointisääntöjen avulla ja saadaan

$$f^{'}(x) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}.$$

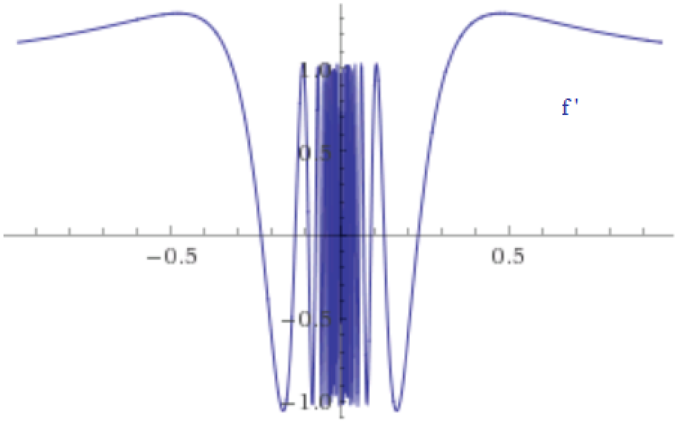
Funktio $f^{'}$ on selvästi jatkuva kaikissa pisteissä $x_0 \neq 0$. Piste $x_0 = 0$ on tutkittava erikseen. Tässä tarkastelussa käytetään apuna jonoa

$$x_n = \frac{1}{\pi n},$$

missä $n \in \mathbb{N}$. Ideana on tutkia, mitä tapahtuu luvuille $f^{'}(x_n)$, kun $n \to \infty$. Koska

$$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(\pi n),$$

ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $\cos(\pi n)$ saa vain arvot $+1$, kun n parillinen, ja -1, kun n on pariton, on selvää, ettei $f^{'}(x_n)$ voi supeta kohti lukua $f^{'}(0) = 0$. Siten $f^{'}$ on epäjatkuva pisteessä $x_0 = 0$. Derivaattafunktion f' käyttäytymistä havainnollistaa sen graafi Kuvassa 2.7.



KUVA 2.7. Derivaattafunktion f' graafi.

Tutkittava esimerkkifunktio f on siis derivoituva koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$, mutta derivaattafunktio $f^{'}$ onkin epäjatkuva määrittelyjoukkonsa yhdessä pisteessä $x_0 = 0$.

Tutkielman luvussa 5 tarkastellaan lähemmin Volterran ja Pompeiun funktioita. Ne ovat esimerkkejä derivoituvista funktioista, joiden derivaattafunktiolla on useita epäjatkuvuuspisteitä.

LUKU 3

Darboux-ominaisuus

Darboux-ominaisuus kertoo funktion väliarvo-ominaisuudesta. Sen mukaan derivoituvalle funktiolle f, jolla on kahdessa eri pisteessä a ja b erisuuruiset derivaatan arvot, $f^{'}(a) \neq f^{'}(b)$, löytyy jokaiselle näiden derivaatta-arvojen välissä olevalle luvulle γ sitä vastaava luku c pisteiden a ja b välistä siten, että tarkasteltavan funktion derivaattafunktio f' saa arvon γ pisteessä c, eli $f'(c) = \gamma$. Tämän väliarvo-ominaisuuden todisti ensimmäisenä ranskalainen matemaatikko Jean Gaston Darboux (1842 - 1917) vuonna 1875. Kuten edellisessä luvussa havaittiin, kaikki derivaattafunktiot eivät ole jatkuvia. Darboux-ominaisuus auttaa tutkimaan, mitkä epäjatkuvuuden tyypit ovat mahdollisia derivaattafunktioille. Tämän luvun pääasiallisena lähdeteoksena on Thomson, Bruckner & Brucknerin *Elementary Real Analysis*.

3.1. Aputuloksia

Darboux-ominaisuuden todistamiseksi tarvitaan käsitteiden lokaali maksimi ja lokaali minimi määritelmiä sekä yksi yleinen aputulos (Lemma 3.1.2). Muotoillaan nämä ennen Darboux-ominaisuuden esittämistä sekä todistamista.

MÄÄRITELMÄ 3.1.1. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funktio. Funktiolla f on *lokaali maksimi* pisteessä $x_0 \in I$, jos on olemassa $\delta > 0$ siten, että $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ ja

$$f(x_0) \geq f(x)$$

kaikilla $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Vastaavasti, funktiolla f on *lokaali minimi* pisteessä $x_0 \in I$, jos on olemassa $\delta > 0$ siten, että $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ ja

$$f(x_0) \leq f(x)$$

kaikilla $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$.

LEMMA 3.1.2. *Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, funktio ja $x_0 \in I$. Jos funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali ääriarvo ja se on derivoituva pisteessä x_0, pätee funktion f derivaatalle, että*

$$f^{'}(x_0) = 0.$$

3.2. Darboux-ominaisuus ja sen todistaminen

MÄÄRITELMÄ 3.2.1. (Darboux-ominaisuus funktiolle)
Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ funktio ja $I \subset \mathbb{R}$. Funktiolla f on Darboux-ominaiuus, jos aina kun pisteet $a, b \in I$ ovat siten, että $a < b$, ja γ on mikä tahansa arvo lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ väliltä, niin on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $f(c) = \gamma$.

LAUSE 3.2.2. (Darboux-ominaisuus derivaattafunktiolle)
Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva avoimella tarkasteluvälillä $I \subset \mathbb{R}$. Tällöin derivaattafunktiolla f' on aina Darboux-ominaisuus.

TODISTUS. Olkoon funktio $g : I \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = f(x) - \gamma x$, todistuksessa käytettävä apufunktio. Koska lauseessa oletetaan, että $f^{'}(a) \neq f^{'}(b)$, on todistus jaettava kahteen tapaukseen:

i.) $f^{'}(a) < f^{'}(b)$
ii.) $f^{'}(a) > f^{'}(b)$.

Todistetaan nämä tapaukset erikseen.
(i.) Oletetaan, että $f^{'}(a) < \gamma < f^{'}(b)$. Tällöin funktion g derivaatalle pätee, että

$$g^{'}(a) = f^{'}(a) - \gamma < 0$$

ja

$$g^{'}(b) = f^{'}(b) - \gamma > 0.$$

Apufunktio g on derivoituvana funktiona jatkuva välillä $[a, b]$, jolloin se saavuttaa pienimmän arvonsa kyseisellä välillä. Koska apufunktiolle pätee, että $g^{'}(a) < 0$, niin silloin

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0.$$

Tämän perusteella saadaan, että $g(x) < g(a)$ kaikilla $x > a$, jotka ovat riittävän lähellä pistettä a. Tämän perusteella pienintä arvoa ei saavuteta pisteessä a. Vastaavasti, koska $g^{'}(b) > 0$, niin silloin

$$\lim_{x \to b-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0.$$

Tämän perusteella saadaan, että $g(x) < g(b)$ kaikilla $x < b$, jotka ovat riittävän lähellä pistettä b. Tämän perusteella pienintä arvoa ei saavuteta pisteessä b. Näin ollen funktio g saavuttaa lokaalin ääriarvonsa välillä (a, b), jolloin Lemman 3.1.2 nojalla on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $g^{'}(c) = 0$. Tällöin

$$f^{'}(c) = g^{'}(c) + \gamma = \gamma.$$

(ii.) Oletetaan, että $f^{'}(b) < \gamma < f^{'}(a)$. Vastaavasti tällöin funktion g derivaatalle pätee, että

$$g^{'}(a) = f^{'}(a) - \gamma > 0$$

ja

$$g^{'}(b) = f^{'}(b) - \gamma < 0.$$

Samankaltaisten perustelujen nojalla, kuten (i)-kohdassa tehtiin, havaitaan, että funktio g saavuttaa välillä $[a, b]$ suurimman arvonsa jossain kyseisen välin sisäpisteessä ja tässä pisteessä sen derivaatta saa arvon nolla. Näin ollen funktiolla g on olemassa lokaali ääriarvo ja siten Lemman 3.1.2 nojalla on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $g^{'}(c) = 0$. Siten

$$f^{'}(c) = g^{'}(c) + \gamma = \gamma.$$

□

Huomautus 3.2.3. Darboux-ominaisuus ei siis edellytä, että tarkasteltavan funktion derivaattafunktio olisi jatkuva. Tämä ominaisuus pätee myös jatkuville derivaatoille, sillä jos f' olisi jatkuva, seuraisi Darboux-ominaisuus suoraan Bolzanon lauseesta.

3.3. Darboux-ominaisuus derivaattafunktiolla

Luvussa 2.2 tarkasteltiin, millaisia erilaisia epäjatkuvuuden tyyppejä funktiolla on mahdollista olla. Sen pohjalta voidaankin nyt tutkia, mitä Darboux-ominaisuus kertoo derivaattafunktion epäjatkuvuudesta. Tavoitteena on siis selvittää, mitkä epäjatkuvuuden tyypeistä ovat mahdollisia derivaattafunktiolle Darboux-ominaisuuden valossa. Tarkastelun lähtökohtana on epäjatkuva funktio g. Ideana on selvittää, voiko funktio g olla tai millä ehdoilla se voi olla jonkin funktion $f : I \to \mathbb{R}$ derivaattafunktio. Toisin sanoen tutkitaan sitä, millä ehdoilla kaikille $x \in I$ pätee, että

$$g(x) = f^{'}(x).$$

Tutkitaan jokainen epäjatkuvuuden tyyppi erikseen.

Tapaus 1: Voiko derivaattafunktio olla hyppäysepäjatkuva?

Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 1 \\ 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Oletetaan nyt, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $g(x) = f^{'}(x)$. Tällöin esimerkiksi pisteissä $x = -1$ ja $x = 1$ funktiolle g pätee, että

$$g(-1) = f^{'}(-1) = -1.$$

ja

$$g(1) = f^{'}(1) = 1.$$

Lauseen 3.2.2 nojalla funktiolla $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Darboux–ominaisuus, jolloin on olemassa piste $c \in [-1, 1]$ siten, että

$$f^{'}(c) = g(c) = 0.$$

Kuitenkin kaikilla $c \in [-1, 1]$ pätee

$$g(c) \neq 0.$$

Näin ollen funktio g ei voi olla minkään funktion derivaattafunktio. Muotoillaan tämä havainto vielä lauseeksi ja todistetaan täsmällisesti.

LAUSE 3.3.1. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, derivoituva. Jos funktion f derivaattafunktio $f^{'}$ on epäjatkuva, niin derivaattafunktio ei ole hyppäysepäjatkuva.*

TODISTUS. Olkoon $x_0 \in I$.
Antiteesi: Derivaattafunktio f' on hyppäysepäjatkuva pisteessä x_0.
Hyppäysepäjatkuvuuden määritelmän (Määritelmä 2.2.1) nojalla tiedetään, että derivaattafunktion f' toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret pisteessä x_0 eli

$$\lim_{x \to x_0+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f'(x).$$

Merkitään, että

$$\beta = \lim_{x \to x_0+} f'(x) \text{ ja } \alpha = \lim_{x \to x_0-} f'(x).$$

Todistuksessa on tarkasteltava kaksi tapausta: $\beta > \alpha$ ja $\beta < \alpha$. Olkoon nyt $\beta > \alpha$ ja valitaan

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Tällöin toispuoliesten raja-arvojen määritelmän (Määritelmä 1.2.3) nojalla on olemassa $a < x_0 < b$ siten, että kaikilla $x \in [a, x_0)$ pätee, että

$$f'(x) < \frac{\alpha + \beta}{2},$$

ja vastaavasti kaikilla $x \in (x_0, b]$ pätee, että

$$f'(x) > \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Oletuksen mukaan tiedetään, että funktio f on derivoituva. Koska pisteiden a ja b valintojen perusteella tiedetään, että

$$f'(a) < \frac{\alpha + \beta}{2} < f'(b),$$

ovat Lauseen 3.2.2 oletukset voimassa.

Oletetaan ensin, että $f'(x_0) \neq \gamma$. Koska $f'(a) < \gamma < f'(b)$, niin Darboux-ominaisuuden (Lause 3.2.2) nojalla on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $f'(c) = \gamma$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kaikilla $x \in [a, b]$ pätee, että $f'(x) \neq \gamma$.

Jos taas $f'(x_0) = \gamma$, voidaan valita uusi luku γ' siten, että

$$\gamma' = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Edelleen toispuoleisten raja-arvojen määritelmän (Määritelmä 1.2.3) nojalla on olemassa $a < x_0 < b$ siten, että kaikilla $x \in [a, x_0)$ pätee, että

$$f'(x) < \frac{\beta + \gamma}{2},$$

ja vastaavasti kaikilla $x \in (x_0, b]$ pätee, että

$$f'(x) > \frac{\beta + \gamma}{2}$$

(Mikäli jossain tapauksessa on tarpeen, valitaan pisteet a ja b uudestaan siten, että uusi piste $a' > a$ ja vastaavasti uusi piste $b' < b$). Darboux-ominaisuuden (Lause 3.2.2) nojalla on olemassa piste $c' \in (a, b)$ siten, että $f'(c') = \gamma'$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kaikilla $x \in [a, b]$ pätee, että $f'(x) \neq \gamma'$.

Tapaus $\beta < \alpha$ menee vastaavasti, sillä siinä vain epäyhtälöiden suunnat ja niihin liittyvät tarkasteluvälit muuttuvat. Näin ollen, jos derivaattafunktio on epäjatkuva, ei se voi olla hyppäysepäjatkuva. □

Tapaus 2: Voiko derivaattafunktiolla olla poistuva epäjatkuvuuskohta?

Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } x \neq 1 \\ 0, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktiolla g on pisteessä $x = 1$ poistuva epäjatkuvuuskohta. Valitaan tarkasteluväliksi suljettu reaalilukuväli $[0, 1]$. Oletetaan nyt, että kaikilla $x \in [0, 1]$ pätee $g(x) = f^{'}(x)$. Tällöin

$$g(0) = f^{'}(0) = 2.$$

ja

$$g(1) = f^{'}(1) = 0.$$

Oletuksen mukaan funktiolla $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Darboux–ominaisuus, jolloin on olemassa piste $c \in [0, 1]$ siten, että

$$f^{'}(c) = g(c) = 1.$$

Kuitenkin kaikilla $c \in [0, 1]$ pätee

$$g(c) \neq 1.$$

Yllä olevien havaintojen perusteella oletus $g(x) = f^{'}(x)$ ei ole voimassa kaikilla pisteillä $x \in [0, 1]$. Näin ollen funktio g ei voi olla minkään funktion derivaattafunktio. Muotoillaan tämä huomio vielä lauseeksi.

Lause 3.3.2. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, derivoituva. Jos funktion f derivaattafunktio $f^{'}$ on epäjatkuva, niin derivaattafunktio ei ole poistuvasti epäjatkuva.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in I$.
Antiteesi: Derivaattafunktiolla f' on poistuva epäjatkuvuus pisteessä x_0.
Poistuva epäjatkuvuuden määritelmän (Määritelmä 2.2.3) nojalla tiedetään, että derivaattafunktion f' raja-arvo $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ on olemassa, mutta derivaattafunktion arvolle pisteessä x_0 pätee, että

$$f'(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Merkitään nyt, että

$$\alpha = f'(x_0) \text{ ja } \beta = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Todistuksessa on tarkasteltava kaksi tapausta: $\beta > \alpha$ ja $\beta < \alpha$. Olkoon nyt $\beta > \alpha$. Valitaan luku γ siten, että

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

ja olkoon $a = x_0$. Tällöin raja-arvon määritelmän (Määritelmä 1.2.1) nojalla on olemassa $b > x_0$ siten, että kaikilla $x \in (x_0, b]$ pätee, että

$$f'(x) > \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Oletuksen mukaan tiedetään, että funktio f on derivoituva. Koska pisteiden a ja b valintojen perusteella tiedetään, että

$$f'(a) = \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < f'(b),$$

ovat lauseen 3.2.2 oletukset voimassa.

Darboux-ominaisuuden (Lause 3.2.2) nojalla on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että $f'(c) = \gamma$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kaikilla $x \in [a, b]$ pätee, että $f'(x) \neq \gamma$.

Tapaus $\beta < \alpha$ menee vastaavasti, sillä siinä vain epäyhtälöiden suunnat ja niihin liittyvät tarkasteluvälit muuttuvat. Näin ollen, jos derivaattafunktio on epäjatkuva, ei se voi olla poistuvasti epäjatkuva. □

Lauseissa 3.3.1 ja 3.3.2 on osoitettu, ettei derivaattafunktio voi olla hyppäysepäjatkuva eikä poistuvasti epäjatkuva. Luvun 3.3 esimerkissä 2.3.2 havaittiin, että derivaattafunktio voi olla epäjatkuva, ja luvussa 2.2, että epäjatkuvuutta on kolmea tyyppiä. Näiden perusteella on selvää, että jos derivaattafunktio on epäjatkuva, voi se olla vain oleellisesti epäjatkuva. Kirjataan tämä havainto vielä seuraukseksi.

Seuraus 3.3.3. *Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, derivoituva. Jos funktion f derivaattafunktio $f^{'}$ on epäjatkuva pisteessä x_0, on derivaattafunktio oleellisesti epäjatkuva pisteessä x_0.*

LUKU 4

Derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon koko

Tämän luvun tavoitteena on tutkia derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukkoa ja saada käsitystä tämän joukon suuruudesta. Tämä tarkastelu edellyttää ensin perehtymistä funktion heilahteluun sekä Bairen kategoria -lauseeseen. Sen jälkeen voidaan esittää havaintoja derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon koosta. Tämän luvun lähdeteoksina ovat Thomson, Bruckner & Brucknerin *Elementary Real Analysis* sekä Denlingerin *Elements of Real Analysis*.

4.1. Funktion heilahtelu

MÄÄRITELMÄ 4.1.1. Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *heilahtelu* välillä I määritellään suureena

$$\omega_f(I) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|.$$

Jotta ymmärrys heilahtelusta auttaisi derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon tutkimisessa, tulisi sillä olla jokin yhteys jatkuvuuteen. Seuraavaksi esitetäänkin tulos, jossa funktion jatkuvuus karakterisoidaan funktion heilahtelun avulla.

LAUSE 4.1.2. *Olkoot $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funktio ja $x_0 \in I$. Tällöin funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos*

$$\inf_{\delta > 0} \omega_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = 0.$$

HUOMAUTUS 4.1.3. Lauseessa 4.1.2 olevalle suureelle pätee, että

$$\inf_{\delta > 0} \omega_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = \lim_{\delta \to 0} \omega_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)),$$

sillä jos $\delta_1 < \delta_2$, niin silloin myös $\omega_f((x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)) \leq \omega_f((x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2))$.

Huomautuksen 4.1.3 avulla Lause 4.1.2 on nyt helppo todistaa.

TODISTUS. Tämä tulos on jos ja vain jos -tulos, joten todistetaan sen molemmat suunnat erikseen.
($\Rightarrow$)
Olkoon, että funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä x_0, Määritelmän 2.1.1 perusteella on olemassa $\delta_0 > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

jos $|x - x_0| < \delta_0$. Olkoon $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Kolmio-epäyhtälön perusteella saadaan

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Yllä oleva tulos pätee siis kaikilla $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Näin ollen saadaan

$$\sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_0 - \delta_0 < x_1 \leq x_2 < x_0 + \delta_0\} \leq \varepsilon,$$

kun $0 < \delta_0$. Tästä saadaan, että

$$\omega_f((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)) < \varepsilon.$$

Koska ε voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, seuraa lauseen tulos ylläolevasta epäyhtälöstä.

$(\Leftarrow)$

Oletetaan nyt, että seuraava tulos pätee:

$$\inf_{\delta>0} \omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$\omega_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) < \varepsilon.$$

Näin ollen saadaan

$$\sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} < \varepsilon,$$

josta edelleen seuraa, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta$. Tämä vastaa jatkuvuuden määritelmää (Määritelmä 2.1.1), joten funktio f on jatkuva pisteessä x_0. □

Lauseessa 4.1.2 esiintyvä suure on tärkeä heilahtelun kokonaisvaltaisen ymmärtämisen kannalta, joten nimetään tämä suure seuraavaksi.

Määritelmä 4.1.4. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ funktio ja olkoon $x_0 \in I$. Tällöin suuretta

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\delta>0} \omega_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

kutsutaan funktion f heilahteluksi pisteessä x_0. Tämä suure kuvaa siis funktion *pisteittäistä heilahtelua.*

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkien kautta, mitä heilahtelu oikeastaan tarkoittaa. Tutkitaan siis funktion pisteittäistä heilahtelua pisteessä, jossa sillä on joko hyppäys-, poistuva- tai oleellinen epäjatkuvuuskohta.

Esimerkki 4.1.5. (Funktion pisteittäinen heilahtelu)
a.) Tarkastellaan tässä Esimerkistä 2.2.2 tuttua hyppäysepäjatkuvaa funktiota f, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x \leq 2 \\ -x+3, & \text{kun } x > 2. \end{cases}$$

Tavoitteena on tutkia, mitä kyseisen funktion pisteittäinen heilahtelu $\omega_f(x_0)$ on hyppäysepäjatkuvuuspisteessä, eli pisteessä $x_0 = 2$. Olkoon $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Määritelmän 4.1.1 nojalla saadaan, että

$$\omega_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = 3 - \big(- (2 + \delta) + 3 \big) = 2 + \delta.$$

Näin ollen Määritelmän 4.1.4 mukaisesti funktion pisteittäinen heilahtelu

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \lim_{\delta \to 0} \omega_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \lim_{\delta \to 0} (2 + \delta) = 2.$$

Huomaa, että heilahtelu pisteessä $x = 2$ on sama, kuin hypäysepäjatkuvuuden määritelmässä (Määritelmä 2.2.1) mainitti hypyn suuruus.
b.) Tarkastellaan tässä Esimerkistä 2.2.4 tuttua poistuvasti epäjatkuvaa funktiota f, jolle

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 0 \\ 4, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tavoitteena on tutkia, mitä kyseisen funktion pisteittäinen heilahtelu $\omega_f(x_0)$ on sen poistuvassa epäjatkuvuuspisteessä, eli pisteessä $x_0 = 0$. Tarkastellaan nyt pieniä lukuja δ, jolloin voidaan olettaa, että $\delta < 1$. Määritelmän 4.1.1 nojalla saadaan, että

$$\omega_f(-\delta, \delta) = \sup_{x \in [-\delta, \delta]} f(x) - \inf_{x \in [-\delta, \delta]} f(x) = 4 - (-\delta) = 4 + \delta.$$

Näin ollen Määritelmän 4.1.4 mukaisesti funktion pisteittäinen heilahtelu

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(-\delta, \delta) = \lim_{\delta \to 0} \omega_f(-\delta, \delta) = \lim_{\delta \to 0} (4 + \delta) = 4.$$

c.) Tarkastellaan tässä Esimerkistä 2.2.8 tuttua oleellisesti epäjatkuvaa funktiota f, jolle

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tavoitteena on tutkia, mitä kyseisen funktion pisteittäinen heilahtelu $\omega_f(x_0)$ on sen oleellisessa epäjatkuvuuspisteessä, eli pisteessä $x_0 = 0$. Koska $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, niin

$$\omega_f(-\delta, \delta) \leq 2.$$

Toisaalta väliltä $[-\delta, \delta]$ löytyy sini-funktion jaksollisuuden perusteella pisteet x ja y siten, että $f(x) = 1$ ja $f(y) = -1$. Funktio f saa siis arvon 1 kaikissa pisteissä, jotka ovat muotoa $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, missä luku $k \in \mathbb{Z}$. Kyseistä muotoa oleva piste kuuluu aina välille

$[-\delta, \delta]$. Vastaavasti f saa arvon -1 kaikissa pisteissä, jotka ovat muotoa $\frac{1}{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}$, missä luku $k \in \mathbb{Z}$. Kyseistä muotoa oleva piste kuuluu aina välille $[-\delta, \delta]$ riittävän suurilla luvuilla k. Näin ollen

$$\omega_f(-\delta, \delta) \geq 2.$$

Yllä tehtyjen havaintojen perusteella funktion heilahtelu jokaisella välillä $[-\delta, \delta]$ on

$$\omega_f(-\delta, \delta) = 2.$$

Näin ollen Määritelmän 4.1.4 mukaisesti funktion pisteittäinen heilahtelu

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\delta>0} \omega_f(-\delta, \delta) = 2.$$

Heilahtelun avulla voidaan myös määritellä erilaisia joukkoja. Muitoillaan tähän liittyvä tulos (Lause 4.1.6) ja todistetaan se. Kyseistä tulosta tullaan tarvitsemaan derivaatttafunktion jatkuvuuspisteiden joukon koon tutkimisessa luvussa 4.4.

Lause 4.1.6. *Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä $I \subset \mathbb{R}$. Olkoon $\gamma > 0$. Tällöin joukko*

$$\{x : \omega_f(x) < \gamma\}$$

on avoin ja vastaavasti joukko

$$\{x : \omega_f(x) \geq \gamma\}$$

on suljettu.

Todistus. Olkoon tutkittava joukko $A = \{x : \omega_f(x) < \gamma\}$ ja olkoon $x_0 \in A$. Osoitetaan ensin, että joukko A on avoin. Olkoot $\omega_f(x_0) = \alpha < \gamma$ ja $\alpha < \beta < \gamma$. Määritelmän 4.1.4 nojalla on olemassa $\delta > 0$, jolle

$$|f(u) - f(v)| \leq \beta,$$

kun $u, v \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Merkitään $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ja olkoon $x \in U$. Koska joukko U on avoin, niin on olemassa $\delta_1 < \delta$ siten, että

$$(x - \delta_1, x + \delta_1) \subset U.$$

Näin ollen pätee

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &\leq \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in (x - \delta_1, x + \delta_1)\} \\ &\leq \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in U\} \leq \beta < \gamma. \end{aligned}$$

Tämän perusteella mielivaltaisesti valittu piste $x \in A$ eli $U \subset A$. Tämä osoittaa, että joukko A on avoin.
Olkoon $B = \{x : \omega_f(x) \geq \gamma\}$. Osoitetaan vielä, että joukko $\{x : \omega_f(x) \geq \gamma\}$ on

suljettu. Koska joukko B on tutkittavassa joukossa I joukon A komplementti, eli $B = I \backslash A$, on joukko B avoimen joukon komplementtina suljettu. $\square$

4.2. Bairen kategoria -lause

Bairen kategoria -lause on nimetty keksijänsä René-Louis Bairen (1874-1932) mukaan ja tämä tulos on peräisin 1900-luvun taitteesta. Baire jakoi kaikki joukot yksinkertaisesti kahteen kategoriaan sen mukaan ovatko ne *laihoja* vai eivät. Joukon laiheudella Baire viittasi siihen, voikaanko tarkasteltava joukko esittää harvojen, ei-tiheiden, joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Ennen kuin Bairen kategoria -lausetta tähän luokitteluun liittyen voidaan tarkastella, tarvitaan ymmärrystä käsitteistä ”aito väli”, ”tiheä joukko”ja ”ei-missään tiheä joukko”sekä Bairen tuolloin kehittämästä joukkojen luokitteluperiaatteesta. Sen lisäksi Bairen kategoria -lauseen todistus vaatii erään aputuloksen, joka on muotoiltu Lemmaksi 4.2.5.

Määritelmä 4.2.1. Tarkasteltava väli on *aito väli*, jos se voidaan esitää muodossa (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ tai $[a, b]$, missä $a < b$.

Määritelmä 4.2.2. Olkoon A joukko reaalilukuja. Tällöin joukko A on reaalilukujoukossa ($\mathbb{R}$)

i.) *tiheä joukko*, jos jokaiselle avoimelle välille (a, b) pätee, että joukko $A \cap (a, b)$ on epätyhjä.
ii.) *ei-missään tiheä joukko*, jos sen sulkeuma $\bar{A}$ ei sisällä yhtään aitoa väliä.

Huomautus 4.2.3. Ei-missään tiheän joukon määritelmästä (Määritelmä 4.2.2) seuraa, että suljettu joukko on joko ei-missään tiheä tai sitten se sisältää välin.

Määritelmä 4.2.4. Olkoon A joukko reaalilukuja.

i.) Joukko A kuuluu *Bairen ensimmäiseen kategoriaan*, jos se voidaan esittää ei-missään tiheiden joukkojen numeroituvana yhdisteenä.
ii.) Joukko A kuuluu *Bairen toiseen kategoriaan*, jos se ei ole ensimmäistä kategoriaa.

Lemma 4.2.5. *Olkoon A ei-missään tiheä joukko. Kaikille aidoille väleille I löytyy aito suljettu väli $J \subseteq I$ siten, että joukon A ja välin J leikkaus on tyhjä, eli $J \cap A = \emptyset$.*

Todistus. Olkoon A ei-missään tiheä joukko ja I aito väli siten, että $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$, missä $a < b$. Koska joukko A on ei-missään tiheä, pätee, että $(a, b) \nsubseteq \bar{A}$, jolloin on olemassa piste $x \in (a, b) - \bar{A}$. Koska $x \in \bar{A}^c$, missä joukko $\bar{A}^c$ on avoin, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $(x - \delta, x + \delta) \subseteq \bar{A}^c$. Valitaan δ' riittävän pieneksi, jolloin saadaan, että $[x - \delta', x + \delta'] \subseteq \bar{A}^c \cap I$. Valitaan nyt, että $J = [x - \delta', x + \delta']$, joilloin aputulos on saatu todistettua. $\square$

LAUSE 4.2.6. (Bairen kategoria -lause)
Jokainen reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ aito väli kuuluu Bairen toisen kategoriaan.

TODISTUS. Olkoon I aito väli siten, että $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$, kun $a < b$.
Antiteesi: Väli I kuuluu ensimmäiseen kategoriaan.
Tällöin välille I pätee, että

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

missä jokainen joukko A_n on ei-missään tiheä.

Koska joukko A_1 on ei-missään tiheä, Lemman 4.2.5 nojalla tiedetään, että on olemassa suljettu väli $J_1 \subseteq I$ siten, että $J_1 \cap A_1 = \emptyset$. Vastaavasti, koska joukko A_2 on ei-missään tiheä, on olemassa suljettu väli $J_2 \subseteq J_1$ siten, että $J_2 \cap A_2 = \emptyset$. Jatkamalla tätä saadaan jono $\{J_n\}$ aitoja suljettuja välejä siten, että

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \cdots$$

ja $A_i \cap J_i = \emptyset$ kaikilla i.

Cantorin sisäkkäisten välien periaatteen nojalla on olemassa piste $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n.$$

Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $x_0 \in J_n$, joten $x_0 \notin A_n$. Siten

$$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = I.$$

Mutta kuitenkin $x_0 \in I$, sillä kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $x_0 \in J_n \subseteq I$. Näin ollen todistus on päätynyt ristiriitaan, joten välin I täytyy kuuluu Bairen toiseen kategoriaan. □

4.3. Tarvittavia määritelmiä jatkuvuuspisteiden joukon tutkimiseen

Koska myöhemmin tässä luvussa tullaan tutkimaan derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon kokoa, on hyvä määritellä, mitä käsitteet "jatkuvuuspisteiden joukko" ja "epäjatkuvuuspisteiden joukko" todella tarkoittavat ja miten niitä merkitään.

MÄÄRITELMÄ 4.3.1. Olkoon f suljetulla välillä I määritelty reaaliarvoinen funktio. Funktion f *jatkuvuuspisteiden joukko* on joukko, jonne kuuluvat kaikki ne määrittelyjoukon pisteet, joissa funktio f on jatkuva. Tätä joukkoa merkitään C_f. Vastaavasti funktion f *epäjatkuvuuspisteiden joukko* on joukko, jonne kuuluvat kaikki ne määrittelyjoukon pisteet, joissa funktio f on epäjatkuva. Tätä joukkoa merkitään D_f.

Seuraavaksi tarkastellaan hieman Borelin joukkoja, jotka on nimetty keksijänsä Émile Borelin (1871-1956) mukaan. Hän havaitsi, että analyysissä ei riitä tarkastella vain avoimia ja suljettuja joukkoja, vaan sen sijaan on tutkittava avointen ja suljettujen joukkojen numeroituvia yhdisteitä ja leikkauksia. Sen vuoksi tulemme nyt määrittelemään analyysin kannalta kaksi merkittävää joukkoa: G_δ-joukon ja F_σ-joukon. Nämä joukot ovat vasta alkua suurelle Borelin joukkojen luokalle, mutta tämä tarkastelu riittää tässä tutkielmassa.

MÄÄRITELMÄ 4.3.2. Reaalilukujen osajoukko H, $H \subset \mathbb{R}$, on *G_δ-joukko*, jos se voidaan esittää avoimien joukkojen numeroituvana leikkauksena, toisin sanoen, jos on olemassa avoimet joukot $G_1, G_2, G_3, \cdots$ siten, että

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

HUOMAUTUS 4.3.3. Määritelmän 4.3.2 joukko H ei välttämättä ole avoin. Esimerkiksi jos joukot $G_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, niin niiden leikkaus

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{0\}$$

onkin suljettu.

MÄÄRITELMÄ 4.3.4. Reaalilukujen osajoukko E, $E \subset \mathbb{R}$, on *F_σ-joukko*, jos se voidaan esittää suljettujen joukkojen numeroituvana yhdisteenä, toisin sanoen, jos on olemassa suljetut joukot $F_1, F_2, F_3, \cdots$ siten, että

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Borelin joukoille G_δ ja F_σ pätee myös käyttökelpoinen yhteys, jota tullaan tarvitsemaan luvussa 4.4. Muotoillaan ja todistetaan tämä yhteys seuraavaksi.

LAUSE 4.3.5. *Joukko A on G_δ-joukko, jos ja vain jos sen komplementti joukko $\mathbb{R} \setminus A$ on F_σ-joukko.*

TODISTUS. Koska todistettava on jos ja vain jos -tulos, todistetaan sen molemmat suunnat erikseen.
($\Rightarrow$)
Oletetaan, että joukko A on G_δ-joukko, jolloin Määritelmän 4.3.2 nojalla

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

missä joukot G_k ovat avoimia kaikilla k. Tällöin de Morganin kaavojen avulla saadaan

$$\mathbb{R}\backslash A = \mathbb{R}\backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}\backslash G_k).$$

Koska joukot G_k ovat avoimia, on joukko $\mathbb{R}\backslash G_k$ suljettu kaikilla k. Näin ollen joukko $\mathbb{R}\backslash A$ on Määritelmän 4.3.4 mukaan F_σ-joukko.
($\Leftarrow$)
Oletetaan, että joukko $\mathbb{R}\backslash A$ on F_σ-joukko, jolloin Määritelmän 4.3.4 nojalla

$$\mathbb{R}\backslash A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

missä F_k ovat suljettuja joukkoja kaikilla k. Tällöin de Morganin kaavojen avulla saadaan

$$A = \mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}\backslash A) = \mathbb{R}\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}\backslash F_k).$$

Koska joukot F_k ovat suljettuja, on joukko $\mathbb{R}\backslash F_k$ avoin kaikilla k. Näin ollen joukko A on Määritelmän 4.3.2 mukaan G_δ-joukko. $\square$

Derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukon koon tutkimisessa tullaan todistamaan erilaisia tuloksia, joissa tarvitaan ymmärrystä joukon erilaisista pisteistä. Sen vuoksi esitetäänkin määritelmät vielä käsitteille: sisäpiste, reunapiste ja kasautumispiste.

MÄÄRITELMÄ 4.3.6. Olkoon E joukko reaalilukuja. Pisteen x sanotaan olevan kyseisen joukon

i.) *sisäpiste*, mikäli on olemassa luku $c > 0$ siten, että

$$(x - c, x + c) \subset E.$$

ii.) *reunapiste*, mikäli jokainen väli $(x - c, x + c)$ sisältää vähintään sekä yhden joukon E pisteen että yhden pisteen, joka ei kuulu joukkoon E.
iii.) *kasautumispiste*, mikäli kaikilla $c > 0$ leikkaus

$$(x - c, x + c) \cap E$$

sisältää äärettömän monta pistettä.

Bairen tekemät huomiot eivät liity pelkästään joukkojen luokitteluun, vaan hän on määritellyt myös funktioita, joihin liittyy tiettyjä ominaisuuksia. Tällaisia Baire-funktioita tullaan tarvitsemaan myöhemmin luvussa 4.4, joten esitetään eräs määritelmä niihin liittyen.

Määritelmä 4.3.7. Funktio f on *Baire 1 -funktio*, jos on olemassa jono (f_k) jatkuvia funktioita siten, että kaikilla $x \in I$

$$f_k(x) \to f(x).$$

Huomataan, että Baire 1 -funktioiden luokka sisältää koko derivaattafunktioiden luokan. Tarkastellaan tämän väitteen paikkaansa pitävyyttä hieman matemaattisesti. Olkoon funktio F derivoituva reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x-\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Jos nyt määritellään f_n siten, että

$$f_n(x) = \frac{F(x-\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}},$$

niin silloin kaikki funktiot f_n ovat jatkuvia reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ ja ne suppenevat pisteittäin kohti funktiota F'. Tämä vastaa Baire 1 -funktioiden määritelmää (Määritelmä 4.3.7), joten yllä oleva väite pitää paikkansa.

4.4. Derivaattafunktio jatkuvuuspisteiden joukon tutkiminen

Funktion jatkuvuuspisteiden joukon tutkimisen aluksi tarkastellaan, miten funktion jatkuvuuspisteiden ja epäjatkuvuuspisteiden joukot suhteutuvat Borelin G_δ- ja F_σ-joukkoihin. Seuraavaksi todistetaankin tähän liittyvä tulos.

Lause 4.4.1. *Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä I (mikä voi olla koko reaalilukujoukko $\mathbb{R}$). Tällöin funktion f jatkuvuuspisteiden joukko C_f on G_δ-joukko ja epäjatkuvuuspisteiden joukko D_f on F_σ-joukko.*

Todistus. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, tutkittava funktio. Tavoitteena on todistaa, että jatkuvuuspisteiden joukko C_f on G_δ-joukko, toisin sanoen, että joukko

$$C_f = \{x : \omega_f(x) = 0\}$$

on G_δ-joukko. Kaikille $k \in \mathbb{N}$ merkitään

$$B_k = \left\{x : \omega_f(x) \geq \frac{1}{k}\right\}.$$

Lauseen 4.1.6 nojalla tiedetään, että kaikki joukot B_k ovat suljettuja. Silloin joukko

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

on F_σ-joukko. Joukko C_f on joukon B komplementti eli $C_f = I \backslash B$. Koska joukko B on F_σ-joukko, on joukko C_f joukon B komplementtina G_δ-joukko.

Koska funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko D_f on jatkuvuuspisteiden joukon C_f komplementti, eli $D_f = I \backslash C_f$, ja joukko C_f on G_δ-joukko, on se lauseen 4.3.5 mukaan F_σ-joukko. □

Derivaattafunktio voi olla edellä tehtyjen havaintojen perusteella epäjatkuva joko yhdessä määrittelyjoukkonsa pisteessä (ks. Esimerkki 2.3.2) tai useissa määrittelyjoukkonsa pisteissä (ks. luku 2.3). Nyt herää kysymys, voiko derivoituvan funktion derivaattafunktio olla epäjatkuva kaikkialla. Tutkittaessa derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukkoa tullaan havaitsemaan, ettei tämä ole mahdollista. Tutkimuksessa havaintaan kuitenkin jatkuvuuspisteiden joukon olevan suuri. Tavoitteena onkin osoittaa, että derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukko on tiheä määrittelyjoukossaan. Tämän tuloksen todistamiseen tarvitaan kuitenkin yksi aputulos, joka muotoillaan ja todistetaan ensin.

Lemma 4.4.2. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Millä tahansa Baire 1 - funktiolla f joukot*

$$\{x : f(x) > a\} \text{ ja } \{x : f(x) < a\}$$

ovat tyyppiä F_σ.

Todistus. Merkitään, että $A = \{x : f(x) > a\}$ ja $B = \{x : f(x) < a\}$. Määritelmän 4.3.4 nojalla riittää osoittaa, että joukot A ja B voidaan esittää suljettujen joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Koska funktio f on Baire 1 -funktio, saadaan se Määritelmän 4.3.7 nojalla jonosta jatkuvia funktioita $\{f_n\}$, jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota f kaikilla $x \in I$.

Todistetaan ensin, että joukko A on tyyppiä F_σ. Tätä varten osoitetaan ensin, että

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n \geq k} \underbrace{\Big\{x : f_n(x) \geq a + \frac{1}{j}\Big\}}_{=:A_{n,j}} \Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n \geq k} A_{n,j} \Big).$$

$(\subset)$
Jos $\hat{x} \in A$, niin $f(\hat{x}) > a$. Lisäksi on olemassa $j_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f(\hat{x}) > a + \frac{1}{j_0},$$

kun valitaan, että $j_0 > \frac{1}{f(\hat{x}) - a}$. Koska $\lim_{n\to\infty} f_n(\hat{x}) = f(\hat{x})$, on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f_n(\hat{x}) \geq a + \frac{1}{j_0}$$

kaikilla $n \geq k_0$. Tästä seuraa, että

$$\hat{x} \in \bigcap_{n \geq k_0} \Big\{x : f_n(x) \geq a + \frac{1}{j_0}\Big\} = \bigcap_{n \geq k_0} A_{n,j_0},$$

joten
$$\hat{x} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n \geq k} \Big\{ x : f_n(x) \geq a + \frac{1}{j} \Big\} \Big).$$
($\supset$)
Olkoon
$$\hat{x} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n \geq k} \Big\{ x : f_n(x) \geq a + \frac{1}{j} \Big\} \Big).$$
Tällöin on olemassa $j_0 \in \mathbb{N}$ ja $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että
$$\hat{x} \in \bigcap_{n \geq k_0} \Big\{ x : f_n(x) \geq a + \frac{1}{j_0} \Big\},$$
eli $f_n(\hat{x}) \geq a + \frac{1}{j_0}$ kaikilla $n \geq k_0$. Tästä seuraa, että
$$f(\hat{x}) \geq a + \frac{1}{j_0} > a,$$
josta edelleen saadaan, että $\hat{x} \in A$.

Koska f_n on jatkuva, on $A_{n,j} = f_n^{\{-1\}}\Big([a + \frac{1}{j}, \infty)\Big)$ suljettu. Tästä seuraa, että
$$\bigcap_{n \geq k} A_{n,j}$$
on suljettujen joukkojen suljettu leikkauksena, jolloin
$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n \geq k} A_{n,j} \Big)$$
on F_σ-joukko.

Joukon B osoittaminen F_σ-joukoksi menee vastaavasti. □

LAUSE 4.4.3. *Olkoon $\{g_n\}$ jono jatkuvia funktiota, jotka on määritelty välillä I, ja jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota g välillä I. Silloin funktion g jatkuvuuspisteiden joukko muodostaa tiheän joukon välillä I.*

TODISTUS. Antiteesi: Funktio g on epäjatkuva jonkin osavälin $J \subset I$ kaikissa pisteissä.
Merkitään kaikilla $n \in \mathbb{N}$
$$E_n = \Big\{ x \in J : \omega_g(x) \geq \frac{1}{n} \Big\}.$$
Jokainen joukko E_n on suljettu Lauseen 4.1.6 perusteella ja
$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$
Bairen kategoria -lauseen (Lause 4.2.6) nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja väli $H \subset J$ siten, että $H \subset E_n$. Tämä pätee, sillä jos jokainen joukko E_n olisi ei-missään tiheä,

niin J olisi ensimmäisen kategorian joukko. Kuitenkin tiedetään, että J on väli, joten se on toisen kategorian joukko. Näin ollen löytyy jokin joukko E_n siten, että se ei ole ei-missään tiheä. Koska E_n on suljettu joukko, sisältää se välin.

Seuraavaksi osoitetaan, ettei tämä ole mahdollista funktiolle g, joka on jatkuvien funktioiden rajafunktio.

Olkoon $\{I_k = (a_k, b_k)\}$ jono välejä, joiden pituus on alle $\frac{1}{n}$ siten, että

$$g(H) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Olkoon $H_k = g^{-1}(I_k) \cap H$ kaikilla k. Tällöin

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

missä yksikään joukko H_k ei voi sisältää väliä. Jos joukko H_k sisältäisi välin (a, b), pätisi heilahtelulle, että $\omega_g(a, b) \geq \frac{1}{n}$, sillä pisteittäinen heilahtelu $\omega_g(x) \geq \frac{1}{n}$ kaikilla $x \in H$. Tällöin löytyy pisteet x ja y väliltä (a, b) siten, että

$$|g(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}.$$

Tämän perusteella $g(x)$ ja $g(y)$ eivät voi molemmat kuulua välille I_k, koska kyseisen välin pituus on alle $\frac{1}{n}$. Tämä on ristiriidassa joukon H_k määrittelyn kanssa, joten kyseinen joukko sisältää pakostakin välin. Näin ollen

$$H_k = \{x : g(x) < b_k\} \cap \{x : g(x) > a_k\}.$$

Lemman 4.4.2 nojalla joukko H_k on tyyppiä F_σ, sillä se on kahden F_σ-joukon leikkaus, joten joukko H_k voidaan esittää muodossa

$$H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{kj},$$

missä joukot H_{kj} ovat suljettuja. Tästä seuraa, että

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{kj},$$

eli väli H on pystytty esittämään suljettujen joukkojen numeroituvana yhdisteenä. Bairen kategoria - lauseen (Lause 4.2.6) nojalla edellä olevista joukoista ainakin yksi, olkoon se H_{ij}, ei ole ei-missään tiheä. Koska H_{ij} on suljettu, on olemassa väli K siten, että $H_{ij} \supset K$. Tästä seuraa, että $H_i \supset K$, mikä ei ole mahdollista, koska edellä osoitettiin, ettei mikään joukko H_k sisällä väliä.
Näin ollen tämä ristiriita kumoaa todistuksen alussa tehdyn antiteesin ja lauseen väite on tosi. $\square$

Lauseen 4.4.3 tuloksesta saadaan muotoiltua seuraus, joka kuvaa derivaattafunktion jatkuvuuspisteiden joukkoa.

SEURAUS 4.4.4. *Olkoon funktio f derivoituva välillä $I = (a, b)$. Tällöin derivaattafunktion f' jatkuvuuspisteiden joukko on tiheä kyseisellä välillä.*

LUKU 5

Derivaattafunktion integroituvuus

Tässä luvussa tarkastellaan ensin integroituvuutta yleensä: määritellään Riemann-integroituvuus sekä muotoillaan Analyysin peruslause, joka kuvaa integroituvuuden ja derivoituvuuden yhteyttä. Lisäksi tarkoituksena on tutkia derivaattafunktion integroituvuutta. Ilmiötä pohdittaessa herää kysymys, voiko derivaattafunktio olla aina integroituva. Tätä tullaan tutkimaan kahden esimerkin, Volterran ja Pompeiun funktion, avulla. Tavoitteena siinä on näyttää, ettei derivaattafunktio ole välttämättä aina integroituva. Päälähteinä tässä luvussa ovat Bressoudin *A Radiacal approach to Lebesgue's theory of integration*, Thomson, Bruckner & Brucknerin *Elementary Real Analysis* sekä Kilpeläinen *Analyysi II.*

5.1. Riemann-integroituvuus ja Analyysin peruslause

Riemann-integroituvuuden määrittelemiseen tarvitaan ymmärrystä porrasfunktioista sekä funktion ylä- ja alaintegraaleista, joten nämä käsitteet tullaan määrittelemään ennen Riemann-integroituvuuden määrittelyä. Koska Riemann-integroituvuus on määritelty vain rajoitetulle funktiolle, tarkastellaan myös, mitä tarkoitetaan funktion rajoittuneisuudella.

MÄÄRITELMÄ 5.1.1. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *rajoitettu*, jos on olemassa $M > 0$ siten, että kaikilla $x \in I$ pätee

$$|f(x)| \leq M.$$

MÄÄRITELMÄ 5.1.2. Rajoitettu funktio $h : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on *porrasfunktio*, jos on olemassa tarkastelu välin I jako $P = \{x_0,x_1,\ldots, x_{n-1},x_n\}$ ja luvut $a_1,a_2,\ldots, a_{n-1},a_n$ siten, että kaikilla $x \in (x_{i-1}, x_i)$ pätee

$$f(x) = a_i.$$

Tämä tarkoittaa, että porrasfunktio saa vakioarvon jokaisella osavälillä (x_{i-1}, x_i).

MÄÄRITELMÄ 5.1.3. Olkoon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ väliin $I = [a, b]$ liittyvä jako ja $h : I \to \mathbb{R}$ porrasfunktio, jolle kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee: $h(x) = a_i$ kaikilla $x \in (x_{i-1}, x_i)$. *Porrasfunktion h integraali* yli välin $I = [a, b]$ on

$$\int_a^b h = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot l(I_i),$$

missä $l(I_i) = x_i - x_{i-1}$ eli osavälin $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ pituus.

MÄÄRITELMÄ 5.1.4. Rajoitetun funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *alaintegraali* yli välin $I = [a, b]$ on

$$ala \int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b h \mid h : I \to \mathbb{R} \text{ on porrasfunktio siten, että } h \leq f \text{ välillä } I \right\}$$

ja *yläintegraali* yli välin $I = [a, b]$ on

$$ylä \int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b h \mid h : I \to \mathbb{R} \text{ on porrasfunktio siten, että } h \geq f \text{ välillä } I \right\}.$$

MÄÄRITELMÄ 5.1.5. Rajoitettu funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *Riemann-integroituva* yli välin $I = [a, b]$, jos sen alaintegraali ja yläintegraali ovat yhtä suuret, toisin sanoen, jos

$$ala \int_a^b f = ylä \int_a^b f.$$

Tällöin funktion f *Riemann-integraali* yli välin $I = [a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)dx = ala \int_a^b f = ylä \int_a^b f.$$

Reimann-integroituvuuden määrittäminen porrasfunktioiden sekä ylä- ja alaintegraalien avulla (Määritelmä 5.1.5) ei ole ainoa mahdollisuus, vaan se voidaan tehdä myös muilla tavoin. Eräs toinen tapa Riemann-integroituvuuden määrittelyyn on esitetty Lebesguen ehtona, koska sitä tullaan tarvitsemaan luvussa 5.2. Kyseistä ehtoa varten tulee ymmärtää käsite nollamittaisuus.

Nollamittaisuuden käsite liittyy joukkoihin ja niiden ominaisuuksiin. Jos tutkittava joukko voidaan peittää sellaisilla väleillä, joiden yhteenlaskettu pituus on mielivaltaisen pieni, sanotaan kyseisen joukon olevan nollamittainen. Esitetään nollamittaisuudelle vielä matemaattinen määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 5.1.6. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on (Lebesguen mielessä) *nollamittainen*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy numeroituva joukkoperhe $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kompakteja välejä $I_k \subset \mathbb{R}$ siten, että

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \text{ ja } \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) < \varepsilon,$$

missä $\lambda(I_k)$ on välin I_k pituus. Tällöin merkitään $A \in N = N(\mathbb{R})$.

Lebesguen ehto Riemann-integroituvuudelle liittyy funktion epäjatkuvuuspisteiden joukkoon sekä sen nollamittaisuuteen. Tämä ehto on jos ja vain jos -tulos, joten sitä voidaan käyttää myös funktion epäjatkuvuuspisteiden joukon nollamittaisuuden tutkimisessa. Muotoillaan tämä Lebesguen ehto seuraavaksi.

Lause 5.1.7. (Lebesguen ehto)
Funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, on Riemann-integroituva, jos ja vain jos funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko

$$D_f = \{x \in I \mid \ f \text{ ei ole jatkuva pisteessä } x\}$$

on nollamittainen eli $D_f \in N(\mathbb{R})$.

Nyt kun Riemann-integroituvuudesta on saatu käsitys, voidaan pohtia integroituvuuden ja derivoituvuuden välistä suhdetta. Analyysin peruslause on analyysin fundamentaali teoreema, joka kuvaa derivoinnin ja integroinnin välistä yhteyttä. Nämä operaatiot ovat toisillensa käänteisiä. Geometrisesti derivaatta tarkoittaa tangentin kulmakerrointa ja integrointi taas käyrän alle jäävän pinta-alan laskemista. Lauseet 5.1.10 ja 5.1.11 kuvaavat kahta ominaisuutta, jotka yhdessä muodostavat Analyysin fundamentaalin peruslauseen, joka liittää derivaatan, integraalifunktion ja määrätyn integraalin käsitteet toisiinsa. Näiden muotoilemiseksi palautetaan ensin mieleen, mitä funktion primitiivi ja integroituvan funktion integraalifunktio oikein tarkoittavat.

Määritelmä 5.1.8. Integroituvan funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, *integraalifunktio* on funktio $F : I \to \mathbb{R}$, jolle

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt.$$

Määritelmä 5.1.9. Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I = (a, b)$, *primitiivi* on funktio $F : I \to \mathbb{R}$, jolle pätee kaikilla $x \in I$, että

$$F'(x) = f(x).$$

Muotoillaan ensin Analyysin peruslauseen kuuluvat kaksi ominaisuutta, joista ensimmäinen kuvaa integraalin derivoituvuutta (Lause 5.1.10) ja toinen derivaatan integraalia (Lause 5.1.11). Kootaan näiden sisältö myös yhteen, jolloin saadaan täydellinen Analyysin peruslause (Lause 5.1.12)

Lause 5.1.10. (Analyysin peruslause, osa I: Integraalin derivoituvuus)
Olkoon funktio $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, jatkuva. Silloin funktiolla

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

on derivaatta välillä $I = [a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$.

Lause 5.1.11. (Analyysin peruslause, osa II: Derivaatan integraali)
Jos funktiolla $F : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, on jatkuva derivaatta välillä I, pätee silloin

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Lause 5.1.12. (Analyysin peruslause)
Olkoot $F : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, derivoituva funktio välillä I ja $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva funktio samalla välillä. Jos $F'(x) = f(x)$ kaikiklla $x \in I$, niin silloin

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Nyt kun Analyysin peruslauseen keskeinen idea on selvillä ja aletaan pohtimaan derivaattafunktion integroituvuutta, herää kysymys, voidaanko löytää vastaesimerkkiä Analyysin peruslauseelle siten, ettei se riipu funktion rajoittuneisuudesta. Onko siis mahdollista löytää funktio f, jonka derivaattafunktio f' on olemassa siten, että se on rajoitettu suljetulla välillä I, mutta se ei ole Riemann-integroituva kyseisellä välillä.

Vuonna 1878 Ulisse Dini (1845-1918) havaitsi, että jos suljetulla välillä I oleva funktio f on ei-vakio, jos sillä on rajoitettu derivaatta kyseisellä välillä, ja jos f' on nolla välin I tiheässä osajoukossa, ei ole mahdollista, että derivaattafunktio f' olisi integroituva välillä I. Dini ei kuitenkaan onnistunut antamaan esimerkkiä tällaisesta funktiosta. Vastaus Dinin ongelmaan saadaan seuraavasta luvusta, jossa tarkastellaan Pompeiun funktiota, sillä se on juuri tämän tyyppinen funktio.

5.2. Volterran funktio

Vito Volterra (1860-1940) on yksi niistä 1900-luvun matemaatikoista, jotka mullistivat vanhoja matematiikan teoreettisia olettamuksia integroituvuuteen liittyen. Riemann-integroituvuuden edellytyksenä on, että tutkittava funktio on rajoitettu, joten tämän ehdon rikkominen on helppoa. Volterra oli kuitenkin kiinnostunut perfekteistä, ei-missään tiheistä joukoista, jotka eivät ole nollamittaisia (ks. Määritelmä 5.1.6). Niitä tutkiessaan Volterra havaitsi, että on olemassa sellainen derivoituva funktio F, jonka derivaattafunktio F' on olemassa ja rajoitettu, mutta joka ei siltikään ole Riemann-integroituva yhdelläkään suljetulla ja rajoitetulla välillä.

Tällaisen Volterran funktion tarkastelu edellyttää $SVC(4)$-joukon tuntemusta, joka on yksi Smith-Volterra-Cantor -joukoista eli niin sanotuista SVC-joukoista. SVC-joukot ovat nimensä mukaan keksineet matemaatikot Henry J. S. Smith (1826-1883), Vito Volterra sekä Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). SVC-joukot saadaan konstruoitua siten, että suljetulta väliltä poistetaan avoimia osavälejä ja poiston jälkeen jääneistä suljetuista väleistä edelleen poistetaan avoimia osavälejä.

Näitä osavälipoistoja tehdään äärettömän monta kertaa. Kaikki tällaiset SVC-joukot ovat suljettuja ja ei-missään tiheitä.

Tunnetuin SVC-joukko on Cantorin yksikolmasosa joukko, eli niin sanottu SVC(3)-joukko, ja se on peräisin vuodelta 1883. Kyseinen joukko on välin $[0,1]$ fraktaalinen osajoukko, joka saadaan muodostettua, kun välin $[0,1]$ keskiosasta poistetaan ensin $\frac{1}{3}$ pituinen avoin väli, jolloin siitä jää jäljelle joukko $[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Seuraavaksi edellisen osan molempien välien keskiosista poistetaan $\frac{1}{3^2}$ pituinen avoin väli, jolloin siitä jää jäljelle joukko $[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. Taas edellisen osan jokaisen välin keskiosasta poistetaan $\frac{1}{3^3}$ pituinen avoin väli ja näin jatkamalla saadaan muodostettua Cantorin yksikolmasosa joukko. Nyt lähemmin tarkasteltava SVC(4)-joukko on kyseisen joukon konstruktion yleistys ja se eroaa Cantorin yksikolmasosa joukosta siten, ettei se ole Cantorin yksikolmasosa joukon tavoin nollamittainen.

Tutkitaan nyt siis suljettua väliä $[0,1]$ ja muodostetaan tähän väliin sisältyvä $SVC(4)$-joukko. $SVC(4)$-joukko voidaan ajatella koostuvan useista eri tasoista, joten tarkastellaan kyseisen joukon muodostumista taso kerrallaan. Ensimmäinen taso SVC_1 saadaan, kun poistetaan välin $[0,1]$ keskiosasta $\frac{1}{4}$ pituinen avoin väli, jolloin kyseinen taso muodostuu jäljelle jääneestä kahdesta suljetusta välistä. Näin ollen

$$SVC_1 = \left[0,\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right].$$

Toinen taso SVC_2 saadaan, kun poistetaan molempien ensimmäisen tason välien keskiosasta avoin väli, jonka pituus on $\frac{1}{4^2}$. Toinen taso sisältää nyt siis neljä jäljelle jäänyttä suljettua väliä, eli

$$SVC_2 = \left[0,\frac{5}{32}\right]\cup\left[\frac{7}{32},\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{5}{8},\frac{25}{32}\right]\cup\left[\frac{27}{32},1\right].$$

Kolmas taso SVC_3 saadaan taas poistamalla kunkin toisen tason sisältämän neljän välin keskiosasta avoin väli, jonka pituus on $\frac{1}{4^3}$, jolloin se sisältää kahdeksan jäljelle jäänyttä suljettua väliä. Näin ollen

$$\begin{aligned} SVC_3 = &\left[0,\frac{9}{128}\right]\cup\left[\frac{11}{128},\frac{5}{32}\right]\cup\left[\frac{7}{32},\frac{37}{128}\right]\cup\left[\frac{39}{128},\frac{3}{8}\right]\\ &\cup\left[\frac{5}{8},\frac{89}{128}\right]\cup\left[\frac{91}{128},\frac{25}{32}\right]\cup\left[\frac{27}{32},\frac{117}{128}\right]\cup\left[\frac{119}{128},1\right]. \end{aligned}$$

Jatketaan tätä avoimien välien poistamista yhä uudestaan ja uudestaan äärettömän monta kertaa ja aina löydetään uusi taso SVC_n, joka saadaan poistamalla edellisen tason sisältämien $2^{(n-1)}$ välien keskiosasta avoin väli, jonka pituus on $\frac{1}{4^n}$. Näin ollen SVC(4)-joukoksi saadaan

$$SVC(4) = SVC_1\cap SVC_2\cap SVC_3\cap\cdots\cap SVC_n\cap\cdots.$$

Joukon $SVC(4)$ muodostumista on konstruoitu Kuvassa 5.1. Seuraavaksi esitetään ja todistetaan joitakin ominaisuuksia SVC(4)-joukolle.

Kuva 5.1. SVC(4)-joukon konstruointia.

Lause 5.2.1. *SVC(4)-joukko on ei-missään tiheä.*

Todistus. Huomautuksen 4.2.3 nojalla riittää osoittaa, että SVC(4)-joukko ei sisällä yhtään aitoa väliä.
Antiteesi: SVC(4)-joukko sisältää välin.
Tällöin joillekin $0 \leq c < d \leq 1$ on olemassa väli $(c, d) \subset SVC(4)$. Valitaan nyt n siten, että

$$\frac{1}{4^n} < d - c.$$

Tällöin $(c, d) \not\subset SVC_n$, sillä kyseinen väli ei enää mahdu SVC_n-tason sisältämiin osaväleihin, jolloin se ei sisälly SVC(4)-joukkoon. Näin ollen todistuksessa on päädytty ristiriitaan. Siten antiteesi on väärä ja SVC(4)-joukko on aina ei-missään tiheä joukko. □

Lause 5.2.2. *SVC(4)-joukko ei ole nollamittainen.*

Todistus. Tutkittava SVC(4)-joukko on muodostettu väleinä, jotka poistetaan konstruoinnissa, joten tällöin kyseisen joukon Lebesguen mitta voidaan laskea poistettujen välien pituuksien avulla. Ideana on siis laskea välin $[0, 1]$ pituudesta poistettujen välien pituuksien summa, jonka arvoksi saadaan geometrisen sarjan ja sitä vastaavan summan avulla

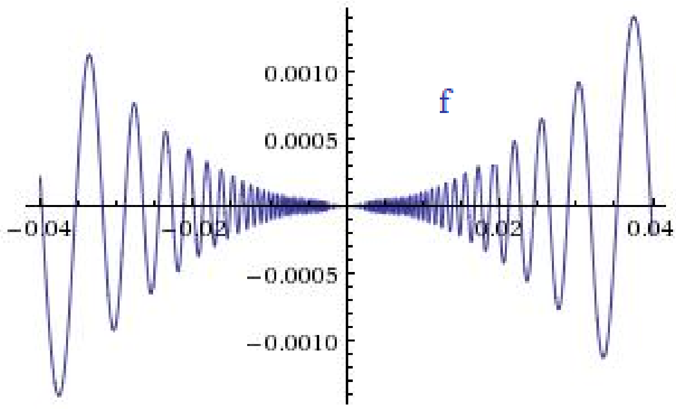
$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} - \frac{2^2}{4^3} - \cdots - \frac{2^n}{4^n} - \cdots &= 1 - \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\Big) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Koska Lebesguen mitta ei ole nolla, ei SVC(4)-joukko ole nollamittainen. □

Nyt kun SVC(4)-joukko ja sen tärkeimmät ominaisuudet ovat selvillä, voidaan aloittaa Volterran funktion varsinainen konstruointi. Tarkastellaan ensin funktiota

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

joka on tuttu jo Esimerkistä 2.3.2. Sen graafi on esitetty Kuvassa 5.2. Funktion g



KUVA 5.2. Funktion f graafi.

derivaattafunktio on

$$g'(x) = \begin{cases} -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Derivaattafunktion g' havaittiin olevan epäjatkuva pisteessä $x = 0$ (Esimerkki 2.3.2). Tämän lisäksi kyseinen derivaattafunktio on rajoitettu jokaisella rajoitetulla välillä. Koska sen ainoa epäjatkuvuuspitse on nolla, on se Lebesguen ehdon (Lause 5.1.7) nojalla Riemann-integroituva. Derivaattafunktio ei siis ole ihan halutun kaltainen, sillä tavoitteena on löytää derivaattafunktio, joka on rajoitettu, mutta ei Riemann-integroituva. Volterran funktion konstruktioinnissa onkin ideana kopioida funktiota g ja asettaa se nollasta eroavaksi jokaiseen niihin poistettuun osaväliin, jotka syntyivät, kun muodostettiin SVC(4)-joukkoa. Volterran funktion käyttäytyminen poistettujen välien päätepisteissä on samanlaista kuin funktion g käyttäytyminen pisteessä $x = 0$. Näin ollen Volterran funktion derivaattafunktiolle saadaan äärettömän monta epäjatkuvuuspistettä.

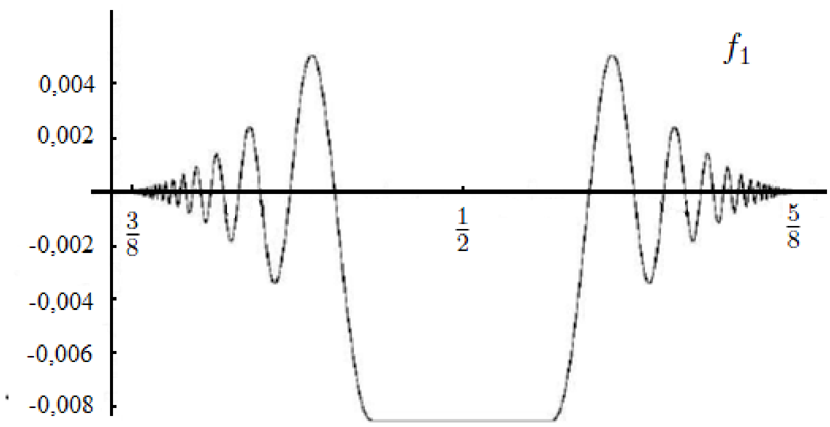
Volterran funktion tarkastelun lähtökohtana on väli $[0, 1]$, koska siinä hyödynnetään SVC(4)-joukkoa, joka sisältyy kyseiseen väliin. Yritetään löytää ensin väliltä $[0, \frac{1}{4}]$ suurin arvo, jolla funktion g derivaattafunktio g' saa arvon nolla. Olkoon tämä piste a_1, jolloin $g'(a_1) = 0$. Pidetään funktion arvoa sitten vakiona välillä $[a_1, \frac{1}{8}]$. Pisteen $x = \frac{1}{8}$ oikealle puolelle, eli välille $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$, tehdään edellä olevasta peilaus. Siirretään edellä tehdyt välin $[0, \frac{1}{4}]$ määrittelyt välille $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$, koska se on SVC(4)-joukon ensimmäinen taso. Näiden tietojen perusteella voidaan muotoilla funkito f_1, jos lisäksi asetetaan, että kyseinen funktio saa arvon nolla välin $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ ulkopuolella.

Näin ollen määritellään funktio $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < \frac{3}{8} \\ g(x - \frac{3}{8}), & \text{kun } \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{3}{8} + a_1 \\ g(a_1), & \text{kun } \frac{3}{8} + a_1 \leq x \leq \frac{5}{8} - a_1. \\ g(\frac{5}{8} - x), & \text{kun } \frac{5}{8} - a_1 \leq x \leq \frac{5}{8} \\ 0, & \text{kun } x > \frac{5}{8} \end{cases}$$

Funktio f_1 on siis nollasta eroava vain välillä $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$. Sen graafi on esitetty Kuvassa 5.3. Kyseinen funktio f_1 on derivoituva koko välillä $[0,1]$, sillä Esimerkissä 2.3.2 on osoitettu, että kohdan (5.1) funktio g on derivoituva. Derivaattafunktion f_1' heilahtelu pisteissä $x_0 = \frac{3}{8}$ ja $x = \frac{5}{8}$ on Määritelmän 4.1.4 mukaan

$$\omega_{f_1'}(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega_{f_1'}((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = \lim_{\delta \to 0} \omega_{f_1'}((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = 2.$$

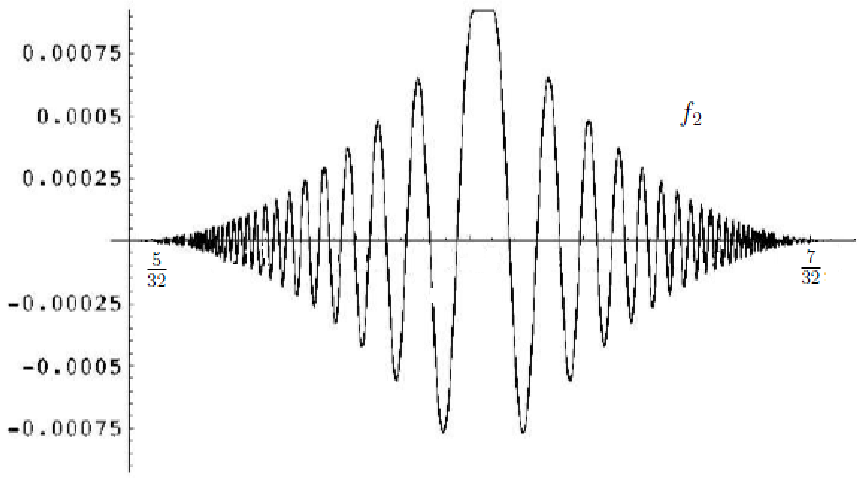


Kuva 5.3. Funktion f_1 graafi.

Määritellään samalla idealla uusi funktio f_2. Etsitään ensin väliltä $[0, \frac{1}{16}]$ suurin arvo a_2, jolla funktion g derivaattafunktio g' saa arvon nolla, eli $g'(a_2) = 0$. Pidetään funktion arvoa sitten vakiona välillä $[a_2, \frac{1}{32}]$. Pisteen $x = \frac{1}{32}$ oikealle puolelle, eli välille $\frac{1}{32} < x < \frac{1}{16}$, tehdään edellä olevasta peilaus. Siirretään edellä tehdyt välin $[0, \frac{1}{16}]$ määrittelyt väleille $[\frac{5}{32}, \frac{7}{32}]$ ja $[\frac{25}{32}, \frac{27}{32}]$. Tämän lisäksi määritellään vielä, että uusi funktio saa arvon nolla välien $[\frac{5}{32}, \frac{7}{32}]$ ja $[\frac{25}{32}, \frac{27}{32}]$ ulkopuolella. Määritellään nyt näiden perusteella funktio $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < \frac{5}{32} \\ g(x - \frac{5}{32}), & \text{kun } \frac{5}{32} \leq x \leq \frac{5}{32} + a_2 \\ g(a_2), & \text{kun } \frac{5}{32} + a_2 \leq x \leq \frac{7}{32} - a_2. \\ g(\frac{7}{32} - x), & \text{kun } \frac{7}{32} - a_2 \leq x \leq \frac{7}{32} \\ 0, & \text{kun } \frac{7}{32} < x > \frac{25}{32} \\ g(x - \frac{25}{32}), & \text{kun } \frac{25}{32} \leq x \leq \frac{25}{32} + a_2 \\ g(a_2), & \text{kun } \frac{25}{32} + a_2 \leq x \leq \frac{27}{32} - a_2. \\ g(\frac{27}{32} - x), & \text{kun } \frac{27}{32} - a_2 \leq x \leq \frac{27}{32} \\ 0, & \text{kun } x > \frac{27}{32} \end{cases}$$

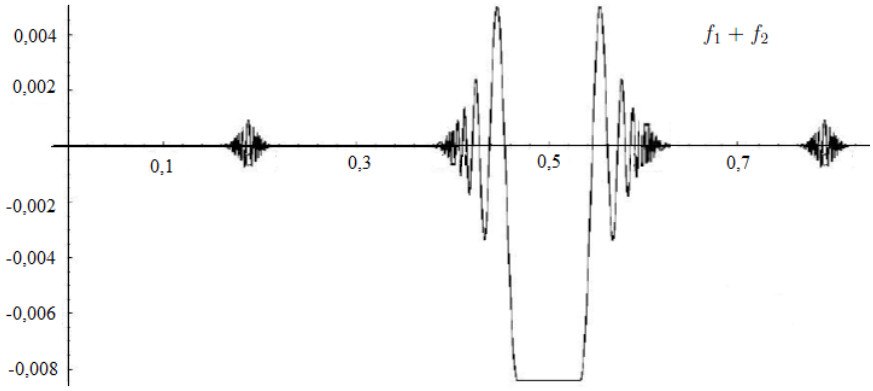
Funktio f_2 on siis nollasta eroava vain väleillä $[\frac{5}{32}, \frac{7}{32}]$ ja $[\frac{25}{32}, \frac{27}{32}]$. Funktion f_2 graafi on esitetty Kuvassa 5.4.



KUVA 5.4. Funktion f_2 graafi väliltä $[\frac{5}{32}, \frac{7}{32}]$.

Edellä konstruoitujen funktioiden f_1 ja f_2 summana saadaan funktion f_1+f_2, jonka derivaattafunktion heilahtelu pisteissä $x_0 = \frac{5}{32}$, $x_0 = \frac{7}{32}$, $x_0 = \frac{3}{8}$, $x = \frac{5}{8}$, $x_0 = \frac{25}{32}$ ja $x_0 = \frac{27}{32}$ on myös 2. Summafunktion $f_1 + f_2$ graafi on esitetty Kuvassa 5.5.

Jatketaan samalla tavalla, jolloin kaikilla n löytyy aina piste a_n, joka on suurin luku, jossa derivaattafunktio g' saa arvon nolla. Luvun a_n suuruus on maksimissaan kuitenkin $\frac{1}{2^{2n+1}}$. Näin ollen voidaan aina konstruoida uusi funktio f_n, joka on nollasta eroava vain SVC(4)-joukon 4^{-n} pituisilla avoimilla väleillä. Jokaisessa näissä väleissä on kaksi funktion g peilikuvaa väliltä $[0, a_n]$, jotka yhdistetään vakiofunktiolla, joka saa arvon $g(a_n)$. Näin ollen voidaan nyt muotoilla Volterran funktion lopullinen muoto.



KUVA 5.5. Funktion $f_1 + f_2$ graafi.

MÄÄRITELMÄ 5.2.3. Volterran funktio V on muotoa

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

missä funktiot f_n ovat edellä esitetyn laisia.

LAUSE 5.2.4. *Volterran funktion derivaattafunktio*

$$V'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

on olemassa ja rajoitettu.

TODISTUS. Jos piste x ei kuulu SVC(4)-joukkoon, on pisteellä x ympäristö, jossa vain yksi funktioista f_n on nollasta eroava. Olkoon se f_1. Tällöin Volterran funktiolle saadaan

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x).$$

Näin ollen kaikilla $x \notin SVC(4)$ pätee, että

$$V'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x).$$

Jos taas $x \in SVC(4)$, Volterran funktio $V(x) = 0$, sillä jokainen funktio f_n on määritelty siten, että se on nollasta eroava vain joukossa $[0,1] \backslash SVC(4)$. Tarkastellaan seuraavaksi erotusosamäärää Volterran funktiolle V pisteessä $x_0 = y$, eli lauseketta

$$\frac{V(x) - V(y)}{x - y}.$$

Volterran funktion määritelmän (Määritelmä 5.2.3) nojalla tiedetään, että jos $y \in SVC(4)$, niin silloin $V(x) = V(y) = 0$, joten

$$|V(x) - V(y)| \leq (y - x)^2.$$

Jos taas $y \notin SVC(4)$, niin $V(y) = f_n(y)$ jollekin n, joten

$$|V(x) - V(y)| \leq |f_n(y)| \leq (y-x)^2$$

funktion g ominaisuuksien perusteella. Näin ollen erotusosamäärälle pätee

$$\Big|\frac{V(x) - V(y)}{x-y}\Big| = \frac{|V(x) - V(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|y-x|^2}{|x-y|} = |x-y|.$$

Näin ollen

$$\lim_{y \to x}\Big|\frac{V(x) - V(y)}{x-y}\Big| \leq \lim_{y \to x}|x-y| = 0,$$

josta edelleen saadaan

$$\lim_{y \to x}\frac{V(x) - V(y)}{x-y} = 0.$$

Derivaatan määritelmän (Määritelmä 1.2.4) perusteella

$$\lim_{y \to x}\frac{V(x) - V(y)}{x-y} = 0.$$

Tämä on yhtä pitävää arvon $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ kanssa millä tahansa $x \in SVC(4)$. □

Lause 5.2.5. *Volterran funktion derivaattafunktio*

$$V'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

ei ole Riemann-integroituva missään määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Todistus. Lebesguen ehdon (Lause 5.1.7) nojalla tiedetään, että rajoitettu funktio on Riemann-integroituva, jos ja vain jos sen epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen. Sen mukaan tulee osoittaa, että Volterran funktion derivaattafunktio V' on epäjatkuva kaikissa joukon SVC(4) pisteissä ja että SVC(4)-joukko ei ole nollamittainen.

Osoitetaan ensin, että Volterran funktion derivaattafunktion V' on epäjatkuva kaikissa joukon SVC(4) pisteissä. Sille pätee, että V' heilahtelu minkä tahansa poistetun välin päätepisteessä on kaksi. Koska kaikki joukon SVC(4) pisteet ovat päätepisteiden joukon kasautumispisteitä, sisältää jokaisen tällaisen pisteen ympäristö pisteen, jossa derivaattafunktion V' heilahtelu saa arvon 2. Tästä seuraa, että Volterran funktion derivaattafunktion V' heilahtelu on $\omega_{V'}(x) = 2$ kaikissa joukon SVC(4) pisteissä. Näin ollen Lauseen 4.1.2 nojalla derivaattafunktio V' ei ole jatkuva missään joukon SVC(4) pisteessä.

Lauseessa 5.2.2 on jo osoitettu, ettei SVC(4)-joukko ole nollamittainen. Näin ollen Volterran funktion derivaattafunktio V' ei ole Riemann-integroituva määrittelyjoukossaan. □

5.3. Pompeiun funktio

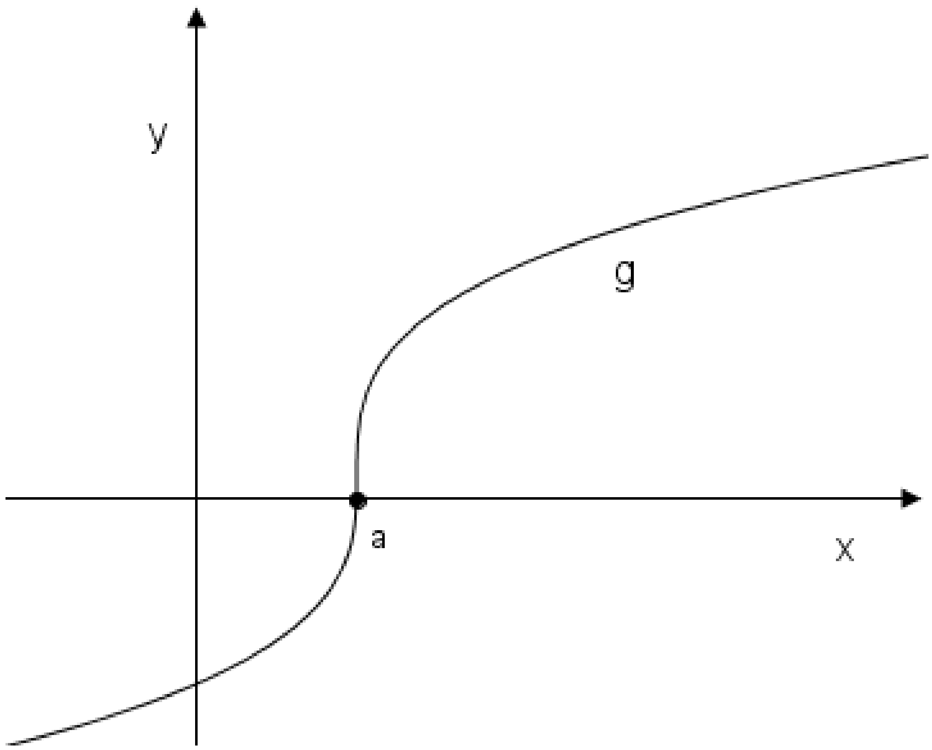
Dimitrie Pompeiu (1873-1954) on toinen 1900-luvun matemaatikko, joka on Volterran tavoin järisytti vanhoja matematiikan teorioita. Hän pystyi osoittamaan, että on olemassa derivoituva funktio h, jonka derivaattafunktio h' on epäjatkuva tiheässä joukossa ja että derivaattafunktio saa arvon nolla toisessa tiheässä joukossa. Tämä merkitsee samaa, kuin Volterran havainto derivoituvasta funktiosta, jonka derivaattafunktio ei ole Riemann-integroituva. Esitellään seuraavaksi Pompeiun funktiota, joka on peräisin vuodelta 1906.

Aloitetaan Pompeiun funktion tarkastelu apufunktiosta g, jolle

$$g(x) = \sqrt[3]{x-a}.$$

Funktion g graafi on esitetty Kuvassa 5.6. Kyseisellä funktiolla g on pisteessä $x = a$ ääretön derivaatta, sillä sen tangentti on y-akselin suuntainen kyseisessä pisteessä. Kaikkialla muualla, kun $x \neq a$, funktion derivaatta on äärellinen ja se on

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}.$$



KUVA 5.6. Apufunktion g graafi.

Pompeiun funktion konsturuoinnissa on sama idea kuin Volterran funktiossa. Tässä siis kopioidaan apufunktiota g useita kertoja peräkkäin, jolloin niiden summana saadaan funktio, jolla on äärettömän monta pistettä, joissa sen derivaatta on ääretön.

Olkoon $q_1, q_2, q_3, \cdots$ luettelo joukon $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ luvuista. Olkoon funktio

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x - q_k}}{10^k},$$

missä termi 10^k skaalaa funktion järkeväksi. Tällöin Pompeiun funktio h on funktion f käänteisfunktio, eli

$$h(x) = f^{-1}(x).$$

Pompeiun funktiolle voidaan osoittaa, että se on derivoituva ja sen derivaattafunktio h' on rajoitettu. Sen lisäksi derivaattafunktiolle h' pätee, että se saa arvon nolla jossain tiheässä joukossa, se on positiivinen sekä epäjatkuva jossain toisessa tiheässä joukossa ja ettei se ole Riemann-integroituva. Näiden matemaattinen todistaminen sivuutetaan tässä (ks. [**13**], s. 397-399). Pompeiun funktio h on myös esimerkki sellaisesta derivoituvasta funktiosta, jonka derivaattafunktio h' on epäjatkuva määrittelyjoukkonsa tiheässä osajoukossa. Tällaisia funktioita käsiteltiin jo aiemmin luvussa 2.3.

LUKU 6

Katsaus differentiaalilaskennan historiaan

Differentiaalilaskennan kaukaisimmat juuret liitetään usein fyysikoiden ja tähtitieteilijöiden tutkimuksiin taivaankappaleiden liikeradoista ja niiden nopeuksista. Näitä tutkimuksia tehtiin jo antiikissa ennen ajanlaskumme alkua Platonin ja Aristoteleen sekä Arkhimedeen aikana, jolloin työvälineenä käytettiin geometriaa. Infinitesimaalisilla menetelmillä on ollut merkittävä rooli differentiaalilaskennan syntymiseen. [**1, 2, 9, 10**] Ensimmäisenä infinitesimaalia käytti antiikin ajan suuri matemaatikko Arkhimedes (287 eaa.– 212 eaa.) Ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmässään, kun hän määritti sen avulla kappaleiden tilavuuksia ja pinta-aloja [**1**, s. 21]. Infinitesimaalisten menetelmien kehitykseen ovat vaikuttaneet omalta osaltaan merkittävästi myös Stevin, Kepler, Galilei sekä Fermat [**10**, s. 43].

1600 - luku nähdään yhdeksi matematiikan historian käännekohdaksi, sillä tuolloin ajatellaan syntyneen uuden matematiikan yksi merkittävimpiä aloja, analyysi. Tuolloin siis differentiaalilaskennan, jota nimitetään myös infinitesimaalilaskennaksi, ajatellaan saaneen alkunsa. 1600 - luvun puoliväliin mennessä useimmat differentiaalilaskennan perusideat olivatkin jo olemassa. Tähän kehitykseen vaikuttivat merkittävästi työllään suurmiehet Newton sekä Leibniz, joista molemmat tutkivat ja kehittivät teorioitaan toisistaan riippumatta. [**10**, s. 43, 52] Nykypäivänä tunnetun muotonsa analyysi sai kuitenkin vasta 1800-luvulla Cauchyn ja Weierstrassin töiden seurauksena [**10**, s. 72]. Differentiaalilaskentaa harjoitettiin siis pitkään ennen sen perustana olevien käsitteide, kuten reaaliluvut, funktio, raja-arvo ja funktion derivaatta, täsmällisiä määritelmiä. [**10**].

6.1. Stevin, Kepler ja Galilei harjoittamassa infinitesimaalisia menetelmiä

Arkhimedeen jälkeen infinitesimaalisia menetelmiä käytti ja kehitti 1500 - luvulla Simon Stevin (1548 - 1620). Teoksessaan *De Beghinselen der Weeghconst* Stevin perusteli käsitystään todistamalla kolmion painopisteen sijaitsevan sen mediaanilla. Hänen ajatuksensa perustuu ideaan, jossa kolmion sisään piirretään pieniä suunnikkaita siten, että niiden pitemmät sivuparit ovat kolmion sivujen suuntaisia. Tällöin kyseisten sivuparien painopiste oli suunnikkaiden keskikohdassa, jolloin erään Arkhimedeen periaatteen mukaan kolmio tasapainottuu pitkin jokaista mediaaniaan. [**1, 10**]

Tähtitieteestä kiinnostunut suurmies Johannes Kepler (1571–1630) hyödynsi myös infinitesimaalisia menetelmiä Stevinin tavoin soveltaen niitä tähtitieteisiin. Keplerin vuonna 1609 ilmestyneessä teoksessa *Astronomia Nova* esiteltiin hänen muotoilemansa kaksi tähtitieteen lakiaan:

i.) *"Planeetat kiertävät Aurinkoa pitkin ellipsiratoja, joiden toisessa polttopisteessä Aurinko on ja"*
ii.) *"Auringosta planeettaan piirretty radan sädevektori pyyhkäisee yhtä suurina aikaväleinä yhtä suuret pinnat."*

Pohtiessaan näihin pintoihin liittyviä ongelmia, Kepler oletti pintojen muodostuvan äärettömän monesta pienestä kolmiosta, joiden yksi kärki on Auringossa ja kaksi muuta kärkeä hyvin lähellä toisiaan planeetan radalla. [**1**, s. 457-460] Tätä ajatusta hän käyttikin tehdessään päättelyjä pinta-alojen ja tilavuuksien infinitesimaalisista laskumenetelmistä. Hän laski muun muassa ellipsin ja ympyrän pinta-aloja täyttämällä kuviot pienillä kolmioilla, joiden kantojen pituudet kutistuvat äärettömän pieniksi. [**10**, s. 43]

Fysiikasta ja tähtitieteistä kiinnostunut Galileo Galilei (1564–1642) puolestaan teki hyödyllisiä huomioita "äärettömän suurista" ja "äärettömän pienistä" suureista, vaikkei hän ollutkaan matemaatikko. Sen lisäksi hän oli kiinnostunut myös eri kertalukua olevista äärettömän pienistä suureista. [**10**, s.43] Galileilla oli myös oppilaita: Bonaventura Cavalieri (1598–1647) ja Evangelista Torricelli (1608–1647), jotka tutkivat ja kehittivät infinitesimaalilaskentaa. Vuoden 1647 jälkeen matematiikan kehityksen aika Italiassa hiipui ja siirtyi Ranskaan. [**1, 2, 10**]

6.2. Fermat'n derivointi

Ranskalainen matemaatikko ja lakimies Pierre de Fermat (1601–1665) on vaikuttanut merkittävästi työllään differentiaalilaskennan kehittymiseen. Hänen töiden merkittävin saavutuksista on Maksimien ja minimien löytämisen menetelmä, jonka hän kehitti 1630-luvulla, vaikka sitä ei julkaistukaan Fermat'n elinaikana. Tämä Fermat'n maksimiperiaate oli ensimmäisiä analyyttisiä tangentinmäärityksiä. [**10**, s. 50] Menetelmää kehittäessään Fermat oli tutkinut nykypäivän merkinnöillä muotoa $y = x^n$ olevia uria ja kehittänyt siitä, miten käyrille $y = f(x)$ löydetään ne pisteet, joissa funktio saavuttaa maksimi- ja minimiarvon. Ferman ideana oli verrata funktion arvoa $f(x)$ sen lähellä olevaan arvoon $f(x + E)$. Yleisesti nämä arvot poikkeavat toisistaan merkittävästi, mutta sileän käyrän huippukohdissa arvojen muutokset ovat olemattomia. Jotta maksimi- ja minimipisteet voitaisiin löytää, merkitsi Fermat arvot $f(x)$ ja

$f(x+E)$yhtä suuriksi. Hän kuitenkin tiedosti, että ne eivät ole täsmälleen yhtä suuria, sillä mitä pienemmäksi tarkasteltavien pisteiden etäisyys E tulee, sitä lähemmäksi todellista yhtä suuruutta tulevat myös funktioiden arvot $f(x)$ ja $f(x+E)$. Sen vuoksi Fermat päätti ensin jakaa lausekkeen pisteiden välimatkalla E ja sitten merkitsi E nollaksi. Tämä Fermat'n menetelmä vastaa olennaisilta osin nykypäivän derivointia, joka näyttää Fermat'n merkinnöillä seuraavalta

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x) - f(x+E)}{E},$$

vaikka Fermat ei luultavammin tuntenut vielä raja-arvon käsitettä (vrt. Fermat'n ajatusta derivaatan määritelmään, Määritelmä 1.2.4). Menetelmässään Fermat käytti siis nykypäivän merkintöjen h tai Δx sijasta merkintää E. [**2**, s. 471, 489, 492–493]

6.3. Newton ja kaksi hedelmällistä vuotta

Englantilaista fyysikkoa, matemaatikkoa ja tähtitieteilijää Isaac Newtonia (1642 - 1727) ei pidetä turhaan differentiaali- ja integraalilaskennan toisena luojana [**10**, s. 52]. Hänen aikalaisensa Leibniz kuvaakin Newtonin saavutuksia matematiikan saralla kunnioittavasti:

> *"Jos matematiikkaa tarkastellaan aikojen alusta Newtoniin, havaitaan, että hän on tehnyt siitä runsaasti yli puolet"*

[**2**, s. 551]. Newton opiskeli nuoruudessaan Cambridgen yliopistossa matematiikkaa opettajansa Isac Barrown johdolla. Vuosien 1665–1666 aikana Newton teki uransa suurimmat keksintönsä opiskelijana kotoa käsin, sillä yliopistot olivat tuolloin kiinni kulkutautien vuoksi. [**10**, s. 52] Hän loi differentiaali- ja integraalilaskennan, yleisen gravitaatio- eli painovoimalain sekä värien luonteen [**2**, s. 551]. Newton ei kuitenkaan julkaissut elinaikanaan puhtaasti matemaattisia töitä. Hänen ensimmäinen differentiaali- ja integraalilaskentaa koskeva käsikirjoitus on vuodelta 1666. [**10**, s.52] Vuonna 1669 hän kirjoitti teoksensa *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* [**10**, s. 52], jossa hän esittää systemaattisen kuvauksen differentiaali- ja integraalilaskennasta [**2**, s. 557]. Newtonin ensimmäinen painettu teos differentiaali- ja integraalilaskennasta on *De quadratura curvarum*, joka julkaistiin *Optisks*-teoksen liitteenä. Hänen tärkein matemaattinen kirjoituksensa oli vuonna 1671 kirjoitettu *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, mutta joka julkaistiin vasta 1736. [**10**, s. 53]

Newtonin differentiaalilaskennan perustana oli fysikaalinen analogia [**10**, s. 52], mikä ei ole ihme, sillä hänelle differentiaalilaskenta oli vain työväline mekaniikan käsittelyyn [**9**, s.67-71]. Sen mukaan käyrä syntyy kahdella akselilla liikkuvien pisteiden liikkeiden yhdistämisestä. Jos x ja y ovat fluentteja (nykykielellä ajan funktioita), saavat ne lyhyenä aikana o lisäyksen po ja qo. Tämän perusteella käyrän $f(x, y) = 0$ tangentin kulmakerroin on $\frac{p}{q}$, joka saadaan fluenttien x ja y hetkellisten muutosten suhteena. Tämän määrittämiseen Newton käytti apuna binomisarjoja. Fluenttien aikaderivaattoja Newton kutsui fluksioiksi ja hän käytti niille merkintää $\dot{x}$ ja $\dot{y}$, mikä on käytössä mekaniikassa vielä tänäkin päivänä. [**10**, s. 52-53]

Ratkaiseva askel differentiaali- ja integraalilaskennan kehitykselle oli Newtonin ymmärrys derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyydestä (ks. luku 6.2). Tämän havainnon hän oivalsi tarkastellessaan käyrän $y = f(x)$ alle jäävää pinta-alaa. Jos tämä ala on esimerkiksi

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{n}{m+n}}$$

ja fluentille x annetaan lisäys o, saa z lisäyksen oy ja yhtälöstä

$$z + yo = \frac{n}{m+n} a (x+o)^{\frac{n}{m+n}}$$

saadaan binomisarjaa hyödyntämällä $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Potenssifunktiota monimutkaisempien funktioiden analyysi palautuu taas potensseihin binomisarjan kautta. [**10**, s. 53]

Analyysin perusteiden kannalta keskeinen käsite raja-arvo ei ollut Newtonille aivan selvä (vrt. Määritelmä 1.2.1). Hänen mukaansa "pienet lisäykset" ovat tarpeen mukaan tasan nollia, jolloin ne voidaan unohtaa, tai pieniä nollasta eroavia lukuja, jolloin ne voidaan supistaa. Kun nykymatematiikassa derivaatan määritelmää tarkastellaan raja-arvona

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)},$$

Newton puhui häviävien suureiden viimeisestä suhteesta tai syntyvien suureiden ensimmäisestä suhteesta. Tämän teorian looginen perusta ei ollut täysin varmaa, mutta siitä huolimatta Newton kehitti yhtenäisen differentiaali- ja integraalilaskennan, kalkyylin, joka sisältää tutun ketjusäännön sekä integroinnin sijoitusmenetelmällä. [**10**, s. 53]

6.4. Leibniz – merkintöjen isä

Saksalainen filosofi ja yleisnero Gottfried Wilhelm Leibniziä (1646 - 1716) voidaan pitää toisena keskeisempänä differentiaali- ja integraalilaskennan kehittäjänä. Hän oli poikkeuksellisen lahjakas jo nuorena, sillä hän teki ensimmäisen väitöskirjansa filosofian alalta jo 20-vuotiaana, mutta Leipzigin yliopiston kateelliset professorit hylkäsivät sen hänen nuoren ikänsä vuoksi. Hän toimi matematiikan lisäksi muun muassa ainakin filosofian juridiikan, politiikan, teologian, historian, geologian sekä fysiikan saralla, vaikka hoiti leipätyönään diplomaattisia ja hallinnollisia tehtäviä. [**10**, s. 54-55]

Leibniz tutki differentiaalilaskentaa päättymättömien sarjojen kautta ja päätyi lopulta Newtonin tavoin oikeisiin differentiointisääntöihin. Differentiaali- ja integraalilaskennan peruslauseen Leibniz onnistui muotoilemaan, kun hän havaitsi, että käyrään, jonka ordinaatat, tasokoordinaatiston y-koordinaatit, ovat z, liittyvä pinta-ala voidaan selvittää. Tämä onnistui, jos löydetään käyrä, jonka ordinaatat y toteuttavat ehdon

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a},$$

missä a on dimensiotekijä. Tällöin pätee, että $zdx = ady$, jolloin kysytty pinta-ala on

$$\int zdx = a \int dy = ay.$$

[**10**, s. 56]

Leibniz tiedosti karakteristiikan eli merkintöjen, jotka kuvaavat tutkittua tilannetta hyvin, tärkeyden analyysissä [**2**, s. 572]. Hän kehitti merkintöjä innokkaasti ja vuonna 1684 julkaisikin differentiaalilaskentaansa koskevia kirjoituksiaan *Acta Eruditorum Lipsienium* -nimisessä aikakauskirjassa [**10**, s. 56]. Hän ymmärsi, että termit Δx ja Δy tulevat rajattoman/äärettömän pieniksi, joten hän päätti merkitä niitä nykypäivää vastaten infinitesimaalisen pienen eli differentiaalimerkinnän mukaan dx ja dy [**6**, s. 81]. Niistä Leibniz muotoili derivaattaa kuvaavan merkinnän $\frac{dy}{dx}$ [**9**, s. 72-74]. Vaikka merkintöjä dx ja dy ei täsmällisesti määritelläkään, niillä operoiminen on intuitiivisesti selvää ja johtaa oikeisiin tuloksiin [**10**, s. 56]. Leibniz on vaikuttanut myös siihen, miksi muun muassa kertolaskun kertomerkkiä merkitään pisteellä, jakolaskun jakomerkkiä kaksoispisteellä, yhdenmuotoisuutta merkillä $\sim$ sekä yhtenevyyttä merkillä $\cong$ [**2**, s. 572].

Leibnizin käyttämät nykypäivää vastaavat merkinnät differentiaali- ja integraalilaskennassa oli yksi syy, miksi infinitesimaalilaskennan kehitys lähti Leibnizin osoittamaan suuntaan. Newtonia arvostettiin vain Englannissa, jossa kehitys eteni maltillisemmin mannermaahan verrattuna. Toinen syy matematiikan taantumiseen Englannissa oli prioriteettikiista, joka alkoi vuonna 1699. Sen mukaan Leibniz olisi kopioinut Newtonin ideat. Siksi englantilaiset kieltäytyivät isänmaallisien syihin vedoten hyväksymästä Leibnizin merkintöjä ja analyysiä. On voitu todistaa, että Newton ja Leibniz kävivät lyhyen kirjeenvaihdon vuosina 1676–1677 differentiaalilaskennan perusteista, jotka molemmilla oli tuossa vaiheessa jo hallussa. Sen vuoksi oletetaan, ettei kumpikaan kopioinut tuotoksiaan toiselta. [**10**, s. 57]

6.5. Analyysi täsmentyy kohti nykymuotoaan

Analyysin täsmentymiseen vaikutti merkittävästi työllään ranskalainen matematiikan tähti, raja-arvon isäksi nimetty Augustin Louis Cauchy (1789–1857), jonka kirjoittamat teokset *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des lecons* *sur le calcul infinitésimal* (1823) ja *Leconsd sur le calcul differentiel* (1829) antoivat differentiaali- ja integraalilaskennan alkeille sen nykyiset piirteet [**2**, s. 715, 719]. Cauchyn teos *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821) perustuu osittain nykypäivänä tunnettuun raja-arvon määritelmään, vaikka δ ja ε eivät siinä vielä eksplisiittisesti esiinny, sekä sarjojen suppenemisen tutkimiseen. [**10**, s. 72] Sanallisesti Cauchy sai määriteltyä raja-arvon käsitteen, kun hän luopui geometriasta, infinitesimaaleista sekä nopeuksista:

> *"Kun muuttujalle annetut peräkkäiset arvot lähestyvät kiinteätä arvoa rajatta ja ne poikkeavat siitä viimein niin vähän kuin halutaan, niin tätä kiinteää arvoa sanotaan kaikkien muiden arvojen raja-arvoksi"*

(vrt. Määritelmä 1.2.1). Monille aikaisemmille matemaatikoille infinitesimaali oli ollut vain hyvin pieni kiinteä luku, mutta Cauhcy määritteli sen riippuvaiseksi muuttujaksi:

> *"Sanotaan, että muuttuja tulee äärettömän pieneksi, kun sen numeerinen arvo pienenee rajatta siten, että se suppenee kohti raja-arvoa nolla."*

[**2**, s. 719] Lopulta Cauchy määritteli funktion $y = f(x)$ derivaatan antamalla muuttujan x kasvaa pienellä määrällä $\Delta x = i$ ja muodosti suhteen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Tämän erotusosamäärän raja-arvon, kun i lähestyy nollaa, hän määritteli y:n derivaataksi $f^{'}(x)$ muuttujan x suhteen (vrt. Määritelmä 1.2.4). [**2**, s.720] Cauchy sai myös todistettua differentiaalilaskennan väliarvolauseen sekä sen yleisen muodon [**10**, s. 73].

1800-luvun loppupuolen analyysin johtava harjoittaja oli saksalainen matemaatikko Karl Weierstrass (1815–1897). Koska hän ei menestynyt juridiikan opinnoissa, hän hankki oppikoulunopettajan pätevyyden ja työskenteli matematiikan opettajana, kunnes vuonna 1854 matemaattinen maailma alkoi kiinnostaa häntä. Weierstrass päätti muun muassa Cauchyn aloittaman työn differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden lujittamisesta huomioimalla tasaisen suppenemisen merkityksen muun muassa eri rajaprosessien järjestyksen vaihdossa. Weierstrass huomioi myös raja-arvon määritelmässä tekijät δ ja ε, mihin Cauchy ei pystynyt, ja muotoili sen seuraavasti:

> *"Jos on mahdollista määrittää h:lle sellainen raja δ, että kaikille h:n arvoille, joiden itseisarvo on pienempi kuin δ, $f(x+h) - f(x)$*

on pienempi kuin mielivaltainen suure ε, joka voi olla miten pieni tahansa, niin argumentin äärettömän pieniä muutoksia vastaavat funktionarvojen äärettömän pienet muutokset."

[**10**, s. 76-77] Weierstrassin tavoitteena oli myös vapauttaa analyysi kaikesta intuitiivisesta ja saada se vankalle aritmeettiselle pohjalle, täysin irti geometriasta, sekä perustaa integraalilaskenta pelkästään luvun käsitteeseen. Weiersstrass tiesi, että tähän tarvitaan irrationaalilukujen määrittelemistä siten, ettei se riipu raja-arvon käsitteestä. [**10**, s. 76-77], [**2**, s. 787]

Differentiaalilaskennan täsmällisen määrittelyn kannalta merkittävän käsitteen reaaliluvun jakautumien rationaalisiin ja irrationaalisiin lukuihin on ollut tiedossa jo Pythagoraan aikana. Kuitenkin vasta vuonna 1844 ranskalainen Joseph Liouville (1809– 1882) pystyi osoittamaan, etteivät kaikki irrationaaliluvut olekaan $\sqrt{2}$ tavoin algebrallisia lukuja eli jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin P nollakohtia. Tällaisia lukuja kutsutaan transkendenttiluvuiksi. [**10**, s. 77]

Matemaattisen analyysin loogisten ongelmien syynä on ollut luvun käsitteen epämääräisyys. Irrationaaliluku voitiin määrittää rationaalilukujen jonon raja-arvoksi, mutta toisaalta raja-arvon määritelmä vaati raja-arvokandidaatin olemassaoloa ja oli siten määritelty. Cauchy ja Bolzano yrittivät määritellä Cauchyn kriteerissä jonon suppenemisen ainoastaan sen termien avulla. Sen lisäksi Bolzano oli pyrkinyt myös määrittelemään reaaliluvut rationaalilukujen avulla. Tämä onnistui kuitenkin vasta vuonna 1872, kun ranskalainen Charles Méray (1835–1911) sekä Weierstrass oppilaansa Eduard Heinen (1821–1881) ja tämän kollegan Georg Cantorin (1845–1918) kanssa määrittelivät sen toisistaan riippumatta. [**10**, s. 77-78] Näin analyysin matemaattinen perusta alkoi olla kunnossa.

1900-luvun matematiikkaa kuvaa hyvin poikkeuksien etsiminen, mikä on vastakohtana 1800-luvun täsmällisyyden korostamiselle. Nyt tavoitteena oli löytää "patologisia"funktioita, joiden epätavalliset ominaisuudet kumoavat aikaisemmin totena pidettyjen teorioiden sisällöt. [**2**, 860] Tutkielman luvussa 2.3 tarkastellut epäjatkuvat derivaatat sekä luvussa 5 esitellyt Volterran- ja Pompeiun funktiot ovat juuri tällaisia patologisia funktioita, jotka kumoavat laajasti hyväksytyt teoriat derivaattafunktion jatkuvuudesta ja integroituvuudesta. Näin historiakastsaus on saavuttanut nykyisen analyysin, jota tutkielmassa on tarkasteltu.

Kirjallisuutta

[1] Boyer Carl B.: *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia. Osa I.* Suom. Kimmo Pietiläinen. WSOY:n graafiset laitokset, Juva, 1995.

[2] Boyer Carl B.: *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia. Osa II.* Suom. Kimmo Pietiläinen. WSOY:n graafiset laitokset, Juva, 1995.

[3] Bressoud David M.: *A Radiacal approach to Lebesgue's theory of integration.* Cambridge University Press, New York, 2008.

[4] Courant Richard ja Fritz John: *Introduction to Calculus and Analysis I.* Springer, Berlin, 1999.

[5] Denlinger Charles G.: *Elements of Real Analysis.* Jones and Bartlett Publishers, kaupunki, 2011.

[6] Hairer Ernst ja Wanner Gerhard: *Anylysis by Its History.* Springer, New York, 1996.

[7] Kilpeläinen Tero: *Analyysi I.* Luentomoniste, 2000-2002. [WWW]. [Viitattu 10.12.2012]. Saatavissa: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf.

[8] Kilpeläinen Tero: *Analyysi II.* Luentomoniste, 2001-2003. [WWW]. [Viitattu 10.12.2012]. Saatavissa: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf.

[9] Korhonen Hannu: *Matematiikan historian henkilöhahmoja.* Lahden Kirjapaino ja Sanomalehti Oy, Lahti, 1995.

[10] Lehtinen Matti: *Matematiikan historia.* [WWW].[Viitattu 30.1.2013]. Saatavissa: http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/.

[11] Strömberg Karl R.: *An Introduction to Classical Real Anylysis.* California, 1981.

[12] Thim Johan: *Continuous Nowhere Differentiable Functions.* Master's thesis, 2003. [WWW].[Viitattu 18.6.2013]. Saatavissa: epubl.luth.se/1402-1617/2003/320/LTU-EX-03320-SE.pdf.

[13] Thomson Brian S., Bruckner Judith B. ja Bruckner Andrew M.: *Elementary Real Analysis.* 2nd ed. ClassicalRealAnalysis.com, 2008.