Johdatus peliteoriaan

Kahden pelaajan nollasummapelien ratkaiseminen ja Nashin tasapainojen olemassaolo usean pelaajan yleisessä summapelissä

Henri Nousiainen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
kesä 2013

Tiivistelmä: Henri Nousiainen, *Johdatus peliteoriaan: kahden pelaajan nollasummapelien ratkaiseminen ja Nashin tasapainojen olemassaolo usean pelaajan yleisessä summapeleissä* (engl. *Introduction to game theory: solving two person zero-sum games and the existence of Nash equilibria in n-person general sum games*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 45 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2013.

Tämän tutkielman tarkoituksena on osoittaa, että jokaisella usean pelaajan yleisellä summapelillä on olemassa vähintään yksi Nashin tasapaino. Lisäksi osoitetaan, että kahden pelaajan nollasummapeleissä Nashin tasapainojen mukaiset pelaajien voittojen odotusarvojen suuruudet ovat yksikäsitteiset, ja näytetään kuinka kyseiset odotusarvot voidaan ratkaista lineaarisen optimoinnin avulla.

Tutkielmassa määritellään yleiset summapelit kolmikkoina, jotka muodostuvat äärellisestä määrästä pelaajia, joista jokaiseen on liitetty äärellinen joukko. Näiden joukkojen alkioita kutsutaan pelaajien puhtaiksi strategioiksi. Kolmikon viimeisen jäsenen muodostaa jokaiselle pelaajalle erikseen määritelty kuvaus edellä mainittujen strategioiden joukosta reaalilukujoukkoon. Kyseinen kuvaus, eli hyötyfunktio, mallintaa pelaajan menestystä pelissä. Nollasummapeliksi peli määritellään silloin, kun häviäjät maksavat voittajille tietyn ennalta määrätyn määrän rahaa.

Pelitapaa, jossa pelaajat valitsevat pelissä käytettävän strategian jollakin kiinnitetyllä todennäköisyydellä, sanotaan pelaajan sekastrategiaksi. Kaikkien sekastrategioiden muodostama joukko osoitetaan konveksiksi. Konveksisuutta hyväksikäyttäen todistetaan minimax-lause. Lauseen mukaan kahden pelaajan nollasummapeleissä pelaajien voitoilla on olemassa odotusarvoiset alarajat, jotka saavutetaan optimaalisiksi strategioiksi kutsuttujen sekastrategioiden avulla. Minimax-lauseen takaaman voiton alarajan sekä optimaalisten strategioiden selvittämiseksi käytetään simplex-algoritmia, jolla voidaan ratkaista lineaarisia optimointitehtäviä.

Yleisissä summapeleissä optimaalisten strategioiden yleistyksien muodostamia pelaajien strategiajoukkoja kutsutaan Nashin tasapainoiksi. Toisin kuin kahden pelaajan nollasummapeleissä, yleisissä summapeleissä Nashin tasapainojen mukaiset voittojen odotusarvojen arvot eivät aina ole yksikäsitteiset. Brouwerin kiintopistelauseen avulla näytetään, että jokaisessa yleisessä summapelissä on oltava vähintään yksi Nashin tasapaino.

Avainsanat: algoritmit, lineaarinen optimointi, nollasummapelit, peliteoria, yleiset summapelit

Sisältö

Johdanto

Tässä työssä tutustutaan kahden pelaajan nollasummapeleihin sekä monen pelaajan yleisiin summapeleihin. Nollasummapeleissä pelaajat kilpailevat toisiaan vastaan ja pelin lopuksi häviäjät maksavat voittajille tietyn ennalta määrätyn määrän rahaa tai muita hyödykkeitä. Nollasummapelit ovat yleisten summapelien erikoistapaus. Yleisissä summapeleissä ei aina ole kyseessä nollasummapelien kilpailullinen tilanne, vaan pelistä ja sen lopputilanteesta riippuen voi olla mahdollista esimerkiksi, että kaikki pelaajat jäävät joko voitolle tai tappiolle.

Tutkielmassa etsitään erityisesti keinoja pelata peliä siten, että pelaaja minimoi mahdollisen häviönsä pyrkien kuitenkin samalla maksimoimaan mahdollisen voittonsa. Kahden pelaajan nollasummapelien tapauksessa tällaisia pelitapoja kutsutaan optimaalisiksi strategioiksi. Yleisissä summapeleissä ehdot täyttävät strategiat muodostavat niin sanotun Nashin tasapainon. Sekä optimaalisten strategioiden että Nashin tasapainojen olemassaoloa koskevat tulokset ovat keskeisessä asemassa peliteoriassa. Niiden tärkeydestä kertoo esimerkiksi teoksessa [**4**] optimaalisten strategioiden olemassaolo –tuloksesta käytettävä nimitys ”the Fundamental Theorem of Matrix Games”, joka tunnetaan myös minimax-lauseena.

Pelaajien voitolle ja tappiolle rajat takaavan minimax-lauseen todisti ensimmäisenä John von Neumann vuonna 1928. Minimax-lause ja muita peliteorian tuloksia löytyy von Neumannin ja Oskar Morgensternin vuonna 1944 julkaistusta kirjasta *Theory of Games and Economic Behavior* [**24**], joka lukeutuu peliteorian tutkimuksen alkuaikojen merkittävimpiin tuotoksiin. Minimax-lause yleistyy usean pelaajan yleisille summapeleille, kuten John Nash osoitti artikkelissaan [**13**] vuonna 1950. Tämä yleistys tunnetaan Nashin lauseena.

Ennen von Neumannia peliteoreettisia ongelmia oli tarkastellut esimerkiksi Émile Borel, joka julkaisi vuosina 1921-1927 useita peliteoriaa käsitteleviä artikkeleita. Artikkeleista kolme [**1**], [**2**] ja [**3**] on käännetty englanniksi ja niissä on ratkaistu joitakin kahden pelaajan nollasummapelien erikoistapauksia, kuten esimerkiksi Kivi, paperi, sakset –peli. Borelin eräs peliteoreettinen aikaansaannos on pelien merkintätavan formalisointi.

Peliteoriaa on sovellettu laajasti eri tieteisiin ja tarkoituksiin. Borel käsitteli esimerkiksi korttipelejä, kun taas von Neumann sekä Morgenstern keskittyivät taloustieteen sovelluksiin. Taloustieteiden saralta on peliteoreetikoille, Nash mukaan lukien, myönnetty Nobelin palkintoja [**14**]. Evoluutiobiologian tutkimukseen on John Maynard Smith johtanut Nashin tasapainosta evolutiivisesti vakaan strategian käsitteen [**11**]. Toisaalta peliteoria soveltuu myös vuorovaikutusten ja päätösten [**25**] sekä sodankäynnin [**7**] tutkimiseen. Peliteorian mallit vaativat usein niin paljon oletuksia ja reaalimaailman tilanteiden yksinkertaistamista, että teorian mukaiset tulokset eivät täysin noudata empiirisissä tutkimuksissa havaittuja tuloksia. Joissain lähtökohtaisesti yksinkertaisissa pelitilanteissa, kuten jalkapallon rangaistuspotkuissa, on kuitenkin saatu myös peliteorian mallien mukaisia empiirisiä tuloksia [**16**].

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija keskeisiin peliteorian olemassaolotuloksiin ja toimia suomenkielisenä tukena peliteoriaan tutustuttaessa. Olemassaolotulosten osoittamisen lisäksi työssä keskitytään nollasummapelien ratkaisemiseen, eli pelaajien optimaalisten strategioiden etsimiseen. Tarkastelemalla pelien ratkaisemista lukija saa konkreettisen käsityksen peliteorian hyödyntämisestä erilaisissa sovelluksissa.

Tutkielman lähteinä on käytetty erityisesti Yuval Peresin luentomateriaalia [**17**], von Neumannin ja Morgensternin teosta [**24**] sekä Louis Brickmanin ja George Dantzigin kirjoja [**4**] ja [**6**]. Työhön perehtymisen kannalta vaadittavat esitiedot on pyritty pitämään mahdollisimman yksinkertaisina. Lukijan tulisi tuntea hieman matriisilaskentaa, joka mahdollistaa Borelin merkintöjen käytön. Lisäksi todennäköisyyslaskennan alkeet ovat avuksi. Tutkielman loppupuolen todistuksissa aputulokset saattavat yksinkertaisuudestaan huolimatta olla raskaita osoittaa tai ne voivat olla aivan toiselta matematiikan osa-alueelta. Tällaisiin tuloksiin on usein viitattu lähtein ja niihin tutustuminen jätetään lukijan oman mielenkiinnon varaan. Työssä on myös viitattu joihinkin kirjoittajan mielestä mielenkiintoisiin, tutkielman aihetta sivuaviin esimerkkeihin.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa määritellään tutkimuksen kohteeksi rajatut pelit. Luvun alussa määritellään yleisiä pelien ominaisuuksia ja luvun loppupuolella keskitytään nollasummapeleihin. Toisessa luvussa tarkastellaan kahden pelaajan nollasummapelin optimaalisia strategioita ja pelin arvoa, jotka ovat keskeisiä keinoja kuvata kyseisiä pelejä ja niiden suotuisuutta pelaajille. Luvun päätuloksena osoitetaan von Neumannin minimax-lause.

Kolmas ja neljäs luku keskittyvät kahden pelaajan nollasummapelien ratkaisemiseen eli optimaalisten strategioiden ja pelin arvon etsimiseen. Kolmannessa luvussa tarkastellaan keinoja, joilla ratkaisut voidaan löytää peliä kuvaavan voittomatriisin ominaisuuksien avulla tai voittomatriisia pelkistämällä. Neljännessä luvussa johdetaan keino löytää ratkaisu mille tahansa kahden pelaajan nollasummapelille. Tämä perustuu von Neumannin ajatukseen pelien ja lineaaristen optimointiongelmien eli lineaariohjelmien välisestä yhteydestä, jonka George Dantzig lopullisesti muotoili artikkelissaan [**5**].

Kahdessa viimeisessä luvussa tarkastellaan monen pelaajan yleisiä summapelejä, eli sellaisia pelejä, joilta saattaa puuttua nollasummapeliä määrittelevä ominaisuus. Jotta hyppäys tutkielman aiemman sisällön ja kahden viimeisen luvun osalta ei kävisi lukijalle liian raskaaksi, aloitetaan viidennen luvun käsittely kahden pelaajan yleisillä summapeleillä, joissa voidaan käyttää kahden pelaajan nollasummapeleistä tuttuja merkintöjä. Luvun lopussa käydään läpi samat asiat useamman pelaajan tapauksessa. Viimeisessä luvussa osoitetaan Nashin tasapainojen olemassaolo n-pelaajan pelissä.

LUKU 1

Pelejä määrittävät ominaisuudet

Peli muodostuu agenteista eli pelaajista, jotka tekevät valintoja tiettyjen vaihtoehtojen sallimasta joukosta. Pelaajien valintojen perusteella määräytyy pelin lopputulos, jota kuvataan pelaajien *hyötyfunktioiden* avulla.

Pelejä on monen tyyppisiä ja ne vaihtelevat esimerkiksi

- pelaajien lukumäärän
- käytettävien vaihtoehtojen määrän
- voitonmaksun ajankohdan
- pelaajien pelin kulusta riippuvan tiedon määrän
- pelaajien yhteistyön mahdollisuuden

mukaan.

Tämän luvun tarkoituksena on tutustuttaa lukija esimerkkien avulla niihin tietoihin, joita peleistä tarvitaan, jotta niiden matemaattinen tarkastelu olisi mahdollista. Luvun alussa määritellään keskeisiä peleihin liittyviä käsitteitä. Jälkimmäisessä osassa määritellään nollasummapelit, jotka ovat keskeisessä roolissa varsinkin tutkielman ensimmäisellä puoliskolla.

1.1. Pelit

Esimerkki 1.1 (Valitse käsi). Tässä pelissä on kaksi pelaajaa. Pelaaja 1 toimii valitsijana ja pelaaja 2 arvuuttajana. Pelin aikana arvuuttaja piilottaa joko yhden kolikon vasempaan käteensä tai kaksi kolikkoa oikeaan käteensä. Valitsija valitsee toisen arvuuttajan käsistä. Peli loppuu siten, että valitsija ansaitsee kaikki ne kolikot, jotka arvuuttajalla olivat kyseisessä kädessä. Näin ollen valitsija voittaa joko yhden kaksi tai ei yhtään kolikkoa. Vastaavasti arvuuttaja menettää sen määrän kolikoita, jotka valitsija ansaitsee.

Kummallakin pelaajalla on vaihtoehdot V eli "vasen käsi"ja O eli "oikea käsi", joita kutsutaan pelaajien *puhtaiksi strategioiksi.* Joukko $\{V, O\}$ on kummankin pelaajan puhtaiden strategioiden joukko. Pelaajan 1 voittamien kolikoiden määrää voidaan mallintaa kuvauksella

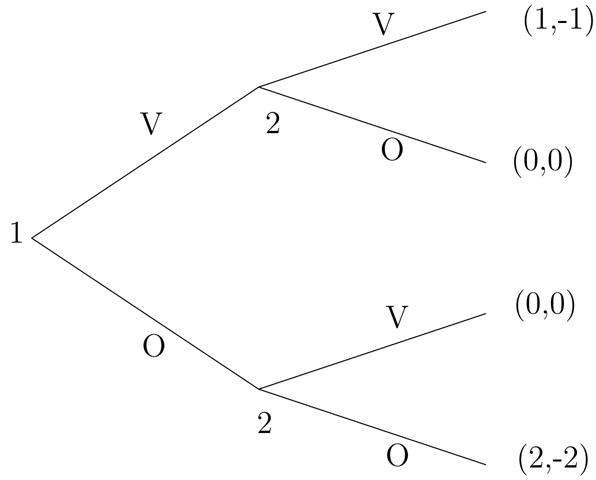
$$f : \{V, O\} \times \{V, O\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq y \\ 1, & \text{kun } x = V = y \\ 2, & \text{kun } x = O = y, \end{cases}$$

jota sanotaan pelaajan 1 *hyötyfunktioksi.* Pelaajan 2 hyötyfunktio on

$$g : \{V, O\} \times \{V, O\} \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq y \\ -1, & \text{kun } x = V = y \\ -2, & \text{kun } x = O = y. \end{cases}$$

2 / 1	V	O
V	(1,-1)	(0,0)
O	(0,0)	(2,-2)

Taulukko 1.1. Valitse käsi -peli normaalimuodossa



Kuva 1.1. Valitse käsi -peli ekstensiivisessä muodossa.

Pelien olennaiset tiedot eli pelaajat vaihtoehtoineen ja perusteet hyötyfunktion määräytymiselle voidaan tiivistää esimerkiksi taulukkoon. Taulukossa 1.1 rivien indekseinä ovat pelaajan 1 mahdolliset valinnat ja sarakkeiden niminä on pelaajan 2 mahdolliset valinnat. Taulukon alkioina a_{ij} on lukupareja, joiden ensimmäinen luku kertoo pelaajan 1 ja toinen pelaajan 2 hyötyfunktion arvon pelaajan 1 valinnalla i ja pelaajan 2 valinnalla j. Kyseessä on näin ollen esimerkin 1.1 peli.

Vastaavat tiedot voidaan esittää myös puukuvaajana. Kuvassa 1.1 puun solmuna on päätösvuorossa oleva pelaaja ja kaarina ovat kyseisen pelaajan mahdolliset vaihtoehdot. Seuraamalla tehtyjä päätöksiä päästään viimeisiin solmuihin, joista löytyvät hyötyfunktioiden arvot.

Taulukon 1.1 mukaista tapaa kuvata peliä kutsutaan pelin *normaalimuodoksi.* Kuvan 1.1 mallintama tilanne on pelin *ekstensiivinen* eli *laajennettu muoto.*

Huomautus 1.2. Pelin ekstensiivinen ja normaalimuoto sisältävät erimäärän tietoa pelistä. Normaalimuotoisessa pelissä ajatellaan, että pelaajat tekevät valintansa samanaikaisesti tietämättä toistensa valintoja, ja että voitonmaksu tapahtuu heti tämän jälkeen. Ekstensiivisellä muodolla voidaan kuvata myös peliä, jossa pelaajat tietävät toistensa valinnat tai jossa he tekevät useita valintoja pelin aikana.

Määritellään seuraavaksi täsmällisesti peliltä vaadittavat ominaisuudet.

Määritelmä 1.3. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin kokoelma äärellisiä joukkoja $S_1, \ldots, S_n$ ja kuvauksia $f_1, \ldots, f_n$, missä

$$f_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R} \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n$$

on *n-pelaajan peli*, jota voidaan kuvata kolmikolla (n, S, F), missä $S = (S_1, \dots, S_n)$ ja $F = (f_1, \dots, f_n)$. Joukko S_i on pelaajan i *puhtaiden strategioiden joukko*, jonka alkiot ovat pelaajan i *puhtaita strategioita*. Kuvaus f_i on pelaajan i *hyötyfunktio*.

ESIMERKKI 1.4. Määritelmän perusteella esimerkin 1.1 Valitse käsi –peli on kahden pelaajan peli (n, S, F), jossa kyseisen esimerkin merkinnöin on

$$n = 2, S = (\{V, O\}, \{V, O\}) \text{ ja } F = (f, g).$$

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ pelaajan hyötyfunktio kahden pelaajan pelissä. Tällöin matriisi

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} = [f(i,j)]_{i,j=1}^{m,n}$$

on pelaajan *voittomatriisi*.

ESIMERKKI 1.6. Esimerkin 1.1 pelissä pelaajalla 1 on voittomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ja pelaajalla 2 on voittomatriisi

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon kahden pelaajan pelissä pelaajan 1 voittomatriisi $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja pelaajan 2 voittomatriisi $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$. Tällöin pelin *normaalimuoto* on matriisi

$$C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} = [(a_{ij}, b_{ij})]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Normaalimuoto ja hyötyfunktioiden esittäminen voittomatriiseina mahdollistavat pelin käsittelyn matriisilaskennan keinoin ja sen vuoksi kyseistä muotoa käytetään jatkossa. Merkinnöissä on pyritty Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen kursseilla Lineaarinen algebra ja geometria 1 ja 2 käytössä olleiden luentomonisteiden [**19**] ja [**20**] kanssa yhtäläiseen merkintätapaan.

1.2. Nollasummapelit

Kahden pelaajan nollasummapelissä häviävä pelaaja maksaa voittavalle pelaajalle voiton määrän. Useamman pelaajan pelissä voittajia ja maksajia voi olla enemmän kuin yksi, mutta keskeistä on että hyödykkeiden vaihtuminen tapahtuu ainoastaan pelaajien välillä.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon kuvaus $f_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ pelaajan i hyötyfunktio kaikilla $i = 1, \dots, n$. Jos

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in S_1 \times \cdots \times S_n,$$

niin kyseessä on *n-pelaajan nollasummapeli*.

HUOMAUTUS 1.9. Olkoot kuvaukset $f_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ ja $f_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ pelaajien 1 ja 2 hyötyfunktiot. Kahden pelaajan nollasummapelissä on voimassa

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y) \text{ kaikilla } x \in S_1, y \in S_2.$$

ESIMERKKI 1.10. Esimerkin 1.1 peli on nollasummapeli, sillä pelaajan 1 voittaa tasan sen määrän kolikoita, jonka pelaaja 2 häviää.

HUOMAUTUS 1.11. Koska huomautuksesta 1.9 seuraa, että kahden pelaajan nollasummapelissä pelaajien 1 ja 2 voittomatriiseille $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ ja $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ on $A = -B$ eli

$$a_{ij} = -b_{ij} \text{ kaikilla } i, j,$$

niin pelin esittäminen normaalimuodossa sisältää ylimääräistä tietoa. Pelin olennaiset tiedot voidaan näin ollen tiivistää yhteen matriisiin.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Sanotaan, että kahden pelaajan nollasummapelissä pelaajan 1 voittomatriisi on *pelin voittomatriisi.*

ESIMERKKI 1.13. Taulukossa 1.1 esitetään nollasummapeli normaalimuodossa. Kyseisen pelin voittomatriisi on $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, jolla tarkoitetaan taulukointia

$$\begin{array}{r|cc} 2 & V & O \\ 1 & & \\ \hline V & 1 & 0 \\ O & 0 & 2 \end{array}.$$

HUOMAUTUS 1.14. Kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi sisältää tiedon kummankin pelaajan puhtaiden strategioiden lukumäärästä sekä hyötyfunktioiden määräytymisestä. Tämän vuoksi tässä tutkielmassa rinnastetaan usein peli ja pelin voittomatriisi toisiinsa. Tällöin siis puhutaan pelistä A, kun tarkoitetaan pelin voittomatriisia A.

Tutustutaan vielä esimerkin avulla, millaisia kysymyksiä peleistä voi nousta esiin.

ESIMERKKI 1.15. On luonnollista, että esimerkissä 1.1 pelaaja 1 haluaa maksimoida voittonsa. Hän toivoo voittavansa kaksi kolikkoa ja tekee valinnan O. Jos pelaaja 2 arvaa kyseisen valinnan tai peliä pelataan useita kierroksia ja oppii tämän, voi hän tehdä valintansa siten, että pelaaja 1 ei voita yhtään kolikkoa. Tällaisessa tilanteessa voisi pelaaja 1 yrittää voittaa edes yhden kolikon valitsemalla puhtaan strategian V. Pelaaja 2 voi arvata myös tämän tai reagoida valintaan jatkossa, jolloin pelaaja 1 ei taaskaan voita mitään. Kummalla tahansa valinnalla voi pelaaja 1 olla varma ainoastaan siitä, ettei tule häviämään mitään.

Samassa pelissä voidaan olettaa, että koska pelaaja 2 ei voi voittaa, hän haluaa hävitä niin vähän kuin mahdollista. Yllä olevaa päättelyä mukaillen voidaan todeta pelaajan 2 voivan olla varma ainoastaan siitä, ettei hän tule voittamaan yhtään kolikkoa.

Pelin lopputulos riippuu siis kummankin pelaajan osalta siitä, miten paljon vastustaja tietää tai arvaa pelaajan käyttäytymisestä. Peliteorian avulla pyritään muun muassa parantamaan arviota lopputuloksesta sekä vähentämään tiedon vaikutusta peliin.

LUKU 2

Nollasummapelien arvo

Strategia kuvaa pelaajan toimintaa missä tahansa pelin vaiheessa. Tämän luvun tarkoituksena on määritellä strategiat, joiden avulla nollasummapelin pelaajat voivat ennakoida pelin lopputulosta riippumatta vastustajan käyttäytymisestä. Lisäksi kuvataan optimaalinen strategia, joka minimoi pelaajan riskiä ja antaa näin ollen turvarajan pelaajan menestykselle. Optimaalisten strategioiden avulla määritellään myös pelin arvo, joka on nollasummapeliä kuvaava reaaliluku. Luvun lopussa osoitetaan minimax-lause, jonka mukaan jokaisella nollasummapelillä on arvo ja pelaajilla on aina olemassa optimaaliset strategiat.

2.1. Sekastrategiat

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon joukko $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ pelaajan puhtaiden strategioiden joukko. Merkitään pelaajan puhdasta strategiaa s_k vektorilla

$$\mathbf{x}_k := \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n,$$

jossa

$$x_i = 1, \text{ kun } i = k \text{ ja}$$
$$x_i = 0, \text{ kun } i \neq k.$$

ESIMERKKI 2.2. Esimerkissä 1.1 pelaajan 1 puhdasta strategiaa V vastaa vektori $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ ja puhdasta strategiaa O vektori $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon joukko $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ pelaajan puhtaiden strategioiden joukko. Pelaajan kaikkien mahdollisten *sekastrategioiden joukko* on

$$\Delta_n = \left\{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Joukon Δ_n alkiovektorit ovat pelaajan *sekastrategioita*, joiden alkiot x_i vastaavat todennäköisyyksiä, joilla pelaaja valitsee strategiat s_i.

ESIMERKKI 2.4. Esimerkissä 1.1 pelaajan 1 sekastrategia $\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}^T$ vastaa taktiikkaa, jossa pelaaja 1 tekee valinnan V todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja valinnan O todennäköisyydellä $\frac{3}{4}$.

Sekastrategioiden hyöty on, että niiden mukanaan tuoma epävarmuustekijä vähentää tiedon ja oppimisen merkitystä pelissä.

ESIMERKKI 2.5. Oletetaan pelaajan 1 käyttävän esimerkin 1.1 pelissä sekastrategiaa $\begin{bmatrix}1-p & p\end{bmatrix}^T$. Jos pelaaja 2 pelaa puhdasta strategiaa O, hän häviää kaksi kolikkoa todennäköisyydellä $p \in [0, 1]$, jolloin hänen odotusarvoinen häviönsä on $2p$ kolikkoa. Jos pelaaja 2 pelaa puhdasta strategiaa V, on hänen odotusarvoinen häviönsä $1 - p$.

Jos pelaaja 2 tuntee pelaajan 1 strategian, niin hävitäkseen mahdollisimman vähän pelaaja 2 pyrkii valitsemaan strategiansa siten, että se on pienempi luvuista $2p$ ja $1-p$. Toisaalta, jos pelaaja 1 tietää, että hänen valitsemansa strategia tullaan aina arvaamaan, hän voi päätellä vastutajansa strategian. Vastatakseen siihen pelaaja 1 haluaa määrittää todennäköisyyden p siten, että se maksimoi lukua $\min\{2p, 1-p\}$. Koska

$$\begin{aligned} \min\{2p, 1-p\} &< \frac{2}{3}, \text{ kun } p \neq \frac{1}{3} \\ \text{ja } \min\{2p, 1-p\} &= \frac{2}{3}, \text{ kun } p = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

niin $\max\min\{2p, 1-p\} = \frac{1}{3}$. Siten, jos pelaaja 1 pelaa sekastrategiaa $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$, hän voittaa odotusarvoisesti $\frac{2}{3}$ kolikkoa jokaisella kierroksella.

Vastaavasti voidaan päätellä pelaajan 2 odotusarvoinen tappio. Pelaaja 2 käyttää sekastrategiaa $\begin{bmatrix}1-q & q\end{bmatrix}^T$, missä $q \in [0,1]$ kuvaa todennäköisyyttä. Pelaaja 1 pyrkii valitsemaan suuremman luvuista $2q$ ja $1-q$ maksimoidakseen oman hyötynsä. Hävitäkseen mahdollisimman vähän pelaaja 2 valitsee luvun q siten, että se minimoi luvun $\max\{2q, 1-q\}$. Koska arvo

$$\min\max\{1-q, 2q\} = \frac{2}{3}$$

saavutetaan, kun $q = \frac{1}{3}$, on pelaajalle 2 suotuisaa käyttää sekastrategiaa $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$. Kyseisellä strategialla pelaaja 2 odotusarvoisesti häviää niin vähän kuin mahdollista, eli $\frac{2}{3}$ kolikkoa kierrosta kohti.

Esimerkissä huomattiin, että sekastrategioita käyttäen pelin lopputuloksesta saatiin kummankin pelaajan tapauksessa suotuisammat arviot kuin puhtaita strategioita käytettäessä. Esimerkistä voidaan myös tehdä havainto, että pelaajan 1 odotusarvoinen voitto vastasi pelaajan 2 odotusarvoista tappiota.

2.2. Kahden pelaajan nollasummapelin arvo

Määritelmä 2.6. Olkoon $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi. Pelaajan 1 *hyötyfunktion*

$$f_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$

odotusarvo sekastrategioilla $\mathbf{x} \in \Delta_m$ ja $\mathbf{y} \in \Delta_n$ on

$$Ef_1 = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j.$$

Huomautus 2.7. Koska kyseessä on nollasummapeli, niin pelaajan 2 hyötyfunktion odotusarvoksi saadaan edeltävän määritelmän merkinnöin luonnollisesti

$$Ef_2 = -Ef_1.$$

Määritelmä 2.8. Olkoon A mielivaltainen kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi. Strategia $\tilde{\mathbf{x}} \in \Delta_m$ on *pelaajan 1 optimaalinen strategia*, jos

$$\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

ja strategia $\tilde{\mathbf{y}} \in \Delta_n$ on *pelaajan 2 optimaalinen strategia*, jos

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.9. Kahden pelaajan nollasummapelin A *arvo* on luku $v \in \mathbb{R}$, jolle on voimassa

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = v.$$

ESIMERKKI 2.10. Esimerkin 2.5 perusteella Valitse käsi –pelissä pelaajalla 1 on optimaalinen strategia $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$, pelaajalla 2 on optimaalinen strategia $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$ ja pelillä on arvo $\frac{2}{3}$.

2.3. Von Neumannin minimax-lause

Minimax-lauseen mukaan jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä on arvo. Lauseen osoittamisen apuna käytetään sekastrategioiden joukon ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ 2.11. Joukko K on *konveksi*, jos jana, joka syntyy yhdistettäessä mitkä tahansa kaksi joukon K pistettä, on kokonaisuudessaan joukon K osajoukko. Toisin sanoen silloin, kun on voimassa

$$\{pa + (1-p)b : p \in [0,1]\} \subset K \text{ kaikilla } a, b \in K.$$

LEMMA 2.12. *Konveksien joukkojen leikkaus on konveksi.*

TODISTUS. Olkoot A ja B konvekseja joukkoja. Jos $A \cap B$ ei ole konveksi, niin on pisteet $x, y \in A \cap B$ ja luku $p \in [0,1]$ siten, että

$$\{px + (1-p)y\} \notin A \cap B.$$

Tällöin

$$\{px + (1-p)y\} \notin A \text{ tai } \{px + (1-p)y\} \notin B,$$

eli toinen joukoista A tai B ei ole konveksi, mikä on ristiriita. □

LEMMA 2.13. *Sekastrategioiden joukko*

$$\Delta_n = \left\{ \mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

on rajoitettu, suljettu ja konveksi.

TODISTUS. Joukko Δ_n on rajoitettu, sillä se sisältyy yksisäteiseen, n-ulotteiseen suljettuun palloon.

Joukko $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ on suljettu, sillä se sisältää kaikki reunapisteensä. Jos nimittäin olisi joukon A reunapiste $y \in \mathbb{R}^n \setminus A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \neq 1\}$, niin valitsemalle säde r siten, että

$$0 < r < \left| 1 - \sum_{i=1}^n y_i \right|,$$

olisi avoimelle pallolle $B^n(y, r)$ voimassa

$$B^n(y, r) \cap A \neq \emptyset,$$

mikä on ristiriidassa reunapisteen määritelmän kanssa.

Joukko $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ on suljettu. Koska joukko $\Delta_n = A \cap B$ on suljettujen joukkojen leikkaus, niin myös se on suljettu joukko.

Olkoot $s, t \in \Delta_n$ ja olkoon $k \in [0, 1]$. Tällöin $ks_i + (1-k)t_i \geq 0$. Lisäksi

$$\sum_{i=1}^{n} (ks_i + (1-k)t_i) = k \sum_{i=1}^{n} s_i + (1-k) \sum_{i=1}^{n} t_i = k1 + (1-k)1 = 1.$$

Näin ollen pisteiden s ja t välinen jana on joukon Δ_n osajoukko, joten Δ_n on konveksi. $\square$

Seuraavan lemman mukaan origo ja konveksi joukko, joka ei sisällä origoa, voidaan erottaa jonkin hypertason eri puolille.

LEMMA 2.14. *Olkoon joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja konveksi. Oletetaan lisäksi, että origo ei kuulu joukkoon K. Tällöin on olemassa vektori $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ja luku $c \in \mathbb{R}$ siten, että $0 < c < \mathbf{z}^T\mathbf{v}$ kaikille vektoreille $\mathbf{v} \in K$.*

TODISTUS. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ väitteen oletusten mukainen suljettu ja konveksi joukko ja olkoon $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq R\}$ suljettu R-säteinen pallo. Joukkoleikkaus $A = K \cap \bar{B}^n$ on tällöin suljettu, sillä se on suljettujen joukkojen leikkaus. Lisäksi joukko A on rajoitettu, sillä suljettu pallo $\bar{B}^n$ on rajoitettu. Näin ollen joukko A on kompakti.

Normikuvaus $f : A \to [0, \infty[\, : \mathbf{v} \to ||\mathbf{v}||$ on jatkuva ja reaaliarvoinen. Jatkuva kuvaus saavuttaa infimuminsa jossakin kompaktin joukon pisteessä [**21**, s. 44]. Näin ollen jollekin joukon K vektorille $\mathbf{z}$ on voimassa

$$||\mathbf{z}|| = \inf_{\mathbf{v} \in K} ||\mathbf{v}||.$$

Valitaan luku $c = \frac{1}{2}||\mathbf{z}||^2 > 0$. Tarkoituksena on osoittaa, että epäyhtälö $c < \mathbf{z}^T\mathbf{v}$ on voimassa mille tahansa vektorille $\mathbf{v} \in K$.

Koska pisteet $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{z}$ ovat konveksin joukon K alkioita, niin kaikille luvuille $\epsilon \in (0, 1)$ pätee konveksin joukon määritelmän mukaan $\epsilon\mathbf{v} + (1-\epsilon)\mathbf{z} \in K$. Aiemmalla asettelun johdosta tiedetään, että kaikista joukon K vektoreista pienin normi on vektorilla $\mathbf{z}$, ja siten saadaan

$$||\mathbf{z}||^2 \leq ||\epsilon\mathbf{v} + (1-\epsilon)\mathbf{z}||^2.$$

Koska $\mathbf{z}^T\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = ||\mathbf{z}||^2$, niin edeltävästä päättelystä saadaan epäyhtälö

$$\mathbf{z}^T\mathbf{z} \leq \epsilon^2\mathbf{v}^T\mathbf{v} + 2\epsilon(1-\epsilon)\mathbf{v}^T\mathbf{z} + (1-\epsilon)^2\mathbf{z}^T\mathbf{z},$$

josta saadaan termejä siirtämällä

$$0 \leq \epsilon\mathbf{v}^T\mathbf{v} - 2\mathbf{z}^T\mathbf{z} + \epsilon\mathbf{z}^T\mathbf{z} + 2\mathbf{v}^T\mathbf{z} - 2\epsilon\mathbf{v}^T\mathbf{z},$$

ja edelleen termejä siirtäen ja yhdistäen saadaan

$$-\epsilon(\mathbf{v}^T\mathbf{v} + \mathbf{z}^T\mathbf{z} - 2\mathbf{v}^T\mathbf{z}) \leq 2(\mathbf{v}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{z}).$$

Suoritetaan raja-arvotarkastelu. Kun luku ϵ lähestyy nollaa, saadaan

$$0 \leq \mathbf{v}^T\mathbf{z} - \mathbf{z}^T\mathbf{z}.$$

Vakio c oli valittu aidosti positiiviseksi. Näin ollen on voimassa

$$\mathbf{z}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{z} \geq \mathbf{z}^T\mathbf{z} = ||\mathbf{z}||^2 = 2c > c,$$

kuten haluttiin. □

LEMMA 2.15. *Olkoot joukot X ja Y suljettuja ja rajoitettuja joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja ja kuvaus $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \leq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

TODISTUS. Karteesisen tulon pisteparille $(x^*, y^*) \in X \times Y$ on infimumin ja supremumin määritelmien perusteella voimassa

$$\inf_{y\in Y} f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \leq \sup_{x\in X} f(x, y^*).$$

Näin ollen epäyhtälö

$$\inf_{y\in Y} f(x^*, y) \leq \sup_{x\in X} f(x, y^*)$$

on voimassa millä tahansa muuttujan $x^* \in X$ arvolla, joten epäyhtälön vasemmasta puolesta voidaan ottaa supremum siten, että käydään muuttujalla x^* läpi joukko X. Vastaavasti epäyhtälön oikealta puolelta voidaan ottaa infimum joukossa Y, sillä epäyhtälö toteutuu millä tahansa muuttujan $y^* \in Y$ arvolla. Näistä saadaan

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y).$$

Koska kuvaus f on jatkuva ja joukot X ja Y ovat suljettuja ja rajoitettuja, saavutetaan kuvauksen ääriarvot ja viimeisin epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \leq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$

kuten väitettiin. □

Nyt osoitetaan luvun päätulos eli pelin arvon olemassaolo.

LAUSE 2.16. *Von Neumannin minimax-lause. Olkoon A $m\times n$ voittomatriisi ja olkoot $\Delta_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ ja $\Delta_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0, \sum_{j=1}^n = 1\}$ kahden pelaajan kaikkien sekastrategioiden joukot. Tällöin*

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

TODISTUS. Kaikkien sekastrategioiden muodostamat joukot Δ_m ja Δ_n ovat lemman 2.13 mukaan rajoitettuja ja suljettuja. Kuvaus $f : \Delta_m \times \Delta_n \to \mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

on reaaliarvoinen funktio, joka on jatkuva kummankin muuttujan $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ suhteen. Näin ollen lemman 2.15 mukaan on voimassa epäyhtälö

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \leq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}. \tag{2.1}$$

Osoitetaan epäyhtälö

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \geq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

antiteesin avulla. Väitetään, että on olemassa reaaliluku $\lambda \in \mathbb{R}$, jolle on voimassa

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} x^T Ay < \lambda < \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Määritellään uusi peli, jolla on $m \times n$-voittomatriisi $\tilde{A}$ siten, että sen alkioille on voimassa $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \lambda$, missä alkiot a_{ij} ovat oletuksessa asetetun voittomatriisin A alkioita. Tälle uudelle pelille pätee

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T \tilde{A}\mathbf{y} < 0 < \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T \tilde{A}\mathbf{y}. \tag{2.2}$$

Jokaista pelaajan 2 sekastrategiaa $\mathbf{y} \in \Delta_n$ vastaa niin sanottu voittovektori $\tilde{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Määritellään joukko K, jolle on

$$K = \left\{ \mathbf{u} = \tilde{A}\mathbf{y} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y} \in \Delta_n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, v_i \geq 0 \right\}.$$

Lemmassa 2.13 osoitettiin, että kaikkien sekastrategioiden joukko Δ_n on suljettu, rajoitettu ja konveksi.

Joukko K on suljettu ja konveksi. Se on suljettu, sillä se on muodostettu suljettujen joukkojen leikkauksena ja kuvaamalla suljettuja joukkoja jatkuvilla kuvauksilla. Konveksisuus voidaan osoittaa esimerkiksi huomaamalla, että lineaarikuvaukset, jollainen voittomatriisi $\tilde{A}$ on, kuvaavat suorat suoriksi, ja siten myös suorien osajoukot eli janat säilyttävät muotonsa. Näin ollen joukko $\{\tilde{A}y : \mathbf{y} \in \Delta_n\}$ on myös konveksi. Lemman 2.12 mukaan konveksien joukkojen leikkaus on konveksi, jolloin joukon K on oltava konveksi.

Joukko K ei voi sisältää nollavektoria. Muuten olisi olemassa sekastrategia $\mathbf{y} \in \Delta_n$ siten, että $\tilde{A}\mathbf{y} \leq 0$, jolloin ehto $\mathbf{x} \in \Delta_m$ johtaisi tulokseen $\mathbf{x}^T \tilde{A}\mathbf{y} \leq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \Delta_m$. Tämä olisi ristiriidassa epäyhtälön (2.2) oikean puolen kanssa.

Näin ollen joukko K toteuttaa lemman 2.14 oletukset, jolloin on olemassa vektori $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ja reaaliluku $c > 0$ siten, että $0 < c < \mathbf{z}^T\mathbf{w}$ kaikille vektoreille $\mathbf{w} \in K$. Pätee siis

$$\mathbf{z}^T(\tilde{A}\mathbf{y} + \mathbf{v}) > c > 0 \text{ kaikille } \mathbf{y} \in \Delta_n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, v_i \geq 0. \tag{2.3}$$

Nyt on oltava $z_i \geq 0$ kaikilla i. Jos olisi $z_j < 0$ jollakin j, niin olisi mahdollista valita voittovektori $\mathbf{y} \in \Delta_n$ siten, että pätisi

$$\mathbf{z}^T(\tilde{A}\mathbf{y} + \mathbf{v}) = \mathbf{z}^T \tilde{A}\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathbf{v} = \mathbf{z}^T \tilde{A}\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{m} z_i v_i < 0,$$

mikä ei epäyhtälön (2.3) perusteella ole mahdollista. Väitetty negatiivinen arvo saadaan asettamalla komponenteille $v_i = 0$, kun $i \neq j$ ja annetaan komponentin v_j kasvaa rajatta. Toisaalta, jos vektori $\mathbf{z}$ olisi nollavektori, eli sen kaikki komponentit saisivat arvon nolla, olisi tämäkin ristiriita ehdon (2.3) kanssa.

Siispä ainakin osan vektorin $\mathbf{z}$ komponenteista z_i on oltava aidosti positiivisia ja loppujen täytyy saada arvo nolla. Tällöin summan $s = \sum_{i=1}^{m} z_i$ on aidosti positiivinen ja pätee $\mathbf{x} = \frac{1}{s}[z_1, \ldots, z_m]^T = \frac{1}{s}\mathbf{z}^T \in \Delta_m$. Käyttäen epäyhtälöä (2.3) valinnalla $\mathbf{v} = 0$ olisi voimassa

$$\mathbf{x}^T \tilde{A}\mathbf{y} > \frac{c}{s} > 0$$

kaikille sekastrategioille $\mathbf{y} \in \Delta_n$, mikä on vastoin epäyhtälön (2.2) vasemman puolen oletusta.

Koska antiteesissä asetettu epäyhtälöketju

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\mathbf{x}^T A\mathbf{y} < \lambda < \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

johtaa ristiriitoihin itsensä kanssa, on antiteesi kumottava ja tällöin pätee

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \geq \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\mathbf{y}. \tag{2.4}$$

Lauseen väitteen yhtäsuuruus

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

on voimassa epäyhtälöiden (2.1) ja (2.4) perusteella. □

Seuraus 2.17. *Kahden pelaajan nollasummapelissä on aina optimaaliset strategiat pelaajille 1 ja 2.*

Todistus. Minimax-lauseen mukaan jokaisessa nollasummapelissä on olemassa luku v siten, että

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = v = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Voidaan siis valita strategiat $\tilde{\mathbf{x}} \in \Delta_m$ ja $\tilde{\mathbf{y}} \in \Delta_n$ siten, että

$$\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

ja

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n}\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m}\mathbf{x}^T A\mathbf{y},$$

jolloin $\tilde{\mathbf{x}}$ ja $\tilde{\mathbf{y}}$ ovat määritelmän mukaan optimaalisia strategioita. □

Lause 2.18. *Olkoon A nollasummapelin voittomatriisi. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Strategia $\tilde{\mathbf{x}}$ on pelaajan 1 ja strategia $\tilde{\mathbf{y}}$ pelaajan 2 optimaalinen strategia.*

(ii) *On olemassa luku $v \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$\tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} \geq v \text{ kaikille } \mathbf{y} \in \Delta_n, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq v \text{ kaikille } \mathbf{x} \in \Delta_m \tag{2.6}$$

ja

$$v = \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}}. \tag{2.7}$$

(iii) *On olemassa luku $v \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$\tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y}_j \geq v \text{ kaikille } j = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{x}_i^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq v \text{ kaikille } i = 1, \ldots, m$$

ja

$$v = \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}},$$

kun vektorit $\mathbf{y}_j$ ja $\mathbf{x}_i$ ovat esityksen 2.1 mukaisia puhtaita strategioita, TODISTUS. Olkoot $\tilde{\mathbf{x}}$ ja $\tilde{\mathbf{y}}$ optimaaliset strategiat. Tällöin määritelmän mukaan on

$$\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$$

ja

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Lauseen 2.16 perusteella on

$$\min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} = \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}}.$$

Merkitään pelin arvoa kirjaimella $v := \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$, jolloin

$$\mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq v \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \Delta_m, \mathbf{y} \in \Delta_n.$$

Valitsemalla $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ ja $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}$ saadaan

$$\tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq v \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}},$$

joten

$$v = \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}}.$$

Toisaalta, jos strategiat $\tilde{\mathbf{x}}$ ja $\tilde{\mathbf{y}}$ täyttävät ehdon (ii), niin

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} \overset{(2.6),(2.7)}{=} v.$$

Edellisten perusteella, ja koska $\tilde{\mathbf{x}} \in \Delta_m$, saadaan

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} = v \overset{(2.5)}{\leq} \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} \leq \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \text{ kaikilla } \mathbf{y} \in \Delta_n.$$

Siispä

$$\max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y}\in\Delta_n} \max_{\mathbf{x}\in\Delta_m} \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Vastaavasti osoitetaan, että $\tilde{\mathbf{x}}$ on optimaalinen strategia. Väitteiden (ii) ja (iii) yhtäpitävyys osoitetaan teoksessa [**4**, s. 103]. □

Minimax-lauseen mukaan kahden pelaajan nollasummapelissä pelaajien turvarajat ovat samat, joten pelillä on aina arvo. Lauseen seurauksena osoitettiin, että pelaajilla on aina optimaaliset strategiat. Minimax-lause ei kuitenkaan kerro, miten pelin arvo tai optimaaliset strategiat löydetään. Luvun viimeinen tulos antoi optimaalisille strategioille vaihtoehtoisen määritelmän.

Jos minimax-lauseen oletuksia vähennetään ja pelaajilla olisi esimerkiksi käytettävissä numeroituvasti äärettömästi puhtaita strategioita, pelille ei välttämättä ole olemassa arvoa [**22**].

LUKU 3

Optimaalisten strategioiden ja pelin arvon etsiminen

Minimax-lause on olemassaolotulos, joten seuraava mielenkiintoinen kysymys on, kuinka optimaaliset strategiat ja pelin arvo löydetään. Optimaalisten strategioiden etsimisestä ja pelin arvon määrittämisestä käytetään nimitystä *pelin ratkaiseminen*.

Peleille, joiden voittomatriisit ovat 2×2-matriiseja, on olemassa analyyttiset kaavat optimaalisten strategioiden ratkaisemiseksi [**15**]. Jos toisella pelaajalla on vain kaksi vaihtoehtoa, eli kyseessä on muotoa $2 \times n$ tai $m \times 2$-matriisipeli, voidaan se ratkaista graafisesti [**12**], [**15**] tai 2×2-alimatriisien avulla [**7**].

Tässä luvussa tarkastellaan keinoja, joilla pelin voittomatriisia voidaan muokata yksinkertaisemmaksi, jotta pelin tutkiminen helpottuu. Satulapisteiden avulla voidaan määrittää optimaaliset strategiat suoraan puhtaiden strategioiden joukosta. Dominaation avulla voidaan osa strategioista jättää kokonaan huomiotta ja symmetria mahdollistaa joidenkin strategioiden tarkastelemisen yhtenä tapauksena.

3.1. Satulapisteet

MÄÄRITELMÄ 3.1. Voittomatriisin $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ alkio a_{kl} on *satulapiste*, jos sille on voimassa

$$a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj} \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, m \text{ ja kaikilla } j = 1, \ldots, n.$$

Toisin sanoen alkio a_{kl} on sarakkeensa suurin ja rivinsä pienin alkio.

LAUSE 3.2. *Eri satulapisteillä on sama arvo.*

TODISTUS. Olkoot a_{ij} ja a_{kl} kaksi eri satulapistettä. Jos ne sijaitsevat samalla rivillä, niin $a_{ij} = a_{kl}$, sillä kumpikin alkio on rivinsä pienin alkio. Toisaalta, jos satulapisteet ovat samassa sarakkeessa, niin on $a_{ij} = a_{kl}$, sillä kumpikin alkioista on sarakkeensa suurin alkio.

Jos a_{ij} ja a_{kl} sijaitsevat voittomatriisissa muuten kuin samalla rivillä tai samassa sarakkeessa, löytyy satulapisteen perusteella rivin i ja sarakkeen l leikkauskohdasta alkio a_{il} jolle on voimassa $a_{ij} \leq a_{il} \leq a_{kl}$. Toisaalta rivin k ja sarakkeen j leikkauskohdan alkiolle on $a_{kl} \leq a_{kj} \leq a_{ij}$. Näistä saadaan epäyhtälöketju

$$a_{ij} \leq a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj} \leq a_{ij},$$

joten on $a_{ij} = a_{kl}$. □

LAUSE 3.3. *Olkoon a_{kl} voittomatriisin $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ satulapiste. Tällöin puhdas strategia $\mathbf{x}_k$ on eräs pelaajan 1 on optimaalinen strategia. Vastaavasti puhdas strategia $\mathbf{y}_k$ on pelaajan 2 on optimaalinen strategia. Lisäksi pelin arvo on a_{kl}.*

TODISTUS. Strategioita $\mathbf{x}_i$ ja $\mathbf{y}_j$ pelattaessa lasku $\mathbf{x}_i^T A \mathbf{y}_j$ antaa tulokseksi arvon a_{ij}. Oletetaan, että a_{kl} on satulapiste, jolloin riittää osoittaa, että strategiat $\mathbf{x}_k$ ja $\mathbf{y}_l$ ovat optimaaliset. Satulapisteen määritelmästä seuraa, että

$$\mathbf{x}_i^T A\mathbf{y}_l \leq a_{kl} \text{ kaikilla } i = 1 \dots m$$

ja

$$\mathbf{x}_k^T A\mathbf{y}_j \geq a_{kl} \text{ kaikilla } j = 1 \dots n.$$

Lauseen 2.18 perusteella strategiat $\mathbf{x}_k$ ja $\mathbf{y}_l$ ovat optimaaliset strategiat. □

3.2. Dominaatio

Toisinaan pelaajalla voi olla puhdas strategia, jota käyttämällä pelaaja ei missään tilanteessa voi saada niin hyvää lopputulosta kuin jotakin toista strategiaa käyttämällä. Näytetään, että tällainen puhdas strategia voidaan jättää huomiotta pelin tarkastelussa.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisin A rivi i dominoi riviä k, jos matriisialkioille on voimassa

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ kaikilla } j.$$

Sarake j dominoi saraketta l, jos on voimassa

$$a_{ij} \leq a_{il} \text{ kaikilla } i.$$

Jos epäyhtälöiden tilalle asetetaan vastaavat aidot epäyhtälöt, sanotaan, että rivi (tai sarake) *dominoi aidosti* toista riviä (tai saraketta).

HUOMAUTUS 3.5. Dominaation määritelmän taustalla ovat havainnot, että nollasummapelin voittomatriisin rivit ovat pelaajan 1 ja sarakkeet pelaajan 2 puhtaat strategiat. Koska pelin voittomatriisia kuvataan pelaajan 1 voittomatriisilla, niin huomautuksen 1.11 perusteella myös sarakkeiden dominaatio on luonnollisesti määritelty.

Seuraava määritelmä kuvaa uuden voittomatriisin muodostamista poistamalla pelin alkuperäisestä voittomatriisista dominoitu rivi tai sarake.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoot $m \times n$-voittomatriisilla A rivivektorit

$$\vec{\mathbf{a}}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$$

ja $(m-1) \times n$-voittomatriisilla B rivektorit

$$\vec{\mathbf{b}}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m-1.$$

Jos voittomatriisin A rivi k dominoi riviä l ja rivivektoreille pätee

$$\vec{\mathbf{b}}_i = \vec{\mathbf{a}}_i \text{ kaikilla } i = 1, \dots, l-1 \text{ ja } \vec{\mathbf{b}}_i = \vec{\mathbf{a}}_{i+1} \text{ kaikilla } i = l, \dots, m-1,$$

niin sanotaan, että matriisi B on *dominoitu voittomatriisi*, joka on muodostettu matriisista A *dominaatiota käyttäen*. Vastaavasti määritellään dominoitu voittomatriisi sarakkeiden dominaatiolle.

LAUSE 3.7. *Olkoon voittomatriisi B muodostettu voittomatriisista A dominaatiota käyttäen. Tällöin voittomatriiseja A ja B vastaavilla peleillä on sama arvo.*

TODISTUS. Olkoon $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ voittomatriisi, jossa rivi k dominoi riviä l. Tällöin on $a_{kj} \geq a_{lj}$ kaikilla $j = 1, \dots, n$. Olkoon $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T$ mikä tahansa pelaajan 1 sekastrategia. Muodostetaan pelaajan 1 sekastrategia $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$, jonka alkioille on

$$z_i = \begin{cases} x_k + x_l, & \text{kun } i = k \\ 0, & \text{kun } i = l \\ x_i, & \text{kun } i \neq k, l. \end{cases}$$

Nyt on voimassa

$$\sum_j (x_k a_{kj} + x_l a_{lj}) y_j \leq \sum_j (x_k + x_l) a_{kj} y_j,$$

mistä seuraa

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i,j} x_k a_{ij} y_j \leq \sum_{i,j} z_i a_{ij} y_j = \mathbf{z}^T A \mathbf{y}.$$

Näin ollen, jos strategia $\mathbf{x}$ on optimaalinen, niin myös strategia $\mathbf{z}$ on optimaalinen, ja pelin arvo löydetään vaikka dominoitu rivi k jätetään huomiotta.

Sarakkeiden tapaus osoitetaan vastaavasti. □

Esimerkki 3.8. Koska dominaation käyttö ei vaikuta pelin arvoon, voidaan sitä käyttää iteratiivisesti sarakkeisiin ja riveihin. Voittomatriisia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tarkasteltaessa voidaan ensiksi dominoida sarakkeet, jolloin jäljelle jää dominoitu voittomatriisi

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & -1 & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 1 & \cancel{4} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & -2 & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Dominoimalla tämän jälkeen rivit, saadaan

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen löydetään pelille arvo 1, pelaajalle 1 optimaalinen strategia $\mathbf{x}_1$ ja pelaajalle 2 optimaalinen strategia $\mathbf{y}_2$. Toisaalta dominaatiota voitaisiin käyttää ensin riveihin

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ja tämän jälkeen sarakkeisiin

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & 1 & \cancel{4} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

jolloin myös saadaan pelille arvo 1. Tällöin pelaajien optimaaliset strategiat ovat $\mathbf{x}_3$ ja $\mathbf{y}_2$.

Voittomatriisin A tarkastelussa voitaisiin hyödyntää myös havaintoa, että alkiot a_{12} ja a_{32} ovat satulapisteitä.

HUOMAUTUS 3.9. Dominaation käyttö voi aiheuttaa tilanteita, joissa dominoidusta matriisista ei löydetä osaa alkuperäisen pelin optimaalisista strategioista.

ESIMERKKI 3.10. Esimerkin 3.8 dominoidusta matriisista $\tilde{A} = [a_{12}] = [1]$ pelaajalla 1 on käytössä ainoastaan puhdas strategia $\mathbf{x}_1$ ja pelaajalla 2 ainoastaan puhdas strategia $\mathbf{y}_2$. Näin ollen pelaajalle 1 ei voida löytää alkuperäisen pelin A optimaalista strategiaa $\mathbf{x}_3$.

Koska usein riittää löytää yksi optimaalinen strategia, ei huomautuksen 3.9 havainnosta aiheudu ongelmia. Dominaatiotekniikkaa käyttäen on kuitenkin mahdollista muodostaa kaikki optimaaliset strategiat sisältävä dominoitu matriisi. Tällöin dominaatiotarkastelu on tehtävä käyttäen aitoa dominaatiota [**7**].

3.3. Symmetria

MÄÄRITELMÄ 3.11. Jos pelin voittomatriisi on vinosymmetrinen, eli sille on voimassa $A = -A^T$, niin pelin sanotaan olevan *symmetrinen.*

Symmetrisen pelin voittomatriisin on siis oltava neliömatriisi ja sen alkioille on voimassa $a_{ij} = -a_{ji}$. Erityisesti jokaisen diagonaalialkion on oltava nolla.

ESIMERKKI 3.12. Pelaajat 1 ja 2 heittävät kolikkoa. Jos saadaan joko kaksi kruunaa (R) tai kaksi klaava (L), kumpikaan pelaaja ei maksa toiselle mitään. Jos toinen pelaajista saa kruunan ja toinen klaavan, maksaa kruunan saanut pelaaja yhden hyödykkeen klaavan saaneelle pelaajalle. Tämän pelin voittomatriisi A on muotoa

2 \ 1	R	L
R	0	-1
L	1	0

Nyt

$$-A^T = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A,$$

eli peli on symmetrinen.

LAUSE 3.13. *Symmetrisessä pelissä yhdelle pelaajalle optimaalinen strategia on sitä myös toiselle ja pelillä on arvo nolla.*

TODISTUS. Koska symmetrisen pelin voittomatriisi on neliömatriisi, kummallakin pelaajalla on sama kaikkien mahdollisten sekastrategioiden joukko Δ_m. Olkoot $\tilde{\mathbf{x}}$ ja $\tilde{\mathbf{y}}$ pelaajien 1 ja 2 optimaaliset strategiat. Tällöin on olemassa vähimmäismäärä, jonka pelaaja 1 voi odottaa voittavansa pelatessaan mitä tahansa pelaajan 2 strategiaa $\mathbf{y}$ vastaan, ja vastaavasti pelaajalla 2 on olemassa yläraja häviämisilleen pelissä, jos hän pelaa optimaalista strategiaansa mitä tahansa vastustajan strategiaa $\mathbf{x}$ vastaan. On siis voimassa

$$\mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} \text{ kaikilla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m.$$

Nyt matriisitranspoosin ominaisuuksien ja oletuksen $A^T = -A$ perusteella on

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(\mathbf{x}^T A)^T = \mathbf{y}^T(A^T\mathbf{x}) = -\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = -\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m$. Yllä olevan huomion perusteella optimaalisten strategioiden ehto

$$\mathbf{x}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{y}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y} \text{ kaikilla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m$$

saadaan muotoon

$$-\tilde{\mathbf{y}}^T A\mathbf{x} \leq -\tilde{\mathbf{y}}^T A\tilde{\mathbf{x}} \leq -\mathbf{y}^T A\tilde{\mathbf{x}} \text{ kaikilla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m.$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla -1 saadaan

$$\mathbf{y}^T A\tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{y}}^T A\tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{y}}^T A\mathbf{x} \text{ kaikilla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m.$$

Tämä tarkoittaa, että $\tilde{\mathbf{y}}$ on pelaajan 1 ja $\tilde{\mathbf{x}}$ pelaajan 2 optimaalinen strategia. Optimaalisille strategioille $\tilde{\mathbf{x}}$ on voimassa

$$\tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{x}},$$

joten on $\tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{x}} = 0$, eli pelillä on arvo nolla. □

Vaikka peli ei olisi symmetrinen, voidaan pelin voittomatriisia yksinkertaistaa samaistamalla tietyllä tapaa säännölliset puhtaat strategiat yhdeksi strategiaksi.

Esimerkki 3.14. Pelaaja 2 valitsee 3×3-ruudukosta yhden kolmen ruudun pysty-, vaaka- tai lävistäjälinjan. Samaan aikaan pelaaja 1 valitsee yhden ruudukon ruuduista. Jos pelaajan 2 linja kulkee kyseisen ruudun kautta, pelaaja 1 voittaa pelaajalta 2 yhden kolikon. Muissa tapauksissa hyödykkeiden määrä ei muutu.

Kuvataan ruudukkoa 3×3-matriisilla $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^{3,3}$, jolloin pelaajan 1 valinta on matriisin S alkio s_{ij} ja pelaajan 2 valinta on joko rivi i, sarake j, lävistäjä $i = j$ tai lävistäjä $i + j = 4$, kun $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Pelaajan 1 yhdeksästä ja pelaajan 2 kahdeksasta vaihtoehdosta pelille saadaan voittomatriisi

$$A = [a_{kl}]_{k,l=1}^{9,8} = \begin{array}{cc|cccccccc} & 2 & i=1 & i=2 & i=3 & j=1 & j=2 & j=3 & i+j=4 & i=j \\ 1 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline s_{11} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s_{12} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ s_{21} & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{22} & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ s_{23} & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_{31} & 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_{32} & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{33} & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Voittomatriisissa A ei ole satulapisteitä, se ei ole symmetrinen eikä siihen voi soveltaa dominaatiota, joten se ei ratkea aiemmin kuvatuin keinoin.

Määritelmä 3.15. Olkoon $[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi ja olkoot π ja σ pelaajien 1 ja 2 puhtaiden strategioiden permutaatioita. Jos voittomatriisin alkiolla a_{ij} on

$$a_{ij} = a_{\pi(i)\sigma(j)},$$

niin pelaajan 1 puhtaat strategiat i ja $\pi(i)$ ovat *symmetriset*. Samaa nimitystä käytetään pelaajan 2 puhtaille strategioille j ja $\sigma(j)$.

LAUSE 3.16. *Olkoon $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi ja olkoot π_i ja σ_i, missä $i = 1, \dots, k$ ja $k \leq \min\{m-1, n-1\}$ pelaajien 1 ja 2 puhtaiden strategioiden permutaatioita. Jos voittomatriisin alkioille a_{ij} on voimassa*

$$a_{ij} = a_{\pi_1(i)\sigma_1(j)} = \cdots = a_{\pi_k(i)\sigma_k(j)},$$

niin pelaajalla 1 on optimaalinen strategia $\mathbf{x}^* \in \Delta_m$, jossa $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{\pi_1(i)} = \cdots = \tilde{x}_{\pi_k(i)}$. Pelaajalle 2 on optimaalinen strategia $\mathbf{y}^* \in \Delta_n$, jolla on vastaava ominaisuus.

TODISTUS. Olkoot π_i pelaajan 1 ja σ_i pelaajan 2 puhtaiden strategioiden permutaatioita, joille on

$$a_{ij} = a_{\pi_1(i)\sigma_1(j)} = \cdots = a_{\pi_k(i)\sigma_k(j)}.$$

Tällöin on

$$\tilde{x}_i a_{ij} y_j = \tilde{x}_{\pi_1(i)} a_{\pi_1(i)\sigma_1(j)} y_{\sigma_1(j)} = \cdots = \tilde{x}_{\pi_k(i)} a_{\pi_k(i)\sigma_k(j)} y_{\sigma_k(j)}.$$

Olkoon $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_m \end{bmatrix}^T \in \Delta_m$ pelaajan 1 optimaalinen strategia. Määritellään pelaajan 1 strategia $\mathbf{x}^* \in \Delta_m$, jolle

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_{\pi_1(i)}^* = \cdots = x_{\pi_k(i)}^* = \frac{\tilde{x}_i + \sum_{s=1}^k \tilde{x}_{\pi_s(i)}}{k+1}, \\ x_t^* &= \tilde{x}_t \text{ kaikilla } t \in I = \{1, \dots, m\} \setminus \{i, \pi_1(i), \dots, \pi_k(i)\}. \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* A \mathbf{y} &= \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n x_t^* a_{kj} y_j \\ &= \sum_{t \in I} \sum_{j=1}^n (x_t^* a_{kj} y_j) + \sum_{j=1}^n \left(x_i^* a_{ij} y_j + \sum_{s=1}^k x_{\pi_s(i)}^* a_{\pi_s(i)\sigma_s(j)} y_{\sigma_s(j)} \right) \\ &= \sum_{t \in I} \sum_{j=1}^n (\tilde{x}_t a_{tj} y_j) + (k+1) \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{x}_i + \sum_{s=1}^k \tilde{x}_{\pi_s(i)}}{k+1} a_{ij} y_j \\ &= \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{x}_t a_{kj} y_j = \tilde{\mathbf{x}} A \mathbf{y}, \end{aligned}$$

niin strategia $\mathbf{x}^*$ täyttää optimaalisuudelle asetetut ehdot aina, kun strategia $\tilde{\mathbf{x}}$ on optimaalinen.

Vastaavalla päättelyllä tulos pätee myös pelaajalle 2. □

ESIMERKKI 3.17. Esimerkin 3.14 tapauksessa pelaajille löydetään esimerkiksi permutaatiot

$$\pi : \{1, 2, \dots, 9\} \to \{1, 2, \dots, 9\}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} [1]$$

ja

$$\sigma : \{1, 2, \dots, 8\} \to \{1, 2, \dots, 8\}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

[1] Kyseessä on Cauchyn kaksirivinen merkintä permutaatioille, jossa $\pi(1) = 7$, $\pi(2) = (8)$ ja niin edelleen.

joiden avulla saadaan voittomatriisi

$$B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{9,8} = [a_{\pi(i)\sigma(j)}]_{i,j=1}^{9,8} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{9,8} = A.$$

Nyt lauseen 3.16 perusteella esimerkiksi pelaajalla 1 on sellainen optimaalinen sekastrategia, jossa hän valitsee ruudut s_{11} ja s_{13} yhtä todennäköisesti. Toisaalta pelaajalla 2 on jokin optimaalinen strategia, jossa hän valitsee vaakarivit $i = 1$ ja $i = 3$ samalla todennäköisyydellä.

Tutkimalla muitakin kuin edellä esitettyjä pelaajien puhtaiden strategioiden permutaatioita havaitaan, että kummallekin pelaajalle saadaan kolmenlaisia puhtaita strategioita, jotka eivät ole toistensa kanssa symmetrisiä. Pelaajan 1 keskenään symmetrisiä vaihtoehtoja ovat pelilaudan neljä kulmaruutua, neljä reunalinjojen keskiruutua ja pelilaudan keskimmäinen ruutu, joka ei ole symmetrinen minkään muun ruudun kanssa. Pelaajan 2 symmetrisiä vaihtoehtoja ovat kaksi lävistäjälinjaa ja neljä ruudukon laidalla sijaitsevaa linjaa. Lisäksi keskimmäinen vaakalinja ja keskimmäinen pystylinja ovat symmetrisiä vaihtoehtoja.

Jos pelaaja päätyy pelaamaan vaihtoehtoa, jolla on symmetrisiä vaihtoehtoja, voidaan lauseen 3.16 perusteella peliä tarkastella olettaen pelaajan arponeen vaihtoehtonsa sen kanssa symmetristen vaihtoehtojen joukosta. Yhdistämällä tämä tieto voittofunktion arvoihin, voidaan pelin voittomatriisi yksinkertaistaa muotoon

2 1	reunalinja	keskilinja	lävistäjä
kulmaruutu	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
reunan keskiruutu	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
keskiruutu	0	1	1

Tämän pelkistetymmänkään voittomatriisin avulla ei kyseistä peliä voida ratkaista aiemmin esitellyillä tiedoilla. Peliä käsitellään myöhemmin esimerkissä 4.26.

LUKU 4

Pelit ja lineaariohjelmat

Lineaarinen optimointi, eli lineaariohjelmointi, on lineaarisen lausekkeen ääriarvojen etsimistä lineaariyhtälöillä tai -epäyhtälöillä rajoitetusta alueesta. Tietyn tyyppiset lineaariohjelmat ja kahden pelaajan nollasummapelit voidaan samaistaa toisikseen. Kyseisen konjenktuurin esitti ensimmäisenä von Neumann [**6**]. Lineaariohjelmia voidaan ratkaista esimerkiksi simplex-algoritmin avulla. Tulkitsemalla lineaariohjelmien ratkaisuja sopivasti, saadaan myös pelien ratkaisut.

Lineaaristen optimointitehtävien esittelyn jälkeen tässä luvussa esitetään systemaattinen keino esittää pelit lineaariohjelmina. Myöhemmin esitellään simplex-algoritmi ja osoitetaan lineaariohjelmien ratkeavan sen avulla. Lopuksi tarkastellaan esimerkkejä pelien ratkaisemisesta luvussa käsitellyin keinoin.

4.1. Lineaarinen optimointi

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoot $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ $m \times n$-matriisi ja luvut $b_1 \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ kiinnitetty. *Lineaariohjelma* on muotoa

$$\begin{array}{ll} \text{maksimoi} & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ \text{ehdoilla} & \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{cases} \\ \text{kun} & x_1, \ldots, x_m \geq 0. \end{array}$$

oleva ongelma.

Kuvaus $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ on lineaariohjelman *tavoitefunktio* ja epäyhtälöt muodostavat sen *rajoitejoukon.*

MÄÄRITELMÄ 4.2. Määritelmän 4.1 lineaariohjelman *duaali* on muotoa

$$\begin{array}{ll} \text{minimoi} & \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \\ \text{ehdoilla} & \begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \geq c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \geq c_m \end{cases} \\ \text{kun} & y_1, \ldots, y_n \geq 0. \end{array}$$

oleva ongelma.

HUOMAUTUS 4.3. Asettamalla $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_m \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_m \end{bmatrix}^T$ voidaan lineaariohjelma ja duaali esittää vektorimerkinnöin. Tällöin lineaariohjelmaksi saadaan

$$\begin{array}{ll} \text{maksimoi} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{ehdoilla} & A^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \text{ja} & \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

ja duaaliksi

$$\begin{array}{ll} \text{minimoi} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{ehdoilla} & A\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \text{ja} & \mathbf{y} \geq 0. \end{array}$$

LEMMA 4.4. *Duaali voidaan esittää lineaariohjelmana*

TODISTUS. Vaihdetaan määritelmässä 4.2 alkioiden a_{ij} ja lukujen $b_1, \ldots, b_n, c_1 \ldots, c_m$ merkkiä, jolloin tarvittavien epäyhtälöiden suunta vaihtuu ja alkuperäisen tavoitefunktion minimoimista vastaa uuden tavoitefunktion maksimointi. □

4.2. Peli lineaariohjelmana

Konstruoidaan seuraavaksi pelaajien 1 ja 2 pelin ratkaisemiseen liittyvistä ongelmista lineaariohjelmat. Olkoon matriisi A $m \times n$-voittomatriisi. Voittofunktion arvo, kun pelaaja 1 pelaa sekastrategiaa $\mathbf{x}$ ja pelaaja 2 puhdasta strategiaa $\mathbf{y}_j$, on

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y}_j = x_1 a_{1j} + \cdots + x_m a_{mj}.$$

Minimax-lauseen mukaan pelaajalla 1 on olemassa sekastrategia $\mathbf{x}$, jota käyttäen hän voi taata voitolleen pienimmän mahdollisen alarajan. Merkitään mitä tahansa optimaalisille strategioille voimassa olevaa alarajaa luvulla λ, jolloin tarkoituksena on löytää näistä alarajoista suurin. Soveltamalla edellä olevaa tietoa kaikkiin pelaajan 2 puhtaisiin strategioihin, voidaan ongelma kirjoittaa muodossa: maksimoi luku λ, kun

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m & \geq & \lambda \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m & \geq & \lambda \\ & \vdots & \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m & \geq & \lambda \\ x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_m & = & 1, \end{array}$$

jossa viimeinen rivi seuraa sekastrategian ehdoista.

Vastaavasti pelaajan 2 ongelma saadaan muotoon: minimoi luku μ, kun

$$\begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + \ a_{12}y_2 + \ldots + \ a_{1n}y_n & \leq & \mu \\ & \vdots & \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n & \leq & \mu \\ y_1 + \quad y_2 + \ldots + \quad y_n & = & 1. \end{array}$$

Oletetaan, että $\mu > 0$. Jaetaan pelaajan 2 ongelman yhtälö ja epäyhtälöt puolittain luvulla μ ja merkitään $\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\mu}$, jolloin tehtäväksi saadaan minimoida luku μ, kun

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\tilde{y}_1 + \ a_{12}\tilde{y}_2 + \ldots + \ a_{1n}\tilde{y}_n & \leq & 1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\tilde{y}_1 + a_{m2}\tilde{y}_2 + \ldots + a_{mn}\tilde{y}_n & \leq & 1 \\ \tilde{y}_1 + \quad \tilde{y}_2 + \ldots + \quad \tilde{y}_n & = & \frac{1}{\mu}. \end{array}$$

Havaitsemalla, että luvun minimointi vastaa sen käänteisluvun maksimointia ja käyttäen hyväksi sekastrategian ominaisuuksia, voidaan edeltävät ehdot kirjoittaa muodossa

$$
\begin{array}{ll}
\text{maksimoi} & \frac{1}{\mu} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \cdots + \tilde{y}_n \\
\text{ehdoilla} & \begin{cases} a_{11}\tilde{y}_1 + a_{12}\tilde{y}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{y}_n \leq 1 \\ \vdots \\ a_{m1}\tilde{y}_1 + a_{m2}\tilde{y}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{y}_n \leq 1 \end{cases} \\
\text{kun} & \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \geq 0,
\end{array}
$$

joten kyseessä on lineaariohjelma.

Pelaajan 1 tapauksessa voidaan pelin ratkaisemiseen liittyvä ongelma johtaa muotoon

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimoi} & \frac{1}{\lambda} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{x}_m \\
\text{ehdoilla} & \begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{21}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{m1}\tilde{x}_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n}\tilde{x}_1 + a_{2n}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{x}_m \geq 1 \end{cases} \\
\text{kun} & \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m \geq 0,
\end{array}
$$

joka on duaali ja lemman 4.4 nojalla ekvivalentti jonkin lineaariohjelman kanssa.

Mielenkiintoinen, joskin tämän tutkielman kannalta epäolennainen, havainto on, että lineaariohjelmat voidaan esittää pelien avulla [**5**].

HUOMAUTUS 4.5. Konstruktiossa oletettiin, että luvut λ ja μ ovat aidosti positiivisia. Tämä on sallittua, sillä voittomatriisin voidaan lisätä sellainen reaaliluku, että matriisin kaikki alkiot ovat aidosti positiivisia, jolloin myös pelin arvo on positiivinen. Tämä ei vaikuta optimaalisiin strategioihin, mutta arvolle saadaan aidosti positiiviset ylä- ja alarajat. Tehty reaaliluvun lisäys on kuitenkin otettava huomioon, kun lineaariohjelma on saatu ratkaistua.

4.3. Lineaariohjelmien ratkaisut

Koska lineaariohjelman tavoitefunktio on lineaarinen, sen osittaisderivaatat ovat vakioita. Näin ollen tavoitefunktion ääriarvoja ei voida ratkaista etsimällä derivaatan nollakohtia. Ääriarvoja etsiessä voidaan kuitenkin hyödyntää seuraavia havaintoja:

(1) Puoliavaruus on konveksi ja lineaariohjelman rajoitejoukko on puoliavaruuksien leikkauksena konveksi.
(2) Lineaarisen funktion lokaali ääriarvo konveksissa joukossa on globaali ääriarvo.
(3) Rajoitetussa joukossa lineaarisen funktion ääriarvo on joukon reunalla.
(4) Rajoittavien epäyhtälöiden funktiot ovat lineaarisia, jolloin ääriarvo saavutetaan ainakin yhdessä rajoite-epäyhtälöiden leikkauspisteessä eli *kärjessä.*

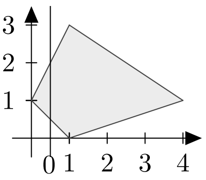
Yllä olevien huomioiden perusteella optimaaliset strategiat ja tavoitefunktion arvo löydetään läpikäymällä rajoite-epäyhtälöiden leikkauspisteet. Tähän tarkasteluun soveltuva menetelmä on simplex-algoritmi. Se on tehokas algoritmi, joka on käytettävissä esimerkiksi MATLAB-ohjelmassa lineaariohjelmien ratkaisemiseen [**10**].

Tarkastellaan seuraavaksi ideaa simplex-algoritmin toimintaperiaatteesta ja formalisoidaan algoritmi sen jälkeen.

Esimerkki 4.6. Kuvassa 4.1 epäyhtälöt

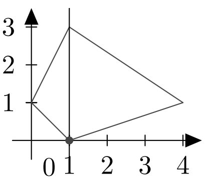
$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\geq \ \ 1, \\ -2x_1 + \ x_2 &\leq \ \ 1, \\ -3x_1 + 3x_2 &\geq -1, \\ \text{ja } -2x_1 - 3x_2 &\leq -11 \end{aligned}$$

asettavat rajoite-ehdot, joiden rajaama alue on konveksi. Pyritään maksimoimaan tavoitefunktiota $z = x_1$.



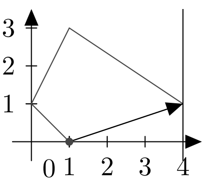
Kuva 4.1. Alkutilanne

Muokataan rajoite-ehdot yhtälöiksi ja keskitytään tarkastelemaan alkuperäisen rajoitealueen reunoja. Algoritmi antaa tarkastelualueen kärjen, esimerkiksi kuvassa 4.2 pisteen $(1, 0)$, jossa tavoitefunktion arvoa tarkastellaan.



Kuva 4.2. Etsitään kärki

Jos tavoitefunktion ääriarvoa ei edellisessä vaiheessa saavutettu, löydetään simplex-algoritmilla rajoiteyhtälöä pitkin edeten uusi kärkipiste, jossa tavoitefunktio saa suuremman arvon. Kuvassa 4.3 löydetään piste $(4, 1)$, jossa tavoitefunktio z saa maksimiarvon 4.



Kuva 4.3. Algoritmilla löydetään parempi ratkaisu

4.4. Simplex-algoritmi

Määritelmä 4.7. Muuttuja x_i on on lineaarisen yhtälöryhmän *kantamuuttuja*, jos sen kerroin on yksi täsmälleen yhdessä yhtälöryhmän yhtälössä ja nolla muissa.

Määritelmä 4.8. Lineaariyhtälöryhmä on *kanonisessa muodossa*, jos sen jokaisessa yhtälössä on kantamuuttuja.

Esimerkki 4.9. Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

on kanonisessa muodossa. Yhtälöryhmässä on m yhtälöä ja $n \geq m$ kappaletta muuttujia. Muuttujat $x_1, \ldots, x_m$ ovat kantamuuttujia.

Määritelmä 4.10. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen kuvaus ja olkoot luvuille $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ voimassa $b_1 \leq f \leq b_2$. Olkoot $u_1, u_2 \geq 0$ muuttujia siten, että

$$f(x) - u_1 = b_1 \text{ ja } f(x) + u_2 = b_2 \text{ kaikilla } x \in A.$$

Tällöin muuttuja u_1 on *ylijäämämuuttuja* ja muuttuja u_2 on *alijäämämuuttuja*.

LEMMA 4.11. *Lineaariohjelmat ja duaalit voidaan esittää kanonisessa muodossa yli- ja alijäämämuuttujien avulla.*

TODISTUS. Lineaariohjelmat saadaan lineaarisiksi yhtälöryhmiksi alijäämä muuttujien avulla. Duaalin tapauksessa esitetään rajoite-ehto

$$a_{j1}y_1 + \cdots + a_{jn}y_n \geq c_j$$

ylijäämämuuttujan u' avulla lineaariyhtälöinä

$$a_{j1}y_1 + \cdots + a_{jn}y_n - u' = c_j.$$

Koska jokainen reaaliluku voidaan esittää kahden positiivisen reaaliluvun erotuksena, saadaan muuttujien $u_1 \geq 0$ ja $u_2 \geq 0$ avulla esitys $u' = u_1 - u_2$. Näin ollen yhtälössä

$$a_{j1}y_1 + \cdots + a_{jn}y_n - u_1 + u_2 = c_2$$

on kantamuuttuja u_2. Vastaavalla menettelyllä muiden epäyhtälöiden kanssa saadaan rajoite-ehdot lineaariyhtälöiksi.

Kertomalla lineaariyhtälöt puolittain sopivilla luvuilla ja vähentämällä yhtälöitä toisistaan, saadaan muuttujille kanonisen muodon vaatimat kertoimet. □

MÄÄRITELMÄ 4.12. Olkoon lineaarinen yhtälöryhmä kanonisessa muodossa. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu, jolle $x_i = 0$, kun x_i ei ole kantamuuttuja, on *kantaratkaisu.*

ESIMERKKI 4.13. Esimerkin 4.9 lineaariyhtälöryhmällä on kantaratkaisu $x_i = b_i$, kun $i = 1, \ldots, m$ ja $x_i = 0$, kun $i = m + 1, \ldots, n$.

HUOMAUTUS 4.14. Oletetaan jatkossa, että lineaariohjelma on muokattu esimerkin 4.9 muotoon, ja että minimoitavana on tavoitefunktio

$$z = c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c_n x_n.$$

Tällöin lukua $-z$ voidaan pitää kantamuuttujana, ja yhtälö voidaan lisätä lineaariyhtälöryhmään. Ongelmana on minimoida z, kun

$$\begin{array}{rl} x_1 + \ a_{1,m+1}x_{m+1} + \ a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + \ a_{1,n}x_n &= b_1 \\ x_2 + \ a_{2,m+1}x_{m+1} + \ a_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + \ a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \\ -z + \quad c_{m+1}x_{m+1} + \quad c_{m+2}x_{m+2} + \ldots + \quad c_n x_n &= 0 \end{array} \tag{4.1}$$

LAUSE 4.15. *Olkoon lineaariohjelma muodossa* (4.1) *siten, että* $b_i \geq 0$ *kaikilla* $i = 1, \ldots, m$. *Jos muuttujille* $c_i \geq 0$, *kaikilla* $i = m + 1, m + 2, \ldots, n$, *niin kantaratkaisu antaa tavoitefunktion* z *pienimmän mahdollisen arvon ja* $z = 0$.

TODISTUS. Jos kertoimet c_i ovat ei-negatiivisia kaikilla indekseillä i, niin summan $\sum c_i x_i$ pienin mahdollinen arvo on nolla aina, kun muuttujat x_i ovat ei-negatiivisia. Jotta viimeinen yhtälö toteutuisi, on oltava $\min z \geq 0$. Muodon (4.1) mukaiselle kantaratkaisulle on $z = 0$, joten kantaratkaisu antaa tavoitefunktion pienimmän mahdollisen arvon. □

HUOMAUTUS 4.16. Jos esityksen (4.1) viimeinen yhtälö on muotoa

$$-z + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_n x_m = -z_0,$$

niin lauseen 4.15 päättelyä mukaillen tavoitefunktiolle z saadaan pienin mahdollinen arvo z_0. [**6**]

Jos lauseen 4.15 mukainen tarkastelu ei anna optimaalista ratkaisua, voidaan konstruoida uusi ratkaisu, jolla on parempi tavoitefunktion arvo. Lähestytään tätä esimerkillä ja osoitetaan väite sen jälkeen.

Esimerkki 4.17. Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ \ \ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ -z - x_1 - \ \ x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

kahdella ensimmäisellä yhtälöllä on kantamuuttujat x_3 ja x_4. Kantaratkaisulla $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$ saadaan tavoitefunktiolle arvo

$$z = -x_1 - x_2 = 0.$$

Jakamalla ylin yhtälö luvulla kolme ja vähentämällä näin saatu yhtälö lopuista yhtälöistä, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \qquad = \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 = \frac{2}{3} \\ -z - 2x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \qquad = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

jonka kahden ensimmäisen yhtälön kantamuuttujat ovat x_1 ja x_4. Yhtälöryhmän kantaratkaisu on $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = \frac{2}{3}$, jolla tavoitefunktio saa arvon

$$z = -2x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Huomattiin siis, että yksinkertaisilla yhtälönmuokkausoperaatioilla pystyttiin vaihtamaan kantamuuttujaa, jolloin saatiin uusi kantaratkaisu ja tavoitefunktiolle pienempi arvo. Osoitetaan kyseisen havainnon pätevän yleisesti.

Lause 4.18. *Olkoon lineaariohjelma esitettynä kanonisesti merkinnän* (4.1) *mukaisesti. Jos on olemassa kertoimet $c_s < 0$ sekä $a_{is} > 0, s \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$ ja kaikille kantamuuttujille $x_k \neq 0, k = 1, \ldots, m$ (ei degeneroituneita), niin kantaratkaisun avulla voidaan konstruoida uusi mahdollinen ratkaisu, jolla on pienempi tavoitefunktion arvo.*

Todistus. Osoitetaan, että korvaamalla kantamuuttujamuuttuja x_r muuttujalla x_s saadaan aikaiseksi uusi mahdollinen kantaratkaisu. Aloitetaan osoittamalla, että rajoite-ehdot täyttävä ratkaisu on mahdollista konstruoida.

Asetetaan

$$x_s^* = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}} \geq 0, \text{ missä } i \in \{1, \ldots, m\}.^1$$

Vaihdetaan muuttujat

$$\begin{aligned} &x_i = b_i - a_{is}x_s^* \geq 0, &&\text{kun} \quad i = 1, 2, \ldots, n; i \neq r \\ &x_s = x_s^* && \\ &x_j = 0, &&\text{kun} \quad j = r, m+1, m+2, \ldots, n; j \neq s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] Jos $\min_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}} = \min_{a_{ks}>0} \frac{b_k}{a_{ks}}$ kahdelle tai useammalle $k \neq i$, niin muuttuja x_s^* voidaan valita esimerkiksi arpomalla [**6**].

Tavoitefunktiolle on

$$z = z_0 + c_s x_s^* \leq z_0,$$

sillä $c_s < 0$. Koska muuttuja x_r oletettiin kantamuuttujaksi, on oltava $b_r \neq 0$, jolloin $x_s^* > 0$ ja $z < z_0$. Konstruoitu ratkaisu ei siten ole alkuperäinen kantaratkaisu. Tämän lisäksi tavoitefunktiolle saatiin pienempi arvo.

Osoitetaan nyt, että muuttujat $x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$ ja x_s muodostavat kantamuuttujien joukon. Koska $a_{rs} > 0$, saadaan alkion a_{rs}, yhtälöiden puolittaisen kertomisen ja yhtälöiden yhteenlaskun avulla muuttuja x_s eliminoitua kaikista yhtälöryhmän 4.1 yhtälöistä lukuun ottamatta yhtälöä r. Näin ollen yhtälöryhmä saadaan kanoniseen muotoon. □

Edellä konstruoidun uuden kantaratkaisun optimaalisuutta voidaan testata lauseen 4.15 avulla. Mikäli ratkaisu ei ole optimaalinen, voidaan lauseita 4.18 ja 4.15 soveltaa iteratiivisesti. Tätä kutsutaan *simplex-algoritmiksi.*

LAUSE 4.19. *Jos simplex-algoritmin jokaisessa iteraatiossa kantamuuttujille on $x_i \neq 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$, niin simplex-algoritmi päättyy äärellisen monen iteraation jälkeen optimaalisen ratkaisun löytymiseen.*

TODISTUS. Koska muuttujia on äärellinen määrä, myös kantamuuttujia ja erilaisia kantamuuttujien kombinaatioita on oltava äärellinen määrä. Jos algoritmi jatkuisi loputtomiin, niin se palaisi toisinaan aiemmin läpikäytyyn kantamuuttujien kombinaation. Koska kantamuuttujat täyttävät jokaisessa iteraatiossa lauseen 4.18 konstruktion ehdot, olisi aiemmin läpikäytyyn kantamuuttujakombinaatioon palatessa tavoitefunktiolle voimassa $z < z$ jollekin $z \in \mathbb{R}$, mikä on ristiriita. □

HUOMAUTUS 4.20. Jos simplex-algoritmissa on jollekin kantamuuttujalle $x_i = 0$, niin tavoitefunktion arvo voi uutta kantaratkaisua konstruoitaessa pysyä ennallaan. Tällöin algoritmi saattaa jäädä kiertämään kehää näiden kantaratkaisujen joukkoon ja jatkua äärettömyyksiin. [**6**]

HUOMAUTUS 4.21. Yleisessä lineaarisessa optimointiongelmassa on mahdollista, että ratkaisua ei ole olemassa tai että tavoitefunktio saa mielivaltaisen pieniä arvoja. Kyseiset tapaukset johtuvat rajoite-ehdoista ja niissä simplex-algoritmi ei luonnollisesti toimi [**6**]. Minimax-lauseen mukaan pelien tapauksessa tavoitefunktion arvon on oltava olemassa, joten pelien ratkaisemisen kannalta kyseisestä mahdollisuudesta ei seuraa ongelmia.

4.5. Esimerkkejä lineaariohjelmien ratkaisemisesta

Seuraavaksi ratkaistaan joitakin kahden pelaajan nollasummapelejä hyödyntäen simplex-algoritmia ja MATLAB-ohjelmaa.

ESIMERKKI 4.22. Ratkaistaan matriisipeli

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan tilannetta pelaajan 2 kannalta. Koska kaikki voittomatriisin alkiot ovat aidosti positiivisia on pelin arvolle $v > 0$. Tarkastellaan arvon ylärajoja μ, joille on $0 < v \leq \mu$.

Pelaajan 2 ongelmana on minimoida luku μ, kun

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \leq \mu \\ y_1 + 2y_2 \leq \mu \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Jakamalla ehdot puolittain luvulla μ ja merkitsemällä jatkossa $y_i := \frac{y_i}{\mu}$, kun $i = 1, 2$, saadaan ongelmaksi maksimoida luku $\frac{1}{\mu} = y_1 + y_2$, kun

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Kyseessä on siis lineaariohjelma. Lisätään alijäämämuuttujat $y_3, y_4 \geq 0$. Tällöin optimointiongelmaksi saadaan

$$\begin{array}{l} \text{maksimoi } y_1 + y_2 \\ \text{rajoitteilla} \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 + 2y_2 + y_4 = 1, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{array}$$

Edeltävä muoto on yhtäpitävä ongelman

$$\begin{array}{l} \text{minimoi } -y_1 - y_2 \\ \text{rajoitteilla} \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 + 2y_2 + y_4 = 1, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

kanssa. Eräs vaaditut ehdot täyttävä ratkaisu on $y_1 = 0 = y_2, y_3 = 1 = y_4$, jolloin tavoitefunktion arvo on $-y_1 - y_2 = 0$. Näillä tiedoilla voidaan aloittaa simplex-algoritmin käyttö.

Kootaan lauseen 4.18 tiedot muuttujista ja niiden kertoimista *simplex-taulukkoon* [**23**, s. 72]:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_3	3	$\boxed{1}$	1	0	1
y_4	1	2	0	1	1
	-1	-1	0	0	0

Taulukossa (vrt. esim. 4.17) sarakkeiden indekseinä ovat muuttujat ja sarakkeista löytyy kunkin muuttujan kerroin. Rivien indekseinä ovat kantamuuttujat. Alin rivi kuvaa tavoitefunktiota ja alimmaisena oikealla on tavoitefunktion arvo löydetyllä ratkaisulla. Tavoitteena on muokata taulukko *tukioperaatioiden* (ks. liite A) avulla vastaamaan lauseen 4.15 oletuksia.

Simplex-taulukossa on laatikoituna *tukialkio*, joka täyttää seuraavat esityksen (4.1) mukaiset ehdot:

$$c_i < 0 \text{ ja } \frac{b_i}{a_{ij}} \geq 0, \text{ missä } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Tukioperaatiossa simplex-taulukkoa muokataan kaavion

$$\boxed{\begin{matrix} \boxed{a} & b \\ c & d \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{a} & \frac{b}{a} \\ -\frac{c}{a} & d-\frac{bc}{a} \end{matrix}}$$

mukaan tulkiten kirjain a tukialkioksi, b tukialkion kanssa samalla rivillä sijaitsevaksi alkioksi, c tukialkion kanssa samassa sarakkeessa sijaitsevaksi alkioksi ja d miksi tahansa muuksi taulukon alkioksi. Operaation aikana tukialkion muuttujasta tulee kantamuuttuja. Pohjimmiltaan tukioperaatioissa on siis kyse esimerkin 4.17 mukaisesta kantamuuttujien vaihdosta.

Tukioperaatioiden avulla simplex-taulukko saadaan ensin muotoon

	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_2	3	1	1	0	1
y_4	$\boxed{-5}$	-2	-2	1	-1
	2	1	1	0	1

ja siitä edelleen muotoon

	y_1	y_2	y_3	y_4	
y_2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
y_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Ratkaistavana olleella lineaariyhtälöryhmällä on viimeisestä sarakkeesta löytyvä kantaratkaisu $(y_1, y_2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, joka antaa esimerkin 4.17 tavoin alimman rivin tavoitefunktiolle arvon $\frac{3}{5}$. Koska tämä vastaa alkuperäisen pelin arvon käänteislukua, saadaan pelille arvo $\mu = \frac{5}{3}$. Kun peliä muokattiin lineaariseksi yhtälöryhmäksi, jaettiin muuttujat pelin arvolla. Kertomalla yhtälöt puolittain pelin arvolla, saadaan alkuperäisen pelin ratkaisu. Näin olleen pelaajalle 2 saadaan kantaratkaisun ja pelin arvon avulla optimaalinen strategia $y^* = \mu[y_1, y_2]^T = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$.

Pelaajalle 1 voidaan, kuten esimerkin alussa, johtaa pelaajan 2 lineaariohjelmaa vastaava duaali: minimoi $\frac{1}{\lambda} = x_1 + x_2$, kun

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Pelaajan 1 optimaalinen strategia saadaan suoraan pelaajan 2 simplex-taulukosta alijäämämuuttujasarakkeiden alimpia alkioita ja pelin arvoa hyödyntäen [**7**]. Pelaajalla 1 on optimaalinen strategia $x^* = \mu[y_3, y_4]^T = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$.

LAUSE 4.23. *Olkoot kahden eri pelin voittomatriisit* $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ *ja* $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$, *ja näillä peleillä arvot* v_A *ja* v_B. *Jos jollakin luvulla* $p \in \mathbb{R}$ *on voimassa* $a_{ij} = b_{ij} + p$ *kaikilla* i, j, *niin*

(1) *peleissä on samat optimaaliset strategiat*
(2) *pelien arvoilla on yhteys* $v_A = v_B + p$.

TODISTUS. [**4**, s. 108] □

Esimerkki 4.24. Ratkaistaan peli, jolla on voittomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska

$$A + 2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = B,$$

niin edeltävän esimerkin ja lauseen perusteella pelaajalla 1 on optimaalinen strategia $x^* = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$, pelaajalla 2 on optimaalinen strategia $y^* = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$ ja pelillä on arvo $v = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$.

Esimerkki 4.25. Ratkaistaan MATLAB-ohjelmalla matriisipeli

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

joka on esimerkin 3.14 peli symmetrian avulla yksinkertaistetummassa muodossa. Komennolla

```
[x fval]=linprog(f,L,b)
```

MATLAB ratkaisee muotoa

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^T\mathbf{x} \text{ siten, että } L\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{4.3}$$

olevat lineaariohjelmat [**10**]. Komento tulostaa lineaariohjelman ratkaisuvektorin $\mathbf{x}$ ja sen arvon **fval**.

Kuten esimerkissä 4.22, saadaan pelaajalle 2 minimoitavaksi $-\frac{1}{\mu} = -y_1 - y_2 - y_2$, kun

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \leq 1 \\ \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq 1 \\ y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Lineaariohjelman 4.3 merkinnöin on $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$, jolloin MATLAB-ohjelmasta saadaan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ ja } \mathbf{fval} = -3.$$

Tämä täytyy vielä tulkita pelin ratkaisuna, jolloin saadaan pelille arvo

$$\mu = -\mathbf{fval}^{-1} = \frac{1}{3}$$

ja pelaajalle 2 optimaalinen strategia

$$\mathbf{y} = \mu\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Esimerkki 4.26. Tulkiten edeltävää esimerkkiä esimerkin 3.14 pelinä, olisi pelaajan 2 optimaalisena strategiana valita jokin reunalinja todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$ ja joko keskimmäinen pysty- tai keskimmäinen vaakalinja todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

LUKU 5

Yleiset summapelit

On olemassa pelitilanteita, joissa yhden pelaajan hyöty ei ole pois toiselta. Reaalimaailman peleissä voidaan esimerkiksi neuvottelemalla päästä tilanteeseen, joka on kaikille pelaajille voitollinen. Kyseessä ei siten voi olla nollasummapeli. Tutkielman loppuosassa keskitytään tarkastelemaan tällaisia *yleisiä summapelejä*.

Ensimmäisenä tässä luvussa määritellään yleiset summapelit. Tämän jälkeen tehdään huomioita kahden pelaajan yleisistä summapeleistä sekä niiden yhtäläisyyksistä ja eroista kahden pelaajan nollasummapeleihin, mikä muun muassa johtaa tarpeeseen yleistää optimaaliset strategiat. Tällaisten yleistettyjen strategioiden muodostamaa paria kutsutaan Nashin tasapainoksi. Luvun loppuosassa käydään läpi määritelmät useamman kuin kahden pelaajan peleille, jolloin joudutaan luopumaan aiemmin käytetystä matriisimerkinnästä.

5.1. Kahden pelaajan yleiset summapelit

MÄÄRITELMÄ 5.1. Äärellisten joukkojen S_1 ja S_2 sekä kuvausten $f_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ ja $f_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ muodostama kokoelma on *kahden pelaajan yleinen summapeli.* Joukko S_i on pelaajan *i puhtaiden strategioiden joukko* ja kuvaus f_i on *hyötyfunktio* pelaajalle i.

Olkoon lisäksi $\#S_i = n_i \in \mathbb{N}$. Tällöin joukko

$$\Delta_{n_i} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i} : x_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n_i} x_k = 1 \right\}$$

on pelaajan *i sekastrategioiden joukko.*

HUOMAUTUS 5.2. Kahden pelaajan yleiset summapelit ovat määritelmän 1.3 mukaisia pelejä. Niiden puhtaat ja sekastrategiat määritellään kuten vastaavat ominaisuudet nollasummapeleille. Yleiset summapelit eroavatkin nollasummapeleistä vain määritelmän 1.8 perusteella.

ESIMERKKI 5.3 (Vangin ongelma). Tässä esimerkissä tarkastellaan tunnettua kahden pelaajan yleistä summapeliä, jonka historiaa on lyhyesti kuvailtu esimerkiksi viitteessä [**14**].

Pelin asetelmassa pelaajia 1 ja 2 kuulustellaan rikoksesta. Pelaajat voivat joko pysyä hiljaa (H) tai tunnustaa (T). Näiden valintojen perusteella pelaajat tuomitaan joko isommista tai pienemmistä rikkeistä. Rangaistuksen suuruuteen vaikuttaa kummankin pelaajan valinta tunnustaa tai olla tunnustamatta. Peli esitetään normaalimuodossa seuraavasti

$$\begin{array}{c|cc} \quad 2 & H & T \\ 1 & & \\ \hline H & (-1,-1) & (-10,0) \\ T & (0,-10) & (-8,-8) \end{array}.$$

Pelaajilla 1 ja 2 on siis voittomatriisit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -8 \end{bmatrix}.$$

Koska $A \neq -B$, niin kyseessä ei ole nollasummapeli.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan vangin ongelmaa nollasummapelien keinoin. Pelaajan 2 voittomatriisista B löytyy satulapiste $b_{11} = -1$, mutta pelaajan 1 voittomatriisissa ei ole satulapistettä. Nollasummapeleissä satulapiste määriteltiin pelaajan 1 voittomatriisin avulla, joten ainakaan sellaisenaan satulapisteiden käyttö ei sovellu yleisille summapeleille.

Dominaatiotarkastelulla voidaan todeta, että pelaajan 1 on suotuisampaa pelata alempaa riviä ja pelaajan 2 pelata oikeaa saraketta. Tämä johtaa kummankin pelaajan tapauksessa hyötyfunktion arvoon -8. Kuitenkin molempien hiljaa pysyminen takaisi molemmille pelaajille paremman hyötyfunktion arvon. Toisaalta tunnustaminen takaa sen, ettei pelaajan tilanne voi huonontua, teki vastustaja mitä tahansa.

Määritelmä 5.5. Jos sekastrategioille $\mathbf{x}^* \in \Delta_m$ ja $\mathbf{y}^* \in \Delta_n$ sekä voittomatriiseille $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ on voimassa

$$\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{y}^* \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \Delta_m$$

ja

$$\mathbf{x}^{*T} B \mathbf{y}^* \geq \mathbf{x}^{*T} B \mathbf{y} \text{ kaikilla } \mathbf{y} \in \Delta_n,$$

niin strategiapari $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ on *Nashin tasapaino.*

Määritelmä 5.6. Jos molemmat Nashin tasapainon muodostavat sekastrategiat ovat puhtaita strategioita, niin käytetään nimitystä *puhtaiden strategioiden Nashin tasapaino.*

Esimerkki 5.7. Vangin ongelma -pelissä molempien pelaajien tunnustaminen on puhtaiden strategioiden Nashin tasapaino. Tätä vastaavat pelaajien puhtaat strategiat

$$\mathbf{x}^* = [0,1]^T = \mathbf{y}^*.$$

Tällöin on

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{*T}A\mathbf{y}^* &= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -10\\ 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\
&= -8\\
&\geq -2p-8\\
&= -10p-8(1-p)\\
&= \begin{bmatrix}p & 1-p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -10\\ 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p & p-1\end{bmatrix}^T A\mathbf{y}^*
\end{aligned}$$

kaikilla $p \in [0,1]$. Lisäksi on

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{*T}B\mathbf{y}^* &= -8\\
&\geq -8-2q\\
&= -10q-8(1-q)\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -10 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix} = \mathbf{x}^{*T}B\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

kaikilla $q \in [0,1]$. Koska

$$\bigcup_{p\in[0,1]} \begin{bmatrix}p & 1-p\end{bmatrix}^T = \Delta_2 = \bigcup_{q\in[0,1]} \begin{bmatrix}q & 1-q\end{bmatrix}^T,$$

niin strategiat $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{y}^*$ muodostavat Nashin tasapainon.

Puhtailla strategioilla $\mathbf{x}_1 = [1,0]^T = \mathbf{y}_1$ saadaan

$$\mathbf{x}_1^T A\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -10\\ 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -1 \leq -p = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}_1$$

kaikilla $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}p & 1-p\end{bmatrix}^T \in \Delta_2$, joten strategiapari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ ei ole Nashin tasapaino.

Nashin tasapainon toteuttava strategia on sellainen, jonka avulla pelaaja saa alarajan omalle menestykselleen pelissä. Vastapelaajan valitsema strategia voi ainoastaan parantaa pelaajan hyötyä. Nashin tasapaino on siten optimaalisen strategiaparin yleistys.

LEMMA 5.8. *Kahden pelaajan nollasummapelin optimaaliset strategiat muodostavat Nashin tasapainoparin.*

TODISTUS. Kahden pelaajan nollasummapelissä pelaajien 1 ja 2 voittomatriiseille on $A = -B$, joten tulos seuraa suoraan lauseen 2.18 kohdista (i) ja (ii). □

MÄÄRITELMÄ 5.9. Olkoon matriisi $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ pelaajan 1 ja matriisi $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ pelaajan 2 voittomatriisi ja olkoot kuvaukset

$$f_1, f_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$$

pelaajien 1 ja 2 hyötyfunktiot kahden pelaajan yleisessä summapelissä. Luku

$$Ef_1 = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

on pelaajan 1 ja luku

$$Ef_2 = \mathbf{x}^T B\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

on pelaajan 2 *hyötyfunktion odotusarvo* sekastrategioilla $\mathbf{x} \in \Delta_m$ ja $\mathbf{y} \in \Delta_n$.

ESIMERKKI 5.10 (Sukupuolten taistelu [**9**]). Olkoon kahden pelaajan yleisen summapelin voittomatriisi

$$C = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}.$$

Tällä pelillä on Nashin tasapainot

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \text{ ja } (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \left(\begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \right).$$

Tämä nähdään, sillä kaikilla $p, q \in [0,1]$, vektorit

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} p & 1-p \end{bmatrix}^T, \mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} q & 1-q \end{bmatrix}^T \in \Delta_2$$

ovat sekastrategioita. Lisäksi kaikilla $p, q \in [0,1]$ voimassa

(1)

$$\mathbf{x}_1^T A\mathbf{y}_1 = 4 \geq 4p = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}_1$$

ja

$$\mathbf{x}_1^T B\mathbf{y}_1 = 1 \geq q = \mathbf{x}_1^T B\mathbf{y},$$

jolloin pelaajan 1 hyötyfunktion odotusarvo on 4, kun se pelaajalla 2 on 1

(2)

$$\mathbf{x}_2^T A\mathbf{y}_2 = 1 \geq p = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}_2$$

ja

$$\mathbf{x}_2^* B\mathbf{y}_2 = 4 \geq 4q = \mathbf{x}_2^* B\mathbf{y},$$

jolloin pelaajan 1 hyötyfunktion odotusarvo on 1 ja pelaajalla 2 se on 4;

(3)

$$\mathbf{x}^{*T} A\mathbf{y}^* = 4/5 \geq 4/5 = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}^*$$

ja

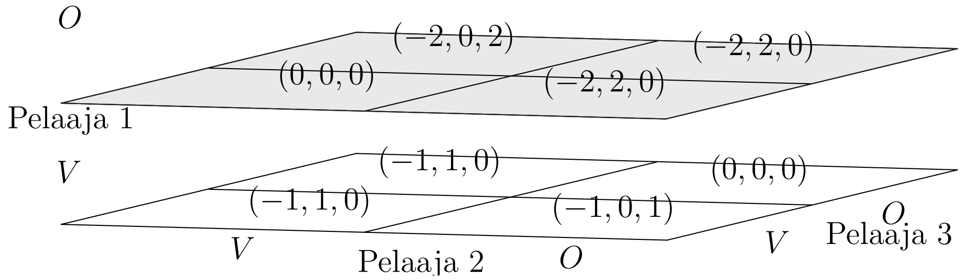
$$\mathbf{x}^{*T} B\mathbf{y}^* = 4/5 \geq 4/5 = \mathbf{x}^{*T} B\mathbf{y},$$

jolloin kummankin pelaajan hyötyfunktion odotusarvo on $\frac{4}{5}$.

Havaittiin siis, että Nashin tasapainoja voi olla useita. Toisin kuin nollasummapelien tapauksessa, Nashin tasapainot eivät määrää pelaajien hyötyfunktioiden odotusarvoja yksikäsitteisesti.

5.2. Useamman pelaajan yleiset summapelit

Tähän asti tutkielmassa on tarkasteltu lähinnä kahden pelaajan pelejä. Koska Nashin tasapaino on pelin arvoa ja optimaalisia strategioita yksinkertaisempi yleistää useamman kuin kahden pelaajan tapaukseen, tarkastellaan lopuksi monen pelaajan pelejä. Yleiset summapelit vähintään kahdelle pelaajalle määriteltiin huomatuksen 5.2 perusteella kohdassa 1.3.



KUVA 5.1. Pelaajien voitot esimerkin 5.11 mukaisessa pelissä

ESIMERKKI 5.11 (Kolmen pelaajan valitse käsi). Pelataan esimerkin 1.1 kaltaista peliä, johon otetaan kolmas pelaaja mukaan. Olkoon pelaaja 1 arvuuttaja, joka piilottaa kolikot; yhden kolikon vasempaan käteensä tai kaksi kolikkoa oikeaan käteensä. Pelaaja 2 valitsee piilotuksen jälkeen joko oikean tai vasemman käden ja voittaa siihen piilotettut kolikot. Tämän jälkeen pelaaja 3, joka ei tiedä pelaajan 2 valintaa valitsee jomman kumman pelaajan 1 käsistä ja voittaa siihen piilotettut kolikot, mikäli kolikkoja on jäljellä.

Tällöin esimerkiksi pelaajalle 1 saadaan hyötyfunktio $f_1 : \{V, O\}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} -2, & \text{kun } x \in \{(O,O,O),(O,O,V),(O,V,O)\} \\ -1, & \text{kun } x \in \{(V,V,V),(V,V,O),(V,O,V)\} \\ 0, & \text{kun } x \in \{(V,O,O),(O,V,V)\}. \end{cases}$$

Kuten kahden pelaajan pelit, tämäkin peli voidaan taulukoida. Jos pelaaja 1 käyttää piilona vasenta kättä, riippuu voitonmaksu pelaajien 2 ja 3 valinnoista, jolloin saadaan taulukko

3 / 2	V	O
V	$(-1,1,0)$	$(-1,1,0)$
O	$(-1,0,1)$	$(0,0,0)$

Jos taas pelaaja 1 käyttää piilona oikeaa kättä, saadaan taulukko

3 / 2	V	O
V	$(0,0,0)$	$(-2,0,2)$
O	$(-2,2,0)$	$(-2,2,0)$

Nämä taulukot voidaan yhdistää kuvassa 5.1 esitetyksi kolmiulotteiseksi taulukoksi.

Koska jo kolmen pelaajan tapauksessa tarvitaan joko vähintään kahta kaksiulotteista tai yhtä kolmiulotteista taulukkoa ilmaisemaan pelistä tarvittavia tietoja, ei matriisinotaatio ole yhtä käyttökelpoinen kuin kahden pelaajan peleissä.

MÄÄRITELMÄ 5.12. Olkoon $\mathbf{x}^{(i)}$ pelaajan $i = 1, \ldots, n$ sekastrategia n-pelaajan yleisessä summapelissä. Tällöin pelaajan *j hyötyfunktion f_j odotusarvo* pelaajien $1, \ldots, n$ sekastrategioilla $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ on

$$Ef_j := \sum_{\mathbf{l}_1 \in S_1, \ldots, \mathbf{l}_n \in S_n} x^{(1)}_{\mathbf{l}_1} \ldots x^{(n)}_{\mathbf{l}_n} f_j(\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n),$$

missä

$$\mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} & \dots & x_{\#S_i}^{(i)} \end{bmatrix}^T$$

MÄÄRITELMÄ 5.13. Olkoon pelaajan i puhtaiden strategioiden joukolle S_i voimassa $\#S_i = n_i < \infty$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tällöin kuvaus

$$F_j : \Delta_{n_1} \times \cdots \times \Delta_{n_n} \to \mathbb{R}, \quad F_j((\mathbf{x}^{(i)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})) = Ef_j$$

on pelaajan j *sekastrategioiden hyötyfunktio.*

MÄÄRITELMÄ 5.14. Olkoon joukko Δ_{n_i} pelaajan i sekastrategioiden joukko ja kuvaus $F_i : \times_{i=1}^{n} \Delta_{n_i} \to \mathbb{R}$ pelaajan i sekastrategioiden hyötyfunktio kaikille $i = 1, \dots, n$. Jos sekastrategioille $\tilde{\mathbf{x}}^{(j)} \in \Delta_{n_j}$ ja sekastrategioiden hyötyfunktioille F_j on kaikilla $j = 1, \dots, n$ voimassa

$$F_j(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{(j-1)}, \mathbf{x}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}^{j+1}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{(n)}) \leq F_j(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{(j-1)}, \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}, \tilde{\mathbf{x}}^{(j+1)}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{(n)}),$$

millä tahansa sekastrategialla $\mathbf{x}^{(j)} \in \Delta_{n_j}$, niin sekastrategiat $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{(n)}$ muodostavat *Nashin tasapainon.*

LUKU 6

Nashin lause

Tässä luvussa osoitetaan Nashin tasapainon olemassaolo n-pelaajan yleisessä summapelissä. Tuloksen osoitti ensimmäisenä John Nash vuonna 1950 [**13**].

LAUSE 6.1. *Jokaisella yleisellä summapelillä on olemassa ainakin yksi Nashin tasapaino.*

TODISTUS. Olkoon (n, S, F) n-pelaajan yleinen summapeli. Olkoon kuvaus

$$F_i : \Delta_{n_1} \times \cdots \times \Delta_{n_n} \to \mathbb{R}$$

pelaajan i sekastrategioiden hyötyfunktio kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Merkitään $K = \Delta_{n_1} \times \cdots \times \Delta_{n_n} \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_n}$. Koska lemman 2.13 mukaan joukko Δ_{n_i} on kompakti ja konveksi kaikilla $i = 1, \ldots, n$, niin joukko K on kompakti ja konveksi.

Seuraavaksi tarkoituksena on määritellä kuvaus $F : K \to K$, jolla kuvataan sekastrategiat $(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})$ sekastrategioiksi $(\mathbf{y}^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)})$, ja osoittaa väite tämän kuvauksen ominaisuuksien avulla.

Olkoon vektori $\mathbf{x}^{(i)} = \left[\begin{smallmatrix} x_1^{(i)} & \ldots & x_{n_i}^{(i)} \end{smallmatrix}\right]^T \in \Delta_{n_i}$ pelaajan i sekastrategia kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Määritellään kuvaus $c_{\mathbf{l}_i}^{(i)} : K \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{l}_i}^{(i)} &:= c_{\mathbf{l}_i}^{(i)}(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}) \\ &= \max\{F_i(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(i-1)}, \mathbf{l}_i, \mathbf{x}^{(i+1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}) - F_i(\mathbf{x}^{(1)} \ldots, \mathbf{x}^{(n)}), 0\}, \end{aligned}$$

kaikille $\mathbf{l}_i \in S_i$ ja $i = 1, \ldots, n$. Kuvaus $c_{\mathbf{l}_i}^{(i)}$ ilmaisee pelaajan i lisähyödyn, kun hän valitsee sekastrategian $\mathbf{x}^{(i)}$ sijaan puhtaan strategian $\mathbf{l}_i$.

Määritellään kuvaus $F : K \to K$,

$$F(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}) = (\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}^{(n)}),$$

missä

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^{(i)} & \ldots & \tilde{x}_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix}^T$$

ja

$$\tilde{x}_j^{(i)} = \frac{x_j^{(i)} + c_j^{(i)}}{1 + \sum_{k \in S_i} c_k^{(i)}} \qquad \text{kaikilla } j \in \{1, \ldots, n_i\} = S_i.$$

Koska kuvaukset F_i ovat jatkuvia, niin myös kuvaukset $c_{\mathbf{l}}^{(i)}$ ovat jatkuvia ja edelleen kuvaus F on jatkuva.

Kuvauksen F kuvan komponentit $\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$ ovat sekastrategioita, sillä $\tilde{x}_j^{(i)} \in (0, 1)$ ja

$$\sum_{j \in S_i} \tilde{x}_j^{(i)} = \sum_{j \in S_i} \frac{x_j^{(i)} + c_j^{(i)}}{1 + \sum_{k \in S_i} c_k^{(i)}} = \frac{\sum_{j \in S_i} x_j^{(i)} + \sum_{j \in S_i} c_j^{(i)}}{1 + \sum_{k \in S_i} c_k^{(i)}} = \frac{1 + \sum_{k \in S_i} c_k^{(i)}}{1 + \sum_{k \in S_i} c_k^{(i)}} = 1.$$

Brouwerin kiintopistelauseen (ks. liite B.3) perusteella on olemassa piste

$$(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) \in K,$$

jolle on

$$F(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}).$$

Osoitetaan vielä, että kyseisessä pisteessä on $c^{(i)}_{\mathbf{l}_i} = 0$ kaikille puhtaille strategioille $\mathbf{l}_i \in S_i$, jokaisella pelaajalla $i = 1, \dots, n$. Koska joukko S_1 tiedetään numeroituvaksi, niin sen alkiot voidaan nimetä. Asetetaan $S_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$. Oletetaan, että $c^{(1)}_{e_1} > 0$, jolloin

$$F_1(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) < F_1(e_1, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}).$$

Pelaajan 1 sekastrategioiden hyötyfunktion arvo voidaan esittää pelaajan 1 puhtaiden strategioiden avulla painotettuna keskiarvona

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) &= \sum_{\mathbf{l}_1 \in S_1} x^{(1)}_{\mathbf{l}_1} F_1(\mathbf{l}_1, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) \\ &= \frac{\sum_{\mathbf{l}_1 \in S_1} \left(x^{(1)}_{\mathbf{l}_1} F_1(\mathbf{l}_1, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) \right)}{\sum_{\mathbf{l}_1 \in S_1} x^{(1)}_{\mathbf{l}_1}}, \end{aligned}$$

joten jollakin $i \in \{2, 3, \dots, n_1\}$ on keskiarvon ominaisuuksien perusteella oltava

$$x^{(1)}_{e_i} > 0$$

ja

$$F_1(e_i, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) \leq F_1(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}).$$

Tästä seuraa, että $c^{(1)}_{e_i} = 0$, joten kiintopisteoletuksen vuoksi olisi oltava

$$x^{(1)}_{e_i} = \frac{x^{(1)}_{e_i} + c^{(1)}_{e_i}}{1 + \sum_{k \in S_1} c^{(1)}_k} = \frac{x^{(1)}_{e_i}}{1 + \sum_{k \in S_1} c^{(1)}_k} < \frac{x^{(1)}_{e_i}}{1} = x^{(1)}_{e_i},$$

sillä $c^{(1)}_{e_1} > 0$, jolloin $\sum_{k \in S_1} c^{(1)}_k > 0$. Edellä havaitun ristiriidan seurauksena epäyhtälö $c^{(1)}_{e_1} > 0$ ei voi olla tosi. Soveltamalla vastaavaa päättelyä mille tahansa puhtaalle strategialle $\mathbf{l}_i \in S_i$, mille hyvänsä $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ todetetaan, että kiintopiste $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$ on Nashin tasapaino. $\square$

LIITE A

Tukialkiot ja -operaatiot

MÄÄRITELMÄ A.1. Olkoot $f_1, \ldots, f_m$ reaaliarvoisia lineaarikuvauksia ja olkoon $f_1 = b_1, \ldots, f_m = b_m$ näiden muodostama yhtälöryhmä. Olkoon reaaliluku $a_{rs} \neq 0$ muuttujan x_s kerroin yhtälössä $f_r = b_r$. Tällöin operaatiot

(1) Korvataan yhtälö $f_r = b_r$ yhtälöllä $a_{rs}^{-1} f_r = a_{rs}^{-1} b_r$.

(2) Kun $i \neq r$, korvataan yhtälö $f_i = b_i$ yhtälöllä $f_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} f_r = b_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} b_r$.

muodostavat *tukioperaation*, jolle luku a_{rs} on *tukialkio*.

LAUSE A.2. *Tukioperaatioilla muodostettu lineaariyhtälöryhmä on yhtäpitävä alkuperäisen lineaariyhtälöryhmän kanssa. Lisäksi muuttaja x_s on muodostetun lineaariyhtälöryhmän kantamuuttuja.*

TODISTUS. [**4**, s. 5] □

LAUSE A.3. *Tukioperaatioita voidaan soveltaa suoraan simplex-taulukkoon*

$$\begin{array}{|cc|} \boxed{a} & b \\ c & d \end{array},$$

missä a on tukialkio, b on mikä tahansa tukialkion kanssa samalla rivillä oleva alkio, c on mikä tahansa tukialkion kanssa samassa sarakkeessa oleva alkio ja d on mikä tahansa muu alkio. Tukioperaatioiden jälkeen saadaan uusi simplex-taulukko

$$\begin{array}{|cc|} \frac{1}{a} & \frac{b}{a} \\ -\frac{c}{a} & d - \frac{bc}{a} \end{array}.$$

TODISTUS. [**4**, s. 11] □

Edellisistä voidaan todeta, että esimerkiksi lauseen 4.18 todistuksen konstruktiossa hyödynnettiin tukioperaatiota. Lisäksi kyseisen lauseen todistukset voidaan tehdä suoraan simplex-taulukossa.

Lauseen 4.18 todistuksen konstruktiossa tukialkioksi valittiin kaikista alkioista se a_{ij}, jolle oli voimassa

$$\min_{a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{is}} \geq 0.$$

Toisinaan käsin laskettaessa voi laskuja helpottaa valitsemalla tukialkion muilla tavoin, kuten tehtiin esimerkissä 4.22. Tukialkion valitsemisesta on keskustelua esimerkiksi teoksessa [**23**].

LIITE B

Brouwerin kiintopistelause

Brouwerin kiintopistelause on yleistajuinen tulos, jolle on monia erilaisia todistuksia. Sen osoittaminen vaatii paljon esitietoja ja esimerkiksi algebrallisen topologian tuntemista. Näitä ei tässä tutkielmassa ole mahdollista käsitellä, mutta lukija voi perehtyä esimerkiksi kirjoitukseen [**8**].

LAUSE B.1. *Ei ole olemassa jatkuvaa kuvausta $f : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ suljetusta yksikköpallosta yksikköpallopinnalle siten, että kuvauksen rajoittuma $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ olisi identtinen kuvaus.*

TODISTUS. [**8**]. □

LAUSE B.2 (Brouwerin kiintopistelause). *Olkoon $\bar{B}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikköpallo ja olkoon kuvaus $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ jatkuva. Tällöin on olemassa piste $x \in \bar{B}^n$ siten, että $f(x) = x$.*

TODISTUS. Osoitetaan tulos antiteesillä. Oletetaan, että on olemassa jatkuva kuvaus $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$, jolle $f(x) \neq x$ kaikilla $x \in \bar{B}^n$. Olkoon $L(x)$ pisteestä $f(x)$ lähtevä, pisteen x kautta kulkeva puolisuora kaikilla $x \in \bar{B}^n$. Toisin sanoen

$$L(x) = \{f(x) + t(x - f(x)) : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Koska antiteesin mukaan $f(x) \neq x$, niin $L(x)$ on todella puolisuora. Määritellään kuvaus $r : \bar{B}^n \to S^{n-1}$, jolle

$$\begin{aligned} r(x) &= \big(L(x) \cap S^{n-1}\big) \setminus \{f(x)\} \\ &= \{f(x) + t(x - f(x)) : t > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}. \end{aligned}$$

Pisteissä $r(x)$ eli joukkojen $L(x)$ ja S^{n-1} leikkauskohdissa on voimassa

$$||L(x)|| = 1$$

eli yhtäpitävästi

$$||L(x)||^2 = 1.$$

Avaamalla puolisuoran määritelmää saadaan

$$||f(x) + t(x - f(x))||^2 = 1$$

ja uudelleenjärjestelemällä

$$t^2||x - f(x)||^2 + 2tf(x)^T(x - f(x)) + ||f(x)||^2 - 1 = 0,$$

missä pisteiden $f(x)$ ja $x - f(x)$ sisätulo on kirjoitettu vektoritulona $f(x)^T(x - f(x))$.

Kyseessä on toisen asteen yhtälö, jolla on juuret

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{-2f(x)^T(x-f(x))) \pm \sqrt{4(f(x)^T(x-f(x)))^2 - 4||x-f(x)||^2(||f(x)||^2-1)}}{2||x-f(x)||^2} \\
&= \frac{-f(x)^T(x-f(x))) \pm \sqrt{(f(x)^T(x-f(x)))^2 - (||x-f(x)||\,||f(x)||)^2 + ||x-f(x)||^2}}{||x-f(x)||^2}
\end{aligned}
$$

Schwartzin epäyhtälön perusteella on

$$
\begin{aligned}
&(f(x)^T(x-f(x)))^2 - (||x-f(x)||\,||f(x)||)^2 + ||x-f(x)||^2 \\
\geq &(f(x)^T(x-f(x)))^2 - ((x-f(x))^T f(x))^2 + ||x-f(x)||^2 \\
= &||x-f(x)||^2 > 0,
\end{aligned}
$$

joten tarkastellulla yhtälöllä on kaksi reaalista juurta. Niistä plusmerkillä varustettu juuri on aidosti positiivinen ja miinusmerkillä varustettu juuri aidosti negatiivinen. Näin ollen puolisuora $L(x)$ leikkaa pallopintaa S^{n-1} täsmälleen yhdessä pisteessä $r(x) \neq f(x)$.

Kuvaukselle r saadaan lauseke

$$
\begin{aligned}
&r(x) = f(x) + \\
&\frac{-f(x)^T(x-f(x)) + \sqrt{(f(x)^T(x-f(x)))^2 - ||x-f(x)||^2(||f(x)||^2-1)}}{||x-f(x)||^2}(x-f(x)).
\end{aligned}
$$

Vektoritulo- ja normikuvaukset ovat jatkuvia, joten kuvaus r on jatkuva. Lisäksi on $r(x) = x$ kaikilla $x \in S^{n-1}$. Näin ollen rajoittumakuvaus $r|_{S^{d-1}}$ on identtinen kuvaus, mikä on ristiriita lauseen B.1 perusteella. □

LAUSE B.3. *Brouwerin kiintopistelause konvekseille joukoille. Olkoon joukko $K \in \mathbb{R}^n$ suljettu, konveksi ja rajoitettu sekä kuvaus $f : K \to K$ jatkuva. Tällöin on olemassa piste $x \in K$ siten, että $f(x) = x$.*

TODISTUS. [**17**] tai [**18**] □

LIITE C

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko, $\{1,2,3\ldots\}$
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
A^n	Joukon A $n-$kertainen karteesinen tulo itsensä kanssa, $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ kpl}}$
x, x_i	Reaaliluku
$\mathbf{x}$	Vektori $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$
$\vec{\mathbf{a}}_i$	$m \times n$-matriisin $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ rivivektori i, $\begin{bmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_i$	Standardi kantavektori, jolle $x_i = 1$ ja $x_j = 0$, kun $j \neq i$
$\|\|x\|\|$	Vektorinormi
$\#A$	Joukon A alkioiden lukumäärä
$B^n(y, r)$	Avoin, r-säteinen, y-keskeinen n-ulotteinen pallo, $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\|y - x\|\| < r\}$
$\bar{B}^n(y, r)$	Suljettu, r-säteinen, y-keskeinen n-ulotteinen pallo, $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\|y - x\|\| \leq r\}$
$\bar{B}^n$	Suljettu, yksisäteinen, origokeskeinen, n-ulotteinen pallo, $\bar{B}^n(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x\|\| \leq 1\}$
S^{n-1}	Yksisäteinen, origokeskeinen, n-ulotteinen pallopinta, $\{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x\|\| = 1\}$
$f\|_C$	Kuvauksen $f : A \to B$ rajoittumakuvaus, $f\|_C : C \to B$, missä $f\|_C(x) = f(x)$, kun $x \in C \subset A$

Viitteet

[1] Borel, Émile: "La Théorie du Jeu et les Equations Intégrales à Noyau Symétrique," *Comptes Rendus Hebdomaires des Séances de l'Académie des Sciences*, **173**: 1304-1308, 1921. (Käänt. Leonard J. Savage: "The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels," *Econometrica*, **21**: 77-100, 1953.)

[2] Borel, Émile: "Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs," *Eléments de la Théorie des Probabilités.* kolmas painos. Paris: Librairie Scientifique, J. Hermann, 204-221, 1924. (Käänt. Leonard J. Savage: "On Games That Involve Chance and the Skill of the Players," *Econometrica*, **21**: 101-115, 1953.)

[3] Borel, Émile: "Sur les Systèmes de Formes Linéaires à Determinant Symétrique Gauche et la Théorie Générale du Jeu," *Comptes Rendus Hebdomaires des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris, **184**: 52-54, 1927. (Käänt. Leonard J. Savage: "On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play," *Econometrica*, **21**: 116-117, 1953.)

[4] Brickman, Louis: *Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory.* Springer-Verlag, 1989.

[5] Dantzig, George B.: "A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem," *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Comission for Research in Economics, Monograph No. 13, John Wiley & Sons, 1951.

[6] Dantzig, George B.: *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, 1963, toinen painos, 1965.

[7] Jones, Antonia J.: *Game Theory: Mathematical models of conflict.* Ellis Horwood Limited, 1980.

[8] Kurittu, Lassi: *Algebrallista topologiaa.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 42, 1998.

[9] Luce, R. Duncan ja Raiffa, Howard: *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* John Wiley & Sons, 1957 seitsemäs painos 1967.

[10] MathWorks, Inc., The: *Documentation Centre.* Viitattu 29.5.2013. http://www.mathworks.se/help/optim/ug/linprog.html

[11] Maynard Smith, John: *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, 1982.

[12] McKinsey, John C. C.: *Introduction to the Theory of Games.* McGraw-Hill Book Company, 1952.

[13] Nash, John F.: "Equilibrium points in n-person games". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**: 48-49, 1950.

[14] Nobel Media AB: *The Work of John Nash in Game Theory.* Viitattu 18.7.2013. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/nash-lecture.pdf

[15] Owen, Guillermo: *Game Theory.* W. B. Saunders Company, 1968.

[16] Palacios-Huerta, Ignacio: "Professionals play minimax". *Review of Economic Studies*, **70**: 395-415, 2003.

[17] Peres, Yuval: *Game Theory, Alive.* Tulostettu 4.4.2012. http://www.stat.berkeley.edu/∼peres/gtlect.pdf

[18] Pirhonen, Pasi: *Kiintopistelauseita ja niiden sovelluksia.* Matematiikan pro gradu, Jyväskylän yliopisto, 1999.

[19] Purmonen, Veikko T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 1.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 58, 2008.

[20] Purmonen, Veikko T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 2.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 59, 2008.

[21] Purmonen, Veikko T.: *Euklidiset avaruudet.* Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 49, 2009.

[22] Sion, Maurice ja Wolfe, Philip: ”On a game with no value”. *The Annals of Mathematical Studies*, **39**: 299-306, 1957.

[23] Thie, Paul R.: *An Introduction to Linear Programming and Game Theory.* John Wiley & Sons, 1979.

[24] von Neumann, John ja Morgenstern, Oskar: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944, kolmas painos, 1953.

[25] Webb, James N.: *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution.* Springer-Verlag, 2007.