Sinin ja kosinin erilaiset määrittelytavat

Anu Pääkkö

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012

Tiivistelmä: Pääkkö, A. 2012, *Sinin ja kosinin erilaiset määrittelytavat*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, matematiikan pro gradu -tutkielma.

Trigonometriset funktiot sini ja kosini ovat tuttuja kulman funktioita. Ne määritellään useimmiten geometrisesti yksikköympyrän avulla. On olemassa kuitenkin muitakin määrittelytapoja, jotka palvelevat eri päämääriä. Jos halutaan käsitellä täsmällisesti siniä ja kosinia sekä niiden sovelluksia, esimerkiksi Fourier'n sarjoja, ilman geometrisiä tulkintoja, on järkevää käyttää jotakin muuta kuin geometristä sinin ja kosinin määritelmää. Erilaiset lähestymistavat myös laajentavat ja tukevat käsityksiä kyseisistä funktioista.

Tässä tutkielmassa tutustutaan sinin ja kosinin erilaisiin määrittelytapoihin. Yksikköympyrää lähtökohtana käyttävän geometrisen määritelmän rinnalla tarkastellaan potenssisarjojen, differentiaaliyhtälöiden, käänteisfunktioiden ja aksioomien avulla tehtyjä sinin ja kosinin määritelmiä. Työssä näytetään, että jokaisen määritelmän avulla voidaan osoittaa seuraavat sinin ja kosinin perustulokset: Pythagoraan identiteetti, sinin parittomuus ja kosinin parillisuus, sinin ja kosinin jaksollisuus sekä summa- ja derivointikaavat. Lisäksi tutkielmassa tehdään pieni katsaus sinin ja kosinin historiaan.

Tutkielmassa selviää, että luvulla π on keskeinen rooli määriteltäessä siniä ja kosinia. Määritelmästä riippuen luku π määritellään yksikköympyrän alaksi, arcussinifunktion avulla tai siten, että $\frac{\pi}{2}$ on pienin positiivinen kosinin nollakohta. Määritelmät osoitetaan luonnollisesti yhtäpitäviksi. Lisäksi tutkielmassa korostuu sinin ja kosinin keskinäinen riippuvuussuhde. Erityisesti tämä ilmenee käänteisfunktioiden avulla tehtävässä määritelmässä, jossa kosini määritellään sinin derivaattaa käyttäen.

Sisältö

Johdanto

Sini ja kosini ovat tunnetuimpia trigonometrisiä funktioita. Niitä tarvitaan muun muassa kolmion kulmia tarkasteltaessa sekä mallinnettassa jaksollisia ilmiöitä. Jo peruskoulussa sini ja kosini opitaan tuntemaan kolmion sivujen suhteina. Myöhemmin lukiossa määrittely tapahtuu yksikköympyrää apuna käyttäen. Useimmat tuntevat enintään nämä kaksi sinin ja kosinin määritelmää, vaikkakin kyseiset funktiot voidaan yhtäpitävästi määritellä myös potenssisarjakehitelmien, differentiaaliyhtälöiden, käänteisfunktioiden tai muutaman aksiooman avulla.

Määrittely potenssisarjakehitelmien tai differentiaaliyhtälöiden avulla ei yllättäen olekaan tuoreinta matematiikkaa: Itse asiassa Isaac Newton esitti sinin ja kosinin sekä yksikköympyrän että potenssisarjakehitelmien avulla jo 1600-luvun loppupuolella. Leonhard Euler taas tunnisti sinin olevan erään värähtelyä kuvaavan differentiaaliyhtälön ratkaisu 1700-luvulla.

Tämän työn tarkoituksena on tutkia edellä mainittuja erilaisia sinin ja kosinin määrittelytapoja. Lisäksi halutaan osoittaa, että kukin määritelmä johtaa seuraaviin sinin ja kosinin perustuloksiin: Pythagoran identiteetti, sinin parittomuus ja kosinin parillisuus, sinin ja kosinin jaksollisuus sekä summa- ja derivointikaavat.

Pythagoraan identiteetillä tarkoitetaan keskeistä sinin ja kosinin perustulosta, jonka mukaan jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Pariton ja parillinen funktio toteuttavat tietyt symmetriaehdot. Pariton funktio on piste-symmetrinen origon suhteen eli funktio saa arvoikseen vastaluvut yhtäkaukana origosta olevissa pisteissä. Parittomalle funktiolle pätee siis

$$f(-x) = -f(x)$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Parillinen funktio on taas peilikuva-symmetrinen y-akselin suhteen eli funktio saa saman arvon yhtä kaukana y-akselista olevissa kohdissa. Näin ollen parilliselle fuktiolle pätee

$$f(-x) = f(x)$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}$.

Jaksollisessa funktiossa toistuvat samat arvot tietyn jakson välein. Muodollisemmin ilmaistuna funktio on jaksollinen jaksonaan $p \neq 0$, jos sille pätee

$$f(x) = f(x + kp)$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Tutkielma jakaantuu kahteen lukuun, joista ensimmäisessä luvussa käsitellään sinin ja kosinin erilaisia määrittelytapoja ja jokaisen määrittelytavan yhteydessä osoitetaan sinin ja kosinin yllä mainitut perustulokset. Toisessa luvussa keskitytään sinin ja kosinin historiaan.

LUKU 1

Sinin ja kosinin erilaiset määrittelytavat

1. Geometrinen määritelmä

Tämän kappaleen tarkoituksena on määritellä sini- ja kosinifunktio yksikköympyrää apuna käyttäen. Kyseistä määritelmää varten täytyy ensin täsmentää muutamia määritelmälle olennaisia käsitteitä. Alkuoletuksena on, että pinta-alan käsite ja sen ominaisuudet ovat tunnettuja. Tämän kappaleen pääasiallisina lähteinä toimivat Langin *A First Course in Calculus* [**7**], Apostolin *Calculus* [**1**] ja Spivakin *Calculus* [**11**].

MÄÄRITELMÄ 1.1. Yksikköympyräksi kutsutaan karteesisen koordinaatiston yksisäteistä, origokeskistä ympyrää.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Luku π määritellään yksikköympyrän alaksi.

LEMMA 1.3. *Olkoon S jokin alue tasossa ja olkoon A alueen S pinta-ala. Kertomalla alueen S pisteiden joukko kertoimella r saadaan muokatun alueen alaksi $r^2 A$.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Ks. [**7**], s.118-119. $\square$

ESIMERKKI 1.4. Koska π määriteltiin yksikköympyrän alaksi, niin r-säteisen ympyrän ala on siten πr^2.

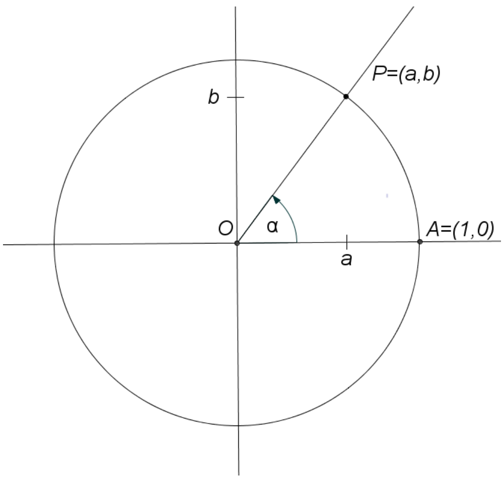
MÄÄRITELMÄ 1.5. Suunnattu kulma α on sellainen kulma, joka muodostuu puolisuoran kiertyessä tasossa alkupisteensä ympäri. Puolisuoran alkuasentoa sanotaan kulman α alkukyljeksi l_1 ja loppuasemaa kulman α loppukyljeksi l_2. Yksikköympyrässä suunnatun kulman α kärkenä on origo O ja alkukylkenä l_1, positiivinen horisontaalinen akseli. Tällöin l_1 leikkaa yksikköympyrää pisteessä $A = (1, 0)$. Suunnatun kulman määrittää kulman α loppukylki l_2 ja yksikköympyrän kehän leikkauspiste $P = (a, b)$.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Yksikköympyrän sektori AOP on suunnatun kulman $\angle AOP$ sisällä oleva ympyrän alue.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Suunnatun kulman $\angle AOP$ suuruus on kaksi kertaa ympyrän sektorin AOP ala jaettuna säteen neliöllä. Erityisesti kulman $\angle AOP$ suuruus on x radiaania, jos yksikköympyrän sektorin AOP ala on $\frac{x}{2}$.

HUOMAUTUS 1.8. (a) Lemman 1.3 nojalla kulman suuruus on riippumaton säteen pituudesta, joten kulmamitta on hyvin määritelty myös yksikköympyrälle.

(b) Jos piste P on aluksi $P = (1, 0)$ ja jos se liikkuu vastapäivään yksikköympyrällä, niin sektorin AOP ala kasvaa saaden jokaisen arvon välillä $[0, \pi]$ tasan kerran. Siten myös kulman $\angle AOP$ suuruus saa jokaisen arvon välillä $[0, 2\pi]$ tasan kerran.



KUVA 1. Suunnattu kulma.

ESIMERKKI 1.9. Jos $P = (-1, 0)$, niin sektori AOP on puoliympyrä, jolloin sen ala on $\frac{\pi}{2}$. Siten kulman $\angle AOP$ suuruus on π radiaania.

Seuraavaksi halutaan määritellä yksikköympyrän kulman $\angle AOP$ sini ja kosini. Oikeastaan määritellään luvun x sini ja kosini, jotta sini ja kosini voidaan määritellä reaalisiksi funktioiksi.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoot $0 \leq x < 2\pi$ ja $P = (a, b)$ yksikköympyrän kehäpiste siten, että sektorin AOP ala on $\frac{x}{2}$. Tällöin luvun x kosini ja sini ovat

$$\cos x = a \quad \text{ja} \quad \sin x = b.$$

ESIMERKKI 1.11. Jos $x = \frac{\pi}{2}$, niin sektorin AOP ala on $\frac{\pi}{4}$, jolloin $P = (0, 1)$. Siten $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ja $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

HUOMAUTUS 1.12. Kosinin ja sinin määritelmä on voimassa puoliavoimella välillä $[0, 2\pi)$. Laajennetaan määritelmä koskemaan koko reaaliakselia seuraavasti: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin voidaan merkitä $x = x_0 + 2\pi k$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x_0 \in [0, 2\pi)$, jolloin määritellään

$$\sin x = \sin x_0 \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos x_0.$$

LAUSE 1.13. *$\sin x$ ja $\cos x$ ovat jaksollisia jaksonaan 2π ja 2π on sinin ja kosinin lyhin jakso.*

TODISTUS. Väitteen ensimmäinen osa seuraa suoraan Huomautuksesta 1.12 ja jaksollisen funktion määritelmästä. Osoitetaan väitteen jälkimmäinen osa: Osoitetaan ensin, että kosinin lyhimmän jakson pituus on 2π. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että on olemassa sellainen luku $k \in (0, 2\pi)$, jolle pätee $\cos(x + k) = \cos x$. Määritelmän nojalla kosinin arvo määräytyy yksikköympyrän kehäpisteen $P = (a, b)$ koordinaatista a. Tarkastelemalla kosinin nollakohtia yksikköympyrän avulla huomataan, että kosini saa arvon nolla, kun $P = (0, 1)$ tai $P = (0, -1)$ eli kun $x = \frac{\pi}{2}$ tai $x = \frac{3\pi}{2}$ (päättely kuten Esimerkissä 1.9). Siten, koska kosinin jakso $k < 2\pi$, niin on oltava $k = \pi$. Tällöin, koska Esimerkin 1.11 mukaisella päättelyllä saadaan $\cos \pi = -1$, niin

$$1 = \cos 0 = \cos(0 + k) = \cos(0 + \pi) = \cos \pi = -1,$$

mikä on ristiriita. Siispä 2π on kosinin lyhin jakso.

Osoitetaan seuraavaksi, että sinin lyhimmän jakson pituus on myös 2π. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että on olemassa luku $k' \in (0, 2\pi)$, jolle pätee $\sin(x+k') = \sin x$. Määritelmän nojalla sinin arvo määräytyy yksikköympyrän kehäpisteen $P = (a, b)$ koordinaatista b. Tarkastelemalla sinin nollakohtia nähdään, että sini saa arvon nolla, kun $P = (1, 0)$ tai $P = (-1, 0)$ eli kun $x = 0$ tai $x = \pi$. Siispä, koska sinin jakso $k' < 2\pi$, niin on oltava $k' = \pi$. Näin ollen, koska Esimerkin 1.11 mukaisella päättelyllä saadaan $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, niin

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} + k') = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$

mikä on ristiriita. Siten 2π on sinin lyhin jakso. □

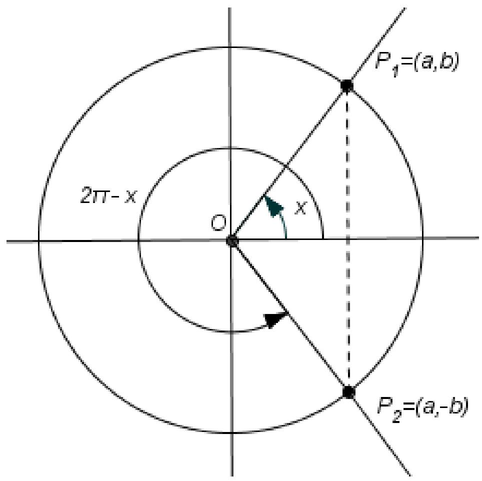
Seuraavassa lauseessa todistetaan äskeistä sinin ja kosinin määritelmää lähtökohtana käyttäen osa sinin ja kosinin perusidentiteeteistä.

Lause 1.14. *Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ pätee*
(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$
(b) $\sin(-x) = -\sin x$ *ja* $\cos(-x) = \cos x,$
(c) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

Todistus. (a) Jos $x \in [0, 2\pi)$, niin sinin ja kosinin määritelmän sekä Pythagoraan lauseen nojalla

$$\sin^2 x + \cos^2 x = b^2 + a^2 = r^2 = 1.$$

Jos taas $x \notin [0, 2\pi)$, niin voidaan merkitä $x = x_0 + 2\pi k$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x_0 \in (0, 2\pi)$. Siten huomautuksen 1.12 nojalla saadaan, että $\sin x = \sin x_0$ ja $\cos x = \cos x_0$, jolloin tarkastelu palautuu tapaukseen $x \in (0, 2\pi)$.



Kuva 2. Kulman peilaus.

(b) Tutkitaan erikseen tapaukset $x \in [0, 2\pi)$ ja $x \notin [0, 2\pi)$: Jos $x \in [0, 2\pi)$, niin

$$-x = (2\pi - x) - 2\pi = x_0 + 2\pi k, \quad \text{missä} \quad x_0 = 2\pi - x \quad \text{ja} \quad k = -1.$$

Siten huomautuksen 1.12 nojalla

$$\sin(-x) = \sin(2\pi - x) \quad \text{ja} \quad \cos(-x) = \cos(2\pi - x). \tag{1.1}$$

Kuten Kuvan 2 tapauksessa tarkastellaan nyt kehäpistettä $P_1 = (a, b)$, joka määrää kulman, joka on x radiaania. Jos kehäpiste $P_1 \neq (-1, 0)$, niin peilaamalla P_1 horisontaalisen akselin ympäri saadaan kehäpiste $P_2 = (a, -b)$, joka määrää kulman, joka on $2\pi - x$ radiaania. Siten yhtälöiden 1.1 sekä sinin ja kosinin määritelmän nojalla pätee

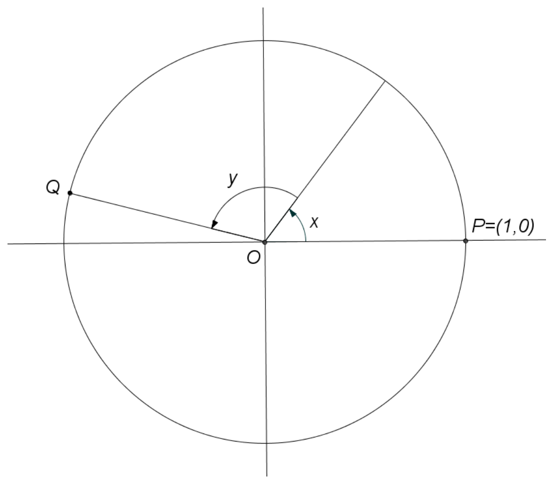
$$\sin(-x) = \sin(2\pi - x) = -b = -\sin x \quad \text{ja} \quad \cos(-x) = \cos(2\pi - x) = a = \cos x.$$

Jos taas kehäpiste $P_1 = (-1, 0)$, niin $x = \pi$ esimerkin 1.9 mukaisesti ja edelleen $x_0 = 2\pi - \pi = \pi$, jolloin yhtälöiden 1.1 mukaan

$$\sin(-\pi) = \sin \pi = 0 \quad \text{ja} \quad \cos(-\pi) = \cos \pi.$$

Jos taas $x \notin [0, 2\pi)$, niin samalla tavoin kuten (a)-kohdan todistuksessa tarkastelu palautuu tapaukseen $x \in [0, 2\pi)$.

(c) Tarkastellaan erikseen tapauksia $x + y \in [0, 2\pi)$ ja $x + y \notin [0, 2\pi)$, joissa $x, y \in \mathbb{R}$: Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x + y \in [0, 2\pi)$ sekä P ja Q yksikköympyrän kehäpisteitä. Tarkoituksena on selvittää pisteiden P ja Q etäisyys toisistaan käyttämällä kahta erilaista koordinaattisysteemiä. Ensin valitaan koordinaatisto Kuvan 3 mukaisesti.



Kuva 3. Kulmien yhteenlasku 1.

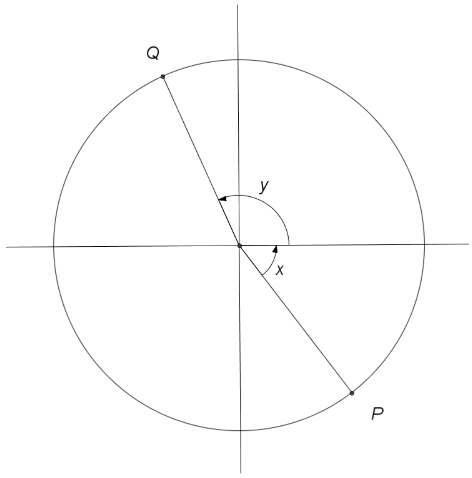
Nyt $P = (1, 0)$ ja kosinin ja sinin määritelmän nojalla $Q = (\cos(x+y), \sin(x+y))$. Pisteiden $P = (a_1, b_1)$ ja $Q = (a_2, b_2)$ etäisyyden neliö on siten

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P, Q)^2 &= (b_2 - b_1)^2 + (a_2 - a_1)^2 \\ &= (\sin(x + y) - 0)^2 + (\cos(x + y) - 1)^2 \\ &= \sin^2(x + y) + \cos^2(x + y) - 2\cos(x + y) + 1.\end{aligned}$$

Siten (a)-kohdan nojalla $\operatorname{dist}(P, Q)^2 = -2\cos(x + y) + 2$. Seuraavaksi asetetaan koordinaatisto Kuvan 4 tavalla.

Siten kehäpiste $P = (\cos(-x), \sin(-x)) = (\cos x, -\sin x)$ sinin parittomuuden ja kosinin parillisuuden nojalla. Lisäksi $Q = (\cos y, \sin y)$. Siispä

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P, Q)^2 &= (\sin y - (-\sin x))^2 + (\cos y - \cos x)^2 \\ &= \sin^2 y + 2\sin x \sin y + \sin^2 x + \cos^2 y - 2\cos y \cos x + \cos^2 x,\end{aligned}$$



KUVA 4. Kulmien yhteenlasku 2.

joka (a)-kohdan nojalla saa muodon $\mathrm{dist}(P, Q)^2 = 2 + 2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y$. Nyt asettamalla etäisyydet yhtä suuriksi saadaan

$$-2\cos(x + y) + 2 = 2 + 2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y,$$

mistä seuraa väite.

Tapauksen $x + y \notin [0, 2\pi)$ tarkastelu palautuu tapaukseen $x + y \in [0, 2\pi)$ samalla tapaan kuten (a)-kohdan todistuksessa. □

HUOMAUTUS 1.15. Edellisen todistuksen kuvat liittyvät tapaukseen $x > 0$ ja $y > 0$. Todistus pätee kuitenkin kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Jotta pystytään todistamaan myös sinin kulmien yhteenlaskua koskeva tulos, tarvitaan apuna seuraavan lemman (a)-kohtaa. Lemman (b)-kohtaa tarvitaan kosinin derivaatan määrittämiseen.

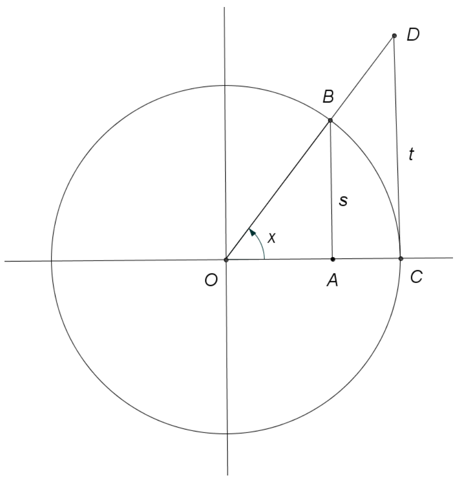
LEMMA 1.16. *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*
(a) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$,
(b) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

TODISTUS. (a) Koska esimerkin 1.11 ja sinin parittomuuden sekä kosinin parillisuuden nojalla

$$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \quad \text{ja} \quad \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

niin kosinin summakaavan nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\cos(x - \frac{\pi}{2}) &= \cos x \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) \\ &= \sin x.\end{aligned}$$



KUVA 5. Raja-arvon määritys.

(b) Kohdan (a) ja kosinin parillisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{2} - x) &= \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(-x) \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

□

LAUSE 1.17. *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

TODISTUS. Kosinin yhteenlaskukaavan, sinin parittomuuden ja lemman 1.16 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos(x + y - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \cos(y - \frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(y - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \sin y + \sin x \sin(\frac{\pi}{2} - y) \\ &= \cos x \sin y + \sin x \cos y.\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi halutaan määrittää sinin ja kosinin derivaatat. Sitä varten tarvitaan kuitenkin tärkeitä raja-arvoja koskeva aputulos:

LEMMA 1.18.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ja \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

TODISTUS. Todistetaan ensin ensimmäinen väite ja oletetaan aluksi, että x on positiivinen. Tarkastellaan Kuvan 5 mukaista tilannetta: Olkoot OB yksikköympyrän säde, piste $C = (1,0)$ ja kulma $\angle COB$ x radiaania. Olkoot s pienemmän kolmion $\triangle OAB$ korkeus ja t suuremman kolmion $\triangle OCD$ korkeus. Käyttämällä merkintää

$\overline{OA}$:= janan OA pituus ja tarkastelemalla kehäpistettä B saadaan sinin ja kosinin määritelmän nojalla, että

$$\sin x = s \quad \text{ja} \quad \cos x = \overline{OA}.$$

Edelleen kehäpisteen D avulla ja merkitsemällä $\overline{OD}$:= janan OD pituus saadaan

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{t}{1} = t.$$

Huomataan, että kolmion $\triangle OAB$ ala < sektorin OCB ala < kolmion $\triangle OCD$ ala. Nyt määritelmän 1.7 nojalla sektorin OCB ala on $\frac{x}{2}$ ja edelleen saadaan

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

eli

$$\cos x \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{1.2}$$

Koska oletettiin, että $x > 0$, niin yksikköympyrästä katsottuna luvun 0 läheisyydessä $\sin x > 0$, jolloin jakamalla epäyhtälö (1.2) puolittain termillä $\sin x$ saadaan

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Koska yksikköympyrästä katsottuna $\cos x \xrightarrow{x \to 0} 1$ ja siten $\frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x \to 0} 1$, niin on oltava $\frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \to 0} 1$. Edelleen, koska $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x/\sin x}$, niin

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}} = 1.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $x < 0$. Voidaan merkitä $x = -k$, kun $k > 0$. Nyt sinin parittomuuden nojalla

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin k}{-k} = \frac{\sin k}{k}.$$

Lisäksi, kun $x \to 0$, niin myös $k \to 0$. Siten todistus palautuu tapauksen $x > 0$ todistukseen, sillä $k > 0$.

Todistetaan seuraavaksi jälkimmäinen väite. Muokataan termi $\frac{\cos x - 1}{x}$ termeiksi, joiden raja-arvot nollassa tunnetaan. Lauseen 1.14 (a)-kohdan nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\
&= \frac{\cos^2 x + 1}{x(\cos x + 1)} \\
&= \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\
&= -\frac{\sin x}{x}(\sin x)\frac{1}{\cos x + 1}.
\end{aligned}$$

Nyt, koska $-\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \to 0} -1$, $\sin x \xrightarrow{x \to 0} 0$ ja $\frac{1}{\cos x + 1} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2}$, niin

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

□

LAUSE 1.19. *Funktiot* $\sin x$ *ja* $\cos x$ *ovat derivoituvia koko reaaliakselilla ja jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \textit{sekä} \quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

TODISTUS. Sinin yhteenlaskukaavan avulla saadaan sinin erotusosamääräksi

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \frac{\cos x\sin h+\sin x(\cos h-1)}{h}\\ &= \cos x\frac{\sin h}{h}+\sin x\frac{\cos h-1}{h},\end{aligned}$$

joten lemman 1.18 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}(\cos x\frac{\sin h}{h}+\sin x\frac{\cos h-1}{h})\\ &= \cos x\cdot 1+\sin x\cdot 0\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Siis $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x$.

Käytetään kosinin derivaatan todistuksessa apuna lemman 1.16 (b)-kohtaa, jonka nojalla $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$. Olkoon $y = \frac{\pi}{2}-x$ ja käytetään ketjusääntöä, jolloin saadaan

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Nyt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$ ja siten kosinin parillisuuden ja lemman 1.16 nojalla

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} &= \cos y\cdot(-1)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)\\ &= -\cos(x-\frac{\pi}{2})\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

□

2. Määritelmä potenssisarjojen avulla

Tässä kappaleessa sini ja kosini määritellään kompleksista eksponenttifunktiota apuna käyttäen, mikä johtaa sinin ja kosinin potenssisarjakehitelmiin. Pääasiallisina lähdeteoksina tässä kappaleessa toimivat Denlingerin *Elements of Real Analysis* [**4**], Taon *Analysis II* [**12**] ja Rudinin *Principles of Mathematical Analysis* [**10**].

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kompleksisen eksponenttifunktion potenssisarjakehitelmä on tällöin

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Tällöin kosini ja sini ovat

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

HUOMAUTUS 2.3. (a) $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ on imaginääriyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$.
(b) Määritelmistä seuraa, että

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}}{2} \\ &= \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots + 1 - iz + \frac{(-iz)^2}{2!} + \frac{(-iz)^3}{3!} + \frac{(-iz)^4}{4!} + \cdots}{2} \\ &= \frac{2 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2z^4}{4!} - \cdots}{2} \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}}{2i} \\ &= \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots - 1 + iz - \frac{(-iz)^2}{2!} - \frac{(-iz)^3}{3!} - \frac{(-iz)^4}{4!} - \frac{(-iz)^5}{5!} - \cdots}{2i} \\ &= \frac{2iz - \frac{2iz^3}{3!} + \frac{2iz^5}{5!} - \cdots}{2i} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

(c) Kohdan (b) avulla huomataan, että $\cos z$ ja $\sin z$ ovat reaalisia, jos $z \in \mathbb{R}$. Tästä eteenpäin tarkastellaankin vain reaalisia kosinia ja siniä.

Jotta kosinin ja sinin määritelmät ovat järkeviä, pitäisi kosinin ja sinin potenssisarjakehitelmien olla suppenevia. Seuraavaa lausetta apuna käyttäen osoitetaan, että kosinin ja sinin sarjakehitelmät todellakin suppenevat.

LAUSE 2.4. *Olkoot* $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *ja* $a_n \neq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$. *Jos on olemassa luku* $q < 1$, *jolle* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$, *niin sarja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *suppenee.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Ks. [**16**], s.34. □

LAUSE 2.5. *Kosinin ja sinin potenssisarjakehitelmät*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{ja} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

suppenevat kaikilla $z \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Koska $\cos 0 = 1 - 0 + 0 - \ldots = 1$ ja $\sin 0 = 0 - 0 + 0 - \ldots = 0$, niin sarjat suppenevat, kun $z = 0$. Voidaan siis olettaa, että $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Osoitetaan ensin, että kosinin potenssisarja suppenee. Nyt

$$|a_n| = |\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}| = |\frac{z^{2n}}{(2n)!}| \neq 0 \quad \text{kaikilla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}|}{|\frac{z^{2n}}{(2n)!}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^2|}{|(2n+1)(2n+2)|} = 0 < 1,$$

joten potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ suppenee kaikilla $z \in \mathbb{R}$ Lauseen 2.4 nojalla.

Osoitetaan seuraavaksi, että sinin potenssisarja suppenee. Nyt

$$|b_n| = |\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}| = |\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}| \neq 0 \quad \text{kaikilla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}|}{|\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^2|}{|(2n+2)(2n+3)|} = 0 < 1,$$

joten potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ suppenee kaikilla $z \in \mathbb{R}$ Lauseen 2.4 nojalla. □

Seuraavaksi halutaan osoittaa kosinin ja sinin määritelmään pohjautuen tärkeitä kosinin ja sinin perusidentiteettejä. Seuraavaa lausetta tarvitaan avuksi derivaattojen määrittämiseen.

LAUSE 2.6. *Olkoon* R *potenssisarjan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *suppenemissäde. Funktiolla* $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

on kaikkien kertalukujen derivaatat suppenemisvälillä $(x_0 - R, x_0 + R)$. *Lisäksi*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \textit{kaikilla} \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Ks. [**16**], s.56. □

LAUSE 2.7. *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*
(a) $\cos(-x) = \cos x$ *ja* $\sin(-x) = -\sin x$*,*
(b) $\cos 0 = 1$ *ja* $\sin 0 = 0$*,*
(c) sini ja kosini ovat derivoituvia koko reaaliakselilla ja

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \textit{sekä} \quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

TODISTUS. (a) Nähdään suoraan kosinin ja sinin sarjakehitelmistä.
(b) Todettu Lauseen 2.5 todistuksessa.
(c) Derivoituvuus koko reaaliakselilla seuraa suoraan Lauseesta 2.6, sillä sinin ja kosinin suppenemissäde on Lauseen 2.5 ja suppenemissäteen määritelmän nojalla ääretön. Lisäksi saman lauseen nojalla

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

ja

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{(2n)!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x.$$

□

LAUSE 2.8. *Jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*
(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*,*
(b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *ja* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$*.*

TODISTUS. (a) Muodostetaan funktio $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, jolle Lauseen 2.7 (c)-kohdan ja ketjusäännön nojalla on

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x (-\sin x) = 0.$$

Siis f on vakiofunktio ja siten kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(x) = f(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 0 + 1 = 1$$

Lauseen 2.7 (b)-kohdan nojalla.
(b) Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2,$$

missä $y \in \mathbb{R}$ on vakio. Nyt Lauseen 2.7 (c)-kohdan ja ketjusäännön nojalla on

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & 2(\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)(\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y) + \\ & + 2(\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)(-\sin(x+y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y) = 0. \end{aligned}$$

Siis f on vakiofunktio eli kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(x) = f(0) = [\sin y - 0 \cdot \cos y - 1 \cdot \sin y]^2 + [\cos y - 1 \cdot \cos y + 0 \cdot \sin y]^2 = 0,$$

joten aluksi määritellyn funktion hakasulkeissa olevien lausekkeiden täytyy kummankin olla nolla, mistä väite seuraa. □

HUOMAUTUS 2.9. (a) Edeltävän Lauseen (a)-kohdasta seuraa, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} \leq 1,$$

jolloin myös jokaisella $x \in \mathbb{R}$

$$|\cos x| \leq 1.$$

(b) Äskeisen Lauseen (b)-kohdan todistuksessa käytettiin hyväksi vain sinin ja kosinin derivointikaavoja sekä arvoja pisteessä $x = 0$.

Lopuksi halutaan vielä todistaa, että kosini ja sini ovat jaksollisia funktioita ja että niiden lyhin jakso on 2π. Aluksi määritellään, mitä tarkoitetaan luvulla π. Luku π halutaan määritellä siten, että $\frac{\pi}{2}$ on pienin positiivinen reaaliluku x, jolle $\cos x = 0$. Jotta määritelmä olisi järkevä täytyy osoittaa, että tällainen luku todella on olemassa.

LEMMA 2.10. *On olemassa jokin positiivinen reaaliluku x, jolle* $\cos x = 0$.

TODISTUS. Koska $\sin x$ on jatkuva erityisesti suljetulla välillä $[0, 2]$ ja derivoituva avoimella välillä $(0, 2)$, niin differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in (0, 2)$ siten, että

$$\frac{\sin 2 - \sin 0}{2 - 0} = \frac{\mathrm{d}(\sin \xi)}{\mathrm{d}\xi} = \cos \xi.$$

Koska $\sin 0 = 0$ ja $|\sin 2| \leq 1$ Huomautuksen 2.9 (a)-kohdan mukaan, niin

$$|2 \cos \xi| = |\sin 2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 \xi \leq \frac{1}{4}.$$

Siten kosinin yhteenlaskukaavan ja Lauseen 2.8 (a)-kohdan mukaan

$$\begin{aligned} \cos 2\xi &= \cos(\xi + \xi) \\ &= \cos^2 \xi - \sin^2 \xi \\ &= \cos^2 \xi - (1 - \cos^2 \xi) \\ &= 2 \cos^2 \xi - 1 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Nyt, koska $\cos x$ on jatkuva erityisesti välillä $[0, 2\xi]$ ja $\cos 0 = 1 > 0$ sekä $\cos 2\xi < 0$, niin Bolzanon lauseen nojalla on olemassa luku $x \in (0, 2\xi)$ siten, että $\cos x = 0$. □

LEMMA 2.11. *On olemassa pienin positiivinen reaaliluku x siten, että* $\cos x = 0$.

TODISTUS. Olkoon $A = \{x \geq 0 : \cos x = 0\}$. Täytyy siis osoittaa, että joukolla A on olemassa pienin alkio. Lemman 2.10 nojalla A on epätyhjä. Nyt, koska nolla on eräs joukon A alaraja ja A on epätyhjä, niin on olemassa $u = \inf A$. Lisäksi, koska funktio $f(x) = \cos x$ on jatkuva erityisesti, kun $x \in [0, \infty)$ ja koska jatkuvan funktion alkukuva suljetusta joukosta on suljettu, niin $f^{-1}(0) = \{x : f(x) = 0\}$ on suljettu joukko välillä $[0, \infty)$. Siten A on suljettu. Koska suljettu joukko sisältää infimuminsa, niin $u = \inf A \in A$. □

MÄÄRITELMÄ 2.12. Määritellään luku π siten, että

$$\pi = 2u, \quad \text{missä} \quad u = \min\{x > 0 : \cos x = 0\}.$$

Kosinin ja sinin lyhimmän jakson 2π osoittamiseen tarvitaan seuraavaa lausetta:

LAUSE 2.13. *Kosinille ja sinille pätevät seuraavat ominaisuudet:*
(a) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ *ja* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$,
(b) $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$,
(c) $\sin x$ *on kasvava välillä* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ja* $\cos x$ *on vähenevä välillä* $[0, \frac{\pi}{2}]$,
(d) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ *jokaisella* $x \in \mathbb{R}$,
(e) $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *jokaisella* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. (a) Piin määritelmän nojalla $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ja edelleen, koska Lauseen 2.8 (a)-kohdan nojalla $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$, niin $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Nyt, koska $\cos 0 = 1$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ja koska $\frac{\pi}{2}$ on pienin positiivinen kosinin nollakohta, niin $\cos x > 0$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Lisäksi, koska $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x > 0$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, niin $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Siten $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, sillä $\sin 0 = 0$.

(b) (a)-kohdan, kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen sekä kosinin parillisuuden ja sinin parittomuuden nojalla

$$\begin{aligned}
0 &= \cos\frac{\pi}{2} \\
&= \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) \\
&= \cos\pi\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin\pi\sin(-\frac{\pi}{2}) \\
&= \cos\pi\cos\frac{\pi}{2} + \sin\pi(\sin\frac{\pi}{2}) \\
&= \cos\pi\cdot 0 + \sin\pi\cdot 1 \\
&= \sin\pi
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
1 &= \sin\frac{\pi}{2} \\
&= \sin(\pi - \frac{\pi}{2}) \\
&= \sin\pi\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos\pi\sin(-\frac{\pi}{2}) \\
&= 0\cdot 0 + \cos\pi\cdot(-1) \\
&= -\cos\pi
\end{aligned}$$

eli $\cos\pi = -1$. Samaan tapaan saadaan $\sin 2\pi = 0$ ja $\cos 2\pi = 1$.

(c) Aiemmin todettiin jo, että $\cos x \geq 0$, kun $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Lisäksi, koska kosinin parillisuuden nojalla $\cos(-x) = \cos x$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin $\cos x \geq 0$ jokaisella $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Siten, koska $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \geq 0$, kun $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, niin $\sin x$ on kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Nyt, koska $\sin 0 = 0$ ja koska $\sin x$ on kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, niin $\sin x \geq 0$ jokaisella $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Lisäksi, koska $\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x \leq 0$ jokaisella $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, niin $\cos x$ on vähenevä välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(d) Käyttämällä (a)-kohtaa, sinin parittomuutta ja kosinin parillisuutta sekä kosinin summakaavaa hyväksi väite osoitetaan vastaavasti kuten Lemman 1.16 (b)-kohdan todistuksessa.

(e) Kosinin yhteenlaskukaavan ja (b)-kohdan nojalla saadaan

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi \\ &= -\cos x.\end{aligned}$$

□

LAUSE 2.14. *Funktiot* $\sin x$ *ja* $\cos x$ *ovat jaksollisia jaksonaan* 2π*, ja* 2π *on sinin ja kosinin lyhin jakso.*

TODISTUS. Täytyy siis osoittaa, että 2π on pienin reaaliluku k, jolle jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin(x+k) = \sin x \quad \text{ja} \quad \cos(x+k) = \cos x.$$

Nyt sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen ja Lauseen 2.13 (b)-kohdan mukaan jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi \\ &= \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 \\ &= \sin x\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi \\ &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Näytetään ensin, että 2π on kosinin lyhin jakso. Tehdään antiteesi: On olemassa luku $k \in (0, 2\pi)$, jolle pätee yhtälö $\cos(x+k) = \cos x$. Tällöin kosinin yhteenlaskukaavan nojalla

$$\begin{aligned}1 &= \cos 0 \\ &= \cos(0+k) \\ &= \cos 0 \cos k - \sin 0 \sin k \\ &= 1 \cdot \cos k - 0 \cdot \sin k \\ &= \cos k\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}1 &= \cos k \\ &= \cos(\frac{k}{2} + \frac{k}{2}) \\ &= \cos \frac{k}{2} \cos \frac{k}{2} - \sin \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2} \\ &= \cos^2 \frac{k}{2} - \sin^2 \frac{k}{2}.\end{aligned}$$

Lisäksi, koska Lauseen 2.8 (a)-kohdan mukaan $\sin^2 \frac{k}{2} + \cos^2 \frac{k}{2} = 1$, niin saadaan

$$\sin^2 \frac{k}{2} + 1 + \sin^2 \frac{k}{2} = 1,$$

josta seuraa

$$\sin^2 \frac{k}{2} = 0$$

ja edelleen

$$\sin \frac{k}{2} = 0.$$

Siten sinin yhteenlaskukaavan nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \frac{k}{2} \\ &= \sin(\frac{k}{4} + \frac{k}{4}) \\ &= \sin \frac{k}{4} \cos \frac{k}{4} + \cos \frac{k}{4} \sin \frac{k}{4} \\ &= 2 \cos \frac{k}{4} \sin \frac{k}{4}, \end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$\cos \frac{k}{4} = 0 \quad \text{tai} \quad \sin \frac{k}{4} = 0.$$

Nyt, koska $k \in (0, 2\pi)$, niin $\frac{k}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja koska $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ sekä $\sin 0 = 0$, niin on oltava $\sin \frac{k}{4} \neq 0$. Siispä $\cos \frac{k}{4} = 0$, mutta tämä on ristiriita, sillä $\frac{\pi}{2}$ on kosinin pienin positiivinen, reaalinen nollakohta. Siis 2π on kosinin lyhin jakso.

Näytetään seuraavaksi, että 2π on myös sinin lyhin jakso. Tehdään jälleen antiteesi: On olemassa luku $k' \in (0, 2\pi)$, jolle pätee $\sin(x + k') = \sin x$. Siten käyttämällä Lauseen 2.13 (d)-kohtaa saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \sin 0 \\ &= \sin(0 + k') \\ &= \cos(0 + k' - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(k' - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälön nojalla kosinilla pitäisi siis olla nollakohta pisteessä $x = k' - \frac{\pi}{2}$ ja lisäksi $k' - \frac{\pi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Osoitetaan, että tämän pisteen täytyy vastata pistettä $x = \frac{\pi}{2}$, jolloin sinin jaksoksi saadaan $k' = \pi$, mistä edelleen johdetaan ristiriita.

Tarkastellaan aluksi tapausta $k' - \frac{\pi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Tiedetään, että sini on aidosti kasvava ja jatkuva välillä $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ja $\sin 0 = 0$ sekä $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$, joten $\sin x < 0$, kun $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Siten, koska

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x > 0, \quad \text{kun} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, 0),$$

niin kosini on aidosti kasvava välillä $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Lisäksi $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, joten $\cos x > 0$ välillä $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Toisin sanoen kosinilla ei voi olla nollakohtia välillä $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, joten on oltava $k' - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{3\pi}{2})$.

Toisaalta tiedetään, että kosinin pienin positiivinen nollakohta on $\frac{\pi}{2}$, joten riittää siis tutkia tapausta $k' - \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Koska tiedetään, että välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kosinilla ei ole nollakohtia, $\frac{\pi}{2}$ on kosinin pienin positiivinen nollakohta ja että kosinille pätee $\cos(x+\pi) = -\cos x$, niin kosinilla ei voi olla nollakohtia välillä $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Niinpä on oltava $k' - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, jolloin $k' = \pi$. Siten jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x+k') \\ &= \sin(x+\pi) \\ &= \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi \\ &= -\sin x,\end{aligned}$$

mutta tämä on ristiriita, sillä esimerkiksi $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq -1 = -\sin\frac{\pi}{2}$. Siispä sinin lyhin jakson pituus on myös 2π.

□

Lopuksi osoitetaan vielä, että Määritelmässä 3.6 määritelty luku pii vastaa geometrisessa Määritelmässä 1.2 määriteltyä piitä. Koska geometrisessa määritelmässä pii määritellään vastaamaan yksikköympyrän alaa, niin riittää siis osoittaa, että Määritelmässä 3.6 määritetylle piille $\frac{\pi}{4}$ vastaa neljäsosaa yksikköympyrän alasta. Tätä todistusta varten osoitetaan ensin seuraava aputulos:

LEMMA 2.15. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ *jokaisella* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Koska kosinin summakaavan mukaan jokaisella $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x) \\ &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x,\end{aligned}$$

niin Lauseen 2.8 (a)-kohdan nojalla

$$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2} = \cos^2 x.$$

□

LAUSE 2.16. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

TODISTUS. Koska sinifunktio on kasvava ja derivoituva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja $\sin 0 = 0$ sekä $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, niin käyttämällä sijoitusta $x = \sin t$ saadaan

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \mathrm{d}t.$$

Lisäksi, koska $\cos x \geq 0$, kun $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, niin Lauseen 2.8 (a)-kohdan ja Lemman 2.15 nojalla kaikille $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pätee

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Siten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t.$$

Toisaalta, koska ketjusäännön nojalla kaikille $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pätee

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

niin Analyysin peruslauseen nojalla saadaan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \mathrm{d}t = \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}) = \frac{\pi}{4}.$$

□

HUOMAUTUS 2.17. (a) Lemman 2.15 todistuksessa käytetään vain kosinin summakaavaa sekä pythagoraan identiteettiä.

(b) Lauseen 2.16 osoituksessa käytetään seuraavia tuloksia: sini on kasvava ja derivoituva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x$, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos x \geq 0$ välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ ja pythagoraan identiteettiä.

3. Määritelmä differentiaaliyhtälöiden avulla

Tässä kappaleessa halutaan määritellä kosini- ja sinifunktio differentiaaliyhtälöiden avulla. Jotta nähdään, että määritelmä on järkevä, tarvitaan Globaalia olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöille. Kappaleen päälähteenä toimii Fitzpatrickin *Advanced Calculus* [**5**].

LAUSE 3.1. *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, $(x_0, y_0, y_1) \in \Delta \times \mathbb{R}^2$ ja $f : \Delta \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y'}$ ovat jatkuvia sekä rajoitettuja jokaisessa joukossa $[a, b] \times \mathbb{R}^2 \subset \Delta \times \mathbb{R}^2$. Tällöin jokaisella alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $y : \Delta \to \mathbb{R}$ koko välillä Δ.

TODISTUS. Merkitsemällä $z(x) = y'(x)$ yhtälö $y'' = f(x, y, y')$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases},$$

joka on erikoistapaus ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöparista

$$\begin{cases} y_1' = f(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

Tämä voidaan korvata vektorimuotoisella normaaliryhmällä

$$Y'(x) = F(x, Y(x)),$$

missä $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ ja $F : \Delta \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y_1, y_2) = (f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2))$. Ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisen yhtälöparin lokaali olemassaolo ja yksikäsitteisyys osoitetaan lähes samaan tapaan kuin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle (Ks. [**13**], s.23). Muutoksena on vain lähinnä itseisarvomerkkien korvaaminen vektorin normilla. Globaaliolemassaolo ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoiselle yhtälöparille osoitetaan myös lähes samaan tapaan kuin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle (Ks. [**9**], s.238 ja s.83-84). □

MÄÄRITELMÄ 3.2. Funktio $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \quad \text{ja} \quad y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} g''(x) + g(x) = 0 \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 0 \quad \text{ja} \quad g'(0) = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

HUOMAUTUS 3.3. Globaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen nojalla alkuarvo-ongelmille (3.1) ja (3.2) on olemassa yksikäsitteiset ratkaisut, joten kosinin ja sinin määritelmät ovat järkeviä.

Äskeiseen määritelmään pohjautuen osoitetaan seuraavaksi tärkeitä kosinin ja sinin perusidentiteettejä:

LAUSE 3.4. *Sinille ja kosinille pätevät seuraavat ominaisuudet jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *ja* $y \in \mathbb{R}$*:*
(a) $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x$ *sekä* $\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x$*,*
(b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*,*
(c) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *ja* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$*,*

TODISTUS. (a) Merkitsemällä $h(x) = \sin'(x)$ saadaan

$$0 = \sin''(x) + \sin(x) = h'(x) + \sin(x),$$

joten

$$h'(0) = -\sin(0) = 0 \quad \text{ja} \quad h(0) = \sin'(0) = 1.$$

Koska sinifunktion määritelmän nojalla $\sin''(x) = -\sin(x)$, niin sinifunktiolla on olemassa kolmas derivaatta. Siten, koska $\sin'''(x) = h''(x)$, niin derivoimalla saadaan

$$0 = \sin'''(x) + \sin'(x) = h''(x) + h(x).$$

Siispä määritelmän 3.2 nojalla

$$h(x) = \cos(x) = \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{sekä} \quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = h'(x) = -\sin(x).$$

(b) Todistus samaan tapaan kuin Lauseen 2.8 (a)-kohdan todistus.

(c) Todistus samaan tapaan kuin Lauseen 2.7 (a)-kohdan todistus. Katso myös Huomautus 2.9.

□

HUOMAUTUS 3.5. Myös kosinin ja sinin erotuskaavojen

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \text{ja} \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

todistus menee samaan tapaan kuin Lauseen 2.7 (a)-kohdan todistus.

Seuraavaksi määritellään luku pii kosinin pienimmäksi positiiviseksi nollakohdaksi kuten kappaleessa *Määritelmä potenssisarjojen avulla* (Koska kosini ja sini ovat jatkuvia ja derivoituvia koko reaaliakselilla, niin Lauseiden 2.10 ja 2.11 tapaan voidaan osoittaa, että on olemassa pienin positiivinen kosinin nollakohta).

MÄÄRITELMÄ 3.6. Määritellään luku π siten, että

$$\pi = 2u, \quad \text{missä} \quad u = \min\{x > 0 : \cos x = 0\}.$$

LAUSE 3.7. *(a)* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ *ja* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$,
(b) $\cos\pi = -1$ *ja* $\sin\pi = 0$,
(c) $\cos(-x) = \cos x$ *ja* $\sin(-x) = -\sin x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. (a) Ensimmäinen kohta seuraa suoraan piin määritelmästä ja toinen kohta osoitetaan samaan tapaan kuin Lauseen 2.13 (a)-kohta.

(b) Käyttämällä kosinin kulmien summakaavaa saadaan

$$\begin{aligned}\cos\pi &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\\ &= 0\cdot 0 - 1\cdot 1\\ &= -1.\end{aligned}$$

Samaan tapaan todistetaan myös väitteen jälkimmäinen kohta.

(c) Kosinin kulmien erotuskaavan nojalla

$$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0\cos x + \sin 0\sin x = 1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x = \cos x.$$

Lisäksi kohdista (a) ja (b) sekä sinin kulien erotuskaavasta seuraa, että

$$\cos(\frac{\pi}{2} - (-x)) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(-x) + \sin\frac{\pi}{2}\sin(-x) = 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin(-x) = \sin(-x)$$

ja samoin saadaan, että $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$. Siten

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \cos(\frac{\pi}{2} + x)\\ &= \cos(\pi - (\frac{\pi}{2} - x))\\ &= \cos\pi\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin\pi\sin(\frac{\pi}{2} - x)\\ &= -1\cdot\sin x + 0\cdot\sin(\frac{\pi}{2} - x)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

□

Jaksollisuuden todistaminen sinille ja kosinille menee samaan tapaan kuin kappaleessa *Määritelmä potenssisarjojen avulla*: Voidaan osoittaa, että sini on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kuten Lauseen 2.13 kohdan (c) todistuksessa. Lauseen 2.13 (b)-kohdan todistuksen tapaan voidaan myös osoittaa, että $\sin 2\pi = 0$ ja $\cos 2\pi = 1$. Kuten Lemman 1.16 (b)-kohdassa voidaan osoittaa, että $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ ja lisäksi Lauseen 2.13 (e)-kohdan tapaan voidaan osoittaa, että $\cos(x+\pi) = -\cos x$. Näiden tietojen avulla voidaan osoittaa sinin ja kosinin jaksollisuus kuten Lauseessa 2.14.

Lisäksi kuten kappaleessa *Määritelmä potenssisarjojen avulla* voidaan osoittaa, että luku π, joka edellä määriteltiin kuten Määritelmässä 3.6 vastaa geometrisesti määriteltyä piitä. Todistus etenee kuten Lauseen 2.16 todistus. Todistukseen tarvittavista tuloksista (ks. Huomautus 2.17 (b)-kohta) on osoitettava vielä, että $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, mutta tämä pystytään osoitettamaan samaan tapaan kuten Lauseen 2.15 todistus (ks. Huomautus 2.17 (a)-kohta). Lisäksi on todistettava vielä, että $\cos x \geq 0$ välillä

$[0, \frac{\pi}{2}]$, mutta tämän osoitus tehdään samaan tapaan kuin Lauseen 2.13 (a)-kohdan todistuksessa.

4. Määritelmä käänteisfunktioiden avulla

Määritellään aluksi sinin käänteisfuntio Riemann-integraalin avulla ja käytetään sitä lähtökohtana sinin määrittelemisessä. Tämän jälkeen kosinifunktio määritelllään sinifunktion derivaatan avulla. Tämän kappaleen päälähteenä toimii Denlingerin *Elements of real Analysis* [**4**].

MÄÄRITELMÄ 4.1. Määritellään funktio $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

HUOMAUTUS 4.2. Määritelmä on järkevä, sillä $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ on jatkuva ja Riemann-integroituva funktio yli välin $[0, x]$.

Koska sini halutaan määritellä arcussinin avulla, niin täytyy osoittaa, että arcussinillä todella on käänteisfunktio. Halutaan siis osoittaa, että arcussini on jatkuva ja aidosti kasvava funktio suljetulla välillä $[-1, 1]$. Seuraava lause kertoo arcussinin jatkuvuuden ja monotonisuuden lisäksi arcussinin derivoituvuudesta ja parittomuudesta. Näitä tuloksia käytetään apuna edelleen sinin derivaatan määrittämisessä ja parittomuuden osoittamisessa.

LAUSE 4.3. *Funktiolla* $\arcsin x$ *on seuraavat ominaisuudet:*
(a) $\arcsin x$ *on jatkuva välillä* $(-1, 1)$*,*
(b) $\arcsin x$ *on derivoituva välillä* $(-1, 1)$ *ja* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*,*
(c) $\arcsin x$ *on aidosti kasvava välillä* $(-1, 1)$*,*
(d) $\arcsin x$ *on pariton funktio välillä* $(-1, 1)$*.*

TODISTUS. (a) Koska $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on jatkuva ja Riemann-integroituva, niin myös sen integraalifunktio $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \arcsin x$ on jatkuva.´

(b) Koska funktio $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on jatkuva, niin Analyysin peruslauseen nojalla $\arcsin x$ on derivoituva välillä $(-1, 1)$ ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) Koska funktio $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva ja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \quad \text{jokaisella} \quad x \in (-1, 1),$$

niin $\arcsin x$ on aidosti kasvava välillä $(-1, 1)$.

(d) Funktio $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on parillinen funktio, sillä

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Siten f on symmetrinen y-akselin suhteen ja symmetrisyyden nojalla

$$\arcsin(-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin x$$

eli $\arcsin x$ on pariton funktio. $\square$

Edelleen halutaan laajentaa $\arcsin x$ jatkuvaksi ja aidosti kasvavaksi funktioksi suljetulla välillä $[-1, 1]$. Seuraava lemma osoittaa, että tämä on mahdollista:

LEMMA 4.4. *Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva, aidosti kasvava ja rajoitettu avoimella välillä $I = (a, b)$, missä $a < b$. Tällöin $f(I)$ on rajoitettu avoin väli. Erityisesti $f(I) = (c, d)$, missä $c = \inf f(I)$ ja $d = \sup f(I)$. Lisäksi funktio f voidaan jatkaa jatkuvaksi, aidosti kasvavaksi funktioksi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ määrittelemällä $f(a) = c$ ja $f(b) = d$. Tällöin f on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[a, b]$ ja $f([a, b]) = [c, d]$.*

TODISTUS. Koska $f(I)$ on ylhäältä ja alhaalta rajoitettu, niin reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa $\inf f(I)$ ja $\sup f(I)$. Erityisesti siis pätee $f(I) \subset [\inf f(I), \sup f(I)]$. Koska f on aidosti kasvava ja väli (a, b) on avoin väli, niin joukolla $A = f(I)$ ei ole pienintä eikä suurinta alkiota, joten $\inf A, \sup A \notin A$. Siten $f(I) = (\inf A, \sup A)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että määrittelemällä

$$f(a) = \inf f(I) \quad \text{ja} \quad f(b) = \sup f(I)$$

saadaan f laajennettua jatkuvaksi ja aidosti kasvavaksi funktioksi suljetulla välillä $[a, b]$: Funktion f aidosti kasvavuus suljetulla välillä $[a, b]$ seuraa oletuksesta ja äskeisestä määritelmästä suoraan. Lisäksi oletuksen nojalla f on jatkuva avoimella välillä (a, b), joten riittää siis tutkia funktion jatkuvuus välin $[a, b]$ päätepisteissä: Olkoot $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $f(x_1)$ ja $f(x_2) \in f(I)$, joille pätee

$$f(x_1) \leq \inf f(I) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ja} \quad f(x_2) \geq \sup f(I) - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |f(x_1) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |f(b) - f(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Valitsemalla $\delta = x_1 - a$ niin kaikilla x, joille $|x - a| < \delta$, pätee $a < x < x_1$. Siten, koska f on aidosti kasvava, niin $f(a) < f(x) < f(x_1)$. Näin ollen

$$f(x_1) - f(a) = |f(x_1) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

joten

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{kun} \quad |x - a| < \delta.$$

Siispä funktio f on jatkuva pisteessä a. Funktion jatkuvuus pisteessä b osoitetaan samaan tapaan.

Lisäksi selvästi $f([a, b]) = [\inf f(I), \sup f(I)]$. $\square$

HUOMAUTUS 4.5. (a) Funktio $\arcsin x$ on rajoitettu välillä $(-1, 1)$: Olkoon $0 \leq x < 1$. Koska $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ jokaisella $x \in [0, 1)$, niin $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$. Lisäksi käyttämällä muuttujan vaihtoa $s = 1 - t$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(\sqrt{1-t})(\sqrt{1+t})} \\ &\le \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} \\ &= -\int_1^{1-x} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} \\ &= 2(1-\sqrt{1-x}) \\ &< 2.\end{aligned}$$

Koska $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on symmetrinen y-akselin suhteen, niin pätee $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} > -2$, kun $-1 < x < 0$, joten

$$\left| \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \right| < 2, \quad \text{kun} \quad -1 < x < 1.$$

(b) Koska $\arcsin x$ on jatkuva, aidosti kasvava ja rajoitettu välillä $(-1, 1)$, niin Lemman 4.4 nojalla $\arcsin x$ voidaan laajentaa jatkuvaksi ja aidosti kasvavaksi funktioksi suljetulla välillä $[-1, 1]$ ja $\arcsin([-1, 1]) = [c, d]$, missä

$$c = \inf\{\arcsin x : -1 < x < 1\} = \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \lim_{x \to -1^+} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

ja

$$d = \sup\{\arcsin x : -1 < x < 1\} = \lim_{x \to 1^-} \arcsin x = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Näillä tiedoilla ei vielä kuitenkaan osata laskea arvoja arcussinifunktiolle. Sitä varten määritellään luku π hyödyntäen huomautuksen 4.5(b)-kohtaa seuraavasti:

Määritelmä 4.6. Määritellään luku π seuraavasti:

$$\begin{aligned}\pi &= 2 \arcsin 1 \\ &= 2 \sup\{\arcsin x : -1 < x < 1\} \\ &= 2 \lim_{x \to 1^-} \arcsin x \\ &= 2 \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.\end{aligned}$$

Huomautus 4.7. (a) Määritelmän nojalla $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ja koska $\arcsin x$ on pariton funktio, niin $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

(b) Funktio $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on bijektio, sillä se on jatkuva ja aidosti kasvava. Siten funktiolla $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on olemassa jatkuva käänteisfunktio.

Määritelmä 4.8. Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ käänteisfunktio on sinifunktio,

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1].$$

Esimerkki 4.9. Koska $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, niin $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, ja koska $\arcsin 0 = 0$, niin $\sin 0 = 0$.

Määritelmän nojalla sinifunktio on määritelty suljetulle välille $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tarkoituksena on kuitenkin määritellä sinifuntio koko reaaliakselille. Tämä määrittely tapahtuu osissa siten, että sinifunktion määritelmää laajennetaan niin, että sinistä tulee jatkuva ja jaksollinen funktio määrittelyjoukossaan. Tämän jälkeen Lauseen 4.14 avulla nähdään, että sinifunktio voidaan laajentaa jaksolliseksi funktioksi koko reaaliakselille. Seuraavaa aputulosta käytetään hyväksi sinin jatkuvuuden todistamisessa.

LEMMA 4.10. *Olkoon I väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ jatkuva ja aidosti kasvava. Silloin $f^{-1} : f(I) \to I$ on jatkuva ja aidosti kasvava.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Ks. [**14**], s.22 ja s.55. $\square$

LAUSE 4.11. *(a) Funktio $\sin x$ on jatkuva ja aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*
(b) Funktio $\sin x$ on pariton funktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

TODISTUS. (a) Seuraa suoraan Lemmasta 4.10.

(b) Olkoot $x \in [-1, 1]$ ja $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $\arcsin x = y$, jolloin $\sin y = x$. Koska $\arcsin x$ on pariton funktio välillä $[-1, 1]$, niin $\arcsin(-x) = -\arcsin x = -y$, jolloin $\sin(-y) = -x = -\sin y$ eli $\sin x$ on pariton funktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\square$

MÄÄRITELMÄ 4.12. Määritellään sinifunktio välille $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ asettamalla

$$\sin x = -\sin(x - \pi) \quad \text{kaikilla} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

HUOMAUTUS 4.13. (a) Funktio $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan: Lauseen 4.11 mukaan funktio $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ on jatkuva määrittelyjoukossaan. Lisäksi, kun $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, niin $-\frac{\pi}{2} \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$, joten funktio $\sin : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \sin x = -\sin(x - \pi)$ on jatkuva määrittelyjoukossaan. Tämän lisäksi $\sin x$ on jatkuva pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$, sillä, kun $x = \frac{\pi}{2}$, niin kummatkin puolet määrittelevästä yhtälöstä $\sin x = -\sin(x - \pi)$ ovat samat.

(b) Määritelmän mukaan $\sin \frac{3\pi}{2} = -\sin(\frac{3\pi}{2} - \pi) = -\sin \frac{\pi}{2}$. Siten $\sin x$ on jaksollinen välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ jaksonaan $\frac{3\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 2\pi$.

LEMMA 4.14. *Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen jakson pituutenaan p ja derivoituva välillä $[a, a + p)$, niin silloin f on jaksollinen ja derivoituva koko reaaliakselilla.*

TODISTUS. Olkoon f jaksollinen välillä $[a, a+p)$ jakson pituutenaan $p \neq 0$. Tällöin pätee

$$f(x + kp) = f(x) \quad \text{jokaisella} \quad x \in [a, a + p), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin voidaan merkitä $x = x_0 + kp$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x_0 \in [a, a + p)$. Koska f on jaksollinen välillä $[a, a + p)$, niin

$$f(x) = f(x_0 + kp) = f(x_0).$$

Siten

$$f(x + kp) = f(x_0 + 2kp) = f(x_0) = f(x),$$

joten f on jaksollinen koko reaaliakselilla.

Osoitetaan sitten, että f on derivoituva koko reaaliakselilla: Koska f on derivoituva välillä $[a, a + p)$, niin funktion f erotusosamäärän raja-arvo on olemassa eli

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{kaikilla} \quad x_0 \in [a, a + p).$$

Nyt funktion f jaksollisuuden nojalla jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+kp+h)-f(x_0+kp)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= f'(x_0).\end{aligned}$$

Siispä funktio f on derivoituva koko reaaliakselilla. □

MÄÄRITELMÄ 4.15. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Merkitään $x = x_0 + 2\pi k$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, jolloin sinifunktio määritellään koko reaaliakselille asettamalla

$$\sin x = \sin x_0.$$

HUOMAUTUS 4.16. (a) Määritelmän nojalla $\sin x$ on jaksollinen funktio koko reaaliakselilla jaksonaan 2π. Myöhemmin osoitetaan vielä, että 2π on lyhin sinin jakso.

(b) Määritelmästä ja Huomautuksesta 4.13 seuraa, että sinifunktio on jatkuva koko reaaliakselilla.

Lauseen 4.11 (b)-kohdassa osoitettiin, että sini on pariton funktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Nyt osoitetaan, että sini on pariton funktio myös koko reaaliakselilla:

LAUSE 4.17. *Funktio* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on pariton funktio koko reaaliakselilla.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että $\sin x$ on pariton funktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Lauseen 4.11 mukaan $\sin x$ on pariton välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, joten riittää tarkastella väliä $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Nyt

$$-\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2} \quad \text{eli} \quad -\frac{\pi}{2} \le -x-\pi+2\pi \le \frac{\pi}{2},$$

jolloin, koska sini on jaksollinen ja pariton välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pätee jokaiselle $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(-x-\pi)\\ &= -\sin(-x-\pi+2\pi)\\ &= \sin(x+\pi-2\pi)\\ &= \sin(x-\pi)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

Siten $\sin x$ on pariton koko välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Nyt sinin jaksollisuudesta seuraa, että sini on pariton koko reaaliakselilla. □

Seuraavaksi halutaan todistaa, että sinifunktio on derivoituva koko reaaliakselilla. Osoitetaan ensin, että sinifunktio on derivoituva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ja jaksollisuutta käyttäen näytetään, että sinifunktio on derivoituva koko reaaliakselilla. Seuraavaa käänteisfunktion derivaattaa koskevaa tulosta tarvitaan määritettäessä sinin derivaattaa:

LAUSE 4.18. *Olkoon funktio* f *derivoituva välillä* (a, b) *ja* $f'(x) > 0$ *jokaisella* $x \in (a, b)$. *Tällöin funktion* f *käänteisfunktio* f^{-1} *on derivoituva pisteessä* $y = f(x)$ *ja*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Ks. [**15**], s.54. $\square$

LEMMA 4.19. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ja jokaiselle* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *pätee*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

TODISTUS. Koska Lauseen 4.3 nojalla funktio $y = f(x) = \arcsin x$ on derivoituva välillä $(-1, 1)$ ja $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ jokaisella $x \in (-1, 1)$, niin Lauseesta 4.18 seuraa, että funktion f käänteisfunktio $f^{-1}(x) = \sin x$ on derivoituva pisteessä $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja

$$\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

$\square$

LEMMA 4.20. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *ja jokaiselle* $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *pätee*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

TODISTUS. Määritelmän 4.12 ja ketjusäännön nojalla jokaiselle $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ pätee

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\sin(x - \pi)) = -\sqrt{1 - \sin^2(x - \pi)} = -\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

$\square$

LAUSE 4.21. *Olkoon funktio f jatkuva pisteessä x_0 ja derivoituva jollakin pisteen x_0 sisältämällä välillä lukuunottamatta pistettä $x = x_0$. Jos lisäksi* $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ *on olemassa, niin tällöin $f'(x_0)$ on olemassa ja* $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

TODISTUS. Olkoon funktio f jatkuva pisteessä x_0 ja derivoituva jollakin pisteen x_0 sisältämällä välillä lukuunottamatta pistettä $x = x_0$ ja olkoon $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ olemassa. Derivaatan määritelmän nojalla

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tarpeeksi pienellä $h > 0$ funktio f on jatkuva välillä $[x_0, x_0 + h]$ ja derivoituva välillä $(x_0, x_0 + h)$. Siten differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa luku $\xi \in (x_0, x_0 + h)$ siten, että

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi).$$

Nyt, koska $\xi \in (x_0, x_0 + h)$, niin $\xi \to x_0$, kun $h \to 0$. Näin ollen, koska $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ on olemassa, niin

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(\xi) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Todistus etenee samaan tapaan myös oletuksella $h < 0$. $\square$

LEMMA 4.22. *Sinifunktio on derivoituva pisteessä* $x = \frac{\pi}{2}$ *ja*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \textit{kun} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Todistus. Koska sinifunktio on jatkuva koko reaaliakselilla, niin

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sqrt{1-\sin^2 x}\\ &= 0\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\sqrt{1-\sin^2 x})\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

Siten $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 0$, jolloin Lauseen 4.21 nojalla

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

□

Seuraus 4.23. *Sinifunktio on derivoituva välillä* $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ *ja*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases}\sqrt{1-\sin^2 x}, & \textit{kun}\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ -\sqrt{1-\sin^2 x}, & \textit{kun}\quad x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}).\end{cases}$$

Seuraus 4.24. *Sinifunktio on derivoituva koko reaaliakselilla, ja*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases}\sqrt{1-\sin^2 x}, & \textit{kun}\quad x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi], k\in\mathbb{Z}\\ -\sqrt{1-\sin^2 x}, & \textit{kun}\quad x\in[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi], k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että sini on derivoituva pisteessä $x=-\frac{\pi}{2}$: Koska parittoman funktion derivaattafunktio on parillinen eli symmetrinen y-akselin suhteen, niin

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sqrt{1-\sin^2 x}\\ &= 0\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(-\sqrt{1-\sin^2 x})\\ &= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

Siten $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 0$, jolloin Lauseen 4.21 mukaan

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x))}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Nyt siis $\sin x$ on derivoituva välillä $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, jolloin Lemman 4.14 nojalla $\sin x$ on derivoituva koko reaaliakselilla. Lisäksi, kun $x = x_0 + 2\pi k$, missä $x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ ja $k\in\mathbb{Z}$, niin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x_0 = \begin{cases}\sqrt{1-\sin^2 x}, & \text{kun}\quad x_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ -\sqrt{1-\sin^2 x}, & \text{kun}\quad x_0\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}].\end{cases}$$

□

Nyt voidaan määritellä kosinifunktio sinin derivaatan avulla ja tämän jälkeen edelleen laajennetaan kosinifuntio koko reaaliakselille.

MÄÄRITELMÄ 4.25. Määritellään kosinifunktio $\cos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\cos x = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 x}, & \text{kun} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\sqrt{1-\sin^2 x}, & \text{kun} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

ESIMERKKI 4.26. Määritelmän nojalla

$$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \cos\frac{3\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \cos 0 = 1.$$

MÄÄRITELMÄ 4.27. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Merkitään $x = x_0 + 2\pi k$, missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, jolloin kosinifunktio määritellään koko reaaliakselille asettamalla

$$\cos x = \cos x_0.$$

Pitäen nämä sinin ja kosinin määritelmät lähtökohtana voidaan alkaa osoittaa tärkeitä sinin ja kosinin perusidentiteettejä todeksi sekä määrittää sinin ja kosinin derivaatat.

LAUSE 4.28. *(a) Funktio* $\cos x$ *on parillinen funktio koko reaaliakselilla.*
(b) Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

TODISTUS. (a) Koska $\sin x$ on pariton funktio koko reaaliakselilla, niin

$$\sin^2(-x) = \sin(-x)\sin(-x) = -\sin x(-\sin x) = \sin^2 x.$$

Edelleen kosinin määritelmän nojalla, kun $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, niin

$$\cos(-x) = \sqrt{1-\sin^2(-x)} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$$

ja, kun $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, niin

$$\cos(-x) = -\sqrt{1-\sin^2(-x)} = -\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x.$$

Siten $\cos x$ on parillinen funktio välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Lisäksi kosinin jaksollisuudesta seuraa, että kosini on parillinen funktio koko reaaliakselillla.

(b) Nyt kosinin määritelmän nojalla saadaan helposti, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 1.$$

□

LAUSE 4.29. *Sini- ja kosinifunktio ovat derivoituvia koko reaaliakselilla ja jokaisella* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \textit{ja} \quad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

TODISTUS. Seurauksen 4.24 ja kosinin määritelmän nojalla saadaan sinille derivaataksi

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x, & \text{kun} \quad x - 2k\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], k \in \mathbb{Z} \\ -\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x, & \text{kun} \quad x - 2k\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tarkastellaan seuraavaksi kosinin derivoituvuutta: Kosinin määritelmän nojalla $\cos x$ on derivoituva väleillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ yhdistettynä funktiona derivoituvista funktioista, koska $|\sin x| \leq 1$ (seuraa Lauseen 4.28 (b)-kohdasta, ks. 2.9 (a)-kohta) ja koska siten $1 - \sin^2 x \geq 0$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi ketjusäännön nojalla

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x, & \text{kun} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\sqrt{1-\sin^2 x}) = -\frac{1}{2}\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x \cos x}{-\cos x} = -\sin x, & \text{kun} \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

Edelleen $\cos x$ on derivoituva pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$, sillä sinin jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (-\sin x) \\ &= -1 \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-\sin x) \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

Siten $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -1$, jolloin Lauseen 4.21 nojalla

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -1.$$

Lisäksi Lemman 4.14 nojalla kosinifunktio on derivoituva koko reaaliakselilla, ja kun $x = x_0 + 2\pi k$, missä $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ja $k \in \mathbb{Z}$, niin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = \frac{\mathrm{d}(\cos x_0)}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

□

LAUSE 4.30. *Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{ja} \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

TODISTUS. Osoitetaan samaan tapaan kuten Lauseen 2.8 todistus. Katso vielä Huomautus 2.9. □

Osoitetaan vielä, että sinin ja kosinin lyhimmän jakson pituus on 2π.

LAUSE 4.31. *Sinin ja kosinin lyhimmän jakson pituus on 2π.*

TODISTUS. Todistus etenee samaan tapaan kuin Lauseen 2.14 todistus. Todistuksen lopussa ristiriita saadaan aikaiseksi tiedosta, että kosinilla ei voi olla nollakohtaa välillä $(0, \frac{\pi}{2})$: Ensinnäkin

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x < 0, \quad \text{kun} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

sillä $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ sekä $\sin 0 = 0$ ja $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Siten $\cos x$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, ja koska $\cos 0 = 1$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ määritelmän nojalla, niin kosinilla ei voi olla nollakohtia välillä $(0, \frac{\pi}{2})$.

Lisäksi voidaan vielä osoittaa, että Määritelmässä 4.6 määritelty luku pii vastaa geometrisesti määriteltyä piitä. Todistus tehdään samaan tapaan kuten Lauseen 2.16

osoittaminen (ks. Huomio 2.17). Aputulos $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ voidaan osoittaa samoin kuten vastaava Lemma 2.15.

□

5. Määritelmä aksiomaattisesti

Sini ja kosini voidaan määritellä myös sinin ja kosinin perusominaisuuksista lähtien. Tässä kappaleessa sinin ja kosinin määrittelyn lähtökohdaksi otetaan neljä perusominaisuutta, joista voidaan johtaa kaikki loput sinin ja kosinin tunnetut ominaisuudet. Kappaleen pääasiallisena lähdeteoksena toimii Apostolin *Calculus* [**1**].

Määritelmä 5.1. Luku π määritellään yksikköympyrän alaksi.

Määritelmä 5.2. Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ toteuttavat seuraavat aksioomat:

(1) Sini- ja kosinifunktio on määritelty koko reaaliakselille.
(2) $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ja $\cos \pi = -1$.
(3) Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

(4) Jokaisella $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ pätee

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Lause 5.3. *Funktiot* $\sin x$ *ja* $\cos x$ *toteuttavat myös seuraavat ominaisuudet:*
(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,
(b) $\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0$,
(c) $\cos(-x) = \cos x$ *ja* $\sin(-x) = -\sin x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,
(d) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ *ja* $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,
(e) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *ja* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,
(f) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *ja* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. (a) Käyttämällä aksioomia (2) ja (3) saadaan

$$1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cos x + \sin x \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

(b) Kohdan (a) ja aksiooman (2) nojalla $\sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$, joten $\sin^2 0 = 0$ ja edelleen $\sin 0 = 0$ ja samaan tapaan nähdään, että $\cos \frac{\pi}{2} = 0 = \sin \pi$.

(c) Aksioominen (2) ja (3) sekä (b)-kohdan nojalla todistus menee samaan tapaan kuin Lauseen 3.7 (c)-kohdan todistus.

(d) Kohdan (c) todistuksesta nähdään, että $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ ja edelleen aksioomia (2) ja (3) sekä (b)- ja (c)-kohtia käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
-\sin(\frac{\pi}{2} + x) &= \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x) \\
&= \cos \pi \cos(-x) + \sin \pi \sin(-x) \\
&= -1 \cos x + 0 \cdot \sin(-x) \\
&= -\cos x,
\end{aligned}$$

mistä seuraa, että $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$.

(e) Aksioomasta (3) seuraa, että

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

ja edelleen (d)-kohdan nojalla

$$\sin(x+y) = -\cos(\frac{\pi}{2}+x+y) = -\cos(\frac{\pi}{2}+x)\cos y + \sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

(f) Aksiooman (2) sekä kohtien (b) ja (e) avulla saadaan

$$\cos 2\pi = \cos(\pi+\pi) = \cos\pi\cos\pi - \sin\pi\sin\pi = -1\cdot(-1) - 0\cdot 0 = 1$$

ja samalla tavalla saadaan, että $\sin 2\pi = 0$. Nyt

$$\cos(2\pi + x) = \cos 2\pi \cos x - \sin 2\pi \sin x = 1\cdot\cos x - 0\cdot\sin x = \cos x$$

ja

$$\sin(2\pi + x) = \sin 2\pi \cos x + \cos 2\pi \sin x = 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x = \sin x.$$

□

Kosinin ja sinin derivaattojen määrittämisessä tarvitaan avuksi Lemmaa 5.6. Tätä Lemmaa varten osoitetaan ensin, että kosini ja sini ovat jatkuvia välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$. Lisäksi jatkuvuuden osoittamiseen tarvitaan tietoa kosinin monotonisuudesta:

Lemma 5.4. *(a) Jokaiselle* $a, b \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

(b) Funktio $\cos x$ *on aidosti vähenevä välillä* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Todistus. (a) Kosinin yhteenlaskukaavan ja vähennyslaskukaavan nojalla

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y.$$

Merkitsemällä $x = \frac{a+b}{2}$ ja $y = \frac{a-b}{2}$ saadaan väite.

(b) Aksioomasta (4) seuraa, että $\sin x$ on positiivinen, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Edelleen, jos $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, niin

$$0 < \frac{a+b}{2} < \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad 0 < \frac{a-b}{2} < \frac{\frac{\pi}{2}-0}{2} = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Siten (a)-kohdan nojalla, kun $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$ saadaan

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} < 0 \quad \text{eli} \quad \cos a < \cos b.$$

Siispä $\cos x$ on aidosti vähenevä välillä $(0, \frac{\pi}{2})$. Lisäksi aksioomasta (4) seuraa, että $\cos x < 1$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Siten, koska $\cos 0 = 1$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, niin $\cos x$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. □

Lemma 5.5. *Kosini- ja sinifunktio ovat jatkuvia koko reaaliakselilla.*

Todistus. Lemman 5.4 mukaan $\cos x$ on aidosti vähenevä funktio välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$. Siispä $\frac{1}{\cos x}$ on aidosti kasvava välillä $[0, \frac{\pi}{2})$. Siten kaikilla $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ja jollakin $M > 0$ pätee $\frac{1}{\cos x} < M$. Edelleen aksioomasta (4) seuraa, että $\sin x < Mx$, kun $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, ja lisäksi sinin parittomuuden nojalla saadaan, että $\sin(-x) > -Mx$, kun $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, joten $|\sin x| < M\,|x|$, kun $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Siten $\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| < M\left|\frac{x-y}{2}\right|$, kun $\frac{x-y}{2} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

eli kun $|x-y| \leq \frac{\pi}{2}$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\left|\sin \frac{x+y}{2}\right| \leq 1$ Lauseen 5.3 (a)-kohdan ja Huomautuksen 2.9 (a)-kohdan nojalla, niin nyt jokaisella $x, y \in \mathbb{R}$, joilla $|x-y| < \delta$, pätee Lemman 5.4 nojalla

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos y| &= 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right|\left|\sin \frac{x+y}{2}\right| \\ &\leq 2M\left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 \\ &= M\,|x-y| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

kun valitaan $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{M}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Siispä kosini on jatkuva koko reaaliakselilla.

Lisäksi, koska Lauseen 5.3 (a)-kohdan ja Huomautuksen 2.9 (a)-kohdan mukaan $\sin x = \sqrt{1-\cos x}$ ja $|\cos x| \leq 1$, niin $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$ on jatkuva koko reaaliakselilla. □

LEMMA 5.6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{ja} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

TODISTUS. Todistetaan ensin lemman ensimmäinen väite: Kosinin jatkuvuuden avulla saadaan $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ ja $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, joten aksiooman (4) nojalla on oltava $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Lemman jälkimmäinen väite todistetaan samoin kuin Lemman 1.18 vastaava väite käyttäen hyväksi kosinin jatkuvuutta, aksiomaa (2) ja Lauseen 5.3 (a)-kohtaa. □

LAUSE 5.7. *Funktiot* $\sin x$ *ja* $\cos x$ *ovat derivoituvia koko reaaliakselilla sekä*

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \textit{ja} \quad \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

TODISTUS. Todistus etenee samoin kuin Lauseen 1.19 todistus. Sinin derivaatan määrittämisessä käytetään apuna sinin kulmien summakaavaa ja Lemmaa 5.6. Kosinin derivaatan määrittämisessä hyödynnetään kosinin parillisuutta sekä Lauseen 5.3 (d)-kohtaa. □

Vielä halutaan todistaa sinin ja kosinin jaksollisuus. Lauseessa 5.3 todistettiin jo, että

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{ja} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R},$$

mutta vielä halutaan osoittaa, että 2π on lyhin positiivinen sinin ja kosinin jakso. Tätä varten tarvitaan vielä seuraavan lemman tulosta sinin monotonisuudesta:

LEMMA 5.8. *Funktio* $\sin x$ *on aidosti kasvava funktio välillä* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

TODISTUS. Lemmasta 5.4 seuraa, että $\cos x > 0$, kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja lisäksi, koska $\cos(-x) = \cos x$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin $\cos x > 0$, kun $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Edelleen, koska $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x > 0$, kun $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, niin $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. □

LAUSE 5.9. *Funktiot* $\sin x$ *ja* $\cos x$ *ovat jaksollisia, ja* 2π *on sinin ja kosinin lyhin jakso .*

TODISTUS. Täytyy siis osoittaa, että 2π on pienin reaaliluku k, jolle jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin(x+k) = \sin x \quad \text{ja} \quad \cos(x+k) = \cos x.$$

Lauseen 5.3 nojalla

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{ja} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Loppu todistuksesta etenee kuten Lauseen 2.14 todistus. Ristiriita saadaan aikaiseksi tiedosta, että kosinilla ei voi olla nollakohtaa välillä $(0, \frac{\pi}{2})$, sillä kosini on kyseisellä välillä aidosti vähenevä sekä $\cos 0 = 1$ ja $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Lisäksi todistuksessa tarvitaan tulosta $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, joka seuraa Lauseen 5.3 (d)-kohdasta sekä toista tulosta $\cos(x+\pi) = -\cos x$, joka pystytään osoittamaan samaan tapaan kuin Lauseen 2.13 (e)-kohta. $\square$

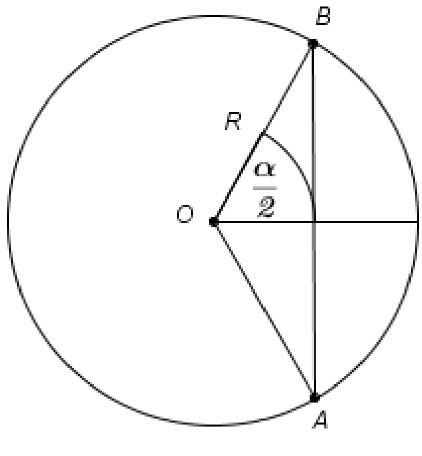
LUKU 2

Lyhyt katsaus sinin ja kosinin historiaan

Jo muinaiset egyptiläiset ja babylonialaiset osasivat käyttää hyödykseen yhdenmuotoisten kolmioiden sivujen suhteita. Varhaisen trigonometrian juuret liitetään kuitenkin yleisesti Kreikkaan, missä trigonometria kehittyi tiiviissä vuorovaikutuksessa tähtitieteen kanssa. Kreikkalaiset olivat ensimmäisiä, jotka laativat järjestelmällisiä taulukoita ympyrän eri keskuskulmia vastaavien jänteiden pituuksista. [**2**, s.234] Nämä taulukot olivatkin sinitaulukoiden edeltäjiä, sillä puolikas jänne jaettuna ympyrän säteellä vastaa jännettä vastaavan puolikkaan kehäkulman siniä. Symboolisesti: jos R on ympyrän säde, α on keskuskulma $\angle AOB$, jota vastaa jänne $\overline{AB}$, niin

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AB}/2}{R}.$$

[**8**, s.368-370]

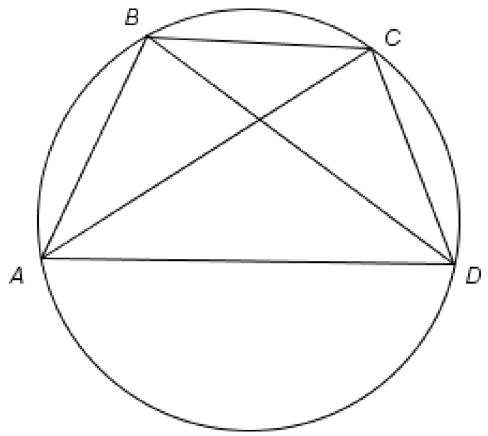


Kuva 1. Ympyrän jänteen yhteys siniin.

Todennäköisesti Hipparkhos Nikealainen (noin 140 eKr.) oli ensimmäinen, joka laati näitä taulukoita. Tämän johdosta häntä pidetäänkin trigonometrian isänä. Hänen kerrotaan kirjoittaneen jänteiden laskemisesta kaksitoista kirjaa, jotka sisältävät jännetaulukoita. Nämä kirjat ovat kuitenkin aikojen saatossa hukkuneet. Kuitenkin Hipparkhoksen säilyneissä kommenteissa hän toteaa todistaneensa tuloksensa käyttämällä muun muassa niin sanottua Ptolemaioksen teoreemaa, jonka mukaan jännenelikulmion $ABCD$ janoille pätee

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

[**8**, s.368-370]



KUVA 2. Ptolemaioksen teoreema.

Ptolemaios Klaudios (noin 150 jKr.) oli Hipparkhoksen ohella toinen antiikin Kreikan trigonometrian edistäjä. Hänen trigonometrinen tutkielmansa *Matemaattinen Syntaksi*, joka tunnetaan myös nimellä *Almagest*, sisältää jännetaulukoita ja niiden laatimisperusteet. Varmuudella ei voida sanoa, kuinka paljon Ptolemaios käytti hyväkseen edeltäjänsä Hipparkhoksen töitä. Taulukoiden laadinnassa hän käytti apunaan Ptolemaioksen teoreemaa, jonka lisäksi hän johti nykypäivän sinin summa- ja erotuskaavaa sekä sinin puolikkaan kulman muunnoskaavaa vastaavat kaavat jänteille. [**2**, s.242-244]

Intiassa kehittyi noin 500 jKr. sinifunktio. Intialaiset tähtitieteilijät laativat taulukoita kaksinkertaisen kulman jänteen puolikkaista, jotka olennaisesti vastaavat sinin arvoja. Ensimmäiset tällaiset taulukot löytyvät tuntemattomien tekijöiden laatimista runomuotoisista *Siddhanta*-nimisistä esityksistä. [**2**, s.310] *Siddhantat* inspiroivat edelleen intialaista tähtitieteilijä ja matemaatikko Aryabhataa (noin 476-550), jonka teoksesta *Aryabhatiya* löytyy myös jänteiden puolikkaiden arvoja runomuodossa. [**19**]

Nykyinen nimitys *sini*, latinan *sinus*, syntyi väärinkäsityksestä. Alkujaan intialaiset käyttivät jänteen puolikasta tarkoittavaa sanaa *jya-ardha*. Arabialaiset käänsivät tämän merkityksettömäksi sanaksi *jiba*, jonka myöhemmin eurooppalainen kääntäjä tulkitsi virheellisesti sanaksi *jaib*. Tämä sana tarkoittaa muun muassa poukamaa tai lahtea kuten latinalainen käännöksensä *sinus*. [**17**, s.27] Lyhenne *sin* esiintyi ensimmäistä kertaa englantilaisen Edmund Gunterin (1581-1626) luonnoksissa vuonna 1626, mutta julkaistiin kirjassa ensimmäistä kertaa vasta vuonna 1634 [**8**, s.371].

Kosinin ensimmäinen kirjallinen ensiesiintyminen nähdään Al-Battanin (noin 850-929) teoksessa *Tähtien liikkeessä*. Se tapahtuu kuitenkin versaalisinifunktion muodossa eli komplementtikulman sininä (toisin sanoen $1 - \cos\theta$). [**2**, s.340] Termi *kosini* on otettu käyttöön vasta paljon myöhemmin Edmund Gunterin innoittamana. Vuonna 1620 hän ehdotti termien *complement* ja *sine* yhdistämistä sanaksi *co.sinus*, joka pian muokkaantui sanaksi *cosinus* ja käännettiin edelleen englanniksi nykyiseen muotoonsa *cosine*. [**8**, s.371]

Renesanssin tunnetuimpiin trigonometrian edistäjiin kuuluu Regiomontanuksena tunnettu saksalainen matemaatikko Johannes Müller (1436-76). Hänen ansiokseen katsotaan trigonometrian erottaminen omaksi alakseen astronomiasta. Hänen tärkeimpänä työnään pidetään teosta *De triangulis omnimodis*, joka oli ensimmäinen eurooppalainen systemaattinen trigonometrian esitys. [**2**, s.385-389]

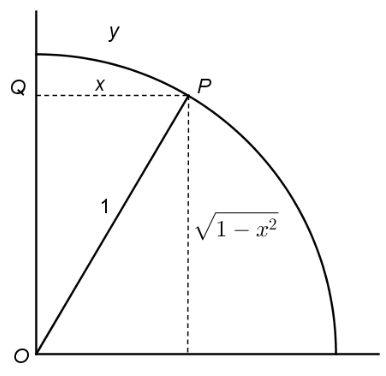
Toinen renesanssin merkittävä matemaatikko trigonometrian alalla oli itävaltalainen matemaatikko Georg Joachim Rheticus (1514-74), joka määritti teoksessaan *Canon doctrinae triangulorum* (1551) kaikki trigonometriset funktiot suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina käyttämättä ympyrän kaaria apunaan. Lisäksi Rheticus laati taulukoita myös kosinifunktiolle. [**18**, s.119]

Kolmas mainitsemisen arvoinen trigonometrian edistäjä renesanssin ajalta oli ranskalainen François Viète (1540-1603), joka kehitti trigonometriaa hyvin lähelle analyyttistä trigonometriaa ja johti useita sinin ja kosinin perusidentiteeteistä. Lisäksi hän kehitti $\sin kx$:n ja $\cos kx$:n kehitelmät termien $\sin x$ ja $\cos x$ avulla. [**6**, s.375]

Trigonometria kehittyi moderniin muotoonsa 1700-luvulla. Englantilainen Isaac Newton (1642-1727) muun muassa johti sinin ja kosinin potenssisarjat

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \quad \text{ja} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

käyttämällä apuna johtamaansa binomikaavaa. [**17**, s.52-54] Lisäksi hän määritteli sinin yksikköympyrän avulla kuten Kuvassa 3. Määritelmä vastaa nykyistä sinin geo-



KUVA 3. Newtonin alkuperäinen kuvio: kaaren pituutta y vastaa sinin arvo x.

metrista yksikköympyrän avulla tehtyä määritelmää. Poikkeuksena nykyään kulma sijoitetaan useimmiten alkamaan positiiviselta x-akselilta. [**18**, s.125]

Tärkeimpänä modernin trigonometrian kehittäjänä voitanee pitää sveitsiläistä matemaatikkoa Leonhard Euleria (1707-1783). Euler oli ensimmäisiä matemaatikkoja, jotka pitivät siniä ja kosinia funktioina. Hän hyväksyikin vuonna 1739 sinin erään värähtelyä kuvaavan differentiaaliyhtälön ratkaisuksi. [**18**, s.126] Tämän jälkeen vuonna 1748 julkaisemassa teoksessaan *Introduction in analysin infitorum* Euler esittää trigonometristen funktioiden täsmällisen analyyttisen käsittelyn perusteet. Sini määritellään joko yksikköympyrän pisteen ordinaattana tai potenssisarjakehitelmänä. Lisäksi teos esittelee Eulerin identiteetit

$$\sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

ja Eulerin kaavan

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

jotka yhdistävät trigonometriset funktiot kompleksilukuihin. Ylläolevia yhtälöitä voidaan pitää kuitenkin Abraham de Moivren (1667-1754) keksintönä, mutta Euler oivalsi niiden hyödyllisyyden analyysin työkaluna. Imaginääriluvun $\sqrt{-1}$ symbolin i Euler otti käyttöön vuonna 1777. [**3**, s.618-624]

Lähdeluettelo

[1] Apostol, Tom M.: *Calculus. Vol. 1, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra.* 2nd ed. Wiley International Edition, New York, 1967.

[2] Boyer, Carl B.: *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia. Osa 1.* Suom. Kimmo Pietiläinen. WSOY, Helsinki, 1994.

[3] Boyer, Carl B.: *Tieteiden kuningatar: matematiikan historia. Osa 2.* Suom. Kimmo Pietiläinen. WSOY, Helsinki, 1994.

[4] Denlinger, Charles G.: *Elements of Real Analysis.* Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 2011.

[5] Fitzpatrick, Patrick M.: *Advanced Calculus.* 2nd ed. American Mathematical Society, Providence, 2009.

[6] Hayes, Eleanor: *Trigonometric identities.* Teoksessa Historical Topics for the Mathematics Classroom. National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, 1993.

[7] Lang, Serge: *A first Course in Calculus.* 5th ed. Springer, New York, 1986.

[8] Lowe, Roger D.;Schenck, Cynthia: *Sine and cosine.* Teoksessa Historical Topics for the Mathematics Classroom. National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, 1993.

[9] Martio, O.;Sarvas, J.: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt.* 2nd ed. Gaudeamus, Helsinki, 1982.

[10] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis.* 2nd ed. International Student Edition, New York, 1964.

[11] Spivak, Michael: *Calculus.* 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[12] Tao, Terrence: *Analysis II.* Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006.

[13] Juutinen, Petri: *Differentiaaliyhtälöt.* Luentomoniste, 2008. [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://users.jyu.fi/ peanju/dyluennot.pdf

[14] Kilpeläinen, Tero *Analyysi 1.* Luentomoniste, 2000-2002. [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf

[15] Kilpeläinen, Tero *Analyysi 2.* Luentomoniste, 2001-2003. [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf

[16] Kilpeläinen, Tero *Analyysi 3.* Luentomoniste, 2005. [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA113.pdf

[17] Lehtinen, Matti: *Matematiikan historia.* [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

[18] Luoma-aho, Erkki: *Matematiikan peruskäsitteiden historia.* [WWW]. [Viitattu 10.2.2012]. Saatavissa: http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist.html

[19] O'Connor, John J.;Robertson, Edmund F.: *The trigonometric functions. The MacTutor History of Mathematics archive.* 1996. [WWW]. [Viitattu 2.2.2012]. Saatavissa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html