

**Maria Tourunen**

**MATEMATIIKAN OPETUS**

**SUOMESSA JA**

**JAPANISSA**

Pro gradu – tutkielma

10. Marraskuuta 2011

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

<b>Tiedekunta</b>		<b>Laitos</b>	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
<b>Tekijä</b>			
Maria Tourunen			
<b>Työn nimi</b>			
Matematiikan opetus Suomessa ja Japanissa			
<b>Oppiaine</b>			
Matematiikan aineenopettajakoulutus			
<b>Työn laji</b>	<b>Aika</b>	<b>Sivumäärä</b>	
Pro gradu -tutkielma	10.11.2011	73	
<b>Tiivistelmä</b>			
<p>Työssä tarkastellaan tapaustutkimuksen valossa Suomen ja Japanin matematiikan opetuksen eroja sekä vertaillaan molempien maiden matematiikan opetuksen parhaita puolia. Suomen osalta tutkimusaineisto muodostui yläasteen matematiikan tuntien videoista ja niiden pohjalta tehdyistä didaktisten vaiheiden ja luokkahuone vuorovaikutuksen muotojen analyyseista. Vastaavasti tutkimusaineistoa saatiin Japanista, missä yläasteen opettajat olivat videoineet tunteja ja käyttäneet samanlaista luokittelua kuin Suomessa. Didaktisissa vaiheissa keskityttiin tutkimaan mm. sitä, miten tunti jakautui uuden asian opettamisen, harjoittelun ja yhteenvedon kesken. Luokkahuone vuorovaikutuksen muotoja tutkittaessa keskeistä oli selvittää, miten tunti jakaantui opettajan ja oppilaan työskentelyn välillä. Tässä tutkimuksessa selkeimmät erot Suomen ja Japanin matematiikan opetuksessa liittyivät matemaattiseen ajatteluun ja harjoittelun toteutukseen. Japanissa korostettiin matemaattisen ajattelun kehittämistä, mikä ilmeni opetuksessa johdannon ja yhteenvedon korostamisena. Suomessa keskityttiin harjoitteluun. Suomessa harjoitteluosuus oli huomattavasti suurempi (46%) verrattuna Japaniin (20%). Suomalaisen matematiikan opetuksen parhaimpia puolia olivat tekemällä oppiminen sekä oppilaiden osallistuminen opetukseen luokkakeskustelun aikana. Puolestaan japanilaisen matematiikan opetuksen parhaimpia puolia oli hyvä tuntisuunnitelma, jossa tunti oli suunniteltu hyvin johdattelevista kysymyksistä aina yhteenvetoon saakka.</p>			
<b>Avainsanat</b>			
matematiikan oppiminen ja opetus, matemaattinen ajattelu, avoin lähestymistapa, proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto			
<b>Ohjaajat:</b> Jouni Viiri, Markus Hähkiöniemi, Petri Juutinen			

## **ALKUSANAT**

Tämä gradu on tehty Jyväskylän yliopiston Matematiikan laitoksella kasvatustieteiden tiedekunnan professori Jouni Viirin ideoimasta aiheesta. Tämä työ on osa Suomen ja Japanin yhteistyöprojektia, missä on ollut tarkoituksena videoanalyysien avulla tutkia ja vertailla matematiikan oppimista ja opetusta molemmissa maissa. Suuret kiitokset Jouni Viirille mielenkiintoisesta aiheesta ja asiantuntevista kommentteista sekä ohjaajalleni Markus Hähkiöniemelle käytännönläheisistä ja yksityiskohtaisista neuvoista työni eri vaiheissa. Suurimmat kiitokset kuuluvat kuitenkin aviomiehelleni Antille, joka on jaksanut tukea minua koko opiskeluni ajan, sekä lapsilleni Konstalle, Iidalle ja Elsalle.

Maria Tourunen

Laukaassa 2011

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>Johdanto .....</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Matematiikan oppimisen piirteitä.....</b>	<b>8</b>
2.1	Matematiikan oppimisen käsitteitä .....	8
2.2	Matematiikan opetusmenetelmiä .....	10
<b>3</b>	<b>Matematiikan opetuksesta Japanissa ja Suomessa.....</b>	<b>13</b>
3.1	Matematiikan opetuksesta Japanissa .....	13
3.1.1	Open-approach-metodi.....	13
3.1.2	Japanin matematiikan opetuksen erot verrattuna Saksaan ja USA:han .....	15
3.2	Matematiikan opetuksesta Suomessa.....	18
<b>4</b>	<b>Tutkimuskysymykset.....</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Tutkimusmenetelmä .....</b>	<b>23</b>
5.1	Tutkimusaineisto.....	23
5.2	Tutkimusaineiston analysoiminen .....	23
<b>6</b>	<b>Tutkimustulokset .....</b>	<b>27</b>
6.1	Tulokset Suomessa .....	27
6.1.1	Trigonometria .....	27
6.1.2	Potenssi .....	28
6.1.3	Polynomi .....	29
6.1.4	Kertaus kokeeseen .....	30
6.1.5	Luokkahuone vuorovaikutuksen muodot.....	31
6.2	Tulokset Japanissa .....	33
6.2.1	Verrannollisuus .....	33
6.2.2	Yhtälön ratkaiseminen .....	34
6.2.3	Toisen asteen funktio .....	36
6.2.4	Neliöjuuri .....	37
6.2.5	Geometria.....	38
<b>7</b>	<b>Suomen ja Japanin oppituntien tarkastelu .....</b>	<b>40</b>
7.1	Didaktisen vaiheiden tarkastelu .....	40

7.2	Kahden esimerkkitunnin tarkastelu .....	45
7.2.1	Suomalainen esimerkkitunti .....	45
7.2.2	Japanilainen esimerkkitunti .....	48
<b>8</b>	<b>Yhteenveto ja johtopäätökset .....</b>	<b>52</b>
8.1	Tutkimuksen luotettavuus.....	52
8.2	Tunnin rakenne ja vuorovaikutus .....	53
8.3	Matematiikan opetuksen parhaimpia puolia ja sen kehittäminen.....	56
	<b>LÄHTEET .....</b>	<b>59</b>
	Liite 1: Observointikaavakkeet .....	62
	Liite 2: Japanilaisten tuntien luokittelut lisäselvityksineen .....	64
	Liite 3: Kertaus kokeeseen tunnin tehtävämoniste .....	67
	Liite 4: Potenssin tunnin analyysi .....	69
	Liite 5: Potenssin tunnin tehtävät oppikirjasta (Latva ym. 2008).....	73

# 1 Johdanto

Kiinnostukseni tutkia Suomen ja Japanin matematiikan opetusta lähti liikkeelle siitä, kun opettajaopinnoissani tutustuin Jyväskylän yliopistossa tehtävään yhteistyöhön japanilaisten kanssa. Japanilaiset opettajat ovat olleet jo useamman vuoden kiinnostuneita matematiikan opetuksesta Suomessa. Keskeisimpiä teemoja ovat olleet opettajan rooli ja matematiikan opetuksen lähestymistavat. Perimmäisenä syynä siihen, että japanilaiset matematiikan opetuksen tutkijat ovat olleet kiinnostuneita suomalaisesta matematiikan opetuksesta ja sen kehittämisestä, on ollut Suomen menestyminen Pisa-tutkimuksissa (Programme for International Student Assessment) (taulukko1). PISA:ssa arvioidaan kolmen vuoden välein 15-vuotiaiden nuorten osaamista matematiikassa, luonnontieteissä, lukutaidossa ja ongelmanratkaisussa. PISA:ssa selvitetään, miten oppilaat osaavat soveltaa osaamistaan erilaisissa tehtävissä, sekä oppimista tukevia opiskeluasenteita ja -taitoja. Suomi on kuulunut matematiikan osaamisen huippumaihin jo pitkään ja pärjännyt Pisa-tuloksissa paremmin kuin OECD-maat keskimäärin. Myös Japani on saavuttanut hyviä tuloksia Pisa-tutkimuksissa, vaikkakin trendi on ollut viime vuosina laskeva. Japani on ollut vuonna 2000 ensimmäisenä suoritus pisteiden keskiarvolla 557, ja vuonna 2003 Japani saavutti suoritus pistemäärien keskiarvon 534 ollen kuudes, ja vuonna 2006 keskiarvon 523 ollen kymmenes (OECD 2006).

**TAULUKKO 1.** Matematiikan osaamisen huippumaat Pisa-tutkimuksissa vuosina 2000, 2003 ja 2006 (Opetusministeriö 2006).

2000	2003	2006
1. Japani 557	1. Hongkong (Kiina) 550	1. Taipei (Kiina) 549
2. Korea 547	2. Suomi 544	2. Suomi 548
3. Uusi-Seelanti 537	3. Korea 542	3. Hongkong (Kiina) ja Korea 547
4. Suomi 536	4. Alankomaat 538	4. Alankomaat 531
5. Australia ja Kanada 535	5. Liechtenstein 536	5. Sveitsi 530

Kiinnostukseni asiaa kohtaan lisääntyi, kun huomasin Internetistä, mitä siellä kerrottiin Japanin tiedotusvälineiden kirjoittaneen Suomen menestymisestä Pisa-tutkimuksessa. Lehtiartikkeleissa etsittiin syitä sille, miten väestöltään pieni pohjoinen maa voi pärjätä niin hyvin opetuksen saralla. Ratkaisuksi löydettiin erityisesti opettajien korkea koulutustaso. Suomen koulutusjärjestelmä on kiinnostanut Japanissa jo usean vuoden ajan. Viime vuosina Suomeen on käynyt tutustumassa useita toimittajia ja opetusalan viranomaisia, niin ikään suurlähetystöön tulee aiheesta paljon kyselyitä. Viime syksynä japanilaisten opettajien delegaatio oli vierailulla myös Jyväskylässä. He olivat tulleet tutustumaan Suomen opetukseen ja kävivät muun muassa Jyväskylän Normaalikoululla kuuntelemassa tunteja. Sain loistavan tilaisuuden keskustella ja vaihtaa kokemuksia matematiikan opetuksesta heidän kanssaan, kun tapasimme heidät ohjaajieni kanssa ja esittelimme heille tähän tutkimukseen liittyvien tuntien antia ja niiden analyysiä (liite 4). Lisäksi Suomen ja Japanin matematiikan opetuksen vertailun tekee mielenkiintoiseksi se, että maiden välillä koulukulttuureissa on eroavaisuuksia. Japanissa matematiikan opetuksessa keskeisellä sijalla on matemaattisen ajattelun kehittyminen. Suomessa keskeisiä teemoja ovat oppilaan rooli ja tekemällä oppiminen.

Tämän työn teoreettisessa osuudessa selvitetään yleisiä matematiikan oppimisen ja opetuksen piirteitä. Lisäksi tarkastellaan matematiikan opetusta niin Japanissa kuin Suomessakin sekä esitellään Japanissa kehitelty mielenkiintoinen open-approach -metodi. Tutkimukseni päätarkoitus on tarkastella matematiikan opetuksen laadullisia eroja Suomen ja Japanin välillä sekä vertailla molempien maiden matematiikan opetuksen parhaita puolia. Lisäksi tehdään havaintoja molempien maiden matematiikan oppitunneista keskittyen tuntien rakenteisiin sekä vuorovaikutukseen tunnin aikana.

## 2 Matematiikan oppimisen piirteitä

Tässä kappaleessa on tarkoitus selvittää matematiikan oppimiseen liittyviä käsitteitä sekä opetusmenetelmiä, joita tällä hetkellä pidetään yleisesti tehokkaina sekä oppilaslähtöisinä. Näitä käsitteitä ja opetusmenetelmiä voidaan käyttää hyödyksi analysoitaessa tutkimusaineistoa.

### 2.1 Matematiikan oppimisen käsitteitä

Matematiikan oppimisen kohdalla kyse ei ole pelkästään tietojen ja taitojen vaan myös matemaattisen ajattelun oppimisesta. Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen pohjautuvat erilaisten käsitteiden ja käsityksien muodostumiseen. Käsitys on ihmisen omaan havaintoon, kokemukseen tai ajatteluun perustuva asenne, ja ihmisellä voi olla tietystä käsitteestä oma käsityksensä. Jokaisella matemaattisella käsitteellä on olemassa täsmällinen määritelmä, joka perustuu matematiikan aksiomajärjestelmään. Matematiikassa uudet käsitteet rakentuvat aikaisemmin opittujen varaan, joten niiden hallitseminen on varmistettava ennen uusien käsitteiden opiskelua (Joutsenlahti 2005a). Yrjönsuuren (2004) mukaan matematiikan laadullisella oppimisella tarkoitetaan yksilön tietyn alueen tiedollisen rakenteen muuttumista, kun taas määrällistä oppimista kuvaa tietty pistemäärä, jonka oppilas saavuttaa esimerkiksi kokeista ja jonka perusteella annetaan arvosana.

Konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto ja proseduraalinen eli menetelmätieto ovat tärkeitä käsitteitä tarkasteltaessa matematiikan oppimista ja kehitettäessä opetusta. Konseptuaalisella tiedolla tarkoitetaan asiakokonaisuuksien hallintaa ja tiedon soveltamista; esimerkiksi toisen asteen yhtälön muodostamista, kun taas proseduraalisella tiedolla tarkoitetaan ratkaisumenetelmien osaamista; esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käyttöä. Haapasalo (2004) määrittelee konseptuaalisen tiedon tarkasti siten, että se on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan. Edelleen solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduureja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia. Hähkiöniemen (2006) mukaan Hiebert ja Lefevre (1986) esittävät, että konseptuaalista tietoa muodostuu myös, kun oppija kytkee uuden tietoyksikön olemassa



olevaan tietoverkkoonsa tai kun oppija muodostaa kytkentöjä jo olemassa olevien tietojen välille eli uudelleen konstruoi tietoverkkoaan. Haapasalo (2004) määrittelee proseduraalisen tiedon siten, että se tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Lisäksi Haapasalon mukaan tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut. Hähkiöniemen (2006) mukaan oleellista proseduraalisessa tiedossa on, että sen merkitystä ei tarvitse ymmärtää. Symboleita voi opetella kirjoittamaan annetun mallin mukaan, ja vaihe vaiheelta etenevät proseduurit on mahdollista opetella ulkoa.

Joutsenlahti (2005b) esittelee artikkelissaan Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) kehittämän jaottelun yksilön matemaattisen osaamisen viidestä piirteestä:

1. Käsitteellinen ymmärtäminen: matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen.
2. Proseduraalinen sujuvuus: taito käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.
3. Strateginen kompetenssi: kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. Mukautuva päättely: pystyvyys loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen.
5. Yritteliäisyys: nähdä luontaisesti matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä uskoon ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin.

Näistä Joutsenlahden esittelemistä matematiikan oppimisen piirteistä ensimmäinen, kolmas ja neljäs liittyvät selvästi konseptuaalisen sekä toinen proseduraalisen tiedon hallintaan. Viides piirre, yritteliäisyys, liittyy enemmän oppilaan omaan näkemykseen matematiikan oppimisesta. Matematiikan opetuksen kannalta voidaan pohtia, kumpi on tärkeämpää proseduraalinen osaaminen vai konseptuaalinen ymmärtäminen. Lisäksi opettajana pitää tasapainoilla opetuksessa siinä, kuinka paljon oppilaiden pitää ymmärtää ennen kuin he pystyvät tekemään ja toisaalta, kuinka paljon oppilaiden pitää ensin tehdä että he pystyvät ymmärtämään.

Matemaattinen osaaminen on matematiikan monipuolista hallintaa. Matematiikan hyvä osaaminen vaatii proseduurien taitavaa käyttöä sekä niiden soveltamista, jotta saavutettaisiin myös konseptuaalisen tiedon taso. Jotta oppilas saavuttaisi hyvän konseptuaalisen tiedon tason, hänen pitäisi oppia matemaattista ajattelutapaa ja logiikkaa. Seuraavassa kappaleessa perehdytään erilaisiin opetusmenetelmiin, joiden avulla luokkahuoneisiin saataisiin matematiikan monipuolisen hallinnan mahdollistavaa opetusta.

## 2.2 Matematiikan opetusmenetelmiä

Matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkijayhteisössä on jo pitkään pidetty tehokkaina oppilaslähtöisiä, vuorovaikutusta korostavia opetusmenetelmiä, joissa oppilaat itse tutkivat jotain matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumalleja (Hähkiöniemi hyväksytty, a). Steinin, Englen, Smithin ja Hughesin (2008) mukaan tehokkaassa matematiikan opetuksessa matemaattisella keskustelulla on tärkeä sija. Tällaisella tunnilla oppilaat yhdessä työskentelevät matemaattisen ongelman parissa sekä jakavat ratkaisuja ja ideoitaan koko luokan kesken. Opettajan rooli työskentelyn kannustajana ja oppimisen ohjaajana on tärkeä tällaisen luokkakeskustelun aikana. Stein ym. (2008) ovat kehittäneet viiden kohdan mallin, jonka avulla opettaja voi vaihe vaiheelta oppia käyttämään paremmin oppilaiden vastauksia hyödyksi kohti parempaa matematiikan opetusta. Mallin tavoitteena on kehittää oppitunneilla juuri matemaattista keskustelua.

Viholainen (2010) pitää luovaa ajattelua, ongelmanratkaisukykyä ja kykyä tuottaa uusia innovaatioita matematiikan oppimisessa erittäin tärkeinä. Viholaisen mukaan luovaa ajattelua ja ymmärtämistä tukevat tehtävät olisivat sellaisia, että ne olisivat oppilaalle uusia, eikä hänellä olisi valmista mallia niiden ratkaisemiseksi. Lisäksi tehtävissä edellytettäisiin kunnon perusteluja päätelmille ja menetelmävalinnoille, sekä tehtävät liittyisivät olennaisesti matematiikkaan siten, että sen ratkaisu kehittäisi matematiikan ymmärtämistä. Viholaisen mukaan pelkkä mallien rutiininomaiseen jäljittelemiseen perustuva oppiminen ei edellyttäisi asioiden käsitteellistä ymmärtämistä, eikä syvällistä matemaattista ymmärtämistä vaativaa pohdiskelua välttämättä tarvittaisi missään vaiheessa. Hähkiöniemen (2006) mukaan oppilaan tulisi tehtävissä joutua enemmän

käyttämään käsitteellistä tietoa, ja tehtävät tulisi laatia tukemaan käsityksenmuodostusprosessin eri vaiheita.

Tällaisina matemaattista ajattelua ja keskustelua tukevina opetusmenetelminä voidaan pitää muun muassa ongelma-keskeistä oppimista, avoimia tehtäviä, avointa lähestymistapaa, tutkivaa oppimista ja elämyksellistä opetusta. Seuraavaksi kerron pääpiirteittäin, mitä edellä mainitut opetusmenetelmät pitävät sisällään. Ongelma-keskeisen oppimisen (Pehkonen, Hannula ja Björkqvist 2007) lähtökohta on jokin opettajan väljästi muotoilema ongelma. Ongelma voi olla aihepiiriltään oppiaineeseen rajattu, tai niin sanotusti poikkitieteellinen. Tärkeää on myös, ettei oppikirjasta löydy selvää vastausta eikä sitä opettajakaan anna valmiina. Jos oppilaat kokevat heti ratkaisseensa asian, ei mitään ongelmanratkaisuprosessia edes pääse syntymään. Pehkonen ja Rossi (2007) kertovat, että ongelma-keskeistä oppimista pidetään opettajien keskuudessa opetuksessa tärkeänä, sillä se kehittää oppilaan kognitiivisia taitoja ja auttaa oppilasta käyttämään oppimaansa matematiikkaa sekä keskustelemaan siitä. Avoin tehtävä [open problem] (Pehkonen 1997) on sellainen, jossa sen alku- tai lopputila on avoin eli alkua tai loppua ei ole tarkasti määritelty. Avoimiin tehtäviin ei ole olemassa yhtä oikeaa ratkaisua, vaan ratkaisu riippuu ratkaisijan tekemistä oletuksista tai valinnoista. Puhutaan myös avoimesta lähestymistavasta [open-approach] (Nohda 2000, Pehkonen 2004), jossa koko opetus- ja oppimistapahtuma suunnitellaan avoimeksi. Tällainen avoin lähestymistapa perustuu avoimien ongelmien käyttämiseen ja tähtää ongelmien erilaisten ratkaisujen kehittämiseen. Avoin lähestymistavan täytyy myös olla tavoitteen mukaista, eli sen tulee tähdätä tiettyjen oppimistavoitteiden saavuttamiseen (Hähkiöniemi 2006).

Tutkivassa oppimisessa (Hakkarainen, Lonka & Lipponen 2004) oppiminen tapahtuu yleensä ryhmässä tai koko luokan kesken. Tutkiva oppiminen on tiedon rakentelua, mikä tarkoittaa, että oppimisen tulos ei ole oleellisesti vain oppilaan loppukokeessa antama koevastaus, tai edes ryhmän löytämä vastaus tutkimusprosessin alussa asetettuun ongelmaan vaan oppimisen tulos on ennen kaikkea yhdessä muodostettu tapa jäsenellä ongelmaa ja siihen liittyvää tietoa. Hähkiöniemen (hyväksytyt, a) mukaan tutkivan matematiikan tunti muodostuu yleensä kolmesta vaiheesta, aloitus-, tutkimus- ja koontivaiheesta. Aloitusvaiheessa opettaja esittelee tehtävät, mutta ei kuitenkaan esitä valmiita ratkaisumenetelmiä tai anna esimerkkejä. Tutkimusvaiheessa opiskelijat

ratkaisevat ryhmissä tehtäviä opettajan kierrellessä ohjaamassa heidän työskentelyään. Koontivaiheessa opettaja pyytää opiskelijat esittämään ratkaisumenetelmiään ja johtaa koko luokan yhteistä keskustelua. Koontivaiheessa opettaja myös tiivistää tunnin opetuksen ja ottaa käyttöön standardit merkinnät.

Portaankorva-Koiviston (2010) mukaan elämyksellisyys matematiikan opetuksessa yhdistyy tunteisiin. Elämyksellisessä opetuksessa tulee olla mahdollisuus oppia matematiikkaa koko kehollaan, kokonaisvaltaisesti. Tärkeintä on, että oppilaat saavat ensin konkreettisen kokemuksen ja vasta sitten siirrytään formaalimpaan systematiikkaan. Elämyksellisyyteen kuuluu oppilaslähtöisyys. Aidossa oppilaslähtöisyydessä on kyse dialogista, jonka aikana oppilas voi yleistää, testata, korjata ja tarkistaa henkilökohtaista matemaattista tietoaan. Kun oppilas uppoutuu oppimisprosessiin ja tuo esiin pohtimiaan näkökulmia, se rikastuttaa koko luokkayhteisöä. (Portaankorva-Koivisto 2010.)

## **3 Matematiikan opetuksesta Japanissa ja Suomessa**

### **3.1 Matematiikan opetuksesta Japanissa**

Nohdan (2000) mukaan Japanissa suurin osa viime vuosikymmeninä matematiikan koulutuksen ja opetuksen tutkimuksista on keskittynyt oppilaan matemaattiseen ajatteluun. Nohdan mukaan oppilaan matemaattista ajattelua tukevien opetusmetodien kehittäminen on ollut tärkeällä sijalla Japanissa. Lisäksi Nohda korostaa, että erityisesti koulumatematiikassa jokaista oppilasta pitäisi rohkaista käyttämään kokonaisvaltaisesti matemaattista ymmärrystään, taitojaan ja ajattelutapaansa. Myös Shimizun (1999) artikkelissa tulee ilmi kuinka keskeisessä roolissa matemaattisen ajattelun kehittäminen on Japanin oppitunneilla. Kawanaka ja Stigler (1999) mukaan matemaattisen ajattelun kehittymistä tukee myös se, että Japanilaisilla oppitunneilla opettaja esittää oppilaille sellaisia kysymyksiä, joihin oppilaat joutuvat selittämään ja kuvailemaan omia ajatuksia ja ideoita koko luokalle. Lisäksi he ovat huomanneet, että opettaja pyytää usein oppilaita kertomaan, miten ongelma ratkaistaan ennemmin kuin laskemaan itse ongelman ratkaisun.

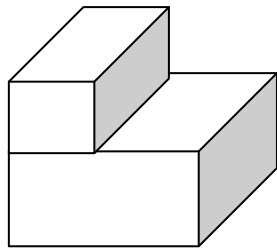
#### **3.1.1 Open-approach–metodi**

Seuraavaksi selvitän lyhyesti mitä japanilaisten kehittämällä open-approach–metodilla tarkoitetaan, ja sitten esimerkin kautta valaisen asiaa lisää. Open-approach–metodilla (Nohda 2000) tarkoitetaan opetustyyliä, jossa oppilaille annetaan avoin ongelma, jolle on olemassa useita oikeita ratkaisumalleja ja vastauksia. Metodien tavoite ei ole tuottaa oikeaa vastausta vaan saada oppilaat käyttämään matemaattisia ajattelutapojaan ja kykyjään. Tällä opetusmetodilla tähdätään siihen, että kaikki oppilaat voivat oppia matematiikkaa ottaen huomioon heidän matemaattisen osaamisen lähtökohdat. Metodilla on tarkoitus edistää oppilaiden motivaatioita ja asenteita matematiikkaa kohtaan sekä syventää oppilaiden matemaattista ajattelua ja tietämystä.

Nohdan (2000) mukaan open-approach–metodissa on kolme periaatetta. Ensimmäinen periaate liittyy oppilaan itsenäiseen työskentelyyn, jossa arvostetaan oppilaan omaa työskentelyä ja annetaan hänelle työrauha. Toinen periaate liittyy matematiikan luonteeseen; matematiikka on teoreettista ja systemaattista. Oikea matemaattinen

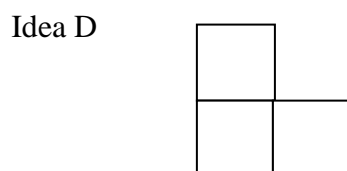
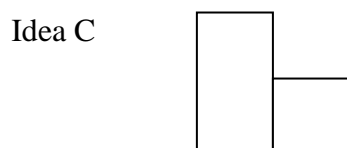
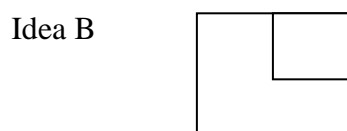
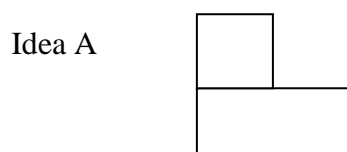
ilmaisutapa on tärkeä oppia. Kolmas periaate liittyy opettajan päätöksentekoon luokassa. Opettajan rooli on merkittävä oppimisprosessin aikana, jossa oppilaat ideoivat erilaisia ratkaisumalleja ja oppivat erilaisista tavoista ratkaista ongelma.

Hino (2007) esittelee artikkelissaan tunnin, jossa on käytetty open-approach-metodia. Kerron lyhyesti tunnin kulun ja esimerkkiongelman, mistä saa jonkinlaisen kuvan kyseisen metodin käytöstä oppitunnilla. Tunti aloitetaan edellisen tunnin kertauksella erilaisten kappaleiden tilavuuksien laskemisesta. Seuraavaksi opettaja esittelee taululla avoimen ongelman. Tarkoituksena on etsiä erilaisia tapoja laskea kappaleen tilavuus (kuvio 1).

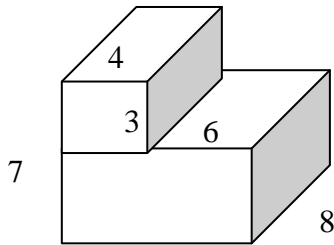


**KUVIO 1.** Kappale, jonka tilavuuden laskemiseen oppilaat ideoivat erilaisia tapoja (Hino 2007, s. 509).

Seuraavaksi oppilaat työskentelevät itsenäisesti ja kirjoittavat ideoitaan vihkoon. Samalla opettaja kiertelee luokassa ja kehottaa oppilaita kokeilemaan erilaisia ideoita. Vapaaehtoiset oppilaat esittelevät ideoitaan taululla koko luokalle:



Seuraavaksi opettaja lisää alkuperäiseen kuvioon sivujen pituudet, minkä jälkeen oppilaat voivat laskea kappaleen tilavuuden (kuvio 2).



**KUVIO 2.** Kappale, johon on lisätty sivujen pituudet (Hino 2007, s. 509).

Oppilaat työskentelevät itsenäisesti ja opettaja kehottaa valitsemaan yhden idean ja ratkaisemaan sen avulla tilavuuden. Opettaja kiertelee kyselemässä ja neuvomassa oppilaita. Vapaaehtoiset oppilaat esittävät ratkaisunsa taululle:

$$\begin{aligned} &8 \cdot 4 \cdot 3 = 96 \\ \text{Idea A: } &8 \cdot 10 \cdot 4 = 320 \\ &96 + 320 = 416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8 \cdot 10 \cdot 7 = 560 \\ \text{Idea B: } &8 \cdot 6 \cdot 3 = 144 \\ &560 - 144 = 416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8 \cdot 4 \cdot 7 = 224 \\ \text{Idea C: } &8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \\ &224 + 192 = 416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &8 \cdot 4 \cdot 3 = 96 \\ \text{Idea D: } &8 \cdot 4 \cdot (7 - 3) = 128 \\ &8 \cdot 6 \cdot (7 - 3) = 192 \\ &96 + 128 + 192 = 416 \end{aligned}$$

Lopuksi opettajan johdolla oppilaat vertailevat erilaisia ratkaisumenetelmiä ja vastauksia. Lisäksi mietitään ratkaisuja yhdistäviä tekijöitä ja päädytään sopivimpaan ideaan.

### 3.1.2 Japanin matematiikan opetuksen erot verrattuna Saksaan ja USA:han

Shimizun (1999) artikkelin mukaan matematiikan oppitunnit Japanissa eroavat selvästi Saksan ja USA:n tunneista. Tulokset perustuvat TIMSS-videotutkimukseen (Trends in International Mathematics and Science Study) vuonna 1999. Siinä on videoitu kahdeksaluokkalaisten matematiikan oppitunteja seitsemässä maassa. Tutkimus

perustuu oppituntien videoanalyysihin. Siinä on tarkoitus selvittää opetuskäytäntöjä luokkahuoneissa ja antaa tietoa opetuksesta ja oppimisesta opetuksen suunnittelijoille ja siitä päättävälle. Japani oli mukana TIMSS-videotutkimuksessa vuonna 1999, mutta Suomi ei. Shimizun (1999) mukaan Japani erosi näistä kahdesta muusta maasta (Saksa ja USA) erityisesti siinä, millainen rakenne oppitunnilla oli, ja miten se oli toteutettu, sekä miten ongelmanratkaisukeskeisyyttä oli painotettu oppimisessa. Japanin tunteja parhaiten kuvasi myös opettajien yritykset edistää oppilaiden matemaattista ajattelua. Japanilaiset opettajat kertoivat tunnin päätavoitteen olevan matemaattisen ajattelun kehittäminen kun taas Saksan ja USA:n opettajat kertoivat taitojen kehittämisen olevan tärkein asia oppitunnilla (taulukko 2).

**TAULUKKO 2:** Opettajien vastaukset kysyttäessä tunnin tavoitetta (Shimizu 1999, s.191).

	Saksa	USA	Japani
Taidot	55	61	25
Ajattelu	31	21	73

Shimizun (1999) mukaan TIMSS-tutkimuksessa Japanissa opettajan luentoa esiintyi oppitunneilla enemmän kuin Saksassa tai USA:ssa, vaikkakin se oli kaikissa maissa määrällisesti vähäistä. Japanissa opettajan luentoa esiintyi pääsääntöisesti yhteenvedon (”Matome” japaniksi) aikana. Japanilaisten opettajien mukaan Matome-vaihe on välttämätön menestyksekkäälle oppitunnille. Matome-vaiheen aikana japanilaiset opettajat tekevät yksityiskohtaisia matemaattisia kommentteja oppilaiden työskentelystä, kun taas USA:ssa opettajat antavat enemmän yleisiä kommentteja tunnin lopussa esimerkiksi että kaikki ovat tehneet hienoa työtä. Shimizu mainitsee myös, että Japanissa käytettiin huomattavasti vähemmän aikaa laskentarutiinien harjoitteluun ja enemmän aikaa matemaattisten ongelmien miettimiseen ja uusien ratkaisumenetelmien keksimiseen kuin Saksassa tai USA:ssa. Japanissa rutiinitehtävien tekemiseen käytettiin 40,8 % sekä Saksassa 89,4 % ja USA:ssa 95,8 % harjoitteluajasta. Vastaavasti ongelmien miettimiseen käytettiin aikaa Japanissa 44,1 % ja Saksassa 4,3 % ja USA:ssa vain 0,7 % harjoitteluajasta. Lisäksi Shimizu mainitsee artikkelissaan verrattuna Saksaan ja USA:han Japanissa luokkaan ei koskaan tullut kukaan kesken



oppitunnin tai oppitunti keskeytyi muutenkin esimerkiksi ilmoitusasioissa todella harvoin.

Shimizu (1999) selvittää myös oppituntien rakennetta. Saksan ja USA:n tunnit voidaan jakaa kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa opettaja selvittää, miten esimerkkit tehtävä/-ongelma ratkaistaan, ja toisessa osassa oppilaat ratkaisevat tehtäviä itsenäisesti opettajan auttaessa tarvittaessa. Japanin oppituntien rakenne eroaa näistä kahdesta muusta maasta. Japanissa tunnin rakenne noudattelee seuraavaa järjestystä: ongelman esittäminen, oppilaiden ongelmanratkaisu, luokkakeskustelu ratkaisumenetelmistä, opettajajohtoinen yhteenveto. Hähkiöniemen (hyväksyty, b) artikkelissaan esittelemä tunti noudattelee myös tyypillistä japanilaista matematiikan tuntia. Siinä opettaja oli hahmottanut tunnin rakenteen tuntisuunnitelmaan seuraavasti: ongelman ymmärtäminen, yksilöllinen oppiminen, kollektiivinen oppiminen ja reflektointi. Japanissa opettajat käyttävät aina samantyyppistä tuntisuunnitelman runkoa suunnitellessaan oppitunteja (taulukko 3).

**TAULUKKO 3:** Tuntisuunnitelman runko Japanin oppitunneilla (Shimizu 1999, s.192).

Vaiheet	Oppimisaktiviteetit	Oppilaiden vastauksiin valmistautuminen	Merkinnät opetuksesta
Ongelmanesittäminen			
Oppilaiden ongelman ratkaiseminen yksilötyöskentelynä			
Luokkakeskustelu			
Yhteenveto			
Harjoitukset/lisätehtävät			

Myös tuntisuunnitelma Kawaguchin Minamin yläasteella noudattaa vastaavanlaista runkoa (taulukko 4).

**TAULUKKO 4:** Kawaguchi Minamin yläasteen tuntisuunnitelma 2009 (Kinami, 2009).

Oppimisaktiviteetit	Tärkeimmät asiat opettamisessa	Oppimistilanteen arviointi
1. Johdattelevan kysymyksen ratkaiseminen		
2. Tehtävä 1		
3. Tehtävä 2		
4. Jakson yhteenveto		

### 3.2 Matematiikan opetuksesta Suomessa

Suomen opetusta tutkittaessa voidaan selvittää millaista tunnin rakennetta tyypillinen suomalainen matematiikan tunti noudattaa. Lisäksi opetussuunnitelma ja osaltaan oppikirjat vaikuttavat siihen, millaista opetusta Suomessa järjestetään. Opetusta kehitettäessä keskeisellä sijalla ovat tehokkaiksi havaitut sekä vaihtoehtoiset opetusmenetelmät.

Savola (2008) on tutkinut suomalaisen tunnin rakennetta, missä tyypillinen matematiikan tunti alkaa kotitehtävien tarkistamisella. Tapoja tähän on monia; tehtävät voidaan käydä tarkasti läpi koko luokan kanssa tai sitten opettaja vain kiertelee katsomassa oppilaiden vihkoista, onko tehtävät tehty. Seuraavaksi opettaja esittelee uuden asian ja näyttää tyypillisesti vielä esimerkkitehtävän luokan edestä. Tämän jälkeen opettaja antaa oppikirjasta tehtäviä, joita oppilaat itsenäisesti tai pareittain ratkaisevat. Tehtävät liittyvät uuteen vasta opetettuun asiaan. Tunnin lopussa opettaja antaa uudet kotitehtävät oppikirjasta. Pehkosen ja Rossin (2007) mukaan oppikirjoillakin on suuri vaikutus opetukseen. Oppikirjat sisältävät lähes kaiken, mitä tällaisella tyypillisellä tunnilla tarvitaan. Oppikirjoista löytyy kustakin aihealueesta ensin teoriaosuus esimerkkitehtävineen ja sitten harjoitustehtäviä sekä kotitehtävät.

Oppikirjat pohjautuvat aina opetussuunnitelmaan, vaikka oppikirjojen välillä on tekijöistä riippuen erilaisia painotuseroja.

Opetussuunnitelmissa kuvaillaan opetuksen tavoitteet ja määritellään opetettavat sisällöt. Opetussuunnitelmien perusteissa määrätään tuntiresurssit, joilla tavoitteet olisi saavutettava. Keskeinen käsite opetussuunnitelmia rakennettaessa on yleissivistys, jonka sisältöjen valitseminen ja kuvaaminen ovat kullekin aikakaudelle ominaisia (Joutsenlahti 2005a). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) mukaan vuosiluokkien 6 – 9 matematiikan perusvalmiuksiin kuuluvat arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintaminen, matemaattisten ajattelumallien oppiminen sekä muistamisen, keskittymisen ja täsmällisen ilmaisun harjoittelu. Lisäksi painotetaan, että oppilas oppii ymmärtämään matemaattisten käsitteiden ja sääntöjen merkityksen sekä näkemään matematiikan ja reaalimaailman välisiä yhteyksiä. Oppilas oppii myös laskutaitoja ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia sekä loogista ja luovaa ajattelua. Päätösarvioinnin kriteereissä mm. mainitaan, että oppilas osaa muuntaa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman matemaattiseen esitysmuotoon ja tehdä suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi, ratkaista sen ja tarkistaa tuloksen oikeellisuuden.

Pehkonen ym. (2007) suhteuttavat annettavan opetuksen asetettuihin tavoitteisiin ja esittävät, että opetuksen tavoitteena olisi kehittää itsenäisiä, itsevarmoja, kriittisesti ajattelevia, motivoituneita ja taitavia tulevia yhteiskunnan täysvaltaisia jäseniä. Heidän mielestä olisi tärkeää keskittyä miettimään, että millainen koulu olisi optimaalinen tähän tavoitteeseen. Suomessa ollaan matematiikan tunneillakin siirtymässä opettajan roolin tarkkailusta oppilaan roolin merkityksen tarkkailuun ja ymmärretään, että oppiminen tapahtuu oppilaan ajatusprosessina. Suomessa korostetaan nykyään entistä enemmän tekemällä oppimista ja itsenäisen harjoittelun merkitystä. Japanissa yleinen ongelmalähtöinen oppiminen on otettu myös Suomessa mukaan opetukseen matematiikan ymmärtämisen ja luovuuden lisäämiseksi. (Pehkonen ym. 2007.)

Pehkonen ja Rossi (2007) esittelevät vaihtoehtoisia matematiikan opetuksen menetelmiä, joilla voidaan lisätä oppimismotivaatiota ja opetuksen mielekkyyttä. Vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä käyttävässä opetuksessa voidaan käyttää hyväksi ympärillä olevaa yhteiskuntaa; luokkahuonetta, koulua, kauppa, kirjastoa jne. Oppilaalle voidaan antaa myös konkreettisia mittaustehtäviä; esimerkiksi voidaan mitata pituutta tai tilavuutta luokassa käyttäen hyväksi luokasta löytyviä tavaroita ja

esineitä. Toiminnallisissa tehtävissä voidaan erilaisten materiaalien, kuten mm. paperin tai pahvin, avulla käsillä tehdä oppia matematiikkaa. Opettajilla on mahdollisuus käyttää opetuksessaan erilaisia oppimispelejä ja -materiaaleja. Lisäksi tutkiva oppiminen ja projektityöskentely ovat varteenotettavia opetuksen menetelmiä. Näissä työ tehdään usein useamman tunnin aikana pareittain tai ryhmissä.

## 4 Tutkimuskysymykset

Kansainvälisissä opetuksen ja oppimisen tutkimuksissa saadaan yleisellä tasolla olevaa tutkimustietoa eri maissa. Tässä tutkimuksessa halutaan tutkia tarkemmin luokkahuonetyöskentelyä ja selvittää, mitä oppitunneilla tapahtuu. TIMSS-videotutkimuksessa on käytetty samanlaisia tutkimusmenetelmiä, mutta siinä on keskitytty vertaamaan oppimista USA:n tutkimusaineistoon. Suomen ja Japanin matematiikan opetuksesta ei ole juurikaan tehty vertailevaa tutkimusta aikaisemmin, sekä julkaistua aineistoa on vähän saatavilla.

Tämä tutkimukseni liittyy oleellisesti Suomen ja Japanin yhteistyöprojektiin. Projektissa on ollut tarkoituksena videoanalyysien avulla saada matematiikan tunneilta materiaalia, jota voidaan käyttää hyödyksi kehitettäessä opetusta kummassakin maassa. Tarkoituksena on tarkastella tämän tutkimusmateriaalin perusteella Suomen ja Japanin matematiikan opetuksen eroja sekä vertailla molempien maiden matematiikan opetuksen parhaita puolia. Videoitujen tuntien ja japanilaisten opettajien merkintöjen avulla voidaan jonkin verran tarkastella myös opetuksen sisältöjä. Lopuksi voidaan pohtia, mitä hyvää japanilaisesta opetuksesta voisi ottaa suomalaiseseen opetukseen.

Työn tavoitteena on keskittyä laadullisiin eroihin, ei niinkään tehdä yleistyksiä Suomen ja Japanin eroista. Työssä tehdään havaintoja molempien maiden matematiikan oppitunneista keskittyen tuntien rakenteisiin sekä vuorovaikutukseen tunnin aikana. Havainnoista tehtyjen tulosten prosenttiosuuksia käytetään laadulliseen tarkasteluun, ei niinkään tilastollisiin päätelmiin. Työssä verrataan tutkimustulosten yhteensopivuutta teoriaosuudessa selvitettyihin laajempien tutkimuksien tuloksiin. Työssä tarkastellaan erityisesti sitä, miten tutkimuksessa mukana olevista tunneista on löydettävissä tyypillisiä Suomen ja Japanin tuntien rakenteita. Lisäksi halutaan selvittää, löytyykö Japanilaisten korostamaa yhteenvetoa (Matome), sekä millaisia laskentatehtäviä oppilaat tunneilla tekevät.

Työssä tarkasteltavat tutkimuskysymykset:

1. Millaisia tunnin rakenteeseen ja vuorovaikutukseen liittyviä eroja löytyy tämän tapaustutkimuksen valossa Suomen ja Japanin matematiikan opetuksesta?
2. Mitkä ovat Suomen ja toisaalta Japanin matematiikan opetuksen parhaat puolet?
3. Mitä parannettavaa molempien maiden matematiikan opetuksessa olisi suhteutettuna tämän työn teoreettiseen viitekehykseen?

## 5 Tutkimusmenetelmä

Suomen osalta tutkimusaineisto muodostui matematiikan tuntien videoista ja niiden pohjalta tehdyistä luokitteluista ja analyyseista. Vastaavasti tutkimusaineistoa saatiin Japanista, missä Minamin yläasteen opettajat olivat videoineet tunteja ja käyttäneet samanlaista luokittelua kuin Suomessa. Kommunikointi ja tutkimusaineiston vaihto Japanin opettajien kanssa on tapahtunut ohjaajani kautta.

### 5.1 Tutkimusaineisto

Tutkimusaineistoa kerättiin Suomessa Jyväskylän Normaalikoulun yläasteella. Videoitavien tuntien valinnassa pääkriteerinä oli valita eri opettajien tunteja, koska näin voitiin varmistaa aineiston monimuotoisuus. Muuten videoitavat tunnit valittiin satunnaisesti käyttämällä hyväksi Normaalikoulun lukujärjestystä, joka löytyi Internetistä. Nettilukujärjestyksen pohjalta ei ollut mahdollista päätellä tuntien aiheita. Tunneiksi valikoituivat seitsemäsluokkalaisten tunnit aiheista *potenssi*, *polynomit* ja *kertaus kokeeseen* sekä kahdeksaluokkalaisten tunti aiheesta *trigonometria*. Didaktisten vaiheiden luokitteluita oli käytettävissä Japanilaisista matematiikan tunneista *geometria*, *yhtälön ratkaiseminen*, *toisen asteen funktio* (neliöllinen funktio), *neliöjuuri* sekä *verrannollisuus*. Luokkahuone vuorovaikutuksen muotojen luokitteluja oli Japanissa tehty *geometri*an tunnilta.

### 5.2 Tutkimusaineiston analysoiminen

Videoiden pohjalta tunnit jaettiin minuutin tarkkuudella eri osiin. Tuntien jakamisessa käytettiin Didaktiset vaiheet ja Luokkahuone vuorovaikutuksen muodot –kaavaketta (liite 1) (Seidel, Prenzel ja Kobarg 2005). Kaavakkeeseen merkattiin aina minuutti kerrallaan rasti siihen kohtaan, mikä vaihe tunnista oli menossa. Didaktisissa vaiheissa keskityttiin tutkimaan mm. sitä, miten tunti jakautui uuden asian opettamisen, harjoittelun ja yhteenvedon kesken (taulukko 5). Luokkahuone vuorovaikutuksen muotoja tutkittaessa keskeistä oli selvittää, miten tunti jakaantui opettajan ja oppilaan työskentelyn välillä toisin sanoen opettajan luennon ja oppilaiden yksilö- ja parityöskentelyn kesken (taulukko 6).

**TAULUKKO 5.** Didaktiset vaiheet (Seidel ym. 2005).

Didaktiset vaiheet	Selite
Toisto	Käsitellään ja toistetaan aikaisemmin opittua asiaa.
Johdatus uuteen asiaan	Johdatellaan uuteen asiaan.
Uuden asian opettaminen	Opetetaan uutta asiaa.
Varmistaminen/harjoittelu	Harjoitellaan opittua asiaa; lasketaan ja tehdään tehtäviä.
Soveltaminen	Sovelletaan ja sisäistetään uutta asiaa; voi tapahtua luokkakeskusteluna tai oppilaan työskentelyn aikana.
Yhteenveto	Kootaan ja jäsennetään opitut asiat jakson tai tunnin lopussa.
Palaute	Opettaja antaa oppilaille työskentelystä yksilöllistä tai ryhmäpalautetta.
Arviointi/kotitehtävien tarkistaminen	Tarkastetaan ja arvioidaan oppilaan oppimistuloksia/kotitehtäviä.
Muu	Muuta tunnin aikana tapahtuvaa, mitä ei voi merkata muihin sarakkeisiin.

Toistovaiheen tavoite on palauttaa mieleen aikaisemmin opittua asiaa. Opettaja saattaa sanoa oppilaille esimerkiksi: ”Muistatko vielä tämän?”, ”Puhuimme tästä aikaisemmin.”

Johdatus uuteen asiaan aikana opettaja esittelee lyhyesti tunnin aiheen tai esimerkkitehtävän, joka johdattelee uuteen asiaan. Uuden asian opettamisen aikana yleensä opettaja opettaa uutta asiaa käyttäen apuna taulua, oppikirjaa, monistetta tai tietokonetta. Vaihtoehtoisesti oppilaat voivat tutustua uuteen asiaan oppikirjan tai muun materiaalin avulla. Varmistaminen/harjoittelu aikana oppilas harjoittelee juuri opittua asiaa yleensä yksilö- tai pari-/ryhmätyöskentelynä. Tyypillisesti tehtävät ovat oppikirjan tehtäviä, jotka ovat selvästi rutiininomaisia sekä mekaanista toistoa vaativia tehtäviä.

Soveltamisen aikana oppilaiden tehdessä tehtäviä he joutuvat käyttämään ja soveltamaan aikaisemmin opittua tietoaan laajemmin, ei vain kyseisellä tunnilla opittua asiaa. Yhteenvetoon tavoite on jäsentää tärkeimmät asiat. Tämä voidaan tehdä opettajajohtoisesti tai luokkakeskusteluna, ja lisäksi voidaan kirjoittaa vihkoon jäsenneetyt asiat. Palautteen tavoite on antaa oppilaille palautetta heidän oppimisesta, ei



niinkään vetää yhteen sitä, mitä on opittu tunnin aikana. Arvioinnin/kotitehtävien tarkistamisen aikana tarkastellaan oppilaiden oppimistuloksia. Opettaja saattaa kysyä oppilailta esimerkiksi: ”Kuka on osannut tehdä kotitehtävät?” tai pyytää oppilasta taululle esittämään tehtävän ratkaisun. (Seidel ym. 2005)

**TAULUKKO 6.** Luokkahuone vuorovaikutuksen muoto (Seidel ym. 2005).

Luokkahuone vuorovaikutuksen muoto	Selite
Opettajan luento	Opettaja luennoi esitellen opeteltavaa asiaa. Opettaja puhuu pidemmissä jaksoissa (ainakin 2 x 10 sekuntia).
Sanelu	Opettaja sanelee tai kirjoittaa taululle, ja oppilaat kirjoittavat sen vihkoonsa.
Luokkakeskustelu	Opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta. Tyypillisesti opettaja esittää kysymyksiä, jonka jälkeen vastauksista keskustellaan yhdessä koko luokan kanssa.
Yksilötyöskentely	Oppilaat työskentelevät itsenäisesti tehtävien parissa.
Parityöskentely	Oppilaat työskentelevät pareittain.
Ryhmätyöskentely (>2oppilasta)	Oppilaat työskentelevät ryhmissä.
Useita samanaikaisesti	Useita vuorovaikutuksen muotoja esiintyy yhtä aikaa.
Siirtymä	Siirtyminen toisesta vuorovaikutuksen muodosta toiseen; mm. opettaja ohjeistaa oppilaiden työskentelyä, jakaa monisteita.
Muu	Muuta tunnin aikana tapahtuvaa, mitä ei voi merkata muihin sarakkeisiin.

Tämän lisäksi Japanissa opettajat olivat lisänneet rastien viereen muutamalla sanalla lisäselvityksiä<sup>1</sup> (liite 2) tunnin eri vaiheista. Kielimuuri oli ylitetty siten, että Japanissa kyseiset kaavakkeet lisäselvityksineen oli suomennettu valmiiksi paikallisen tulkin toimesta. Verrannollisuuden ja geometrian tunneista oli luokittelun lisäksi käytössä englanninkielinen yksityiskohtainen tuntisuunnitelma. Näin ollen videoiden,

<sup>1</sup>Lisäselvityksiä oli tehty yhtälön ratkaisemisen, toisen asteen funktion ja neliöjuuren tunneista.

lisäselvitysten, tuntisuunnitelmien sekä minuuttikohtaisten luokitteluiden perusteella voitiin tarkastella myös tunnin kulkua ja sisältöä.

Tutkimusmateriaalin keräämisen jälkeen jokaisesta tunnista tehtiin minuutin tarkkuudella didaktisista vaiheista kertovat kuviot (kuviot 3-6 ja 8-11). Kuvioista selvisi mm. kuinka monta minuuttia eri vaiheet kestivät tunneilla sekä missä kohdalla tuntia vaiheet esiintyivät. Suomessa yksi oppitunti kesti 45 minuuttia ja Japanissa 50 minuuttia. Tämän takia didaktisten vaiheiden ja luokkahuone vuorovaikutusmuotojen esiintymisen vertailu tehtiin prosentteina. Luokkahuone vuorovaikutusten muodoista tehtiin pylväsdiagrammit, joista selvisi kunkin muodon prosentuaalinen osuus oppitunneilla. Seuraavaksi laskettiin didaktisten vaiheiden prosenttiosuudet, joiden perusteella niiden määrällistä vaihtelua voitiin tarkastella maiden kesken. Prosenttiosuudet esitettiin pylväsdiagrammeina (kuviot 12-15), joista voitiin havainnollisesti tarkastella Suomen ja Japanin eroavaisuuksia. Suomesta neljä ja Japanista viisi oppituntia muodosti otoksen, josta didaktisten vaiheiden prosenttiosuudet laskettiin. Jos kaavakkeisiin oli merkitty rasteja useampaan sarakkeeseen samalle minuutille, ne oletettiin tasajakautuneiksi. Jos Muu-saraketta oli käytetty vain lisäselvityksien tekemiseen, merkinnät jätettiin huomioimatta prosenttiosuuksien laskennassa.

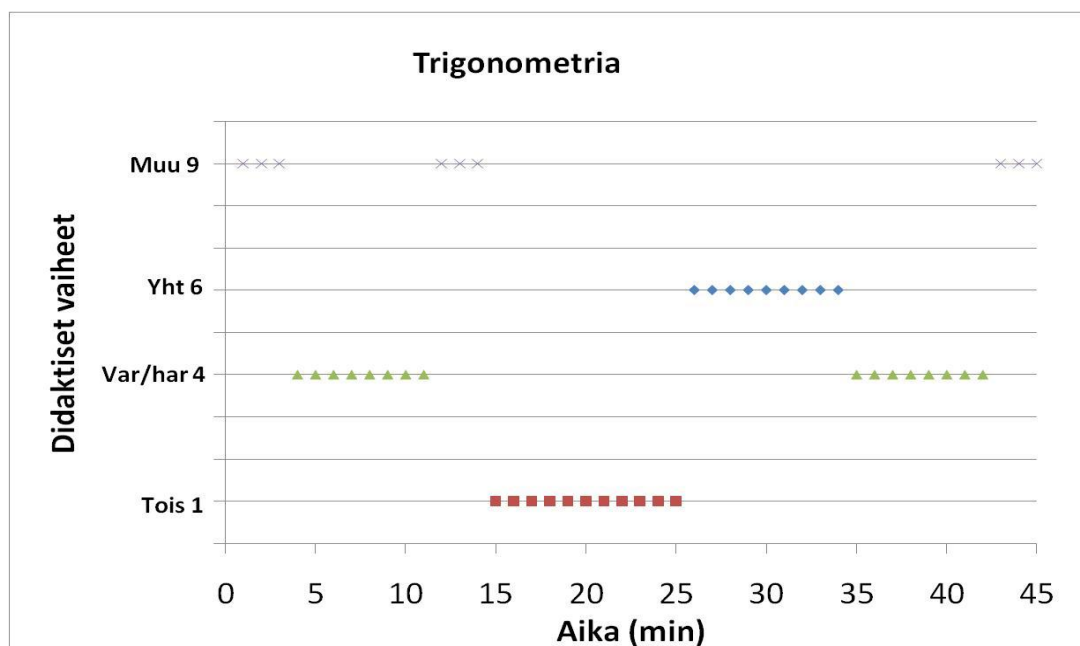
## 6 Tutkimustulokset

### 6.1 Tulokset Suomessa

Tässä kappaleessa tarkastellaan didaktisia vaiheita ja kuinka monta minuuttia mikäkin vaihe kesti. Lisäksi käydään läpi jokaisen tunnin kulkua ja rakennetta. Näistä selviää missä kohdassa tuntia mikäkin vaihe esiintyi sekä mitä tunti piti sisällään. Lisäksi kokeeseen kertauksen tunnista esitellään ote luokkakeskustelusta, jossa selviää opettajan ja oppilaan puheenvuoroja.

#### 6.1.1 Trigonometria

Didaktisia vaiheita tarkasteltaessa trigonometrian tunnilla toistoa esiintyi 11 minuuttia, varmistamista, harjoittelua 16 minuuttia, yhteenvetoa 9 minuuttia ja muuta 9 minuuttia (kuvio 3).



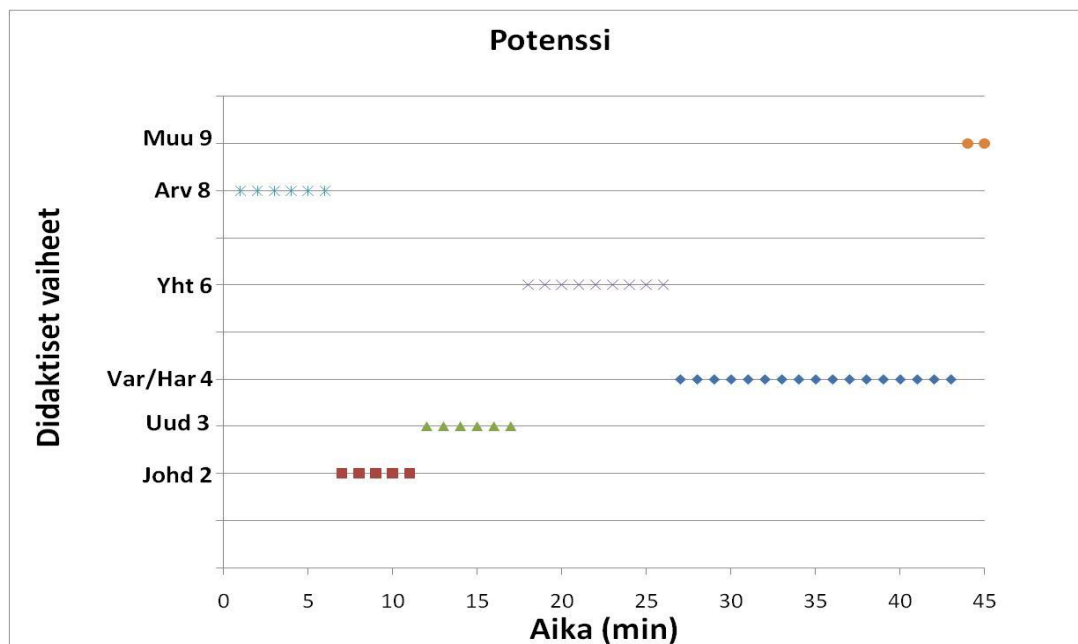
**KUVIO 3:** Didaktiset vaiheet, trigonometrian tunti. 1 = toisto, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto ja 9 = muu.

Trigonometrian tunnin alussa oppilaat tekivät yksilötyöskentelynä testin, jolla opettaja halusi selvittää mitä oppilaat osasivat käsiteltävästä asiakokonaisuudesta tähän mennessä. Aiheena oli kolmion sivujen ratkaiseminen käyttäen apuna trigonometrisia

funktioita. Opettaja jakoi jokaiselle tyhjän paperin ja kirjoitti testin tehtävän taululle. Jokainen oppilas teki tehtävän itsenäisesti paperille. Opettaja keräsi paperit ja sanoi tarkistavansa ne myöhemmin. Testin tekemiseen meni aikaa 14 minuuttia. Seuraavaksi opettaja saneli ja kirjoitti taululle kolmion sivujen ratkaisemisen vaihe vaiheelta: 1. piirrä kuva, 2. merkitse tunnetut sivut ja kulmat, 3. merkitse kysytyjä sivuja muuttujakirjaimella, 4. valitse sopiva funktio ja kirjoita yhtälö, 5. ratkaise yhtälö, 6. kirjoita vastaus ja huomioi tarkkuus, 7. tarkasta että vastasit tehtävän kysymykseen. Oppilaat kirjoittivat taululta asiat vihkoon. Tähän saneluun meni aikaa 11 minuuttia. Seuraavaksi opettajan johdolla luokkakeskusteluna ratkaistiin taululle testin tehtävä. Opettaja kyseli ja oppilaat vastasivat. Tähän kului aikaa 9 minuuttia. Sitten oppilaat tekivät kirjan tehtäviä yksilötyöskentelynä samasta aiheesta. Tehtävien vastaukset oppilaat tarkistivat kirjansa takaosasta. Tehtävien tekemiseen meni aikaa 8 minuuttia. Lopuksi opettaja antoi kotitehtävät oppilaille kirjan tehtävistä.

### 6.1.2 Potenssi

Potenssi tunnilla esiintyi johdatusta uuteen asiaan 5 minuuttia, uuden asian opettamista 6 minuuttia, varmistamista/harjoittelua 17 minuuttia, yhteenvetoa 9 minuuttia, arviointia/kotitehtävien tarkastusta 6 minuuttia ja muuta 2 minuuttia (kuvio 4).

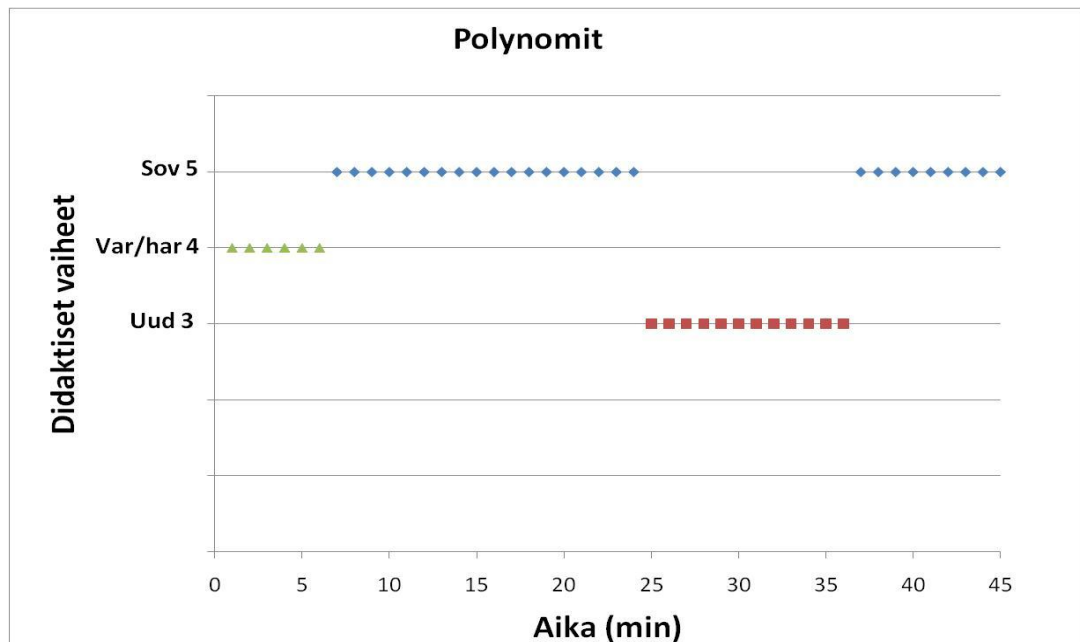


**KUVIO 4:** Didaktiset vaiheet, potenssin tunti. 2 = johdatus uuteen asiaan, 3 = uuden asian opettaminen, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto, 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus ja 9 = muu.

Potenssin tunnilla tarkistettiin ensin kotitehtävät. Aluksi oppilaat tarkistivat parin kanssa kotitehtäviään pari minuuttia. Sen jälkeen opettaja kävi vaikeimman tehtävän läpi taululla. Opettaja ei tarkistanut, ovatko oppilaiden tehtävät oikein, oppilas itse tarkisti parilta ja taululta tai kysyi opettajalta. Seuraavaksi jatkettiin luokkakeskusteluna johdatusta uuteen asiaan, missä meni aikaa 5 minuuttia. Opettaja johdatteli potenssin käsitteeseen konkreettisella esimerkillä. Johdattelulla ja esimerkeillä haluttiin, että oppilas itse keksii ja ajattelee, eikä opettaja anna kaikkea valmiina. Seuraavaksi opettaja luennoi uuden asian: potenssin merkinnän, nimeämisen ja lukutavat, mihin meni aikaa 6 minuuttia. Oppilaat kirjoittivat samalla vihkoihinsa. Tämän jälkeen oli vuorossa yhteenveto luokkakeskusteluna tunnin keskivaiheilla. Yhteenveto kesti 9 minuuttia. Siinä kerrattiin juuri opetetut asiat laskuesimerkkien avulla. Seuraavaksi oppilaat tekivät oppikirjan tehtäviä yksilötyöskentelynä 17 minuutin ajan. Tehtävien vastaukset löytyivät oppikirjan takaosasta. Lopuksi opettaja kirjoitti taululle uusien kotitehtävien numerot oppikirjasta.

### 6.1.3 Polynomi

Polynomien tuntia tarkastellessa uuden asian opettamista esiintyi 12 minuuttia, varmistamista/harjoittelua 6 minuuttia ja soveltamista 27 minuuttia (kuvio 5).

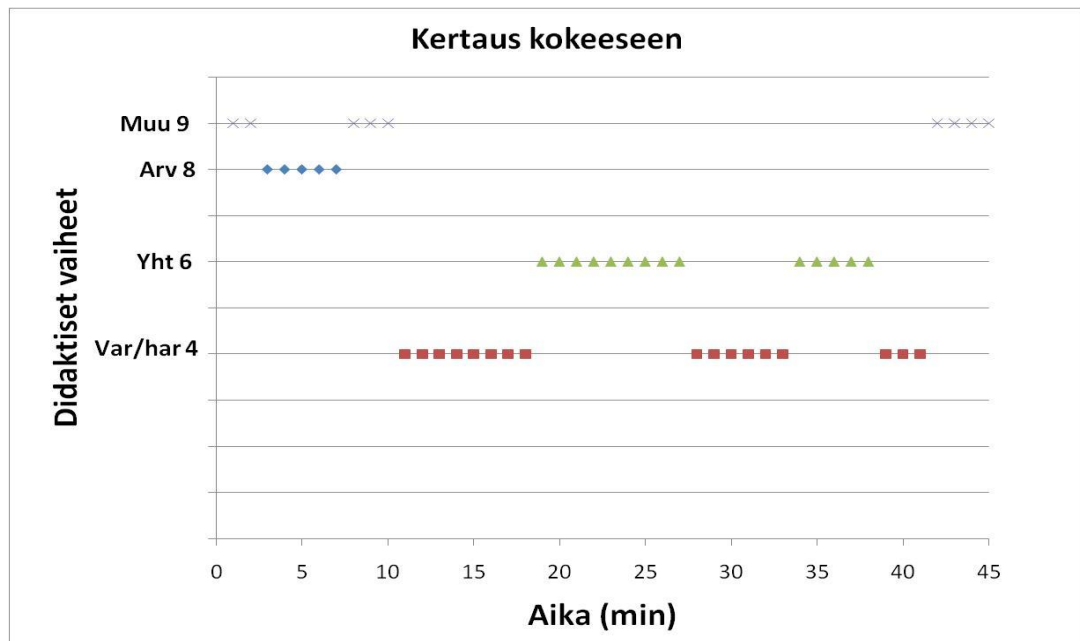


**Kuvio 5:** Didaktiset vaiheet, polynomien tunti. 3 = uuden asian opettaminen, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 5 = soveltaminen.

Polynomien tunnilla esiintyi pääasiassa luokkakeskustelua ja yksilötyöskentelyä. Tunnilla haluttiin keskittyä laskemisen ja laskentarutiinin harjoittamiseen. Tunti alkoi edellisen tunnin asian kertaamisella luokkakeskusteluna 6 minuutin ajan. Opettajajohtoisesti käytiin esimerkkitehtäviä dokumenttikameralla läpi. Tarkoituksena oli kerrata edellisellä tunnilla opitut polynomien summa ja erotus sekä varmistaa, että oppilaat osaavat ne. Seuraavaksi oppilaat tekivät opettajan tekemästä monisteesta tehtäviä 18 minuutin ajan. Sitten opetettiin uutena asiana polynomien summan ja erotuksen yhdistäminen. Tämä tapahtui luokkakeskusteluna, mihin meni aikaa 12 minuuttia. Lopuksi laskettiin vielä monisteen tehtäviä 8 minuutin ajan.

#### 6.1.4 Kertaus kokeeseen

Kertaus kokeeseen tunnilla esiintyi varmistamista/harjoittelua 17 minuuttia, yhteenvetoa 14 minuuttia, arviointia/kotitehtävien tarkistusta 5 minuuttia ja muuta 9 minuuttia (kuvio 6).



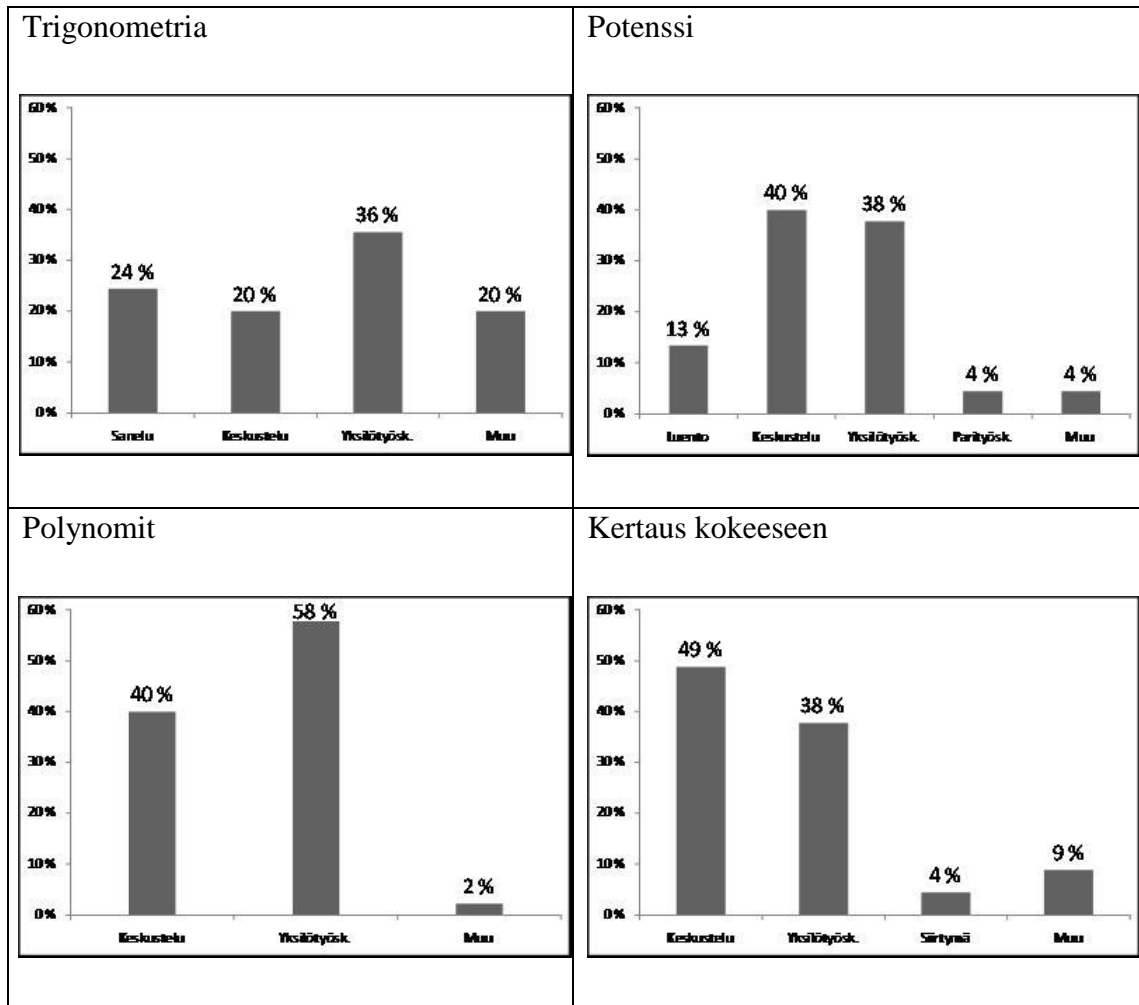
**KUVIO 6:** Didaktiset vaiheet, kertaus kokeeseen tunti. 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto, 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus ja 9 = muu.

Kertaus kokeeseen tunti alkoi kotitehtävien tarkistamisella luokkakeskusteluna 5 minuutin ajan. Opettaja kehotti, että mennäänpä kotitehtäviin, ja pyysi oppilaita ottamaan kirjat esiin sekä näyttämään ensimmäistä kotitehtävää luokan eteen dokumenttikameralla. Oppilas viittasi ja sai luvan tulla luokan eteen sanoen: ”En mä

tiedä sitten onko tää oikein?”. Mihin opettaja vastasi: ”Katotaan.” Sitten Opettaja sanoi: ”Nyt sitten tarkistakaa, että on näin, kun katotaan tänne ja tarkistetaan ne täältä. Jokaisella on vastuu omista vihkoistaan. Tässä on nyt tuota yksi pieni juttu, mikäs ykköstehtävässä on pieni; pieni muutos tehtäs?” Oppilas viittasi ja sai vastata: ”Sitä ei ole pilkutettu.” Sitten menttiin seuraavaan tehtävään ja opettaja sanoi: ”Sitten oli tämä toinen kohta, joka koettiin vaikeaksi.” Sitten opettaja selitti tehtävästä ja kysyi lopuksi, selvisikö tämä nyt kaikille. Kun oppilas pyydettiin luokan eteen näyttämään kotitehtäviään, haluttiin että oppilaat uskaltavat näyttää tehtäviään sekä kertoa niistä jotakin, ja lisäksi on tärkeää että luokassa säilyy sellainen ilmapiiri, jossa saa tehdä virheitä ja oppia virheistä. Seuraavaksi oli tarkoitus kerrata koealue opettajan tekemän tehtävämönisteen (liite 3) avulla. Ensin oppilaat laskivat yksilötyöskentelynä ensimmäisen sivun tehtäviä 8 minuuttia, minkä jälkeen käytiin tehtävien vastauksia läpi luokkakeskusteluna 10 minuutin ajan kerraten samalla tärkeimpiä asioita opettajan kirjoittaessa oikeat ratkaisut dokumenttikameralla. Sitten oppilaat laskivat taas tehtäviä 6 minuutin ajan, minkä jälkeen käytiin tehtävien ratkaisuja läpi luokkakeskusteluna 5 minuuttia. Oppilaat laskivat vielä 3 minuuttia tehtäviä. Lopuksi opettaja jakoi vanhoja koetehtäviä, joita oppilaat voisivat laskea kotona harjoitellakseen tulevaa koetta varten.

### **6.1.5 Luokkahuone vuorovaikutuksen muodot**

Luokkahuonevuorovaikutuksen muotoja tarkasteltaessa trigonometrian tunnilla esiintyi sanelua 11 minuuttia, luokkakeskustelua 9 minuuttia, yksilötyöskentelyä 16 minuuttia ja muuta 9 minuuttia. Potenssin tunnilla oli opettajan luentoa 6 minuuttia, luokkakeskustelua 18 minuuttia, yksilötyöskentelyä 17 minuuttia, parityöskentelyä kaksi minuuttia ja muuta kaksi minuuttia. Polynomien tunnilla oli luokkakeskustelua 18 minuuttia, yksilötyöskentelyä 26 minuuttia ja muuta yksi minuutti. Kertaus kokeeseen tunnilla oli luokkakeskustelua 22 minuuttia, yksilötyöskentelyä 17 minuuttia, siirtymää kaksi minuuttia ja muuta 4 minuuttia. Alla olevassa kuviossa (kuvio 7) on esitetty vastaavat luokkahuone vuorovaikutusten muotojen esiintymiset tunneilla prosentuaalisesti.



**KUVIO 7:** Luokkahuone vuorovaikutuksen muotojen prosentuaaliset osuudet

Yksilötyöskentelyä esiintyi jokaisella tunnilla; trigonometrian tunnilla 36 %, potenssin ja kertaus kokeeseen tunnilla 38 % ja polynomien tunneilla 58 %. Tyypillisesti yksilötyöskentelytilanne esiintyi varmistamisen/harjoittelun aikana, missä oppilaat laskivat kirjasta tai monisteesta tehtäviä omiin vihkoihinsa. Opettaja kierteli samanaikaisesti luokassa ja auttoi, jos oppilas pyysi apua. Trigonometrian tunnilla oppilaat tekivät pienen testin/kokeen yksilötyöskentelyn aikana. Yksilötyöskentelyä esiintyi eniten polynomien tunnilla, mikä olikin kertaus kokeeseen tunnin ohella selkeästi laskutunti. Laskutunniksi sanotaan tuntia, jolla lasketaan/tehdään paljon tehtäviä. Tällaisia laskutunteja pidetään tyypillisesti ennen koetta tai tietyn asiakokonaisuuden opettamisen jälkeen. Potenssin tunti oli hyvin tyypillinen suomalainen tunti (vrt. Savola 2008), missä esiintyi opettajan luentoa uuden asian opettamisen aikana, luokkakeskustelua kotitehtävien tarkistamisen, johdatus uuteen



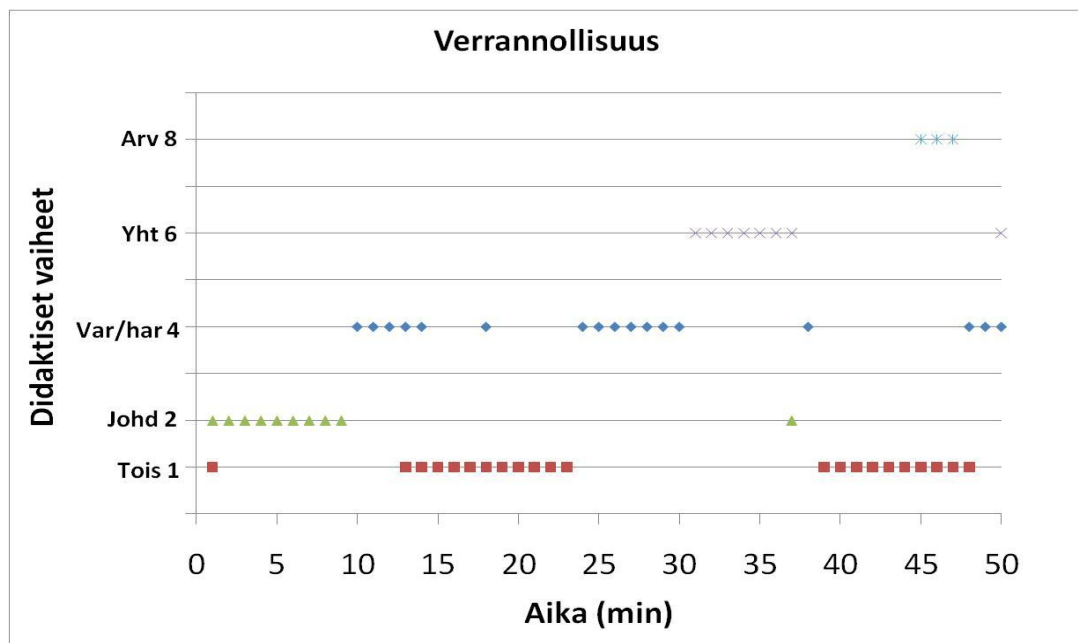
asiaan ja yhteenvedon aikana sekä yksilötyöskentelyä harjoittelun aikana. Luokkakeskustelua esiintyi jokaisella tunnilla suhteellisen paljon; trigonometrian tunnilla 20 %, potenssin ja polynomien tunneilla 40 % ja kertaus kokeeseen tunnilla 49 %.

## 6.2 Tulokset Japanissa

Seuraavaksi tarkastellaan didaktisia vaiheita sekä tunnin rakennetta japanilaisilla matematiikan tunneilla. Lisäksi selvitetään tunnin kulkua ja sisältöä.

### 6.2.1 Verrannollisuus

Verrannollisuuden tunnilla toistoa esiintyi 22 minuuttia, johdatusta uuteen asiaan 10 minuuttia, harjoittelua 17 minuuttia, yhteenvetoa 8 minuuttia ja arviointia/kotitehtävien tarkistusta 3 minuuttia (kuvio 8). Näistä yhtä aikaa esiintyy toistoa ja johdatusta uuteen asiaan yksi minuutti, toistoa ja harjoittelua 4 minuuttia, johdantoa ja yhteenvetoa yksi minuutti, arviointia/kotitehtävien tarkistusta ja toistoa 3 minuuttia sekä harjoittelua ja yhteenvetoa yksi minuutti.

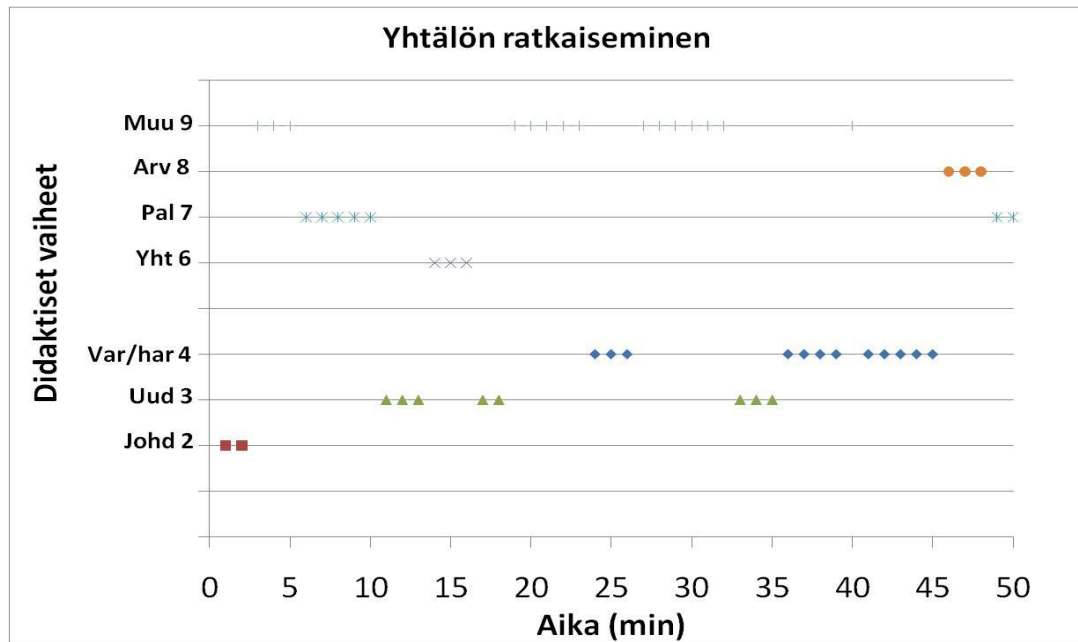


**KUVIO 8:** Didaktiset vaiheet, verrannollisuuden tunti. 1 = toisto, 2 = johdatus uuteen asiaan, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenvedo ja 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus.

Verrannollisuuden tunnilla on didaktisten vaiheiden ja tuntisuunnitelman perusteella havaittavissa tyypillisen japanilaisen matematiikan tunnin rakenne (vrt. Shimizu 1999). Tunnin alusta 9 minuuttia käytettiin uuden asian johdatukseen, missä opettaja johdattelevilla kysymyksillä ja esimerkillä esitteli uuden asian. Seuraavaksi oppilaat ratkaisivat ensimmäisen tehtävän, jossa piti selvittää onko opettajan antamat esimerkit suoraan tai kääntäen verrannollisia ja kirjoittaa sopiva yhtälö. Tämä vaihe oli varmistamista/harjoittelua 5 minuuttia. Sitten opettajajohtoisesti käytiin ensimmäinen tehtävä läpi kerraten yhtälöiden muodostaminen. Tämä vaihe oli toistoa 11 minuuttia. Sitten seurasi toinen tehtävä ja sen vastauksen läpikäyminen. Nämä vaiheet sisälsivät varmistamista/harjoittelua sekä yhteenvetoa. On myös havaittavissa, että lopuksi seurasi tunnin asiaa kokoava vaihe, nk. ”Matome”-vaihe (vrt. Shimizu 1999). Tämä sisälsi yhteenveton lisäksi toistoa sekä arviointia. Seidel ym. (2005) mukaan toistovaiheen aikana käsitellään ja toistetaan aikaisemmin opittua asiaa. Tässä kohtaa arviointi vaikuttaisi juuri sellaiselta Matome-vaiheelta, jossa opettajat tekevät yksityiskohtaisia matemaattisia kommentteja oppilaiden työskentelystä.

### **6.2.2 Yhtälön ratkaiseminen**

Yhtälön ratkaisemisen tunnilla esiintyi johdatusta uuteen asiaan 2 minuuttia, uuden asian opettamista 8 minuuttia, harjoittelua 12 minuuttia, yhteenvetoa 3 minuuttia, palautetta 7 minuuttia, arviointia/kotitehtävien tarkistusta 3 minuuttia ja muuta 15 minuuttia (kuvio 9).

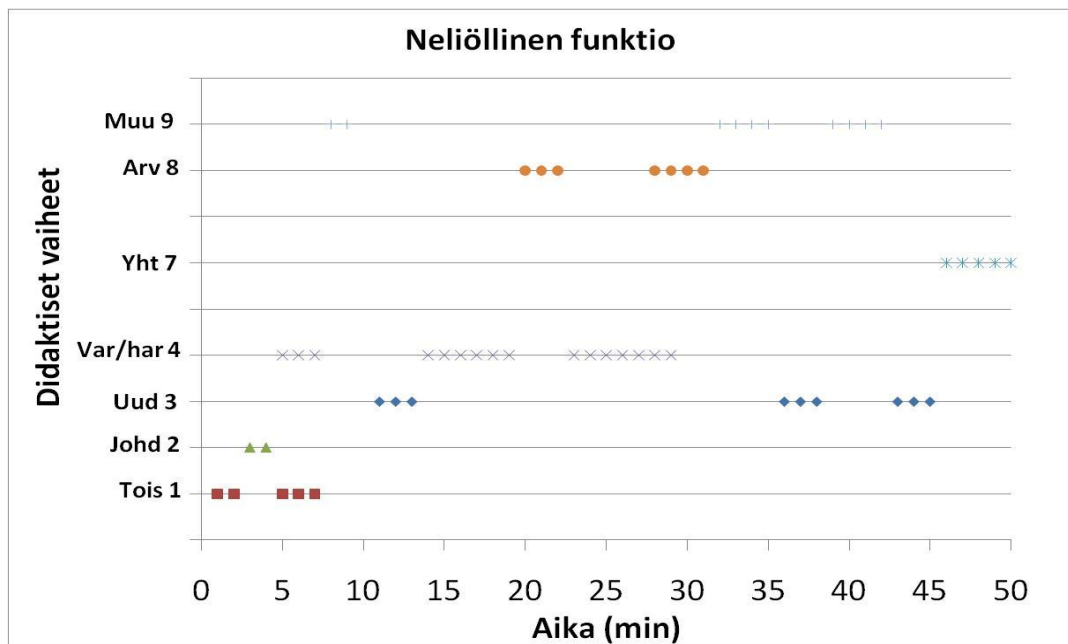


**KUVIO 9:** Didaktiset vaiheet, yhtälön ratkaisemisen tunti. 2 = johdatus uuteen asiaan, 3 = uuden asian opettaminen, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto, 7 = palaute, 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus ja 9 = muu.

Yhtälön ratkaisemisen tunnilla on havaittavissa seuraavanlainen tunnin rakenne. Tunti alkoi johdatuksella uuteen asiaan, mitä seurasi palautteen antaminen yhtälön käytettävyydestä. Sitten opetettiin uutta asiaa, yhteenvetona rakennettiin merkkejä sisältävä yhtälö sekä sitten vuoronperään opetettiin uutta asiaa ja harjoiteltiin. Lisäksi tunnin loppupuolella esiintyi saavutetun tason tarkastusta 3 minuuttia. Tätä vaihetta oli selvennetty kommentilla: vastausten tarkistus koko luokan kanssa. Tämän tunnin lopussa voidaan huomata myös Shimizun (1999) mainitsema Matome-vaihe, jossa opettaja antaa yksityiskohtaisia matemaattisia kommentteja oppilaiden työskentelystä. Lisäselvitykseen oli kirjoitettu: 'tehdään päivän yhteenveto', mutta rasti oli laitettu palautteen kohdalle. Tämä on hyvin perusteltua, koska Seidel ym. (2005) mukaan palaute tarkoittaaakin sitä, että opettaja antaa oppilaille työskentelystä yksilöllistä tai ryhmäpalautetta. Tunnilla esiintyi Muu-vaihetta suhteellisen paljon. Muu-kohtaan oli luokiteltu johdannon jälkeen 'aiheen ymmärtäminen', uuden asian opettamisen jälkeen 'ymmärtäminen janadiagrammin avulla' sekä 'määrien suhteen ymmärtäminen'. Lisäksi harjoittelun jälkeen oli luokiteltu 'esittäminen' sekä 'kysymykset' Muu-kohtaan. Näistä lisäselvityksistä voidaan huomata, että ymmärtämistä oli korostettu opetuksessa.

### 6.2.3 Toisen asteen funktio

Toisen asteen (neliöllisen) funktion tuntia tarkasteltaessa toistoa esiintyi 5 minuuttia, johdatusta uuteen asiaan 2 minuuttia, uuden asian opettamista 9 minuuttia, harjoittelua 16 minuuttia, yhteenvetoa 5 minuuttia, arviointia/kotitehtävien tarkistusta 7 minuuttia ja muuta 10 minuuttia (kuvio 10). Näistä huomataan, että yhtä aikaa esiintyi toistoa ja harjoittelua 3 minuuttia sekä harjoittelua ja arviointia/kotitehtävien tarkistusta 2 minuuttia. Tämän tunnin kohdalla Muu-saraketta oli käytetty myös lisäselvityksien tekemiseen.



**KUVIO 10:** Didaktiset vaiheet, toisen asteen (neliöllisen) funktion tunti. 1 = toisto, 2 = johdatus uuteen asiaan, 3 = uuden asian opettaminen, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto, 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus ja 9 = muu.

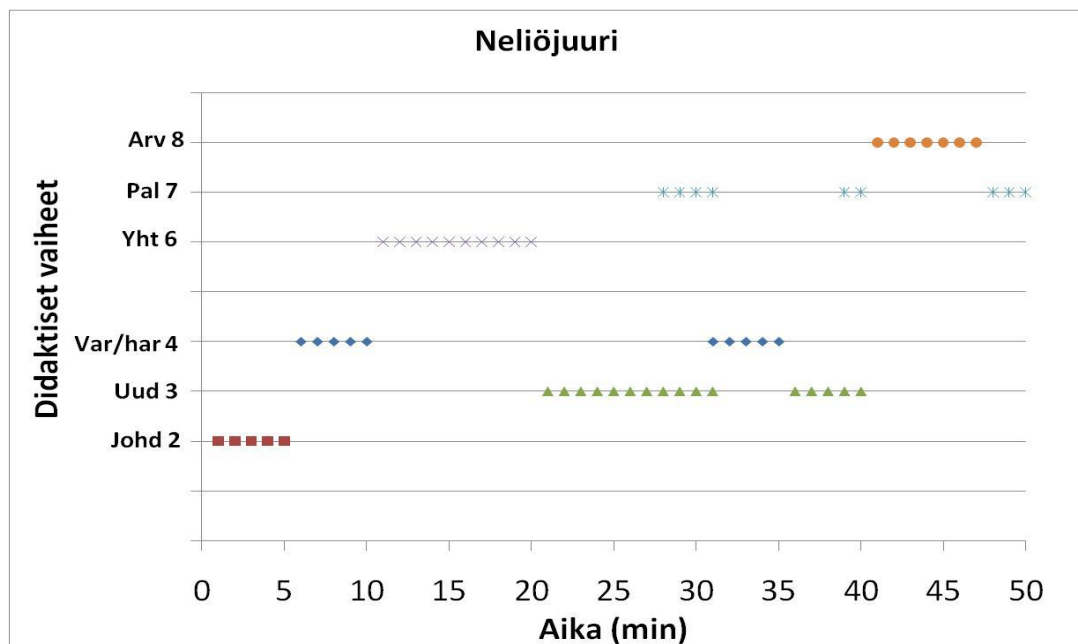
Toisen asteen funktion tunti alkoi toistolla, mikä piti sisällään lisäselvitysten mukaan 'kertausta lineaarisen funktion kaaviosta<sup>2</sup>'. Sitten tunti jatkui johdatuksella uuteen asiaan, missä tehtiin 'päivän teeman katsaus'. Harjoittelua/varmistamista oli tunnin aikana kolme kertaa. Ensimmäisellä kerralla täydennettiin taulukko, toisella kerralla tehtiin tehtävä 1 ja kolmannella kerralla tehtiin tehtävä 2. Uuden asian opettamista oli tällä tunnilla kolme lyhyttä pätkää. Aluksi uuden asian opettamisen aikana 'huomattiin kaavion pisteiden kautta, että funktio  $y = ax^2$  ei tule suoraviivaiseksi'. Tunnin

<sup>2</sup> Tulkki on käyttänyt sanaa kaavio, mikä tässä yhteydessä tarkoittanee funktion kuvaajaa.

loppupuolella uuden asian opettamisen aikana 'huomattiin, että funktion  $y = ax^2$  kaavio on tasaista käyrää ja tarkistettiin kaavio s. 75,  $y = x^2$  'sekä 'opittiin kaavion muita luonteenomaisuuksia'. Arviointi piti sisällään tehtävien tekemisen (harjoittelu) jälkeen 'vastausten tarkistusta taulun kaavioille'. Tunnin lopussa oli yhteenvetoa 5 minuuttia, jossa 'tehtiin päivän yhteenveto ja kirjoitettiin vihkoon, mitä taululla luki'.

#### 6.2.4 Neliöjuuri

Neliöjuuren tunnilla johdatusta uuteen asiaan esiintyi 5 minuuttia, uuden asian opettamista 16 minuuttia, harjoittelua 10 minuuttia, yhteenvetoa 10 minuuttia, palautetta 9 minuuttia ja arviointia/kotitehtävien tarkistusta 7 minuuttia (kuvio 11). Näistä esiintyi yhtä aikaa uuden asian opettamista ja palautetta 6 minuuttia.



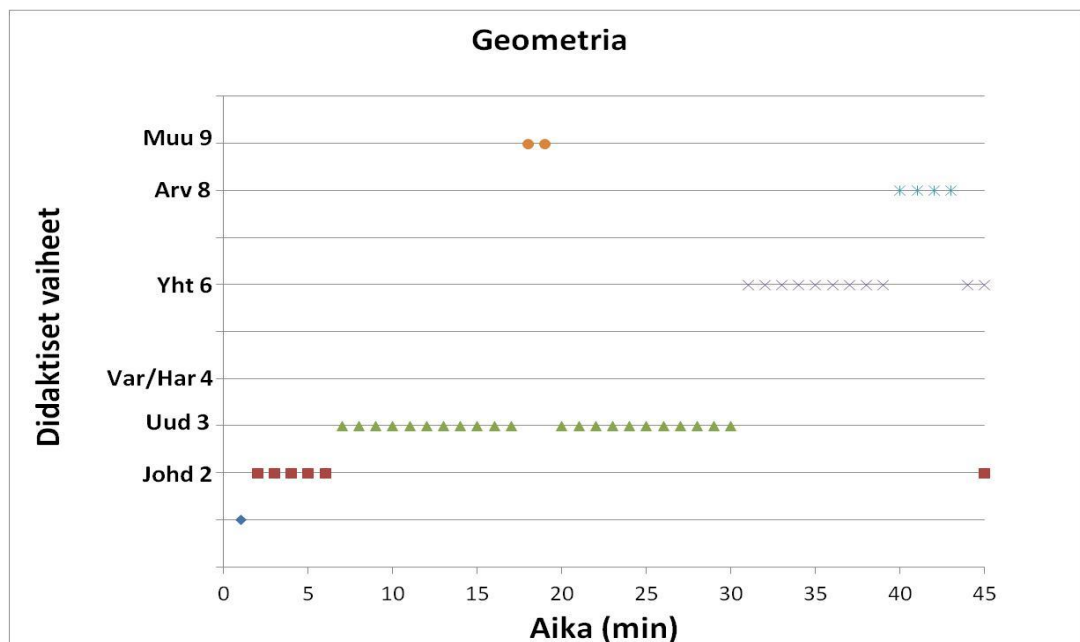
**KUVIO 11:** Didaktiset vaiheet, neliöjuuren tunti. 2 = johdatus uuteen asiaan, 3 = uuden asian opettaminen, 4 = varmistaminen/harjoittelu, 6 = yhteenveto, 7 = palaute ja 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus.

Neliöjuuren tunti alkoi johdatuksella uuteen asiaan, missä piirrettiin neliö millimetripaperille. Sitten ratkaistiin tehtäviä varmistaminen/harjoittelu aikana. Seuraavaksi esiintyi yhteenvetoa, missä ratkaistiin tehtäviä ja viimeisteltiin ne koko luokan kanssa. Sitten opetettiin uutta asiaa neliöjuuren määrittelystä, harjoiteltiin neliöjuuren mallitehtäviä ja opetettiin uutta asiaa selittämällä neliöjuuren luonteesta. Lopputunnista esiintyi arviointia, missä käytiin läpi harjoitustehtäviä. Tämä tunti sisälsi

palautetta kolmessa osassa tunnin loppupuolella. Näistä ei ollut kirjoitettu mitään lisäselvitystä, mutta voidaan ajatella niiden liittyvän päivän yhteenvetoon sekä japanilaisten opettajien Matome-vaiheen aikana annettaviin yksityiskohtaisiin kommentteihin oppilaiden työskentelystä (vrt. Shimizun 1999).

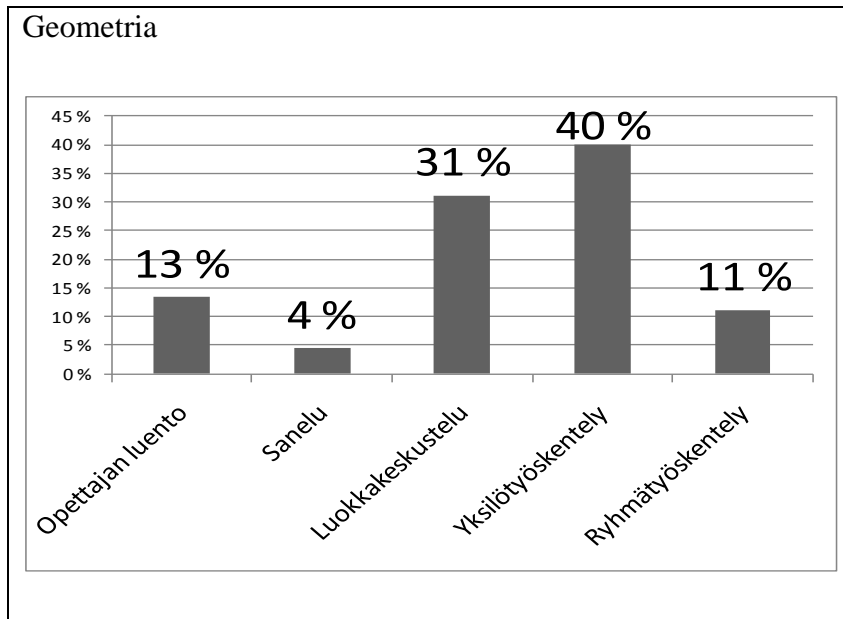
### 6.2.5 Geometria

Geometrian tunnilla toistoa esiintyi 1 minuutti, johdatusta uuteen asiaan 6 minuuttia, uuden asian opettamista 22 minuuttia, yhteenvetoa 11 minuuttia, arviointia/kotitehtävien tarkistamista 4 minuuttia ja muuta 2 minuuttia (kuvio 12). Näistä vain yhteenvetoa ja johdatusta uuteen asiaan tapahtui yhtä aikaa yhden minuutin ajan.



**KUVIO 12:** Didaktiset vaiheet, geometrian tunti. 2 = johdatus uuteen asiaan, 3 = uuden asian opettaminen, 6 = yhteenveto, 8 = arviointi/kotitehtävien tarkistus ja 9 = muu.

Luokkahuone vuorovaikutuksen muodoista geometrian tunnilla, jossa aiheena oli nelikulmion kulmien summa, esiintyi luentoa 6 minuuttia, sanelua 2 minuuttia, luokkakeskustelua 14 minuuttia, yksilötyöskentelyä 18 minuuttia ja ryhmätyöskentelyä 5 minuuttia (Kuvio 13). Kuviossa 13 on vaiheiden prosentuaaliset osuuden oppitunnista.



**KUVIO 13.** Luokkahuone vuorovaikutusten muodot prosentteina.

Geometrian tunnin aiheena oli nelikulmion kulmien summa. Tunti alkoi aikaisemmin opitun katsauksella, jossa kerrattiin lyhyesti kolmion kulmien summa. Sitten esitettiin johdatteleva kysymys ja selvitettiin tunnin aihe. Oppilaat etsivät ratkaisua tunnin aiheeseen avoimella tehtävällä, jossa käytettiin apuna nelikulmion muotoisia paperinpalasia. Niiden avulla oppilaat pystyivät konkreettisesti mm. jakamaan nelikulmion kahdeksi kolmioksi ja siten hahmottamaan neljän kulman summaa. Työskentelyn aikana opettaja rohkaisi oppilaita kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja. Sitten luokkakeskusteluna etsittiin parasta metodia laskea nelikulmion kulmien summa ja kirjoitettiin vastaukset taululle sekä tehtiin yhteenveto. Seuraavaksi sovellettiin uutta asiaa muutaman soveltavan tehtävän avulla. Lopuksi oppilaat antoivat omasta suorituksestaan arvosanan itselleen ja vielä perustelut niille. Japanilaisten yhteenvetoon (Matomeen) on tässä kohtaa otettu mukaan myös oppilaiden itsearviointi. Lopuksi johdateltiin lyhyesti seuraavan tunnin aiheeseen ja oppilaille jaettiin opetusmateriaali seuraavaa tuntia varten.

## 7 Suomen ja Japanin oppituntien tarkastelu

Aikaisemmissa tutkimuksissa niin Shimizu (1999), Kinami (2009) kuin Hähkiöniemikin (hyväksytyt, b) esittelevät japanilaisen tunnin rakenteen: ongelman esittäminen, oppilaiden ongelmanratkaisu, luokkakeskustelu ratkaisumenetelmistä, yhteenveto. Suomalaisen tunnin rakenne (Savola 2008) menee karkeasti näin: kotitehtävien tarkistus, uuden asian opettaminen, harjoittelu. Tässä kappaleessa tarkastellaan tutkimuksessa esille nousseita japanilaisten ja suomalaisten tuntien rakenteisiin liittyviä eroja. Lisäksi analysoidaan kahta esimerkkituntia; japanilaista geometrian tuntia ja suomalaista potenssin tuntia.

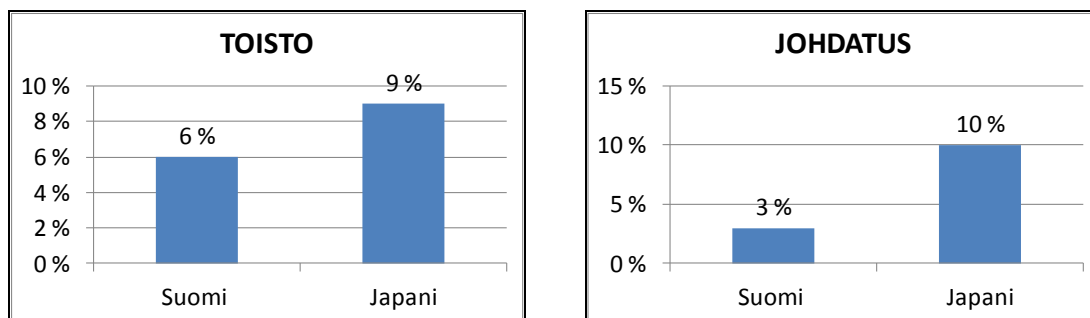
### 7.1 Didaktisen vaiheiden tarkastelu

Seuraavaksi vertaillaan erilaisten didaktisten vaiheiden esiintymistä Suomen ja Japanin matematiikan tunneilla. Vertailu perustuu didaktisten vaiheiden kaavakkeiden avulla tehtyihin luokitteluihin ja oppituntien videointeihiin sekä japanilaisten opettajien tekemiin lisäselvityksiin sekä tuntisuunnitelmiin.

Suomessa toistoa (kuvio 14) esiintyi matematiikan tunneilla 6 %, ja se piti sisällään edellisen tunnin aiheen kertaamista opettajan kirjoittaessa siitä tiivistetyt tärkeimmät asiat taululle ja oppilaiden kirjoittaessa samat asiat vihkoihinsa. Japanissa matematiikan tunneilla esiintyi toistoa 9 %. Sitä esiintyi toisen asteen funktion tunnilla sisältäen kertausta lineaarisen funktion kaavasta sekä verrannollisuuden tunnilla opitun kertausta. Voidaan todeta, että toisto oli hyvin samantyyppistä molemmissa maissa, vaikkakin Japanissa toistoa esiintyi 3 prosenttiyksikköä enemmän.

Suomessa johdatus uuteen asiaan liittyi läheisesti uuden asian opettamiseen, kun taas Japanissa se liittyi ennemmin johdattelevan kysymyksen/ongelman esittämiseen. Suomessa matematiikan tunneilla johdatusta uuteen asiaan esiintyi 3 % (kuvio 14), ja se koostui potenssin tunnilla käytännönläheisestä esimerkistä. Japanissa johdatusta uuteen asiaan esiintyi jokaisella viidellä tunnilla (kokonaisuudessaan 10 %) ja se sisälsi mm. päivän teeman katsausta ja johdattelevia kysymyksiä tunnin aiheesta. Japanissa haluttiin korostaa johdantoa enemmän kuin Suomessa, ja johdattelevat kysymykset oli kirjoitettu tuntisuunnitelmiin valmiiksi.



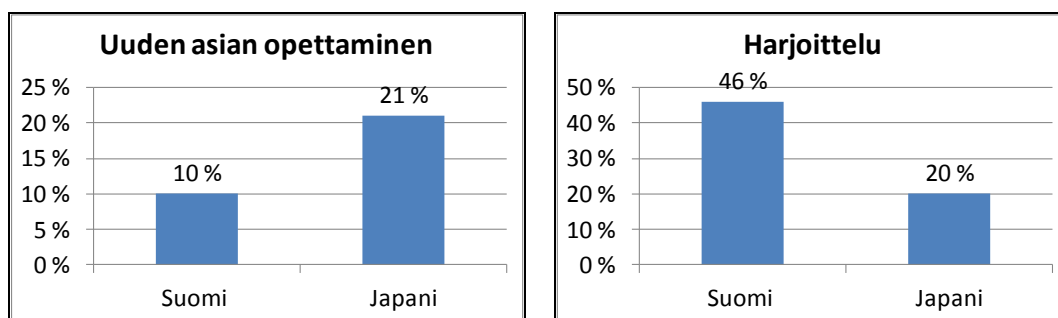


**KUVIO 14.** Toisto ja johdatus uuteen asiaan.

Uuden asian opettamista (kuvio 15) esiintyi Suomessa matematiikan tunneilla 10 %. Suomessa uuden asian opettamisen aikana opettaja opetti dokumenttikameran avulla esimerkiksi potenssin tunnilla potenssin merkinnän, nimeämisen ja lukutavat sekä polynomien tunnilla polynomien yhteen- ja vähennyslaskun. Lisäksi oppilaat kirjoittivat vihkoihinsa sen, mitä opettaja oli kirjoittanut dokumenttikameralle. Tämä on Suomessa hyvin tyypillinen tapa opettaa uutta asiaa. Japanissa uuden asian opettamista esiintyi 21 %. Uuden asian opettamista oli selvitetty maininnoin ”neliöjuuren määrittely”, ”selitetään neliöjuuren luonteesta”, ”opitaan kaavion luonteenomaisuuksia” ja ”selitetään yhtälön ratkaisemisesta”. Näistä neliöjuuren määrittely kuulostaa samanlaiselta kuin Suomessa, mutta luonteesta ja luonteenomaisuuksista selittäminen eroavat Suomen matematiikan opettamisesta. Lisäksi japanilaisella geometrian tunnilla erilaisten ratkaisutapojen miettiminen ja kokeileminen oli merkitty uuden asian opettamiseksi yksilö- tai ryhmätyöskentelyä. Suomessa uuden asian opettaminen tapahtui aina joko opettajan luentona tai luokkakeskusteluna. Japanissa uuden asian opettaminen oli mielletty enemmän uuden asian oppimiseksi tai opettelemiseksi.

Harjoittelua (kuvio 15) esiintyi Suomen matematiikan tunneilla 46 %. Suomessa matematiikan oppimisessa korostetaan itse tekemistä ja tekemällä oppimista. Suomessa harjoittelu tapahtui yksinomaan yksilötyöskentelyä. Polynomien tunnilla oppilaat laskivat polynomeihin liittyviä tehtäviä 33 minuuttia eli 73 % 45 minuutin mittaisesta tunnista. Olen tässä yhdistänyt harjoittelun ja soveltamisen, koska niiden raja on aika häilyvä eivätkä Japanissa opettajat olleet laittaneet ollenkaan rasteja soveltaminen kohtaan. Suomessa harjoittelua esiintyi trigonometrian tunnilla 36 %, potenssin tunnilla 38 % ja kertaus kokeeseen tunnilla 38 %. Suomessa tehtäviä tehdään yleensä oppikirjasta tai opettajan tekemästä monisteesta. Tapana on myös antaa oppilaille sekä perustehtäviä että haastavampia tehtäviä, joista oppilaat itse saavat valita mitä tekevät.

Näin jokainen saa mielekkäitä tehtäviä; ei liian vaikeita eikä liian helppoja. Yleensä tunneilla ehditään tehdä useita tehtäviä joskus jopa kymmeniä lyhyempiä tehtäviä. Japanissa harjoittelua esiintyi yhteensä 20 %. Huomioitavaa on, että esimerkiksi toisen asteen funktion tunnilla tehtiin vain 2 tehtävää ja verrannollisuuden tunnilla opettaja antoi oppilaille muutaman tehtävän kirjoittamalle ne taululle. Geometrian tunnilla uutta asiaa opetettiin avoimen tehtävän avulla ja oppimista arvioitiin soveltavilla tehtävillä, mutta kumpaakaan näistä ei ollut merkitty harjoitteluksi.

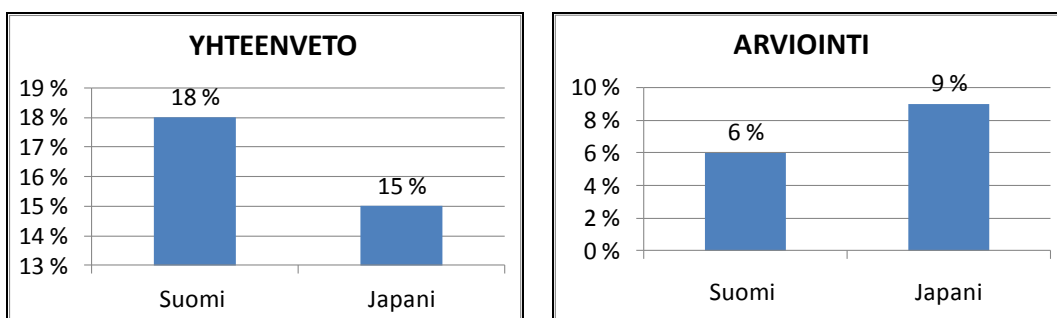


**KUVIO 15.** Uuden asian opettaminen ja harjoittelu.

Suomessa esiintyi yhteenvetoa (kuvio 16) enemmän kuin Japanissa mutta yhteenvedon tarkoitus ja toteutus erosivat Suomen ja Japanin välillä selvästi. Suomessa yhteenvetoa esiintyi matematiikan tunneilla 18 % ja pääsääntöisesti tunnin keskivaiheilla. Se sisälsi tehtävien ratkaisemista luokkakeskusteluna, ja lisäksi opettaja yleensä kirjoitti tehtävien ratkaisut taululle. Neliöjuuren tunnilla Japanissa esiintyi samantyylinen tunnin keskivaiheen yhteenveto kuin Suomessa, ja se sisälsi tehtävien ratkaisemista koko luokan kanssa, vaikkakin muuten Japanissa yhteenveto esiintyi yleensä tunnin lopussa. Japanissa matematiikan tunneilla yhteenvetoa esiintyi 15 %. Se sisälsi päivän yhteenvedon sekä lisäksi tässä vaiheessa kirjoitettiin vihkoon mitä taululla luki. Suomen tunneilta puuttui selkeästi sellainen yhteenveto, missä tunnin loppupuolella käytäisiin vielä tärkeimmät asiat läpi; yhteenveto oli enemmän lyhyen jakson mm. uuden asian opettamisen tai harjoittelun jälkeen tapahtuva kertaus.

Suomessa matematiikan tunneilla arviointia/kotitehtävien tarkistusta esiintyi 6 % (kuvio 16). Tämä sisälsi tunnin alussa kotitehtävien tarkistusta maksimissaan 6 minuuttia. Arviointia suomalaisilla matematiikan tunneilla käytetään yleisestikin todella vähän. Tunnin alussa yritetään yleensä nopeasti käydä kotitehtävät läpi. Jyväskylän Normaalikoululla tyypillinen tapa on, että joku oppilaista käy luokan edessä

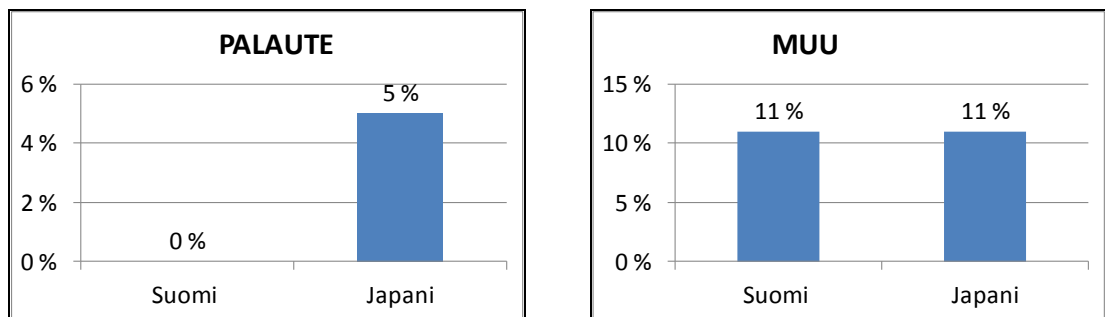
dokumenttikameralla näyttämässä omat kotitehtävänsä ja selittämässä, miten on tehtävän ratkaissut (vrt. esimerkki kotitehtävien tarkistamisesta kappaleessa 6.1.4). Sitten opettaja ja oppilaat yhdessä arvioivat tehtävän ratkaisua. Näin muut oppilaat voivat itse tarkistaa ja tarvittaessa korjata tehtävänsä. Suomalaisella potenssin tunnilla opettaja pyysi tunnin alussa oppilaita pareittain tarkistamaan kotitehtävät. Yhteisesti käytiin vain vaikein kotitehtävä läpi taululla. Suomessa arviointia ei esiintynyt muuten kuin kotitehtävien tarkistamisen aikana. Suomessa yleisestikin vältetään arvioinnin antamista koko luokan edessä. Arviointi tapahtuu kokeiden ja kurssi-arvosanan muodossa kurssin lopussa. Japanissa arviointia esiintyi 9 %. Japanissa arviointi erosi Suomesta siinä, että sitä esiintyi yleensä tunnin loppupuolella, jolloin muun muassa tarkistettiin tehtävien ratkaisuja koko luokan kanssa. Lisäksi Japanissa verrannollisuuden tunnilla uuden asian kertaaminen sekä geometrian tunnilla soveltavien tehtävien tekeminen oli luokiteltu arvioinniksi. Näiden tarkoituksena oli arvioida oppilaiden ymmärtämisen ja oppimisen tasoa tunnin lopussa. Erot saattavat johtua myös siitä, että Japanissa arviointi oli käännetty saavutetun tason tarkastukseksi eikä käänöksessä ollut mitään mainintaa kotitehtävien tarkistamisesta. Epäselväksi jäi tarkastetaanko japanilaisilla matematiikan tunneilla kotitehtäviä tai annetaanko kotitehtäviä ylipäätään.



**KUVIO 16.** Yhteenveto ja arviointi

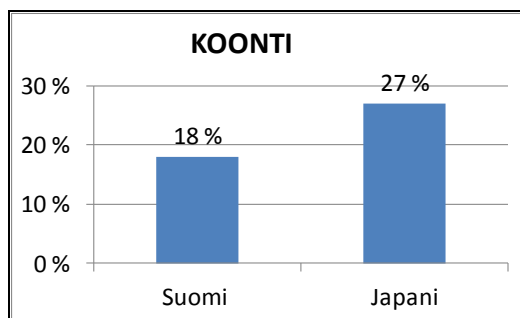
Palautetta esiintyi Japanin matematiikan tunneilla 5 %, kun taas Suomessa sitä ei esiintynyt ollenkaan (kuvio 17). Japanissa palautteen antaminen painottui tunnin loppupuolelle. Yhtälön ratkaisemisen tunnilla kaksi viimeistä minuuttia sisälsi päivän yhteenvetoa, joka oli luokiteltu palautteeksi. Japanissa koetaan Shimizun (1999) mukaan tärkeäksi nk. Matome-vaihe, minkä aikana annetaan myös palautetta. Japanissa palaute näyttäisi liittyvän vahvasti yhteenvetoon.

Didaktisista vaiheista muu työskentely (kuvio 17) oli ymmärretty Suomessa ja Japanissa eri tavalla, vaikkakin sitä esiintyi tunneilla prosentuaalisesti yhtä paljon. Suomessa tyypillisesti muuta työskentelyä esiintyi muutama minuutti melkein joka tunnilla. Suomessa matematiikan tunneilla aikaa kului muuhun oppilaiden tullessa luokkaan ja lähtiessä luokasta, uusien kotitehtävien antamiseen tunnin lopussa, oppilaan ilmoitusasiaan ja monisteiden jakoon. Muu-kohtaan japanilaiset opettajat olivat laittaneet rasteja vain kolmella tunnilla viidestä mutta minuutteja oli selvästi enemmän kuin Suomessa. Osa näistä rasteista oli kylläkin samassa kohtaa muiden rastien kanssa, ja Muu-saraketta oli käytetty myös lisäselvitysten antamiseen. Muu-rasteja oli selitetty mm. sanoilla ”ymmärtäminen”, ”esittäminen” ja ’vastausten tarkistus’.



**KUVIO 17.** Palaute ja muu työskentely.

Shimizun (1999) mainitsema Matome-vaihe ja sen aikana annettava palaute, arviointi ja toisto antavat uudenlaisen merkityksen yhteenvedolle. Tässä tutkimuksessa japanilaisilla tunneilla esiintyi yhteenvedon lisäksi tunnin loppupuolella palautetta, arviointia ja toistoa, jotka kaikki voidaan tässä tutkimuksessa liittää tunnin aihetta kokoaviksi vaiheiksi. Kun tarkastellaan yhteenvedon lisäksi näitä kolmea tunnin loppupuolella esiintynyttä kokoavaa vaihetta, voidaan muodostaa uusi koontivaihe (kuvio18). Tällaista koontivaihetta esiintyi japanissa 27% (vrt. yhteenvedoa 15%). Suomessa ei esiintynyt tunnin lopussa palautetta, arviointia eikä toistoa, joten Suomen koonti vaihe sisälsi vain yhteenvedon 18%. Japanissa selvästikin korostetaan tunnin lopussa aihetta kokoavia vaiheita.



**KUVIO 18.** Koontivaihe sisältää tunnin aikana esiintyneen yhteenvedon sekä tunnin lopussa esiintyneen palautteen, arvioinnin ja toiston.

## 7.2 Kahden esimerkkitunnin tarkastelu

Seuraavaksi tarkastellaan lähemmin suomalaista potenssin ja japanilaista geometrian tuntia. Näistä potenssin tunti on rakenteeltaan hyvin tyypillinen suomalainen tunti. Myös geometrian tunnista on löydettävissä tyypillisen japanilaisen tunnin piirteitä. Erityisesti tarkastellaan laskentatehtäviä nähdäksemme, millaista matematiikkaa tunnit sisältävät. Varsinainen vertaileminen jää vähemmälle, koska tuntien aiheet ovat niin erilaiset.

### 7.2.1 Suomalainen esimerkkitunti

Potenssin tunti alkoi kotitehtävien tarkistamisella, jota on selvitetty luvussa 6.1.2. Potenssin tunnista tehty analyysi on liitteenä (liite 4). Siitä selviää mm. opettajan taululle kirjoittamat asiat (potenssin merkintä, nimeäminen, lukutavat ja esimerkkitehtävät). Kotitehtävien tarkistamisen jälkeen opettaja johdatteli tunnin aiheeseen käytännönläheisellä esimerkillä. Siinä oli aluksi yksi kani, joka sai 7 poikasta ja sitten nämä seitsemän poikasta saivat jokainen seitsemän poikasta jne. Opettaja näytti kanista ja poikasista kuvan dokumenttikameralla, jotta poikasten suuri lukumäärä havainnollistuisi. Tämän jälkeen mietittiin, miten poikasten lukumäärän saisi laskettua, kirjoitettua kätevämmiin ja lyhyempiin matemaattisesti. Opettaja merkitsi ideat samaan kuvaan kaniensa kanssa. Tästä opettaja johdatteli asian potenssin käsitteeseen. Tämän jälkeen opettaja opetti uutena asiana potenssin merkinnän, nimeämisen ja lukutavat. Tunnilta tehtiin myös muutama esimerkkitehtävä taululla opettajajohtoisesti. Yhden tehtävän aikana käytiin seuraavanlainen luokkakeskustelu:

Opettaja sanoo: ”Miettikääpäs tuota”, ja kirjoittaa dokumenttikameralle  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ .

Opettaja jatkaa: ”Elikkä siinäpäs näyttäs olevan kolmosia kuusi kappaletta, muuttujaa k. Mitä ehdotatte kantaluvuksi?”

Oppilas vastaa: ”kolmonen.”

Opettaja sanoo: ”Ja mikäs on eksponentti?”

Oppilas vastaa: ”kuusi.”

Tällaisella esimerkillä haluttiin varmistaa, että oppilas tietää termit (kantaluku, eksponentti), osaa merkitä ja laskea potensseja. Tässä kohtaa oppiminen oli proseduraalisen tiedon tasolla (Haapasalo 2004, Joutsenlahti 2005b). Tässä opeteltiin potenssin matemaattista esitystapaa liittäen se myös kertolaskuun. Esimerkkitehtävien jälkeen oppilaat tekivät oppikirjan (Latva ym. 2008) tehtäviä yksilötyöskentelynä jokainen omaan viikoonsa. Harjoitustehtävät (liite 5) olivat kaikki aika samantyyllisiä rutiinitehtäviä. Niissä piti kirjoittaa potenssimerkintää, kirjoittaa tulona ja laskea potenssin arvo sekä merkitä ja laskea luvun neliö ja kuutio. Viimeinen tehtävä numero 10 oli jo soveltavampi: ”Tutki, mikä positiivinen luku sopii muuttujakirjaimen kohdalle.” Laskenta-aika oli kuitenkin rajallinen, ja videon perusteella kovinkaan moni ei ehtinyt tehdä viimeistä tehtävää. Tunti päättyi uusien kotitehtävien antamiseen. Opettaja antoi kolme kotitehtävää kirjan takaosasta, jossa on erikseen kotitehtäväosio. Opettajan antamat kotitehtävät olivat samantyyppisiä kuin tunnilla tehdyt harjoitustehtävät. Niissä piti osata merkitä potenssimerkinnän eksponentti ja kantaluku esimerkiksi  $3^7$ :n eksponentti on 7 ja kantaluku on 3, kirjoittaa potenssimerkintänä esimerkiksi  $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$  ja laskea potenssin arvo esimerkiksi  $9^1 = 9$ .

Matematiikassa uudet käsitteet rakentuvat aikaisemmin opittujen varaan (Joutsenlahti 2005a). Potenssin tunnin päätarkoitus oli opettaa uusi asia, potenssi. Aihealue oli teoreettinen, ja tehtävät oli suunniteltu seitsemäsluokkalaisten tasolle sopiviksi. Potenssin käsite oli oppilaille uusi mutta opetus perustui kertolaskuun, joka oli tuttu. Tehtävien tekemisen aikana oli tarkoitus oppia käyttämään opittua uutta tietoa erilaisissa tehtävissä. Tehtävissä oli oleellista saada aikaiseksi vastaus tietyllä metodilla, ja ne olivat selvästi rutiinitehtäviä. Oppilaat pystyivät selviytymään tehtävistä

proseduraalisella sujuvuudellaan (vrt. Haapasalo 2004, Joutsenlahti 2005b). Oppilailta odotettiin, että he tietäisivät mitä potenssin käsite tarkoittaa ja miten se saadaan annetuilla tiedoilla laskettua. Tällä saavutetaan seitsemäsluokkalaisten minimioppimistavoitteet. Oppilaiden käsitteiden ymmärtäminen jäi aika pintapuoliseksi. Jotta päästäisiin oppimisessa konseptuaalisen tiedon sekä asiakokonaisuuden hallinnan tasolle, tehtävissä olisi tarvittu enemmän tiedon soveltamista. Potenssin tunnilla olisi voitu syventää ymmärtämistä opettajan henkilökohtaisella opastuksella ja parityöskentelyllä. Opettajan rooli yksilötyöskentelyn aikana on tärkeä, hän voi opettaa ja motivoida oppilaita työskentelyyn sekä 'olla läsnä'. Näin oppilaat voivat kysyä ja keskustella aiheesta opettajan kanssa. Potenssin tunnilla opettaja kierteli luokassa ja meni oppilaiden luokse tarkkailemaan heidän tehtävien tekemistä ja auttoi tarvittaessa. Oppilaat saivat keskustella tehtävistä myös vierustoverien kanssa. Tehtävistä kysyminen ja selittäminen saman ikäiselle vierustoverille on hyvä tapa oppia ja syventää oppimista.

Tehtävien laatu vaikuttaa oleellisesti matematiikan sisältöön tunnilla. Opettajalla on yleensä vapaus valita tunnilla tehtävät harjoitustehtävät oppikirjasta, tai hän voi käyttää jotain muuta materiaalia (monisteita, nettiä). Seitsemäsluokkalaisten oppikirjassa potenssin kohdalla oli joitakin soveltavampia tehtäviä, mutta avoimia ja ongelmatehtäviä ei juurikaan. Opettaja valitsi harjoitustehtäviksi vain rutiiniomaisia perustehtäviä. Oppikirjan tehtävä 18 olisi ollut lopusta avoin tehtävä, jossa ratkaisuksi olisi ollut useita vaihtoehtoja. Siinä oppilasta pyydettiin kirjoittamaan esimerkki positiivisesta luvusta, jonka neliö on

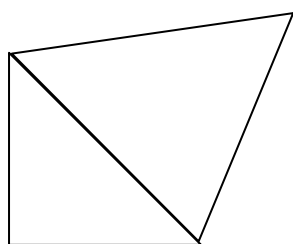
- a) suurempi kuin luvun  $-8$  neliö
- b) suurempi kuin 1 mutta pienempi kuin 2
- c) pienempi kuin luvun 0,1 kuutio.

Luultavasti tällaiset tehtävät jäävät oppilailta tekemättä, jos niitä ei erikseen opettaja valitse tunnilla tehtäväksi. Perustehtävien lisäksi voisi antaa vapaasti valittavia soveltavampia tehtäviä, joita ainakin nopeimmat ja etevimmät voisivat tehdä. Opettaja voisi myös valita avoimen tai soveltavamman tehtävän seuraavan tunnin alkuun ja näin saataisiin syvennettyä potenssin ymmärtämistä. Potenssin ymmärtäminen perustuu kertolaskun käyttöön. Rutiinitehtävissä monesti riittää että osaa kertolaskun ulkoa,

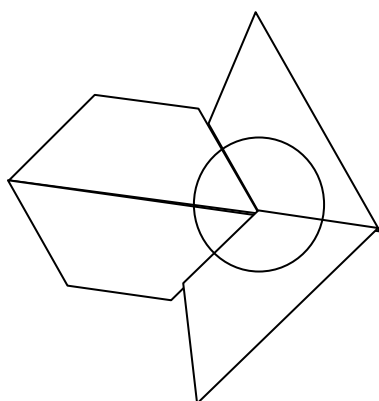
mutta avoimemmissa ja soveltavimmissa tehtävissä potenssin ymmärtäminen ja kertolaskun käyttö korostuvat jo selvemmin.

### 7.2.2 Japanilainen esimerkkitunti

Japanissa geometrian tuntisuunnitelma noudatteli hyvin pitkälle Shimizun (1999) esittelemää runkoa (taulukko 3). Siinä oli erityisesti hyödynnetty oppilaiden vastauksiin valmistautuminen –saraketta. Opettaja oli merkannut siihen valmiita kysymyksiä ja odotettuja oppilaiden vastauksia sekä keinoja, miten oppilaiden vastauksiin opettaja voisi reagoida. Tunnin aihe oli nelikulmion kulmien summa, ja tunti alkoi johdattelevalla kysymyksellä: ”Mikä on kuvassa olevien neljän kulman summa?”(opettaja näytti nelikulmion kuvaa). Opettajan tekemiä muita johdattelevia ja tarkentavia kysymyksiä tunnin aikana olivat: ”Mikä on nelikulmion kulmien summa? Mitä luulet neljän kulman summan olevan? Miten tiedät sen? Miten voit tietää nelikulmion kulmien summan? Mikä on vastaus? Mitä opit? Mikä on paras tapa?”. Kysymysten perusteella haluttiin selvittää vastaus mutta myös antaa oppilaiden itse miettiä, miten vastaukseen voisi päästä, mitä voisi oppia ja mikä olisi paras tapa päätyä oikeaan vastaukseen. Matemaattisen ajattelua korostavien kysymysten lisäksi pysyttiin konkreettisella tasolla. Opettaja oli varannut nelikulmion muotoisia paperinpalasia, joiden avulla oppilaiden oli tarkoitus itse selvittää nelikulmion kulmien summa. Paperinpalasten avulla oppilaat saivat erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja, joista selvisi että usealla tavalla voidaan päätyä samaan lopputulokseen.

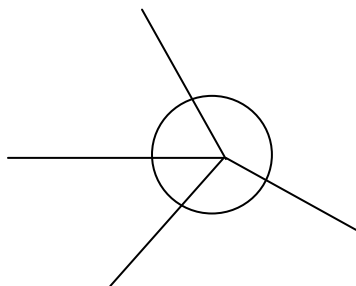


Tässä nelikulmio on jaettu kahdeksi kolmioksi ja aikaisemmin opitun kolmion kulmien summan  $180^\circ$  perusteella päädytään nelikulmion kulmien summaan.

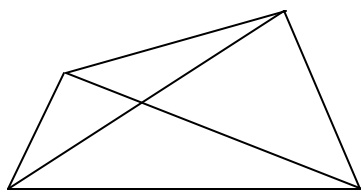


Tässä muodostetaan neljän nelikulmion kulumista  $360^\circ$ :een kulma.





Tässä leikataan paperinpalanen neljään osaan siten, että kulmat jäävät eri palasiin. Sitten laitetaan neljä kulmaa yhteen ja saadaan  $360^\circ$ :een kulma.

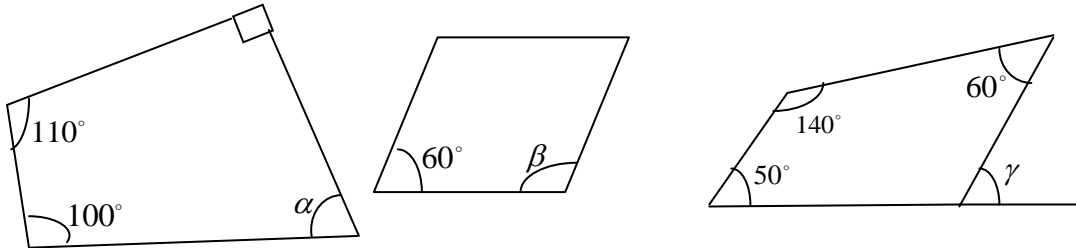


Tässä jaetaan nelikulmio kahdella diagonaalilla neljäksi kolmioksi. Kaikkien muodostuvien kulmien summa on  $4 \cdot 180^\circ$  ja tästä vähennetään keskuskulma. Näin saadaan ison nelikulmion kulmien summa  $4 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 360^\circ$

Näiden neljän ratkaisuvaihtoehdon lisäksi opettaja oli merkinnyt tuntisuunnitelmaan huomautuksen, että oppilaat eivät välttämättä löydä mitään ratkaisua tai oppilaat yrittäisivät laskea kulmien summan astemitalla. Työskentelyn aikana opettaja rohkaisi oppilaita kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja sekä vertailemaan niitä pienissä ryhmissä. Vielä ei kuitenkaan tarvinnut tehdä pitkälle vietyjä johtopäätöksiä. Työskentelyn kohdalle tuntisuunnitelmaan oli tehty huomautus matemaattisesta ajattelusta: ”Oppilaat ajattelevat tapaa, miten nelikulmion kulmien summa voidaan ratkaista perustuen kolmion kulmien summaan.” Tällainen erilaisten ratkaisutapojen miettiminen ja kokeileminen oli merkitty uuden asian opettamiseksi yksilö- tai ryhmätyöskentelynä yhteensä 16 minuuttia (36%). Uuden asian opettaminen oli mielletty enemmän uuden asian oppimiseksi/opettelemiseksi. Harjoittelua ei ollut luokiteltu tapahtuvan ollenkaan, vaikka tuntisuunnitelman mukaan oppilaat etsivät ratkaisuvaihtoehtoja avoimeen tehtävään ja tekivät lopuksi soveltavia tehtäviä.

Seuraavaksi opetettiin myös uutta asiaa luokkakeskusteluna yhteensä 6 minuuttia (13%). Siinä ensin pienissä ryhmissä verrattiin ratkaisuja ja näin oppilaat oppivat toisiltaan. Opettaja oli merkinnyt tuntisuunnitelmaan huomautuksen, että tässä kohtaa keskustellaan koko luokan kanssa syventäen ja laajentaen oppilaiden ideoita ja ajattelua. Sitten etsittiin yhdessä paras metodi laskea nelikulmion kulmien summa ja oppilaiden

vastaukset kirjoitettiin taululle. Vielä ennen soveltavia tehtäviä yhteenvedossa varmistettiin, että oppilaat olivat ymmärtäneet nelikulmion kulmien summan olevan  $360^\circ$ . Tunnin loppupuolella oli luokiteltu arviointiin neljä minuuttia, jonka aikana opettaja antoi tehtäväksi oppilaille soveltavan tehtävän: ”Kuten nyt tiedätte, että nelikulmion kulmien summa on  $360^\circ$ , niin voitte vastata seuraaviin kysymyksiin.” Kysymykset oli luettavissa kuvista (selvitä kulmien  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  suuruudet).



Soveltavissa tehtävissä oppilaiden piti käyttää aikaisemmin opittua nelikulmion kulmien summaa. Näiden tehtävien perusteella opettaja pystyi arvioimaan, miten oppilaat olivat oppineet tunnin aikana. Tämä työskentely oli merkitty didaktisiin vaiheisiin arvioinnin kohdalle.

Geometrian tunnilla oppilaiden tekemiä tehtäviä voidaan avoimien ratkaisuvaihtoehtojen takia kutsua avoimeksi tehtäväksi (vrt. Pehkonen 1997) ja tämän tunnin kohdalla voidaan myös puhua avoimesta lähestymistavasta (vrt. Nohda 2000). Avoimessa tehtävässä oppilaat kokeilivat paperinpalasten avulla erilaisia ratkaisutapoja pohjautuen edellisellä tunnilla opittuun. Samaan ratkaisuun voitiin päätyä monella eri tavalla. Oppilaat laitettiin ajattelemaan itse ja luovasti etsimään ratkaisua. Vaihtoehtoisten opetusmenetelmien (paperinpalasten) käyttö lisää konkretiaa ja auttaa oppilaita hahmottamaan geometrian kappaleita (vrt. toiminnalliset tehtävät, Pehkonen & Rossi 2007). Geometrian tunnilla edettiin konkreettisesta formaalimpaan muotoon. Ensin hahmotettiin paperinpalasten avulla nelikulmien kulmia ja niiden summaa. Sitten soveltavissa tehtävissä laskettiin matemaattisesti eri kulmien suuruuksia. Tällaista lähestymistapaa myös Portaankorva-Koivisto (2010) pitää elämyksellisessä oppimisessä olennaisena. Konkretian avulla uuden asian ymmärtäminen viedään syvemmälle tasolle. Matematiikassa uudet käsitteet rakentuvat aikaisemmin opittujen varaan (Joutsenlahti 2005a). Geometrian tunnilla opettajan lähestymistapa nelikulmion kulmien summaan pohjautuu aikaisemmin opittuun kolmion kulmien summaan. Hähkiöniemi (2006)

korostaa sitä, että avoimen lähestymistavan pitäisi olla tavoitteiden mukaista. Geometrian tunnilla tavoite oli ymmärtää nelikulmion kulmien summan perustuvan kolmion kulmien summaan. Geometrian tunnilla on löydettävissä Hähkiöniemen (hyväksytyt, a) mainitsemat tutkivan matematiikan tunnin vaiheet. Aloituskvaiheessa opettaja esitteli tunnin aiheen johdattelevalla kysymyksellä. Tutkimuskvaiheessa oppilaat kokeilivat erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Koontivaiheessa etsittiin yhdessä paras metodi laskea nelikulmion kulmien summa ja tehtiin johtopäätökset. Koontivaiheessa kirjoitettiin vastaukset taululle ja näin saatiin vastaukset matemaattisesti formaaliin muotoon.

## 8 Yhteenveto ja johtopäätökset

Selkeimmät erot Suomen ja Japanin matematiikan opetuksessa liittyivät matemaattiseen ajatteluun ja harjoittelun toteutukseen. Japanissa korostettiin matemaattisen ajattelun kehittämistä, mikä ilmeni opetuksessa johdannon ja yhteenvedon korostamisena. Suomessa keskityttiin harjoitteluun. Suomessa harjoitteluosuus oppitunnista oli huomattavasti suurempi (46 %) verrattuna Japaniin (20 %). Harjoittelun toteutuksessa oli myös maakohtaisia eroja. Suomessa oppilaat tekivät harjoittelun aikana useita tehtäviä, kun taas Japanissa harjoitustehtäviä tehtiin vain muutamia. Japanissa harjoitustehtävät olivat avoimia tehtäviä ja Suomessa pääsääntöisesti rutiinitehtäviä. Suomalaisen matematiikan opetuksen parhaimpia puolia olivat tekemällä oppiminen sekä oppilaiden osallistuminen opetukseen luokkakeskustelun aikana. Puolestaan japanilaisen matematiikan opetuksen parhaimpia puolia olivat tunnin lopussa uuden asian kokoavien vaiheiden korostaminen sekä hyvä tuntisuunnitelma, jossa tunti oli suunniteltu hyvin johdattelevista kysymyksistä aina yhteenvetoon saakka.

### 8.1 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen luotettavuuteen liittyen voidaan pohtia muun muassa, miten tunnit valikoituivat tutkimukseen, sekä miten luokittelun tulkinta ja kielimuuri ovat vaikuttaneet tutkimukseen. Suomessa tunnit valittiin satunnaisesti, videoitiin ja luokiteltiin tutkimuksen tekijän toimesta kun taas Japanissa opettajat, jotka olivat myös pitäneet kyseisen tunnin, tekivät tuntien luokittelut. Nämä seikat ovat saattaneet aiheuttaa joitakin eroja tutkimuksessa. Tunneiksi valikoituivat aiheiltaan hyvinkin erilaiset tunnit. Tarkastelu ja vertailu olisivat varmasti olleet hedelmällisempiä, jos tutkimukseen olisi saatu aihepiiristään samanlaisia tunteja. Vertailun tekee vaikeaksi myös se, miten kukakin on tulkinnut luokitteluohjeita. Japanilaisten kokoavat vaiheet, tunnin lopussa arviointi, palaute ja toisto, liittyvät läheisesti yhteenvetoon. Tämä otettiin tutkimuksessa huomioon yhdistämällä nämä kokoavat vaiheet uudeksi koontivaiheeksi (kuvio 18). Lisäksi japanilaiset olivat laittaneet kahdella tunnilla paljon rasteja Muukohtaan, ja lisäselvitysten mukaan nämä rastit tarkoittaisivat mm. vastausten tarkistusta ja aiheen ymmärtämistä. Mielestäni näille olisi ollut parempi paikka jossain muussa sarakkeessa. Todennäköisesti japanilaiset opettajat olivat käyttäneet tässä kohtaa Muusaraketta lisäkommenttien antamiseen. Itse laitoin videoimistani tunneista rasteja Muu-

kohtaan vain, kun tunnilla tapahtui selkeästi jotain muuta kuin opetusta. Luokitteluhjeiden tulkintaan on vaikuttanut myös kielimuuri maiden välillä ja kääntäjien käyttäminen. Suomen ja Shibachuon opetustuntianalyysin raportissa (2010) olikin kääntäjän huomautuksena kerrottu, että Suomen taulukossa oleva ”johdatus uuteen asiaan” oli käännetty japaniksi lähinnä ”johdannoksi”, ”uuden asian opettaminen” ”uuden asian opettelemiseksi”, ”arviointi” ”saavutetun tason tarkastukseksi” ja ”sanelu” ”kirjoittamiseksi”. Nämä epämääräisyydet selittävät joitakin eroja rastituksissa kuten esimerkiksi Suomessa arviointi ja kotitehtävien tarkistus oli yhdistetty samaan sarakkeeseen, ja nämä rastit olivatkin Suomessa pääsääntöisesti kotitehtävien tarkistamista. Kun taas Japanissa arviointi oli käännetty saavutetun tason tarkastukseksi, mikä piti sisällä tunnilla tehtyjen tehtävien vastausten käsittelemistä koko luokan kanssa. Lisäksi japanilaisella geometrian tunnilla uuden asian opettaminen oli mielletty selvästi uuden asian opettelemiseksi, sillä uuden asian opettamisen aikana oppilaat tekivät avointa tehtävää yksilötyöskentelynä, mikä Suomessa olisi luokiteltu harjoitteluksi. Huolimatta näistä tutkimusaineistoon liittyvistä epävarmuuksista tunnin rakenteesta sekä sisällöstä löydettiin merkittäviä eroja.

## 8.2 Tunnin rakenne ja vuorovaikutus

Seuraavaksi tarkastellaan, miten tässä tutkimuksessa saatiin vastauksia ensimmäiseen tutkimuskysymykseen: Millaisia tunnin rakenteeseen ja vuorovaikutukseen liittyviä eroja löytyy tämän tapaustutkimuksen valossa Suomen ja Japanin matematiikan opetuksesta? Japanilaisessa matematiikan opetuksessa korostuu selkeästi matemaattisen ajattelun kehittäminen, joka tulee hyvin esille esimerkiksi Nohdan (2000) artikkelissa. Tutkitussa aineistossa tämä tulee esille erityisesti siinä, miten Japanissa matematiikan opetuksessa panostetaan Suomea enemmän johdantoon, uuden asian opettamiseen ja tunnin lopussa tapahtuvaan koontiin (Kuviot 14, 15 ja 18). Lisäksi japanilaisen opettajat huomioivat jo tuntisuunnitelmassaan, mikä kohta tunnista ja millaiset ratkaisuvaihtoehdot parhaiten lisäävät matemaattista ajattelua. Johdannossa japanilaiset opettajat keskittyvät johdatteleviin kysymyksiin. Uuden asian opettamisessa Japanissa keskitytään mm. selittämään jonkin matematiikan osa-alueen luonteesta ja harjoittelun aikana tehdään avoimia tehtäviä. Näiden vaiheiden voidaan ajatella lisäävän matemaattista ajattelua ja laittavan oppilaat miettimään uutta asiaa sekä sovittamaan sitä aikaisemmin opittuun. Matemaattisen ajattelun kehittämisellä on monia hyviä puolia. Se

antaa oppilaalle mahdollisuuden parantaa laadullista oppimistaan (Yrjönsuuri 2004) sekä konseptuaalisen tiedon hallintaansa (Haapasalo 2004) ja näin ollen syventää matemaattista ymmärtämistä. Kun oppilas ymmärtää uuden asian, hän pystyy ajattelemaan esimerkiksi potenssin kertolaskun kautta eikä vain mekaanisena ulkoa opetteluna sekä esimerkiksi nelikulmion kulmien summan kolmion kulmien summan kautta eikä vain ulkoa opetteluna. Ymmärtäminen mahdollistaa soveltavien, luovempien sekä avoimempien tehtävien käytön opetuksessa.

Molempien maiden matematiikan tunneilla esiintyi suhteellisen paljon luokkakeskustelua. Suomessa luokkakeskustelua esiintyi kokonaisuudessaan 37 % ja Japanissa 31 %. Vastaavasti opettajan luento esiintyi Suomessa vain 3 % ja Japanissa 13 %. Luokkakeskustelu oli selvästikin se tapa, jolla molemmissa maissa haluttiin opetusta viedä eteenpäin. Luokkakeskustelulla on tärkeä sija tehokkaassa matematiikan opetuksessa (Stein ym. 2008). Tällaisella tehokkaan matematiikan tunnilla, jota Stein ym. kuvaavat, on hyvin paljon samoja piirteitä kuin japanilaisten suosimalla open-approach–menetelmällä. Tässä tutkimusaineistossa Japanissa pidetty geometrian tunti oli tuntisuunnitelman perusteella tyypillinen open-approach–tunti, jollaista myös Hino (2007) on kuvannut esimerkillään. Japanilaisella geometrian tunnilla oli keskeisessä osassa oppilaiden oma rooli uuden asian oppimisessa avoimen tehtävän avulla (luku 7.2.2). Suomessa käytettiin luokkakeskustelua etenkin uuden asian opettamisen, kotitehtävien tarkistamisen ja yhteenvedon aikana. Suomalaisella potenssin tunnilla oli selvästi havaittavissa, että luokkakeskustelun avulla yritettiin saada oppilaita osallistumaan tunnin kulkuun sekä ajattelemaan itse ennen kuin opettaja sanoi oikean tavan tai ratkaisun esimerkiksi uuden asian opettamisen ja yhteenvedon aikana. Suomessa luokkakeskustelua voitaisiin kehittää kuitenkin enemmän oppilaskeskeiseen suuntaan. Suomalainen luokkakeskustelu on usein opettajajohtoista ja pohjautuu ’opettaja kysyy oppilas vastaa’ asetelmaan, kuten potenssin tunnin esimerkkikeskustelukin osoittaa (luku 7.2.1).

Suomalaisilla matematiikan tunneilla pääpaino oli tehtävien tekemisessä eli harjoittelussa (kuvio 15). Suomen yksilötyöskentelyä esiintyi yhteensä 42 %, joka pääsääntöisesti oli luokiteltu varmistamiseksi/harjoitteluksi. Tehtävien tekemiseen pyrittiin aina jättämään riittävästi aikaa (vrt. määrällinen oppiminen, Yrjönsuuri 2004), ja näin ollen johdantoon ja uuden asian opettamiseen jäi hyvin vähän aikaa. Tässä

tutkimuksessa voidaan huomata myös, että Suomessa matematiikan oppimisessa korostetaan tekemällä oppimista ja itsenäistä työskentelyä. Näin ollen voidaan todeta, että Suomessa matematiikan tunneilla ollaan samoilla linjoilla kuin Saksassa ja USA:ssa. Kuten Shimizu (1999) artikkelissaan toteaa, näissä maissa taitojen kehittäminen on tärkein asia oppitunneilla. Tekemiseen pohjautuvassa yksilötyöskentelyssä saattaa matematiikan oppiminen jäädä usein proseduraalisen tiedon tasolle (vrt. Haapasalo 2004, Joutsenlahti 2005b). Konseptuaalisen tiedon tasolle ei välttämättä yllätä. Vaarana on, että tehtävien tekemisessä jäädään usein rutiininomaiseen jäljittelyn tasolle (vrt. Viholainen 2010) opettajan tunnin alkupuolella näyttämään esimerkkitehtävään pohjautuen. Toisaalta tehtäväpainotteinen opetustyyli korostaisi myös yritteliäisyyttä (vrt. Joutsenlahti 2005b) ja näin ollen motivoisi oppilaita matematiikan opiskeluun sekä luottamaan omiin kykyihin. Yritteliäisyyden korostaminen edesauttaisi myös virheistä oppimista, ettei virheen sattuessa heti lannistuttaisi vaan yritettäisiin etsiä uusia ratkaisutapoja. Lisäksi tehtävien itsenäinen tekeminen auttaisi laskentarutiinien muodostumiseen, minkä jälkeen ymmärtäminen ja soveltaminenkin onnistuisivat paremmin. Japanilaisella geometrian tunnilla uuden asian ymmärtämiseen avoimen tehtävän avulla käytettiin paljon aikaa, yhteensä 22 minuuttia (48%). Harjoittelua varsinaisten laskentatehtävien avulla ei geometrian tunnilla tehty ollenkaan. Mielenkiintoista olisi selvittää kummalla tavalla, tyypillisellä suomalaisella harjoittelupainotteisella vai japanilaisella matemaattista ajattelua korostavalla opetustyyllillä, saavutettaisiin parempia oppimistuloksia.

Tässä tutkimuksessa yhteenvedon tarkoitus ja toteutus erosivat Suomen ja Japanin välillä selvästi. Japanilaisilla tunneilla korostui yhteenvedo, arviointi, palaute ja toisto tunnin loppupuolella. Suomalaisilla tunneilla esiintyi yhteenvedoa mutta varsinaisia tunnin lopussa asiaa kokoavia vaiheita ei esiintynyt ollenkaan. Tässä tutkimuksessa mukana olleet suomalaiset tunnit päättyivät harjoitteluun ja kotitehtävien antamiseen. Näin ollen yhteenvedoon verrattavat tunnin lopussa tapahtuvat arviointi, palaute ja toisto voitiin liittää yhteenvedon kanssa samaan koontivaiheeseen. Nyt saatiin tulos, jossa koontivaihetta esiintyi Japanissa 27% ja Suomessa 18% (kuviot 17 ja 18). Pelkästään yhteenvedoja verrattaessa saatiin tulos, jossa yhteenvedoa esiintyi japanissa 15% ja Suomessa 18%. Tämä koontivaiheen tulos kuvaa paremmin Suomen ja Japanin matematiikan eroja. Myös japanilaisten vierailun aikana pidetyssä palaverissa keskustelimme yhteenvedosta ja päädyimme samanlaiseen tulokseen. Palaverissa

mukana olevat japanilaiset matematiikan opettajat olivat sitä mieltä, että Japanissa tyypillinen piirre on pitää tunnin lopussa yhteenveto päivän aiheesta, ja suomalaiset olivat sitä mieltä siitä, että Suomessa matematiikan tunneilla yhteenvetoa ei yleensä pidetä tunnin lopussa.

### **8.3 Matematiikan opetuksen parhaimpia puolia ja sen kehittäminen**

Seuraavaksi tarkastellaan matematiikan opetusta molemmissa maissa toisen ja kolmannen tutkimuskysymyksen puitteissa. Toinen tutkimuskysymys oli: Mitkä ovat Suomen ja toisaalta Japanin matematiikan opetuksen parhaat puolet? Kolmas tutkimuskysymys oli: Mitä parannettavaa molempien maiden matematiikan opetuksessa olisi suhteutettuna tämän työn teoreettiseen viitekehykseen. Luokkakeskustelu oli tärkeällä sijalla molempien maiden matematiikan opetuksessa. Luokkakeskustelussa olisi varmasti paljon myös kehitettävää. Kuten esimerkissä luokkakeskustelusta luvussa 7.2.1 potenssin tunnilla opettaja käytti usein mikä/mitä kysymyksiä, johon oppilas vastasi lyhyesti. Opettajan kysymyksiä ja sitä, miten opettaja voisi hyödyntää oppilaiden vastauksia, voisi parantaa käyttämällä enemmän kysymyksiä miten ja miksi, esimerkiksi: Kerro miten ratkaisit tämän tehtävän? Miten päädyit tähän vastaukseen? Miksi sait tällaisen tuloksen? Tutustuminen Steinin ym. (2008) kehrittelemään luokkakeskustelua parantavaan malliin antaisi varmasti keinoja kehittää opettajan kysymyksiä. Japanissa pidetyn geometrian tunnin tuntisuunnitelmaan opettaja oli merkannut omaan sarakkeeseen valmiita kysymyksiä ja odotettuja oppilaiden vastauksia sekä keinoja miten oppilaiden vastauksiin opettaja voisi reagoida. Tällainen tuntisuunnitelma on esimerkillinen kun taas Suomessa tuntisuunnitelmia ei tehdä oikeastaan ollenkaan tai sitten se on muutama rivi jollain paperinpalalla. Voisin hyvinkin tulevassa työssäni matematiikan opettajana käyttää japanilaisten geometrian tuntisuunnitelmaa ja avointa lähestymistapaa hyödyksi.

Kun Suomessa matematiikan tunneilla keskitytään harjoitteluun, on syytä muistaa kuinka tärkeässä roolissa myös opettaja on tämän itse tekemällä oppimisen aikana. Opettajan rooli on olla oppilaan lähellä käytettävissä, joten oppilas voi tarvittaessa pyytää opettajalta neuvoa ja saada näin yksilöllistä opetusta. Hyvää tässä yksilötyöskentelyssä on se, että oppilaat voivat tehdä harjoitustehtäviä yksin tai yhdessä parin tai pienen ryhmän kanssa. Näin oppilas voi itse valita sopivimman



työskentelytavan. Suomessa saatetaan tehdä määrällisesti paljonkin tehtäviä tunnin aikana. Opettaja voisi valita oppikirjasta eritasoisia tehtäviä oppilaille sekä lisätehtäviä nopeimmille. Tunnilla tehtyjen tehtävien lukumäärä saattaa vaihdella oppilaan taitotasosta riippuen todella paljonkin. Etevimmat oppilaat saattavat tehdä useita tehtäviä, kun taas heikoimmat oppilaat saattavat saada vain yhden tehtävän tehtyä. Opettajan rooli eriyttämisessä tunnin aikana ja erityisesti yksilötyöskentelyn aikana on tärkeä ja haastava.

Avoin lähestymistapa (open-approach) soveltuisi mielestäni hyvin suomalaisille matematiikan tunneille. Suomalaiset tunnit ovat tyypillisesti tehtävän tekemiseen painottuvia. Tehtävien ratkominen on avoimessa lähestymistavassakin keskeisellä sijalla, mutta suorittaminen ja oikean vastauksen saaminen eivät korostu niin paljon. Avoimessa lähestymistavassa korostuisi matemaattinen ajattelu ja uuden tiedon prosessointi. Lisäksi avoimen lähestymistavan tunnilla jäsenhely yhteenveto tukisi oppimista hyvällä tavalla. Tällainen tunti vaatisi opettajalta tarkempaa tehtävien suunnittelua etukäteen, mutta tällainen tunti varmasti vahvistaisi ryhmässä toimimista sekä sosiaalisia taitoja. Avoin lähestymistapa on mielestäni hyvin lähellä tutkivaa oppimista ja siinä on myös helppo toteuttaa elämyksellisyyttä sekä erilaisia vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä. Mielestäni ei ole väliä puhutaanko avoimesta lähestymistavasta, ongelmanratkaisukeskeisestä oppimisesta vai tutkivasta oppimisesta vaan tärkeintä on kehittää tehokkaita opetusmenetelmiä, jotka tukevat matemaattista ajattelua sekä vuorovaikutusta. Tässä tutkimuksessa ei ollut juurikaan havaittavissa suomalaisilla tunneilla ongelmanratkaisukeskeistä opetusta, vaikka tunnit olivatkin tehtäväpainotteisia. Tämä kertonee osaltaan siitä, että vaikka matemaattista ajattelua kehittäviä opetusmenetelmiä on tutkittu myös Suomessa ja niistä on myös mainintoja opetussuunnitelmassa (vrt. Pehkonen ym. 2007) niin varsinaisen ongelmanratkaisukeskeisen opetuksen toteutus luokkahuoneessa on edelleen hidasta.

Suomalaiset opettajat voisivat ottaa oppia Japanista ainakin kahdessa asiassa: japanilaisten tekemistä viimeistellyistä ja tarkoista tuntisuunnitelmista sekä yhteenvedosta (vrt. koonti). Yhteenvedoon ei tarvitsisi varata aikaa kuin muutama minuutti tunnin lopusta, mutta uskoisin, että se kannattaisi ja parantaisi oppimista sekä erityisesti japanilaistenkin korostamaa matematiikan ymmärtämistä. Vastaavasti japanilaiset opettajat voisivat ottaa tunteihinsa oppia Suomesta ja lisätä

harjoitustehtävien tekemistä sekä vuorovaikutusta oppilaiden kanssa unohtamatta omaa vahvuuttaan matemaattisen ajattelun kehittämisessä.

## LÄHTEET

- Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2. uudistettu painos, s. 50–83.
- Hakkarainen K., Lonka K. ja Lipponen L. (2004). *Tutkiva oppiminen: Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen syttäjänä*. Porvoo: WSOY.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, s. 1-27.
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving on Japan. *The International Journal on Mathematical Education* 39, s. 503-514.
- Hähkiöniemi, M. (2006). Ajattelun apuvälineet – tapaustutkimus derivaatan representaatioista. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82.
- Hähkiöniemi, M. (hyväksytyt, a). Miten opettaja kokee valmiiksi suunnitellun opetusjakson tukevan GeoGebra-avusteisen tutkivan matematiikan toteuttamista. Hyväksytyt teokseen *proceedings of the Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association*, Tampere, 14.-15.2010.
- Hähkiöniemi, M. (hyväksytyt, b). Japanilaista matematiikkaa. Hyväksytyt teokseen P. Tikkanen (Toim.), *Varga-Neményi -kesäseminaari 7.-8.6.2011*.
- Joutsenlahti, J. (2005a). Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä – 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampere University Press.
- Joutsenlahti, J. (2005b). Pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen piirteitä. Teoksessa Jalonen, L., Keranto, T. ja Kaila, K. (Toim.), *Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus?* Oulun Yliopisto. s.71-80.
- Kawanaka, T. ja Stigler, J. W. (1999). Teachers' use of questions in eighth grade mathematics classroom in Germany, Japan, and the United States. *Mathematical Thinking and Learning*, 4, s. 255-278.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. ja Findell, B. (toim.) (2001). *Adding it up*. National Academy Press, Washington DC.
- Latva, O., Hassinen, S., Makkonen, J-P. ja Tolvanen, A. (2008) *Kuutio*, ensimmäinen painos, Tammi.

- Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa T. Nakahara & M. Koyama (Toim.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, s. 39–53). Hiroshima, Japan: PME.
- OECD (2007). PISA 2006 Science competencies for tomorrow's world. Vol. 2:Data. Pariisi: OECD.
- Opetusministeriö (2006). Pisa 2006 Ensituloksia, Opetusministeriö.
- Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem". Teoksessa Pehkonen, E. (toim.). Use of open-ended problems on mathematics classroom. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Research report 176, s. 7-11.
- Pehkonen, E. (2004). State-of-the-art in problem solving: Focus on open problems. Teoksessa H. Rehlich & B. Zimmermann (toim.) ProMath Jena 2003. Problem solving in mathematics education. Proceedings of an international symposium in September 2003. Berlin: Verlag Franzbecker, s. 93-111.
- Pehkonen, E., Hannula M. S. ja Björkqvist O. (2007). Problem solving as a teaching method in mathematics education. Teoksessa Pehkonen E., Ahtee M. & Lavonen J. (Toim.), How Finns learn mathematics and science. Rotterdam: Sense publishers, s. 119-130.
- Pehkonen, E. ja Rossi M. (2007). Some alternative teaching methods in mathematics. Teoksessa Pehkonen E., Ahtee M. & Lavonen J. (Toim.), How Finns learn mathematics and science. Rotterdam: Sense publishers, s. 141-152.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2004). Opetushallitus.
- Portaankorva-Koivisto, P. (2010). Elämyksellisyyttä tavoittelemassa. Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Tampereen yliopisto.
- Savola, L. (2008). Video-based analysis of mathematics classroom practice: examples from Finland and Iceland. Columbia University
- Seidel, T., Prenzel, M. ja Kobarg, M. (toim.) (2005). How to run a video study. Technical report of the IPN Video Study. Münster: Waxmann.
- Shimizu, Y. (1999). Studying Sample Lessons Rather than one Excellent Lesson: A Japanese Perspective on the TIMSS,– The International Journal on Mathematics Education. Tokyo Gakugei University, ZDM
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., ja Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, s. 313–340.
- Suomen ja Shibachuon ala-asteen opetustuntianalyysin vertailu ja tarkastelu: 17.2.2010, Kawaguchi, Shibachuon ala-aste, Japani

Viholainen, A. (2010). Lisää luovuutta matematiikkaan. *Dimensio*, 74, s. 70-72.

Yrjönsuuri, L. (2004). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2. uudistettu painos, s. 111-122.









## Didaktiset vaiheet

⑥ Minamin yläaste

neliöllinen funktio  
 $y=ax^2$  ja sen kaavio

minuutti	didaktiset vaiheet										lähestymistapa	
	toisto	johdanto	uuden asian opetteleminen	harjoittelu	soveltaminen	yhteenveto	palaute	saavutetun tason tarkastus	muu	tieteellinen	arkpäivän ilmiö	
1	o								o			
2	o								o			
3		o										
4		o										
5	o											
6	o											
7	o											
8									o			
9									o			
10												
11			o									
12			o									
13			o									
14				o								
15				o								
16				o								
17				o								
18				o								
19				o								
20								o	o			
21								o	o			
22								o	o			
23				o								
24				o								
25				o								
26				o								
27				o								
28(29)				o				o	o			
30								o	o			
31								o	o			
32									o			
33									o			
34									o			
35									o			
36			o									
37			o									
38			o									
39									o			
40									o			
41									o			
42									o			
43			o									
44			o									
45			o									
46												
47						o						
48						o						
49						o						
50						o						

## Didaktiset vaiheet

⑤ Minamin yläaste

d neliöjuuri

minuutit	didaktiset vaiheet									lähestymistapa	
	toisto	johdanto	uuden asian opetteleminen	harjoittelu	soveltaminen	yhteenveto	palaute	saavutetun tason tarkastus	muu	tieteellinen	arkpäivän ilmiö
1		0									0
2		0									0
3		0	Piiirretään neliö millimetripaperille.								0
4		0									0
5		0									0
6				0							0
7				0							0
8				0	tehtävien ratkaiseminen						0
9				0							0
10				0							0
11						0					0
12						0					0
13						0					0
14						0					0
15						0	tehtävien ratkaiseminen ja viimeistely koko luokan kanssa				0
16						0					0
17						0					0
18						0					0
19						0					0
20						0					0
21			0							0	
22			0							0	
23			0							0	
24			0							0	
25			0	neliöjuuren määrittely						0	
26			0							0	
27			0							0	
28(29)			0				0			0	
30			0				0			0	
31			0	0			0			0	
32				0	neliöjuuren mallitehtävät					0	
33				0						0	
34				0						0	
35				0						0	
36			0							0	
37			0							0	
38			0	Selitetään neliöjuuren luonteesta.						0	
39			0				0	harjoitustehtävät		0	
40			0				0			0	
41							0			0	
42							0			0	
43							0			0	
44							0			0	
45							0			0	
46							0			0	
47							0			0	
48							0			0	
49							0			0	
50							0			0	

## Liite 3: Kertaus kokeeseen tunnin tehtävämöniste

Koe maanantaina 26.4.2010

Koealue on kirjan kappaleet 1-10.

Alkuluvut, syt, pyj, jaollisuus (kpl 1-3):

1. Tutki, onko luku 236 082 jaollinen  
a) kahdella                      b) kolmella                      c) viidellä                      e) yhdeksällä.

**Ratkaisu**

- 2 a) Ilmoita luvun 18 tekijät ja alkutekijät.  
b) Määritä syt(28, 35).  
c) Määritä pyj(2, 6, 15).

**Ratkaisu**

3. a) Jaa luku 90 alkutekijöihin.  
b) Määritä lukujen 18 ja 30 suurin yhteinen tekijä.  
c) Määritä pyj(2, 4, 10).

**Ratkaisu**

Muuttuja, termi, lauseke (kpl 4-6):

4. Mikä on lausekkeen  $8a - b + 3c - 2$

a) termien lukumäärä

c) kolmannen termin kirjainosa

b) toisen termin kerroin

d) vakiotermi?

**Ratkaisu**

5. Sievennä.

a)  $7a + 5a$

b)  $-8x - 2x$

c)  $6a - 3b + 7a - 2b$

**Ratkaisu**

6. Kirjoita lauseke ja laske sen arvo.

a) luvun  $\frac{1}{3}$  neliö

b) lukujen 7 ja  $-3$  erotuksen kuutio

**Ratkaisu**

7. a) Laske  $8 - 7 \cdot 2^2$ .

b) Laske lausekkeen  $\frac{2xy - x^3}{x + y}$  arvo, kun  $x = -2$  ja  $y = -5$ .

**Ratkaisu**

## Liite 4: Potenssin tunnin analyysi

POTENSSI 7.LK

Norssin yläaste

Pvm: 31.3.2010

Tyypillinen suomalainen tunti, jossa edetään 1. kotitehtävien tarkistus 2. johdatus uuteen asiaan ja uuden asian opettaminen 3. yhteisiä esimerkkejä taululla 4. laskutehtäviä yksilötyöskentelynä ja lopuksi 5. annetaan uudet kotitehtävät

### Kotitehtävien tarkistaminen (6 min)

aiheena lausekkeen yhteenlasku

vertailu parin kanssa, parityöskentely (2 min)

opettaja käy vaikeimman tehtävän ratkaisun läpi dokumenttikameralla, luokkakeskustelu

(4 min)

### Johdatus uuteen asiaan (5 min)

arkielämän esimerkki kanien lisääntyminen dokumenttikameralla

taululle  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4$  ja  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$

luokkakeskustelu

### Uuden asian opettaminen (6 min)

opettaja kirjoittaa dokumenttikameralla ja oppilaat saman vihkoon

potenssin merkintä, nimeäminen, lukutavat

luento

POTENSSI

$$3 \cdot 3 = 3^2$$

eksponentti

”kolme toiseen”, ”kolme potenssiin kaksi”, ”luvun kolme neliö”

kantaluku

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

”kaksi kolmanteen”, ”kaksi potenssiin kolme”, ”luvun kaksi kuutio”

**Yhteenveto (9 min)**

opettaja antaa tehtävän dokumenttikameralla ja oppilaat kirjoittavat sen vihkoon

yhdessä ratkaistaan tehtävä, luokkakeskustelu

esimerkkitehtäviä

$$4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

$$7^2 = 49$$

$$10^1 = 10$$

$$k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k = k^6$$

**Varmistaminen, harjoittelu(17 min)**

oppilaat tekevät kirjan tehtäviä vihkoonsa, yksilötyöskentely (Kuutio s.155 teht. 1-10)

vastaukset kirjan takana

voi keskustella tehtävistä parin kanssa

voi kysyä opettajalta apua

opettajan rooli tärkeä (opettaa, auttaa, motivoi)

Suomessa sanonta ”matematiikkaa oppii vain laskemalla ja itse tekemällä”

**Muu, kotitehtävien antaminen (2 min)**

opettaja kirjoittaa taululle kotitehtävien numerot







## Liite 5: Potenssin tunnin tehtävät oppikirjasta (Latva ym. 2008)



1. Kirjoita potenssimerkintänä.
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
  - $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
  - $15 \cdot 15$
  - $\underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_{12 \text{ kpl}}$
2. Kirjoita potenssimerkintänä.
- $m \cdot m$
  - $n \cdot n \cdot n \cdot n$
  - $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_y \text{ kpl}$
3. Kirjoita potenssimerkintänä.
- Kantaluku on 9 ja eksponentti 4.
  - Kantaluku on b ja eksponentti 3.
  - Kantaluku on 0,5 ja eksponentti 6.
  - Kantaluku on x ja eksponentti n.
4. Kirjoita tulona ja laske potenssin arvo.
- $2^4$
  - $5^2$
  - $8^2$
  - $9^2$
5. Kirjoita tulona ja laske potenssin arvo.
- $4^2$
  - $1^5$
  - $3^4$
  - $4^3$
- Laske potenssin arvo.
6.
  - $3^2$
  - $6^2$
  - $7^1$
  - $5^3$
7.
  - $4^1$
  - $2^5$
  - $0,1^2$
  - $10^3$
8. Merkitse ja laske luvun neliö.
- 2
  - 10
  - 1
  - 0,4
9. Merkitse ja laske luvun kuutio.
- 2
  - 3
  - 1
  - 0,2

10. Tutki, mikä positiivinen luku sopii muuttujakirjaimen paikalle.

- $x^2 = 100$
- $6^x = 6$
- $x^3 = 1$
- $x^4 = 10\,000$

Laske potenssin arvo.

11.
  - $40^2$
  - $20^3$
  - $10^5$
  - $100^3$

12.
  - $0,3^2$
  - $0,1^3$
  - $0,6^2$
  - $0,8^2$

13. Täydennä taulukko viikkoosi.

a	3	4			10	
n	2		2	4		3
$a^n$		64	0,01	81	1000	0,027

14. Tutki, mikä positiivinen luku sopii muuttujakirjaimen paikalle.

- $x^2 = 0,81$
- $2^x = 128$
- $x^x = 27$
- $x^{2x} = 16$

15. Minkä positiivisen luvun neliö on
- 0,16
  - 0,0004
  - 25?

16. Minkä luvun kuutio on
- 0,008
  - 27 000
  - 1 000 000?

17. Kuinka monta desimaalia on luvun kuutiolla, jos kantaluussa on

- 2
  - 0
  - 3
  - 8
  - n
- desimaalia?

18. Kirjoita esimerkki positiivisesta luvusta, jonka neliö on

- suurempi kuin luvun -8 neliö
- suurempi kuin 1 mutta pienempi kuin 2
- pienempi kuin luvun 0,1 kuutio.