TOIMINNALLISTA GEOMETRIAA

Opetuskokeilu 6-luokkalaisille

Risto Anttila ja Juuso Eskelinen

Kasvatustieteen
pro gradu -tutkielma
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Jyväskylän yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylä
Anttila Risto & Eskelinen Juuso: Toiminnallista geometriaa. Opetuskokeilu 6-luokkalaisille.
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 98 sivua, 35 liitesivua
Toukokuu 2010

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää toiminnallisuuden merkitystä matematiikan oppimisessa. Tutkimuksessa haluttiin selvittää onko toiminnallisuudella niin suuri merkitys matematiikan oppimisessa kuin usein alaan liittyvässä tutkimuskirjallisuudessa esitetään.

Tutkimus on toimintatutkimus. Toiminnallisuuden tutkimiseksi toteutettiin geometrian opetuspaketti, jonka vaikutuksia selvitettiin oppilaille tehdyillä testeillä ja kysymyksillä. Työ on laadullinen tutkimus.

Tutkimustuloksista voidaan päätellä, että oppilaat pitävät toiminnallisuutta tärkeänä osana matematiikan oppimista. Oppilaan innostus kasvaa, kun hän pääsee itse erilaisia toimintavälineitä käyttäen tutustumaan matematiikan aiheisiin. Kävi myös ilmi, että toiminnallisen matematiikan avulla voidaan lisätä matematiikan oppimiseen liittyviä positiivisia tunteita ja motivaatiota matematiikan oppimista kohtaan. Tutkimusta varten luotu opetuspaketti osoittautui toimivaksi.

Tutkimustulokset ovat linjassa monien matematiikkapedagogien näkemysten kanssa siitä, että toiminnallisuus on monessa mielessä käyttökelpoinen lähestymistapa matematiikan opetuksessa. Toiminnallista, konkreettista opetusta on syytä toteuttaa myös vanhempien oppilaiden kanssa, ei vain esi- ja alkuopetuksessa.

Avainsanat: Varga-Neményi -opetusmenetelmä, matematiikka, toiminnallisuus, geometria

ESIPUHE

Suomi on menestynyt erinomaisesti oppimista mittaavissa PISA -tutkimuksissa. Matematiikan osalta olemme joka kerralla olleet aivan kärkimaiden joukossa. Meidän onkin syytä olla ylpeitä matematiikan opetuksemme tasosta. Voitaisiinko matematiikan opettamista hyvistä tuloksista huolimatta edelleen kehittää monipuolisemmaksi? Esimerkiksi matematiikka-asenteissa olisi paljon parannettavaa. (Koponen 1994, 29-35; Kupari ym. 2004, 42-46.)

Perehdyimme kandidaatin tutkielmassamme niin sanottuun unkarilaiseen matematiikkaan. Havaitsimme, että ymmärryksemme unkarilaisen matematiikan käytännöistä jäi vielä pinnalliseksi. Tarkastelimme kandidaatin tutkielmassamme aihetta varsin laajasta ja kokonaisvaltaisesta näkökulmasta. Saatuamme aiheesta riittävän kokonaisnäkemyksen, valitsimme siitä hieman kapeamman näkökulman lähempään tarkasteluun**.** Halu**si**mme perehtyä mielenkiintoiseen aihepiiriin syvemmin ja konkreettisemmin, mikä vaikutti tämän tutkimuksen syntyyn.

Tutkimustyömme eteni aiheeseen liittyvän monipuolisen tutkimus- ja teoriakirjallisuuden parista toiminnallisen opetuspaketin suunnitteluun ja toteutukseen. Pian opetuspaketin toteuttamisen jälkeen analysoimme tutkimukseen liittyvät kyselylomakkeiden vastaukset. Työ jatkui opetuspaketin toteutumisen kuvailulla ja teorian täsmentämisellä.

Tutkimusaineisto perustuu yhden keskisuomalaisen keskisuuren alakoulun 6 -luokkalaisten oppilaiden kanssa toteuttamaamme kuuden tunnin geometriajaksoon ja heidän antamiinsa vastauksiin kyselomakkeissa sekä alku- ja lopputesteissä.

Kiitämme erityisesti pääasiallista ohjaajaamme kasvatustieteen tohtori Kauko Hihnalaa kannustavasta ja avuliaasta otteesta työmme aikana. Kiitämme myös kasvatustieteen tohtori Henry Leppäahoa, joka työn alkuvaiheessa antoi hyviä neuvoja erityisesti tutkimuksen rakenteeseen liittyen.

Kiitämme tutkimuksessa mukana olleita oppilaita ja heidän matematiikan opettajaansa. Malva Eskelinen ansaitsee erityiskiitokset metodologisesta ja visuaalisesta tuesta. Kiitämme myös muita perheidemme jäseniä, ystäviämme ja opiskelutovereitamme kannustuksesta.

Jyväskylässä 25.5.2010

Tekijät

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Kokemuksemme mukaan Varga-Neményi -menetelmän periaatteisiin kuuluva toiminnallisuus ja toimintavälineiden runsas käyttö on saanut vähitellen ansaittua huomiota. Orientoituessamme tutkimaan toiminnallisuuden merkitystä havaitsimme, että aiheeseen liittyvässä kirjallisuudessa ei useinkaan mainita sen merkitystä oppilaan näkökulmasta, eikä juuri paneuduta kysymykseen, miksi toiminnallisuus on niin tärkeää matematiikan oppimisessa. Halusimme toteuttaa opetusjakson, jonka aikana saisimme myös itse konkreettisen kokemuksen matematiikkaan liittyvän toiminnallisuuden merkityksestä oppimistapahtumassa.

Tämän tutkimuksen tehtävänä on selvittää, *mikä on toiminnallisuuden merkitys 6-luokkalaisten matematiikan opetuksessa?* Tähän haettiin vastauksia alakysymyksillä: *mikä merkitys toiminnallisella opetuksella on oppilaiden kokemukseen matematiikan oppimisesta, mitä hyöty- ja haittapuolia on toiminnallisessa matematiikan opetuksessa* ja *oppiiko toiminnallisen opetuksen avulla tilavuusgeometriaa?*

Aiemmissa tutkimuksissa on laajasti kuvailtu toiminnallisuutta matematiikan opetuksessa yleensä, mutta halusimme tutkimuksessamme perehtyä erityisesti sen merkitykseen oppilaan kokemana. Tässä tutkimuksessa toiminnallisuus tarkoittaa toimintavälineiden käyttöä matematiikan tunneilla. Geometrialla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa alakoulussa opetettavaa geometriaa.

Toteutimme tutkimuksen toimintatutkimuksena luomalla 6 -tuntisen tilavuusgeometrian opetuspaketin kyselylomakkeineen sekä alku- ja lopputesteineen. Käytetty menetelmä sopi mielestämme hyvin juuri konkreettisen toiminnan vaikutuksen tutkimiseen.

Oppilaiden kokemuksia ja oppimista opetusjakson aikana kuvaavat kyselylomakkeiden vastaukset sekä alku- ja lopputestien pistemäärät. Tutkimustulokset vakuuttivat meidät siitä, että toiminnallisuutta kannattaa käyttää omassa opettajan työssä. Uskomme, että toiminnallisuuteen perehtyminen tarjoaisi työkaluja myös muille matematiikkaa opettaville.

Käsittelemme aluksi yleisellä tasolla teoriaa matematiikan oppimisesta minäkäsityksen, asenteiden, uskomusten ja tunteiden näkökulmasta. Käsittelemme myös matematiikan ja erityisesti geometrian oppimista ja siihen liittyviä didaktisia näkökulmia. Esittelemme myös Varga-Neményi -menetelmän periaatteita ja vertaamme niitä suomalaisen matematiikan opetuksen periaatteisiin. Työn loppuosassa esittelemme tutkimusta varten luomamme toiminnallisen opetuspaketin sekä sen pohjalta kerätyn tutkimusaineiston laadullisen analyysin.

2 TUNTEET, ASENTEET, MINÄKÄSITYS JA USKOMUKSET MATEMATIIKAN OPPIMISESTA

Olipa opetus didaktisesti minkälaista hyvänsä, oppimiseen liittyy monia taustamuuttujia. Tässä luvussa tutustutaan siihen, miten tunteet, minäkäsitys, uskomukset ja asenteet vaikuttavat oppimisen taustalla.

Jokaiselle oppiaineelle on luotu oma, virallinen opetussuunnitelmansa. Lisäksi jokainen yksilö muodostaa kokemustensa perusteella käsityksen siitä, mitä matematiikka ja sen opettaminen ja oppiminen on; tästä voidaan käyttää nimitystä koettu opetussuunnitelma. Tikkanen (2008) määrittelee koetun opetussuunnitelman sellaiseksi, jossa oppilas luo aktiivisesti omaa opetussuunnitelmaansa tulkiten virallisen opetussuunnitelman toteutusta, eikä vain passiivisesti vastaanota sitä. Tunteet, asenteet ja uskomukset säätelevät ja suodattavat, millaiseksi matematiikka, sen oppiminen ja opetus koetaan. (Tikkanen 2008, 19; Kupari 1999, 44.)

Asenteet, minäkäsitys, tunteet ja uskomukset ovat käsitteinä osittain päällekkäisiä. Ne voidaan kuitenkin erottaa toisistaan erillisiksi alueiksi oppilaiden kokemusten analysoinnin johdonmukaisen käsittelyn vuoksi. (Tikkanen 2008, 21-22; Furinghetti & Pehkonen 2003, 40-41.)

Koetun matematiikan opetussuunnitelman muodostumiseen vaikuttaa merkittävästi oppilaan minäkäsitys; uskomus itsestä matematiikan oppijana. Matemaattinen minäkäsitys on keskeisin matematiikan oppimiseen ja saavutuksiin vaikuttavista affektiivisista tekijöistä. (Tikkanen 2008, 20-21.) Vielä ensimmäisellä luokalla oppilaan luottamus itseensä matematiikassa on suhteellisen korkealla, mutta luottamus itseen ja kiinnostus matematiikan tehtäviin vähenee siirryttäessä seuraaville luokka-asteille. Oppilaiden uskomukset matematiikasta muovautuvat voimakkaasti 10-12 vuoden iässä. Ikävuosina 9-11 lasten myönteiset asenteet ja emotionaaliset reaktiot saattavat muuttua negatiivisemmiksi, joten kyseistä ikäkautta pidetään kriittisenä ajankohtana. (Tikkanen 2008, 20-21; Koponen 1994, 29-33; Kupari 1999, 58.)

Matematiikan opetussuunnitelma oppilaan kokemana suuntaa opiskelua. Opiskelusta saadut kokemukset vaikuttavat edelleen oppilaan käsitykseen itsestään matematiikan oppijana. Tunteiden, asenteiden, minäkäsityksen ja koetun opetussuunnitelman välisestä yhteydestä johtuen oppilaan kokeman opetussuunnitelma voidaan arvioida myönteiseksi tai kielteiseksi. Laaja-alaisesti ymmärrettynä arvio on yhteydessä oppilaan toimintaan erilaisissa matematiikkaan liittyvissä tilanteissa niin koulussa kuin muuallakin elämässä. (Tikkanen 2008, 20-21.)

Jotta opettaja kykenee tukemaan mahdollisimman hyvin oppilaiden matematiikan oppimisen positiivista suuntaa, on opettajan hyvä tuntea oppilaidensa tiedot, taidot, asenteet ja uskomukset. Juuri aiemmat kokemukset muokkaavat suurelta osin oppilaiden tulevia oppimiskokemuksia. (Tikkanen 2008, 94.)

2.1 Tunteet matematiikan oppimisen taustalla

Yksilön ja hänen kulloinkin kohtaamansa tilanteen ajallisesti ensimmäinen kokemus on laadultaan tunne. Tunteet muodostuvat psyykkisessä toiminnassa. (Perttula 2009, 124.) Oppilaan kokemuksellinen suhde myös matematiikkaan, sen oppimiseen ja opetukseen on siten lähtökohtaisesti laadultaan tunnepohjainen. Tunteet elävät nykyhetkessä ja ovat kokemuksia, jotka ilmentävät ihmisen suhdetta aiheeseen esimerkiksi matematiikkaan niin välittömästi kuin se vain ihmiselle on mahdollista. Ihminen arvioi tilanteen merkittävyyttä kun se koskee hänelle tärkeää tavoitetta. Tällöin tunne viriää tai syntyy. Jos tilanne on tavoitteen suuntainen, kokemus on myönteinen ja päinvastoin kokemus on kielteinen, jos tilanne on tavoitteen kanssa vastakkainen. (Tikkanen 2008, 23.) Matematiikka oppiaineena on hyvin tunteita herättävä sekä oppilaiden että vanhempien taholla. Usein se aiheuttaa myös kielteisiä kokemuksia. Monesti saavutukset matematiikassa yhdistetäänkin älykkyyteen. (Linnanmäki 2004, 241.) Toisaalta tunteiden kokemisella on yhteys kognitiivisiin prosesseihin. Tunteet muun muassa suuntaavat tarkkaavaisuutta. (Hannula 2004, 31.)

Suomen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) ensimmäisenä tavoitteena matematiikan kohdalla on, että oppilas saa vuosiluokilla 1-2 tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta ja luokilla 3-5 onnistumisen kokemuksia. Unkarin vastaavan opetussuunnitelman vuodelta 2003 yhtenä tehtävänä on kehittää oppilaan emotionaalisuutta matematiikan opetuksessa. Myöhemmin tässä tutkimusraportissa esitellään Varga-Neményi -opetusmenetelmä, jonka periaatteisiin kuuluu, että oppilaalla on lupa erehtyä, väitellä ja iloita. Tarkoituksena on luoda turvallinen oppimisilmapiiri. Useat suomalaiset matematiikan oppikirjasarjat ohjaavat oppilaiden itsearvioinnin avulla (esim. Matikkamatka 2003, 7) ottamaan huomioon matematiikan herättämiä tunteita. Suomessa käytettyjen opetusmenetelmien, ongelmanratkaisun, tosi-matematiikan ja tarinankerronnan pedagogisissa ratkaisuissa otetaan huomioon oppilaiden erilaisia tunteita. Oppilaiden tunteita pyritään siis tavoitteellisesti ottamaan huomioon ja kehittämään. (Tikkanen 2008, 22.)

2.2 Asenteet matematiikan oppimista kohtaan

Karjalaisen (1982) mukaan asenteet ovat tapoja havaita ja jäsentää sosiaalista maailmaa joidenkin kognitiivisten kategorioiden avulla. Samalla ne ilmaisevat myönteistä tai kielteistä, hyväksyvää tai hylkäävää suhtautumista johonkin tai joihinkin tietyllä tavalla hahmotettuihin ilmiöihin. (Karjalainen 1982, 48.)

Tunteiden, assosiaatioiden, odotusten ja arvojen ja erilaisten arviointiprosessien yhteensulautumisen tulos ymmärretään asenteeksi. (Tikkanen 2008, 33.) Onnistumisen ja aikaansaamisen tarve ovat keskeisiä asenteita muodostavia tarpeita. (Lindgren 2004, 382.)

Oppilaan asenteiden kehittäminen matematiikkaa kohtaan eksplisiittisenä tavoitteena on nykyisissä matematiikan opetussuunnitelmissa jäänyt pois. Useimmissa suomalaisissa matematiikan oppikirjasarjoissa asenteen kehittyminen otetaan kuitenkin huomioon itsearvioinneissa. (Tikkanen 2008, 28.)

Alempien luokkien oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan ovat myönteisemmät kuin ylemmillä luokilla. Asenteiden ja menestyksen välinen suhde on heikko, mutta asenne vaikuttaa menestykseen epäsuorasti. Oppilaan tavoitteilla on välittäjän rooli: tavoitteilla on suora vaikutus menestykseen. Yhteistoiminnallisen työskentelyn on havaittu edistävän myönteisiä asenteita matematiikkaan. (Tikkanen 2008, 29.)

Tikkasen mukaan on suotuisaa tavoitella myönteisiä tunnekokemuksia, jotta oppilaat lähestyisivät matematiikka mielellään. Tikkanen myös toteaa McLeodia (1992) mukaillen, että asenteet matematiikkaa kohtaan muodostuvat toistuvien tunteenomaisten reaktioiden automatisoitumisena tai ennakkoasenteiden vahvistumisen kautta. (Tikkanen 2008, 271-272.) Tästä voitaneen vetää johtopäätös, että oppilaan ensimmäiset kokemukset matematiikasta enteilevät oppilaan myöhempää matematiikkakuvaa.

Opettaja on avainasemassa oppilaiden asenteiden muodostumisessa. On todettu, että innovatiivisuuteen kannustavassa oppimisympäristössä oppilaiden käsitys itsestään ”matemaatikkona” on positiivisempi kuin ei-innovatiivisessa koulussa. (Tikkanen 2008, 273.)

2.3 Minäkäsitys ja matematiikka

Minäkäsityksellä tai minäkuvalla tarkoitetaan ihmisellä olevaa pysyvää käsitystä siitä, minkälainen hän on. (Keltikangas-Järvinen 1994, 30.) Kaasilan tutkimuksessa matematiikkaan liittyvä itsearvostus tarkoittaa tapaa, jolla opiskelija hyväksyy tai arvostaa itseään matematiikan osaajana. (Kaasila 2000, 21.) POPS:an (2004) yhtenä tavoitteena on, että opetuksen on annettava mahdollisuus terveen itsetunnon kehittymiseen, jotta oppilas voi hankkia elämässä tarvitsemiaan tietoja ja taitoja, saada valmiudet jatko-opintoihin ja osallistuvana kansalaisena kehittää yhteiskuntaa. Unkarin vastaavan opetussuunnitelman 2003 tavoitteena on kehittää oppilaiden minäkuvaa ja itsetuntemusta persoonallisuuden kehittymiseksi järjestämällä heille sellainen opiskeluympäristö, joka motivoi itsetuntemuksen omaksumiseen. Opiskeluympäristö minäkuvan ja itsetuntemuksen rikastuttamiseksi on sellainen, joka kasvattaa oppilaita herkiksi ympärillä oleville ihmisille ja asioille. (Tikkanen 2008, 33-34.)

Unkarin opetussuunnitelman kasvatukselliset arvot rakentavat kehittyvää persoonallisuutta niin, että omaksuessaan opetussisällöt oppilaat osallistuvat aktiivisesti näiden arvojen tunnistamiseen ja nimeämiseen. (Tikkanen 2008, 33-34.) Toisaalta minäkäsityksen kielteisyydellä on vahva yhteys kielteisiin asenteisiin koulua kohtaan, kielteisiin kokemuksiin koulunkäynnistä ja alhaiseen opiskelumotivaatioon. (Linnanmäki 2004, 243.) Minäkäsitys on eriytynyt jo ensimmäisen luokan oppilailla. Ensimmäisen luokan oppilailla on matematiikan, lukemisen, liikunnan ja musiikin osalta myönteisempi minäkäsitys kuin vanhemmilla oppilailla. (Tikkanen 2008, 35.)

Koulun oppiaineena matematiikka on ollut arvostettu oppiaine kautta aikojen. Oppilaiden taholta onnistumista matematiikan alueella pidetään tärkeämpänä kuin onnistumista muissa aineissa. (Linnanmäki 2004, 241.) Oppilaiden, jotka kokevat selviytyvänsä matematiikassa hyvin ensimmäisten kouluvuosien aikana, minäkäsitys kehittyy positiivisesti. Päinvastoin ne, jotka kokevat epäonnistumisia matematiikassa, minäkäsitys heikkenee. (Linnanmäki 2004, 251.) Hyvin oleellinen huomio onkin että, oppilaan minuuden kehittäminen matematiikan opetuksessa vaatii oppimisympäristön laaja-alaista vaalimista, sillä oppilaan minuus on hyvin paljon sitä, mistä se peilautuu. (Tikkanen 2008, 33-34.)

2.4 Uskomukset matematiikan oppimiseen liittyen

Kuparin (1999) mukaan uskomukset ja uskomusjärjestelmät muodostuvat siitä kuinka ihminen ymmärtää itsensä ja ympäristönsä. Uskomusjärjestelmä tässä tarkoittaa yksilön kaikkia fyysistä ja sosiaalista todellisuutta koskevia jollakin tavalla psykologisesti organisoituneita uskomuksia (Kupari 1999, 9-12; Furinghetti & Pehkonen 2003, 40-41.) Tikkanen (2008, 40) kuvaa uskomusten muodostuvan kaikesta siitä mitä yksilö on havainnut, kokenut ja lukenut. Schlöglmann & Kepler (2007, 98) korostavat uskomuksien muodostumisessa erityisesti myös muiden yksilön kanssa tekemisissä olevien henkilöiden osuutta.

Oppilaiden matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvät uskomukset ovat totena pidettyjä implisiittisiä tai eksplisiittisiä subjektiivisia käsityksiä. (Tikkanen 2008, 40.) Oppilaiden näkemykset koulumatematiikan luonteesta vaikuttavat heidän käsityksiinsä siitä, kuinka matematiikkaa tulisi opettaa ja kuinka sitä opitaan. (Perkkilä 2002, 62.)

Pienet lapset uskovat todeksi sen minkä havaitsevat. Heidän mielestään havainnoiminen riittää perusteluksi sille miten asiat ovat. Juuri tämän lasten konkreettisen yhden kategorian uskomusjärjestelmän kehittymisen näkökulmasta on hyvä, että matematiikan opetuksessa opittavia asioita konkretisoidaan monipuolisesti. Tällöin lapsille muodostuu monipuolisia uskomuksia matematiikasta. (Tikkanen 2008, 40.)

Opettajan uskomukset vaikuttavat myös oppilaiden uskomuksiin. Kupari (2000) tutki väitöskirjassaan opettajien matematiikkauskomuksien ja käytännön opetustyön välistä yhteyttä. Hän luokitteli aineistostaan muun muassa perinteisiä uskomuksia ja uudistushakuisia uskomuksia. Tutkimuksessa kävi ilmi, että uudistushakuisemmat opettajat painottivat enemmän asioiden soveltamista ja perinteisemmät opettajat laskurutiineja. (Kupari 2000, 8-14.)

2.5 Motivaatio matematiikan oppimisessa

Motivaatio tarkoittaa syytä tehdä jotakin. Oppimismotivaatiota voidaan tarkastella pitkällä, tai lyhyellä aikavälillä. Opetuksellisilla ratkaisuilla pystytään kohottamaan motivaatiota hetkellisesti, mikä ei kuitenkaan automaattisesti tarkoita pysyvän motivaation löytymistä. (Abrahams 2009.) Motivaation merkitys oppimisessa on kiistaton. Innostunut oppilas oppii keskimäärin paremmin kuin innostumaton. Oppimisesta seuraa helposti innostuminen, mikä edelleen edistää oppimista. (Tikkanen 2008, 269.)

On todettu, että matematiikkainnostus laskee siirryttäessä alaluokilta eteenpäin. Yhtenä syynä tähän on esitetty matematiikan erkaantumista arkitodellisuudesta, jolloin sen merkitystä ja tarpeellisuutta ei niin selvästi nähdä. Yksi Vargan (1976) perusajatuksia on oppilaan arkitodellisuuteen perustuvien kokemuksien ja matemaattisten mallien käyttäminen. Esimerkkinä Varga mainitsee perehtymisen kartioon; tutustuminen esimerkiksi kartion muotoiseen vuoreen saattaa avata kartion ominaisuudet paremmin kuin pelkkä matemaattinen kartio. (Varga 1976, 171-177.)

Onnistuminen kognitiivisesti haastavassa tehtävässä ruokkii pysyvämmän kiinnostuksen ja motivaation löytymistä. Itsestäänselvyydet sen sijaan vähentävät kiinnostusta kuten myös liian korkea vaatimustaso. (Tikkanen 2008, 269.) Kiinnostus vähenee myös, jos opeteltava asia tarjotaan oppilaille valmiiksi pureskeltuna. Tikkasen mukaan viihtymistä matematiikan tunnilla edistää mahdollisuus keksiä ja oivaltaa. (Tikkanen 2008, 270.)

3 MATEMATIIKAN OPPIMISESTA YLEENSÄ

3.1 Matemaattisten taitojen kehitys

Lapsella on synnynnäisiä kykyjä hahmottaa lukumääriä. Toisaalta lasta ympäröi maailma, joka on täynnä erilaisia matemaattisia sisältöjä ja tilanteita. Lapsi käyttää näitä sisältöjä ja tilanteita usein jopa ilman aikuisen välitöntä ohjaustakin ammentaen matemaattiselle ymmärrykselleen suuntaa, välineitä ja kokemuksia. (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 198.) Konstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalta korostuu oppilaan aikaisempi tieto ja ne merkitykset, joita hän asettaa opiskeltaville asioille. Oppilas myös valikoi tietoa omasta ympäristöstään. Reflektoidessaan omaa toimintaansa, yksilö oppii ymmärtämään käsitteen sisällön. Toiminnan kautta taas muodostuu uusia käsitteitä. Jopa kuusi- ja seitsemänvuotiaiden on havaittu olevan melko kykeneviä muodostamaan syviä ymmärryksiä matemaattisista prosesseista ja osaavan omalla tavallaan ajatella algebrallisesti. (Hihnala 2005, 34.)

Vainionpää, Mononen ja Räsänen (2004) esittää mallin varhaisten matemaattisten taitojen kehittymisestä. Mallissa taidot on jaettu neljään osa-alueeseen, jotka muodostuvat osataidoista:

(1) Lukujenluettelutaito, joka muodostuu lukusanataidoista, lukusanan määrään liittyvän merkityksen ymmärtämisestä, luvuista muodostuvan lorun muodostamisesta, katkeamattoman lukujonon muodostamisesta (lista), katkaistavan lukujonon muodostamisesta (ketju) sekä lukujonon muodostamisesta.

(2) Laskutaito muodostuu laskemiselta näyttävästä toiminnasta, esineiden lukumäärän laskemisesta, lukumäärän määrittämisestä lisäämisen tai vähentämisen jälkeen sekä lukumäärien vertailusta laskemalla.

(3) Lukukäsite muodostuu, kyvystä havaita määriä, kyvystä erotella määriä, käsityksestä mitä voi laskea, kardinaalisuudesta, järjestyksen merkitsemättömyydestä ja lukumäärän säilyvyydestä

(4) Suhdekäsite muodostuu toiminnan kautta hahmottuvasta käsitetasosta, ominaisuuksien kautta hahmottuvasta käsitetasosta ja vertailun kautta hahmottuvasta käsitetasosta.

Käytännössä lukujonon oppiminen on keskeistä pienten lasten matemaattisen ajattelun kehittymisessä. (Aunio ym. 2004, 202-203; Räsänen & Ahonen 2002, 215; Vainionpää, Mononen & Räsänen 2004, 295.) Kehityksen alkuvaiheessa lapsi toistaa kuulemiaan sanoja ja näkemiään toimintoja. Tässä vaiheessa lukusanat eivät ole toisistaan irrallisia, vaan muodostavat lorunkaltaisen listan. Seuraavaksi lapsi alkaa tuottaa sanoja lukujonossa tavoitteellisemmin. Luettelu muuttuu pian laskemisen alkeiksi. (Aunio ym. 2004, 202-203.)

Lapsen kyetessä jo hyvin varhain lukujenluetteluun, hänen on kuitenkin huomattavan haastavaa yhdistää matemaattisia symboleita puhuttuun kieleen. Lapselle laskeminen ja päätelmät lukumäärästä ovatkin aluksi toisistaan erillisiä operaatioita. Tärkeä vaihe matemaattisen ajattelun kehityksessä on se kun lapsi hyödyntää laskemista lukumäärän määrittämiseen. Lapsen kyetessä aloittamaan lukujen luettelu muualta kuin ykkösestä, luvuilla voidaan sujuvasti laskea esineitä jopa ryhmittelemällä. Yhteen- ja vähennyslaskutehtävissä voidaan tällöin edetä kehittyneempiin laskustrategioihin. Lukujonotaitojen kehittynein vaihe saavutetaan, kun lapsi oivaltaa lukujen olevan toisiinsa merkityksellisesti liittyviä. (Aunio ym. 2004, 202-203.)

3.2 Matemaattisten taitojen osa-alueet

Kilpatrick, Swafford ja Findel (2001, 16-17) jakavat matemaattisen osaamisen viiteen tekijään:

(1) Konseptuaalinen ymmärtäminen, johon kuuluu ymmärrys matemaattisista käsitteistä, operaatioista ja näiden suhteista.

(2) Proseduraalinen sujuvuus, joka ilmenee taitona toteuttaa matemaattiset menettelytavat joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.

(3) Strateginen kompetenssi, joka sisältää taidon muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.

(4) Soveltava päättely, joka sisältää kyvyn loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selityksiin ja perusteluihin

(5) Yritteliäisyys, joka muodostuu yksilön ahkeruudesta ja tehokkuudesta seurauksena yksilön asenteesta nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja vaivanarvoisena.

Edellä mainitut matemaattisen osaamisen viisi tekijää ovat kietoutuneet toisiinsa ja ovat toisistaan riippuvaisia.

Leppäaho (2007) ja Joutsenlahti (2005) kirjoittavat, että oppilaan matemaattiset taidot ovat prosesseja, joita oppilaan matemaattiset kyvyt omalta osaltaan ohjaavat. Taidot edustavat lähinnä proseduraalista tietoa. Taito siis sisältyy tietoon. (Leppäaho 2007, 31; Joutsenlahti 2005, 89.)

4 GEOMETRIAN OPPIMINEN

Tässä luvussa perehdytään geometrianopetukseen ja oppimiseen. Luvussa tutustutaan esimerkiksi van Hielen geometrisen ajattelun kehittymistä kuvaavaan viisitasoiseen malliin. Myös empiiriset tutkimukset opettajien ja oppikirjan tekijöiden käsityksistä geometrian opettamisesta ovat tarkastelussa.

4.1 Geometrinen käsitetieto

Silfverbergin (1999) mukaan matemaattinen ymmärrys voidaan jakaa käsitetietoon ja menetelmätietoon. Käsitetiedolla tarkoitetaan matemaattisen käsiterakenteen eli käsitteiden keskinäisten suhteiden ymmärtämistä. Menetelmätieto liittyy erilaisiin toimintoihin ja taitoihin. (Silfverberg 1999, 65.)

Silfverberg tuo esille epäkohdan lukion ja peruskoulun työnjaossa; se on varsin selkeä laskennallisten valmiuksien osalta, mutta geometrisen käsitetiedon ja päättelyn oppimisessa on puutteita yläkoulun ja lukion nivelvaiheessa. Tutkimuksensa perusteella Silfverberg panostaisi enemmän geometrisen käsitetiedon opettamiseen jo alakoulussa. (Silfverberg 1999, 205.) Silfverberg toteaa, että jos opettaja arvostaa käsitetiedollisia tavoitteita, hän myös pitää niiden oppimisesta huolta. Muuten aika käytetään johonkin muuhun. (Silfverberg 1999, 206.)

Silfverberg arvelee, että geometrisen käsitetiedon tason nostaminen vaatisi muutoksia oppikirjamateriaaleihin ja opetusmetodeihin. Geometria ei saisi olla pelkkää laskemista. Tehtävien ja aktiviteettien tulisi olla monipuolisia. Niiden avulla pitäisi pystyä yhtäältä luomaan visuaalinen ja konkreettinen tulkintaympäristö geometriselle tiedolle, ja toisaalta oppia reflektoimaan omaa ymmärrystä, konstruoimaan itse käsitteiden määritelmiä, tekemään päätelmiä ja etsimään perusteluja. (Silfverberg 1999, 206.) Matemaattinen ymmärrys voi syntyä oppimisen eri vaiheissa hyvin eri tavoilla. Alkuvaiheessa perustana ovat reaalimaailman havainnot, myöhemmin geometrisen systeemin rakenne. (Silfverberg 1999, 19.)

4.2 Visuaalis-geometrisen tiedon prosessointi

Visuaalis-geometrisen tiedon prosessointiin vaikuttavia taustatekijöitä ovat Silfverbergin (1999) mukaan spatiaalinen ajattelu, looginen ajattelu ja visuo-spatiaalisen työmuistin kapasiteetti.

Spatiaalinen ajattelu kohdistuu Libenin (1981) mukaan avaruudellisiin suhteisiin tai käyttää niitä hyväksi. Usein spatiaaliseen ajatteluun kohdistuu visuaalinen aspekti. Spatiaalisen ajattelun apuneuvoina toimivat erilaiset representaatiot kuten geometriset kuviot, mallikappaleet, kartat, kaaviot, verbaalit kuvaukset ja niin edelleen. Varsinainen spatiaalinen ajattelu on kuitenkin Libenin mukaan tietoista spatiaalisten suhteiden hallintaan tähtäävää ajattelua, joissa representaatioilla on vain välineellinen rooli. (Liben 1981, 12.)

Looginen ajattelu voidaan jakaa kahteen päätyyppiin, induktiiviseen, eli yksittäisistä tiedoista yleiseen teoriaan suuntautuvaan, ja deduktiiviseen eli yleisestä teoriasta yksittäistapauksiin suuntautuvaan päättelyyn. (Silfverberg 1999, 117.) Simonin (1996) mukaan oppilaat käyttävät matemaattisten tehtävien ratkaisuissa päättelyä, jota ei voida pitää kumpanakaan edellä mainituista. Simon toteaa, että oppilaat näyttävät käyttävän päättelyssä konkreetin objektin fyysistä manipulaatiota muistuttavaa kuvitteellisen mentaalimallin muuttamista. (Simon 1996, 201.)

Visuo-spatiaalinen työmuisti nousee tärkeään rooliin koulugeometriassa, mikä on suurelta osin visuaalisen havainnoinnin ja käsitteellisen tiedon yhteen sulattamista. Työmuistissa kerrallaan käsiteltävien tietoyksiköiden maksimimäärä vaihtelee yksilöittäin. Yksilön kapasiteetin maksimaalinen käytettävyys kuitenkin vaihtelee olosuhteiden mukaan, sillä muun muassa muistettavan materiaalin laatu vaikuttaa työmuistin toimintaan. Alakouluikäisellä työmuistin toiminta ei vielä ole kehittynyt maksimitasolle. Iän myötä myös työmuistin käyttötapa tehostuu. (Silfverberg 1999, 126-129.)

4.3 Geometrisen ajattelun kehittyminen van Hielen mukaan

Silfverberg esittelee van Hielen teorian geometrisen ajattelun kehittymisestä. Se on kehitetty erityisesti tasogeometrian kontekstiin. Teorian mukaan geometrisen ajattelun yleispiirteet viidellä eri tasolla ovat seuraavat: (Silfverberg 1999, 27-28, 45)

Taso 1 (visualisoinnin taso)

Visualisoinnin tasolla kuvioita käsitellään kokonaisuuksina ja visuaaliseen havaintomaailmaan kuuluvina. Kuvioiden tunnistaminen, nimeäminen, lajittelu, vertailu, kuvailu yms. suoritetaan ulkomuodon, ei ominaisuuksien perusteella. Tasolla 1 osataan tunnistaa, nimetä ja piirtää geometristen peruskuvioiden tavanomaiset esimerkkitapaukset.

Taso 2 (ominaisuuksien analysoinnin taso)

Ominaisuuksien analysoinnin tasolla kuvioita tarkastellaan ominaisuuksien näkökulmasta. Ominaisuuksia keskinäisiin riippuvuussuhteisiin ei kuitenkaan kiinnitetä huomiota. Kuvioita osataan verrata keskenään niiden ominaisuuksien avulla eikä pelkän visuaalisen samankaltaisuuden tai erilaisuuden perusteella. Ominaisuuksien analysoinnin tasolla löydetään ja käytetään hyväksi kaikkia tiettyyn kuvioluokkaan kuuluvia ominaisuuksia.

Taso 3 (ominaisuuksien järjestämisen taso)

Ominaisuuksien järjestämisen tasolla kuvioiden ominaisuuksilla on loogisten suhteiden luomaa sisäistä järjestystä. Lyhyitä deduktiivisia päättelyitä pystytään käyttämään. Kuvioiden määritteleviä ominaisuuksia osataan käyttää hyödyksi, kun selvitetään, sisältyykö kuvioluokka toiseen vai ei.

Taso 4 (formaalin päättelyn taso)

Formaalin päättelyn tasolla hallitaan systemaattisen, deduktiivisen geometrian edellyttämä ajattelutapa. Tasolla 4 kyetään annetusta tiedosta päättelemään seurauksia ja todistamaan geometrisiä lauseita itsenäisesti. Geometrisessä ongelmassa annetut tiedot ja osoitettavaksi edellytetyt tiedot osataan erottaa toisistaan. Määritelmän, oletetun perusväittämän ja lauseen välinen ero ymmärretään, kuten myös lauseen ja sen käänteislauseen sekä ehtojen välttämättömyyden ja riittävyyden ero.

Taso 5 (aksiomisysteemin ymmärtämisen taso)

Aksiomisysteemin ymmärtämisen tasolla pystytään vertailemaan eri geometrioita keskenään tarkastelemalla niiden eroja ja yhtäläisyyksiä aksiomaattisina järjestelminä.

Omassa tutkimuksessaan Silfverberg lisäsi kokeiluluontoisesti yhden väliportaan van Hielen tasojen 1 ja 2 väliin. (vH1-2) Tälle tasolle sijoittuivat oppilaat, jotka tulkitsivat tarkasteltavien kuvioiden yhteisten geometristen ominaisuuksien muodostavan yleistyksen ainoastaan siinä kuviojoukossa, jota testiosion kuva konkreettisesti esitti. VH-tasoa 2 tulkittiin samalla tiukemman vaihtoehdon mukaan: Siihen sijoitettiin oppilaat, jotka kykenivät tarkastelemaan kuvioiden ominaisuuksia koko kuvioluokan yhteisinä ominaisuuksina. Tutkimuksessa käytetty kokeilutaso vH1-2 erottui empiirisessä tarkastelussa omaksi tasokseen yhtä hyvin kuin muutkin van Hielen tasot. (Silfverberg 1999, 197-198.)

Van Hielen teorian mukaan tasot ovat hierarkkisessa suhteessa toisiinsa, jolloin korkeammalle tasolle siirtyminen edellyttää aina ymmärrystä, joka on kehittynyt edellisillä tasoilla. (Silfverberg 1999, 31, 144.) ’Van Hieleläistä tasohyppely – ajattelua’ on myös kyseenalaistettu: Silfverberg tuo esille Gutierrezin johtaman tutkimusryhmän näkemyksen siitä, että geometrisessä ajattelussa tapahtuu kehittymistä kerrallaan useammalle kuin yhdelle van Hielen tasolle tyypillisissä piirteissä. Silfverbergin tutkimuksessa van Hielen tasojen välillä ilmeni hierarkiaa, muttei erityisen vahvaa sellaista. (Silfverberg 1999, 45, 144.)

Sierpinska (1994) esittelee Piaget’ta mukaillen kolme tasoa ymmärryksen rakentumisessa: intra-, inter- ja trans- tason (geometriakontekstissa intrafiguriaalinen, interfiguriaalinen ja transfiguriaalinen taso). Ensimmäisellä tasolla käsitellään ainoastaan tiettyä fyysistä kohdetta ja sen ominaisuuksia, esimerkiksi geometristä kappaletta. Toisella tasolla määrittyvät yksittäisten objektien keskinäiset suhteet. Kolmannella tasolla muodostetaan yleistys, teorianomainen käsitys aiheesta. Olipa uuden asian lähestymistapa miten konkreetti tai epäkonkreetti tahansa, ei ensimmäistä tasoa voi ohittaa ymmärryksen rakentumisessa.

(Sierpinska 1994, 106-107.) Piaget'n tasoajattelussa on paljon yhteneväisyyttä van Hielen tasojen kanssa. Piaget'n mallissa ajattelun kehitys esitetään kulkevan syklisesti, jossa trans-tasoa seuraa uusi intra-taso ja niin edelleen. Van Hiele taas esittää tasot kiinteämpinä, pysyvästi saavutettua ajattelun tasoa kuvaavina.

4.4 Geometrian opettamisesta

Van Hielen tasojen pohjalta on tehty pedagogista pohdintaa: Pehkonen (1985) esittää, että geometrian opetuksessa alakoulussa pysyteltäisiin pääsääntöisesti ensimmäisen van Hielen tason toiminnoissa. Neljä ensimmäistä vuotta perustuisi konkreettiin työskentelyyn, ja vuosiluokilla 5-6 siihen mennessä opitut geometriset käsitteet pyrittäisiin systematisoimaan sekä oppimaan geometriassa käytettävää sanastoa ja merkintöjä. (Pehkonen 1985, 59-68.)

Haapasalon (1993) esittämien metodisten suositusten mukaan jo kolmannen luokan aikana tapahtuisi useimpien oppilaiden kohdalla siirtymistä visualisoinnin tasolta analysoinnin tasolle. Varsinainen deduktiivisen päättelyn harjoittelu tapahtuisi yläkoulun aikana. Silfverberg (1999) tulkitsee Haapasalon käsityksen niin, että kuudennen vuosiluokan loppupuolella valtaosa oppilaista olisi siirtynyt tai siirtymässä kolmannelle van Hielen tasolle. (Silfverberg 1999, 47-48.) Sekä Haapasalo, että Pehkonen esittävät, että peruskoulun aikana valtaosan oppilaista tulisi päästä kolmannelle van Hielen tasolle, etevimmät jopa neljännelle. (Haapasalo 1993; Pehkonen 1985, 68-69.)

Silfverberg (1999, 201) havaitsi kuitenkin tutkimuksessaan, että jokaiselta yläkoulun luokkatasolta löytyy huomattava määrä oppilaita, jotka eivät yllä edes van Hielen tasolle 1, ja ainoastaan 15 % yläkoululaisista kuuluu kolmannelle (ominaisuuksien järjestämisen tasolle) tai sitä ylemmälle van Hielen tasolle. Enemmistö yläkoulun oppilaista on van Hielen tasoilla 1 tai 2.

Malaty (1993) toteaa ajattelun kehittämisen jääneen koulumatematiikassa kaavamaisen laskemisen alle. Hänen mukaansa oppikirjoissa jäädään usein ”tietämisen” tasolle. Tiedetään miten tehdään, muttei pyritä ymmärtämään miksi näin tehdään. Malatyn mukaan koulussa ei muodosteta geometriassa yhtenäistä, ymmärrettävää rakennetta. Oppikirjoissa, joihin opetus pitkälti perustuu, keskitytään piirien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen. Malatyn mielestä ymmärtäminen on kuitenkin matematiikan tärkein tavoite. (Malaty 1993, 12-15, 46-48.) Räty-Záborszky (2006, 250) ei jättäytyisi opettajana pelkän oppikirjan varaan. Hän pitää tärkeänä, että geometriassa hankitaan kokemuksia käsin erilaisten materiaalien ja välineiden avulla.

4.5 Geometrian oppimisesta

Andrews (1996) toteaa, että joillakin opiskelijoilla on vaikeuksia avaruudellista hahmottamista vaativissa tehtävissä. Yhdeksi syyksi hän arvelee sen, ettei oppilaille ole tarjottu mahdollisuuksia hankkia kokemuksia kolmiulotteisista kappaleista varhaislapsuudessa. Myös Sierpinska (1994) Toteaa, että varhaisilla kokemuksilla on suuri merkitys hahmottamiskykyyn. Hän viittaa tutkimuksiin, joissa on todettu sokeina syntyneiden ja myöhemmin näkökyvyn saaneiden ihmisten vaikeuksista erottaa kolmiota neliöstä. (Sierpinska 1994, 101-102.) Ben-Chaim, Lappan ja Houang (1988) kuitenkin osoittavat, että avaruudellista hahmottamista voi oppia myöhemminkin, yläkoulu- ja lukioiässä, käyttämällä konkreettisia geometrisiä kappaleita sisältäviä aktiviteetteja.

Ben-Chaim, Lappan ja Houang (1985) tutkivat avaruudellista hahmottamista. Tutkimuksessa kävi ilmi, että hieman alle puolet 5-8 -luokkalaisista osaa määritellä oikein, kuinka monesta pienestä kuutiosta jokin isompi kuutiorakennelma koostuu. Tyypillisimmin virheet johtuivat kolmiulotteisen hahmottamisen ongelmista; kolmiulotteiseksi piirretty rakennelma joko nähdään kaksiulotteisena tai piirroksen piilossa olevia rakenteita ei huomioida. Battista ja Clements (1996) havaitsivat, että kaksi kolmesta kolmasluokkalaisesta ja viidennes viidesluokkalaisista ei osannut hahmottaa kolmiulotteisesti piirrettyä rakennelmaa selkeästi yhtenä kappaleena. Battista ym. (1996) toteavat, että avaruudellisen käsityksen rakentuminen (*spatial structuring*) perustuu pitkälti yksilön omiin toiminnallisiin kokemuksiin ja niiden kautta syntyviin aktiivisiin ajatusprosesseihin (*active process of putting in relation*).

4.6 Opettajien käsityksiä geometrian opettamisesta

Räty-Záborszky (2006) tutki suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja oppikirjantekijöiden käsityksiä geometrian opettamisesta. Suomalaisten osalta tutkimuksessa korostuivat käsitykset oppikirjasta. Suomalaisopettajien mukaan geometrian asema oppikirjoissa ei ole kovin merkittävä. Geometria koetaan kaavamaiseksi, mekaaniseksi, muuttumattomaksi, pintapuoliseksi ja laskemispainotteiseksi. Tällöin opetus keskittyy tehtäviin ja niiden suorittamiseen. (Räty-Záborszky 2006, 246.) Edellä viitattiin Malatyn (1993) samansuuntaisiin käsityksiin siitä, millaista geometrian opettaminen kouluissa on.

Suomalaisopettajat toivat esille geometrian olevan ajattelua ja sen kehittämistä sekä hahmottamista ja tarve jokapäiväisessä elämässä. Suomalaisopettajien keskusteluista välittyi käsitys, että geometriassa probleemia ratkaistaan mekaanisesti. Unkarilaisten opettajien käsityksissä painottui eniten ajattelun ja hahmottamisen kehittäminen. (Räty-Záborszky 2006, 239.)

Unkarilaisopettajien mielestä geometriassa korostuvat yhteydet arkipäivän tilanteisiin ympäristössä. Geometrian todettiin olevan toiminnallisuutta ja konkreettisuutta, koska geometria kytketään vahvasti todellisuuteen ja toiminnallisuuteen. Geometriassa luodaan ja nähdään kuvioita. Näistä saa kokemuksia parhaiten tutkimalla ja toimimalla. (Räty-Záborszky 2006, 239; vrt. Pehkonen 1985**)**

Suomalaisten opettajien mukaan geometrian opetuksen lähtökohtana on oppilaan fyysinen elinympäristö. Geometrian opetus ja oppiminen korostavat monipuolista toiminnallisuutta ja konkreettisuutta ja myös kielitaidon tärkeyttä. Oppilailla on hyvä olla apuna toimintamateriaalia. Hyvä menetelmä ja konkreettinen materiaali saavat oppilaan toimimaan ja ajattelemaan. (Räty-Záborszky 2006, 239.) Suomalaisopettajat näkivät kuitenkin geometrian opetuksen ja oppikirjan ongelmallisuuden melko merkittävänä, ja geometrian etenemisessä koetaan ristiriitaisuutta. Ratkaisuprosessia ei koeta tärkeänä vaan ratkaisun lopputulosta. Geometrian opetuksessa ja oppimisessa mainittiin myös käsitetietouden tärkeys. Matemaattinen ajattelu ei kehity, jos käsitteitä ei hallita.(Räty-Záborszky 2006, 239-240.)

Unkarilaiset opettajat painottivat etenemisprosessia geometrian opetuksessa. Geometrian opetus ja oppiminen rakentuu pala palaselta ja lähtökohtana on oppilaan oma fyysinen ympäristö. Arkielämän kokemuksilla on hyvä vaikutus avaruudellisen tajun kehittymiseen. Vahva käsitetietous luo hyvän pohjan geometrian oppimiselle ja ymmärtämiselle. (Vrt. Silfverberg 1999) Menetelmien ja oppilaan aktiivinen rooli korostuu geometriassa. (Räty-Záborszky 2006, 239-240.)

Opettajat toivat esille, että geometrian opettamista pelätään, ja että sitä on vaikea opettaa ja oppia, vaikka oppilaat ovatkin motivoituneita. Geometria vaatii opettajalta enemmän valmistautumista. Geometriassa painottuvat menetelmien monipuolisuus, konkreettisuus ja toiminnallisuus, jolloin oppilaan aktiivinen rooli korostu. (Räty-Záborszky 2006, 240-241.)

4.7 Oppikirjantekijöiden käsityksiä geometrian opettamisesta

Suomalaiset oppikirjojen tekijät kertoivat heikosta geometriaperinteestä ja geometrian vähäisestä arvostuksesta. He kokivat tällä olevan vaikutusta myös oppikirjan tehtäviin ja koulussa käytettäviin työtapoihin. Oppikirjantekijöiden mielestä geometriassa korostuvat arkielämä, ongelmanratkaisu sekä konkreettinen, toiminnallinen opetustapa. Ymmärtämisen tueksi oppilas tarvitsee erilaisia materiaaleja ja aktivoivaa toimintaa Oppikirjan tekijät eivät ole varmoja, toteutetaanko niitä koulussa. (Räty-Záborszky 2006, 242.)

Unkarilaiset oppikirjan tekijät korostivat järjestelmällisesti opetettavaa ja rakennettavaa ajattelua. Ajattelu ja luovuus ovat oppimisen ytimessä. Oppikirjan tekijöiden näkemyksissä esiintyi tärkeänä visuaalinen ajattelukyky, jossa geometrialla on merkittävä rooli. Geometrian ajatellaan kehittävän joustavaa ongelmanratkaisua ja visualisointitaitoja. Geometrian painottuminen oppikirjassa on perinteisesti vahva. (Räty-Záborszky 2006, 242.)

Suomalaisten oppikirjan tekijöiden käsityksissä opetuksen lähtökohtana painottuivat oppilaslähtöisyys, konkreettisuus ja geometriset kappaleet. Konkreettisuuden ja toiminnallisuuden koettiin olevan tärkeitä. Oppikirjan tekijöiden mielestä opettajilla on negatiivinen suhtautuminen geometrian opettamiseen. Sitä myös pidetään vaikeana. (Räty-Záborszky 2006, 242.)

Unkarilaiset oppikirjan tekijät korostivat opetus- ja oppimisprosessia sekä käsitetietouden rakentamista. Vaiheittainen eteneminen ja spiraaliperiaate nousevat esiin. Oppiminen on kumulatiivista, ja lopputuloksena on systemaattinen rakenne. (Räty-Záborszky 2006, 243.) Dienesin esittämät matematiikan oppimisprosessin kuusi vaihetta (esitellään luvussa 8.2) näkyvät unkarilaisoppikirjojen geometrian osuudessa. Matematiikan systemaattinen rakenne heijastuu käsitteiden opetuksessa ja oppimisessa.

Käsitesysteemi on täsmällinen ja hierarkkinen, ja uusia käsitteitä opitaan aikaisemmin opittujen käsitteiden avulla laajentaen ja syventäen. Tämä vaatii toimintamateriaalien käyttämistä. Unkarilaiset oppikirjan tekijät pitävät tärkeänä geometrian merkitystä oikean aivopuoliskon kehittäjänä, koska siellä koetaan ja käsitellään avaruudellis-geometriset ja visuaaliset informaatiot. (Räty-Záborszky 2006, 243-244.)

5 VARGA-NEMÉNYI -MENETELMÄ

5.1 Varga-Neményi -menetelmän taustaa

Matemaattinen kasvatus oli Euroopassa ja muuallakin maailmassa melko yhtenäistä vielä 1950-luvulle asti. Varhain 1960-luvulla yhtenäisyys jakaantui kahtia: itäiseen ja läntiseen matematiikan kasvatukseen. Matematiikan opetus nousi keskipisteeksi USA:ssa ja Länsi-Euroopassa Neuvostoliiton laukaistua Sputnikin avaruuteen 1957. Tämä sai aikaan uudistusliikkeen ”New Math” eli ”uusi matematiikka”. Perkkilän (2002) mukaan uusi matematiikka levisi länsimaihin Yhdysvaltojen kautta. Suomessa toteutettiin uuden matematiikan nimissä pohjustettu matematiikan opetuksen uudistus hieman ennen peruskoulu-uudistusta 1970-luvulla. (Räty-Záborszky 2006, 24-25, 92; Perkkilä 2002, 23.)

Uusi matematiikka yhdisti käytännön laskemisen ja puhtaan matematiikan. Matemaattisesti oikeita käsitteitä pyrittiin ottamaan käyttöön jo alemmilla luokilla. Samanaikaisesti laajennettiin yleisiä ja tiedollisia tavoitteita. Korkeakoulutason aiheet, joukko-oppi ja lukuteoria, liitettiin ala-asteen matematiikan opetukseen. Uuden matematiikan tehtävänä oli myös nopeuttaa ja parantaa matematiikan opetusta ja tieteiden ja tekniikan kehitystä. Matematiikan uudistus poisti käytännössä kolmijaon aritmetiikka, algebra ja geometria. Tilalle tuli yksi oppiaine matematiikka. Tavoitteena oli siis tehostaa matematiikan opetusta. Yksi seurauksista oli, että joukko-opin määrän lisäämisen myötä peruslaskutoimitukset unohdettiin.(Räty-Záborszky 2006, 24-25, 92; Perkkilä 2002, 23.)

Unkarissa kyseistä tilannetta ei hyväksytty sellaisenaan vaan siellä käynnistyi matematiikan reformiliike. Unkarin matematiikan opetuksen kehittäjänä toimineen Tamás Vargan ideana oli uuden matematiikan opetussuunnitelman jatkuvuus, joka tunnetaan nimellä kompleksinen opetussuunnitelma. Kompleksisessa matematiikan opetuksessa huomioitiin matematiikan eri alueet, tehtävät, luokkatyöskentely, välineet ja spiraaliperiaate. Tässä menetelmässä kaikki sisällöt ja käsitteet opetetaan monella eri menetelmällä erilaisten välineiden avulla. Kaikkiin matematiikan osa-alueisiin palataan yhä uudestaan lähestymällä niitä uudesta näkökulmasta ja liittämällä niihin uusia asiayhteyksiä. (Räty-Záborszky 2006, 24-25, 92, 98-99.)

5.2 Suomen ja Unkarin koulujärjestelmät

Suomen koulujärjestelmässä merkittävin muutos tapahtui vuonna 1972, jolloin Suomessa siirryttiin peruskoulujärjestelmään. Tämä tarkoitti kansakoulujen ja oppikoulujen viiden alimman luokan eli ns. keskikoulujen yhdistämistä. Seuraava suuri uudistus on yhtenäisen peruskoulun opetussuunnitelman käyttöönotto viimeistään syksystä 2006. Siinä perusasteen opetus jakautuu vuosiluokkiin 1-6 ja 7-9. Yhtenäisen perusopetuksen pyrkimyksenä on turvata oppilaan eteneminen joustavasti koko opintojen ajan sekä ehkäistä syrjäytymistä. (Räty-Záborszky 2006, 21.)

Unkarissa pyritään jo päiväkodissa varmistamaan, että tulevilla ensiluokkalaisilla on koulun aloittamista varten tarvittavat taidot ja tiedot ja myös tarpeellinen kyky keskittyä. Kaikille pyritään antamaan tietyn perustason valmiudet. (Herold 2002, 20.)

Kaikkiaan unkarilainen kuten suomalainenkin koulujärjestelmä on kokenut muutoksia. Vanhaa sosialismin aikaista systeemiä on purettu vähitellen vuodesta 1989. Purkamisen ohessa uusia systeemejä on kehitetty koko ajan. Unkarissa koulujen välillä on eroja ja kousysteemejä on useita rinnakkain. Kunnallisten koulujen rinnalle on tullut erilaisia yksityiskouluja, vieraskielisiä kouluja ja eri kirkkokuntien ylläpitämiä kouluja. Suuremmissa kaupungeissa voi valita eri vaihtoehdoista. (Räty-Záborszky 2006, 22-23.)

Unkarissa vanhemmat vastaavat koulunkäynnistä taloudellisesti, mikä tarkoittaa sitä, että vanhemmat ostavat kaikki koulutarvikkeet. Myös ruoka on maksullista. Joihinkin kouluihin pääsee vain pääsykokeiden kautta. Yleisin oppivelvollisuuskoulu Unkarissa on kahdeksanvuotinen yleissivistävä koulu, joka on jaettu alakouluun ja yläkouluun. Molemmat ovat kestoltaan nelivuotisia. Tätä kutsutaan perusasteen koulutukseksi. Unkarissa peruskoulun neljää alinta luokkaa opettaa yleensä luokanopettaja ja neljää ylintä luokkaa aineenopettajat. Peruskoulutuksen jälkeen oppilas voi pyrkiä nelivuotiseen lukioon tai kolmivuotiseen ammattikouluun. Jos oppilas ei halua jatkaa opintojaan peruskoulun jälkeen, hän opiskelee vielä kaksi vuotta erilaisia käytännön aineita peruskoulussa. Oppilaalla on mahdollisuus pyrkiä peruskoulun neljännellä luokalla kahdeksanvuotiseen lukioon tai kuudennella luokalla kuusivuotiseen lukioon. (Räty-Záborszky 2006, 22-23.)

Suomessa oppivelvollisuus alkaa sinä vuonna jona lapsi täyttää seitsemän vuotta. Oppivelvollisuus suoritetaan yhdeksänvuotisessa peruskoulussa, jonka jälkeen oppivelvollisuus päättyy nuoren täyttäessä 16 vuotta. (Räty-Záborszky 2006, 22.) Unkarissa taas oppivelvollisuus alkaa sinä vuonna, jona lapsi täyttää kuusi vuotta ennen kuluvan vuoden elokuuta. Unkarissa oppivelvollisuus päättyy nuoren täyttäessä 16 vuotta. (Räty-Záborszky 2006, 22-23.)

5.3 Suomen ja Unkarin opetussuunnitelmat

Unkarin perusasteen vuosiluokkien 1-6 matematiikan yleiset tavoitteet perustuvat Unkarin kansalliseen opetussuunnitelmaan vuodelta 1995. (Räty-Záborszky 2006, 28.) Suomen perusasteen vuosiluokkien 1-6 matematiikan yleiset tavoitteet perustuvat Räty-Záborszkyn aineistossa vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteisiin. (Räty-Záborszky 2006, 26.)

Suomen ja Unkarin vuosiluokkien 1-6 matematiikan opetussuunnitelmien yleisissä tavoitteissa selkeä ero on nähtävissä tekstin määrässä, sillä Suomen opetussuunnitelmassa tavoitteita ei esitetä niin tarkasti, sisältöpainotteisesti ja luokkakohtaisesti kuin Unkarissa. Molemmissa maissa korostetaan ajattelua. Suomen opetussuunnitelmassa se tarkoittaa johdonmukaista ja täsmällistä ajattelua, Unkarin opetussuunnitelmassa joustavaa ja kurinalaista ajattelua. (Räty-Záborszky 2006, 33.)

Suomen peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa matematiikan osalla toisen vuosiluokan jälkeen tavoitteena on, että oppilas pystyy tekemään perusteltuja päätelmiä ja selittämään toimintaansa ja osaa esittää ratkaisujaan konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, suullisesti ja kirjallisesti (POPS 2004, 159). Samoihin teeseihin vedotaan myös unkarin opetussuunnitelmissa, joten opetussuunnitelmatasolla eivät unkarilainen ja suomalainen matematiikan opetus- ja oppimistapa poikkea juuri toisistaan. (Räty-Záborszky 2006, 24-31.)

5.4 Varga-Neményi -opetusmenetelmä

Unkarilaisen matematiikan uranuurtajina toimineiden Tamás Vargan ja Eszter Neményin kehittämää menetelmää on käytetty laajalti Unkarissa; siitä tuli ainoa sallittu matematiikan opetusmenetelmä vuosina 1978-1989. (Tikkanen & Lampinen 2005, 78-79.) Pakollisuuden loputtua moni unkarilaisopettaja valitsi helpomman tien, ja nykyään menetelmää kokonaisuudessaan käytetään 70-80 eri koululla Unkarissa. Paljon enemmän on niitä, jotka käyttävät menetelmää osittain. Valtaosa Unkarissa käytössä olevista opetussuunnitelmista perustuu joka tapauksessa Varga-Neményi -menetelmään. (Lampinen & Korhonen 2010, 22.)

Varga-Neményi -opetusmenetelmän pedagogiset periaatteet ovat Tikkasen (2008, 66) mukaan:

- Todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen
- Abstraktion tie
- Toimintavälineiden runsas käyttö
- Laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus
- Lupa erehtyä, väitellä ja iloita
- Oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioiminen
- Opettaja ja matematiikan opetus

Varga-Neményi -menetelmässä nähdään tärkeänä kiinnittää huomio siihen, mitä lapsi jo osaa opetusjakson alussa. (Lampinen ym. 2010, 20.) Lähtökohtina ovat myös matemaattinen ajattelutapa ja oppilaan aktivointi. Vargan yksi perusidea matematiikan opetuksessa oli se, että oppilaita täytyy auttaa nauttimaan matematiikasta ja saada heidät huomaamaan matematiikan kauneus. Oppilaille täytyy tarjota mahdollisuus vapaaseen ja luovaan toimintaan. Oppilaan suorittaessa itse tehtävää hänelle syntyy mielikuva, johon palaamalla yritetään seuraavassa vaiheessa rakentaa abstraktimpaa ja täsmällisempää käsitettä. Puhutaan abstraktion vaiheittaisesta etenemisestä – yksi Varga-Neményi -menetelmän perusajatuksista. Käsitteen muodostuksen pohjalla on vaiheittainen prosessi, joka perustuu kokemukseen. (Tikkanen 2008, 65-87; Risku 2001; Lampinen ym. 2010, 19-21.)

Ensimmäinen vaihe on aina konkreettista tekemistä kuten asian havainnollistamista leikkimällä tai pyytämällä lapsia itse tekemään kehollaan jotain. Käytetään mahdollisimman paljon eri aisteja. Luokka voidaan esimerkiksi jakaa kahtia asettamalla lapset kahteen jonoon. Tarkistetaan, ovatko ryhmät yhtä suuret ottamalla paria käsistä kiinni ja katsotaan, löytyykö kaikilla pari. Tämä toimii johdatuksena parillinen - pariton - käsitteisiin. (Risku 2001; Lampinen ym. 2010, 19-21.) Kyseinen Varga-Neményi -menetelmään kuuluva ajattelutapa, käytännönläheisyys matematiikan ymmärtämisessä, ei ole vieras suomalaisellekaan opetukselle. (Risku 2001).

Toisessa vaiheessa sama asian tehdään välineillä, kuten tikuilla, pahvikiekoilla tai pavuilla. Edellisen esimerkin tapaan voidaan muodostaa pareja vaikkapa kahdesta ryhmästä tulitikkuja. Vasta kolmas vaihe on saman asian tarkastelu kuvasta. Kuten jo aiemminkin todettiin, kuva on lapselle abstraktio. Sen vuoksi tämä ei ole abstraktion portaiden ensimmäinen vaihe. (Risku 2001.)

Näätäsen ja Szalontain mukaan Vargan ajatuksena oli integroida eri alueita kuten joukot ja logiikka, luvut ja operaatiot, geometria ja mittaaminen, relaatiot ja funktiot sekä jonot, kombinatoriikka, todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede. 1970-luvulla Unkarissa oli jopa muodissa ajatus, että jokaisella oppitunnilla tulisi esittää jotain jokaisesta näistä, mikä ei kuitenkaan toiminut. (Näätänen & Szalontai 2002, 13-16.)

Varga-Neményi -menetelmä vaatii paljon opettajalta, koska se edellyttää jatkuvaa tilanteessa elämistä. Varsinkin kokemattoman opettajan on suunniteltava opetuksensa huolella. Oppilaiden edetessä tehtävät tulevat abstraktimmaksi, mutta alkuvaiheessa käytetään oppilaan omaa kokemuspiiriä, aisteja ja käsiä apuna. Opettajan on osattava erottaa oppilaiden oikeansuuntaiset mutta epätarkat ideat vääristä. Hänen on oivallettava nopeasti, onko etenemissuunta oikea ja pystyttävä innostamaan eritasoisia oppilaita. (Näätänen 2000, 16-17; Lampinen ym. 2010, 21-22.)

Varga-Nemenyi –mentelmän mukaista esi- ja alkuopetusta on kokeiltu muun muassa Hösmärin päiväkodissa ja Sunan koululla. Espoon ja Helsingin opetustoimien yhteishankkeena käynnistettiin vuonna 2000 *Matikkamaa* –niminen toimintaidea matematiikan opetuksen kehittämiseksi. Varga-Nemenyi- menetelmä on yksi sen pedagogisista taustavaikuttimista. (Ojala 2004.)

Vargan ajatuksena oli integroida eri alueita kuten joukot ja logiikka, luvut ja operaatiot, geometria ja mittaaminen, relaatiot ja funktiot sekä jonot, kombinatoriikka, todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede. 1970-luvulla Unkarissa oli jopa muodissa ajatus, että jokaisella oppitunnilla tulisi esittää jotain jokaisesta näistä. Tulokset eivät olleet hyviä, mutta myöskään vastakohta, eli pitäytyminen ainoastaan yhdessä matematiikan teemassa kerrallaan ei ole tehokasta. Keskitie on paras, ja jos mahdollista, tulisi tunnin pääteema sitoa muihin aiheisiin mielenkiinnon ylläpitämiseksi. (Näätänen & Szalontai 2002, 13-16.)

5.5 Varga-Neményi -menetelmän käyttäminen vaatii perehtymistä

Varga-Neményi -menetelmä ja sen onnistunut käyttö edellyttää opettajilta ja etenkin aloittelijalta paljon työtä. Näätäsen mielestä on vaarana, että unkarilaisen menetelmän leikistä ja hauskuudesta innostutaan, ja poimitaan hauskoja makupaloja sieltä täältä. Hän jatkaa, että menetelmän kanssa pitkään toiminut voi toimia kokonaan ilman oppikirjaa. Näätäsen mukaan Varga-Neményi -menetelmä on systemaattinen kokonaisuus, jonka hajottaminen palasiin ja eri järjestyksessä uudelleen kokoaminen tai välistä osan poisjättäminen merkitsisi ehkä vain huononnusta verrattuna nykyisin käytössä olevaan, lukuja painottavaan käytäntöömme. (Näätänen 2001.)

6 SUOMALAISEN MATEMATIIKAN OPETUKSEN VERTAILUA VARGA-NEMÉNYI -MENETELMÄÄN

Tässä osassa vertaillaan suomalaista matematiikanopetusta Varga-Neményi –menetelmään Minkälainen onkaan ”suomalainen” tyyli opettaa matematiikkaa, jota käytämme toisena vertailuparina? Kysymykseen ei löydy kovin yksiselitteistä vastausta – erilaisia opetusfilosofioita löytyy suomalaisilta opettajilta paljon. Pyrimme kuitenkin hahmottelemaan tyypillisimmin ilmeneviä eroavaisuuksia. Kun puhumme Unkarissa tapahtuvasta matematiikan opetuksesta, tarkoitamme Varga-Neményi -menetelmää.

6.1 Oppikirjan rooli

Suomessa alakoulun matematiikanopetus toteutuu pitkälti oppikirjojen muodostaman opetusrungon pohjalta. Opettajat luottavat oppikirjojen valmiiksi tehtyihin tuntisuunnitelmiin. Oppikirjan käytössä on kenties suurin ero Unkarin ja Suomen matematiikan opetuksen välillä. Erityisesti tämä on nähtävissä alkuopetuksessa. Unkarissa oppikirja nähdään opetuksen apuvälineenä. Oppikirjan asemesta unkarilaisessa matematiikan opetuksessa käytetään varsinkin alkuopetuksessa "työkalupakkia", josta löytyy monenlaista materiaalia: nappeja, papuja, erilaisia kortteja, arpakuutioita, legoja, narua, askartelutikkuja, kuminauhoja, mittanauha, pelinappuloita jne. Lisäksi käytetään loogisia paloja (erivärisiä, pieniä geometrisia kuvioita) sekä värillisiä, eripituisia sauvoja. Konkreettisten välineiden avulla lapsi itse havainnollistaa käsittelyssä olevia ilmiöitä. Tavoitteena on, että lapsi on koko ajan aktiivinen osallistuja. (Risku 2001; Räty-Záborszky 2006, 239-246.)

6.2 Opettajan rooli ja opetuksen interaktiivisuus

Unkarissa toimitaan Suomea enemmän opettajajohtoisesti. Oppikirjojakin toki käytetään, mutta etenkin alkuopetuksessa niiden rooli on pieni. Pelkkiä numerolaskuja on kirjoissa vähän, ja niiden sijasta on paljon ongelmanratkaisu- ja päättelytehtäviä. Jo neljännen luokan oppisisällöt ovat huomattavasti vaativampia ja käsittelevät laajemmin matematiikan eri aloja kuin Suomessa. Tehtävien tärkeimmät ominaisuudet ovat monipuolisuus ja mahdollisuus erilaisiin muunnelmiin. (Szalontai 2002a.) Unkarissa tuntityöskentelyssä on vahvasti mukana koko luokan yhteishenki ja yhteinen työskentely. Unkarissa ajatellaan, että opettajan tulisi olla koko ajan perillä jokaisen oppilaan työskentelystä ja ymmärryksestä. Aikaa tähän ei voi kuitenkaan uhrata liikaa. Esimerkiksi päässälaskun tuloksen tarkistus tapahtuu näyttämällä lukukortteja, joista opettaja näkee nopeasti tilanteen. (Näätänen 2000, 16-17; Lampinen ym. 2010, 21-22.)

Szalontain (2002) mukaan interaktiivisuus on tärkeää opettamisessa. Opetuksessa voidaan käyttää esimerkiksi ongelmanratkaisutehtäviä, joita voidaan ratkoa yhdessä koko luokan kanssa. Tämä on Unkarissa vallitseva ja Szalontain mukaan itsenäistä ongelmanratkaisua suositeltavampi tapa. (Näätänen & Szalontai 2002, 13-16.)

Szalontai ja Näätäsen toteavat, että oppilaille tulisi järjestää paljon omaa työtä, mutta siten, että erilliset osatehtävät tai toiminnot annetaan pienissä erissä, ja koko luokka tai tasoryhmä toimii saman ongelman parissa. Tehtävän tai probleeman jälkeen alkaa koko luokan keskustelu. Oman työn rooli ja tarkoitus on kehittää ongelman ratkaisua ja luovuutta sekä kehittää kirjallisia taitoja ja kykyjä. Yhteiskeskustelun rooli ja tarkoitus on kehittää sanallisia kykyjä ja taitoja, rohkeutta ja matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä, todeta väärinkäsitykset ja virheellinen ajattelu sekä antaa palautetta ja ohjata oppimisprosessia. Näin rakennetaan matematiikan rakennetta ja estetään vaara sirpaloituneesta tiedosta. Opettajan tulisi päästä selville kunkin oppilaan tuloksista. Erilaiset ratkaisuideat ja ajattelutavat kerätään yhteiseen tarkasteluun. (Näätänen & Szalontai 2002, 13-16.)

6.3 Matematiikan opetuksen integrointi äidinkieleen

Eräs Varga-Neményi -metodin piirre on matematiikan opetuksen integrointi muihin aineisiin. Onkin melko vaikeaa vetää rajaa siihen, mihin esimerkiksi äidinkieli loppuu ja matematiikka alkaa. Joskus rajanvetoa tehdään turhaankin. (Ojala 2004, 1-4.) Unkarissa integrointi äidinkieleen on hyvin keskeistä. Lapset kertovat paljon ajattelustaan ja päättelystään sekä perustelevat vastauksiaan. Äidinkielen käyttö ja päättely kulkevat käsi kädessä. Suomalaisesta käytännöstä poiketen myöhemmin vastaan tulevia matematiikan käsitteitä kuten *yhtälö, epäyhtälö, lukusuora* ja *jaollisuus* pohjustetaan jo alkuopetuksessa. Näin käsitteet saavat tuekseen konkreettisen mielikuvan ja ehtivät "kypsyä". Matematiikan ilmiöitä lähestytään myös väärien vastauksien ja virheellisten päätelmien kautta. Pyrkimys on kehittää pienten oppilaiden luontaista uteliaisuutta ja tiedonhalua. (Näätänen 2001, 14-19.)

6.4 Lukualueet ja matemaattiset aiheet

Suomessa käydään ensimmäisen kouluvuoden aikana läpi luvut 0 – 100. (Vähäpassi, Hartikainen & Häggblom 1998, 200-201.) Unkarissa pysytellään paljon pitempään lukualueella 0 – 20. Lukukäsitettä pohjustetaan huolella pienillä luvuilla. Tällöin saadaan myös esille yleisesti päteviä lukujen ominaisuuksia, kuten yhteenlaskun vaihdannaisuus. Laskutoimitusten ymmärtämistä pohjustetaan konkreettisten toimintojen ja pienten tarinoiden avulla, nappuloilla pelaamisella ja kuvien avulla esitetyillä kertomuksilla. Vasta tämän jälkeen on vuorossa lausekkeiden kirjoittaminen numeroin. (Näätänen 2001, 14-19.)

Unkarissa käytetään Suomea enemmän jo alkuopetuksessa matemaattisia aiheita kuten joukot ja logiikka, funktiot, todennäköisyys, kombinatoriikka. Muita unkarilaisessa alkuopetuksessa käytettäviä, mutta Suomessa vähemmän esiintyviä menetelmiä ovat esimerkiksi nopeusharjoitukset luettelemalla lukuja peräkkäin, takaperin, yhden, kahden tai useamman välein. Myös erilaisia ryhmittelyharjoituksia käytetään. Yhtä suurten lukujen summa, luvun puolikkaan vähentäminen, yhdellä suuremman ja yhdellä pienemmän luvun lisääminen ja vähentäminen, yhteen- ja vähennyslaskun yhteys ja usean yhteenlaskettavan järjestyksen vaihtaminen tulevat myös ensimmäisenä vuonna opetettavaksi Unkarissa. (Näätänen 2000, 16-17.)

Matematiikkaa opetetaan Suomessa operoimalla paljon lukujen parissa. Oppikirjojen sisältö on useimmiten toimintaa luvuilla, jolloin myös pyritään nopeasti suuriin lukuihin. Lukujen ominaisuuksia ei tällöin välttämättä ymmärretä, vaan opitaan lähinnä matemaattista lukutaitoa. Viimeisin PISA -tutkimus osoittaa suomalaislasten olevan hyviä matemaattisia lukijoita. Matematiikka on kuitenkin paljon muutakin. (Näätänen 2000, 16-17; Astala ym. 2005, 4-5.)

6.5 Eri lukujärjestelmät

Eräs suomalaiselle opetuskäytännölle vieras tapa on perehtyä erilaisiin lukujärjestelmiin. Unkarissa käydään jo alkuopetuksessa lävitse esimerkiksi kaksi-, kolme-, ja viisijärjestelmät. Suomessa pitäydytään kymmenjärjestelmässä. Muihin lukujärjestelmiin perehtymisen on tarkoitus palvella kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta on hyödyllistä ymmärtää, että meillä kymmenjärjestelmä on käytössämme ehkä vain siksi, että meillä sattuu olemaan käsissämme kymmenen sormea. Yhtä hyvin voisimme käyttää esimerkiksi järjestelmää, jonka kantana on lukumäärä kahdeksan. Lukujen kirjoitusasu muuttuisi niiden suuruuden pysyessä kuitenkin samana. (Szalontai 2002b.)

6.6 Opetuksen eriyttäminen

Suomalaislapset ovat PISA -tutkimusten mukaan tasaisempia laskijoita kuin unkarilaiset. Unkarista löytyy sen sijaan enemmän matematiikan huippuosaajia. Yksi selitys löytyy varmasti erilaisista eriyttämiskäytännöistä. Suomessa tason mukaista eriyttämistä tapahtuu vähemmän kuin Unkarissa. Suomalaisiin opetusarvoihin kuuluu mahdollisimman tasa-arvoisten mahdollisuuksien luominen kaikille oppilaille. Eriyttämistä on varottu muun muassa sen leimaavaa vaikutusta peläten. Unkarissa eriyttäminen näkyy esimerkiksi erilaisina suuntautumisvaihtoehtoina matemaattisten taipumusten mukaan. Eriyttämisen lisäksi Unkarissa on enemmän erilaisia matematiikkakilpailuja ja kerhoja. (Räty-Zaborszky 2006, 94-95.)

6.7 Osaamisen vertailua

Eräs tapa arvioida opetuksen tasoa on tutkia oppimistuloksia. Kansainvälisiä vertailuja on tehty esimerkiksi PISA- ja TIMSS -tutkimuksissa sekä matematiikkaolympialaisissa. Suomen ja Unkarin matematiikan osaamisen vertailuissa on saatu ristiriitaisia tuloksia. Suomi on pärjännyt Unkaria paremmin PISA -tutkimuksissa. (Välijärvi, Linnakylä, Kupari, Reinikainen & Arffman 2002, 9-12; Arinen & Karjalainen 2006.) Vuoden 1999 matematiikan osaamista laajemmin mitanneessa TIMSS -tutkimuksessa (The Third International Mathematics and Science Study) Unkari sijoittui sen sijaan meitä hieman paremmin. (Kupari, Reinikainen, Nevanpää & Törnroos 2001, 38.) Unkari on myös pärjännyt erinomaisesti kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Suomen jäätyä keskimäärin monta kymmentä pykälää huonommille sijoille. (Räty-Záborszky 2006, 275.) Unkarista on viime vuosikymmenten aikana noussut useita kansainvälisesti tunnustettuja matemaatikoita, kun taas Suomessa tällaisia huippuosaajia on vähän.

Vuoden 2003 PISA -tutkimuksessa Suomi sijoittui matematiikan osaamisessa peräti ensimmäiseksi ja vuonna 2006 toiseksi. Unkari jäi molemmissa hieman vertailukeskiarvon alapuolelle. Suomen korkean PISA -sijoituksen mahdollisti erityisesti heikkojen oppilaiden muita maita parempi menestys. Suomalaisoppilaiden heikoimman neljänneksen keskiarvopistemäärä oli verrattuna muihin maihin erittäin korkealla tasolla. (Arinen & Karjalainen 2006.)

TIMSS -tutkimus 1999 osoitti Suomalaisten seitsemännen luokan oppilaiden matematiikan osaamisen olevan hieman keskimääräistä parempaa. Sijoituksemme 38 maan joukossa oli 14. Unkarin sijoitus oli yhdeksäs. OECD -maiden vertailuissa Suomi oli keskitasoa. Pisan tuloksia myötäillen TIMSS -tutkimus kertoi suomalaisoppilaiden tasaisuudesta – sekä huippuosaajia, että heikkoja oli verrattain vähän. Kuvaavaa on, että oppilaiden parhaimmistojen vertailussa Suomen sijoitus oli vasta 19, ja heikoimman oppilasaineksen vertailussa peräti kuudes. Unkarin vastaavat sijoitukset olivat seitsemäs ja kymmenes. Parhaimman neljänneksen osaaminen oli siis selvästi Unkaria heikompaa, mutta heikoimpien osaaminen vastaavasti hieman parempaa. (Kupari ym. 2001, 38.) Suomen keskinkertaiseen menestykseen saattaa osasyynä olla se, että suomalaisten osallistujien ikä oli koko vertailuryhmän alhaisin, eli noin puoli vuotta keskimääräistä alhaisempi. Esimerkiksi unkarilaisten otannan ikä oli puoli vuotta suomalaisia korkeampi.

Suomesta osaamisen suhteen heikoimpaan neljännekseen kuului vain neljä ja Unkarissa kuusi prosenttia oppilaista. Parhaimmassa kymmenyksessä oli ainoastaan kuusi prosenttia suomalaisista, mutta peräti kuusitoista prosenttia unkarilaisista. Parhaimmassa neljänneksessä oli 41 % unkarilaisista ja 31 % suomalaisista. Nämäkin luvut kertovat selkeää kieltään suomalaisten tasaisen vahvasta osaamisesta, mutta myös huippulaskijoiden puutteesta. Unkarissa heikkoja oppilaita on TIMSS -tutkimuksen mukaan hieman enemmän kuin Suomessa, mutta huippulaskijoita on huomattavasti enemmän. (Kupari ym.2001, 41.)

TIMSS -tutkimus kertoi suomalaisten vahvuusalueiksi *luvut ja laskutoimitukset* sekä *tilastot ja todennäköisyys*. *Mittaaminen* ja *algebra* ovat puolestaan unkarilaisilla parhaiten hallussa. *Geometriassa* molemmat maat sijoittuivat perätysten juuri puolenvälin paikkeille. Millään näillä viidellä osa-alueella kumpikaan maa ei sijoittunut puolen välin alapuolelle. (Kupari ym. 2001, 42-65.)

Vuosittain järjestettävät matematiikkaolympialaiset mittaavat kenties parhaiten kaikkein parhaiden oppilaiden osaamista. Suomen sijoitus vuodesta 1990 vuoteen 2005 on ollut keskimäärin 48. Unkarin keskimääräinen sijoitus on puolestaan ollut seitsemäs. Suomen paras sijoitus on ollut kyseisenä ajanjaksona 34. ja heikoin 63. Unkarin vastaavat luvut ovat 2. ja 21. Minään vuonna Suomi ei siis ole voittanut Unkaria sijoituksessa. Molempien maiden trendi on ollut hiukan laskeva. Suomen 2000-luvun sijoitus on ollut keskimäärin 52., ja Unkarin 11. (Räty-Záborszky 2006, 275.) On muistettava, että Suomessa on vain viisi miljoonaa asukasta ja Unkarissa kymmenen miljoonaa. Mikäli opetuksen, kasvatuksen ja kulttuurin kaltaisten tekijöiden vaikutusta ei oteta lainkaan huomioon, on kaksi kertaa todennäköisempää, että Unkarista löytyy todellinen huippuosaaja kuin Suomesta. Tilastollisesti tämä ei kuitenkaan juuri selitä suomalaisten heikkoa olympialaismenestystä suhteessa Unkariin.

7 TOIMINNALLISUUS OPETUKSESSA YLEENSÄ

7.1 Erilaisia näkökulmia toiminnallisuuteen

Piaget on jakanut yksilön ajattelunkehityksen neljään päävaiheeseen: sensomotoriseen, esioperationaaliseen, konkreettisten operaatioiden vaiheeseen ja formaalisten operaatioiden vaiheeseen. Alakouluikäinen lapsi on konkreettisten operaatioiden vaiheessa. (Piaget 1988, 25.) Piaget'n näkemys on linjassa sen kanssa, että konkreettisuuteen perustuvaa opetusta käytetään lähinnä alakoulussa.

Gardner loi teorian erilaisista lahjakkuustyypeistä (*Theory of Multiple Intelligences*), johon kuuluu seitsemän toisistaan erillistä lahjakkuustyyppiä: (Gardner, Kornhaber ja Wake 1999, 205-212; Uusikylä 1996, 84; Gardner 1993.)

- Interpersoonallinen lahjakkuus eli kyky ymmärtää muita ihmisiä ja ihmisten välisiä suhteita.
- Intrapersoonallinen lahjakkuus eli itsetuntemukseen liittyvä lahjakkuus.
- Kielellinen lahjakkuus
- Liikunnallinen eli kinesteettinen lahjakkuus
- Matemaattis-looginen lahjakkuus
- Musikaalinen lahjakkuus
- Visuospatiaalinen lahjakkuus eli kyky hahmottaa itsensä ja ympäristönsä välisiä etäisyyksiä ja ympäristön muotoja

Gardnerin (1993) mukaan kullekin yksilölle ominainen taipumus ymmärtää ja oppia koostuu näistä eri lahjakkuuden lajeista; miten ne painottuvat ja mikä on niiden välinen suhde. (Gardner 1993, 3-11.) Gardner korostaa, että opettajan on kyettävä huomioimaan opetuksessaan oppilaiden erilaiset taipumukset oppia. Pitäytyminen yksipuolisissa menetelmissä lisää riskiä sille, että suositaan vain tiettyjä oppimistaipumuksia. (Gardner 2009, 106-107). Gardner käyttäisikin opetustyössä monipuolisia menetelmiä sekä suurien kokonaisuuksien ja aihealueiden käsittelyä, jotka mahdollistavat monien eri lahjakkuuden lajien hyödyntämisen. (Gardner 2009, 112.)

Gardnerin ajatuksiin tulee tukea Uusikylältä (2006), joka toteaa, että perinteinen kouluopetus nostaa jalustalle kyvyn ymmärtää kielellisiä symboleja, jolloin muut lahjakkuuden lajit jäävät helposti paitsioon. Erilaisin opetusmenetelmin joku voi löytää esimerkiksi kehollis-kinesteettisen lahjansa, ja sitä kautta todellisen lahjakkuutensa. (Uusikylä 2006.) Toiminnallinen opetus lienee tässä yksi mahdollisuus.

Maria Montessori toi viime vuosisadan alussa uusia näkemyksiä oppimiseen ja opettamiseen. Yksi Montessorin keskeisimpiä pedagogisia ideoita oli lasta aktivoiva toiminta. Tätä silmällä pitäen hän kehitti erilaisia toimintavälineitä, kuten lukusauvat, lukumäärälaatikko, geometriset kappaleet, kuviopalapelit ja geometriset muotokortit. Montessoripedagogiikassa ihanteellinen oppimisympäristö on tila, jossa näitä välineitä voi käyttää vapaasti ja itsenäisesti. (Montessori 1981.)

Montessoripedagogiikan toimivuutta on testattu muun muassa Yhdysvalloissa, Kansas-Cityssä 1990-luvulla. Havaittiin, että esi- ja alkuopetusikäisten matematiikan oppimistulokset olivat selvästi paremmat vertailuryhmään verrattuna. (Moore 1991, 8-9.) Menetelmän avulla saatiin hyviä tuloksia myös 70-luvulla oppimisvaikeuksista kärsivien lasten oppimisesta. Oppimistulosten lisäksi myös motivaatio ja oppilaiden käsitys itsestään oppijana havaittiin kohenevan. (Pickering 1978.)

Korhonen (2001) tutki lelujen käyttämistä fysiikan opetuksessa. Tutkimustulokset olivat positiivisia. 53 eri-ikäisen oppilaan tutkimusryhmässä enemmän kuin kaksi kolmesta oppilaasta oli sitä mieltä, että lelun avulla selitetyn teorian ymmärtää paremmin kuin yleensä. (Korhonen 2001, 23.)

7.2 Toiminnallisuus kriittisesti tarkasteltuna

Kaminski, Sloutsky ja Heckler (2008 ja 2009) toteavat konkreettisuuteen perustuvassa matematiikanopetuksessa olevan puutteita: Konkreettinen malli edustaa paljon kapea-alaisemmin aihealuettaan kuin abstrakti lähestymistapa. Kaminski ym. havaitsivat College-opiskelijoiden oppimista mitanneessa tutkimuksessaan, että abstraktimmalla metodilla opetetut onnistuivat paremmin soveltamaan oppimaansa, kuin konkretian kautta opetetut. Kaminski ym. ovat havainneet saman myös 11-vuotiaiden matematiikan oppimisessa. Tutkijat arvelevat kuitenkin, että konkreetilla opetustavalla on etunsa: se saattaa pitää paremmin yllä kiinnostusta, ja se tukee hyvin uuden asian käsittelyn ensiaskeleita.

Jones (2009a ja b) kyseenalaistaa Kaminskin ym. tutkimustuloksia siitä, ettei konkreettinen lähestymistapa tue matemaattisen tiedon soveltamista. Jones epäilee, että Kaminskin ym. tutkimuksessa koeasetelma oli edullinen abstraktion kautta aihetta lähestyneelle ryhmälle. Jones kritikoi myös sitä, ettei tutkimuksessa tehty seurantamittauksia oppimistulosten pysyvyydestä.

Peterson (1987) Vertaili konkreettia ja abstraktia lähestymistapaa matematiikan oppimisvaikeuksista kärsivien 8-13 -vuotiaiden matematiikan opetuksessa. Kävi ilmi, että perustaitojen oppimisessa konkretiasta lähtevä opetus toimii abstraktiivista lähestymistapaa paremmin. Soveltavien matematiikan taitojen osalta ei kuitenkaan ilmennyt tilastollisesti merkitseviä eroja.

Jirotková ja Littler (2003) toteavat, että konkreettisiin geometrian kappaleisiin tutustuminen koskettelemalla ja visuaalisella tarkastelulla on hyvä keino oppia kappaleiden ominaisuuksia ainoastaan silloin, mikäli havaintoja käsitellään myös muuten, esimerkiksi keskustelemalla. (Jirotková & Littler 2003, 10.)

Myös von Glasersfeld (1995) varoittelee tuudittautumasta havainnollistavan materiaalin voimaan. Havainnollistavaa materiaalia on Glasersfeldin mukaan hyvä käyttää opetuksessa, mutta se on ainoastaan väline reflektion toteutumisessa ja abstraktion muodostamisessa. Glasersfeld viittaa tutkimuksiin, joissa on osoitettu, että käsitys, jonka oppilaat muodostavat opettajan tarjoaman havaintomateriaalin pohjalta, ei läheskään aina ole yhtenevä opettajan itsestään selvänä pitämän käsityksen kanssa. Opetusmateriaalien käyttäminen ei automaattisesti takaa sitä, että oppilaat aktiivisesti rakentaisivat ymmärrystään opiskeltavasta ilmiöstä. Glasersfeld toteaa, että olennaista on tarjota oppilaille mahdollisuuksia tajuta itse. (von Glasersfeld 1995, 184-185.)

Abrahams ja Millar (2008) tutkivat toiminnallisen opetuksen (*practical work*) vaikutuksia luonnontieteiden oppimisessa. He toteavat, että toiminnallisissa opetustilanteissa opettajien tavoite on tutkittavan ilmiön havainnoinnissa, mutta luonnontieteille ominainen tutkivan oppimisen idea jää toteutumatta. Toiminnallinen työskentelytapa auttaa tehokkaasti oppilaita keskittymään siihen, mitä ollaan tekemässä, mutta ilmiön ymmärtämisen kannalta oleelliset teoreettiset mallit (*theoretical ideas*) jäävät saavuttamatta. Toiminnallinen opetus ei myöskään edistä kovin hyvin akateemiselle tutkimukselle olennaisten menettelytapojen ymmärtämistä. (*substantive and procedural understanding*.) Abrahams ja Millar toteavat, että selittävät ideat eivät ”putkahda esiin” pelkän havainnoinnin kautta, vaan muutakin tarvitaan. Opetuksessa pitää olla aikaa myös pohtimiselle, selittämiselle sekä havaintojen ja teoreettisen mallin yhdistämiselle. (Abrahams & Millar 2008.)

Abrahams (2009) osoittaa myös, että vaikka toiminnallinen, käytännöllinen opetus saattaakin lisätä lyhyen tähtäimen kiinnostusta ja opiskelumotivaatiota, se ei pitkällä tähtäimellä saa innostumaan kyseisestä oppiaineesta, vaikka niin usein väitetään tapahtuvan. Abrahams vihjaa, että oppilas, joka oikeasti on kiinnostunut ja motivoitunut, ei tarvitse ”toiminnallisia herkkupaloja” innostuakseen. Abrahamsin ja Millarin tutkimukset käsittelevät luonnontieteiden oppimista. Niitä voitaneen soveltaa myös matematiikan kontekstiin.

8 TOIMINNALLISUUS MATEMATIIKAN TUNNEILLA

8.1 Toiminnallisuus Varga-Neményi -menetelmän näkökulmasta

Arkielämään perustuvien kokemusten hankkiminen on yksi Varga-Neményi -opetusmenetelmän lähtökohtana. Voidaan jopa sanoa, että kokemuksen tulisi olla kaiken oppimisen lähtökohta. (Tikkanen 2008, 66.) Kokemusten hankkiminen lähiympäristöstä on yksi unkarilaisen matematiikan alkuopetuksen lähtökohta. Esimerkit ja tehtävät haetaan mahdollisimman läheltä lasten omaa kokemusmaailmaa (koti, koulu, päiväkoti, puisto, kauppa jne.) Tunneille haetaan kokemuksia toimimalla: tarttumalla, peittämällä, mittaamalla, punnitsemalla, taputtamalla, tömistämällä, täyttämällä jne.) Toiminnasta syntyy aivoihin mielikuva, josta myöhemmin rakentuu haluttu käsite perusominaisuuksineen. Kyseinen ajattelutapa ei ole vieras suomalaisellekaan opetukselle. Unkarilaisessa matematiikan opetuksessa tämä on kuitenkin siirtynyt enemmän käytännön toteutuksen tasolle. (Risku 2001.) Risku (2001) kertoo kaksi esimerkkiä toiminnallisesta alkumatematiikasta:

(1) Esitetään lukua 6. Epäluonnollinen tapa on esimerkiksi värittää kuvasta 6 kukan terälehteä tai värittää kuvan "madosta" 6 niveltä; näitä ei esiinny todellisuudessa. Pikemminkin voitaisiin pohtia, miten eri tavoin kolikoista saadaan kuusi markkaa, jotta voisi ostaa tämän hintaisen suklaapatukan.

(2) Havainnollistetaan yhteenlasku 2+3: Laitetaan toiseen kämmeneen 2 papua, toiseen 3. Siirretään kädet vierekkäin ja nähdään, että papuja on yhteensä 5. Samalla nähdään myös luvun viisi esitystapa muodossa 2 ja 3. Kädet laitetaan ristiin, jolloin havaitaan, että myös 3 ja 2 ovat yhteensä 5 (yhteenlaskun vaihdannaisuus). Kädet viedään vuorotellen selän taakse, jolloin havainnollistuu vähennyslasku 5:stä pois 2 tai 5:stä pois 3. (Risku 2001.)

Risku (2001) toteaa, että kuva on lapselle abstraktio, eikä suinkaan konkretiaa. Unkarissa lasketaan oppikirjan aukeamalle piirrettyjen käpyjen asemesta mieluummin oikeita käpyjä.

8.2 Toiminnallisuus matematiikan oppimisessa

Dienes korosti Räty-Záborszkyn mukaan lasten aktiivista toimintaa, konkreetin materiaalin käyttöä ja omakohtaisia kokemuksia oppimistapahtumassa. Dienes oli yksi Piaget'n teorian matematiikan didaktiikan soveltajista. (Räty-Záborszky 2006, 102.)

Dienesin esittelemä matematiikan oppimisprosessi käsittää kuusi vaihetta, joista kolme ensimmäistä perustuu konkreettisiin kokemuksiin ja leikinomaiseen toimintaan. Kolmannesta vaiheesta alkaen matematiikka vähitellen verbalisoituu ja abstrahoituu. Kuudes vaihe on aksiomaattinen taso. (Vrt. van Hielen tasot, joissa hyvin samankaltainen rakenne.) (Räty-Záborszky 2006, 102.)

1. Vaihe

Vapaata leikkimistä: leikki on lapsen luontaista toimintaa, mutta mukana on myös oppiminen. Leikissä toimivat aistit, havaitseminen, tarkkaavaisuus, muistaminen, kuvittelu ja ajattelun yhdistelytaidot eli assimilaatio ja akkommodaatio. Lapsi saa havaintoja ja konkreettisia kokemuksia ympäristöstään. Näiden avulla käsitteet myöhemmin rakentuvat.

2. Vaihe

Strukturoidumpaa leikkimistä ja pelaamista. Tässä vaiheessa korostuvat säännöt ja niistä saadut kokemukset. Lapsi oppii, mitä saa tehdä ja mitä ei. Peleissä säännöt toistuvat mikä auttaa löytämään säännönmukaisuuksia. Tällöin tutustutaan opittavaan käsitteeseen. Kannustetaan lapsia luomaan sääntöjä tai muuttamaan ja kehittämään peliä.

3. Vaihe

Isomorfiset pelit: lapsi etsii rakenteellisia piirteitä, ominaisuuksia,
ja toimintoja sekä vertailee niitä. Lapsi yrittää tunnistaa ja selvittää rakenteeseen liittyviä kytkentöjä. Lopuksi lapsi opettelee ryhmittelemään ja luokittelemaan.

4. Vaihe

Isomorfisten rakenteiden etsiminen: lapsi verbalisoi sen, mitä oli abstrahoinut. Loogisten johtopäätösten tekeminen korostuu.

5. Vaihe

Symbolit: lapsi ilmaisee asiat kirjoitetussa muodossa ja häntä ohjataan matemaattiseen merkintätapaan eli symbolien käyttöön.

6. Vaihe

Formaali systeemi: säännöt muodostetaan käyttämällä edellistä ominaisuutta seuraavan pohjana. Matematiikan rakenne on kumulatiivinen, ja siinä on aksioomia, todistamista ja loogis-matemaattisia sääntöjä. (Dienes 1973, 6–9.)

Bradley ym. (2007) kertaavat, että toimintavälineiden (*manipulatives*) käytöllä saattaa olla hyvinkin voimakas vaikutus matematiikan oppimiseen. Erityisen arvokkaina he esittävät toimintavälineiden käytön oppimis- tai keskittymisvaikeuksista kärsivien lasten opetuksessa, toiminnallisuuden kautta muistijälkiä syntyy usean eri aistin kautta. Toimintavälineiden avulla oppilaat saavat konkreettisia kokemuksia, joiden avulla käsitteellinen ymmärryskin voi paremmin kehittyä. Oppimis- ja keskittymisvaikeuksista kärsivät kokevat toiminnallisen matematiikan opetuksen myös viihdyttävämpänä. (Bradley & Allsopp & Allsopp 2007, 244-248.)

Friel, Rachlin, ja Doyle (2001) osoittavat, että matemaattiset ongelmat, jotka voidaan ratkaista taulukoiden, graafisten esitysten, sanallisten selitysten, konkreettisten välineiden tai algebrallisten symbolien avulla, antavat mahdollisuuden kehittää ymmärrystä matemaattisista funktioista. Algebrallisen päättelyn käsitteleminen esimerkiksi fyysisesti suoritettavilla tila-aktiviteeteilla auttavat oppilaita paitsi ymmärtämään, myös keskittymään paremmin opiskeltavaan asiaan.

Tamas Vargan abstraktion tien kaltaista opetusmenetelmää kokeilivat myös Miller ja Mercer (1993). He havaitsivat positiivisia oppimistuloksia vaiheittain konkreettisesta abstraktiin kohdistuvalla opetuksella, (*Concrete-Semiconcrete-Abstract Teaching*) matematiikan oppimisvaikeuksista kärsivien ryhmässä. Konkreetteina keinoina mainittiin esimerkiksi tietokoneavusteinen opetus ja oppimispelit.

Myös Witzel, Mercer ja Miller (2003) peräänkuuluttavat konkreettisia lähestymistapoja oppimisvaikeuksista kärsivien opetuksessa. Opetuskokeilussa verrattiin perinteistä matematiikan opetusta vaiheittain konkreettisesta abstraktiin suuntautuvaan opetukseen (*concrete-to-representational-to-abstract* eli *CRA*). CRA-opetusta saaneet suoriutuivat sekä lopputestistä, että jälkiseurantatestistä vertailuryhmää paremmin.

Tikkasen (2008) tutkimuksesta ilmenee, että sisällöltään monipuolinen ja toiminnallinen matematiikan opetus laajentaa oppilaiden näkemyksiä matematiikan sisällöistä, oppimisesta ja opettamisesta paremmin kuin yksinomaan oppikirjaa seuraava opetus. (Tikkanen 2008)

Lapsi jäsentää maailmaa pitkälti oman toimintansa kautta, ajattelun ollessa vielä konkreettista. (Piaget 1988, 25). Juuri tästä syystä lapsen valmiuksien tukemisen tulisi sisältää toiminnallisia harjoituksia. (Vainionpää ym. 2004, 299.) Puuran ym. (2004) mukaan matematiikan opetuksessa vallalla ollut käsitys matematiikan abstraktista perusluonteesta näyttää ohjaavan monien opettajien ja kouluttajien työtä. Heidän mukaansa monipuolisemman lähestymistavan matematiikkaan antaa Fusonin (1997, 139) kuvaama kolmiomalli. Sen mukaan matematiikkaa voidaan prosessoida ja käsitteellistää kolmen eri kielen avulla:

(1) Matemaattisten symbolien ja lukujen,
(2) Puhutun kielen ja
(3) Toiminnallistettavissa olevien ilmentymien tai mielikuvien avulla.

Kaikki nämä kielet ovat mukana opetuksessa ainakin vielä koulun alkuvaiheessa. Parhaimmillaan opetus on kokonaisvaltaista, kokemuksellista ja lapsen oivallusta tukevaa. Siirryttäessä ylemmille luokille toiminnallistamisen mahdollisuus vähenee ja siirrytään enemmän matemaattisilla symboleilla työskentelyyn. Muunnosten harjoittelu jää lähinnä puhutun ja matemaattisten symbolien kielten väliseksi. (Puura ym. 2004, 100-101; Marttinen 2004, 19.)

Toiminnallistettavissa olevien mielikuvien puutteellisen harjoittelun vuoksi lasten taidot muuttaa matemaattisia symbolein tai puhutun kielen avulla esitettyjä matemaattisia ongelmia näiksi mielikuviksi jäävät heikoiksi. Tällöin myös lasten kyky sijoittaa matematiikka osaksi omaa arkitodellisuuttaan vähenee. Matematiikasta tulee ulkokohtaista. Erityisesti jos tämä edellä kuvattu kolmio sijoitetaan kielihäiriöisen lapsen todellisuuteen, hän joutuu ylemmille luokka-asteille siirryttyään yhä enemmän turvautumaan matemaattisessa ongelmanratkaisussaan niihin kieliin, jotka ovat hänelle kaikkein vaikeimmat, siis puhuttu kieli ja matematiikan symbolimaailma. (Puura ym. 2004, 100-101.)

Puura ym. (2004, 102) kuvaavat artikkelissaan muun muassa kolmea toiminnallisuuteen liittyvää matematiikan osa-aluetta, joita oppilaan on tärkeää ymmärtää kaikesta matematiikan opetuksesta:

(1) Missä tapahtumissa, havainnoissa, tilanteissa tai toiminnoissa kyseinen matemaattinen taito, ongelma tai lauseke voi esiintyä tai on hyödyllinen.

(2) Kuinka sanallisesti esitetyn tehtävän voi muuttaa toiminnalliseksi tapahtumaksi tai havainnoksi.

(3) Miten toiminnallisesta mielikuvasta voi muodostaa sanallisesti tai matemaattisin symbolein esitetyn ongelman.

Koska matematiikan oppiminen perustuu aiemmin opitun varaan, on edellä mainittuja perustaitoja hyvä harjoitella ja kerrata niin kauan, että ne ovat hallinnassa.

Haapasalo (2004, 78-79) toteaa ymmärtämisen ja tekemisen välistä suhdetta tarkastelevassa artikkelissaan, että olisi naiivia tyytyä toteamaan, että kahden luvun summa tarkoittaa niiden laskemista yhteen. Hän kuvaa problematiikkaa procept -käsitteen avulla. Tässä yhteydessä procept voi tarkoittaa samanaikaisesti mentaalista objektia, siihen liittyvää prosessia, prosessin lopputulosta tai joitakin objektiin liittyviä riippuvuuksia. Proceptuaalisessa ajattelussa taas yhdistyvät proseduraalinen ja konseptuaalinen ajattelu. Yhteenlasku tarkoittaa siten pelkästään aritmeettista laskutoimitusta, summa taas tarkoittaa koko sitä proceptuaalista struktuuria, joka koostuu muista tilanteeseen liittyvistä procepteista ja niihin liittyvistä teorioista. Edelleen Haapasalon mukaan lasten spontaaneissa leikeissä luonnollisella tavalla esiintyvät procept-aspektit tuhotaan välittömästi aloitettaessa opettaa matematiikkaa triviaaleilla yhteenlaskutehtävillä. Usein niiltä puuttuu matemaattinen tarkoituksenmukaisuus ja psykologinen mielekkyys lapsen kannalta.

Haapasalon (2004, 79) mukaan opettaja voisi perustaa työskentelyn yksinkertaisiin ja elegantteihin tutkimustilanteisiin. Tehtävänä voisi olla esimerkiksi: mikä tiimi löytää eniten tapoja saada aikaan luku 12 ja hajottaa se taas pienempiin osiin. Artikkelissaan Haapasalo esittää jonkinlaisena yhteenvetona, että opettajan tarkoin harkitsemalla oppilaiden tavoitteellisella tekemisellä on oltava paitsi psykologista mielekkyyttä yksilön ja ryhmädynamiikan kannalta, myös luonnollisella tavalla eriytyvää haasteellisuutta matemaattisten ideoiden esiin nostamiseksi. Oppilaan spontaanit ideat ovat yleensä se pohja, jolle abstrakteimpienkin asioiden tarkastelu tulisi pohjautua. Pohjautumista Haapasalo pitää kuitenkin eri asiana kuin asioiden käsittelyjärjestystä, joka määräytyy aina toiminnan perustana olevista kehysteorioista. Tärkeintä ei siis olisi ainoastaan tehdä vaan ymmärtää mitä, miten ja miksi olen milloinkin tekemässä.

Aunion ym. (2004) mukaan tärkeintä lapsen matemaattisten taitojen kehittymisen kannalta on lapsen tapa osallistua matemaattisesti kehittäviin leikkiympäristöihin. Tärkeää on, mitä lapsi itse tekee ja ajattelee toimiessaan. (Aunio ym. 2004, 208.) Ensimmäinen vaihe on aina konkreettista tekemistä kuten asian havainnollistamista leikkimällä tai pyytämällä lapsia itse tekemään kehollaan jotain. Käytetään mahdollisimman paljon eri aisteja. (Risku 2001.)

Kuvittaminen ja konkretisoiminen jäsentävät lapsen ajattelua. Siksi esimerkiksi dysfaattisten lasten opetuksessa puheen tukena käytetään paljon visuaalisia keinoja, kuten kuvia, symboleita, viittomia ja konkreettisia esineitä. (Aro ym. 2004, 166.) Toisaalta CP-vammaisen lapsen on todettu saavan motoriikkansa avulla niukasti tietoa ympäristöstään ja kokemusten niukkuus selittäneekin osaltaan CP-vammaisten lasten vaikeuksia käsiteoppimisen alueella. He oppivat hitaammin esimerkiksi sijainti- ja lukumääräkäsitteitä. Liikuntavammainen lapsi joutuu opettelemaan monia käsitteitä auditiivisen tiedon varassa. Tällöin käsitteen sisäistäminen jää tapahtumatta. (Tolvanen 2003, 100.)

Pitkäjänteisen ryhmätyöskentelyn käyttäminen saattaa olla yksi hyvä tapa oppia matematiikkaa. Ryhmässä toimiminen ei onnistu ilman kommunikointia. Tämä taas vaatii itsereflektiota, mikä on oppimisen kannalta välttämätöntä. Ryhmätöiden tekeminen pitää kuitenkin olla säännöllisesti ja pitkään käytetty työmuoto, jotta se kantaisi hedelmää. (von Glasersfeld 1995.)

Edinburghin yliopistossa on tutkittu toiminnallista lähestymistapaa (*practical work*) vanhempien oppilaiden matematiikan opetuksessa. Forresterin (1999 ja 2000) mukaan toiminnallinen opetus on saanut vahvan jalansijan pienten lasten pedagogiikassa. Hän kuitenkin harmittelee, ettei toiminnallisuutta käytetä laajemmin myös vanhempien oppilaiden kanssa. Forrester tuo esille, että käytännöllisten aktiviteettien käyttäminen tuo huomattavaa lisäarvoa myös jo peruskouluiän ohittaneiden matematiikan opetukseen.

9 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tämän Pro Gradu -työn tutkimusaineisto kerättiin keskisuomalaisella keskisuurella koululla. Työ on toimintatutkimus. Toimintatutkimuksen päämääränä ei ole pelkästään tutkiminen, vaan myös toiminnan samanaikainen kehittäminen. Tarkoituksena on saada käytännöllistä hyötyä tutkimuksesta. (Heikkinen 2001.) Päädyimme käyttämään strategisena lähestymistapana toimintatutkimusta selvittäessämme toiminnallisuuden merkitystä matematiikan opetuksessa. Kehitimme ja toteutimme toiminnallisen opetuspaketin, joka samalla toimi tutkimusinterventiona. Paketti ohjeineen ja tehtävineen on paitsi tekijöiden itsensä, myös muiden opetusalalla työskentelevien vapaasti käytettävissä.

Opetuspaketilla tutkimukseen osallistuneille oppilaille (n = 21, joista 9 tyttöä ja 12 poikaa) tarjottiin kokemuksia toiminnallisesta matematiikan opetuksesta. Kyselyn ja testien kautta kerätyn tutkimusaineiston perusteella muodostettiin kuva siitä, mitä merkityksiä toiminnallisella opetuksella on kuudesluokkalaisille.

Opetuspaketti sisältää kuusi oppituntia tilavuusgeometriaa. Lähtökohtana opetuspaketissa oli toiminnallisuus. Tutkimusaineiston muodostavat oppilaille ennen ja jälkeen opetusjakson pidetyt testit, jakson lopussa pidetty kysely sekä opetusjakson aikana tehty havaintomuistio. Aineiston pääasiallinen käsittelytapa on laadullinen. Aineisto kerättiin marraskuussa 2009 ja analysoitiin sitä seuranneiden kolmen kuukauden aikana.

Alku- ja lopputesti

Oppilaille pidettiin osaamista mittaava alkutesti ennen opetuspakettia ja sen päätteeksi lopputesti. Testeillä pyrittiin selvittämään, miten ja missä määrin toiminnallinen opetustapa edistää geometrian oppimista. Alku- ja lopputesti (liitteet 4 ja 5) sisälsivät molemman neljä tehtävää, jotka mittasivat muun muassa avaruudellista hahmottamiskykyä sekä pinta-ala- tai tilavuuslaskentaa. Vertailun mahdollistamiseksi alku- ja lopputestin tehtävätyypit olivat samankaltaisia, joskin lopputestissä selvästi vaativampia. Tehtävät pisteytettiin asteikolla 1-5. (1 = kokonaan väärin, 5 = täysin oikein)

Oppilaiden vastauksia käsiteltiin siten, että alku- ja lopputestin samaa tehtävätyyppiä edustaneita vastauspisteitä verrattiin keskenään. Tuloksia käsiteltiin pääasiassa ryhmätasolla. Analyysissä selvitettiin myös, erosivatko arvosanan 8-10 saaneiden pistekehitys arvosanan 4-7 saaneiden pistekehityksestä. Myös tyttöjen ja poikien vastauksien mahdollisia eroja selvitettiin. Geometristen tietojen ja taitojen kehittymistä analysoitiin lähinnä kolmiulotteisen hahmottamisen ja tilavuuden määrittelyn osalta. Selvitettiin muun muassa sitä, kuinka moni tutkimukseen osallistuneista oppilaista kykeni jakson jälkeen määrittelemään särmiön muotoisen kappaleen tilavuuden. Kaksikymmentä oppilasta oli mukana sekä alku-, että lopputestissä, ja ainoastaan heidän testivastauksiaan käytettiin aineiston analyysissä.

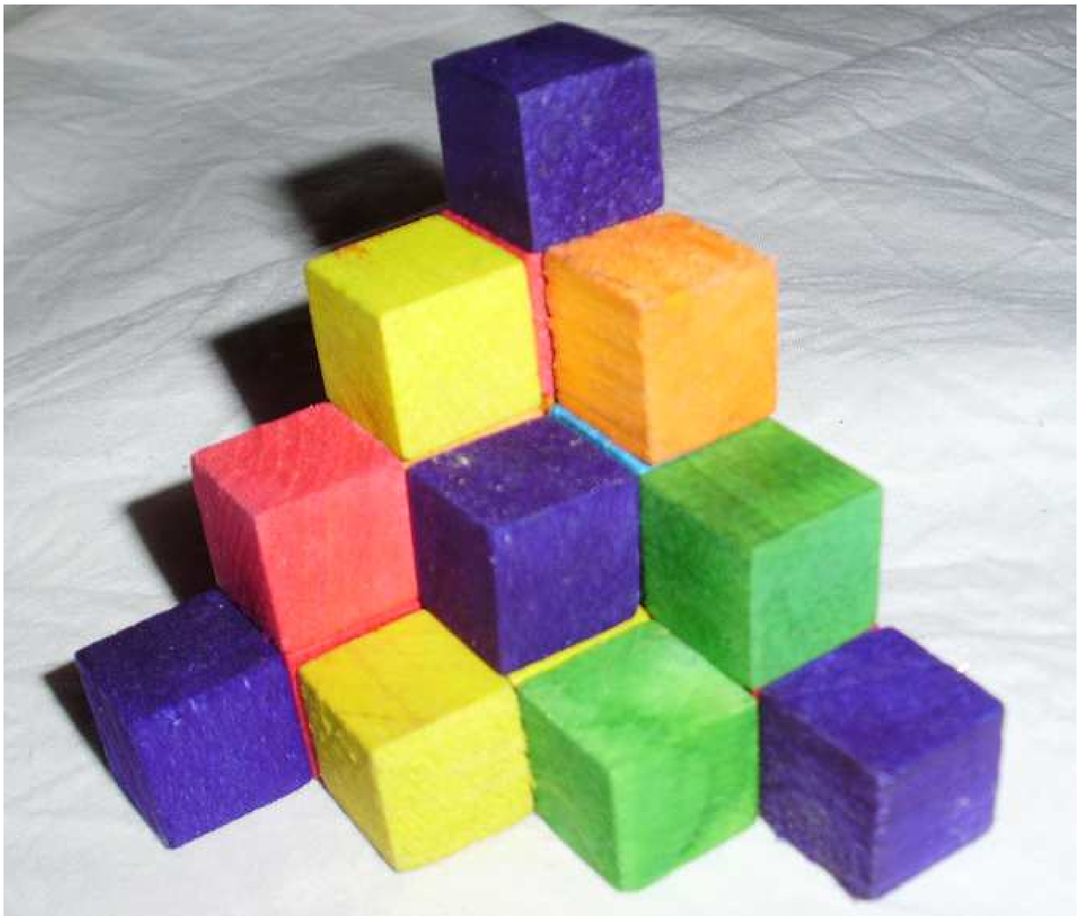
Kysely

Jakson lopussa oppilaat vastasivat myös kyselyyn (liite 3), jonka avulla pyrittiin selvittämään heidän käsityksiään toiminnallisuuden merkityksestä matematiikan opetuksessa. Kysely sisälsi seitsemän kysymystä, joista yhteen vastattiin numeerisesti Likert -asteikolla 1-5**.** Loput tehtävistä olivat avoimia kysymyksiä. Avoimien kysymysten vastauksia käsiteltiin laadullisella sisällön analyysillä: vastauksista muodostettiin ensiksi pelkistetyt ilmaukset, jotka koottiin samankaltaisuuden perusteella ryhmiksi. Tämän jälkeen vastausryhmälle muodostettiin sitä mahdollisimman hyvin kuvaava yläkäsite. Kyselystä saadut tulokset esitellään näiden ryhmittelyjen ja oppilaiden vastauksista poimittujen suorien lainauksien kautta. Kyselyn analyysissä mukana olivat 21 oppilaan vastaukset.

Havainnointi

Kaksi opettajaa luokassa mahdollisti sen, että toinen pystyi keskittymään pääasiassa oppilaiden toiminnan havainnointiin. Tärkeimmät havainnot kirjoitettiin muistiin sekä tuntien aikana että tuntien jälkeen. Niihin tukeutuen kuvaillaan opetusjakson tapahtumia luvussa 10.

10 OPETUSPAKETTI 6 -LUOKAN GEOMETRIASTA – GEOMETRISET KAPPALEET JA TILAVUUS



Opetuspaketin tavoitteet:

- Oppia ymmärtämään käsite tilavuus.
- Oppia tunnistamaan ja nimeämään geometrisiä kappaleita.
- Oppia määrittelemään suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen tilavuus.
- Kehittää avaruudellista hahmottamiskykyä.

Paketin kolme ensimmäistä tuntia testattiin erään toisen kuudennen luokan kanssa. Testituntien perusteella niihin tehtiin joitakin muutoksia. Näiden etukäteen testattujen tuntien pitämisestä jäi onnistunein vaikutelma varsinaisella opetusjaksolla. Kolme etukäteen testaamatonta oppituntia sen sijaan kärsivät hieman esimerkiksi liiallisesta sisällöstä tai epäselvästä ohjeistuksesta. Opetuspaketin esittelyn yhteydessä kerrotaan siinä ilmenneet puutteet ja parannusehdotukset niihin.

Koska tutkimuksessa selvitettiin toiminnallisuuden merkitystä, tehtiin paketista jopa korostetun toiminnallinen eikä sen tarkoitus siten ole edustaa näkemystämme optimaalisesta matematiikan opetuksesta. Perinteisiä laskuharjoituksia tehtiin ainoastaan yhdellä oppitunnilla sekä kotitehtävinä. Tarkoitus ei ole väheksyä perinteisen laskuharjoittelun merkitystä matematiikan oppimisessa, vaan keskittyä toiminnallisuuteen. Pohdintaosiossa otetaan kantaa siihen, minkälaista voisi olla hyvä matematiikan opetus. Tässä luvussa esitellään opetuspaketin sisältö siten, että se on muidenkin toteutettavissa. Samalla kuvaillaan opetukseen liittyneitä kokemuksia ja tapahtumia. Kuvailu on kirjoitettu sisennettynä tekstinä. Oppimistuloksia ja oppilaiden kokemuksia tarkastellaan myöhemmin.

Opetuspakettiin kuuluu runsaasti toimintavälineitä (liite 15). Tutkimukseen osallistuneessa ryhmässä oli muutama todella etevä laskija, joiden tarpeita silmällä pitäen luotiin kaksi erittäin vaativaa tehtävämonistetta (liite 12 ja 13).

Tunti 1 Johdatusta kolmiulotteisuuteen kaksiulotteisuuden kautta

Välineet ja materiaalit: askarteluverkkoa, helmiä

> Tunnin alussa kerrottiin, että alkavalla jaksolla pidetään hieman erilaista matematiikkaa, joka sisältää enemmän tekemistä ja toimimista, mutta vähemmän laskemista. Ilmapiiri tuntui varsin vastaanottavalta. Tutkimukseen osallistunut ryhmä teki ensimmäisen oppitunnin alussa alkutestin.

Vaihe 1

Perehdytään kysymykseen: Muuttuuko pinta-ala, jos sama piiri ”käytetään” eri tavalla? Oppilaat selvittivät asiaa seuraavan tehtävän kautta:

”*Kuvittele, että olet kanafarmari. Sinulla on paljon kanoja, mutta vain rajallinen määrä kanaverkkoa. Kokeilkaa pareittain, mihin muotoon verkko pitää taivuttaa, että sinne mahtuu mahdollisimman suuri määrä kanoja. Käytä kanojen sijasta helmiä kokeilussa. Kokeilkaa ainakin kolmea eri muotoa. Piirtäkää kunkin kanalan pohjapiirros ja merkitkää, montako helmeä siihen mahtui*.”

> Tehtävä näytti olevan motivoiva. Keskittyminen oli intensiivistä. Oppilaista oli huvittavaa toimia matematiikan tunnilla ”kanafarmarina”. Kuului innostunutta puheensorinaa parien keskustellessa kanafarmarin työstä. Keskustelussa oli mukana hypoteeseja siitä, minkä muotoinen aitaus olisi tilavin. Verkoilla ja helmillä tehtiin myös hieman tehtäväantoon kuulumattomia kokeiluja.

Tunti päätetään kokoamalla taululle, kuinka monta helmeä kukin oppilaspari oli saanut mahtumaan eri tavalla muotoiltujen kanaverkkojen sisään. Käy ilmi, että ympyräpohjaiseen kanalaan mahtuu eniten kanoja, ja että neliöpohjainen kanala on tilavampi kuin pitkän mallinen suorakulmio.

> Pientä epätarkkuutta ilmeni aitaukseen mahtuvien helmien määrässä riippuen siitä, kuinka tiheään ne oli sullottu, ja kuinka säännöllinen muoto verkosta oli taivutettu. Helmien tulee olla suhteellisen pieniä, jolloin mittavirheen osuus pienenee; ei kuitenkaan niin pieniä, että ne työntyvät verkon silmien läpi.

Vaihe 2

Pohditaan ongelmaa: Kuinka paljon kanalan pinta-ala kasvaa, kun sen piiri kaksinkertaistuu eli verkkoja laitetaan kaksi peräkkäin? Asiaa tutkitaan helmien ja kahden verkon avulla.

> Muutamalla oppilaalla olikin jo ennakkokäsitys siitä, että pinta-ala nelinkertaistuu piirin kaksinkertaistuessa. Muutama taas oli kaksinkertaisen kannalla. Suurin osa ei osoittanut mielipidettään. Pientä epätarkkuutta ilmeni aitaukseen mahtuvien helmien määrässä riippuen siitä, kuinka tiheään ne oli sullottu, ja kuinka säännöllinen muoto verkosta oli taivutettu.

Kuvasta nähdään, että ympyräpohjaiseen kanalaan mahtuu eniten, ja kolmion malliseen vähiten helmiä (piirin ollessa sama). Ympärysmitaltaan 40 cm:n kolmioon taas mahtuu nelinkertainen määrä helmiä verrattuna ympärysmitaltaan 20 cm:n kolmioon.

Tunti 2 Kappaleet

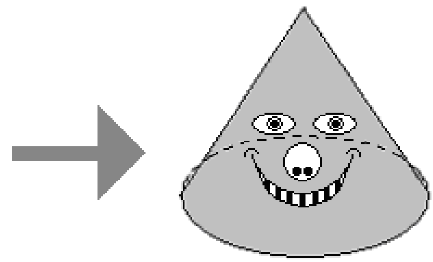
Välineet ja materiaalit: palikoita, kuutioita, tehtävämoniste

Vaihe 1

Tunti aloitetaan pohtimalla, mitä tarkoittaa käsite *geometrinen kappale*. Tämän jälkeen oppilaat asettuvat neljän hengen ryhmiin pelaamaan *Kari Kartio ja kumppanit* – peliä. (liite 6) Pelin idea on, että oppilaat selvittävät vihjelistan avulla, mitä geometrista kappaletta kyseiset vihjeet koskevat. Tavoite on, että geometriset kappaleet ominaisuuksineen tulisivat pelin kautta tutuiksi.

Esimerkki vihjeistä ja niiden perusteella pääteltävästä kappaleesta:

- Kyöpelivuoren hattutehtaassa on otettu mallia minusta.
- Olen muumitalon suojana.
- Minua ei kannata lyödä paljaalla nyrkillä, ainakaan ylhäältä päin.
- Minut liitetään usein jäätelöön.
- Minussa on vain kaksi osaa



Kari Kartio

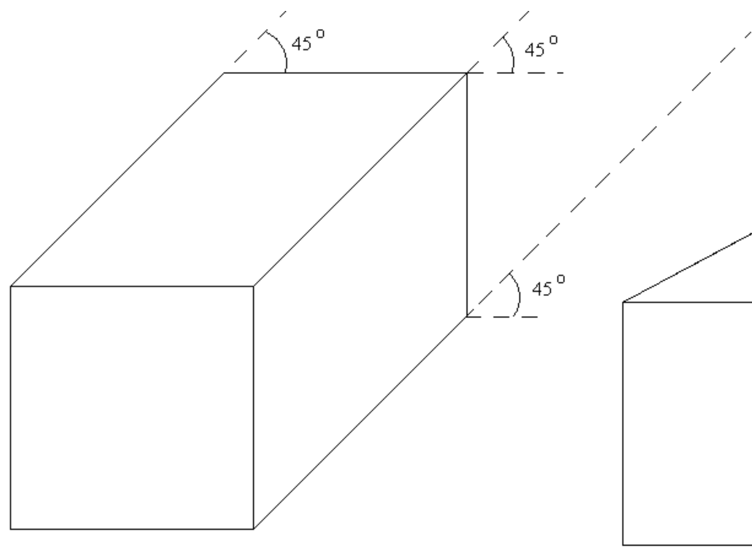
> Oppilaat olivat silminnähden innostuneita ryhmässä työskentelemisestä, mitä toimintamuotoa käytetään matematiikassa varsin vähän. Myöskään tutkimukseen osallistunut oppilasryhmä ei ollut kovin paljon tehnyt matematiikan tunneilla ryhmätöitä.

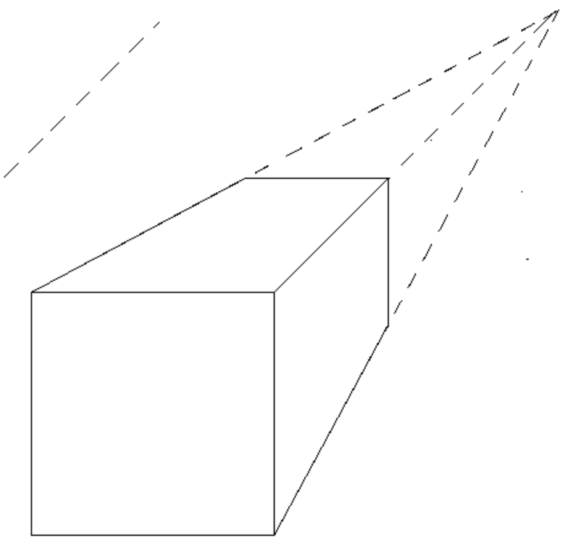
Yhteenvetona käydään pelin jälkeen läpi taululla läpi nimeämättömiä geometrisia kappaleita. Oppilaat yrittävät nimetä kappaleet. Käydään vielä yhdessä läpi muutamien kappaleiden osia, ja pohditaan esimerkiksi kartion ja pyramidin eroja ja yhtäläisyyksiä.

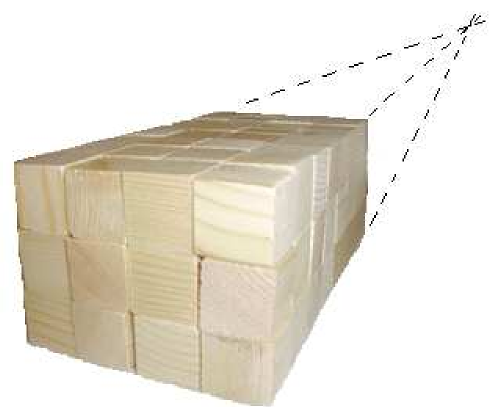
> Näytti siltä, että leikinomaisen opettelemisen kautta kappaleiden nimet jäivät varsin hyvin mieleen. Laajamittaista testiä, jossa oppiminen olisi todennettu, ei kuitenkaan järjestetty. Epäselväksi jäi myös se, jäivätkö opitut kappaleiden nimet pysyvästi, vai vain hetkellisesti muistiin.

Vaihe 2

Esitellään kaksi eri tapaa piirtää geometrinen kappale (liite 7) ja pohditaan, miten nämä tavat eroavat toisistaan? Tuodaan esille, että matemaattisessa piirtämisessä käytetään kuvassa vasemmalla olevaa tapaa, ja siitä käytetään muun muassa nimitystä *kavaljeeriperspektiivi*. Lienee sopivaa puhua myös vaikkapa *matematiikkaperspektiivistä* tai *geometriaperspektiivistä*.





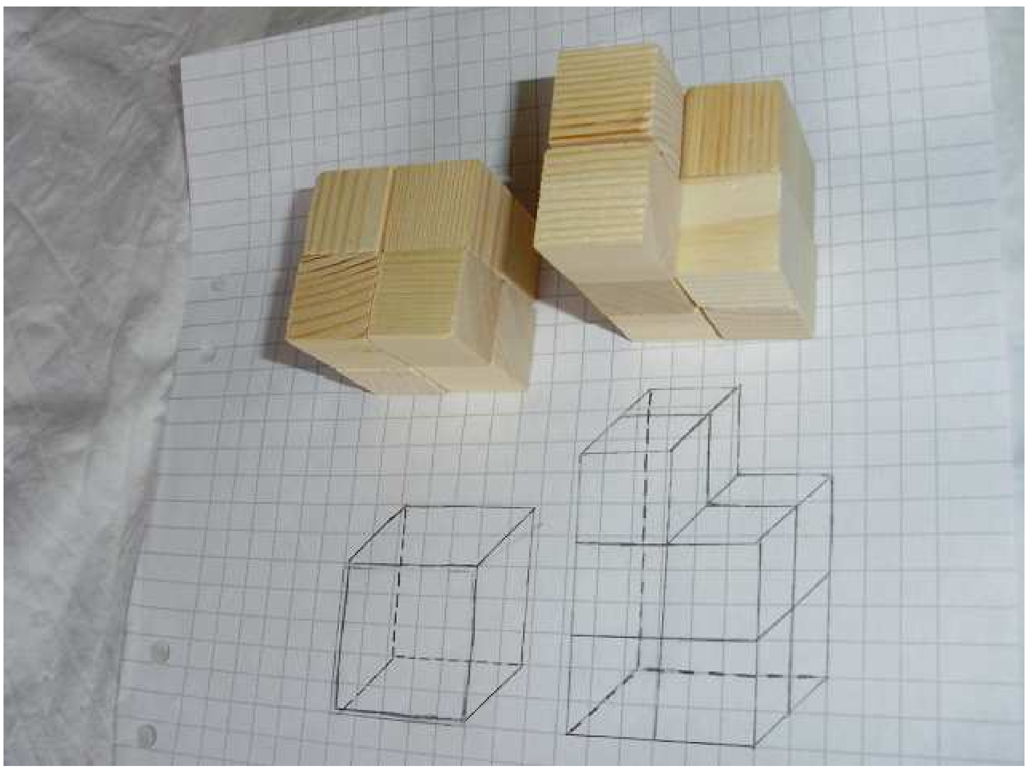


Todetaan, että kuvissa on samat kappaleet, mutta eri tavalla piirrettynä ja valokuvattuna. Molemmissa kuvissa on sama palikkarakennelma. Vasemmanpuoleinen on kuvattu kaukaa ”zoomin” avulla. Oikeanpuoleinen on läheltä otettu kuva. Vasemmanpuoleinen on lähempänä sitä, miten geometrian piirroksissa kuvataan särmiön muotoista kappaletta.

Esittelyn jälkeen oppilaat hakevat itselleen kuution muotoisen kappaleen, jonka he piirtävät kavaljeeriperspektiivissä.

> Piirtäminen motivoi selvästi tätä oppilasryhmää. Ilmapiiri oli hyvin rauhallinen ja keskittynyt. Geometrinen piirtäminen näytti olevan ryhmälle vahva osa-alue - ainoastaan muutaman oppilaan piirroksissa oli jotakin korjailtavaa.

Tehtävä jatkuu siten, että oppilaat hakevat vähintään kymmenen pikkukuutiota, suunnittelevat niistä rakennelman ja piirtävät sen edelliseen tapaan.



Kuvassa oppilaan palikkarakennelmia ja piirroksia.

> Muutama oppilas tarttui vaativampaan piirtämishaasteeseen rakentamalla usean kymmenen palikan rakennelman. Oppilaat perehtyivät jonkin verran myös toistensa työskentelyyn. Piirtäminen jatkui keskittyneenä, eikä monellakaan tuntunut olevan kiirettä alkaneelle välitunnille.

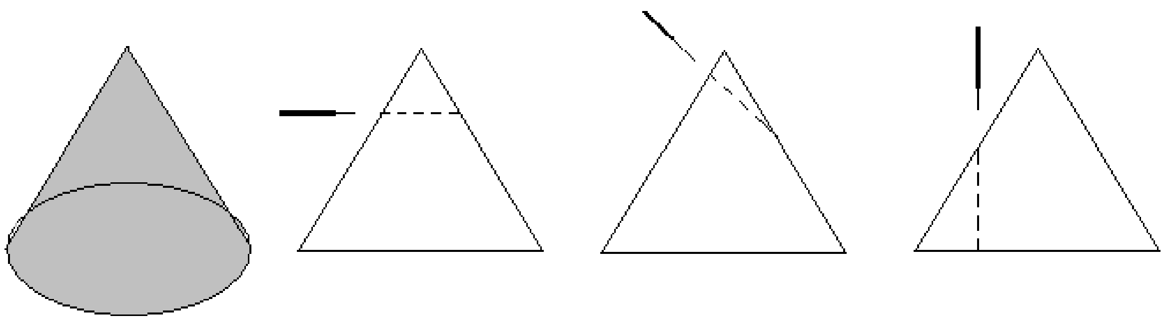
Tunti 3 Kolmiulotteista hahmottamista

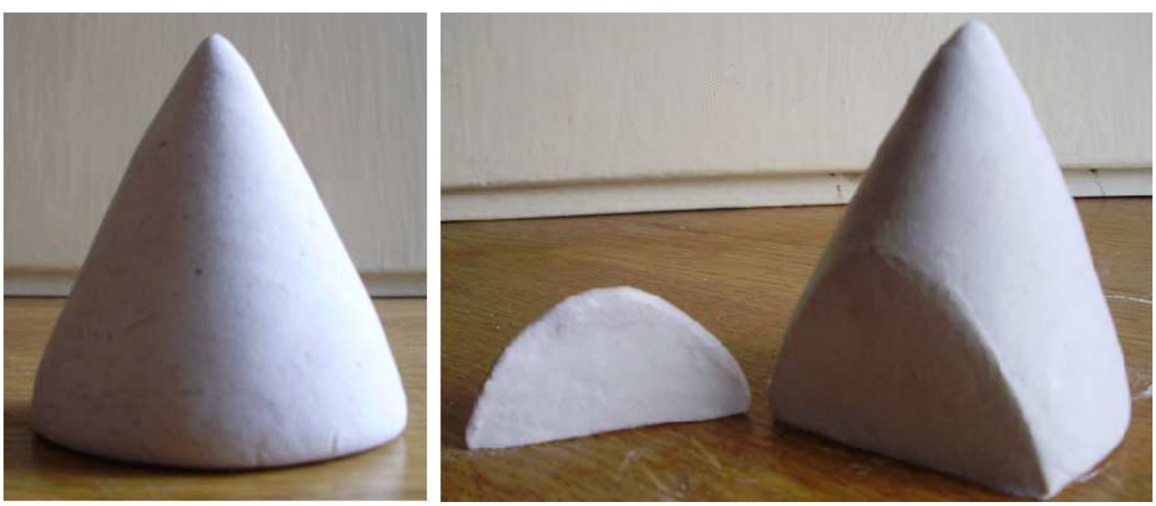
Välineet ja materiaalit: muovailuvahasta tai hienostyroksista tehtyjä geometrisiä kappaleita, mattoveitsiä

Vaihe 1

Jokaiselle oppilaille jaetaan tehtävämoniste (liite 8) kappaleiden leikkauskuvioista. Pareittain jaetaan myös polyuretaanista ja muovailuvahasta tehdyt geometriset kappaleet (pyramidi, kartio, särmiö, pallo ja lieriö). Tehtävänä on ensin piirtää, kappaleen tehtäväannon mukaisesta halkaisemisesta muodostuva leikkauskuvio, ja tämän jälkeen todentaa asia leikkaamalla konkreettisesti kappale mattoveitsellä.

Esimerkki leikattavasta kappaleesta leikkausohjeineen:





Kuvassa on kokonainen kartio sekä oikeanpuoleisen leikkausohjeen mukaan leikattu kartio. Leikkauskuvio on paraabeli.

> Käsite leikkauskuvio tai leikkauspinta oli monelle oppilaalle vaikea ymmärtää, vaikka niitä yritettiin avata monta kertaa. Osalle näytti olevan vaikea ymmärtää, että ohjeen mukaisesta leikkauksesta syntyvä kuvio on kaksiulotteinen, eikä kolmiulotteinen. Toimiva tapa ilmaista, mitä leikkauskuvio tarkoittaa, saattaisi olla esimerkkikappaleen halkaisemisessa esiin tulleen pinnan käyttäminen leimasimena. ”Leimasimella” tehty kuvio on sama kuin leikkauskuvio.

Vaihe 2

Käydään lopuksi läpi vaikeimmin hahmotettavat leikkauspinnat esimerkiksi dokumenttikameran avulla.

> Kävi ilmi, että viisi leikattavaa kappaletta oli hieman liikaa. Kolme olisi ollut sopiva määrä. Oppilaat eivät ehtineet tai jaksaneet käydä kaikkia kohtia läpi ajatuksen kanssa. Pääasiassa tunnin aikana vallitsi kuitenkin keskittynyt tekemisen meininki. Tämän oppitunnin sisältö vaatii opettajalta etukäteisvalmisteluja aika paljon.

Tunti 4 Tilavuuden käsite

Välineet ja materiaalit: rakennuspalikoita, 1 cm^3:n kokoisia muovikuutioita sekä yksi 1000 cm^3:n kokoinen muovikuutio

> Tunnin alussa käytiin läpi alkutestin vastaukset. Jo ennen tunnin alkua oli pulpeteille jaettu seuraavaa tehtävää varten 36 palikkaa jokaiselle oppilaalle. Kiinnostus näytti olevan palikoissa, ei niinkään alkutestissä.

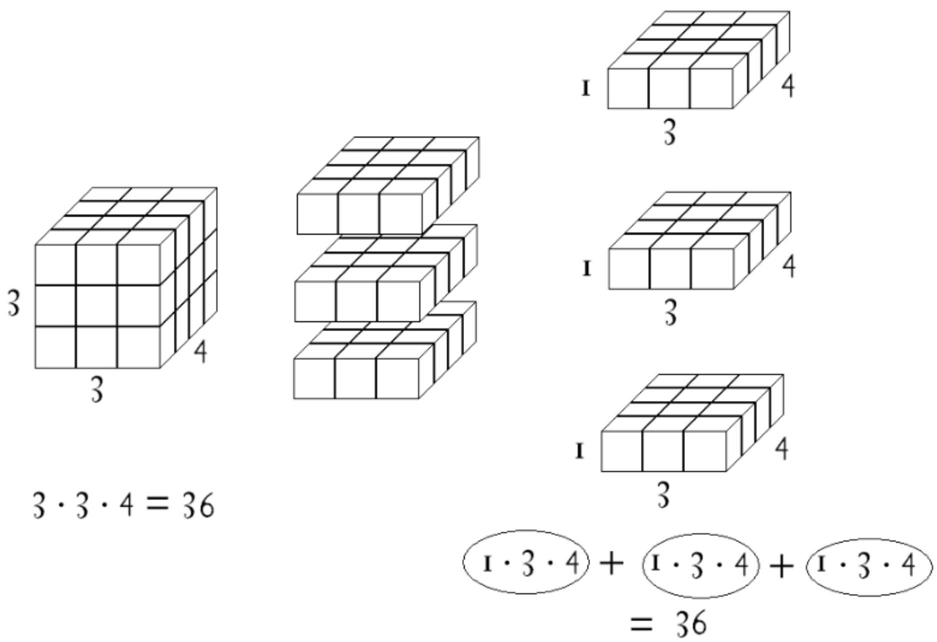
Vaihe 1

Oppilaat työskentelevät pareittain. Pyydetään jokaista tekemään oma särmiön muotoinen rakennelmansa 36 palikasta. Esitetään kysymys: mitä tietoja särmiöstä pitäisi kertoa, jotta puhelinlinjan toisessa päässä oleva kaveri saisi siitä todellisen käsityksen? Todetaan, että pitää määritellä *pituus*, *leveys* ja *korkeus*.
Tutkitaan oppilaiden rakennelmien ja dokumenttikameralla esitetyn kuvan (liite 9) avulla, kuinka monta erilaista särmiötä voi tehdä 36 palikasta. Pohditaan, mikä rakennelmista on tilavuudeltaan suurin, ja päädytään siihen, että samankokoisiahan ne ovat.

Esitetään kysymys, kuinka saadaan helpoimmin laskettua suurikokoisen palikoista tehdyn särmiön muotoisen rakennelman palikoiden määrä.

> Yllättävän moni oppilas ymmärsi tässä vaiheessa laskea palikat kaavalla pituus · leveys · korkeus.

Tutustutaan vielä seuraavaan kuvaan, jossa on hajotettu kuutiorakennelma kerroksiksi:



Vaihe 3

Pyydetään oppilaita piirtämään paperille 1 cm pituinen viiva, sekä 1 neliösenttimetrin kokoinen neliö (1cm · 1cm). Jaetaan oppilaille pienet yhden kuutiosenttimetrin kokoiset muovikuutiot. Muistellaan, mikä onkaan *neliösenttimetri*, ja tuodaan esille käsite *kuutiosenttimetri*, jota muovikuutio edustaa. Otetaan näkyville 1000 cm^3:n kokoinen kuutio, ja pohditaan, kuinka monta pikkukuutiota sen sisään mahtuu.

Kotitehtävinä tehdään perustilavuuslaskuja oppikirjasta.

> Moni oppilas näytti ihastuneen palikoihin. Syntyi vastalauseita ja voivottelua, kun palikat pyydettiin laittamaan laatikkoon ja ottamaan oppikirjat esille läksyn antamista varten.

Tunti 5 Kiertorastityöskentelyä

Välineet ja materiaalit: polyuretaanista tehtyjä palapelejä, eri mallisia astioita (esim. särmiö, kartio, lieriö), vaakoja (digitaalisia tai tasapainovaakoja punnuksineen), kartonkia, helmiä, pieni Aalto-malja

Tehdään neljän rastin tehtävärata, jota kierretään noin neljän hengen ryhmissä. Jokaiselle oppilaalle jaetaan tehtävämoniste (liite 10), jota täytetään rastien aikana. Siltä varalta, että rasteilla syntyisi niiden erilaisesta kestosta johtuen odottelua, oppilaille annetaan myös lisätehtävämoniste mukaan (liite 14).

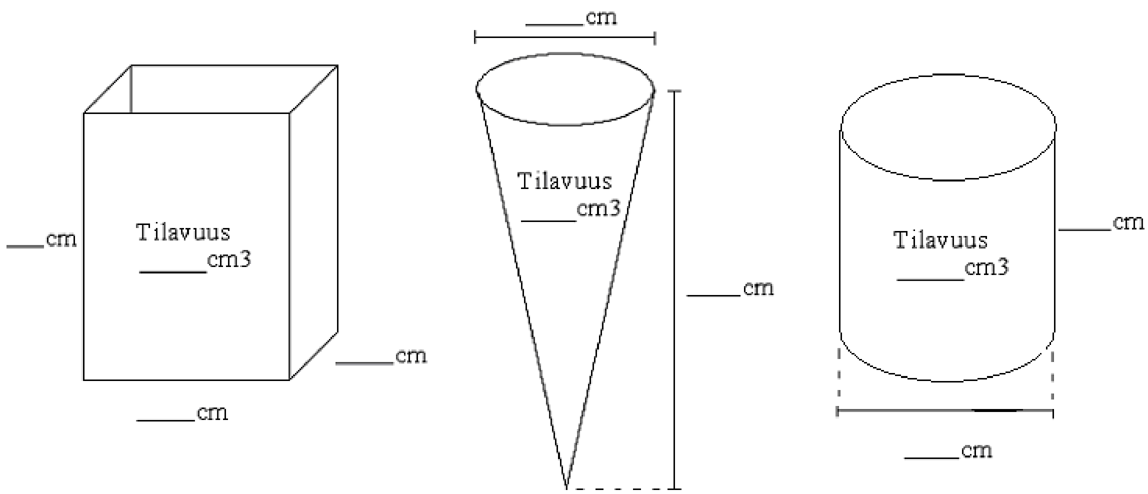
Rasti 1 Kolmiulotteisia palapelejä

Oppilaat kokoavat mahdollisimman monta polyuretaanista valmistettua kuutiopalapeliä. Joukossa oli helppoja, vaikeita ja erittäin vaikeita sellaisia. Ryhmän ”tulos” kerätään muistiin.

> Oppilaiden palapeliosaaminen yllätti positiivisesti. Toisaalta oli nähtävissä myös selviä eroja oppilaiden välillä: toiset hahmottivat kolmiulotteiset palapelit huomattavasti paremmin kuin toiset. Palapelejä voi tehdä itse kuumalankaleikkurilla, mikä on varsin työlästä. Päällystämällä palat kontaktimuovilla niistä on kuitenkin iloa pitkäksi aikaa.

Rasti 2 Tilavuuden mittaaminen veden ja vaakojen avulla

Oppilaat mittaavat rastilla olevien astioiden pituuden, leveyden ja korkeuden. Tämän jälkeen he arvioivat astioiden suuruusjärjestyksen. Veden ja vaakojen avulla tarkistetaan, mikä todellinen suuruusjärjestys on.



> Kuusi mitattavaa astiaa oli tälle rastille hieman liikaa. Läheskään kaikki ryhmät eivät ehtineet tehdä mittaamisvaihetta kokonaan. Sopiva määrä astioita olisi kolme tai neljä.

Rasti 3 Sama pinta-ala - muuttuuko tilavuus?

Tehtäväpisteellä on samankokoisista kartongeista valmistetut särmiöt, toinen kolmio- ja toinen neliöpohjainen. Tehtävänä on helmien ja vaa'an avulla selvittää, kumpi särmiöistä on suurempi. Tämä onnistuu esimerkiksi punnitsemalla kappaleen sisään mahtuneet helmet. Lopuksi pyydetään vielä pohtimaan, minkä muotoinen olisi tilavuudeltaan suurin mahdollinen kyseisestä kartongista muodostettava astia.

> Ohuehkon kartongin seinät antoivat hieman periksi, mikä vääristi todellisuutta. Muutamien oppilaiden kohdalla vaa'an ja helmien kanssa näpertely vei voiton varsinaisen tehtävän suorittamisesta.

Rasti 4 Tilavuuden arviointia

Rastipisteellä oli Alvar Aallon suunnittelema Aalto-malja. Tehtävänä oli arvioida astian tilavuus kaikkia mahdollisia eri arviointikeinoja käyttäen. Mittaaminen esimerkiksi veden ja vaa’an avulla ei kuitenkaan ollut sallittua. Rasti 4 lienee syytä käydä läpi huolella. Tässä paketissa tämä on toteutettu oppitunnin 6 alussa.

Tunti 6 Itsenäistä pohtimista ja laskemista

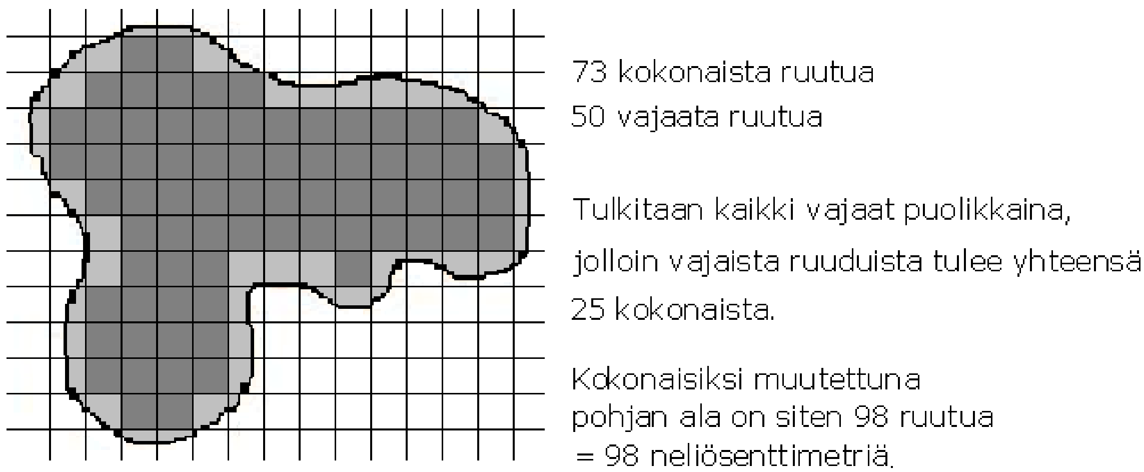
Välineet ja materiaalit: Aalto-maljan pohjakuvio, neliösenttimetriruudukko, tehtävämonisteita,

Vaihe 1

Edellisellä tunnilla yhtenä rastitehtävänä oli mitata pohjakuvioltaan epäsäännöllisen kappaleen tilavuus. Kuudes tunti aloitetaan palaamalla tähän tehtävään. Kysytään, mitä astiasta pitää tietää, jotta voidaan määritellä sen tilavuus? (pohjan pinta-ala sekä korkeus)

Jaetaan oppilaille Aalto-maljan pohjakuvio sekä kalvolle tulostettu neliösenttimetriruudukko. Kysytään, miten ruudukon avulla voidaan määritellä maljan pohjan pinta-ala?

Eräs tapa määritellä suhteellisen tarkasti aaltomaljan tilavuus on laskea oheisen kuvan mukaan kokonaiset ja vajaat ruudut. (Kokonaisina näkyvät ruudut lasketaan kokonaisina neliösenttimetreinä, ja kaikki osittain näkyvät puolikkaina.) Todetaan, että pohjaltaan epäsäännöllisen, mutta suoraseinäisen kappaleen tilavuus voidaan laskea samalla tavalla kuin suoraseinäisen särmiön tilavuus, eli pohjan pinta-ala kerrottuna korkeudella. Mitä pienempiä ruutuja käytetään, sen tarkemmin tilavuus voidaan arvioida.



Oppilaiden vastauksissa on todennäköisesti eroja. Otetaan taululle muistiin muutamia tuloksia, ja lasketaan niiden keskiarvo. Kysytään, miten astian tilavuus voidaan määrittää? Todetaan, että tilavuus on pohjan pinta-ala kerrottuna korkeudella, ja suoritetaan yhdessä laskenta:

Mitataan korkeus: 4 cm. Tilavuus on: $98\ cm^2 \cdot 4\ cm = 392\ cm^3$ eli noin 4 dl.

> On parempi käyttää valmista ruudukkoa laskemisen apuna. Osa oppilaista kokeili tehdä oman ruudukon, mikä osoittautui tehtävän suorittamisen kannalta hitaaksi.

Vaihe 2

Itsenäistä tehtävien tekemistä joko oppikirjasta tai monisteista (liitteet 11-13).

> Annettiin vaihtoehto laskea joko kirjasta tai monisteista. Ainoastaan yksi valitsi kirjan tehtävät. Tehtävissä oli valinnan varaa. Suurin osa halusi tehdä tehtäviä, joissa käytettiin konkreettisia apuvälineitä kuten palikoita. Osa teki taas palikoista omia rakennelmia, eikä laskeminen innostanut.

11 TULOKSET – TOIMINNALLISUUS 6-LUOKKALAISTEN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Oppilasryhmälle pidettiin oppimista ja ymmärtämistä mittaava testi ennen toiminnallista opetuspakettia ja sen jälkeen. Testien avulla selvitettiin, tapahtuiko tutkimukseen sisältyneen opetusjakson aikana kehitystä. Lopputestin yhteydessä pidettiin myös kysely, jonka tarkoituksena oli selvittää oppilaiden käsityksiä toiminnallisesta matematiikan opetuksesta. Tässä luvussa tuodaan esille testien ja kyselyiden tulokset.

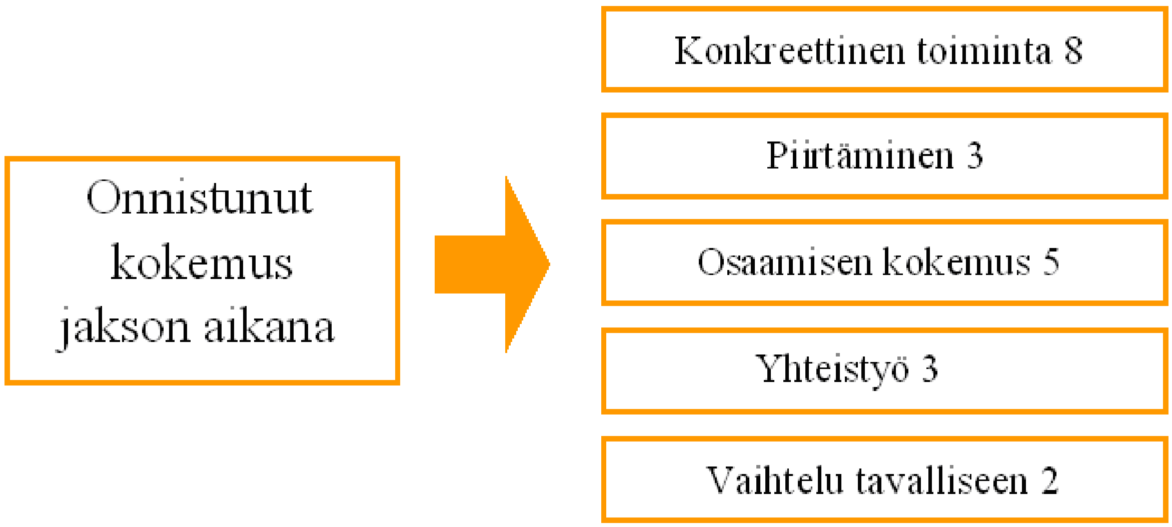
11.1 Kysely

Kyselyn (liite 3) vastauksia analysoitaessa pyrittiin muodostamaan mahdollisimman totuudenmukainen ja monipuolinen kuva oppilasryhmän käsityksistä toiminnallisuudesta. Vastauksia on käsitelty pääasiassa siten, että muodostuu kokonaiskuva ryhmän näkemyksistä.

Ensimmäisessä kysymyksessä oppilaita pyydettiin kertomaan jokin onnistunut kokemus jakson aikana. Toisessa kysymyksessä selvitettiin oppilaiden jakson aikana kokemia tunteita. Kolmannessa ja neljännessä kysyttiin, millä tavalla toiminnallisuus edistää tai haittaa matematiikan oppimista. Viidennessä kohdassa oppilaita pyydettiin Likert-asteikolla 1-5 arvioimaan toiminnallisuuden merkitystä matematiikan oppimisessa. Kuudennessa ja seitsemännessä kysymyksessä oppilaat saivat kertoa, mikä toiminnallisessa matematiikassa ilahdutti ja mikä jäi harmittamaan.

Tässä luvussa esitellään laatikkodiagrammien avulla oppilaiden vastauksista muodostetut luokat. Lukumäärä kertoo, kuinka monta mainintaa ryhmiteltiin kyseiseen luokkaan. Oppilaiden käsitystä toiminnallisuuden tärkeydestä tarkastellaan koko ryhmän lisäksi eri sukupuolten, sekä arvosanaltaan heikompien ja parempien oppilaiden vastauksissa ilmenneiden eroavaisuuksien kautta.

11.2 Toiminnallisuus matematiikan opetuksessa oppilaan kokemana



KUVIO 1. Oppilaiden vastaukset kysymykseen onnistuneesta kokemuksesta jakson aikana.

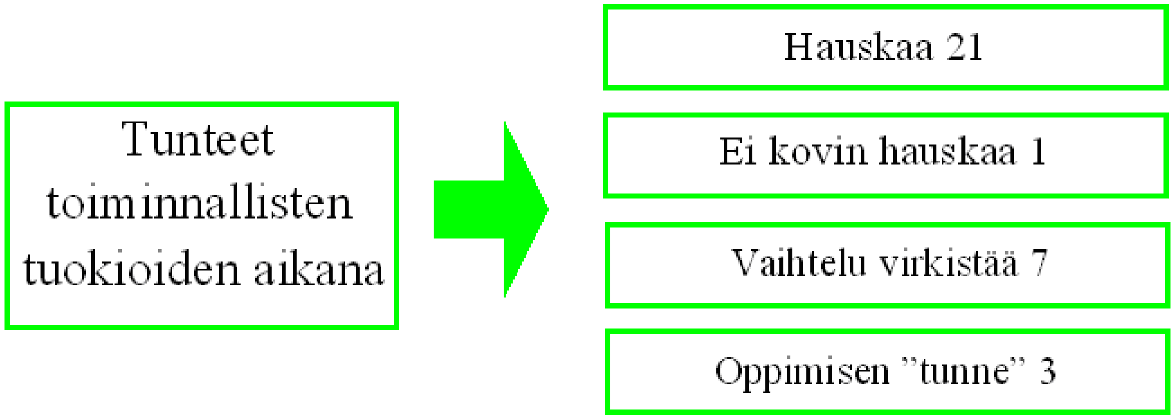
Puolet oppilaista mainitsi onnistuneena kokemuksena jonkun konkreettiseen tekemiseen liittyvän seikan, kuten palikkarakentelut tai leikkauskuvioiden selvittäminen muovailuvahan avulla, sekä piirtäminen. Viiden oppilaan vastauksissa painottui onnistumisen ja oppimisen kokemus yleensä. Muutama mainitsi yhdessä tekemisen. Neljä jätti kokonaan vastaamatta kysymykseen

> *”Sai tehdä erilaista matikkaa.”* Poika, arvosana 9

> *”Palikka hommat.”* P, as. 5 tai 6

> *”Mielestäni kaikki on onnistunut hyvin.”* P, as. 7

> *”Kun tehtiin ryhmissä ja onnistuttiin ratkaisemaan tehtävä.”* T, as. 9



KUVIO 2. Oppilaiden vastukset kysymykseen tunteista toiminnallisten tuokioiden aikana.

Kuudesluokkalaisten näytti olleen varsin hankala määritellä tunteita. Miltei kaikkien kuvaukset ilmensivät kuitenkin positiivista tunnetilaa opetuksen aikana. Yhden vastaajan maininta oli lievästi negatiivinen. Kolmanneksen vastaukset liittyivät erilaisen opetuksen miellyttävyyteen. Yksi oppilas vastasi ”*En tiedä*”, ja yksi jätti vastaamatta kysymykseen.

”Innokkuutta ja onnistumisen halua.” T, as. 9

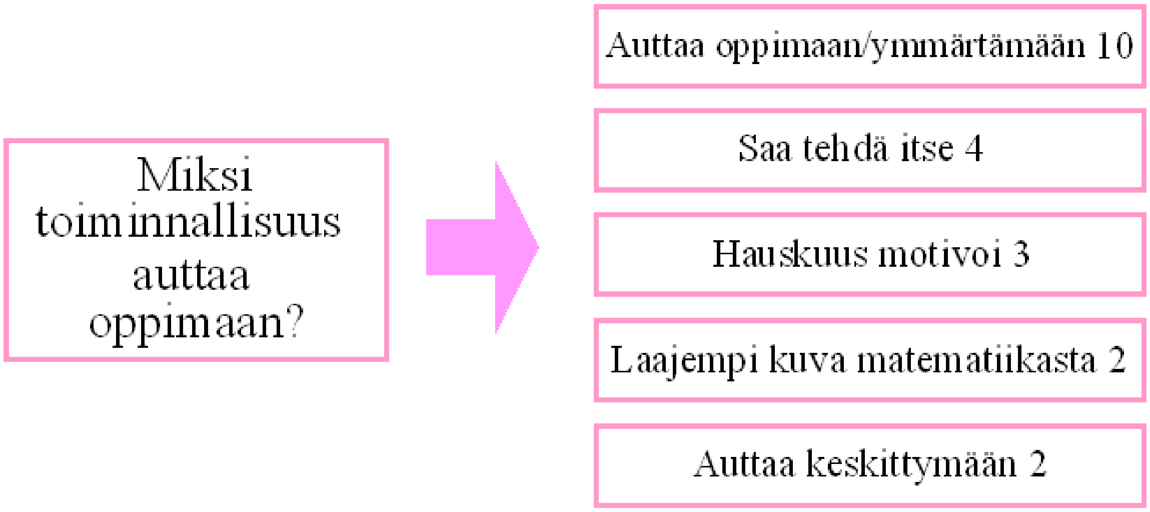
”Se oli tosi hauskaa.” T, as. 8

”Se oli mukavaa ja hauskaa, koska ei aina tarvitse tehdä kirjan tehtäviä.” P, as. 9 tai 10

”Se oli kivempi tapa oppia.” P, as. 7

”Se oli kivaa, oivallettavaa, sekä mukavaa.” T, as. 9

”Eivät olleet kovin hauskoja” P, as. 9



KUVIO 3. Oppilaiden vastaukset kysymykseen ”Miksi toiminnallisuus auttaa oppimaan?”

Miltei kaikki vastaajat toivat esille, että itse tekemällä tai konkreettisia välineitä käsittelemällä on helpompi ymmärtää ja oppia. Toiminnallisuudesta sanottiin syntyvät parempi motivaatio, joka lisäävän oppimista. Toiminnallisuuden myötä mainittiin syntyvän laajempi kuva matematiikasta, ja sen kerrottiin myös auttavan keskittymään. Neljä oppilasta jätti vastaamatta kysymykseen.

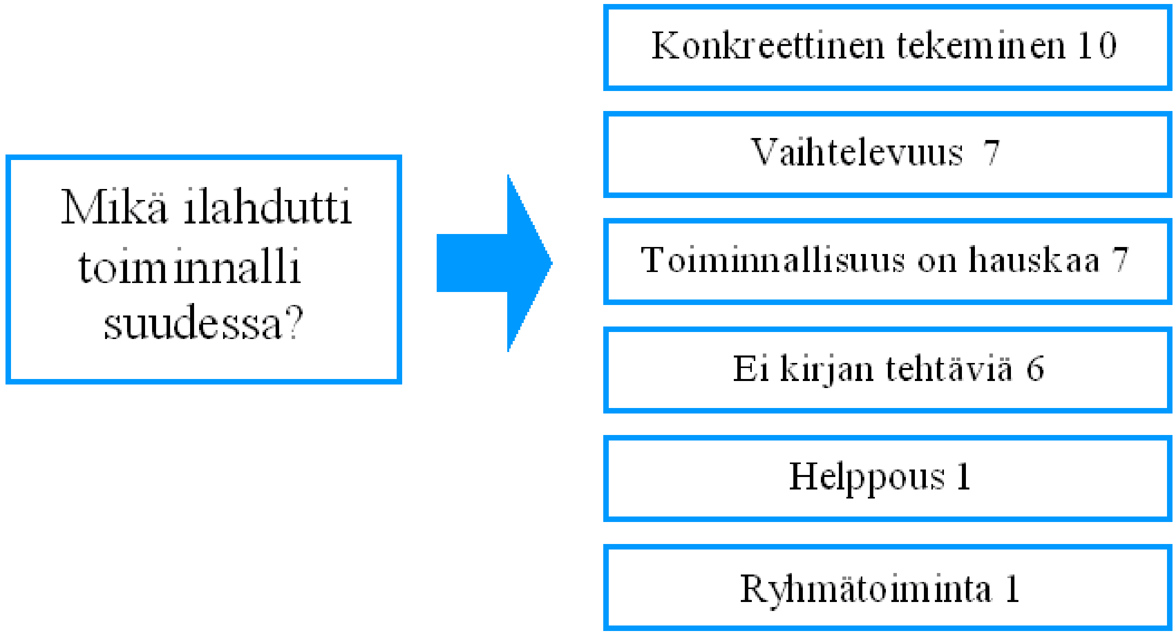
”Sai nähdä uuden näkökannan matikan opiskeluun.” T, as. 9

”Toiminnallisuus auttoi oppimistani, sillä toiminnallisissa tehtävissä ymmärsin opetettavan asian paremmin.” P, as. 9

”Koska tehtäviä jaksoi tehdä enemmän kun oli vähän vaihtelua.” P, as. 9 tai 10

”Matematiikka oli kerrankin hauskaa ja siihen jaksoi keskittyä.” P, as. 8

”Opin laskemaan paremmin tilavuuksia.” T, as. 8



KUVIO 4. Oppilaiden vastaukset kysymykseen ”Mikä ilahdutti toiminnallisuudessa?”

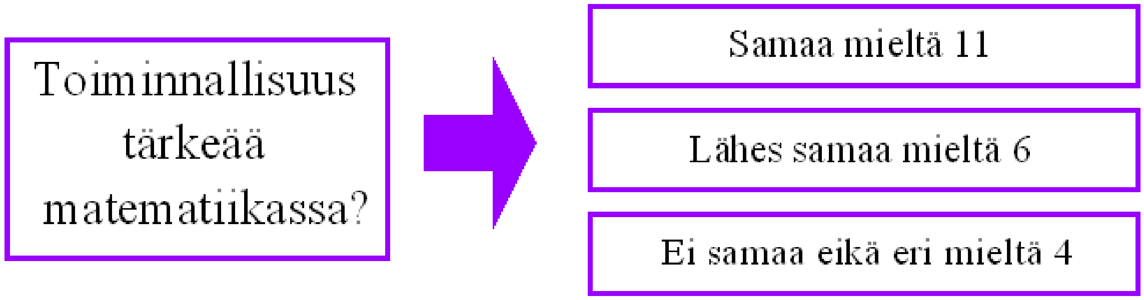
Kysyttäessä mikä toiminnallisuudessa ilahdutti, nousi selvästi esille neljä eri vastaustyyppiä: Konkreettinen tekeminen, vaihtelevuus, normaalia mukavammat tehtävät ja lisäksi se, että toiminnallisuus on tervetullutta vaihtelua oppikirjamatematiikalle.

> *”Se oli hauskempaa kuin tuijottaa kirjaa.”* P, as. 7

> *”Se oli helppoa ja hauskaa.”* T, as. 8

> *”Se, että sai rakentaa ja tehdä ryhmässä ja parin kanssa.”* T, as. 7

> *”…ettei tarvinnut tehdä kuin välillä kirjan tehtäviä.”* T, as. 9



KUVIO 5. Oppilaiden vastaukset kysymykseen toiminnallisuuden tärkeydestä matematiikan opetuksessa. (Likert-asteikko 1-5)

Oppilaat olivat varsin vakuuttuneita siitä, että toiminnallisuus on tärkeää matematiikan opetuksessa.

Käsitystä toiminnallisuuden tärkeydestä verrattiin eri arvosanan omaavien ja eri sukupuolten vastauksista. Näissä ei ilmennyt merkittäviä eroja. Sekä arvosanan 8-10 saaneiden, että arvosanan 4-7 saaneiden käsitys toiminnallisuuden tärkeydestä matematiikan opiskelussa oli korkealla tasolla:

TAULUKKO 1. Erot eri arvosanan saaneiden välillä

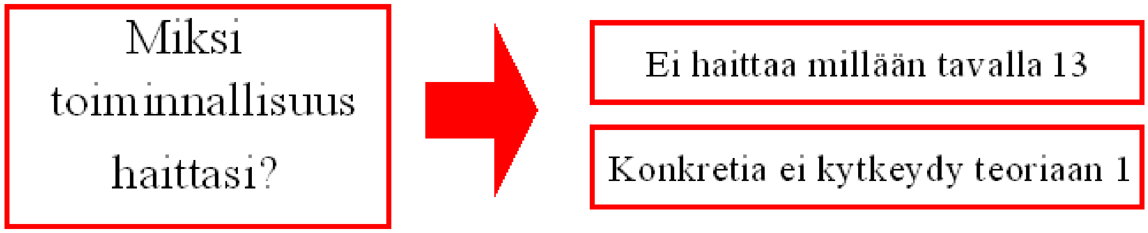
Arvosana	Vastauskeskiarvo asteikolla 1-5
4-7	4,57
8-10	4,21

Heikommat oppilaat pitivät toiminnallisuutta hieman tärkeämpänä kuin paremman arvosanan omaavat. Ero ei ole kuitenkaan suuri.

TAULUKKO 2. Erot sukupuolten välillä

Sukupuoli	Vastauskeskiarvo asteikolla 1-5
Tyttö	4,33
Poika	4,33

Tytöillä ja pojilla oli täsmälleen samanlainen näkemys toiminnallisuuden tärkeydestä matematiikan opetuksessa.



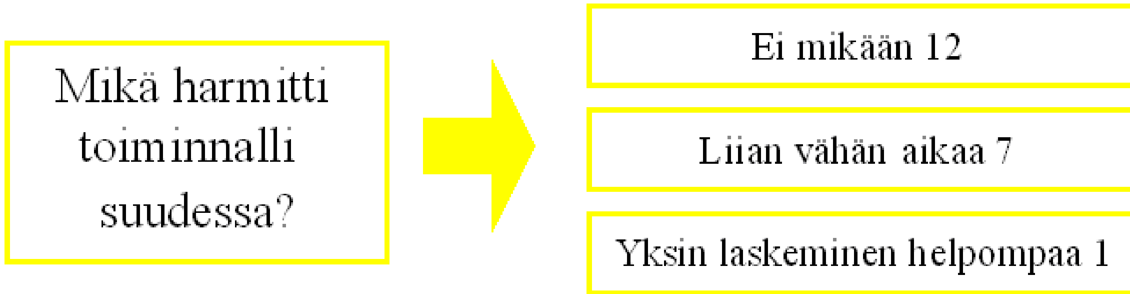
KUVIO 6. Oppilaiden vastaukset kysymykseen ”Miksi toiminnallisuus haittasi oppimista?”

Yhden oppilaan vastauksesta oli tulkittavissa, että konkreettinen käsittely olisi tarvinnut tuekseen enemmän teoreettista tarkastelua. Asiat eivät automaattisesti ”loksahda” ymmärryksen asteelle, mistä kertoo seuraava lainaus:

> *”…olisi pitänyt opettaa vielä sitä jotakin tiettyä juttua enemmän, että olisin ymmärtänyt vähän paremmin.”* T, as. 7

Yli puolet vastasi, ettei toiminnallisuus haitannut millään tavalla. Seitsemän oppilasta jätti vastaamatta kysymykseen, mikä tarkoittaa joko sitä, ettei toiminnallisuuden haittapuolia nähty tai niitä ei jostain syystä tuotu esille.

> *”Ei haitannut millään tavalla.”* P, as. 7



KUVIO 7. Oppilaiden vastaukset kysymykseen ”Mikä toiminnallisuudessa harmitti?”

Miltei kaikki toiminta jakson aikana oli ryhmätyömuotoista, josta eräs, hyvin matematiikassa menestynyt oppilas ei erityisemmin ollut pitänyt:

> *”Se, että tehtäviä tehtiin lähes aina ryhmässä. Minusta on helpompi laskea yksin.”* P, as. 9 tai 10

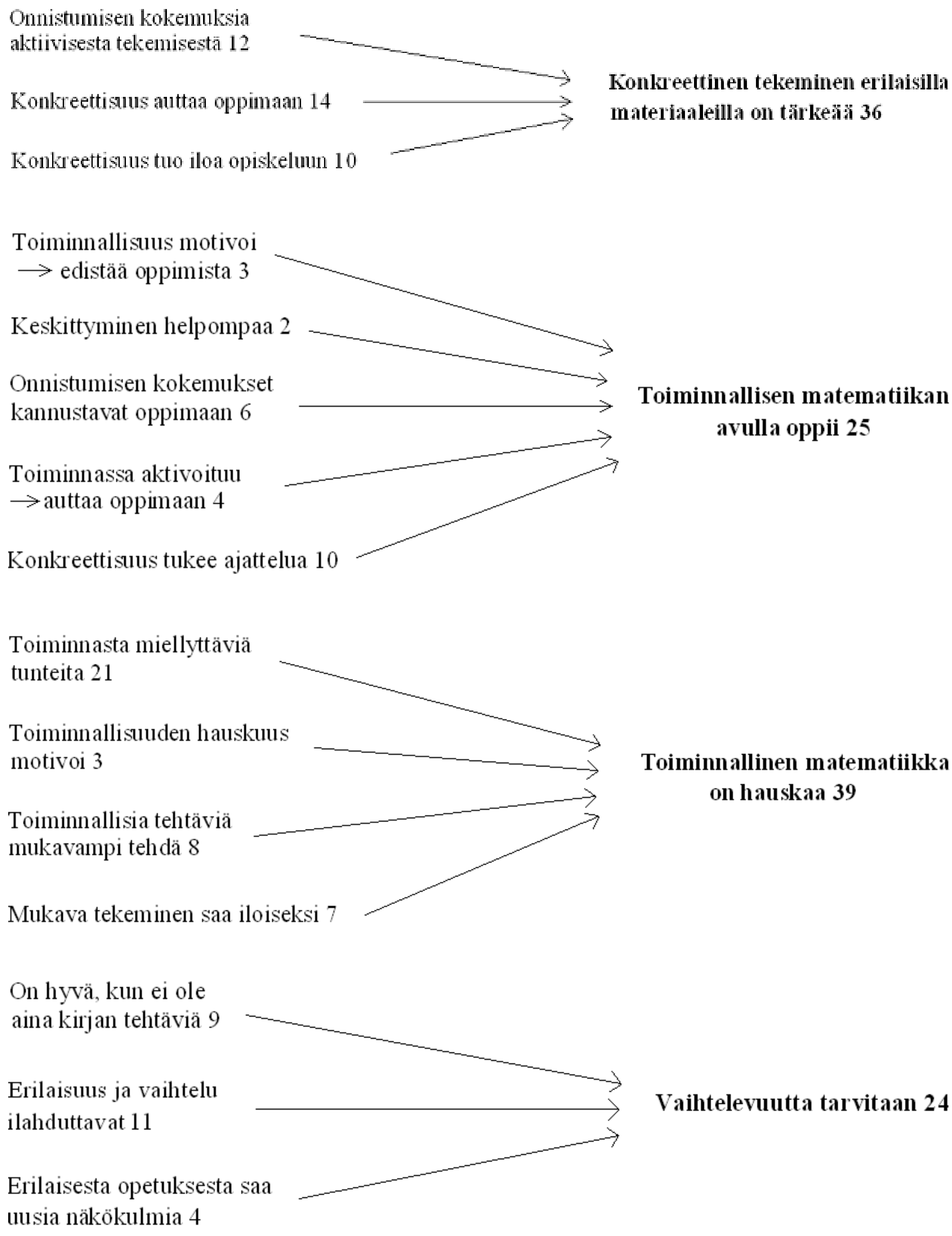
Muutama oppilas oli kokenut jakson aikana kiireen tuntua. Harmittamaan oli jäänyt se, ettei kaikkia tehtäviä ehditty tehdä loppuun. Muutama mainitsi harmituksen aiheena sen, että toiminnallinen jakso loppui liian aikaisin. Suurin osa oppilaista ei vastannut kysymykseen ollenkaan.

> *”En aina ehtinyt tekemään kaikkea. (esim. rastitunnilla)”* T, as. 8 tai 9

Yksi oppilas mainitsi selkeän tiedollisen puutteen:

> *”Että sitä oli liian vähän ja että en tiedä mikä on tahko.”* T, as 7

Kyselyaineistoa analysoitiin myös siten, että irrotettiin vastaukset alkuperäisestä kysymyksestään, ja käsiteltiin niitä yhtenä suurena vastausjoukkona. Selvitettiin, mitä toiminnallisen matematiikanopetuksen merkityksiä aineistoon sisältyi. Seuraavalla sivulla on esitelty yhteenveto päätelmistä, joita oppilaiden vastauksista on johdettu. Lukumäärä kertoo, kuinka monessa vastauksessa mainittiin ko. luokkaan kuuluvia ilmauksia:



KUVIO 8. Johtopäätökset oppilaiden vastauksista.

11.3 Alku- ja lopputesti

Opetusjaksolle asetettiin tiedollisiksi tavoitteiksi: 1) oppilaat oppivat käsitteen tilavuus, 2) oppivat tunnistamaan ja nimeämään geometrisiä kappaleita, 3) oppivat märittelemään suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen tilavuuden ja 4) avaruudellinen hahmottamiskyky kehittyy. Tavoitteiden toteutumista selvitettiin alku- ja lopputestien avulla. (liitteet 4 ja 5)

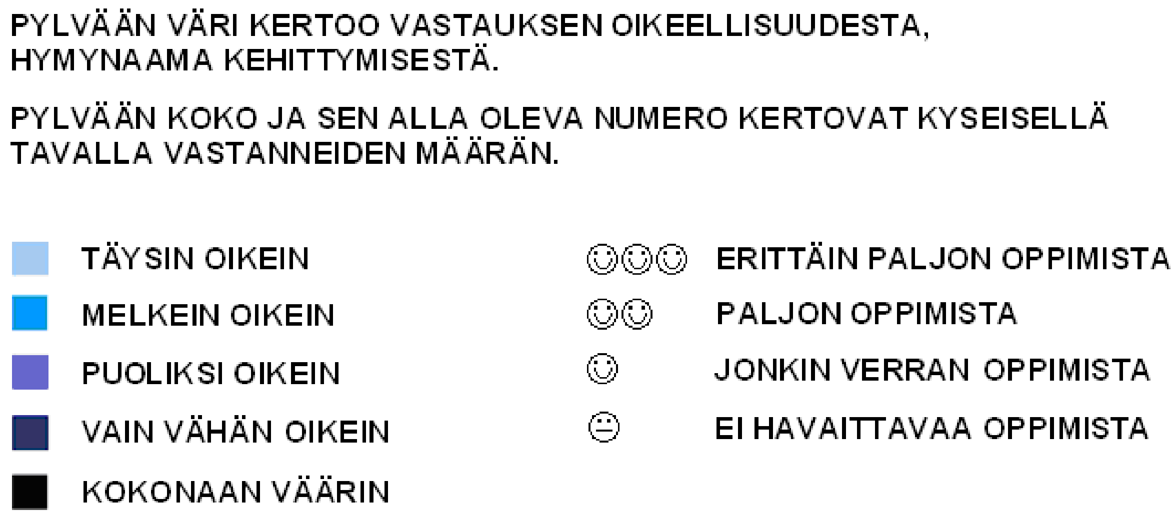
Kaksi alkutestin tehtävätyyppiä, jotka liittyivät lähinnä geometriseen hahmottamiseen, olivat suoraan verrattavissa lopputestin kahteen tehtävään. Näiden tehtävien osalta alku- ja lopputestin vertaaminen olikin yksinkertaista. Tilavuuden määrittelyn osalta oletus oli, että oppilaat eivät tätä vielä alkutestissä hallinneet. Koska asia oli ryhmälle täysin uusi, emme nähneet tarpeelliseksi ja mielekkääksi kysyä sitä alkutestissä. Ennen tutkimusjaksoa oppilaat olivat käsitelleet pinta-aloja. Selvitimme alkutestissä, mikä oppilaiden osaamistaso oli pinta-alan määrittelemisessä, koska pinta-alan määrittelyn ymmärtäminen on pohjana tilavuuden määrittelyn ymmärtämiselle. Sekä alku-, että lopputestin tehtävät pisteytettiin 1-5. (1 = täysin väärin, 5 = täysin oikein)

Alkutestin tehtävä 1 vastaa lopputestin tehtävää 1. Alkutestin tehtävä 2 vastaa lopputestin tehtävää 4. Alkutestin tehtävää 3 on verrattu lopputestin tehtävään 2, vaikka ne ovatkin jonkin verran erityyppisiä. Alkutestin tehtävää 4 ei otettu analyysissä huomioon, vaan sen avulla ainoastaan arvioitiin opetuksen lähtökohtia. Lopputestin tehtävän 3 avulla selvitettiin, kuinka moni tutkimusjoukosta hallitsi opetuksen jälkeen perustilavuuslaskuja. Tätä tehtävää ei varsinaisesti verrattu mihinkään, koska oletus on, ettei tilavuuslaskuja hallita, jos niihin ei ole yhtään perehdytty.

Lopputesti oli vaativampi kuin alkutesti, minkä vuoksi oppimistuloksia olisi ollut vaikea verrata suoraan absoluuttisista tehtäväpistemääristä. Testien vaikeustaso onkin otettu huomioon oppimistuloksien analysoinnissa. Vaikeustaso määriteltiin verrokkiryhmän avulla: Eräälle viidennen luokan oppilasryhmälle (n = 29) teetettiin pinta-ala- ja tilavuuslaskutehtäviä lukuun ottamatta samat testitehtävät kuin tutkimukseen osallistunut kuutosluokka teki. Verrokkiryhmä teki tehtävät samalla kerralla, eikä siten saanut minkäänlaista opetusta tehtävien välissä. Varsinaisen tutkimusjoukon koko on 20 oppilasta.

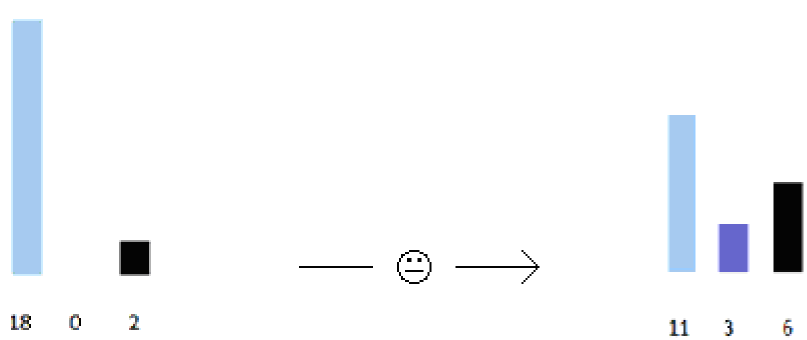
11.4 Oppiiko toiminnallisen opetuksen avulla tilavuusgeometriaa?

Seuraavat kuviot kuvaavat oppilaiden saamia pisteitä alku- ja lopputestissä, sekä ko. tehtävissä vaadituissa taidoissa ilmennyttä kehittymistä.



KUVIO 9. Lukuohje kuvioihin 10 – 13.

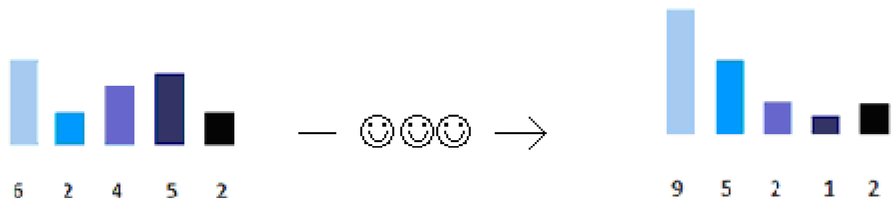
Tehtäväpari 1



KUVIO 10. Oppilaiden jakauma tehtäväparissa 1. ”Kuinka monta palikkaa on rakennelmassa?”

Alkutestin tehtävä oli huomattavasti helpompi kuin lopputestin tehtävä, jossa palikoita oli noin kaksinkertainen määrä ja rakennelman muoto oli epäsäännöllisempi. Tutkimusjoukko sai keskimäärin 4,6 pistettä alkutestissä, ja 3,5 lopputestissä. (Jatkossa käytämme alkutestistä merkintää AT ja lopputestistä LT). Lopputestin tehtävä oli huomattavasti vaikeampi, mistä kertoo se, että vertailuryhmän vastaavat pisteet olivat keskimäärin AT 3,34 ja LT 2,38. Vaikka tehtävien erilainen vaatimustaso otetaankin huomioon, ei tämän tehtävän osalta voida havaita oppimista tapahtuneen. Taito määritellä rakennelmaan käytettyjen palikoiden määrä ei siten näyttäisi kehittyneen.

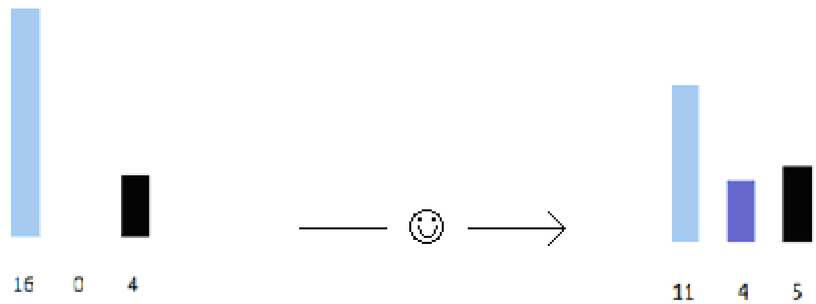
Tehtäväpari 2



KUVIO 11. Oppilaiden jakauma tehtävässä 2. ”Piirrä kuvan rakennelma sivusta, edestä ja ylhäältä.”

Tämä tehtäväpari mittasi avaruudellista hahmottamiskykyä. Tutkimusjoukon pisteet tässä tehtäväparissa nousivat seuraavasti: AT 3,1 ja LT 3,75. Lopputestin tehtävä oli vaativampi kuin alkutestin, mikä käy ilmi verrokkiryhmän keskiarvopisteistä: AT 3,17 ja LT 2,62. Tämän perusteella voidaan todeta, että tutkimusjoukossa ilmeni huomattavaa kehittymistä tehtävässä vaadituissa taidoissa.

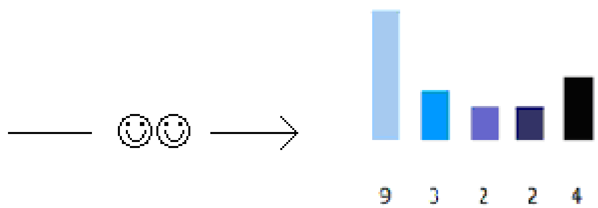
Tehtäväpari 3.



KUVIO 12. Oppilaiden jakauma tehtävässä 3. ”Kuinka monta pientä palikkaa muodostaa ison palikan?”

Tässä tehtäväparissa alkutestin tehtävä mittasi kykyä arvioida kappaleiden tilavuuksia. Lopputestissä taas piti osata muodostaa annettujen tietojen mukaan mielikuva Liisan tekemästä rakennelmasta, ja arvioida, kuinka monesta palikasta se koostuu. Näitä tehtäviä on vaikea verrata suoraan toisiinsa. Alkutestin tehtävän pystyi ratkaisemaan puhtaasti visuaalisen hahmottamisen kautta, ja se oli helpohko muutenkin. Lopputestin tehtäväannossa ei ollut valmiiksi annettua visuaalista kuvaa. Opetusta saanut ryhmä sai hieman alhaisemmat pisteet lopputestin tehtävästä kuin alkutestin tehtävästä: AT 4,2 -> LT 3,6. Lopputestin tehtävä oli kuitenkin selvästi vaativampi, koska verrokkiryhmän pisteet suorastaan romahtivat alkutestiin nähden: 2,93 -> 1,55. Tämän perusteella voidaankin todeta, että tutkimusjoukossa tapahtui intervention aikana oppimista lopputestin tehtävässä vaadituissa taidoissa.

Tilavuuslaskut



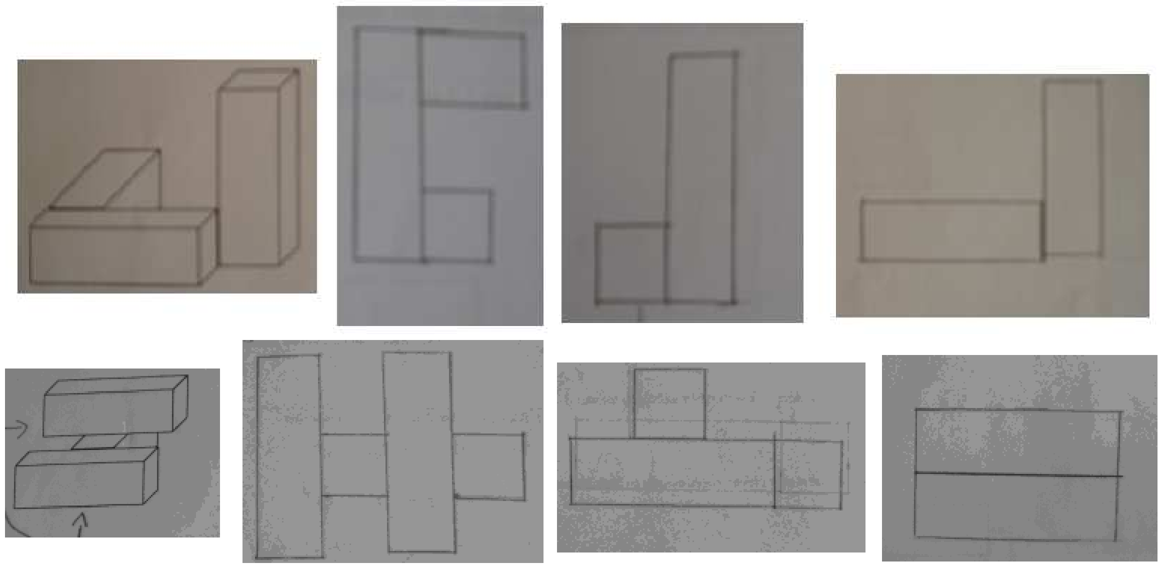
KUVIO 13. Oppilaiden jakauma lopputestin tilavuuslaskutehtävässä.

Lopputestin tilavuuslaskuista ilmeni, että 14 (varauksin 17) kahdestakymmenestä oppilaasta ymmärsi, että suorakulmaisen särmiön muotoisen astian tilavuus lasketaan: (pituus · leveys · korkeus), ja osasi suhteellisen virheettömästi suorittaa laskut. Tämä on varsin hyvä tulos siihen nähden, että varsinaiseen laskemisharjoitteluun ei juuri käytetty aikaa.

Kolme oppilasta, joilla kaikilla viimeisin matematiikan arvosana oli välillä 5-7, ei hallinnut lainkaan perustilavuuslaskuja. Kaksi heistä käytti pinta-alalaskennan kaavaa. Yhden laskentalogiikka oli vaikeasti määriteltävissä.

Mainittakoon, että yksi tilavuuslaskuista erittäin heikosti suoriutunut osoitti erittäin taitavaa kolmiulotteisten kappaleiden hahmottamista (ks. kuvio 14). Muilla tilavuuden laskemisessa heikosti onnistuneilla myös kolmiulotteinen piirtäminen näytti olevan vaikeaa. Ehkä hieman yllättäen juuri lopputestissä heikoimmin menestyneet oppilaat olivat kyselyssä sitä mieltä, että toiminnallisuus on erittäin tärkeää matematiikan oppimisessa.

Mielenkiintoinen löydös on se, että tytöillä ilmeni hieman enemmän oppimista jakson aikana kuin pojilla. Alku- ja lopputestejä vertailtaessa tyttöjen (n=8) pisteet nousivat +0,75/tyttö, kun pojilla (n=12) ne laskivat -0,58 /poika. Arvosanaltaan parempien ja heikompien oppilaiden alku- ja lopputestien pisteissä oli hieman suurempi ero. Arvosanan 8-10 saaneilla (n=13) pisteet nousivat keskimäärin 0,92 /oppilas. Arvosanan 4-7 saaneilla (n=7) pisteet laskivat keskimäärin 1,85 /oppilas. Pistemaksimi sekä alku-, että lopputestissä oli 20, joten pistemäärän muutoksen eroa ei voida pitää kovin merkittävänä. On otettava huomioon, että tutkittavan joukon pienuus ei anna kovin luotettavaa arvoa määrälliselle tarkastelulle.



Kuvio 14. Erään oppilaan piirrokset alku- ja lopputestin piirrostehtävässä

11.5 Tiivistelmä tuloksista

Alku- ja lopputestit osoittavat, että tutkimusjoukon geometrian taidot kehittyivät kuuden tunnin toiminnallisen opetuksen aikana. Erityisesti kolmiulotteinen hahmottamiskyky ja taito määritellä tilavuuksia kehittyivät. Tästä voi vetää johtopäätöksen, että tutkimuksessa esitelty opetuspaketti on toimiva.

12 POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, mikä merkitys toiminnallisuudella on matematiikan opetuksessa. Onko toiminnallisuus hauskuutta ja ajanvietettä itseisarvona pitävää puuhapedagogiikkaa, vai oppimisen kannalta käyttökelpoinen, ymmärtämistä tukeva opetusmenetelmä? Tässä luvussa pohditaan kysymyksiä tutkimustulosten ja taustateorian pohjalta. Tutkimusraportoinnissa on hyvä arvioida kriittisesti työn reliaabeliutta eli sitä, vastaavatko tulokset todellisuutta. (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 231-233.) Tässä luvussa myös työn luotettavuus ja eettiset tekijät ovat kriittisessä tarkastelussa.

12.1 Keskeiset tulokset

Tutkimusaineistosta kävi ilmi, että toiminnallisessa opetuksessa oppilaat arvostavat: 1 - hauskuutta ja innostavuutta 2 – ymmärtämistä helpottavaa asioiden konkreettista käsittelyä, sekä 3 - vaihtelua tavalliseen opetukseen. Tutkimukseen osallistuneet kuudesluokkalaiset olivat lähes yksimielisen vakuuttuneita siitä, että matematiikan opetusta tulisi toteuttaa (myös) toiminnallisesti. Suurin osa oli sitä mieltä, että on tärkeää tai erittäin tärkeää, että matematiikan opetuksessa olisi toiminnallisuutta.

Opetusjakson yksi painoalue oli avaruudellisen hahmottamisen kehittämisessä. Oppilaat näyttivätkin saaneet toiminnallisen, konkreettisen käsittelyn kautta uusia eväitä avaruudelliseen hahmottamiseen. Lopputestissä ilmeni alkutestiä parempaa kykyä hahmottaa kolmiulotteisen kappaleen rakennetta.

Testien perusteella näyttää siltä, että osa koulumatematiikalle tyypillisestä laskemisharjoittelusta voitaneen korvata toiminnallisella käsittelytavalla laskemistaitojen tästä kärsimättä; perustilavuuslaskut osattiin hyvin, vaikka niiden harjoittelu jäi täysin oppilaiden omaehtoisen, kotona tehtävän työskentelyn varaan.

12.2 Tulosten luotettavuus

Tämä työ on tapaustutkimus. Tutkimuksen kohderyhmänä on yksi luokka oppilaita, mistä johtuen otoskoko on pieni. Esimerkiksi aineiston määrällinen tarkastelu ei olisi ollut kovin hedelmällistä pienestä otoskoosta johtuen. Useampaa eri oppilasryhmää koskeva tutkimus tarjoaisi luotettavampaa, yleistettävämpää tietoa. Pro Gradu -tutkimuksen puitteissa tähän ei ollut mahdollisuuksia. Yhdenkin oppilasryhmän vastauksista saatiin kuitenkin riittävästi aineistoa toiminnallisen matematiikan opetuksen laadulliseen tarkasteluun.

Toiminnallista opetusta ei tässä tutkimuksessa verrattu mihinkään muuhun menetelmään. Tästä syystä oppimistuloksista ei voida vetää suoria johtopäätöksiä. Testeistä kävi ilmi, että oppimista tapahtui. Arvailun varaan kuitenkin jäi, miten oppimistulokset olisivat muuttuneet toisenlaisessa opetuksessa.

Tutkimukseen osallistunut luokka edustaa varsin kattavasti ryhmää ”kuudesluokkalaiset”. Taitotasoltaan ja sukupuolijakaumaltaan ryhmä oli riittävän heterogeeninen. Opetus, jota ryhmä tavallisesti sai, edustaa opettajan kuvauksen mukaan perinteistä suomalaista, oppikirjaa opetuksen runkona käyttävää opetusta. Olisivatko tutkimustulokset olleet toiset vaikkapa normaalikoululla, jossa oppilaat saavat harjoittelukoulun tavoista ja rakenteista johtuen hyvin vaihtelevaa opetusta? Entä mikä olisi ollut tilanne millä tahansa muulla suomalaisella alakoululla? Näihin kysymyksiin ei pystytä tämän tutkimuksen puitteissa antamaan ehdottoman totuudenmukaista vastausta.

Opetusjakson lyhyestä kestosta johtuen tutkimustuloksiin pitää suhtautua varauksella. Pitkäkestoisemmalla tutkimusinterventiolla olisi saatu luotettavampia tuloksia. Lyhyeen jaksoon liittyy monta oppimiseen vaikuttavaa oheismuuttujaa: ulkopuolelta tulevilla opettajilla ei ole esimerkiksi tarvittavaa oppilaantuntemusta, ja toisaalta oppilasryhmä saattaa käyttäytyä vieraiden läsnä ollessa normaalista poikkeavasti. Oppimiseen olennaisesti vaikuttava opettaja-oppilasvuorovaikutussuhde on erilaista ulkopuolisen henkilön toimiessa opettajana. Lyhyt jakso tuo mukanaan uutuudenviehätystä, mikä saattaa näyttää tutkittavan ilmiön positiivisessa valossa. Vasta kokonaisen lukuvuoden aikana toteutettua opetuskokeilua ja oppimistuloksia voitaisiin jo hyvin luotettavasti vertailla muuhun opetukseen.

Tutkimuksen luotettavuuden lisäämiseksi olisi hyvä pyrkiä triangulaatioon, mikä tarkoittaa tutkimuskysymysten tarkastelua mahdollisimman monesta eri näkökulmasta. (Tuomi & Sarajärvi 2004, 140-142.) Tässä tutkimuksessa aineistoa kerättiin kolmella eri tavalla: kyselyllä, testeillä sekä havainnoimalla. Teoriataustaa pyrittiin rakentamaan laajaksi. Myös pohdinnassa on tavoiteltu aiheen tarkastelua eri katsantokannoista.

Aineistonhankintaa on myös syytä tarkastella kriittisesti. Tutkimusaineisto kerättiin pääasiassa kyselyn sekä alku- ja lopputestien kautta. Se, että tutkittavana ryhmänä olivat alakoululaiset, tarjosi haasteen kysymysten asettelulle: niiden oli oltava riittävän strukturoituja, jotta aineisto vastaisi tutkimusongelmaan. Liian strukturoiduilla kysymyksillä taas helposti ohjaillaan vastauksia haluttuun suuntaan. Pyrimme avoimuuteen kysymysten asettelussa.

Joskus kyselyihin vastataan sen mukaan, minkälaisia vastauksia tutkijoiden oletetaan haluavan. Tästä syystä hieman alustimme kyselyä: sanoimme odottavamme rehellisiä, todellisia tuntemuksia kuvaavia vastauksia, mikä parhaiten edistää tutkimuksen tekemistä. Tästä huolimatta oppilaat eivät juuri nostaneet esille esimerkiksi toiminnallisuuden negatiivisia vaikutuksia. Oletus oli, että niitäkin olisi ilmennyt.

Valitsimme aineistonkeruumenetelmäksi kyselyn, joka on hyvä tapa saada kerättyä tietoa suurehkolta vastaajaryhmältä. Syvemmälle yksittäisten oppilaiden ajatusmaailmaan olisi kenties päästy haastattelujen avulla, mitä tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan tehty, koska kysely tarjosi tutkimuksen tavoitteita ajatellen riittävästi aineistoa.

12.3 Eettiset näkökulmat tutkimuksen toteuttamisessa

Tutkimuksenteon yhteydessä on huolehdittava menetelmien eettisyydestä. Kaikilta tutkimukseen osallistuneilta sekä heidän vanhemmiltaan kysyttiin lupa. Yhden oppilaan kohdalla lupaa ei saatu. Kyseinen oppilas osallistui opetukseen, muttei vastannut testeihin ja kyselyyn. Luokkaopetukseen liittyy ehdoton vaitiolovelvollisuus oppilaiden henkilökohtaisista asioista. Tästä on pidetty tutkimusraportoinnissa tiukasti kiinni.

Eettisiin kysymyksiin kuuluu myös tutkijoiden rehellisyys ja objektiivisuus. (Tuomi & Sarajärvi 2004, 132-133.) Jokainen tutkija edustaa omaa näkemystään tutkittavasta aiheesta, mikä asettaa haasteen puolueettomalle käsittelylle. Tutkijoilla saattaa esimerkiksi olla kiusaus parannella tutkimusaineistoa haluamaansa suuntaan. Mitä enemmän aineiston käsittelyssä on tulkintaa, sitä helpommin tutkijan subjektiivisuus tulee esille. Tässä tutkimuksessa on pyritty nostamaan aineistosta esiin ainoastaan se, mikä sieltä objektiivisesti oli nostettavissa. Raportoinnissa on pyritty noudattamaan tieteellisen tutkimuksenteon sääntöjä. Esimerkiksi teoriataustaa muodostettaessa tukeuduttiin mahdollisuuksien mukaan alkuperäisiin lähteisiin.

12.4 Pedagogista pohdintaa

12.4.1 Oppikirjan rooli opetuksessa

Opetusta on helppoa turvallista toteuttaa hyvän oppikirjan kautta. Ne ovat ammattilaisten tekemiä, ja samaa kirjasarjaa seuraamalla saavutetaan kattavasti opetussuunnitelmiin kirjatut oppisisällöt. Oppikirjaopetuksella on kuitenkin puutteensa. Eräs sellainen on tämän tutkimuksen aineistostakin esille noussut kaavamaisuus, ehkä jopa tylsyys. Joskus oppikirjan aukeama koostuu lähinnä mekaanisista, samalla kaavalla toistettavista laskuista. Laskurutiinien oppiminenkin on tärkeää, mutta vain osa siitä, mitä matematiikantunneilla voisi olla annettavanaan.

Matematiikantuntien piilo-opetussuunnitelma näyttää joskus olevan aukeaman täyttäminen lyijykynän jäljillä. Tämä on kertovinaan oppimisesta, mihin sudenkuoppaan astuvat usein sekä opettaja, että aukeaman täyttäjä itse. Tarkistuskirjan vastaus, opettajan taululle avaama esimerkki tai vierustoverin kirjasta jäljennetty ratkaisu ei tietenkään ole oppimista ilman omaa prosessointia. Toiminnallinen opetus saattaisi rohkaista osan passiivisista jäljentäjistä aktiivisiksi matematiikan pohtijoiksi.

Joskus oppikirjan tehtävistä voi selvitä ymmärtämättä asiasta yhtään mitään. Eräs esimerkki tästä löytyy opetusharjoittelukokemuksistamme: matematiikan oppimisvaikeuksista kärsinyt poika näytti suoriutuneen varsin hyvin tehtäväsivusta. Aiheena oli kymmenellä jakaminen ja kertominen. Jokaisen tehtävän alussa oli valmiiksi ratkaistu esimerkki, jonka perusteella oppilas joko lisäsi tai vähensi nollan kerrottavan tai jaettavan perään. Myöhemmin kävi ilmi, ettei oppilas ymmärtänyt lainkaan nollan lisäämisen tai vähentämisen matemaattisia perusteluja. Hän käytti useimmiten juuri tätä jäljentämiseen perustuvaa menetelmää ratkaistessaan tehtäviä.

Tamás Varga puhui abstraktion tiestä. Varga näki, että teoreettista haltuunottoa pitäisi lähestyä konkreettisten kokemusten kautta. Oppikirjojen edustama konkretia on joskus näennäistä. Oppikirjan ”konkreettinen” esimerkki saattaa olla konkreettinen ainoastaan asian jo ymmärtävän mielestä. Taustateoreetikoistamme myös muun muassa Silfverberg (1999) ja Räty-Záborszky (2006) ovat sitä mieltä, että geometrian opettamisessa ei pitäisi jättäytyä pelkän oppikirjan varaan. Monipuolisten tehtävien ja aktiviteettien kannalla olivat myös tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat.

12.4.2 Onko toiminnallinen opetus hyvää opetusta?

Raportissamme viitataan Räty-Záborskyn (2006) tutkimustuloksiin siitä, että suomalaiset oppikirjantekijät pitävät toiminnallisuutta tärkeänä geometrian opetuksessa. Jonkin verran vihjauksia ja vaihtoehtoisia kokeiluja toiminnallisuuden toteuttamiseksi kirjoissa annetaan, mutta niiden käyttämisestä oppikirjan tekijät eivät ole vakuuttuneita. Valmista toimintamateriaalia on kouluilla käytössä vaihtelevasti, ja vielä vaihtelevampaa on niiden käyttäminen. Useimmiten toimintamateriaalin joutuu tekemään itse, mihin ei katsota olevan aikaa.

Tässä tutkimuksessa toiminnallisen opetuksen tutkimista varten luotiin hyvin toiminnallinen opetuspaketti. Laskemisharjoittelulle ja abstraktion tavoittelulle jäi vain vähän aikaa, sillä ne jäivät lähes yksinomaan oppilaan omalle vastuulle kotitehtävien muodossa. Tämä ei ole se tapa, jolla matematiikkaa pitäisi aina ja joka paikassa opettaa, vaan myös laskemisharjoittelua tarvitaan. Suurin osa oppilaista oppi jaksollamme määrittelemään särmiön muotoisen kappaleen tilavuuden, mikä oli jakson yksi tavoite. Saattaa olla, että osalle oppilaista sopisi hyvin menetelmä, jossa abstraktion muodostaminen uusista asioista jäisi omalle vastuulle, vaikkapa juuri kotona suoritettavien tehtävien varaan. Osa kaivannee strukturoidumpaa, ehkä opettajajohtoisempaakin käsittelyä. Muutamat tutkimukseen osallistuneista oppilaista olisivat vielä tarvinneet lisäharjoittelua kyetäkseen määrittelemään kuvaan piirretyn suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen tilavuuden.

Toiminnallisuus ja konkreettisuus eivät automaattisesti takaa oppimista. Hauska tekeminen saattaa pitää yllä näennäistä, hetkellistä suoritusmotivaatiota, mutta jos se ei linkity matematiikan rakenteisiin, ei se myöskään edistä oppimista; tästä varoittelevat muun muassa von Glasersfeld (1995) sekä Abrahams & Millar (2008). Jälkimmäisten mielestä hyvää toiminnallista opetusta on sellainen, jossa jää konkreettisten havaintojen lisäksi aikaa myös pohtimiselle, selittämiselle sekä havaintojen ja teoreettisen mallin yhdistämiselle. Toiminnallinen opetus on syytä rakentaa niin, että toiminnan kautta tarjotaan oppilaille mahdollisuuksia tajuta itse, mitä muun muassa von Glasersfeld (1995) pitää olennaisena.

Huomasimme, että käyttämämme toimintamateriaalit kuten puupalikat houkuttivat välillä tekemään jotakin aivan muuta kuin tehtäväannon mukaista toimintaa. Jos toimintamateriaaleja käytettäisiin säännöllisesti ja vakiintuneesti, tällainen kokeileva palikkarakentelu todennäköisesti vähenisi. Mainittakoon, että joskus olisi varmasti suotavaa antaa oppilaiden myös vapaasti leikkiä ja rakennella. Kaiken ei tarvitse aina olla äärimmilleen strukturoitua. Vapaat palikkarakentelut näyttivät antavan paljon tyydytystä tekijöilleen. Rakennelmissa tavoiteltiin muun muassa vaativaa symmetriaa ja lujuusopin käytännön lainalaisuuksia. Avaruudellinen hahmottaminenkin sai todennäköisesti eväitä kehittyä. Ehkä rakentelu ei ollutkaan täysin hukkaan heitettyä aikaa?

12.4.3 Miten abstraktion tiellä edetään?

Abstraktion tien ensimmäiset vaiheet, kehollinen käsittely, konkreettisuus ja toiminnallisuus, nähdään usein lähinnä alkuopetukseen liittyvinä. Pitäisikö matematiikan opetuksessa kääntää automaattisesti abstrakti vaihde silmään, kun oppilaat ohittavat tietyn iän tai tason? Vastaus olisi kyllä, mikäli oppiminen olisi portaittain tai suoraviivaisesti ylöspäin etenevä tapahtuma, kuten vaikkapa van Hielen tasot vahvan hierarkkisesti ymmärrettynä, tai Vargan luoma käsite ”abstraktion tie” kirjaimellisesti tulkittuna antavat olettaa: ikään kuin tien päässä olisi jokin saavutettu abstraktion taso, jossa konkretiaa ei enää tarvita.

Mielestämme konkretiaa tarvitaan myös ylemmillä luokilla. Samaa mieltä kanssamme ovat muun muassa Forrester (1999 ja 2000) sekä hyvin vahvasti myös tutkimukseen osallistuneet kuudesluokkalaiset. Ajatukselle tulee tukea myös Silfverbergiltä (1999), joka toteaa, että vasta pieni osa peruskoulun päättävistä on siirtynyt van Hielen tasolle 3. Uskomme, että konkreettisesta käsittelystä ja aktiivisesta toiminnasta hyötyisivät nekin, joiden matemaattisissa taidoissa on jo valmiuksia abstraktille, matemaattiselle ajattelulle. Silfverberg esittää, että vaikka geometrinen käsite hallittaisiinkin eksplisiittisesti eli ymmärrettäisiin määritelmänsä kautta spesifioiduksi matemaattiseksi entiteetiksi, niin osa sen merkityssisällöstä kuitenkin aina määrittyy intuitiivisesti käsitteen visuaalisen merkityssisällön kautta. (Silfverberg 1999, 201.) Matemaattisen ymmärryksen rakentuminen on syklinen ja kumulatiivinen prosessi, jossa uusi tieto liittyy olemassa oleviin teoriarakenteisiin. Kaikilla matematiikan tasoilla, alkeellisilla ja vaikeammilla, on oma konkreettinen ja abstrakti ulottuvuutensa. Tällaista mallia ajattelun kehittymisestä edustavat esimerkiksi Piaget'n intra-, inter- ja trans-tasot (Sierpinska 1994). Myös Tikkanen (2008) toteaa, että abstraktion tiellä on hyvä kulkea molempiin suuntiin.

Ongelmana kuitenkin on, miten konkretisoida tai toiminnallistaa opetusta matematiikan sisältöjen edetessä korkeammille tasoille? Kysymystä pohtii muun muassa Puura (2004). Mielestämme opetuksen toiminnallistamiseen kannattaa panostaa myös ylemmillä luokilla. Toki tämä vaatii opettajalta luovuutta ja kekseliäisyyttä.

12.4.4 Monipuolista matematiikan opetusta

Ymmärtäminen on matematiikassa jopa tärkeämpää kuin tekninen laskutaito. Tätä mieltä on muun muassa Malaty (1993). Tähän päästäneen parhaiten lähestymällä matematiikkaa monesta eri näkökulmasta. Joskus koulumatematiikassa voi menestyä hyvinkin, vaikka ymmärryksessä olisi suuria puutteita. Tästä kertoo tosielämän esimerkki lukiolaisesta, jolla oli kiitettävä arvosana matematiikassa. Hän kertoi selvinneensä kokeista hyvin opettelemalla huolellisesti laskuesimerkit ja -kaavat. Hän kertoi osaavansa laskea, mutta ei läheskään aina ymmärtänyt laskemaansa. Lukiolainen tiesi, että termi -(-1) on yhtä kuin +1, muttei osannut sanoa miksi näin on. Laskukaavat taitavasti hallitsemalla ja esimerkkilaskut opettelemalla saattaa päästä yllättävän pitkälle – matemaattista taitoahan sekin on. Ilman ymmärrystä tulee kuitenkin ennen pitkää seinä vastaan. Avainsanoja hyvässä opetuksessa lienevät vaihtelevuus ja monipuolisuus. Eräs toimiva tapa voisi olla periaate: tunti toimintaa – tunti laskemista. Eräs näkökulma liittyy erilaisiin lahjakkuustyyppeihin. Gardner (2009) kehottaa käyttämään vaihtelevia opetustapoja muun muassa siksi, että mahdollisimman monen oppilaiden tarpeet tulisivat huomioiduiksi. Olipa oppilaalle ominaisin taipumus oppia minkälainen tahansa, lienee yksilönkin näkökulmasta katsoen tarpeellista vaihdella aika ajoin didaktista lähestymistapaa.

Toiminnallisuus on yksi varteenotettava, joskin opettajan kannalta ehkä työläs keino opettaa matematiikkaa. Toiminnallisuuden käyttämistä opetuksessa tukee monen tähän tutkimukseen osallistuneen oppilaan näkemys siitä, että toiminnallisen, konkreettisen käsittelytavan kautta matematiikkaa on helpompi ymmärtää.

Opettaja, joka normaalisti opetti tutkimukseen osallistunutta luokkaa, arveli ryhmän matematiikkamotivaation ainakin hetkellisesti kohonneen ”erilaisen” opetuksen ansiosta. Tämä oli hänen kertomansa mukaan nähtävissä myös jakson jälkeen. Ehkä palaaminen takaisin normaaliin työskentelyyn tuntui kahden toiminnallisen viikon jälkeen innostavalta? Ehkä matematiikka näytti iloisemmat kasvonsa toisella tavalla lähestyttäessä, mikä sai oppilaat huomaamaan myös ”tavallisen” koulumatematiikan positiivisemmassa valossa. Eräs oppilas mainitsikin kyselyssä saaneensa uuden näkökulman matematiikan opiskeluun.

Tutkimukseen osallistunut luokka opiskeli matematiikkaa pääasiassa oppikirjan pohjalta. Tätä Suomessa yleisimmin käytettyä tapaa ei kannata väheksyä – kertoohan esimerkiksi PISA -tutkimus selvää kieltään suomalaisen matematiikan opetuksen ansioista. Samalla kuitenkin esimerkiksi matematiikka-asenteissa olisi paljon parantamisen varaa.

(Kupari ym. 2004, 42-46.) Lisäksi julkisuudessa on ollut paljon keskustelua huonosta kouluviihtyvyydestä. Valtaosa tutkimukseen osallistuneista oppilaista piti positiivisena sitä, ”ettei tarvitse aina tehdä tylsiä kirjan tehtäviä.” Toiminnallinen opetusjakso sai oppilailta hyvän vastaanoton. Osalle toiminnallinen kaksiviikkoinen saattoi kuitenkin olla lähinnä vaihtelun vuoksi positiivinen kokemus. Saattaa hyvinkin olla, että asetelma kääntyisi päälaelleen pitkäaikaisessa, hyvin toiminnallisessa opetuksessa; toiminnallisen yliannostuksen jälkeen laskeminen oppikirjasta saattaa taas kiinnostaa enemmän.

12.4.5 Eriyttäminen

Suomen valttina PISA -tutkimuksissa on ollut tasaisuus. Saihan suomalaisten osallistujien heikoin neljännes koko vertailuryhmän parhaat tulokset. On hienoa, että Suomessa näyttää suurin osa peruskoululaisista saavuttavan arkielämässä tarvittavat laskemistaidot. Yksi hyvinvointiyhteiskuntamme peruspilareita on yksilöiden välinen tasa-arvo. Suomalaisessa koulujärjestelmässä esimerkiksi sosiaalinen tausta ei vaikuta saatavilla olevan opetuksen laatuun. Tämä näkyy muun muassa juuri PISA -tutkimuksen heikoimpien oppilaiden suhteellisen korkeana osaamisen tasona. Tästä meidän kannattaa pitää kiinni.

Merkille pantavaa kuitenkin on, ettei Suomi ole koskaan sijoittunut erityisen hyvin huippuyksilöiden osalta. Mistä tämä johtuu? Onko tilanteesta syytä olla huolissaan? Koulumatematiikkaa voidaan tarkastella monesta näkökulmasta. Yksi on arjessa tarvittava matematiikka, joka koskee kaikkia. Jokainen tarvitsee matematiikkaa päivittäin. Kyky suunnitella omaa talouttaan, tai vaikkapa sitä kuinka monta pakasterasiaa pitää ostaa mustikkaämpärillisen säilömiseksi, vaatii matemaattisia taitoja, joihin koululaitoksen pitäisi vähintäänkin pystyä vastaamaan. PISA -tutkimuksen valossa Suomessa voidaan olla tämän asian suhteen levollisin mielin.

Yhteiskunnan odotukset koulun matematiikan opetukselle ovat kuitenkin enemmän kuin jokaisen kansalaisen arkielämän matematiikkaa. Laskutaitoisten lisäksi tarvitaan myös huippumatemaatikkoja, eikä näitä hyvistä PISA -tutkimustuloksista huolimatta tahdo Suomessa löytyä. Matematiikan huippuosaamista tarvitaan lähes jokaisella tieteen ja tutkimuksen alalla taloustieteistä teknologisten innovaatioiden tuottamiseen. Suomen kaltaisella pienellä maalla ei ole varaa hukata lahjakkuuksiaan. Suomalainen koulu on omiaan tasapäistämään molempia ääripäitä, eikä huippulahjakkuuksien kehittämistä ehkä nähdä tarpeeksi tärkeänä. Moni lahjakas turhautuu koulussa haasteiden puutteeseen, koska suorittaminen yleisen vaatimustason mukaan ei vaadi ponnisteluja. Tästä saattaa olla seurauksena, ettei ponnistelu omien kykyjen ylärajoille onnistu myöhemminkään.

Monissa maissa, kuten Unkarissa, matematiikkaa opiskellaan tasoryhmissä jo alakoulussa. Tämä ei oikein istu suomalaiseen ajattelutapaan. Vilkaisu PISA -tuloksiin osoittaa, että Unkarin heikoimmat oppilaat eivät ole lähelläkään Suomen heikoimpien tasoa. Tästä meidän ei ole syytä tinkiä. Suomalaisopettajan on kyettävä toimimaan taidoiltaan hyvin heterogeenisissä ryhmissä, mikä asettaa vaatimuksia eriyttämiselle. Pitäisi pystyä toteuttamaan opetusta, joka avaisi mahdollisimman monta ovea matematiikan maailmassa sekä lahjakkaille**,** että heikommille oppilaille. On ajateltava heikompia: matematiikka ei saa näyttää vaikeammalta kuin se on. On otettava huomioon myös lahjakkaimpien tarpeet: he pystyvät ratkomaan paljon yleisiä vaatimuksia korkeammalla tasolla olevia matematiikan ongelmia; miksi pidättää ketään astumasta todellisia kykyjään vastaavalle tasolle?

Näemme Varga-Neményi -metodissa avaimen hyvään eriyttämiseen, vaikka menetelmä tunnutaan vaativuudessaan unohdetun synnyinmaassaan Unkarissa. Esimerkiksi menetelmälle ominaiset tehtävätyypit, joissa useat, vaativuudeltaan erilaiset vastaukset ovat mahdollisia, palvelevat heterogeenisen oppilasryhmän tarpeita.

Tulevina luokanopettajina ajatuksemme kallistuvat kaikesta huolimatta heikompien oppilaiden puoleen. Monille matematiikkajunan vauhti näyttää olevan liian kova, ja maisema vaihtuu liian nopeasti. Tämä saattaa jopa pelottaa, mikä saa jatkamaan matkaa silmät kiinni. Kun junasta kerran tipahtaa, ei uudelleen mukaan hyppääminen ole helppoa. Ezter Neményi (Lampinen & Korhonen 2010) toteaa, että opetuksessa voidaan käyttää oikopolkuja, mutta oppimisessa ei. Epäonnistuneille junamatkustajalle pitäisikin tarjota aitoja mahdollisuuksia hypätä uudelleen kyytiin. Joskus tämä vaatisi askelia taaksepäin, mihin ei dynaamisessa koulussa useimmiten ole mahdollisuuksia. Uskomme, että toiminnallinen lähestymistapa matematiikkaan saattaisi madaltaa kynnystä hypätä matematiikkajunaan uudelleen.

Toivoimme, että tähän tutkimukseen kuuluneesta toiminnallisesta opetuspaketista olisivat hyötyneet eniten nimenomaan heikommat oppilaat, sivuuttamatta kuitenkaan lahjakkaampien tarpeita. Ajatukseen ei varsinaisesti tullut tukea tutkimustuloksista, sillä arvosanan 8-10 omaavien alku- ja lopputestien pisteet osoittivat suurempaa kehitystä kuin arvosanan 4-7 saaneilla. Piste-ero ei tosin ollut kovin merkittävä, eikä siitä voi vetää suoria johtopäätöksiä, varsinkaan otannan ollessa näin pieni. Pohdintaa kyseinen löydös kuitenkin herätti: voisiko matematiikassa hyvin menestyneiden suurempi pistekehitys selittyä sillä, että lahjakkaampien on ylipäänsä helpompi omaksua uutta, kuten tutuista rutiineista poikkeavia toimintatapoja. Ehkä erilaisen opetusmenetelmän sisäistäminen vaatii heikommilla laskijoilla pidemmän ajan, jolloin se tuottaisi hedelmää vasta pidemmän ajan interventiossa. Opetusjaksolla ei ollut liiemmin henkilökohtaista ohjausta, mikä oli täysin tietoinen valinta – tällä pyrittiin toiminnallisen opetuksen tarkastelun puolueettomuuteen. Hitaammin oppivat tarvitsevat keskimäärin enemmän henkilökohtaista tukea kuin lahjakkaammat, olipa opetusmenetelmä minkälainen tahansa.

Lähes kaikki tutkimukseen osallistuneista oppilaista, mutta erityisesti juuri heikomman arvosanan omaavat, olivat kuitenkin sitä mieltä, että toiminnallisuus on tärkeää matematiikanopetuksessa. Saattaa olla, että heikompien heikkous suhteessa muihin ei tällä jaksolla tullut tavalliseen tapaan esille, mistä jäi positiivinen vaikutelma.

12.5 Jatkotutkimusaiheet

Tässä tutkimuksessa toiminnallisen opetuksen vaikutuksia ei suoranaisesti verrattu minkään muun opetustavan tuottamiin vaikutuksiin. Mukana olleiden oppilaiden kannanotot matematiikanopetuksesta pohjautuvat heidän kokemuksiinsa koulumatematiikasta, mikä tässä tapauksessa tarkoittaa tyypillistä, suomalaista oppikirjaperusteista opetusta. Mikäli aiheesta tehdään jatkotutkimusta, voisi olla paikallaan verrata toiminnallisesta opetuksesta syntyviä oppimistuloksia niin kutsuttuun tavalliseen opetukseen. Ennen vertailua ei voida vetää kovin varmoja johtopäätöksiä toiminnallisuuden merkityksestä oppimistuloksiin.

Eräs jatkotutkimuksen aihe voisi olla, olisiko toiminnallisuudesta apua joidenkin oppilaiden negatiivisiin matematiikka-asenteisiin? Tämä vaatisi pitkän aikavälin tarkastelua.

Tässä työssä toiminnallisuutta tutkittiin geometrian opetuksen kontekstissa. Voisiko toiminnallisuus tukea oppimista myös muilla matematiikan alueilla kuten murtoluvuissa tai yhtälöratkaisussa? Mahdollinen jatkotutkimuksen aihe tämäkin.

12.6 Työn merkitys

Perehtyminen toiminnalliseen matematiikkaan sai meidät vakuuttuneiksi siitä, että matematiikan opetuksessa on syytä käyttää monipuolisia, konkreettisia ja toiminnallisia opetustapoja. Ennen muuta työmme onkin arvokas oman opettajan työmme kannalta. Toivomme kuitenkin, että tutkimusraportin kautta myös muille opettajaksi opiskeleville ja opetusalalla työskenteleville välittyy viesti sisällöltään ja menetelmiltään monipuolisen matematiikanopetuksen tärkeydestä. Tässä raportissa esitellyt opetusideat ovat vapaasti kaikkien käytettävissä.

Kenties nykyistä useampi opettaja kokeilisi toiminnallisempaa opetusta, jos käytössä olisi helposti lähestyttävää materiaalia. Paljon toimintamateriaalia on kehitettykin, mutta kouluille asti sitä on päätynyt vaihtelevasti. Oppikirjaa on totuttu käyttämään ”valmiina” pakettina, jonka pohjalta opetusta on helppo toteuttaa. Mikäli olisi olemassa yhtä ”valmis” toiminnallisuuteen ohjaava paketti materiaaleineen kaikkineen, olisi sillekin käyttäjiä nykyistä enemmän. Oppimateriaalien tekijät: Tarttukaa haasteeseen!

LÄHTEET

Abrahams, I. & Millar, R. 2008. Does Practical Work Really Work? A study of the effectiveness of practical work as a teaching and learning method in school science. International Journal of Science Education 30, (14), 1945–1969.

Abrahams, I. 2009. Does Practical Work Really Motivate? A study of the affective value of practical work in secondary school science. International Journal of Science Education 31, (17), 2335–2353.

Andrews, A.G. 1996. Developing Spatial Sense – A Moving Experience. Teaching Children Mathematics 2, 290-293.

Arinen, P. & Karjalainen, T. 2007. PISA 2006 - Ensituloksia 15-vuotiaiden koululaisten luonnontieteiden, matematiikan ja lukemisen osaamisesta. Helsinki: Opetusministeriö.

Aro, T., Närhi, V. & Räsänen, T. 2004. Tarkkavaisuus. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro & T. Ahonen (toim.) Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä. Juva: PS-kustannus, 150-174.

Aunio, P., Hannula, M.M. & Räsänen, P. 2004. Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 198-221.

Battista, M.T. & Clements, D.H. 1996. Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. Journal for Research in Mathematics education 27, 258-292.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. 1988. The Effect of Instruction on Spatial Visualization Skills of Middle School Boys and Girls. American Educational Research Journal 25, (1), 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. 1985. Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. Educational studies in Mathematics 16, 389-409.

Bradley, S., Allsopp, D., Allsopp, W. 2007. Dynamic Concrete Instruction in an Inclusive Classroom. Mathematics teaching in middle school 13, (4), 244-248.

Dienes, Z. P. 1973. The Six Stages in the Process of Learning Mathematics. Berks: NFER.

Friel, S., Rachlin, S. & Doyle, D. 2001. Navigating through Algebra in Grades 6-8. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Forrester, R.1999. Practical Activities for Post-16 Mathematics, British Society for Research into Learning Mathematics (BSRLM**)**.

Forrester, R. 2000. Practical Activities for Post-16 Mathematics, Teaching and Learning Aids and Materials (Hands-on) in Mathematics Education (TSG5 of the 9th International Congress on Mathematical Education), 21-30.

Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T.P. & Fennema, E. 1997. Children`s conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education 28, 130-162.

Gardner, H. 2009. Multiple approaches to understanding. Teoksessa K. Illeris (toim.) Contemporary theories of learning. London: Routledge, 106-115.

Gardner H., Kornhaber, M.L. & Wake W.K. 1999: Intelligence-multiple perspectives. Harcourt Brace College Publishers.

Gardner, H. 1993. Frames of Mind – The Theory of Multiple Intelligences. London: Fontana Press.

Goral, M.G. 2009. Take Time For Action – From Kinesthetic Movement to Algebraic Functions. Mathematics teaching in middle school 14, (7).

Haapasalo, L. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 2.

Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 50-83.

Hannula, M. S. 2004.Affect in mathematical thinking and learning. Turun yliopiston julkaisuja. Turku: Painosalama Oy.

Heikkinen, L.T. 2001. Toimintatutkimus – toiminnan ja ajattelun taitoa. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 195.

Hirsjärvi S., Remes P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. Hämeenlinna: Kariston kirjapaino.

Jensen, Eric. 2001. Arts with the Brain in Mind. Alekxandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development 2001.

Jones, M.G. 2009a. Transfer, Abstraction, and Context. Journal for Research in Mathematics Education 40, (2), 80-89.

Jones, M.G. 2009b. Examining Surface Features in Context. Journal for Research in Mathematics Education 40, (2), 94-96.

Kaasila, R. 2000. ”Eläydyin oppilaan asemaan”: luokanopettajaksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsitysten ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa. Lapin yliopiston julkaisuja 32.

Kaminski, J.A., Sloutsky, V.M. & Heckler, A.F. 2008. The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. Science, 320, 454-455.

Kaminski, J.A., Sloutsky, V.M., & Heckler, A.F. 2009. Concrete Instantions of Mathematics: A Double-Edged Sword. Journal for Research in Mathematics Education 40, (2), 90-93.

Karjalainen, O. 1982. Matematiikan opetuksen affektiiviset tavoitteet ja niiden toteutumisen arvioiminen peruskoulun ala-asteella. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 10.

Keltikangas-Järvinen, L. 1994. Hyvä itsetunto. Juva: WS bookwell Oy.

Koponen, R. 1994. Asenteet matematiikkaa kohtaan. Jyväskylän yliopisto. Opettajakoulutuslaitos. Tutkimuksia 56.

Kupari P., Reinikainen P., Nevanpää T., & Törnroos, J. 2001. Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Jyväskylä: Koulutuksentutkimuslaitos. Jyväskylän Yliopisto.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A. & Puhakka, E. 2003. Nuoret osaajat, PISA 2003 -tutkimuksen ensituloksia. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmaratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 298.

Liben, L.S.1981. Spatial representation and behavior across the life span: Multiple perspectives. Teoksessa L.S. Liben, A.H. Patterson & N. Newcombe (toim.) Spatial representation and behavior across the life span: Theory and application. New York: Academic Press, 3-36.

Lindgren, S. 2004. Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 381-396.

Linnanmäki, K. 2004. Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 241-254.

Malaty, G. 1993. Matematiikan didaktiikka-sarja. Geometrinen ajattelu 1. Tampere: Weilin+Göös.

Marttinen, M., Ahonen, T., Aro, T. & Siiskonen, T. 2004. Kielen kehityksen erityisvaikeus. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro & T. Ahonen (toim.) Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä. Juva: PS-kustannus, 19-32.

Miller, S.P. & Mercer, C.D. 1993. Using Data to Learn about Conrete-Semiconcrete-Abstract Instruction for Student with Math Disabilities. Learning Disabilities Research and Practice 8, (2), 89-96.

Montessori, M. 1981. Dr. Montessori’s own handbook by Maria Montessori. New York: Schocken Books.

Moore, W.P. 1991. The Faxon Montessori Magnet Elementary school, 1990-1991. Summative Evaluation. Kansas City Public Schools Mo.

Pehkonen, E. 1985. Peruskoulun geometrian opettamisen periaatteista ja niiden seurauksista opetukseen. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 32.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 195.

Perttula, J. 2005. Kokemus ja kokemuksen tutkimus: Fenomenologisen erityistieteen tieteenteoria. Teoksessa J. Perttula & T. Latomaa (toim.) Kokemuksen tutkimus. Merkitys – tulkinta – ymmärtäminen. Tampere: Juvenes Print, 115-162.

Piaget, J. 1988. Lapsi oman maailmansa rakentajana. Kuusi esseetä lapsen kehityksestä. Porvoo: WSOY.

Puura, P., Ollila, A. & Räsänen, P. 2004. Matematiikka. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro & T. Ahonen (toim.) Sanat sekaisin? Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä. Juva: PS-kustannus, 97-121.

Räsänen, P. & Ahonen, T. 2002. Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen, T. Ahonen, T. Korhonen, M. Korkman & T. Riita (toim.) Oppimisvaikeudet. Neuropsykologinen näkökulma. Helsinki: WSOY, 191-234.

Räty-Záborszky, S. 2006. Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja matematiikan oppikirjan tekijöiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta ja oppimisesta vuosiluokilla 1-6. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 112.

Schlöglmann, W. & Kepler, J. 2007. Beliefs concerning mathematics held by adult students and their teachers. Teoksessa K. Hoskonen & M. S. Hannula (toim.) Current State of Research on Mathematical Beliefs XII. Proceedings of the MAVI-12 Workshop, May 25.-28. 2006. University of Helsinki. Research Report 288.

Sierpinska, A. 1994. ”Understanding Mathematics” Studies in Mathematics Education. Series: 6.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto, Tampere.

Simon, M.A. 1996. Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. Educational Studies in Mathematics 30, (2), 197-210.

Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin” Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteellisiä julkaisuja 337.

Tikkanen, P. & Lampinen, A. 2005. Unkarilainen Varga-Neményi matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Tutkiva opettaja. Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. 2/2005. Tuope: Jyväskylä. 74-88.

Tolvanen, L. 2003. CP-vamman vaikutus puheeseen, kieleen ja kommunikaatioon. Teoksessa K. Launonen & A-M. Korpijaakko-Huuhka (toim.) Kommunikoinnin häiriöt. Tampere: Tammer-Paino Oy.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2004. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Uusikylä, K. 1996: Isät meidän – Luovaksi lahjakkuudeksi kasvaminen. Juva: WSOY:n graafiset laitokset.

Vainionpää, T., Mononen, R. & Räsänen, P. 2004. Matemaattiset valmiudet. Teoksessa T. Siiskonen, T. Aro, T. Ahonen & R. Ketonen (toim.) Joko se puhuu? Juva: PS-kustannus, 292-301.

Varga, T. 1976. On primary school teacher's mathematics. Educational Studies in Mathematics 7, (1), 171-177.

von Glasersfeld, E. 1995. "Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning." Studies in Mathematics Education. Series: 6.

Välijärvi J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P. & Arffman, I. 2002. The Finnish Success in Pisa and Some Reasons Behind It. Jyväskylä.

Witzel, B.S., Mercer, C.D., Miller, M.D. 2003. Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties: an Investigation of an Explicit Instruction Model. Learning Disabilities Research and Practise 18, (2), 121-131.

OPPIKIRJALÄHTEET

Lilli, M., Putkonen, H. & Sinnemäki, J. 2003. Matikkamatka Opettajan opas 4 syksy. Helsinki: Tammi.

Vähäpassi A., Hartikainen S. & Häggblom, L. 1998. Mieti ja laske. Helsinki: Kirjayhtymä.

SÄHKÖISET LÄHTEET

Astala, K., Kivelä, S.K., Koskela, P., Martio, O., Näätänen, M. & Tarvainen, K. 2005. Pääkirjoitus. Matematiikkalehti Solmu 1. [viitattu 30.3.2010] Saatavilla www.muodossa: <URL:http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/paak.pdf

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. 2003. Rethinking Characterizations of Beliefs. In G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) Hidden Variable in Mathematics Education? USA: Kluwer academic publishers. [Viitattu 30.3.2010] Saatavilla www.muodossa: <URL: (http://site.ebrary.com/lib/jyvaskyla/Doc?id=10067541&ppg=4

Herold, Z. 2002. Matematiikkaa unkarilaisittain -projekti. Taustat ja toiminta Suomessa. [Viitattu 12.3.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2003/unkari/herold/>.

Jirotková, D. & Littler**,** G.H**.** 2003. Insights into Pupils's Structures of Mathematical Thinking Through Oral Communication. European Research in Mathematics Education III. Thematic Working Group 3. Building Structures in Mathematical Knowledge. [Viitattu 3.5.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Jirotkova_cerme3.pdf

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Tampereen yliopisto. [Viitattu 13.4.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://acta.uta.fi/pdf/951-44-6204-1.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findel, B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Mathematics learning study committee. Washington: National Academy Press. [Viitattu 2.4.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://site.ebrary.com/lib/jyvaskyla/docDetail.action?docID=10038695

Näätänen, M. 2000. Vaikutteita opetukseen Unkarista. Matematiikkalehti Solmu 2/2000. [viitattu 8.4.2010] Saatavilla www.muodossa:<URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2000/3/naatanen2.html

Näätänen, M. 2001. Unkarilaisesta matematiikan opetuksesta suomessa ja Englannissa. Matematiikkalehti Solmu 2/2001. [viitattu 8.4.2010] Saatavilla www.muodossa:<URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2001/2/naatanen1.html

Näätänen, M & Szalontai, T. 2002. Muutamia ajatuksia matematiikan opetuksesta. Matematiikkalehti Solmu 3/2002. [viitattu 8.4.2010] Saatavilla www.muodossa:<URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2002/3/tibor/

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. [viitattu 8.4.2010] Saatavilla www.muodossa:<URL: http://www02.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf

Peterson, S.K. 1987. Comparing the Concrete to Abstract Teaching Sequence to Abstract Instruction for Initial Place Value Skills. Multidisciplinary Diagnostic and Training Program. University of Florida. [viitattu 3.5.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/13/46/86.pdf

Pickering, J.S. 1978. Succesful Applications on Montessori Methods with Children at Risk for Learning Disabilities. Educational Resources Information Center. [viitattu 8.4.2010] Saatavilla www.muodossa:<URL: http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/23/f4/05.pdf]

Risku, A.-M. 2001. Unkarilaisvaikutteinen matematiikan opetus (1. luokka). Matematiikkalehti Solmun verkkolehti. [viitattu 9.4.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2000/alkuopetus/amr.html

Szalontai, T. 2002a. Matematiikan opettamisesta. Matematiikkalehti Solmun verkkolehti. [viitattu 9.4.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/luento1a.html

Szalontai, T. 2002b. Lukujärjestelmät. Matematiikkalehti Solmun verkkolehti. [viitattu 9.4.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/luento5a.html

Uusikylä, K. 2006. Eläköön erilaisuus. [viitattu 23.3.2010]. Saatavilla www.muodossa: <URL: http://www.lakk.fi/default.asp?id=06ojlf32yup

MUUT LÄHTEET

Korhonen, M. 2001. Lelut fysiikan opetuksessa. Dimensio 2/01, 22-26.

Kupari, P. 2000. Matematiikkauskomukset ja opettajan työ. Dimensio 3/2000, 8-14.

Lampinen, A. & Korhonen H. 2010. Matematiikkaa kaikille – Esther Neményin haastattelu. Dimensio 1/2010, 18-22.

Ojala, U. 2004. Matematiikkaa kaikissa käänteissä. Lastentarha 3/2004.

LIITTEET

Liite 1: Pro Gradu -tutkielman kyselylomakkeen saatekirje

Opiskelemme Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksella ja teemme Pro Gradu -tutkielmaa. Työssämme tutkimme miten toimit ja ajattelet matematiikkaa opiskellessasi.

Kyselystä saamamme tulokset käsittelemme niin, ettei nimesi tule julkisuuteen. Vastauksesi ovat työmme kannalta hyvin tärkeitä, ne auttavat meitä kehittämään matematiikan opetusta.

Kyselyssä on kahdella sivulla yhteensä 8 kohtaa. Vastaa kaikkiin kohtiin mahdollisimman rehellisesti. Vastauksesi eivät vaikuta matematiikan arvosanaasi.

Kysymyksissä esiintyvä sana <u>toiminnallisuus</u> tarkoittaa muun muassa pitämillämme matematiikan tunneilla tekemääsi rakentelua, mittaamista, punnitsemista ja erilaisten toimintavälineiden käyttöä.

Kiitos!

Ystävällisesti,

Risto Anttila ja Juuso Eskelinen

Liite 2: Pro Gradu -tutkielman tutkimuslupalomake

Opiskelemme Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksella ja teemme Pro Gradu -tutkielmaa. Työssämme tutkimme oppilaiden käsityksiä

toiminnallisuuden merkityksestä matematiikan oppimisessa. Pidämme kuudennen luokan oppilaille kuusi matematiikan tuntia, jonka jälkeen tarkoituksenamme on selvittää kyselylomakkeen avulla kunkin oppilaan käsityksiä toiminnallisuuden merkityksestä hänen matematiikan oppimisessaan.

Oppilaiden vastaukset ovat työmme kannalta hyvin tärkeitä, joten toivomme saavamme teiltä luvan lapsellenne kyselylomakkeen täyttämiseen ja vastausten käyttämiseen tutkimuksessamme. Vastaukset käsittelemme nimettöminä luottamuksellisesti.

Lomakkeen palautus pe 30.10.2009 mennessä.

Ystävällisesti,

Risto Anttila risto.anttila@jyu.fi 050 540 3234

Juuso Eskelinen juuso.eskelinen@jyu.fi 044 321 0779

Lapseni voi osallistua yllä kuvailtuun tutkimukseen:

Kyllä ______ Ei______

Huoltaja___________________________ Huoltaja___________________________

allekirjoitus ja nimenselvennys

Liite 3: Pro Gradu -tutkielman kyselylomake

Nimi:____Ikä:________

1. Kerro jokin mielestäsi onnistunut kokemus matematiikan opetusjaksolta.

2. Kerro minkälaisia tunteita koit matematiikan <u>toiminnallisissa</u> oppimistilanteissa?

3. Jos <u>toiminnallisuus</u> auttoi matematiikan oppimistasi, kerro miksi.

4. Jos <u>toiminnallisuus</u> haittasi matematiikan oppimistasi, kerro miksi.

5. Pidän toiminnallisuutta tärkeänä matematiikan tunneilla. (ympyröi mielestäsi sopivin numero)

1 eri mieltä

2 jokseenkin eri mieltä

3 ei samaa eikä eri mieltä

4 jokseenkin samaa mieltä

5 samaa mieltä

6. Mikä ilahdutti toiminnallisessa matematiikassa?

___

___

___

7. Mikä jäi harmittamaan toiminnallisessa matematiikassa?

___

___

___

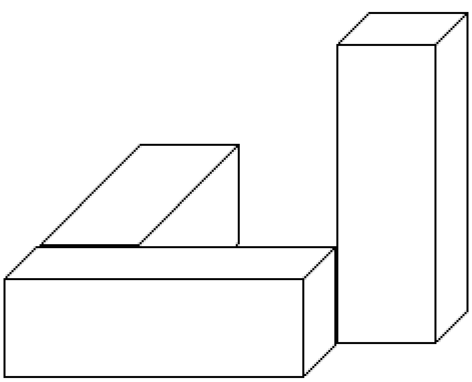
8. Haluamme vielä lopuksi tietää, mikä oli viimeisin matematiikan arvosanasi. ___

Kiitos vastauksistasi!

Liite 4: Alkutesti

1. Kuinka monta palikkaa valkokankaalla näkyvässä rakennelmassa on?

2. Kuvan rakennelma on tehty 2 cm * 2 cm * 8 cm palikoista. Piirrä rakennelma edestä, sivusta ja ylhäältä.



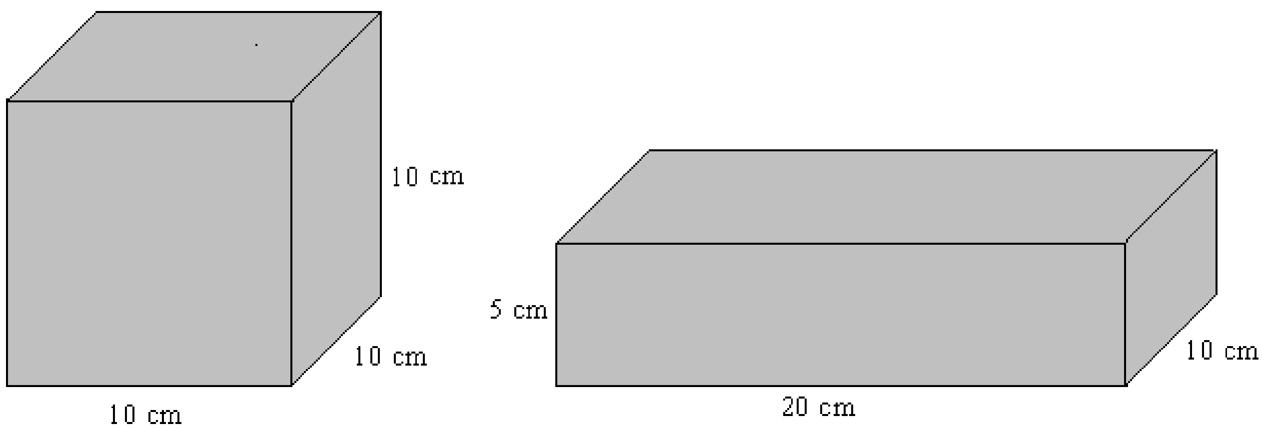
3. Opettajan pöydällä on kaksi eri kokoista palikkaa. Kuinka monta pientä palikkaa pitää laittaa yhteen, että niistä tulee ison palikan kokoinen rakennelma?

4. Pekka päälystää kuvassa olevat palikat paperilla.

a) Riittääkö 20 cm * 30 cm kokoinen paperiarkki palikan **A** päällystämiseen.
b) Riittääkö 20 cm * 30 cm kokoinen paperiarkki palikan **B** päällystämiseen.

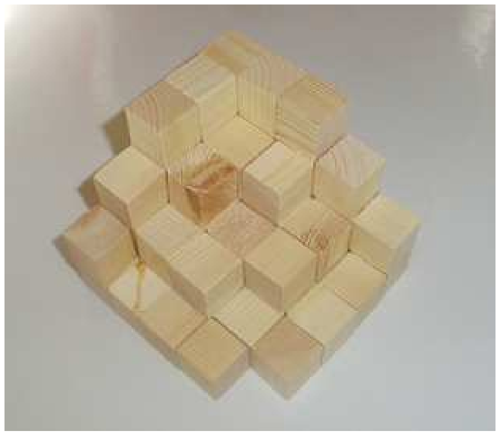
Jokainen sivu pitää päällystää. Paperia saa leikata osiin.

Tee tarvittavat laskutoimitukset tehtäväpaperin kääntöpuolelle.



Liite 5: Lopputesti

1. Kuinka monta palikkaa valkokankaalla näkyvässä rakennelmassa on?



2. Liisalla on palikoita, joiden jokainen sivu on 2 cm pitkä. Hän rakentaa niistä kuution, jonka jokainen sivu on 8 cm pitkä. Kuinka monesta pikkukuutiosta rakennelma koostuu?

3. Pekalla on astiat A ja B sekä rautamöhkäle

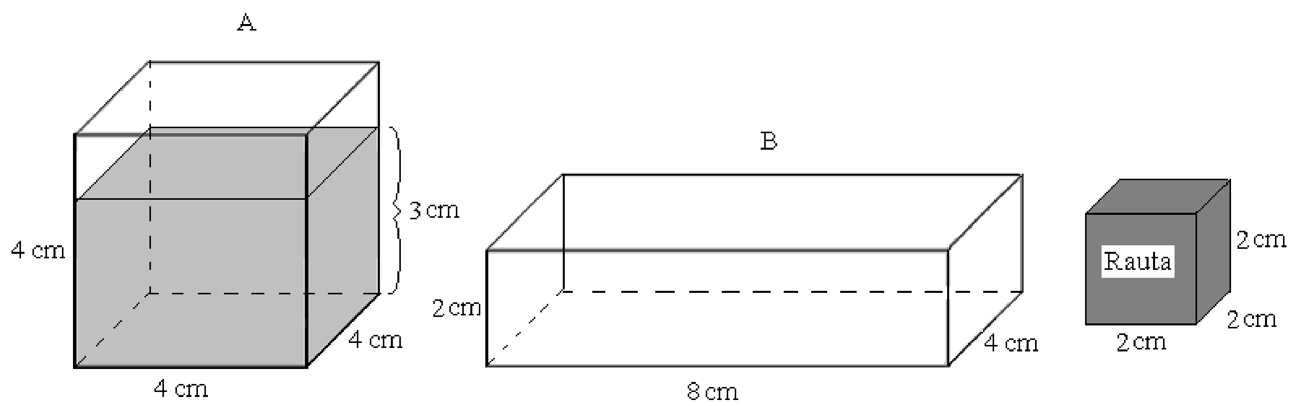
Laske astian A tilavuus

Laske astian B tilavuus

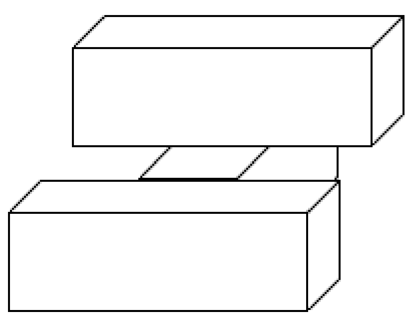
Kuinka paljon astiassa A on vettä?

Pekka laittaa seuraavaksi kuvan rautamöhkäleen astiaan B. Paljonko veden pinta nousee?

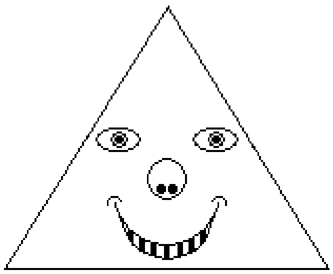
Pekka kaataa astiassa A olevan veden astiaan B. Kuinka korkea vesikerros astiaan B syntyy?



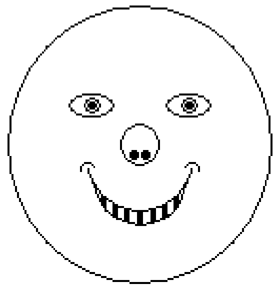
4. Kuvan rakennelma on tehty <u>2 cm * 2 cm * 6 cm palikoista</u>. Piirrä rakennelma edestä, sivusta ja ylhäältä.



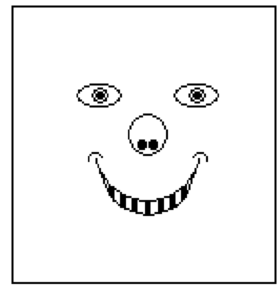
Liite 6: Geometrisiä muotoja ja kappaleita



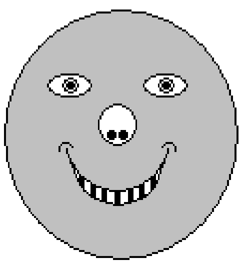
Konsta Kolmio



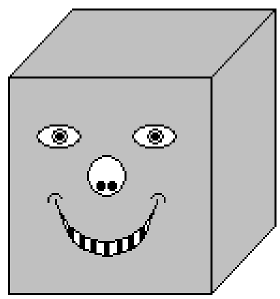
Yrjö Ympyrä



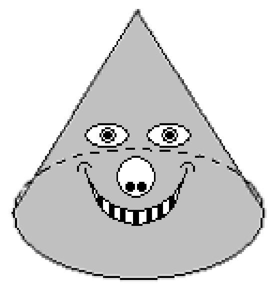
Nelli Neliö



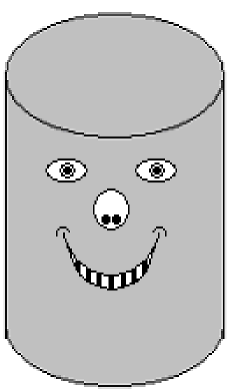
Paavo Pallo



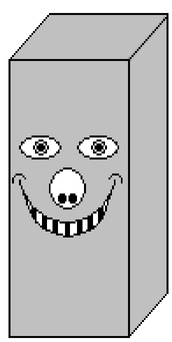
Kusti Kuutio



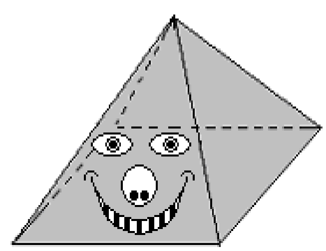
Kari Kartio



Liisa Lieriö



Simo Särmiö



Pirkko Pyramidi

Simo Särmiö

- Olen sukua Kustille.
- Maitopurkki muistuttaa minua.
- Minussa on kuusi osaa.
- Kusti voi olla minä, mutta minä en voi olla Kusti.
- 90 on minulle tärkeä luku.
- Kattoni ja pohjani ovat aina saman kokoiset ja muotoiset.

Yrjö Ympyrä

- En vie yhtään tilaa.
- Ympäryysmittani on noin kolme kertaa halkaisijani pituinen.
- Pinta-alani on noin ¾ sen neliön pinta-alasta, jonka sisään minä juuri ja juuri mahdun.
- Liisa seisoo päälläni.
- Minussa on säde.

Nelli Neliö

- Minussa on neljä tasavertaista osaa.
- 90 ja 360 ovat minulle tärkeitä lukuja.
- Pinta-alani lasketaan kanta * korkeus jaettuna kahdella.
- Jos minut lävistetään, syntyy kaksi Konstaa.
- Kusti seisoo päälläni.

Konsta Kolmio

- Pirkko tarvitsee neljä minua ollakseen olemassa.
- 180 on minulle tärkeä luku.
- Liikenteessä avullani varoitetaan.
- Pinta-alani lasketaan kuten Nellin pinta-ala, paitsi että minut pitää jakaa vielä kahdella.
- Saatan näyttää sivusta päin juuri samalta kuin Kari

Kari Kartio

- Kyöpelivuoren hatuutehtaassa on otettu mallia minusta.
- Olen muumitalon suojana.
- Minua ei kannata lyödä paljaalla nyrkillä, ainakaan ylhäältä päin.
- Minut liitetään usein jäätelöön.
- Minussa on vain kaksi osaa

Pirkko Pyramidi

- Minussa ei ole pyöreää kohtaa.
- Pysyn pystyssä viidessä eri asennossa.
- Minussa on neljä Konstaa ja yksi Nelli.
- Olen teräväpäinen!
- Viihdyn Egyptissä.

Kusti Kuutio

- Minussa olevaa Nelliä kutsutaan myös tahkoksi.
- Muotokuvani voisi tehdä 12 samanpituisesta tikusta.
- Minussa on yhtä monta kulmaa kuin STOP-merkissä.
- Minut sekoitetaan usein Simoon, mutta olen paljon säännöllisempi kuin hän☺
- Kaverini haukkuvat minua joskus palikaksi☹

Liisa Lieriö

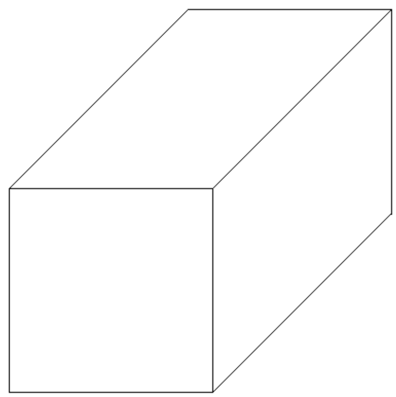
- Minussa on kolme osaa
- Muun muassa Teemu Selänne tarvitsee minua työssään.
- Jos minut katkaistaan vaakasuorassa kahteen osaan, saadaan kaksi minua.
- Onttona ollessani sisällän usein Pringlessejä.
- Pysyn pystyssä Yrjön päällä, mutta jos minut kaadetaan, lähden herkästi pyörimään.

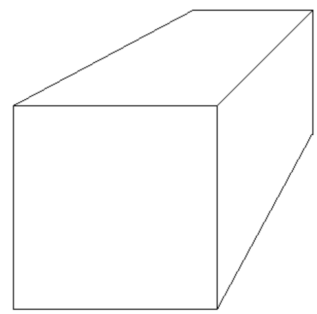
Paavo Pallo

- Sinunkin jalkasi kutittavat ihoani!
- Ronaldo ja Beckham satuttavat usein minua☹
- Avaruudessa olen yleisin muoto.
- En pysy helposti paikoillani.
- Näytän samalta joka suunnasta katsottuna.

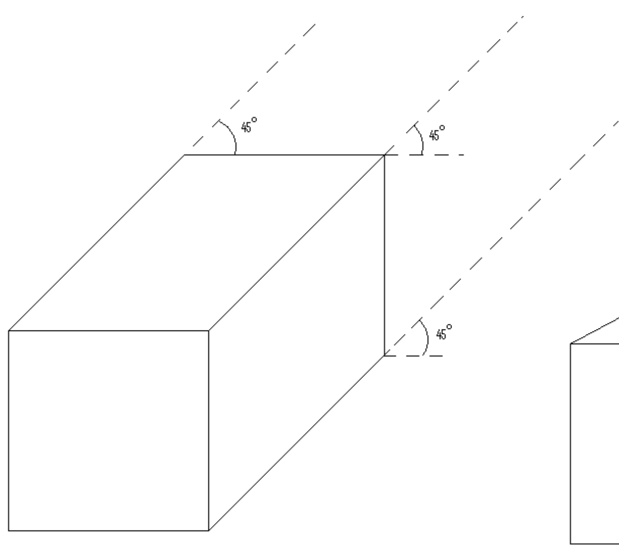
Liite 7: Geometristen kappaleiden piirtäminen

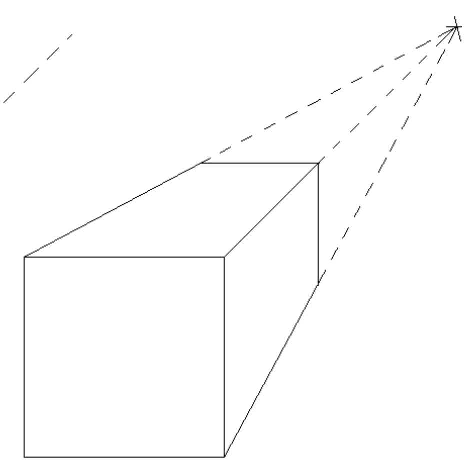
Miten seuraavat kuvat eroavat toisistaan?





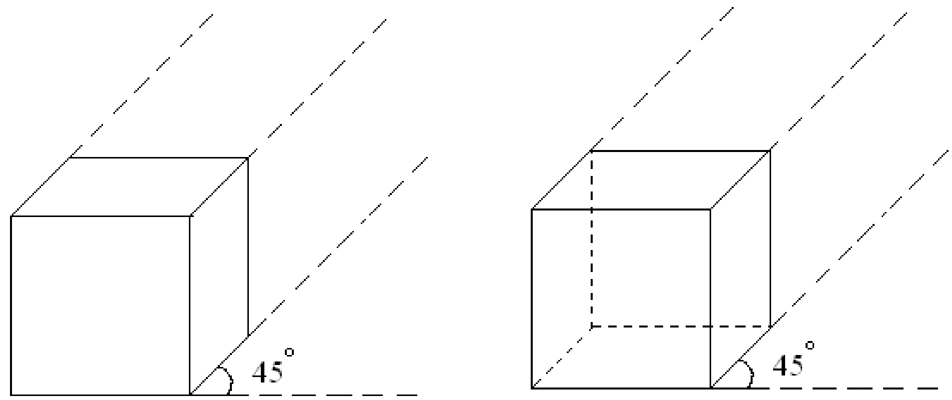
Molemmat kuvat esittävät samanlaista särmiötä. Kuvaustapa on ainoastaan erilainen.





Vasemmanpuoleista tapaa käytetään esimerkiksi matemaattisten piirroksien tekemisessä. Oikeanpuoleinen kuva kertoo todellisemmin sen, minkälaisen kuvan ihmisen silmä näyttää.

Esimerkki 1: Kuutio



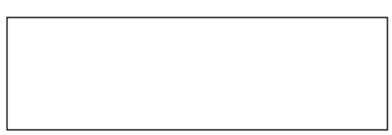
- Etuseinä kuvataan normaalisti, samoin takaseinä.

- Jos halutaan piirtää myös kappaleen piilossa olevat ääriviivat, käytetään katkoviivaa.

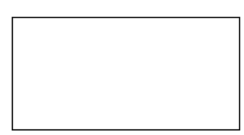
- Kappaleen syvyyssuuntaan kulkevat ääriviivat piirretään **45 asteen kulmaan**. Ne piirretään **puolet lyhyemmiksi** kuin ne todellisuudessa ovat.

- Kolmiulotteisesti piirrettyinä geometriset kappaleet näyttävät siltä, kuin niitä katsottaisiin etu-yläviistosta, 45 asteen kulmassa.

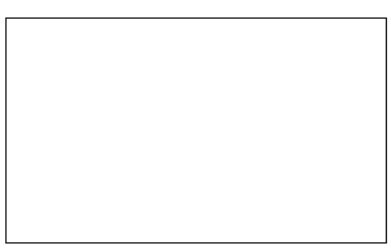
Esimerkki 2: Särmiö



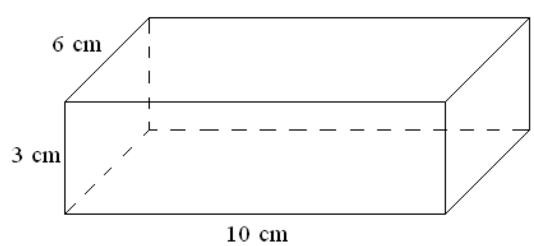
Edestä



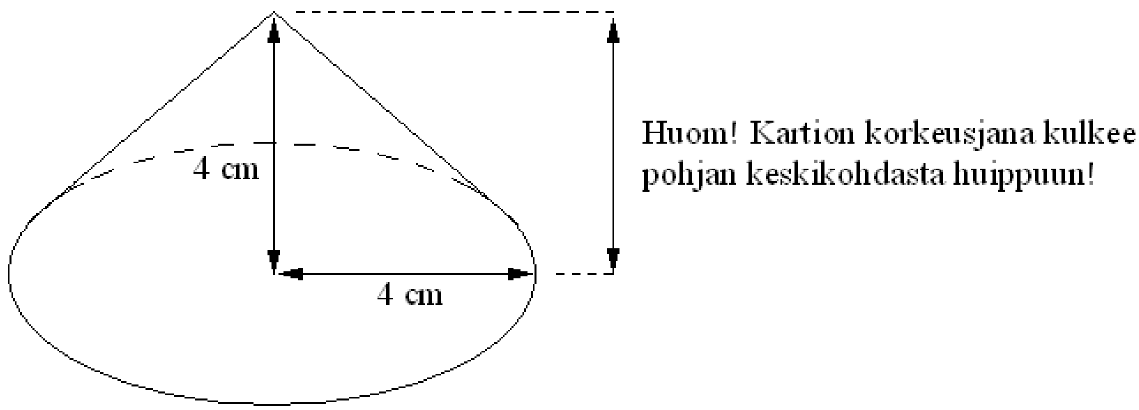
Sivusta



Ylhäältä



Esimerkki 3: Kartio

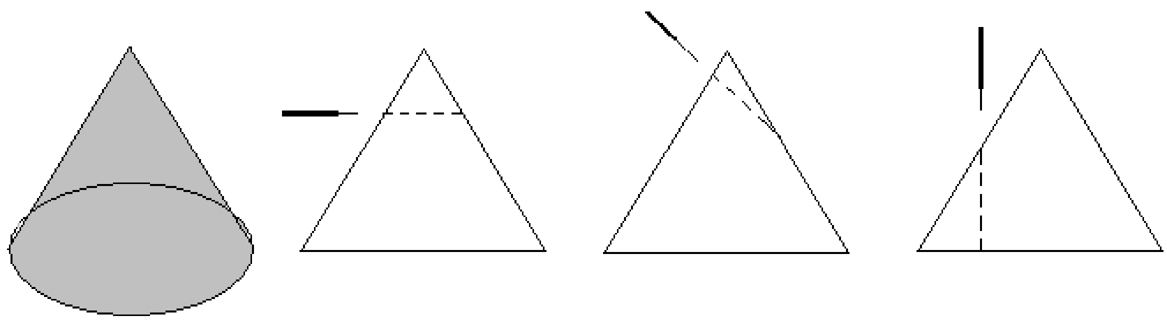


Liite 8: Geometristen kappaleiden leikkaamista

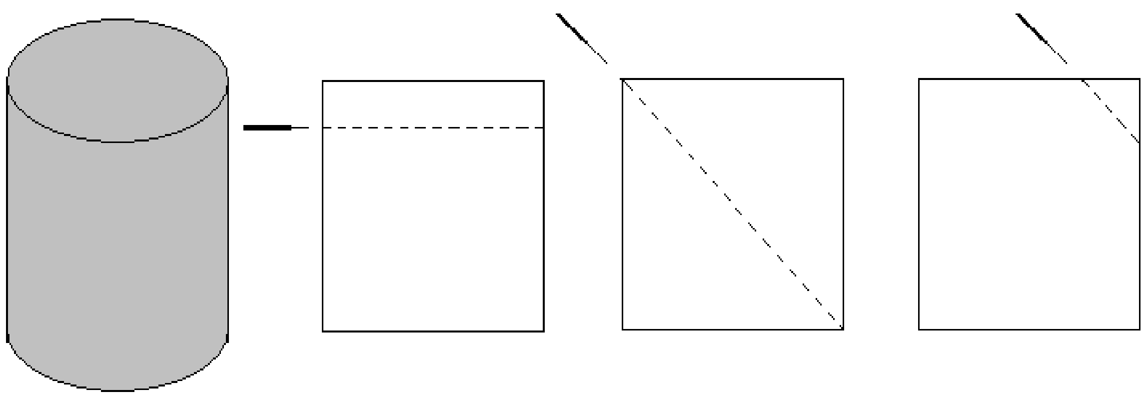
Ottakaa pareittain polyuretaanista tai muovailuvahasta tehdyt kartio, lieriö, pyramidi, särmiö ja pallo, yksi kappale kutakin.

Seuraavissa kuvissa on esitelty kolme erilaista tapaa leikata kukin kappale. Kuvittele, miltä kappale näyttää leikatusta kohdasta. Piirrä. Leikatkaa lopuksi veitsellä kappaleet katkoviivoja pitkin.

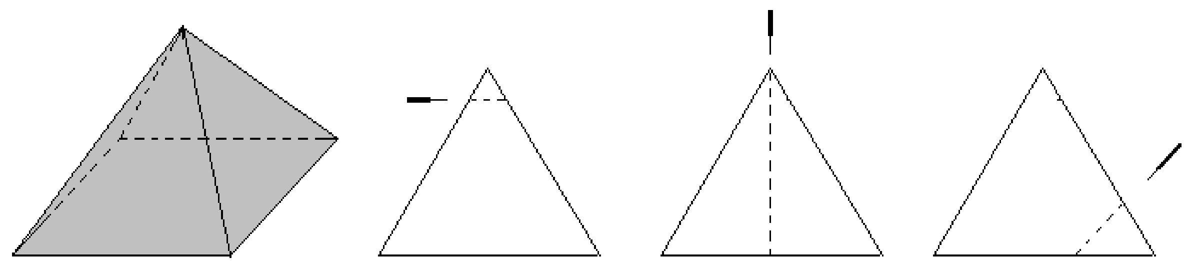
Kartio



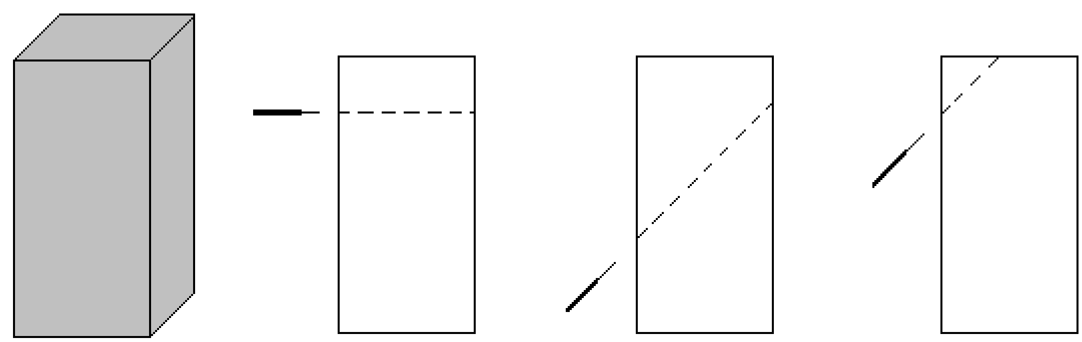
Lieriö



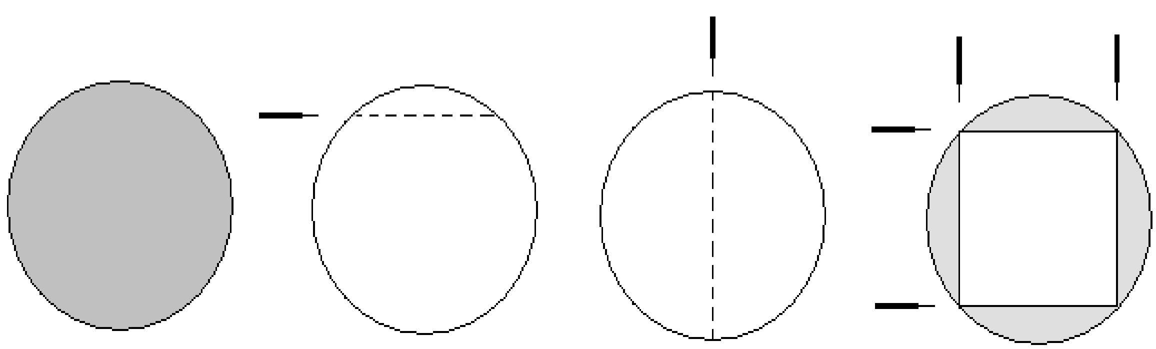
Pyramidi



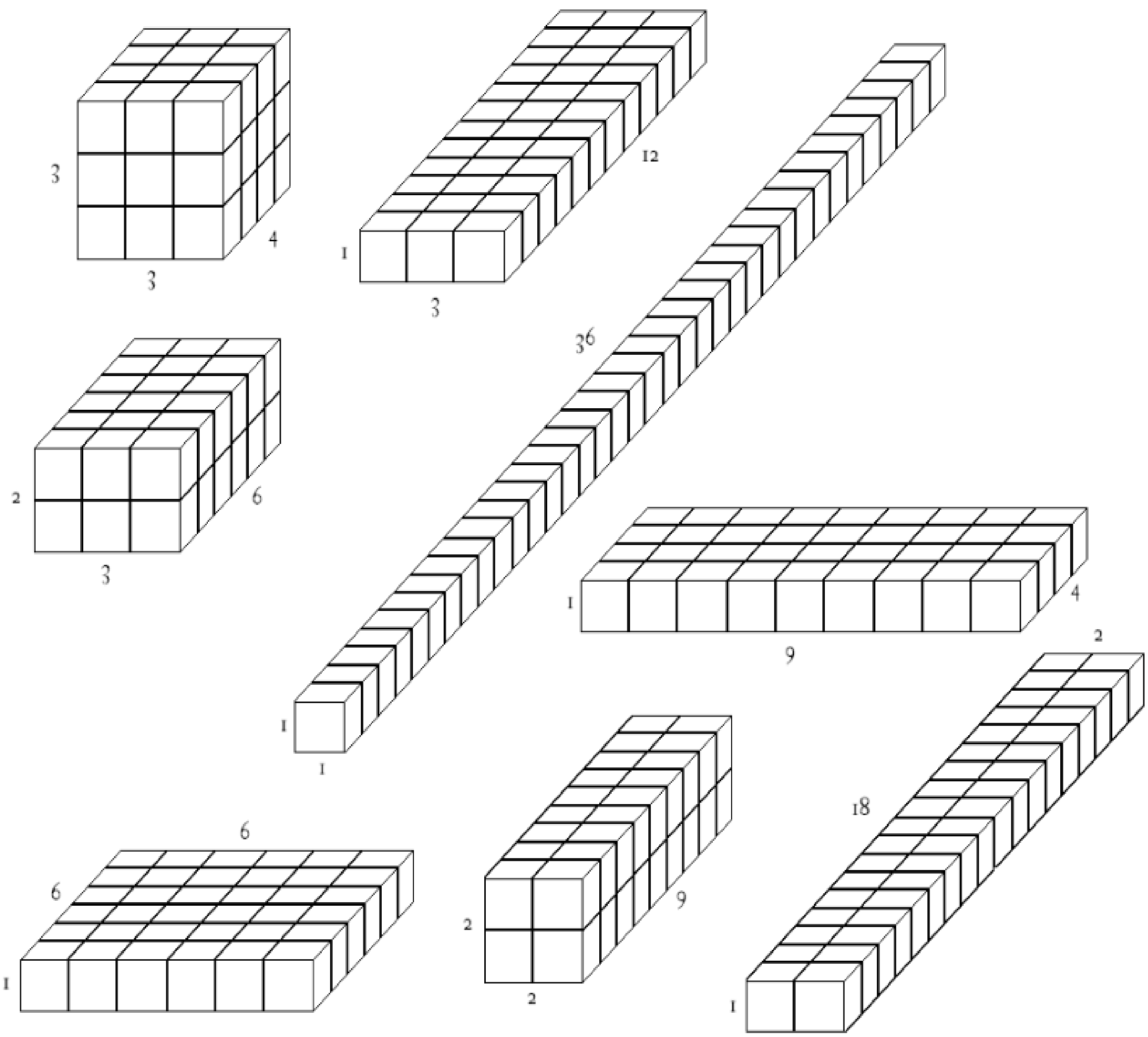
Särmiö

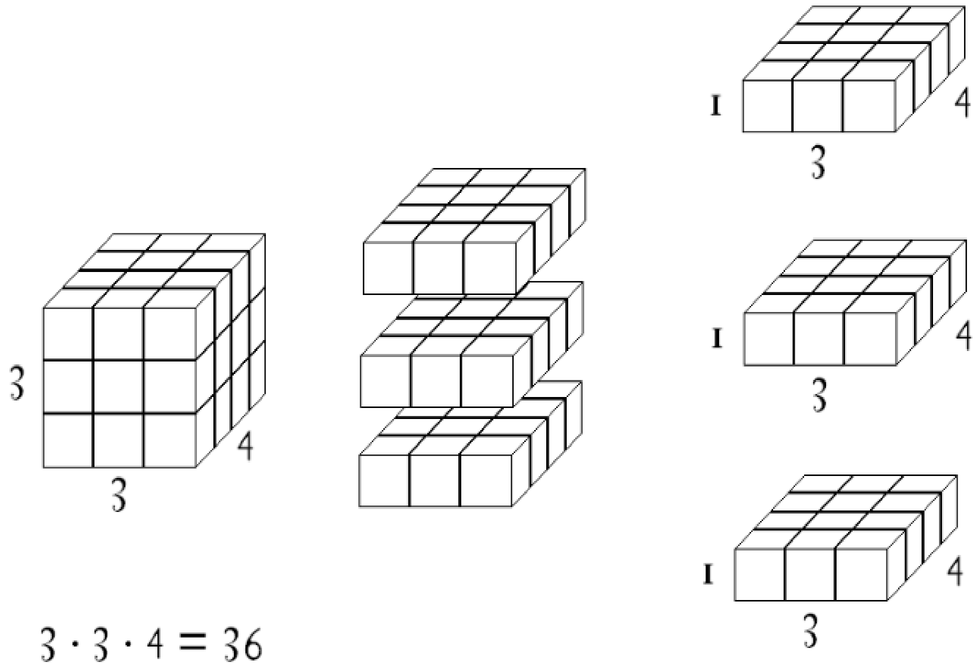


Pallo



Liite 9: Palikkarakennelmia





$3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$

$$1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

Liite 10: Rastirata

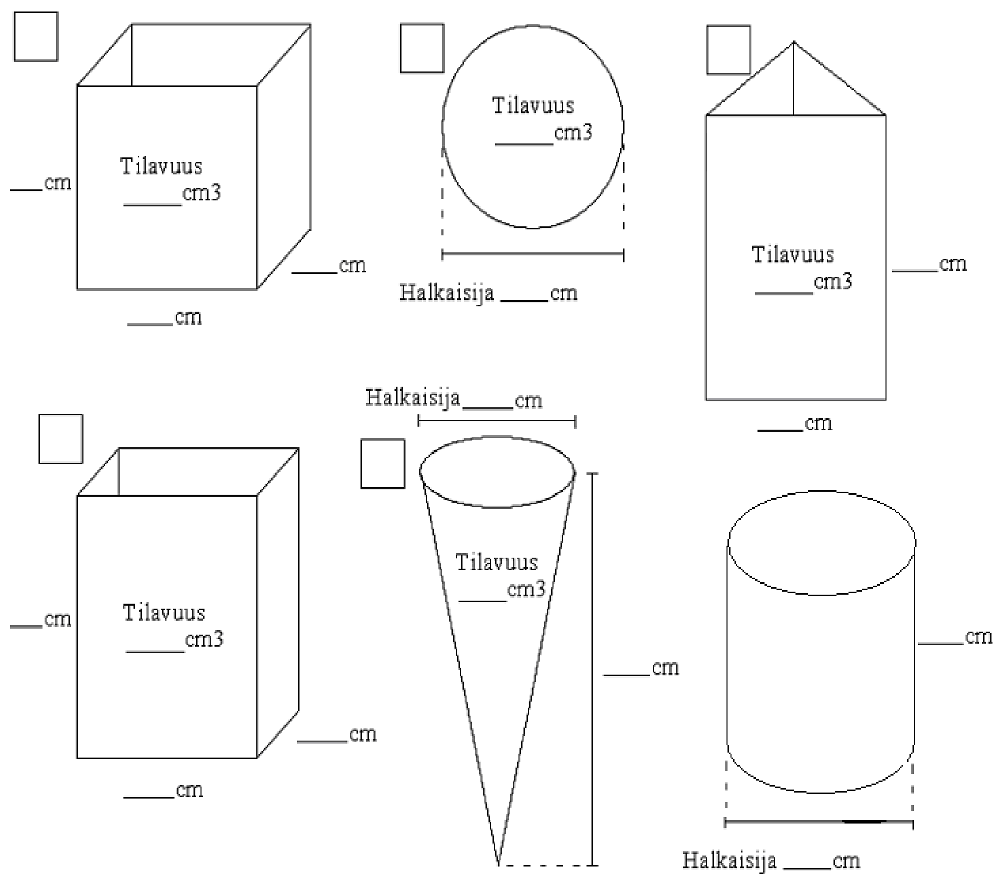
Rasti 1 Kolmiulotteisia palapelejä.

Tee mahdollisimman monta seuraavista palapeleistä. Kaikista syntyy kuutio mikäli osat yhdistetään tietyllä tavalla.

Rasti 2 Tilavuuden mittaaminen veden ja vaakojen avulla

Välineet: Erilaisia vesiastioita, vettä, mitta-astia, vaaka

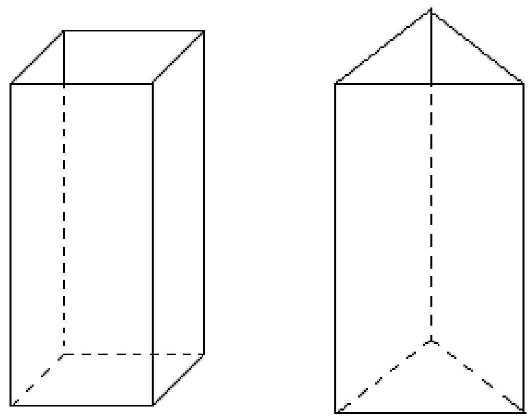
- Mittaa pöydällä olevien astioiden pituus, leveys ja korkeus ja merkitse lukemat kuviin.
- Arvioi astioiden suuruusjärjestys.
- Mittaa tai laske lopuksi, kuinka suuria kuvan astiat ovat tilavuudeltaan. Merkitse tulokset kuviin.



Rasti 3 Kappaleen muoto ja tilavuus. Sama pinta-ala, muuttuu ko tilavuus?

Välineet: Kartonkia, teippiä, helmiä, vaaka

- Pöydällä on kaksi samankokoisesta kartongista tehtyä särmiötä. Arvioi, kumpi ”astioista” on tilavuudeltaan suurempi. Mittaa helmien avulla. Merkitse tulokset kuvaan.



__________ helmeä __________ helmeä

- Pohdi, minkä muotoinen olisi tilavuudeltaan mahdollisimman suuri kyseisestä kartongista tehty astia. Piirrä kuva.

Rasti 4 Tilavuuden arviointia

Pöydällä on Alvar Aallon suunnittelema Aalto-malja.

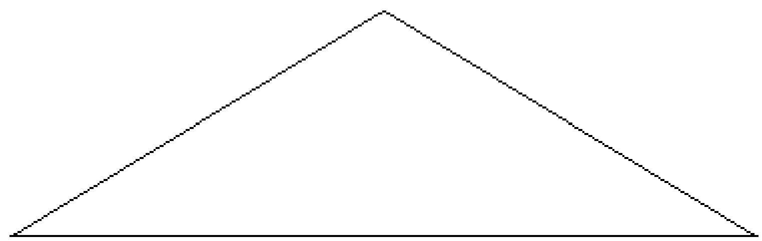
- Arvioi, mikä on astian tilavuus.

Liite 11: Toiminnallinen tehtävämoniste

Tehtävä 1

Välineet: paperia, sakset

Leikkaa paperille piirretty kolmio kahteen yhtä suureen osaan siten, että saat tehtyä palasista suorakulmion.



- Laske kahdesta kolmion osasta syntyvän suorakulmion pinta-ala:

Tiedät, miten lasketaan suorakulmion pinta-ala.

- Päättele, miten lasketaan kolmion pinta-ala?

Tehtävä 2

Välineet: kuutio ja tiiliskivi

Pöydällä on kaksi erimuotoista kappaletta, kuutio ja ”tiiliskivi”.

a) Arvioi, kumpi kappaleista on tilavuudeltaan suurempi?

b) Mittaa sivujen pituudet ja laske, kumpi kappaleista on

tilavuudeltaan suurempi.

Tehtävä 3

Välineet: 64 rakennuspalikkaa

Ota läjä pikkukuutioita ja toimi seuraavien ohjeiden mukaan:

Tee pikkukuutioista isompi kuutio, jonka jokainen sivu on kaksi kertaa pidempi kuin pikkukuution.

a) Kuinka paljon isomman kuution tilavuus on suurempi kuin pienemmän?

Tee pikkukuutioista isompi kuutio, jonka jokainen sivu on kolme kertaa pidempi kuin pikkukuution.

b) Kuinka moninkertainen isomman kuution tilavuus on verrattuna pikkukuutioon?

Tee pikkukuutioista isompi kuutio, jonka jokainen sivu on neljä kertaa pidempi kuin pikkukuution.

c) Kuinka moninkertainen isomman kuution tilavuus on verrattuna kuin pikkukuutioon?

Täydennä taulukko:

Kun kuution sivun pituus 2-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Kun kuution sivun pituus 3-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Kun kuution sivun pituus 4-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Kun kuution sivun pituus 5-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Kun kuution sivun pituus 10-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Kun kuution sivun pituus 100-kertaistuu, sen tilavuus ________ -kertaistuu

Tehtävä 4

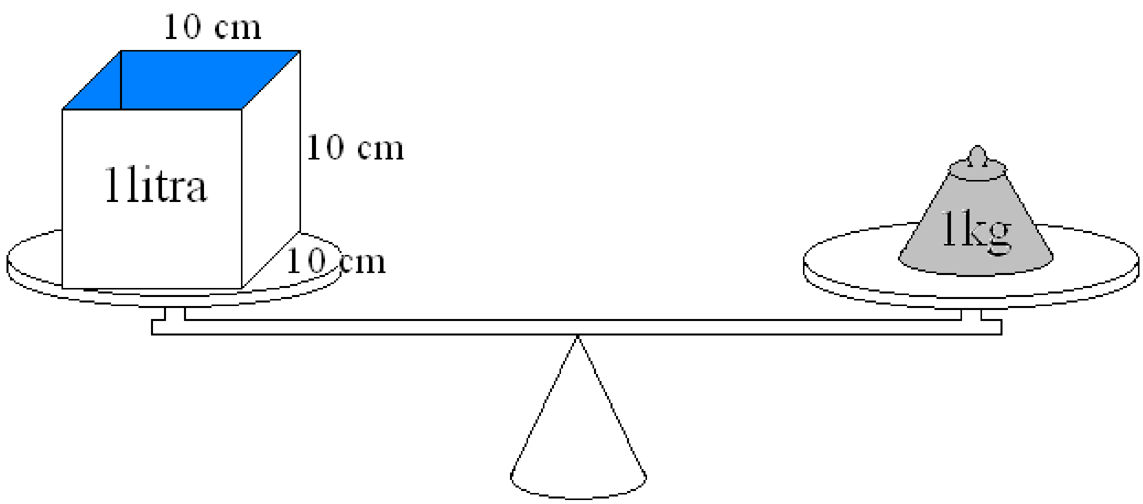
Välineet: läpinäkyvä astia, vaaka, vettä, tussi

Tee oma mitta-astia seuraavien ohjeiden mukaan:

Valitse pöydältä jokin läpinäkyvä muoviastia. Merkitse astiaan tusseilla viivat vastaamaan seuraavia tilavuusmääriä:

¼ dl, ½ dl, ¾ dl ja 1 dl

Tutkia merkkien paikat esimerkiksi veden ja vaa'an avulla. **Muista!**



Tehtävä 5

Välineet: Kaksi vesiastiaa, desilitran mitta, vettä, viivoitin

Toimi ohjeiden mukaan. Täydennä puuttuvat kohdat:

Pöydällä on kaksi läpinäkyvää, kuution mallista astiaa. Mittaa kumman-kin astian sivun pituus:

Pienen astian sivun pituus on ________ cm.

Ison astian sivun pituus on _________cm.

Ison astian sivun pituus on _______ kertaa suurempi kuin pie-nemmän.

Ota hanasta isompaan läpinäkyvään astiaan **yksi desilitra vettä.** -> Mittaa, kuinka paksu vesikerrosastiaan syntyy:

Vesikerros on isommassa astiassa _________ cm.

Kaada vesi pienempään astiaan -> Mittaa, kuinka paksu vesikerros syntyy:

Vesikerros on pienemmässä astiassa ________ cm.

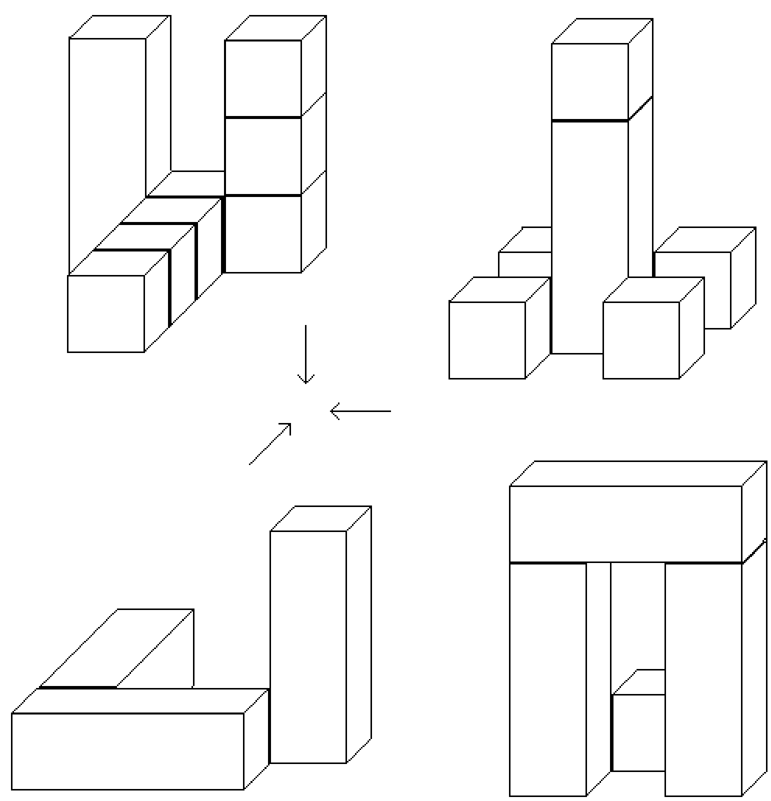
Täydennä lauseet:

Kun särmiön pohjan pinta-ala puolittuu, veden pinnan korkeus _________________.

Kun kuution mallisen astian yksi sivu kaksinkertaistuu, siinä olevan veden pinnan korkeus ___________________.

Tehtävä 6

Kuvan kappaleet on rakennettu 2 cm ja 6 cm palikoista. Piirrä kappaleet edestä, sivulta ja ylhäältä. Piirrä myös palikoiden rajat. Piirrä katkoviivalla ne ääriviivat ja palikoiden rajapinnat, jotka jäävät näkymättömiin. Voit käyttää apuna oikeita palikoita.



Tehtävä 7

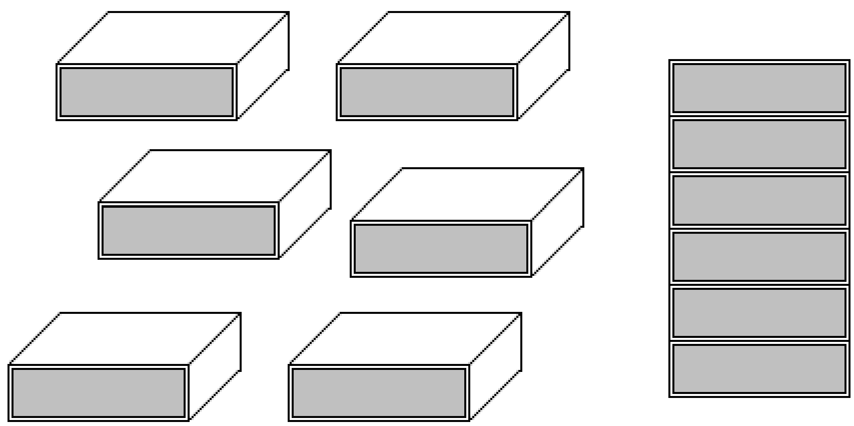
Välineet: tulitikkuaskeja

Kuvittele, että olet tulitikkutehtaan tuotesuunnittelija. Pomosi antaa tehtävän suunnitella erilaisia pakkausvaihtoehtoja.

a) Kuinka monta erimuotoista pakkausta on mahdollista tehdä, jos tulitikkuaskeja pakataan samaan pakettiin…

2, 4, 5, 6 tai 10

Piirrä vaihtoehdot. Käytä halutessasi apuna oikeita tikkuaskeja.



b) Suunnittele kymmenelle askille pakkaus, jonka pinta-ala on mahdollisimman pieni.

Tehtävä 8

Välineet: Pieniä, keskikokoisia ja suuria kuutioita.

<u>Vertaile päättelemällä kuutioiden sivujen pituuksia:</u>

Kuinka monikertainen on suurimman kuution pituus suhteessa pienimmän kuution pituuteen?

Kuinka monikertainen on suurimman kuution pituus suhteessa keskikokoisen kuution pituuteen?

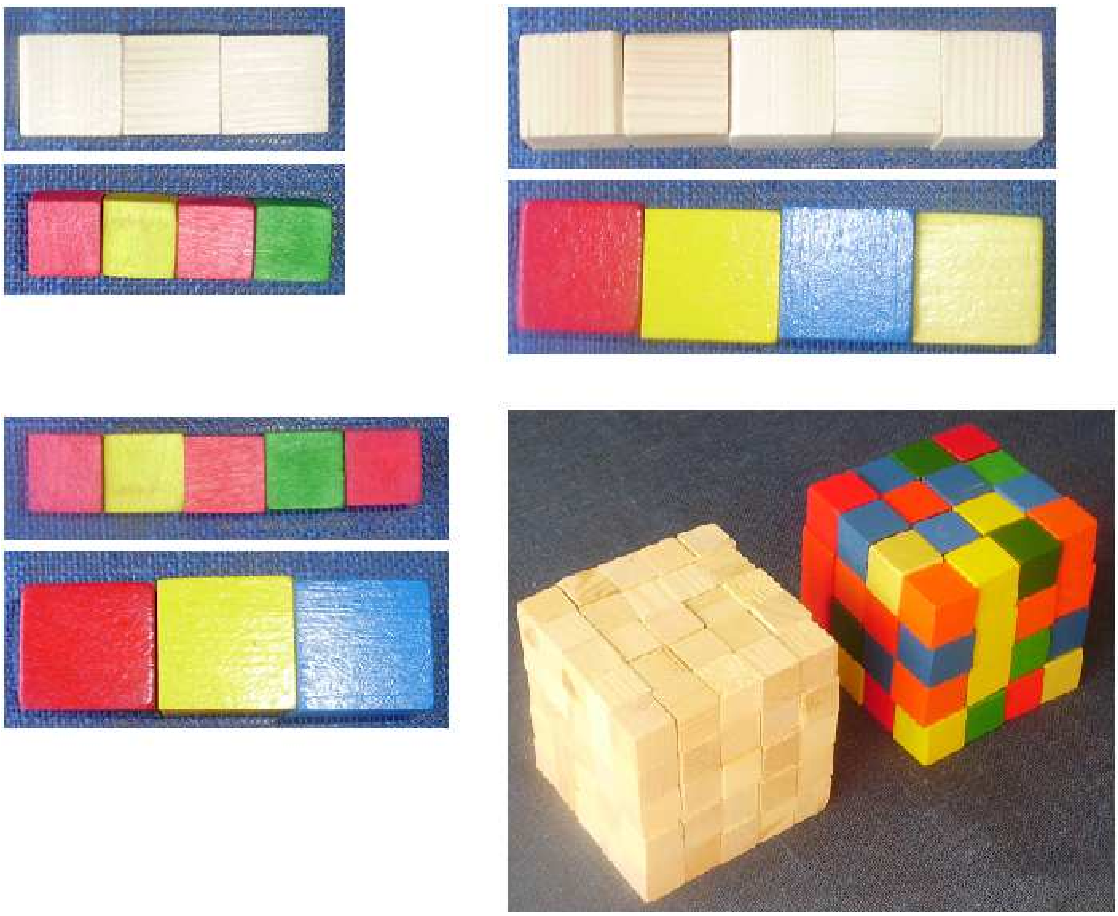
Kuinka monikertainen on keskikokoisen kuution pituus suhteessa pienimmän kuution pituuteen?

<u>Vertaile päättelemällä kuutioiden tilavuuksia:</u>

Kuinka monikertainen on suurimman kuution tilavuus suhteessa pienimmän kuution tilavuuteen?

Kuinka monikertainen on suurimman kuution tilavuus suhteessa keskikokoisen kuution tilavuuteen?

Kuinka monikertainen on keskikokoisen kuution tilavuus suhteessa pienimmän kuution tilavuuteen?



Kuvassa on esitetty tapa, jolla kuutioiden tilavuuksia voi päätellä: vertailemalla eri palikoista tehtyjä samanpituisia jonoja, tai vertailemalla eri palikoista tehtyjä samankokoisia rakennelmia.

Liite 12: Vaikea tehtävämoniste

Tehtävä 1

Hannulla on kuution mallinen vesiastia, joka on täynnä vettä. Kuution sivun pituus on 5 cm. Hannu kaataa veden toiseen kuution malliseen astiaan, jonka sivun pituus on 6 cm. Kuinka korkealla veden pinta on suuremmassa astiassa?

Arvaa:________ Laske:________

Tehtävä 2

Kuvitellaan, että koulun pihalle rakennetaan iso kuution muotoinen lasiakvaario, jonka jokainen sivu on kymmenen metrin mittainen. Akvaarion pohjalla on reikä, josta poistuu tuhat litraa vettä sekunnissa. Eli joka sekunti akvaarion vesimäärä pienenee tuhannella litralla.

a) ***Arvioi***, kuinka kauan kestää, ennen kuin akvaario on tyhjä?

b) ***Laske***, kuinka kauan kestää, ennen kuin akvaario on tyhjä?

c) Arvioi, kuinka kauan kestäisi 1 km * 1 km * 1km kokoisen jättiakvaarion tyhjentyminen, jos se tyhjenisi samaa 1000 sekunnissa vauhtia.

(Muista! 1 min. = 60 s, 1 tunti = 60 min, 1 päivä = 24 tuntia jne…)

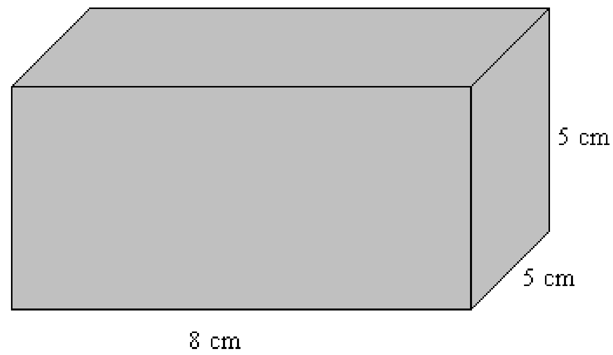
Tehtävä 3

Kuinka monta yhden litran maitopurkillista mahtuu 10 litran ämpäriin?________

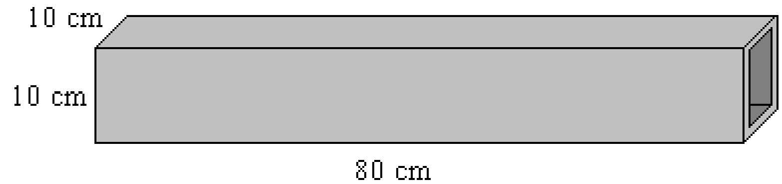
Yksi litra kultaa painaa noin 20 kg. Kuinka paljon painaa 10 litran ämpärillinen kultaa? ______________ (Jaksaisitko nostaa?)

Minkä kokoinen on 1 kg:n painoinen kultaharkko? Piirrä luonnollisessa koossa ja ilmoita mitat. (Muista yksi litra on 10 cm * 10 cm * 10 cm)

Yksi litra rautaa painaa noin 8 kg. Kuinka paljon oheinen rautakappale painaa?

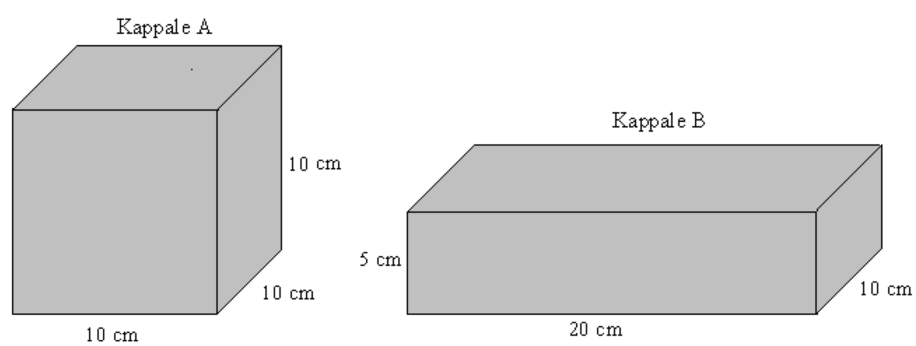


Kuvassa olevan onton rautaputken seinät ovat 1 cm paksuiset. Kuinka paljon putki painaa?



Tehtävä 4

Kuvassa on kaksi kappaletta, A ja B



a) Arvioi, kumpi kappaleista on tilavuudeltaan suurempi?

b) Laske…

Tehtävä 5

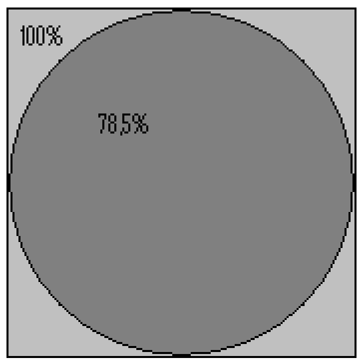
Kuvittele, että sinulla on 20cm * 30cm paperiarkki.

a) Riittääkö paperi edellisen tehtävän kappaleen A päällystämiseen?

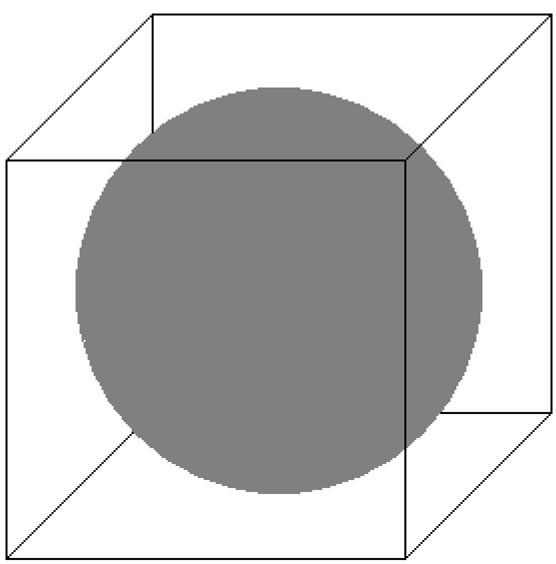
b) Riittääkö paperi kappaleen B päällystämiseen

Näitä tietoja tarvitset seuraavien tehtävien laskemisessa:

Ympyrän pinta-ala on 78,5 % sen neliön pinta-alasta, jonka sisään se juuri ja juuri mahtuu.



Pallon tilavuus on 52 % sen kuution tilavuudesta, jonka sisään se juuri ja juuri mahtuu.

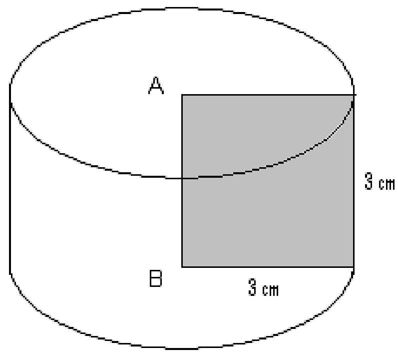


Tehtävä 6.

Erään neliön sivun pituus on 10 cm. Sen sisälle piirretään ympyrä, jonka halkaisija on sama kuin neliön sivun pituus, eli se mahtuu neliön sisään juuri ja juuri. Kuinka suuri on kyseisen ympyrän pinta-ala?

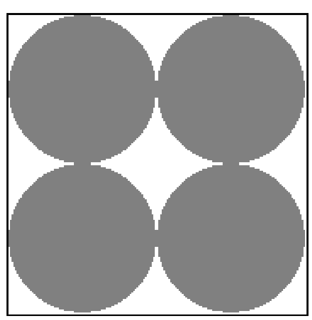
Tehtävä 7.

Erään neliön sivun pituus on 3 cm. Neliö pyörähtää yhden sivunsa kautta (AB) ympäri, jolloin pyörähdyskuviosta tulee lieriö. Laske kyseisen lieriön tilavuus.



Tehtävä 8.

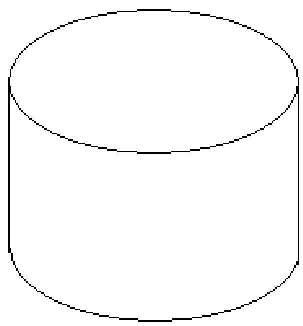
Yhden kuutiometrin kokoinen astia täytetään kuvan mukaisesti rautapalloilla, joiden halkaisija on 50 cm. (Kuvattu ylhäältä päin)



a) Kuinka monta palloa astiaan mahtuu?
b) Kuinka paljon pallojen väliin jää ilmaa?
c) Kuinka paljon astian sisällä olevat pallot painavat?

Tehtävä 9.

Jaa kuvan kakku kolmella veitsenviillolla kahdeksaan yhtä suureen, samanmuotoiseen osaan:

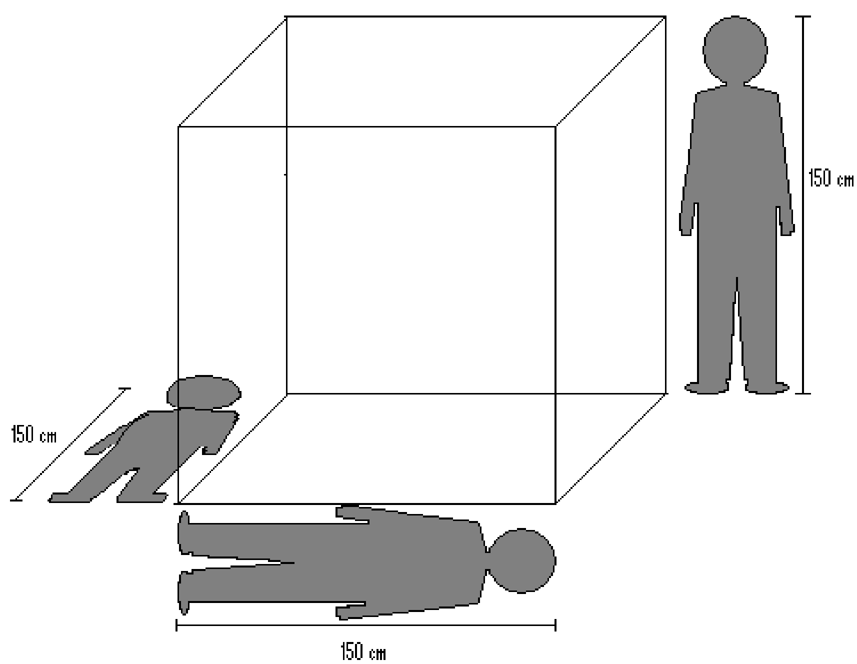


Tehtävä 10.

Metri * metri * metri = kuutiometri eli m3

Pekka * Pekka * Pekka = kuutiopekka eli pekka3

Pekka on 150 cm pitkä. Laske kuinka monta kuutiometriä on yksi kuutiopekka?



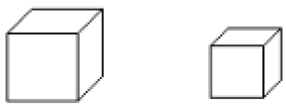
Tehtävä 11.

Mittaa, kuinka pitkä lyijykynäsi on.

Laske, kuinka monta kuutiosenttimetriä on yksi ”kuutiokynä.

Tehtävä 12.

Pöydällä on pieniä värikkäitä, sekä hieman isompia puun värisiä kuutioita.



Mittaa kuutioiden sivujen pituudet.

Tee kaksi samankokoista kuutiorakennelmaa, toinen pienemmistä ja toinen isommista kuutioista. Päättele, kuinka monta kertaa suurempi isompi kuutio on kuin pienempi.

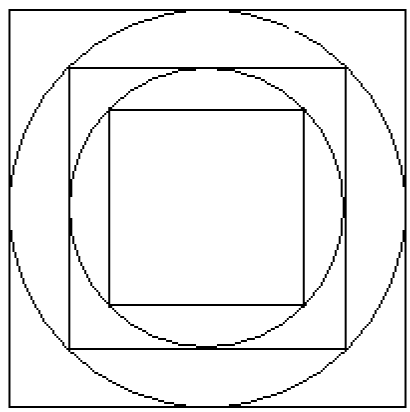
Tehtävä 13. (tosi vaikea)

Liisa kaataa vahingossa suuren pesuastian wc:ssä ja 12 litraa vettä valuu lattialle. Lattia on tasainen, eikä siellä ole viemäriä, josta vesi valuisi pois. Huone on suorakaiteen muotoinen ja sen seinät ovat kaksi ja kolme metriä pitkät. Kuinka paksu vesikerros huoneen lattialle muodostuu?

Liite 13: Vaikea ja vielä vaikeampi lisätehtävä

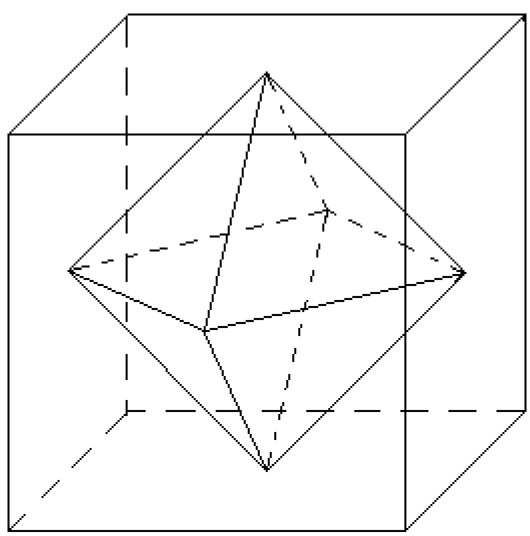
Tehtävä 1 (Tosi vaikea)

Mikä on pienimmän neliön **pinta-ala**, jos suurimman neliön sivun pituus on 6 cm?



Tehtävä 2. (Tosi, tosi vaikea!)

Kuution sisässä on kuusikulmio, jonka jokainen kärki koskettaa kuution yhden tahkon keskipistettä



Mikä on kuusikulmion tilavuus, jos kuution sivun pituus on 6 cm

Liite 14: Lisätehtävämoniste kiertorastitunnin lomaan

1. Kumpi painaa enemmän, kuusi kiloa viiden tuuman nauloja vai viisi kiloa kuuden tuuman nauloja? (V: Kuusi kiloa viiden tuuman nauloja)

2. Kumpi painaa enemmän, kilo rautaa vai kilo höyheniä? (V: Yhtä paljon)

3. Paljon maksaa kaksi maksaa jos yksi maksa maksaa kaksi euroa? (V: 4€)

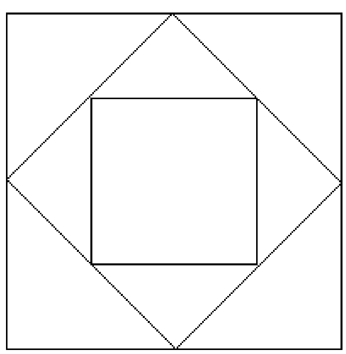
4. Pekka ohittaa Puuppolasta Tikkakoskelle järjestettävässä juoksukilpailussa viimeisenä juoksevan kilpailijan. Mikä on Pekan sijoitus ohituksen jälkeen? (V: Tilanne on mahdoton: Pekka ei voi ohittaa viimeisenä juoksevaa, tällöin hänen pitäisi ohittaa itsensä.)

5. Yhden paidan kuivuminen kestää aurinkoisessa säässä 2 h 15 min. Kuinka kauan kestää neljän paidan kuivuminen? (V: Saman verran)

6. Miksi kutsutaan koiraa, joka on karannut? (V: Jotta se tulisi takaisin)

7. Yksi tiili painaa kaksi kiloa ja puoli tiiltä, paljonko painaa kaksi tiiltä? (V: 8 kilogrammaa)

8. Suurimman neliön sivun pituus on 6 cm. Mikä on pienimmän neliön pinta-ala?



(V: 9 cm2…pienin neliö on isoimman neliön puolikkaan puolikas.)

Liite 15: Opetuspaketissa tarvittavat välineet ja materiaalit

<u>Yhteiset tuokiot:</u>

Askarteluverkkoa	noin 20 cm / oppilaspari
Helmiä (halk. 7mm)	noin 50 kpl / oppilaspari
Palikoita (sivun pituus 2cm)	noin 50 kpl / oppilas
Muovailuvahaa	
Polyuretaania (esim. Finnfoam)	
Mattoveitsiä	väh. 1 / oppilaspari
Kuutioita 1cm3	1 / oppilas
Kuutio 1000 cm3	1
Pieniä astioita (kartio, lieriö, särmiö)	2 kpl kutakin
Vaakoja	vähintään 4
Kartonkia	
Pieni Aalto-malja (tms.)	vähintään 2, saavat olla erilaisia

<u>Itsenäiset tehtävät:</u>

Edellä mainittujen lisäksi tarvitaan:

Tulitikkuaskeja	väh. 10 / oppilas *
Pieniä astioita, joista voi tehdä oman mitta-astian	1 / oppilas
Kaksi eri kokoista kuution mallista astiaa	Molemmat astiat / oppilas *
Kuutioita (sivun pituus 1,5 cm)	noin 70 kpl / oppilas *

*** Tarvitaan kyseisen tehtävän tekemisessä yhtä oppilasta kohti. Kokonaisvälinemäärä riippuu siitä, kuinka moni oppilas tekee tehtävää kerrallaan.**