GeoGebra-ohjelma konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen matematiikan-opetuksen tukena

Antti Laitamäki

3. Elokuuta 2009

Pro gradu -tutkielma

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Esipuhe

Tutkin opetusharjoittelussani GeoGebra ohjelman hyödyntämistä erityisesti lukion pitkän matematiikan opetuksessa, mutta tarkastelun alaisena olivat myös peruskoulutason sekä yliopistotason matematiikka. Opetusharjoitteluni aikana havaitsin joidenkin matematiikan opettajien omaavan negatiivisen asenteen tietokoneavusteista matematiikan opettamista kohtaan. Eräs opettaja kommentoi suosivansa ennemmin konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista ongelmalähtöistä matematiikan opettamista. Tämä kommentti herätti uteliaisuuteni. Ovatko tietokoneavusteinen matematiikan opettaminen ja konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukainen matematiikan opettaminen jollain tavalla ristiriidassa?

Esittelen tässä työssä useita GeoGebra -ohjelmalla suunniteltuja oppimisympäristöjä. Koska dynaamisen geometrian esittäminen paperilla on mahdotonta, on tämän opinnäytetyön mukana cd-rom levy, josta löytyvät tässä työssä käytetyt GeoGebra (.ggb) tiedostot, sekä näiden dynaamiset web versiot, mikäli niitä on opetuksessa käytetty (web-versiot on nimetty kussakin tapauksessa ”index.html”). Näitä työtiedostoja tutkimalla lukijan on helpompi ymmärtää tässä opinnäytetyössä kuvien ja tekstin avulla esiteltäviä dynaamista geometriaa hyödyntäviä oppimisympäristöjä. Huomaa, että ggb-versiot voivat näyttöasetuksista johtuen näyttää ruudulla hieman erilaisilta, kuin tämän työn kuvissa.

Haluan lausua tässä kiitokseni kaikille tämän pro gradu tutkielman eri vaiheissa tukena olleille henkilöille. Erityisesti haluan kiittää ohjaajaani Lauri Kahanpäätä. Ilman hänen ohjaustaan tämä prosessi olisi ollut mahdoton. Kiitokset myös didaktikolleni Henry Leppäaholle tuesta opettajakoulutuksen aikana, sekä Joensuun yliopiston professori Lenni Haapasalolle työni kannalta erittäin tärkeän tutkimustiedon jakamisesta. Motivoinnista haluan kiittää kannustavia kotijoukkojani.

Sisältö

Esipuhe 1
Sisältö 2
1. Johdanto 4
2. Oppimiskäsitys ja pedagoginen taustateoria 6
2.1 Behaviorismista konstruktivismiin 6
2.2 Yksilökonstruktivismi 7
2.3 Sosiaalinen konstruktivismi 8
2.4 Tutkiva oppiminen 9
2.5 Konstruktivismin pedagogisia seurauksia 10
2.6 Oppimisympäristöt 11
3. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus 12
3.1 Matemaattinen osaaminen 12
3.2 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde 13
3.3 Tietokoneavusteinen opetus ja tietokoneavusteiset oppimisympäristöt 14
3.4 Tietokoneavusteisen matematiikanopetuksen tutkimus 15
3.5 Minimaalinen ohjeistus ja suunnittelemalla oppiminen tietokoneavusteisissa oppimisympäristöissä 16
3.6 Verkkopohjaiset oppimisympäristöt 17
3.7 Matematiikan opetuksessa käytetyt ohjelmistot 18
4. GeoGebra 19
4.1 GeoGebran käyttö 19
4.1.1 Objektit ja niiden lisääminen 20
4.1.2 Dynaaminen arvojen muuttaminen 21
4.1.3 Liukusäädin 22
4.1.4 Objektien ominaisuudet 23
4.1.5 Monivaiheiset demonstraatiot 24
4.1.6 Kuvien ja html-sivujen tekeminen demonstraatioista 25
4.2 GeoGebran käyttötavat 26
4.3 GeoGebraan liittyvä tutkimus 28

5. Suunnitellut oppimisympäristöt ... 29
5.1 Ympyrän kaari ... 29
5.1.1 Ympyrän kaari -GeoGebra demonstraation toteutus ... 29
5.1.2 Ympyrän kaari -Oppitunnin kulku ... 30
5.1.3 Ympyrän kaari - Pedagoginen taustateoria ja seuraukset ... 31
5.1.4 GeoGebran rooli ympyrän kaari -oppimisympäristössä ... 33
5.2 Käänteisfunktion olemassaolo ... 33
5.2.1 Käänteisfunktion olemassaolo -GeoGebra-demonstraation toteutus ... 33
5.2.2 Käänteisfunktion olemassaolo -Oppitunnin kulku ... 35
5.2.3 Pedagogisen ja didaktisen taustateorian rooli käänteisfunktion olemassaolo -oppitunnilla ... 38
5.2.4 GeoGebran rooli Käänteisfunktion olemassaolo -oppimisympäristössä ... 38
5.3 Paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio ... 39
5.2.1 Paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio -GeoGebra demonstraation toteutus ja oppitunnin kulku ... 39
5.2.2 GeoGebran rooli paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio -opetustilanteessa ... 41
5.4 Toisen asteen polynomifunktio ... 41
5.4.1 Toisen asteen polynomifunktio -GeoGebra-demonstraation toteutus ... 42
5.4.2 Toisen asteen polynomifunktio - opetuksen järjestäminen ja oppitunnin kulku ... 43
5.4.3 Toisen asteen polynomifunktio - pedagoginen ja didaktinen taustateoria, sekä tulokset ... 44
5.5 Yliopisto Geometria ... 45
5.5.1 Yliopistogeometrian Harjoitusten toteuttaminen ... 45
5.5.2 GeoGebran soveltuvuus yliopistogeometrian havainnointiin ... 47
6. Pohdintaa ... 51

1. Johdanto

Mitä on matemaattinen osaaminen? Miten matematiikkaa opitaan? Entä miten tätä oppimista voitaisiin tehostaa? Nämä kysymykset heräsivät mielessäni suorittaessani opetusharjoittelua 2008-2009. Samoihin aikoihin tutustuin GeoGebra-nimiseen dynaamiseen matematiikkaohjelmaan ja vakuutuin oitis sen mahdollisuuksista matematiikan oppimisen tehostajana. Kohtasin kuitenkin harjoitteluni aikana eriäviä mielipiteitä tietokoneavusteista matematiikan opettamista kohtaan.

Tietokoneavusteisen opetuksen mahdollisuudet havaittiin jo ennen 1990-lukua, mutta tällöin ei vielä ymmärretty tulevaisuuden kehityssuuntauksia. Tuolloin esimerkiksi tietotekniikan hyödyntäminen liikunnan opetuksessa olisi varmasti kuulostanut vitsiltä, kun nykyisin tanssia voi opetella tanssipelien avulla ja Nintendo on kehittänyt Wii-pelikonsolille virtuaalisen personal-trainerin. Nopeasti kehittyvä tekniikka avaa yhä uusia innovaatiomahdollisuuksia tietotekniikan integroimiseksi osaksi opetusta. Tämän vuoksi on tärkeää, että opettajat ovat ajan tasalla tietotekniikan kehityksen suhteen. Matematiikan opettajilla on tässä prosessissa erityisen tärkeä rooli. Tässä opinnäytetyössä esiteltävän GeoGebran käytön yleistyminen matematiikan opetuksen tukena on varmastikin vasta alkusoittoa kiihtyvällä vauhdilla tietoteknistyvässä maailmassa. Näen sen kuitenkin erittäin tärkeänä ensi askeleena opetuskäytänteiden nykyaikaistamiselle.

Valitsin tämän työn pedagogiseksi taustateoriaksi viime aikoina matematiikan opetuksen tutkimusta hallinneen konstruktivistisen oppimiskäsityksen. En valinnut sitä tutkijayhteisön aiheuttaman sosiaalisen paineen tai käsitteen muodikkuuden vuoksi, vaan koska olen vahvasti käsityksen periaatteiden kannalla. Luvussa 2 perehdytään suppeasti eri oppimiskäsityksiin, näiden historiaan, sekä matematiikan opetuksen ja oppimisen pedagogiseen ja tieteenfilosofiseen taustateoriaan.

Havaitsin opettajakoulutukseni aikana joidenkin opettajien ja opettajaksi opiskelevien keskuudessa vaikuttavan ajattelutavan, jonka mukaan tietokoneavusteinen opettaminen ja konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukainen opetus olisivat ristiriidassa. Tämän tutkielman keskeisimpänä tavoitteena onkin osoittaa, että tietokoneavusteinen opetus voi olla konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista. Varsinaisiksi tutkimuskysymyksiksini muodostui:

- "Miten GeoGebraa voidaan käyttää eri tasoilla konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisessa matematiikan opetuksessa matemaattisen osaamisen tehostajana, ja miten oppilaat suhtautuvat ohjelman käyttöön?"

Hain vastausta tutkimuskysymykseeni GeoGebran avulla toteuttamillani tietokoneavusteisilla oppimisympäristöillä, joita pääsin kokeilemaan käytännössä opetusharjoitteluni aikana.

On syytä huomata, että matemaattinen osaaminen ei ole yksiselitteinen käsite, vaan sisältää useita ulottuvuuksia. Nämä ulottuvuudet määritellään luvussa 3, jossa luodaan katsaus tietokoneavusteisen matematiikan opetuksen tutkimukseen. Valitsemani matematiikan opetukseen suunniteltu ohjelma, GeoGebra, esitellään luvussa 4. GeoGebraa voisi hyvin verrata työkaluun, jota käytetään oppilaiden matemaattisen osaamisen tehostajana. Eri työkalujen laittaminen paremmuusjärjestykseen ei ole järkevää. Sen sijaan järkevää on käyttää oikeaa työkalua oikeassa paikassa. Pääsin toteuttamaan käytännössä suunnittelemiani GeoGebra-oppimisympäristöjä opetusharjoittelussani syksyllä 2008. Luvussa 5 esittelen näistä koostetun otoksen. Viimeisessä luvussa pyrin antamaan vastauksen tutkimuskysymykseeni. Lisäksi pohditaan matematiikan opetuksen tulevaisuusnäkymiä.

Tämä opinnäytetyö soveltuu parhaiten matematiikan opettajien- ja opettajaopiskelijoiden luettavaksi. Työn tavoitteena on muodostaa heille suppean kirjallisuuskatsauksen ja tapaustutkimusten kautta kokonaiskuva GeoGebran suomista mahdollisuuksista matematiikan opetuksen tukena.

2. Oppimiskäsitys ja pedagoginen taustateoria

Kaiken opettamisen taustalla on käsitys siitä, miten oppija omaksuu tietoja ja taitoja. Matematiikan oppimisen kohdalla kyse ei ole pelkästään tietojen ja taitojen, vaan myös matemaattisen ajattelutavan oppimisesta. Tässä luvussa käydään läpi kahden toisilleen vastakkaisina nähdyn oppimiskäsityksen historiaa, sekä niiden pedagogisia seurauksia matematiikan opetuksessa. Luku toimii johdantona myöhemmin käyttämilleni kasvatustieteellisille käsitteille.

2.1 Behaviorismista konstruktivismiin

Oppimiskäsitystä koskevassa keskustelussa on viime aikoina korostunut kahden perinteen välinen vastakkainasettelu. Ensimmäinen näistä on objektiiviseen ja empiiriseen ajatteluun pohjautuva behavioristinen perinne. Behaviorismissa oppiminen ymmärretään lähinnä oppijan tiedon lisääntymisenä ja oppija nähdään melko passiivisena objektina. Opettajan tehtävä on yksinkertaisesti tiedon siirtäminen oppijan mieleen. Tämä toteutetaan tarjoamalla tavoitteen mukaiset virikkeet ja vahvistamalla tavoitteen suuntaiset reaktiot.

Behaviorismin teorian taustalla ovat ihmisillä ja eläimillä toteutetut psykobiologiset tutkimukset sekä 1900-luvun alussa nopeasti kehittynyt differentiaalipsykologia. Behaviorismin mukaan ihmismielen tietoisuudesta on mahdotonta saada objektiivista tietoa, joten tutkimus keskittyy ulkoisesti havaittavan käyttäytymisen havainnoimiseen. Perinteen mukainen oppimisen tutkimus on luonteeltaan kvantitatiivista ja perustuu yksilöiden välisten suorituskykyjen erojen mittaamiseen. Tieto nähdään luonteeltaan absoluuttisena, mitattavissa olevana. Oppimistutkimusten testit suunnitellaan siten, että tarkastuksessa ei tulkinnalle jää juurikaan tilaa: Tehtävä on joko oikein tai väärin. Jos matematiikan oppimistuloksia tutkitaan tällä tavalla, voidaan kysyä, mitä tällainen testi oikeastaan mittaa? Tuntuu luontevalta ajatella, että tällaisissa testeissä matemaattisten kaavojen muistamisen merkitys korostuu kaavojen ymmärtämisen kustannuksella.

Vaikka behavioristinen perinne alkoikin murtua 1900-luvun puolivälissä, voi sen mukaista opetusta havaita vielä tänäkin päivänä suomalaisissa kouluissa. Jopa opetussuunnitelmamme voidaan nähdä hyvinkin behavioristisina (Rauste & von Wright 1994 s.146-149).

Oppimistutkimuksen painopiste alkoi 1950-luvulla siirtyä behavioristisen perinteen mukaisesta ulkoisten havaintojen tutkimuksesta oppijan sisäisiin tekijöihin, kuten oppimisprosessiin, oppimisstrategioihin, sekä kongitiivisten rakenteiden kehittymiseen. Tutkimuskohteina olivat muun muassa ongelmanratkaisu, muisti, kieli, valikoiva tarkkailu sekä toiminnan rakenne. Tällaista tutkimussuuntausta alettiin kutsua konstruktivismiksi.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen opetuksen lähtökohtana on oppijan tapa hahmottaa maailmaa ja sen tulkintaan käytettyjä käsitteitä (Rauste & von Wright 1994 s.162). Opettajan oppilaantuntemus on täten korostuneemmassa asemassa kuin behavioristisen perinteen mukaisessa opetuksessa. Opettajan tulisi olla selvillä, paitsi oppijan aiemmasta tietotasosta, myös oppijan odotuksista ja ennakko-oletuksista suhteessa opetettavaan asiaan. Siinä missä behaviorismissa oppiminen nähdään tiedon lisääntymisenä, konstruktivismissa keskeinen rooli on ymmärtämisellä. Oppimista ei siis nähdä passiivisena tiedon vastaanottamisena kuten behaviorismissa, vaan aktiivisena merkitysten ja tulkintojen konstruointina tietovirrasta, informaation muokkauksena ”ymmärrettävään” muotoon. Behavioristisen oppimiskäsityksen keskittyessä ulkoisen motivaation merkitykseen oppimisessa konstruktivistisessa näkemyksessä painotetaan sisäistä motivaatiota. Sisäisellä motivaatiolla tarkoitetaan oppijan omasta kiinnostuksesta ja uteliaisuudesta lähtevää toimintapyrkimystä, kun taas ulkoinen motivaatio perustuu ulkoisen palkkion odotukseen. Vaikka behavioristinen ulkoisen vahvistamisen periaate toimiikin useissa tapauksissa, muun muassa Tynjälän (1999) mukaan se voi pahimmillaan heikentää sisäisesti motivoituneen oppilaan suoritusta.

Tynjälä (1999) jakaa konstruktivistisen oppimiskäsityksen tarkastelukulmaltaan kahteen toisistaan eroavaan suuntaukseen: yksilökonstruktivismiin ja sosiaaliseen konstruktivismiin. Suuntauksia yhdistää näkemys, jonka mukaan tieto ei ole koskaan tietäjästään riippumatonta, vaan aina yksilön tai yhteisön itsensä rakentamaa. Yksilökonstruktivismissa ollaan kiinnostuneita yksilön tiedonmuodostuksesta, kun taas sosiaalisessa konstruktivismissa oppimista ei tarkastella puhtaana kognitiona, vaan tilannesidonnaisena sosiaalisena toimintana. Nämä molemmat suuntaukset toimivat pedagogisena taustateoriana suunnittelemilleni tietokoneavusteisille oppimisympäristöille.

2.2 Yksilökonstruktivismi

Yksilökonstruktivismi keskittyy yksilölliseen tiedonmuodostukseen ja yksilön kongitiivisten rakenteiden kuvaamiseen. Oleellista on se, että tulkitsemme havaintojamme sisäisten rakenteiden, eli skeemojen pohjalta. Yksilökeskeisissä suuntauksissa oppiminen nähdään sosiaalisesta kontekstista riippumattomana. Tynjälä (1999) erottelee kaksi yksilökonstruktivismin suuntausta, heikon konstruktivismin ja radikaalin konstruktivismin.

Heikko konstruktivismi tunnetaan myös informaatioprosessointiteoriana eli IP-teoriana. Tässä teoriassa ihmismielen toiminnat rinnastetaan tietokoneen toimintaan ja korostetaan yksilön aktiivista prosessointia tiedonmuodostuksessa. Oppiminen nähdään IP-teorian näkökulmasta muistin toimintoina. Teorian mukaan ihmisen muisti jakautuu lyhytkestoiseen muistiin, eli työmuistiin, sekä pitkäkestoiseen muistiin. Pitkäkestoinen muisti sisältää asioiden merkityksiä, tiedollista aineistoa, sekä tapahtumia ja kokemuksia. Riittävän kertauksen ja informaation prosessoinnin kautta tiedon katsotaan ”koodautuvan” pitkäkestoiseen muistiin. (Tynjälä 1999, s.31-34)

Radikaali konstruktivismi sopii erityisen hyvin matemaattis-luonnontieteellisten aineiden opetuksen oppimiskäsitykseksi. Näkemys edustaa pragmaattista totuusteoriaa, jonka mukaan tiedon todellisuus testataan käytännössä (Tynjälä 1999, s.40). Siinä missä behaviorismissa keskeistä on ulkoinen säätely, radikaalissa konstruktivismissa painottuu sisäinen säätely. Teorian mukaan uudet havainnot tulkitaan aina aikaisempien tietojen ja uskomusten pohjalta. Näitä aikaisempia tietoja ja uskomuksia nimitetään skeemoiksi. Skeeman käsitteen muotoili englantilainen Frederick Bartlertt (1886-1969), joka oli perinteisen assosiaatioteorian (ks. Rauste & von Wright 1994 s.141) kriitikko. Hän korosti tulkinnan keskeistä roolia oppimisprosessissa (Rauste & von Wright 1994 s.156).

Uuden tiedon liittämistä olemassa olevaan skeemaan kutsutaan assimilaatioksi ja skeemojen uudelleenmuotoutumista akkommodaatioksi. Akkommodaatio merkitsee siis eräänlaista ajattelun vallankumousta; vanha skeema ajautuu ristiriitaan havaintojen kanssa ja korvautuu uudella, todellisuutta paremmin kuvaavalla skeemalla. Toisin sanoen oppijan spontaanisti oppimat arkikäsitykset, tai niiden taustalla olevat perusoletukset muuttuvat. Tätä ilmiötä kutsutaan käsitteelliseksi muutokseksi. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa opettajan tehtävä on usein juuri tällaisten kongitiivisten konfliktien aikaansaaminen ja oppilaiden käsitteellisen muutoksen edistäminen.

Yksilökonstruktivistiset näkemykset yhdistettynä viimeaikaiseen tietotekniseen kehitykseen mahdollistavat laadukkaan etäopetusmateriaalin luomisen. Näkemysten mukaan oppilaat voivat oppia verkon välityksellä tehokkaasti tietoja ja taitoja tarkoitukseen suunnitelluissa tietokoneavusteisissa oppimisympäristöissä missä ja milloin tahansa. Herää siis kysymys, tarvitaanko opettajia tulevaisuudessa enää ollenkaan? Seuraavassa kappaleessa esiteltävä suuntaus perustelee opettajien tarpeellisuutta oppimisprosessin ohjaajina nyt ja tulevaisuudessa.

2.3 Sosiaalinen konstruktivismi

Opetusharjoittelussani minulle alkoi muodostua käsityksiä siitä, miten matematiikkaa opitaan tehokkaasti. Nämä käsitykset mukailevat vahvasti sosiaalisen konstruktivismin periaatteita. Ernest (1991) määrittelee sosiaalisen konstruktivismin painottavan toisaalta oppijan aktiivista tiedon konstruointia aikaisempien tietojen pohjalta ja toisaalta oppimistapahtuman vuorovaikutteista ja sosiaalista luonnetta. Sosiaalisessa kontekstissa yksilön ajatteluprosessit tulevat näkyviin niin hänelle itselleen, kuin muille ryhmän jäsenille. Tämä luo yksilöille mahdollisuuksia reflektoida ajatuksiaan itsekseen sekä vastavuoroisesti muiden kanssa (Rauste & von Wright 1994 s.162). Suuntauksen isänä voidaan pitää neuvostoliittolaista L.S. Vygotskya, jonka käsityksen mukaan oppiminen tapahtuu kahdessa vaiheessa, ensin sosiaalisella ja sitten psykologisella tasolla. Vygotskyn kuuluisimpia käsitteitä lienee lähikehityksen vyöhyke. Sillä tarkoitetaan etäisyyttä oppijan aktuaalisen ja potentiaalisen kehitystason välillä (Tynjälä 1999, s.46-48). Opettajan oppilaantuntemusta korostavan teorian käsitettä on sittemmin laajennettu ”ohjatun osallistumisen”-käsitteeksi, joka korostaa alkuperäistä enemmän oppijan aktiivista panosta yhteisessä toiminnassa.

Konstruktivismi -käsitteen määritelmä on saanut erilaisia tulkintoja ja painotuksia eri tieteenaloilla. Erityisen varovainen täytyy olla puhuttaessa sosiaalisesta konstruktivismista. Tynjälä (1999) jakaa sosiaalisen konstruktivismin symboliseen interaktionismiin ja sosiaaliseen konstruktionismiin. Symbolisen interaktionismin juuret ovat G.H. Meadin (1863-1931) ajattelussa. Hänen mukaansa ihmisen minä ja tietoisuus ovat sosiaalisia ”tuotteita” ja ne syntyvät sosiaalisen vuorovaikutuksen puitteissa. Sosiaalinen konstruktionismi puolestaan tarkastelee oppimista sosiaalisen yhteisön ja kulttuurin eikä niinkään yksilön tasolla. Sosiaalista konstruktionismia voidaankin pitää kaikista konstruktivistisista suuntauksista eniten sosiologisena teoriana. Näistä kahdesta sosiaalisen konstruktivismin alateoriasta symbolinen interaktionismi vaikutti vahvasti taustalla luvussa 3 esittelemieni oppimisympäristöjen suunnittelussa.

Symbolinen interaktionismi on suuntaus, joka yhdistää ideoita radikaalista konstruktivismista (yksilön tiedon konstruointi), sekä sosiokulttuurisista suuntauksista. Lähestymistapa pyrkii selittämään, miten yksilöistä muodostuva ryhmä vuorovaikutuksellisesti rakentaa merkityksiä opetusryhmässä ottaen huomioon myös jokaisen yksilön oman ainutlaatuisen tiedonmuodostuksen. Merkitykset nähdään siis sosiaalisena symbolisena tuotteena, jotka syntyvät ihmisten välisessä tulkinnallisessa vuorovaikutuksessa. Kuten yksilökonstruktivismissa kognitiivisen konfliktin aikaansaaminen nähdään oppimisen edellytyksenä, mutta kognitiivisen konfliktin käsitteen sijasta käytetään usein käsitettä sosiokognitiivinen konflikti, jolla halutaan korostaa sosiaalisen vuorovaikutuksen merkitystä kognitiivisen konfliktin aikaansaamiseksi. Sosiaalista vuorovaikutusta pidetään siis keskeisenä pedagogisena välineenä. Oppiminen on samaan aikaan sekä yksilöllinen konstruointiprosessi, että toiminnan kautta tapahtuva kulttuuriin sosiaalistumisprosessi. Molempien huomioonottaminen on osoittautunut erittäin tärkeäksi opetuksen kehittämistyössä (Tynjälä 1999, s.50-54, 60, 154).

2.4 Tutkiva oppiminen

Sosiaalisella vuorovaikutuksella on myös keskeinen rooli uudessa oppimisen lähestymistavassa, tutkivassa oppimisessa. Tässä suuntauksessa oppimisen nähdään muistuttavan tiedeyhteisön tekemää tutkimusta. Suuntaus perustuu siis ajatukseen, että tiedon luominen ja olemassa olevan tiedon ymmärtäminen ovat samankaltaisia prosesseja. Lähtökohtana ovat itse asetetut ongelmat ja kysymykset tutkittavasta ilmiöstä. Tutkimusprosessin aikana ilmiötä pyritään selittämään yhä syvällisemmin ja täsmällisemmin uusia monimutkaisempia kysymyksiä tuottaen (Tynjälä 1999, s.95-96). Tutkivaa oppimista voidaan osuvasti kutsua myös sosiaaliseksi tiedon rakenteluksi. Tutkivan oppimisen ideat ovat sovellettavissa hyvin myös matematiikan opetukseen.

2.5 Konstruktivismin pedagogisia seurauksia

Kaikille konstruktivismin suuntauksille yhteistä on luovien, tietoa rakentavien ja vuorovaikutteisten toimintojen korostaminen oppimisessa toistamisen ja muistamisen sijaan. Oppijan aktiivisuudella ja sosiaalisella vuorovaikutuksella on suuntauksissa keskeinen rooli, vaikkakin hieman eri painotuksin. Opettamista ei nähdä niinkään tiedon siirtämisenä, vaan oppimisprosessin ohjaamisena. Konstruktivismin keskeisenä lähtökohtana on, että uutta tietoa opitaan aina aikaisemman pohjalta. Esimerkiksi itse opin käsitteen ”teos” merkityksen tätä opinnäytetyötä tehdessäni yhdistämällä kokemukseni opinnäytetyön luonteesta ja harrastuksena tekemäni sävellystyön luonteesta. Molemmissa kaikki lähtee ideasta, jonka pohjalta lähdetään rakentamaan loogista ja yhtenäistä kokonaisuutta. Tällä tavoin olen todella sisäistänyt käsitteen, sillä olen määritellyt sen omien merkityksellisten kokemuksieni kautta. En olisi yltänyt samankaltaiselle ymmärrystasolle pelkästään opettelemalla sanakirjasta teos-käsitteen määritelmän.

Matemaattis-luonnontieteellisissä aineissa oppilailla on paljon ennakkokäsityksiä opetettavan asian suhteen. Esimerkiksi opettaessani lukion pitkän matematiikan vektorit –kurssilaisia, huomasin kuinka osa oppilaista ei erottanut luvun ja vektorin käsitteitä toisistaan. Tässä tapahtuu käsitteiden sijoittumista väärään ontologiseen kategoriaan. Oppiminen ja ymmärtäminen tässä tilanteessa edellyttävät radikaalia käsitteellistä muutosta, jossa vektorin käsite siirtyy luvun ontologisesta kategoriasta omaksi kategoriakseen (Tynjälä 1999, s.80-81).

Yksi konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen opetuksen tärkeimpiä tavoitteita on siis oppilaiden käsitteellisen muutoksen edistäminen. Käytännössä tähän tavoitteeseen päästään suunnittelemalla oppimisympäristö eli oppimateriaalit ja opetusmenetelmät (ja koko oppimisen konteksti) asiayhteyteen sopivalla tavalla. Lähtökohdaksi on hyvä ottaa oppilaiden olemassa olevat tiedot ja taidot. Konstruktivismissa painotetaan merkitysten rakentamista, joten asioiden ymmärtäminen nousee keskeiseksi tavoitteeksi (vain ymmärretty tieto on merkityksellistä). Oppimateriaalit tulee pyrkiä suunnittelemaan näitä tavoitteita silmällä pitäen. Myös oppilaiden olemassa olevat käsitykset opetettavasta asiasta tulisi huomioida. Faktapainotteisen esitystavan sijaan on luonnollista suosia jossain määrin ongelmakeskeistä tyyliä. Faktat ja määritelmätkin opitaan parhaiten silloin, kun ne kytketään oppilaiden aikaisempaan tietoon. Opetettavaa tietoa tulisi myös kytkeä monenlaisiin konteksteihin ja sitä tulisi käsitellä monesta eri näkökulmasta. Tällöin oppilaiden tietorakenteisiin kehittyy monipuolisia kytkentöjä opiskeltuihin asioihin (Tynjälä 1999, s.60-64, 92).

Vastavuoroinen sosiaalinen vuorovaikutus voidaan nähdä opettajan pedagogisena välineenä, opetuksen tehokeinona. Oppimisen ja käsitteellisen muutoksen kannalta on tärkeää, että oppija tiedostaa oman ajattelunsa ja omat uskomuksensa. Sosiaalisen vuorovaikutuksen kautta oppilaat saavat reflektoida ajatuksiaan ryhmässä, ja tulevat näin tietoisemmiksi omien ajattelutapojensa erityisyydestä (Tynjälä 1999, s.65). Opettajan rooli tällaisessa tapahtumassa on toimia ohjaajana, joka viitoittaa tapahtuman suunnan, mutta antaa tilaa oppilaiden ajattelulle. Jotta opettaja olisi riittävän tietoinen oppilaiden aikaisemmista tiedoista, käsityksistä ja luuloista opetettavan asian suhteen, on sosiaalinen vuorovaikutus paitsi opetuksen tehokeino, myös välttämättömyys.

2.6 Oppimisympäristöt

Kappaleessa 1.1 käytiin läpi oppimiskäsityksen historiaa kahden toisistaan radikaalisti poikkeavan näkemyksen, behaviorismin ja konstruktivismin, osalta. Näiden näkemysten pohjalta syntyy myös kaksi opettamisen kulttuuria. Toiselle, behaviorismiin pohjautuvalle, on ominaista hallintakeskeisyys. Opettaja viitoittaa tien ja pitää huolen siitä että tietä seurataan. Toiselle, konstruktivismiin pohjautuvalle, on ominaista luoda sellainen oppimisympäristö, joka tarjoaa oppilaalle ongelmia, keinoja, ohjausta ja tukea. Behavioristinen oppimiskäsitys tarjoaa opettajalle turvallisen tien: se antaa selviä tienviittoja opetussuunnitelman laatimiselle. Konstruktivistinen oppimiskäsitys sen sijaan on paljon monisyisempi. Oppimisprosessin kuva on kyllä johdonmukainen ja tieteelliseen käsitykseen perustuva, mutta sen soveltaminen osaksi opetusta on vaativaa (Rauste & von Wright 1994 s.176-177).

Oppimisympäristö käsittää sen avaruudellisen ja ajallisen tilan, sekä tapahtumat, jossa oppiminen toteutuu. Rauste & von Wright (1994) määrittelevät oppimisympäristön, eli oppimisen kontekstin, tilanteeksi, joka tarjoaa oppilaalle ongelmia, keinoja, ohjausta ja tukea. Oppijan havainnot ja tulkinnat oppimisympäristön vaatimuksista suuntaavat hänen oppimistaan. Taustalla on oletus, jonka mukaan ihminen pyrkii ymmärtämään maailmaa, etsii syitä ja selityksiä. Konstruktivistisen näkemyksen mukaan sopivan haastavia ja mielekkäitä ongelmia tarjoavat ja oppilaiden ajattelua aktivoivat oppimisympäristöt lisäävät automaattisesti oppilaiden motivaatiota. Tynjälän (1999) mukaan oppilaiden omatoimisuutta, aloitteellisuutta ja itsenäisyyttä tukevat ympäristöt edistävät sisäisen motivaation ja oppimisorientaation kehittymistä.

Kaikki toiminta on sidoksissa siihen aikaan, paikkaan ja tilanteeseen, jossa se tapahtuu. Oppiminenkin on siis aina tilannesidonnaista, joten oppimista tukevien oppimisympäristöjen luominen on opetustyössä keskeistä. Koska oppija nähdään osana kontekstia, tilannesidonnaisuutta korostavan oppimisen koulukunnan (ks. Tynjälä 1999, s.150-151) mukaan oppimisen tutkimuksessa pitäisi yksilön sijasta kiinnittää huomiota yksilöiden väliseen toimintajärjestelmään eli oppimisympäristöön. Oppimisympäristöissä ajattelutaitojen harjoittamista sisältöjen oppimisen yhteydessä tulisi mielestäni korostaa. Matematiikan opetuksessa ajattelutaidot ja sisältö kietoutuvat luonnostaan yhteen, joten tämäntyyppisten oppimisympäristöjen luominen on matematiikan opettajalle luonteva tapa oppituntien suunnittelun lähtökohdaksi.

3. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus

Tässä luvussa käydään läpi matematiikan opetuksen ja oppimisen ja erityisesti tietokoneavusteisen opetuksen tutkimuksen ajankohtaisia aiheita Suomessa ja ulkomailla. Lisäksi määritellään tietokoneavusteinen opetus ja muutamia keskeisiä käsitteitä liittyen matematiikan oppimisen tutkimukseen. Aluksi on kuitenkin syytä määritellä, mitä tarkoitetaan matemaattisella osaamisella.

3.1 Matemaattinen osaaminen

Viime aikoina on käyty paljon keskustelua suomalaisen koulumatematiikan tasosta. PISA -tutkimusten mukaan suomalaisnuorten matematiikan osaaminen on kansainvälisessä vertailussa huipputasolla. Samaan aikaan yliopistojen ja korkeakoulujen matematiikan opettajat ovat olleet huolissaan algebran perusrutiinien heikkenemisen johdosta. Ennen kuin julistamme ristiriitaa näiden kahden havainnon välillä on syytä miettiä tarkemmin, mitä matemaattisella osaamisella oikeastaan tarkoitetaan.

Matematiikan opetuksen tavoitteena on matemaattinen osaaminen. Opetuksen ja oppimisen tutkimuksen kannalta on keskeistä määritellä, mitä matemaattisella osaamisella tarkoitetaan ja millaisiin osiin se voidaan jakaa. PISA –tutkimuksessa tutkittu ”mathematical literacy” määritellään seuraavasti (OECD 2005):

”Matematiikan osaaminen tarkoittaa yksilön kykyä havaita ja ymmärtää matematiikan merkitys ympäröivässä maailmassa, tehdä perusteltuja matemaattisia päätelmiä ja käyttää matematiikkaa nykyisten ja tulevien elämäntilanteidensa tarpeita vastaavasti, asioista välittävänä ja rakentavasti ajattelevana kansalaisena.”

Tämän määritelmän mukaisen matematiikan osaamisen tavoittelu opetuksessa vaikuttaa hyvältä ajatukselta. Määritelmä on kuitenkin suurpiirteinen ja kaipaa tarkennusta. Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) jakavat matemaattisen osaamisen viiteen erilliseen piirteeseen:

1. Käsitteellinen eli konseptuaalinen ymmärtäminen: Matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen
2. Proseduraalinen sujuvuus: Esimerkiksi yhtälöiden ratkaisumenetelmien tai derivointi ja integrointimenetelmien hallinta
3. Strateginen kompetenssi: Kyky esittää ja ratkaista ongelmia matemaattisesti
4. Mukautuva päättely: Pystyvyys loogiseen ajatteluun (esimerkiksi matemaattinen todistaminen)
5. Yritteliäisyys: Oppija näkee matematiikan hyödyllisenä ja motivoivana, sekä uskoo omiin kykyihinsä ja ahkeruuden merkitykseen.

Matemaattisen osaamisen käsite ei ole yksiselitteinen. Eri oppilaitosten opettaman matematiikan osaamisen vaatimukset saattavat poiketa toisistaan suuresti. Esimerkiksi lukiomatematiikan hallinnassa painottuu proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon hallinta, kun taas perinteisesti yliopistomatematiikassa mukautuvan päättelyn taito on osaamisen kannalta keskiössä. Vuoden 2003 PISA-tutkimuksen esimerkkitehtävien ratkaisemisessa puolestaan painottuu ennen kaikkea oppilaiden strateginen kompetenssi (ks. http://ktl.jyu.fi/ktl/pisa/tehtavat/matematiikka2003).

Miten matemaattista osaamista sitten haalitaan? Haapasalo & Eronen (2007) listaavat artikkelissaan kahdeksan aktiviteettia, joiden kautta matematiikan oppiminen katsotaan tapahtuvaksi:

1. Määrääminen (ordering)
2. Löytäminen (finding)
3. Leikkiminen (playing)
4. Konstruointi (constructing)
5. Soveltaminen (applying)
6. Laskeminen (calculating)
7. Arviointi (evaluate)
8. Väittely (argue)

Kyseiset aktiviteetit määritteli alun perin Bernd Zimmermann (ks. Haapasalo & Eronen 2007). Hänen mukaansa nämä kahdeksan aktiviteettia ovat olleet uuden matematiikan luomisen taustalla läpi koko matematiikan 5000-vuotisen historian. Kyseisiä aktiviteettejä voidaan siis pitää paitsi matematiikan oppimisen mahdollistajina, myös yleisemmässä mielessä matemaattisen koulutuksen taustatekijöinä. Monien aktiviteettien vaikutusta voidaan tehostaa käyttämällä opetuksessa hyväksi tieto- ja viestintätekniikkaa (Haapasalo, 2008b).

3.2 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon suhde

Matemaattinen tieto koostuu proseduureista ja konsepteista. Behavioristisen perinteen mukaisessa matematiikan opetuksessa korostuu proseduurien (esimerkiksi yhtälöiden ratkaisumenetelmien) opetus ja oppiminen, kun taas konstruktivismissa painotus on enemmän konseptien hallinnassa (asiakokonaisuuksien ymmärtäminen). Konseptuaalinen ymmärtäminen vähentää opiskelijan muistinvaraisen tiedon tarvetta, sillä opiskelija pystyy ymmärryksensä varassa johtamaan tarvittavia ratkaisumenetelmiä kohdattaviin ongelmiin.

Matematiikan oppimisen tutkimuksen kannalta on kiinnostavaa kysyä, kumpi saavutetaan ensin, proseduraalinen sujuvuus, vai konseptuaalinen ymmärrys? Tosin sanoen, kuinka paljon oppilaiden tulee ymmärtää ennen kuin he pystyvät tekemään ja toisaalta, kuinka paljon oppilaiden pitää ensin tehdä että he pystyvät ymmärtämään. Haapasalo ja Kadijevich (2000) kutsuvat kehityksellisiksi lähestymistavaksi (developmental approach) opetusta, jossa proseduurien opetus edeltää konseptuaalista ymmärrystä tukevaa osuutta ja koulutuksellisiksi lähestymistavaksi (educational approach) opetusta, jossa lähdetään tavoittelemaan konseptuaalista ymmärrystä, jonka jälkeen siirrytään proseduurien opetukseen. Jälkimmäisessä, koulutuksellisessa lähestymistavassa, tavoitteena on siis luoda ensin merkitys käsiteltävälle asialle, jonka jälkeen tämä merkitys yhdistetään matemaattisiin proseduureihin.

Fey'n (1989) Mukaan tietokoneiden avulla voidaan vähentää proseduurien opettamiseen tarvittavaa aikaa ja täten lisätä konseptuaalisen ymmärtämisen osuutta. Suomessa toteutettu MODEM-tutkimus (ks. Haapasalo & Kadijevich 2000, 2001) lienee yksi suurimmista tällaisista tietokoneavusteisia oppimisympäristöjä hyödyntävistä tutkimuksista. Se on edistänyt proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon tutkimusta, sekä tuottanut tärkeitä pedagogisia sovelluksia. Käytetyt tietokoneavusteiset oppimisympäristöt auttoivat paljastamaan puutteita oppilaiden metakognitiivisissa taidoissa ja konseptuaalisessa ymmärtämisessä. Tutkimuksessa oppilaiden todettiin myös pitävän käytetyistä tietokoneavusteisista oppimisympäristöistä (Haapasalo & Kadijevich 2000, 2001). Haapasalon (1991) tietokoneavusteisen opetuksen MODEM1-tutkimuksessa saatiin positiivinen korrelaatio oppilaiden proseduraalisten ja konseptuaalisten tehtävien välillä.

Yksi esimerkki proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon suhteesta, on geometrian ja algebran ”linkittäminen”. Näiden kahden eri representaatioiden välisen suhteen havainnollistamiseen soveltuvat erityisen hyvin dynaamiset geometriaohjelmat, kuten luvussa 4 esiteltävä GeoGebra. Tällaisissa ohjelmissa oppilaat pystyvät esimerkiksi manipuloimaan funktion lauseketta ja näkemään reaaliajassa muutoksen funktion kuvaajassa. Toiminnan tavoitteena voidaan tällöin pitää oppilaiden konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhdistämistä. Toteutin tämän tavoitteen mukaisen oppimisympäristön GeoGebra-ohjelmaa hyväksi käyttäen opetusharjoittelussani lukion pitkän matematiikan kurssilla ”funktiot ja yhtälöt 2” (Ks. 5.4).

3.3 Tietokoneavusteinen opetus ja tietokoneavusteiset oppimisympäristöt

LUMA -hankkeen (Opetusministeriö 2002) loppuraportista selviää, että vaikka tieto ja viestintätekniikkaa oli 2000-luvun alussa tullut useimpiin suomalaisiin kouluihin, oli yhä kouluja, joista ei löytynyt minkäänlaisia laitteistoja, tai laitteistot eivät ole sovellettavissa opetukseen (esim. tietokoneita oli ainoastaan yhdessä luokassa). Kankaanrannan (2004) raportissa todetaan, että vaikka tietokoneiden määrä Suomalaisissa kouluissa oli oppilasta kohden kansainvälisesti korkealla tasolla, oli käytettävistä ohjelmistoista laajalti puutetta. Lisäksi kaikkien suomalaisten opettajien asenteet tietokoneavusteista opetusta kohtaan eivät välttämättä aina olleet kovinkaan myönteisiä. Vastaava asia käy ilmi myös uudessa kansainvälisessä SITES-tutkimusohjelmassa, jonka kansallisesta koordinoinnista vastaa Jyväskylän yliopiston Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksessa käy ilmi, että matematiikan opettajista vain 9 % ja luonnontieteiden opettajista 15 % kertoi käyttävänsä tietotekniikkaa opetuksessaan kerran viikossa tai useammin (SITES 2006).

Tietokoneavusteiselle opetukselle voidaan antaa monenlaisia määritelmiä. Itse määrittelen tietokoneavusteiseksi kaiken opetuksen, jossa tietokonetta (tai esimerkiksi tietokoneen kaltaista graafista laskinta) käytetään opetuksen tukena. Tietokoneavusteisen opetuksen käsitteen rinnalla käytetään myös tieto- ja viestintätekniikka hyödyntävän opetuksen käsitettä. Käytettäessä tätä käsitettä, halutaan korostaa käytetyn teknologian laiteriippumattomuutta (sama ohjelma esim. tietokoneessa ja matkapuhelimessa). Tieto- ja viestintätekniikan roolin merkitys oppitunneilla voi vaihdella suuresti. Määrittelen kuitenkin tieto- ja viestintätekniikkaa hyödyntäväksi opetukseksi kaiken opetuksen, jossa tieto- ja viestintätekniikalla on pieninkin rooli opetuksessa. Tietokoneavusteinen oppimisympäristö puolestaan on opetuksen järjestämiseksi suunniteltu tilanne, jossa tietotekniikka toimii konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen oppimisen tehostajana.

Monet tutkijat (ks. Haapasalo & Silfverberg 2006) uskovat uusien teknologisten mahdollisuuksien, sekä oppimista koskevan uuden tutkimuksen johtavan paradigman vaihdokseen matematiikan oppimisen ja opetuksen saralla. Uuden paradigman mukainen matematiikan oppiminen ja opetus nähdään tieto ja viestintätekniikkaa hyödyntävänä sekä konstruktivistisen oppimiskäsityksen periaatteita mukailevana (Haapasalo & Silfverberg 2006).

3.4 Tietokoneavusteisen matematiikanopetuksen tutkimus

Tietokoneavusteisen opetuksen juuret ovat 1980-luvulla määritellyn "ohjelmoidun opetuksen" optimistisissa ideoissa, joiden mukaan ihmisten oppimista voidaan säädellä kontrolloiduissa tietokoneavusteisissa ympäristöissä. Sittemmin tutkimuksen pedagoginen viitekehys on siirtynyt konstruktivistisempaan suuntaan. Nykyään tietokoneavusteinen opetus, tai paremminkin tieto- ja viestintätekniikkaa hyödyntävä opetus nähdään laajempana konseptina (Haapasalo & Silfverberg 2006). Suomessa tieto- ja viestintätekniikka hyödyntävää matematiikan opetusta on tutkittu melko paljon muun muassa Joensuun yliopiston professori Lenni Haapasalon ja Djordje Kadijevichin toimesta.

Kadijevich (2004) listaa väitöskirjassaan neljä matematiikan tutkimuskohdetta, joiden tutkimukseen ei olla tieto- ja viestintäteknisten tavoitteiden näkökulmasta panostettu tarpeeksi:

1. Matematiikan inhimillisen puolen esille tuominen
2. Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistäminen
3. Matemaattisen mallintamisen hyödyntäminen oppijalähtöisellä, teknologiaa apuna käyttävällä tavalla
4. Tietokoneavusteisen oppimisen esille tuominen matemaattisten sovellusten ja matemaattisen mallintamisen kautta

Ensimmäisen kohdan, matemaattisen inhimillisen puolen esille tuomiseksi, on tietokoneavusteisessa matematiikanopetuksessa tapahtumassa paradigman muutos teknologiakeskeisestä opetuksesta sosiaalisen konstruktivismin periaatteita mukailevien teknologisten oppimisympäristöjen rakentamiseen. Kuten jo edellä todettiin, ovat Haapasalo & al. panostaneet erityisesti proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistämiseen tietokoneavusteisia oppimisympäristöjä käyttämällä. Haapasalo & Siekkinen (2005) ovat lähestyneet tutkimuksessaan kohtia 3 ja 4. Tässä tutkimuksessa he saivat tukea seuraavalle viidelle hypoteesille:

1. Teknologian avulla voidaan parantaa opettajien ja oppilaiden metakognitiivisia, eli oppimaan oppimisen taitoja.
2. Teknologian integrointi on tarpeellista, vaikka se aikataulun kireyden vuoksi tuntuisikin vaikealta (minimaalisen ohjeistuksen periaatteet, ks. 3.5).
3. Tieto- ja viestintätekniikkaa hyödyntävässä opetuksessa voidaan hyötyä ”suunnittelemalla oppimisen” (learning by design) periaatteista (ks. 3.5).
4. Teknologian avulla voidaan oppimista siirtää tapahtuvaksi oppilaiden vapaa-ajalle (esim. verkko- oppimisympäristöt ks. 3.6).
5. Teknologiaopetus opettajakoulutuksessa on parasta toteuttaa integroimalla teknologia luonnolliseksi osaksi opiskelijoiden pedagogista ajattelua.

Teknologian hyödyntäminen käytännön opetustyössä saattaa tuntua paitsi opettajista, myös oppilaista jatkuvan kiireen vuoksi usein liian haastavalta tavoitteelta. Oppilaat näyttävät oppivan koulun ulkopuolella tehokkaasti niin matemaattisia kuin teknologisiakin taitoja. Tästä johtuen on syytä pysähtyä miettimään, onko koulujen tarjoamissa oppimisympäristöissä parantamisen varaa ja toisaalta on myös mietittävä vastausta kysymykseen ”Miten oppilaat oppivat” (Haapasalo 2008). Näiden ristiriitojen ratkaisuksi on ehdotettu ”minimaalisen ohjeistuksen” (minimal instruction), sekä ”suunnittelemalla oppimisen” periaatteita mukailevaa teknologian hyväksi käyttöä.

3.5 Minimaalinen ohjeistus ja suunnittelemalla oppiminen tietokoneavusteisissa oppimisympäristöissä

Eräs tuttavani kysyi kerran minulta, miksi hänen tuntemansa miehet osaavat käyttää teknisiä laitteita hänen tuntemiaan naisia paremmin, vaikka juuri miehet eivät yleensä juurikaan lukeneet ohjekirjoja? Vastasin tähän kysymykseen, että ehkäpä hänen tuntemansa miehet opettelivat käyttämään laitteita kokeilemalla ja tutkimalla, ja ehkäpä tällä tavoin saavutetut oppimistulokset olivat parempia, kuin ohjekirjoja lukemalla saavutetut.

Oppilaat ja opettajat kokevat tieto- ja viestintätekniikan opetuksen integroimisen muuhun opetukseen haastaviksi. Esimerkiksi lukion pitkän matematiikan kursseilla ei tunnu riittävän aikaa uusien teknisten apuvälineiden ja sovellusten opettamiselle. Lisäksi oppilaat suhtautuvat usein välinpitämättömästi opettajan ohjaukseen teknisten apuvälineiden käytössä (Haapasalo, 2008). J.M Carrollin (1990) esittelemä metodi "minimaalinen ohjeistus" (minimal instruction) pyrkii vastaamaan näihin haasteisiin. Haapasalo (2008) kuvailee minimaalista ohjeistusta seuraavilla piirteillä:

- Ainoastaan opetettavan asian ydin on ennalta määrätty; ei yksityiskohdat
- Opettajan ohjausta ei määritellä ennalta
- Oppimistavoitteet määritellään oppilaiden suorittamien tehtävien perusteella
- Virheitä ei vältellä, vaan niihin tartutaan opetusmielessä
- Oppilaat konstruoivat useita näkökantoja tai ratkaisuja annettuihin ongelmiin keskustelemalla ja tekemällä yhteistyötä toistensa kanssa
- Oppiminen keskittyy tiedon rakentamisen prosessiin ja tämän prosessin tiedostamiseen
- Menestyksen kriteerinä käytetään oppilaan kykyä soveltaa oppimaansa erilaisissa tilanteissa
- Opetuksen ja oppimisen arviointi on jatkuvaa ja keskittyy oppilaiden tarpeisiin

Minimaalisen ohjeistuksen taustalla vaikuttavat konstruktivistinen oppimiskäsitys ja sen sosiaaliset painotukset. Minimaalinen ohjeistus on toiminut lukuisten tutkimusten pedagogisena viitekehyksenä (mm. Eronen & Haapasalo 2006).

Minimaalista ohjeistusta voidaan käyttää luotaessa suunnittelemalla oppimisen mukaisia tietokoneavusteisia oppimisympäristöjä. Suunnittelemalla oppiminen tarkoittaa oppimista, joka tapahtuu luomisen, ohjelmoinnin tai muuhun suunnittelupohjaiseen aktiviteettiin osallistumisen kautta. Menetelmän taustalla vaikuttaa konstruktivistinen oppimiskäsitys, jonka periaatteiden mukaan oppilaat konstruoivat suunnitteluprosessissa merkityksiä opetettavalle sisällölle. Johanssen (2000) toteaa, että ne jotka oppivat manuaaleista, ovat manuaalien suunnittelijat, eivät lukijat. Eskelinen (2005) puolestaan väittää, että suunnittelemalla oppimiseen perustuvissa oppimisympäristöissä oppilaiden käsitykset opettamisesta ja oppimisesta todella vaihtuvat behavioristisesta konstruktivistiseen.

Tietokonepohjaiseen suunnitteluun perustuvia matematiikan oppimisympäristöjä voidaan luoda muun muassa käyttämällä hyväksi seuraavassa luvussa esiteltävää GeoGebra –ohjelmistoa.

3.6 Verkkopohjaiset oppimisympäristöt

Tilastokeskuksen vuonna 2004 tekemän tutkimuksen mukaan noin 70% 15-74 vuotiaasta väestöstä käyttää internettiä. On selvää, että verkkopohjaisten opetusmateriaalien ja oppimisympäristöjen merkitys tulee yhä vain korostumaan tulevaisuudessa. Opettajien tulisi siis olla ajan hermolla oppilaiden tavoista toimia verkossa. Verkko-oppimisympäristöt tulisi suunnitella oppilaiden toimintatapojen perusteella. Hyvänä lähtökohtana oppimisympäristöjen suunnittelussa toimivat myös minimaalisen ohjeistuksen, sekä suunnittelemalla oppimisen periaatteet. Verkkopohjaiset oppimisympäristöt mahdollistavat oppimisen laajenemisen luokkahuoneesta vapaa-ajalle. Tämä ei kuitenkaan ole verkko-oppimisympäristöjen ainoa etu, sillä luonnollisesti ne tuovat mukanaan myös kustannussäästöjä, paikasta ja ajasta riippumattomuutta, sekä mahdollisuuksia opetuksen eriytykseen.

Kuten kappaleessa 3.3 todettiin, opettajien tieto ja viestintätekniikan hyödyntäminen on vielä melko vähäistä. Yhtenä merkittävänä syynä tähän uskoisin olevan opettajien ennakkoluulojen tieto- ja viestintätekniikan hyödyntämisen teknisestä hankaluudesta. Seuraavassa luvussa osoitetaan, että matemaattisen sisällön tuottaminen verkkopohjaisiin oppimisympäristöihin voi olla varsin helppoa.

3.7 Matematiikan opetuksessa käytetyt ohjelmistot

Matematiikan opetuksessa nykyisin hyödynnettävät ohjelmistot voidaan ominaisuuksiensa perusteella jakaa kahteen pääryhmään (Haapasalo & Silfverberg 2006):

1. Laskentaohjelmistot (CAS-programs, mm. Derive, Mathematica)
2. Dynaamiset geometria/matematiikkaohjelmat (mm. Cabri, Geometers' Sketchpad, GeoGebra, GeoNext)

Laskentaohjelmistot ovat yleensä monipuolisia ja raskaita ohjelmia. Niitä käytetään pääasiassa symboliseen ja numeeriseen laskentaan. Muun muassa Repo (1994) on tutkinut laskentaohjelmistojen käytön mahdollisuuksia matematiikan opetuksessa.

Dynaamisilla geometriaohjelmilla voidaan piirtää geometrisia objekteja ja muuttaa näihin liittyviä arvoja myöhemmin dynaamisesti, toisin sanoen siten, että käyttäjä näkee muutokset geometristen objektien visuaalisessa esityksessä reaaliajassa muuttaessaan geometrisiin objekteihin liittyviä arvoja. Lisäksi jotkut dynaamiset geometriaohjelmat (mm. GeoGebra) suorittavat lisäksi laskennallisia toimintoja, kuten derivaatan ja integraalin määrittämistä. Tällöin puhutaan yleisemmin dynaamisista matematiikkaohjelmista. Dynaamisten geometria/matematiikkaohjelmien käyttöön liittyvää tutkimusta on tehnyt muun muassa Silfverberg (2004).

Tässä opinnäytetyössä keskityn GeoGebraan ja sen mahdollisuuksiin sosiaalisen konstruktivismin mukaisten tietokoneavusteisten oppimisympäristöjen luomisen apuna. Ohjelma sopii erityisen hyvin paitsi matemaattisen sisällön tuottamiseen verkkopohjaisiin oppimisympäristöihin, myös opettajan demonstrointivälineeksi.

4. GeoGebra

GeoGebra on dynaaminen matematiikkaohjelma, joka on saanut alkunsa Markus Hohenwarterin Salzburgin yliopistolle tekemästä pro gradu -tutkielmasta. GeoGebra on kehittynyt nopeasti, ja vuoden 2009 alussa sen parissa työskenteli jo 15 kehittäjää ja 100 kääntäjää ympäri maailman (Hohenwarter & Lavicza 2009). Monista muista dynaamisista geometria/matematiikkaohjelmista poiketen se on avoimeen lähdekoodiin perustuva ja täysin ilmainen ohjelma käyttää. Käyttö onnistuu kätevästi joko suoraan verkon yli tai lataamalla sovellus omalle tietokoneelle (käyttö edellyttää työasemalta Java 1.4.2 tai uudempaa versiota). Ohjelma on palkittu kansainvälisesti ja saanut eurooppalaisia ja saksalaisia oppimateriaalipalkintoja (ks. www.geogebra.org).

GeoGebran, kuten muidenkin dynaamisten matematiikkaohjelmien, keskeisin idea on samanaikainen algebrallisen esityksen (algebraikkuna) ja geometrisen esityksen (geometriaikkuna) havainnointi samassa näkymässä sekä näiden esitysten dynaaminen manipulointi (algebraikkunan objekti vastaa geometriaikkunan objektia ja päinvastoin). Tämä mahdollistaa eri objektien välisten riippuvuussuhteiden tarkastelun. GeoGebran avulla on täten helppo toteuttaa paitsi proseduraalista ja konseptuaalista tietoa yhdistäviä työtiedostoja myös monia muita matematiikan opetusta tehostavia sovelluksia.

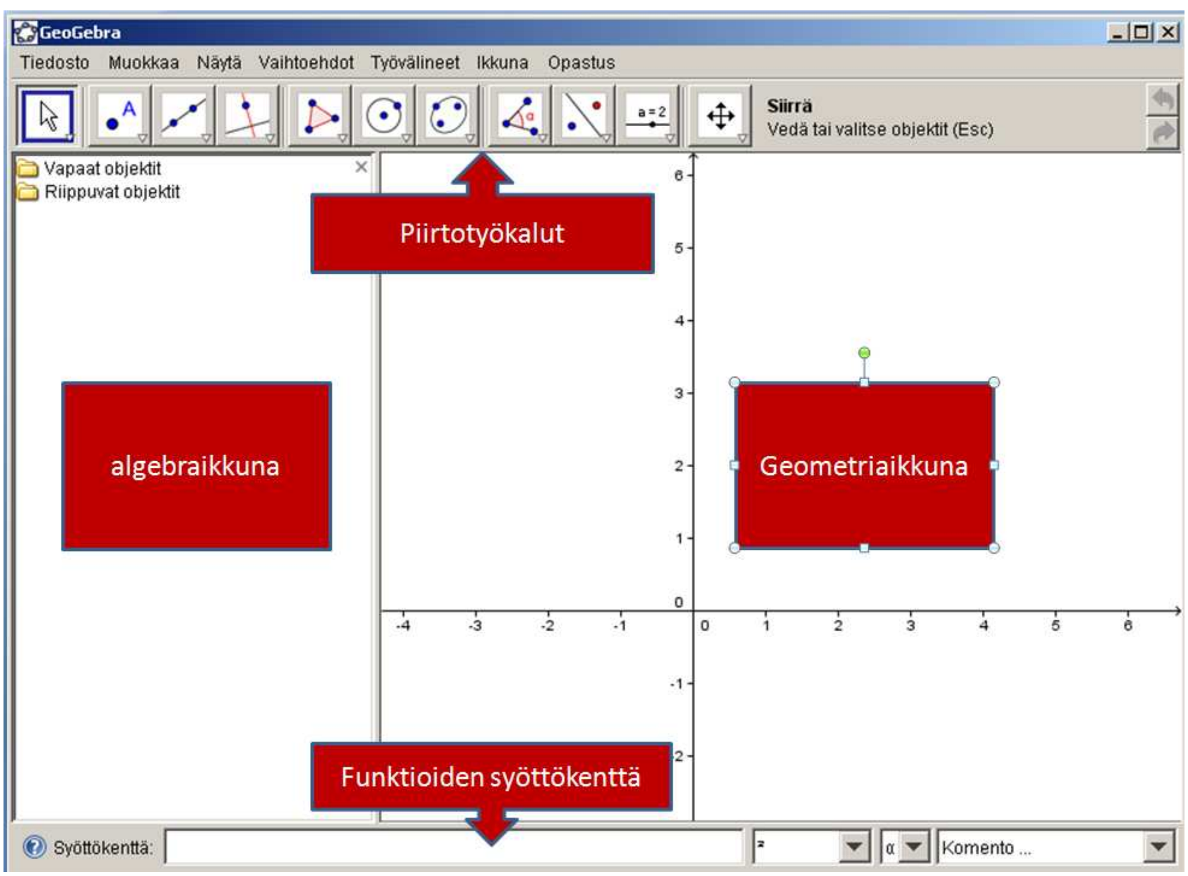
4.1 GeoGebran käyttö

GeoGebran suunnittelun keskeisenä tavoitteena on alusta lähtien ollut ohjelman helppokäyttöisyys. Tällä on pyritty pienentämään matematiikan opettajien kynnystä dynaamisten matematiikkaohjelmien tarjoamien mahdollisuuksien käyttöön peruskoulu- ja lukiotasolla. Vaikka tämän opinnäytetyön tarkoituksena ei ole toimia GeoGebran käyttöoppaana, on jatkon kannalta tarpeellista esitellä GeoGebran tärkeimmät ominaisuudet. Tämä kappale toimii samalla GeoGebran perusominaisuuksien kertauksena ohjelmaa käyttäneille lukijoille. Suosittelen ohjelmaa käyttämättömien lukijoiden opettelevan GeoGebran käyttöä tekemällä opastusvalikosta löytyviä harjoitustehtäviä.

4.1.1 Objektit ja niiden lisääminen

GeoGebrassa objekteja ovat esimerkiksi pisteet, suorat, ympyrät, ellipsit, vektorit, funktiot, teksti ja liukuluvut. Kuvaan 1 merkityt algebraikkuna, geometriaikkuna, piirtotyökalut, sekä funktioiden syöttökenttä muodostavat GeoGebran toiminnallisen ytimen.

- **Algebraikkuna**: Tähän näkymään ilmestyvät muodostamasi objektit (funktiot ja geometriset objektit)
- **Geometriaikkuna**: Tähän näkymään pystyt piirtämään geometrisia objekteja sekä funktioiden kuvaajia. Lisäksi pystyt lisäämään tekstiä ja dynaamisesti muuttuvia arvoja.
- **Piirtotyökalut**: Geometristen objektien, tekstin, liukusäätimien ym. lisääminen sekä valinta- ja siirtotyökalujen valinta tapahtuu näiden työkalujen avulla.
- **Funktioiden syöttökenttä**: Voit piirtää reaalifunktioiden kuvaajia kirjoittamalla funktion lausekkeen syöttökenttään.

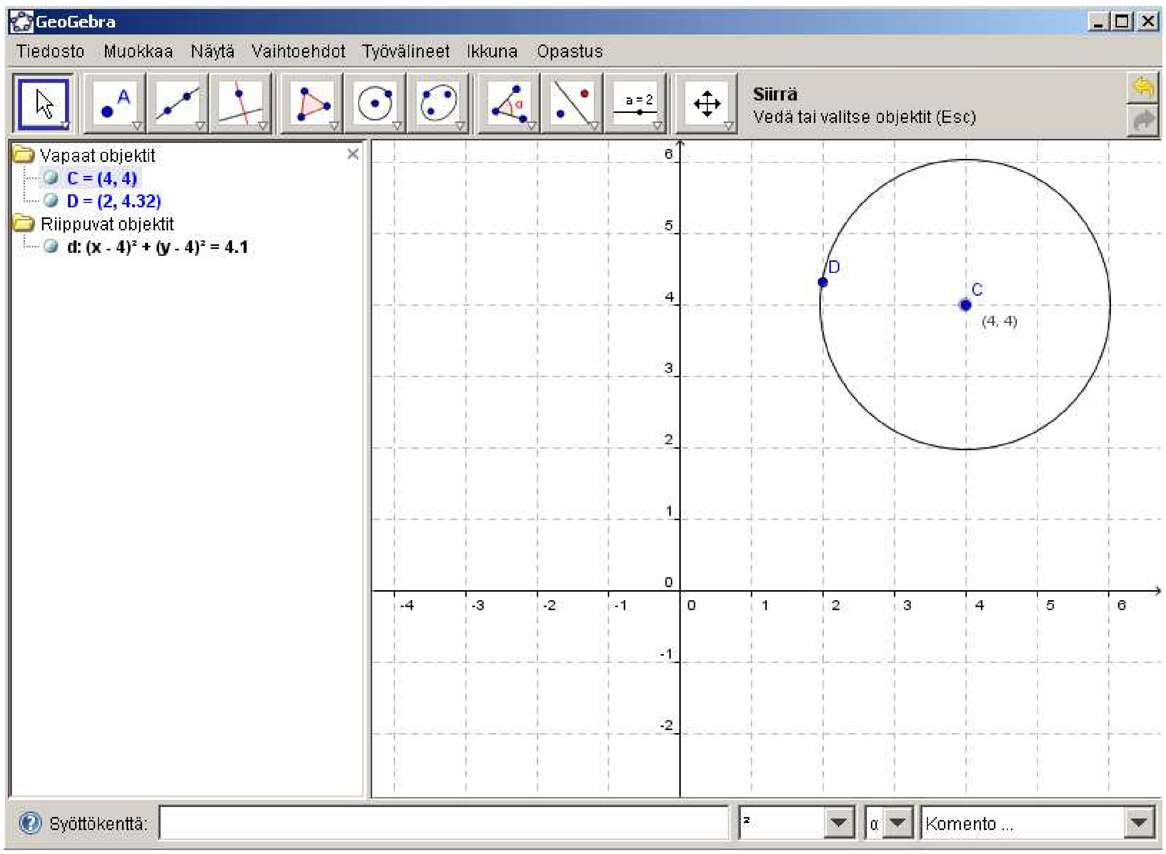


Kuva 1

4.1.2 Dynaaminen arvojen muuttaminen

Objektiin liittyviä numeerisia arvoja voidaan muuttaa algebraikkunassa, jolloin muutosten vaikutus on huomattavissa myös geometriaikkunassa. Toisaalta objektin muotoa ja sijaintia voidaan muuttaa geometriaikkunassa, jolloin algebraikkunassa näkyvät numeeriset arvot muuttuvat.

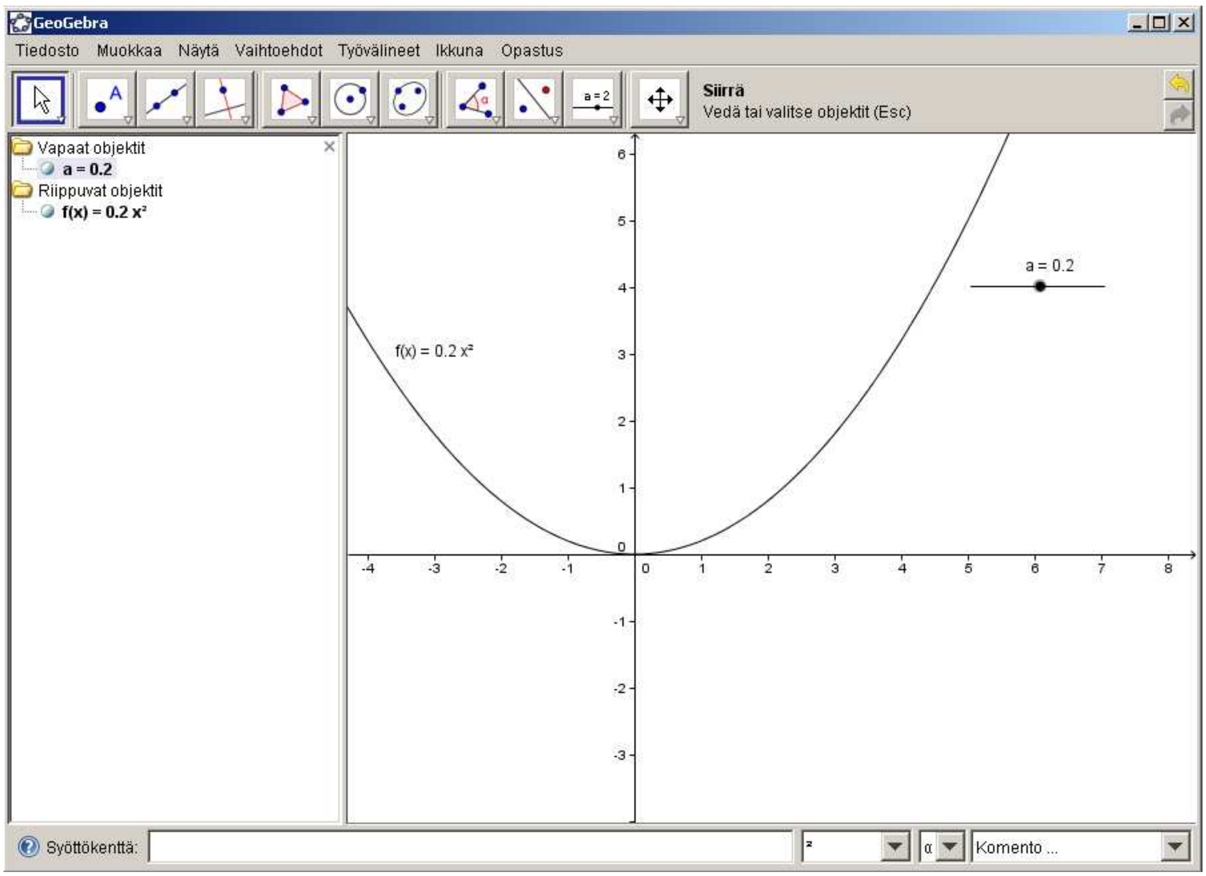
Kuvassa 2 oleva ympyrä on määritelty keskipisteen C ja kehäpisteen D avulla. Liikutettaessa pistettä C tai D voidaan siirron vaikutus nähdä välittömästi algebraikkunan ympyrän yhtälössä.



Kuva 2

4.1.3 Liukusäädin

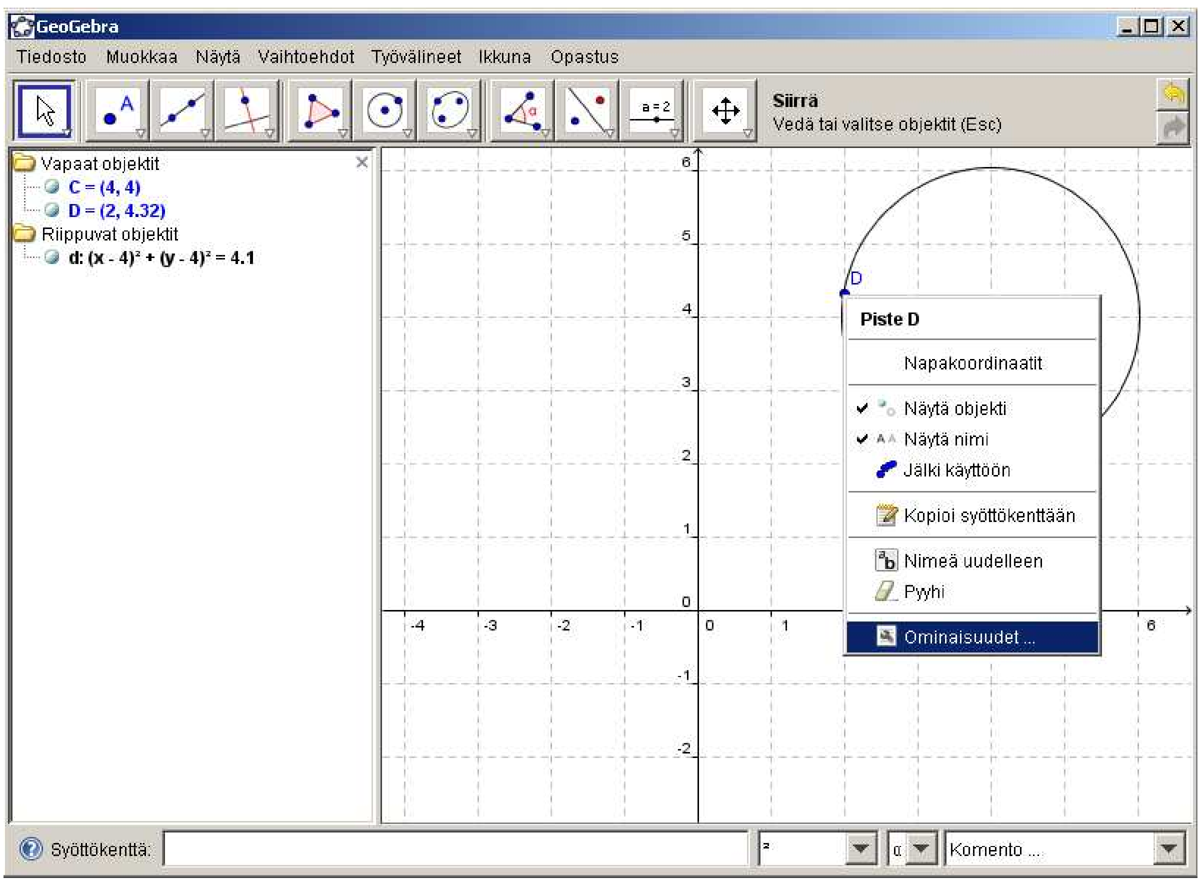
Liukusäätimellä tarkoitetaan piirtotyökalupalkista löytyvää säädintä, jonka avulla objektiin liittyviä arvoja voidaan muuttaa hiirellä vetämällä. Kuvassa 3 on ensin luotu liukusäädin a, jonka jälkeen on luotu syöttökentän avulla funktio $f(x) = ax^2, x \in \mathbf{R}$ (syöttömuoto: a*x^2). Liikuttelemalla nyt geometriaikkunassa olevaa a:n liukusäädintä, myös f(x):n toisen asteen termin kerroin muuttuu.



Kuva 3

4.1.4 Objektien ominaisuudet

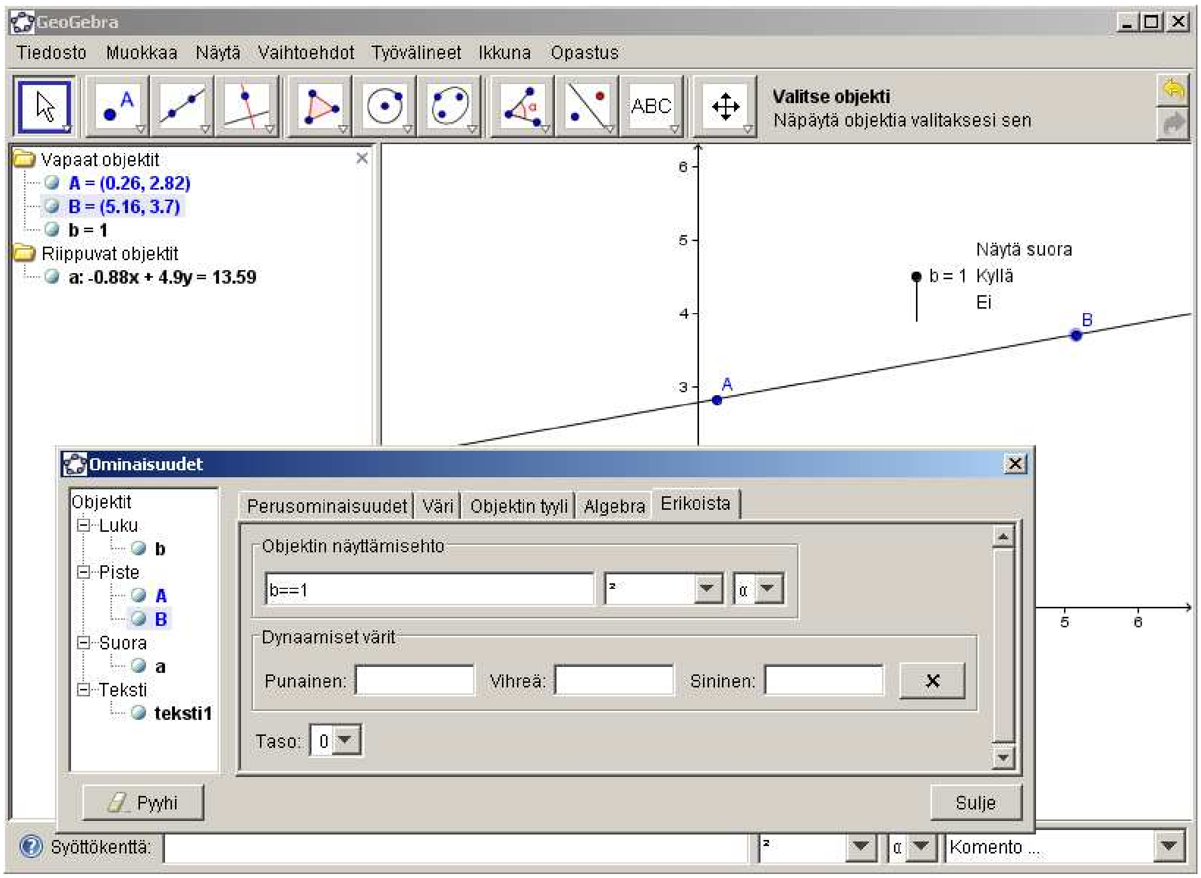
Jokaisella lisätyllä objektilla on ominaisuuksia, joita käyttäjä pääsee muokkaamaan napsauttamalla objektia hiiren oikealla näppäimellä ja valitsemalla ”ominaisuudet”. Objektin ominaisuuksissa voidaan muuttaa muun muassa sen matemaattiseen määritelmään liittyviä arvoja. Lisäksi voidaan esimerkiksi määrittää, näytetäänkö objekti, minkä värinen se on, tai jätetäänkö objektin jälki näkyviin dynaamisissa muunnoksissa. Viimeksi mainittu ominaisuus osoittautui opettajakoulutukseni aikana erittäin käyttökelpoiseksi ja mielenkiintoiseksi (ks. 5.2 ja 5.4). Ominaisuudet-valikosta voidaan määrittää myös loogisia ehtoja objektin näyttämiselle.



Kuva 4

4.1.5 Monivaiheiset demonstraatiot

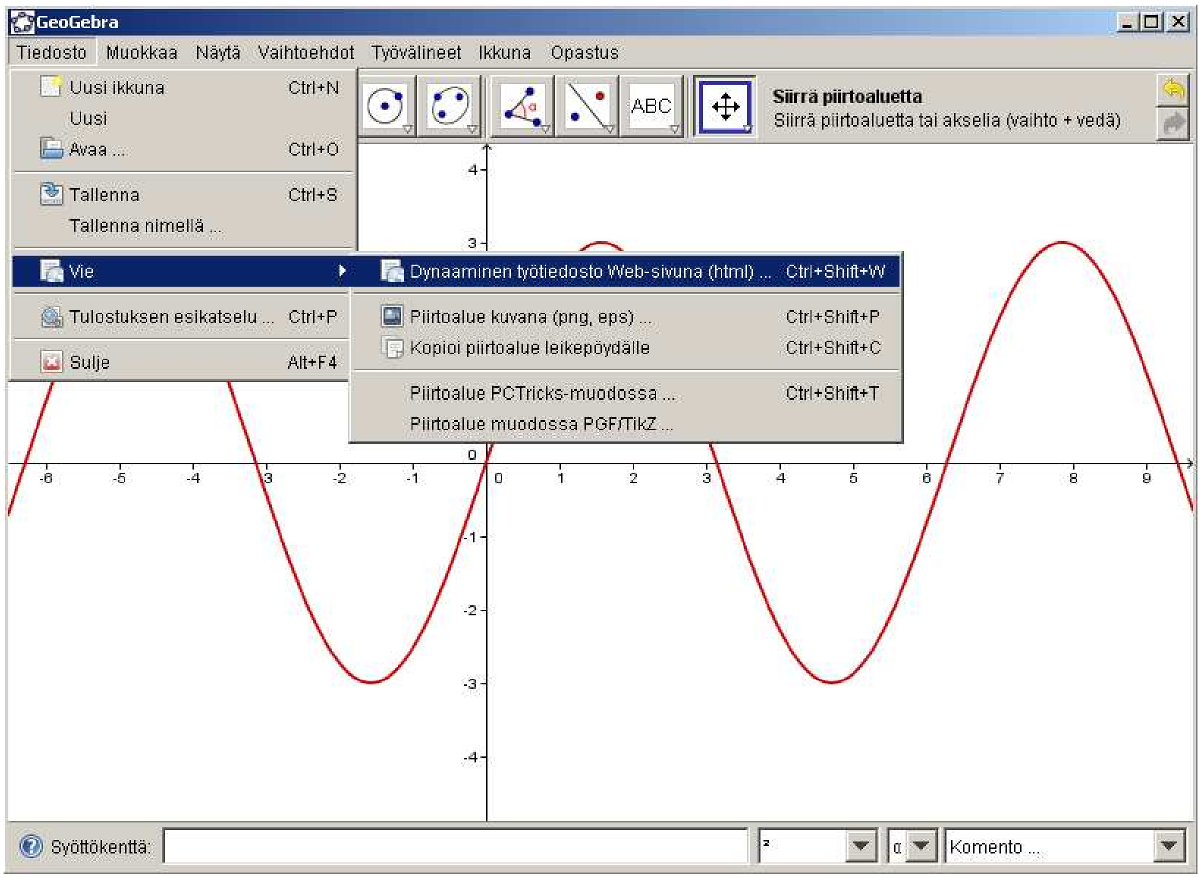
Samaan GeoGebra-applettiin pystytään ohjelmoimaan useita vaiheita käyttämällä hyväksi liukusäätimiä. Tämä tapahtuu syöttämällä haluttu liukusäätimen arvo objektin näyttämisehdoksi. Kuvassa 5 pisteet A ja B määrittelevät suoran, jonka ominaisuuksiin määritellään objektin näyttämisehdoksi b= =1. Tällöin suora näkyy vain tapauksessa, kun liukuluvun b arvoksi on asetettu 1. Monivaiheisten demonstraatioiden avulla opettaja pystyy esimerkiksi esittämään monivaiheisen kotitehtävän ratkaisun visuaalisessa/dynaamisessa muodossa (ks. 5.2).



Kuva 5

4.1.6 Kuvien ja html-sivujen tekeminen demonstraatioista

GeoGebran avulla on helppoa luoda matemaattisia kuvia esimerkiksi käytettäväksi kokeita ja tenttejä varten. Tällöin kannattaa yleensä poistaa algebraikkuna näkyvistä ylävalikon ”Näytä”-osiosta. Työtiedostojen julkaisu kuvina sekä dynaamisina html-sivuina käy erittäin helposti valitsemalla ylävalikosta Tiedosto-Vie-Piirtoalue kuvana/ Dynaaminen työtiedosto Web-sivuna (ks. Kuva 6). Kaikki luvussa 5 esiteltävät GeoGebra-oppimisympäristöt toimivat dynaamisina web-sivuina.



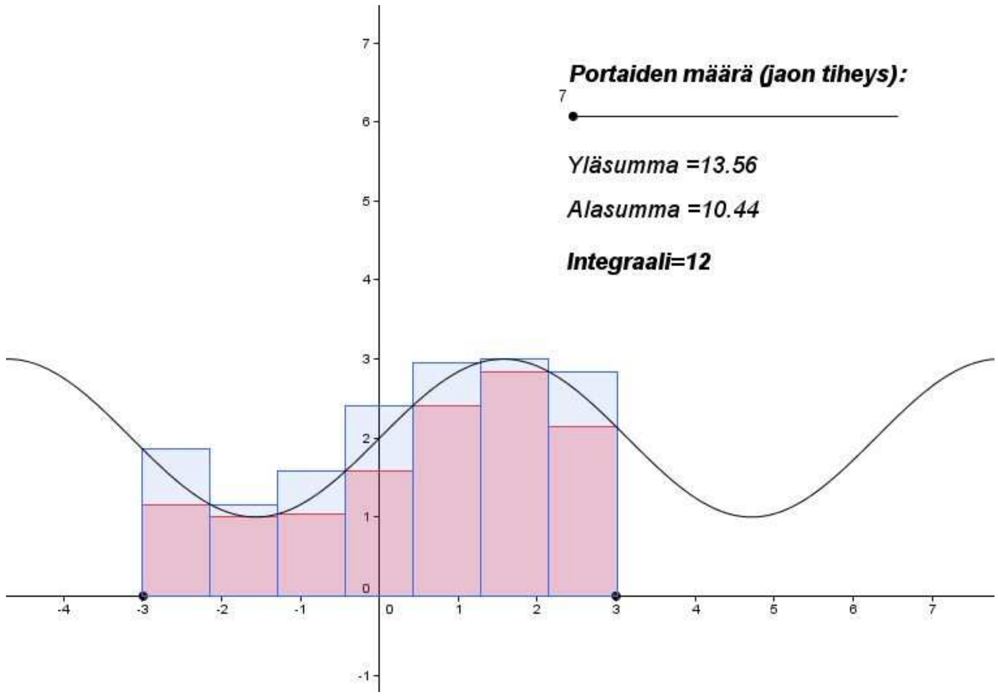
Kuva 6

4.2 GeoGebran käyttötavat

GeoGebraa voidaan hyödyntää matematiikan opetuksen tukena monella eri tavalla:

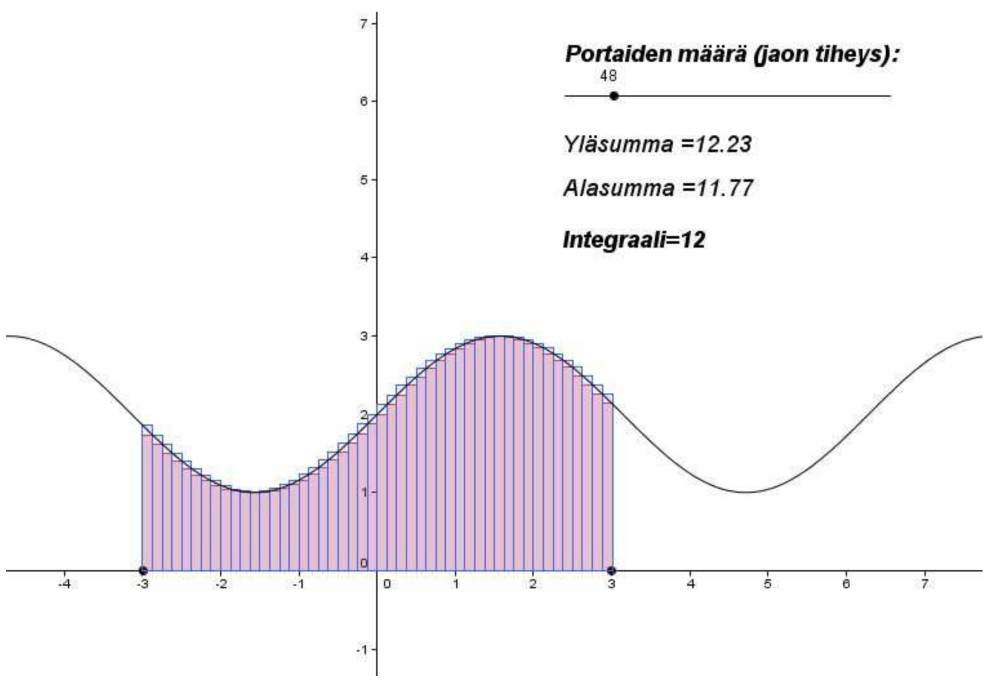
- **Demonstrointi ja opetettavan asian visualisointi:** Opettaja käyttää ohjelmaa perinteisen opetuksen tukena. Opettaja voi suunnitella työtiedostoja etukäteen havainnollistaakseen oppitunnin aiheita (ks. 5.1 ja 5.2). Koska GeoGebra-tiedostoja voi luoda nopeasti, opettaja pystyy suunnittelemaan ja toteuttamaan oppitunnin aikana työtiedostoja, jotka havainnollistavat mahdollisesti ilmeneviä matemaattisia ongelmakohtia (ks. 5.3).
- **Oppilaiden omatoiminen matemaattisten objektien tutkiminen:** Tätä tapaa käytetään erityisesti oppilaiden proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistämiseen. GeoGebra mahdollistaa uudentyyppisten matemaattisten tehtävien keksimisen. Tehtävät voivat olla esimerkiksi matematiikan teorioiden dynaamisia tutkimuksia. Lisäksi oppilaat voivat tietysti käyttää GeoGebraa tavanomaisten tehtävien tekemisen apuna. Toteuttamassani lukion pitkän matematiikan ”funktiot ja yhtälöt 2”-kurssin oppimisympäristössä annoin oppilaille joukon toisen asteen polynomifunktioon liittyviä tehtäviä, joita he ratkaisivat GeoGebraa apuna käyttämällä (ks. 5.4).
- **Geometristen objektien ”harppi-viivain” ja muiden matemaattisten objektien konstruointi:** GeoGebralla tuotetuilla harppi-viivain konstruktioilla on omat etunsa suhteessa paperilla tuotettuihin konstruktioihin (ks. 5.5). Tämän tyyppisissä tehtävissä voidaan hyödyntää luvussa 3.5 esitellyn ”suunnittelemalla oppimisen” periaatteita.
- **(Etä)opetusmateriaalien luominen:** Ohjelman avulla on helppo luoda dynaamisia työtiedostoja verkkoon.

Iranzo (2009) puhuu väitöskirjatutkimuksessaan GeoGebran käytön puolesta opetettaessa tasogeometriaa. Omat opetuskokemukseni lukion pitkän matematiikan ”Geometria” kurssilta tukevat hänen näkemystään. Geometria ei kuitenkaan ole ainut matematiikan osa-alue, jonka opetuksessa GeoGebran käytöllä voidaan saavuttaa etuja suhteessa perinteisiin opetusvälineisiin. Hyvänä esimerkkinä tästä toimii Riemannin integraalin määrittely porrasfunktioiden avulla. Porrasfunktioiden intuitiivista määritelmää on helppo demonstroida piirtämällä liitutaululle esimerkkifunktio ja sen ylä- ja alaporrasfunktiot. Opettajalle haastavaksi muodostuu kuitenkin porrasfunktioiden tihenevän jaon merkityksen selittäminen ja tätä kautta ala- ja yläsummien raja-arvon ja määrätyn integraalin välisen yhteyden havainnollistaminen. GeoGebran avulla asian havainnollistaminen on helppoa seuraavanlaisen demonstraation avulla:



Kuva 7

Kuvassa 7 funktiolle (f(x) = sin(x) + 2) määritellyt ala- ja yläporrasfunktiot, sekä vastaavat ala- ja yläsummat kun portaita on 7kpl. GeoGebran etuna suhteessa liitutauluopetukseen tässä tilanteessa on dynaamisuus: Tasavälisen jaon tiheyttä voidaan säätää kuvassa näkyvästä liukusäätimestä. Tihentämällä jakoa (eli lisäämällä portaiden määrää) dynaamisesti, oppilaat huomaavat porrasfunktioiden alan lähestyvän integraalia.



Kuva 8

Tämän demonstraation näyttämiseen ei kulu aikaa juuri ollenkaan ja silti se kertoo enemmän kuin tuhat sanaa (tutustu tarkemmin liitteenä olevalta cd-rom levyltä). Arranz, Losada, Mora ja Sada (2009) sanovat osuvasti dynaamisen geometrian ja geometrian suhteen olevan samankaltainen kuin elokuvien suhde kuviin.

GeoGebraa käyttämällä on helppo keksiä konseptuaalista ymmärrystä tukevia sekä proseduraalista ja konseptuaalista tietoa linkittäviä tietokoneavusteisia oppimisympäristöjä. GeoGebraa voidaan kuitenkin käyttää hyvin myös erilaisten geometristen proseduurien opettamiseen. Huomasin tämän opetusharjoittelussani opettaessani lukion pitkän matematiikan ”Trigonometriset funktiot ja lukujonot” kurssilaisille yksikköympyrän avulla sinin, kosinin ja tangentin ominaisuuksia. Tietokoneavusteisia oppimisympäristöjä luodessa on syytä pitää esitysasu ja sisältö mahdollisimman yksinkertaisena ja selkeänä (etenkin peruskoulutasolla). Opettajan täytyy siis tietää, mitkä objektit esityksessä todella ovat oleellisia opetettavan asian suhteen. Nämä objektit tulee muotoilla yksinkertaiseksi ja mielekkääksi. Tällä tavoin toimittaessa oppilaiden havainnointi saadaan kohdistettua näihin asiasisällön kannalta oleellisiin asioihin (ks.5.1). Vaara on olemassa, että GeoGebran tarjoamat monipuoliset mahdollisuudet saattavat houkutella opettajaa käyttämään tilanteeseen pedagogisesti sopimattomia turhan monimutkaisia esitystapoja.

4.3 GeoGebraan liittyvä tutkimus

GeoGebraan liittyvää tutkimusta on ohjelman lyhyestä tähänastisesta eliniästä huolimatta jo tehty suhteellisen paljon. Karadag (2008) tutki oppilaiden matemaattista ajattelua kokeessa, jossa oppilaiden tehtävänä oli tutkia GeoGebran avulla matemaattisia objekteja ja raportoida havaintojaan tekstieditorilla. Tutkimuksen metodiikka oli mielestäni innovatiivinen: Hän käytti ruutukaappausvideoita tallentaakseen oppilaiden jokaisen liikkeen tietokoneella (ruutukaappausvideoista lisää kappaleessa 5.5). Tosin suuren aineiston ollessa kyseessä tällaisen metodiikan avulla kerättyjen tietojen analysointi muodostuu erittäin työlääksi. Green & Robinson (2009) puolestaan tutkivat GeoGebran käytön opettamista insinööriopiskelijoille osana ensimmäisen vuoden pakollisia matematiikkaopintoja. Tutkimus toteutettiin yhdeksän viikon aikana neljällä kahden tunnin mittaisella opetussessiolla. Yllättävää kyllä, tutkimuksen edetessä opiskelijoiden suhtautuminen GeoGebraa kohtaan muuttui negatiivisemmaksi. Green & Robinson arvioivat, että käytetyllä ”eriytetyllä” lähestymistavalla (kaksoistunnit sisältivät ainoastaan ohjelman tekniseen hallintaan liittyvää opetusta) saattoi olla vaikutusta tuloksiin. He ehdottavatkin vastaavan opetuskokeilun suorittamista integroimalla GeoGebra-opetus osaksi perinteistä opetusta. Lähtökohdaksi GeoGebra-opetuksen integroimiselle voisi ottaa minimaalisen ohjeistuksen periaatteet (ks. 3.5). GeoGebraan liittyviä julkaisuja löytyy runsaasti GeoGebran wiki-sivuilta osoitteesta http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Publications.

5. Suunnitellut oppimisympäristöt

”Kun oppimisprosessi hahmotetaan oppijan maailmankuvaa muokkaavaksi prosessiksi, sen mahdollisten vaikutusten moninaisuus on ilmeinen. Ulkoapäin katsoen tarkkaankin rajattua sisältöä tai taitoa koskeva oppimistapahtuma voi aiheuttaa muutoksia sekä oppijan (tiedollisissa) skeemoissa että myös esimerkiksi hänen motivaatiossaan, itsetunnossaan, metakognitiivisissa taidoissaan ja muissa vastaavissa” (Rauste & von Wright 1994 s.174)

Toteutin tietokoneavusteiset oppimisympäristöni opetusharjoittelussani syksyllä 2008. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukainen opetus vaatii yleensä hieman luovuutta. Opettajan ja oppilaiden välisen vuorovaikutuksen lisäksi keskeistä on myös oppilaiden keskinäinen vuorovaikutus. Hyvän oppimisympäristön aikaansaaminen todellisessa opetustilanteessa voi olla haastavaa. Hallintakeskeinen opetus saattaa tuntua opettajista houkuttelevalta vaihtoehdolta tarjoamalla turvallisen tien oppitunnin aihealueiden läpikäymiseksi. Valitsin itse kuitenkin konstruktivismin, olihan oppituntieni tavoitteena haastaa oppilaat ajattelemaan, tulkitsemaan ja rakentamaan tietoa. Yksi oppituntieni tavoitteista oli oppilaiden negatiivisten asenteiden ja ennakko-oletusten parantaminen matematiikkaa kohtaan: matematiikka ei ole merkityksettömien kaavojen ja määritelmien hajanainen kokonaisuus, vaan eheä, looginen rakenne, jonka merkitykset oppilaat voivat löytää itsenäisen ajattelun avulla.

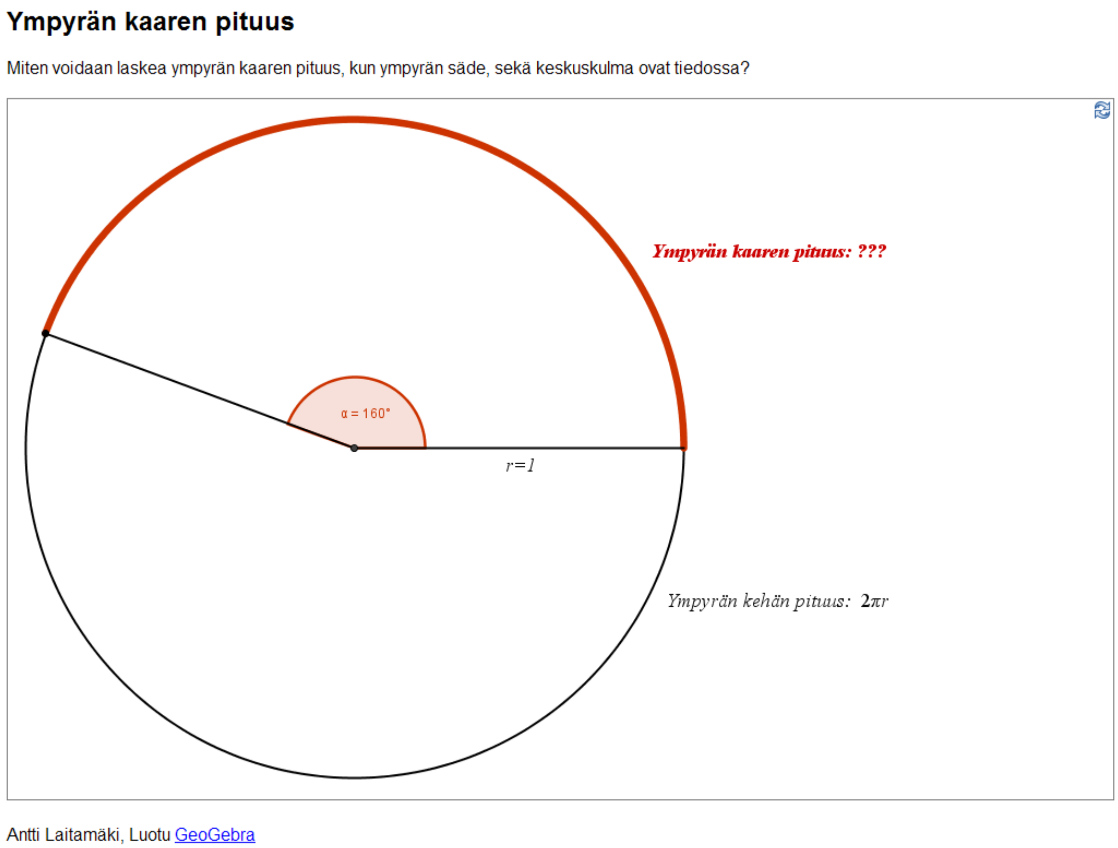
Tässä luvussa esitellään viisi esimerkkioppimisympäristöä kappaleessa 4.2 esiteltyjen erilaisten GeoGebran käyttötapoihin perustuvan jaottelun mukaan. Ensimmäiset kolme toimivat esimerkkeinä demonstroinnista ja opetettavan asian visualisoinnista ja kaksi viimeistä oppilaiden omatoimisesta tekemisestä.

5.1 Ympyrän kaari

Tehtävänäni oli opettaa yläkoulun 8-luokkalaisille ympyrän kaaren käsite ja tapa kaaren pituuden laskemiseksi, kun keskuskulma ja kehän pituus tiedetään. En kertonut oppilaille kaaren pituuden laskukaavaa, vaan heidän täytyi keksiä se itse. Valjastin GeoGebran tämän tavoitteen avuksi

5.1.1 Ympyrän kaari -GeoGebra demonstraation toteutus

Päädyin teknisesti yksinkertaiseen ratkaisuun, jossa näytöllä esitetään ympyrä, keskuskulma ja sen asteluku sekä tätä vastaava ympyrän kaari vahvistettuna (ks. kuva 9). Demonstraatio sisältää ainoastaan ympyrä-, kaari- ja kulmaobjektin sekä tekstiä. Näiden ulkoasu on muokattu tilanteen edellyttämään muotoon, esimerkiksi kaaren paksuutta ja väriä on muutettu suhteessa ympyrän kehään. Demonstraation luomiseen ei kulunut aikaa kuin muutama minuutti. Lukija voi tutkia tarkemmin demonstraation toteutusta liitteenä olevalta cd-rom levyltä.



Kuva 9

5.1.2 Ympyrän kaari -Oppitunnin kulku

Aloitin oppitunnin kertaamalla 7-luokalla opitut ympyrän säteen, halkaisijan ja kehän käsitteet. Oppilailla tuntui olevan hyvässä muistissa kehän pituuden (p) ja säteen (r) välinen yhteys, $p=2\pi r$. Pikaisen kertauksen jälkeen määriteltiin vielä kuvasta ympyrän kaaren ja keskuskulman käsitteet, jonka jälkeen päästiin tunnin keskeiseen sisältötavoitteeseen, kaaren pituuden määräämiseen.

Esittelin oppilaille luomani GeoGebra-demonstraation heijastamalla sen videotykillä valkokankaalle. Demonstraatio onnistui heti kiinnittämään oppilaiden huomion. Demonstraation ympyrän säde on 1, joten ympyrän kehän pituus on 2π. Tavoitteenani oli saada oppilaat mukaan yhteiseen kaaren pituuden määrittämisen konstruointiprosessiin, joten sen sijaan, että olisin esittänyt kaaren pituuden laskukaavan, johdattelin oppilaita kaavan konstruointiprosessiin seuraavien vaiheiden kautta:

1. Säädin GeoGebra-demonstraation keskuskulmaksi 180 astetta ja kysyin oppilailta, kuinka paljon kaaren pituus oli nyt. Annoin oppilaiden miettiä kysymystä yhdessä ja rohkaisin heitä

esittämään vastauksia. Ei kulunut kauaakaan, kun joku esitti kaaren pituudeksi π. Kysyin, olivatko kaikki samaa mieltä ja esitin jatkokysymyksen: ”miten ihmeessä päädyitte oikeaan vastaukseen?”. Eräs oppilas vastasi välittömästi, että ”totta kai pituus on π, koska kyseinen kaari on puolet koko kehän pituudesta”. Muut oppilaat yhtyivät tähän lausuntoon.

2. Seuraavaksi säädin keskuskulmaksi 90 astetta ja toistin kysymyksen kaaren pituudesta. Nyt ympäri luokkaa kaikui vastaus π/2. Kysyin jälleen: ”Miten ihmeessä taas päädyitte oikeaan vastaukseen?”. Oppilaat vastasivat kyseisen kaaren olevan nyt neljäsosan kehän pituudesta, joten heidän mielestään vastaus kysymykseen oli täysin ilmeinen.

3. Lopuksi pyöräytin keskuskulman arvoksi satunnaisesti 54 astetta ja toistin kysymyksen jälleen. Koko luokka hiljeni ja jähmettyi tuijottamaan GeoGebra-demonstraatiota, kunnes yksi oppilas kirjaimellisesti ponnisti tuolistaan huudahtaen ”mä keksin!”. Toiset oppilaat jatkoivat itsenäistä pohdiskelua ja todella halusivat keksiä itse vastauksen kysymykseen, kun taas toiset keskustelivat ryhmässä ja halusivat saada vertaistukea jo vastaukseen päässeiltä oppilailta. Kun yhä useampi oppilas jo keksi tavan pituuden määräämiseksi, kehotin vielä loppujakin kohdistamaan huomionsa keskuskulman ja täyden kulman suhteeseen. Tämän jälkeen muotoilimme kaaren pituuden laskukaavan yhteistoiminnallisesti liitutaululle. Pyysin oppilaita selittämään sanallisesti kaaren pituuden määräämisongelman ratkaisuun johtanutta ajatteluaan. Tämä on hyvä keino oppilaiden metakognitiivisten taitojen harjoittamiseen. Näiden selitysten perusteella päädyimme lopulta kaaren pituuden laskukaavaan. Lopuksi oppilaille jäi vielä noin 5 minuuttia aikaa aiheeseen liittyvien kirjan harjoitustehtävien tekemiseen.

Konstruointiprosessi vei noin 60-70% koko oppitunnin 45 minuutin ajasta, mutta mielestäni tämä aika ei suinkaan kulunut hukkaan, sillä prosessissa luotiin konstruktivismin mielessä merkitys kaaren pituuden laskukaavalle. Prosessin aikana tapahtunut keskustelu ja pohdinta mahdollistivat lisäksi oppilaiden metakognitiivisten taitojen kehittymisen. Tilanne suosii ulospäin suuntautuneita aktiivisia oppilaita ja opettajan tehtäväksi jääkin passiivisten oppilaiden rohkaiseminen ja saaminen mukaan keskusteluun.

5.1.3 Ympyrän kaari - Pedagoginen taustateoria ja seuraukset

Oppitunnin olisi voinut vetää myös behavioristisen oppimiskäsityksen mukaisella tavalla. Silloin olisi lähestymistapa ollut lähinnä keskeisten käsitteiden kertaaminen, kaaren pituuden laskukaavan esittäminen, ja mahdollisesti esimerkkitehtävän tekeminen, jonka jälkeen oppilaille olisi jäänyt vielä runsaasti aikaa itsenäiseen harjoitteluun. Tällä tavalla järjestetty opetus olisi proseduraalisen sujuvuuden kannalta varmasti tehokkaampi kuin edellä esitelty käyttämäni tapa, mutta voidaan kysyä, millaisia oppimistuloksia haluamme saada aikaan. Matematiikan opetuksen tulisi mielestäni tähdätä matemaattiseen osaamiseen, sillä tavalla joka määriteltiin luvussa 3.1. Proseduurien hallinta on vain yksi osa matemaattisesta osaamisesta ja ilman konseptuaalista ymmärrystä mielestäni aika arvotonta. Opetukseni lähti liikkeelle konseptuaalisesta ymmärtämisestä, jonka jälkeen siirryttiin proseduurien hallintaan kirjan harjoitustehtävien tekemisen muodossa (koulutuksellinen lähestymistapa, ks. 3.2).

Opetukseni taustalla vaikutti sosiaalisen konstruktivismin, tarkemmin symbolisen interaktionismin, mukainen oppimiskäsitys (ks. 2.3). Kaavan keksimisen tuli olla ryhmän yhteinen sosiaalinen konstruointiprosessi. Yksilöiden ajatteluprosessit tulivat oppitunnilla näkyviin niin heille itselleen kuin muillekin ryhmäläisille. Tämä loi ryhmän yksilöille mahdollisuuden reflektoida omia ajatuksiaan ja ideoitaan vastavuoroisesti muiden kanssa. Amerikkalaisen John Deweyn (1859-1952) mukaan parhaiten opitaan ongelmista, jotka heräävät (tai opettaja onnistuu herättämään) oppijalle itselleen ja jotka hän itse ratkaisee (Rauste & von Wright 1994 s.155-156). Oppitunti oli tämän ajattelutavan mukainen. Matematiikan opetuksessa on tärkeää hahmottaa oppilaiden tulkinnat ja ennakkokäsitykset opetettavan asian suhteen ja opettajan täytyy olla selvillä siitä, millaisia laadullisia muutoksia oppilaiden ajattelussa hän haluaa opetuksellaan saada aikaan. Lisäksi ajoitus on tärkeää. Tällä oppitunnilla oli tärkeää arvioida oppilaiden ajatustenkulkua ja antaa heille riittävästi aikaa sisäistää kaaren pituuden määritysongelma.

Oppitunnin onnistumiseen vaikutti oppilaiden tapa jäsentää oma roolinsa oppimisprosessissa. Onnistuin saamaan heidät aktiivisesti mukaan juoneen. Joillekin oppilaille on tyypillistä epäonnistumisen pelko oppimistilanteessa, jonka vuoksi he välttelevät osallistumista tilanteisiin, joissa piilee ”epäonnistumisen mahdollisuus”. Tämän pelon minimoimiseksi yritin pitää tilanteen mahdollisimman rentona ja kannustin oppilaita reflektiiviseen pohdiskeluun esittäessäni ongelmaa ympyrän kaaren pituuden laskemiseksi. Rauste ja von Wright (1994) pitävät oppimisen kannalta erityisen tärkeänä sitä, hahmottaako oppija itsensä toimijaksi, subjektiksi, vai muiden ohjaamaksi objektiksi. Ilokseni oppilaat omaksuivat nopeasti toimijan aseman pohtiessamme ongelmaa yhdessä. Tunnin aikana huomasin käytännössä, kuinka tekemisen kohde, kaavan keksiminen, ja siitä saadut kokemukset motivoivat itsessään oppilaiden toimintaa.

”Vaikka monia (toiminta)strategioita on helppo oppia (ja opettaa) erillisinä toimintoina, niitä ei välttämättä käytetä. Niiden käyttö riippuu pitkälti siitä, katsooko oppija olevansa itse vastuussa oppimistoiminnastaan vai odottaako hän muiden (esimerkiksi opettajan) ohjaavan häntä.” (Rauste & von Wright 1994 s.164)

Tossavaisen ja Sorvalin (2003) mukaan matematiikan kieltä opitaan olemalla sosiaalisessa vuorovaikutuksessa niiden kanssa, jotka tätä kieltä käyttävät ja eriasteisesti taitavat. Opettajan tulee ratkaista esityksessään luonnollisella kielellä selittämisen ja formaalin esitystavan suhde. Mitä alemmalla tasolla opetetaan, sitä tärkeämpää on tämän suhteen ratkaisu. Ympyrän kaari-oppitunnillani oppilaat ensin keksivät tavan ratkaista ongelman (kiinnittämällä huomion keskuskulman ja täyden kulman suhteeseen), jonka jälkeen aloimme yhdessä formuloida tätä tapaa matemaattiseksi lausekkeeksi. Näin tuettiin proseduraaliselta sujuvuudelta heikompia oppilaita näkemään yhteys näiden representaatioiden välillä. Proseduraaliselta sujuvuudelta lahjakkaammat oppilaat päätyivät formulointiin itsenäisesti. Konstruktivismin mielessä oppilaat loivat merkityksen ympyrän kaaren laskukaavalle.

5.1.4 GeoGebran rooli ympyrän kaari -oppimisympäristössä

Oppitunnin onnistumisen kannalta oli tärkeää suunnata oppilaiden valikoiva tarkkaavaisuus oleelliseen, ympyrän kaaren pituuden määritykseen. Tämän edesauttamiseksi suunnittelin mahdollisimman yksinkertaisen ja selkeän oppimisympäristön. Tarkoitus oli stimuloida oppilaita matemaattisen tiedon konstruointiprosessiin. GeoGebra-demonstraatio palveli hyvin tätä tavoitetta. Osalla oppilaista on taipumusta epäillä omia kykyjään tai oikeuttaan itsenäiseen ajatteluun. Heidän rohkaisemisensa onkin kaikessa haasteellisuudessaan mielestäni opetustyön parhaita puolia.

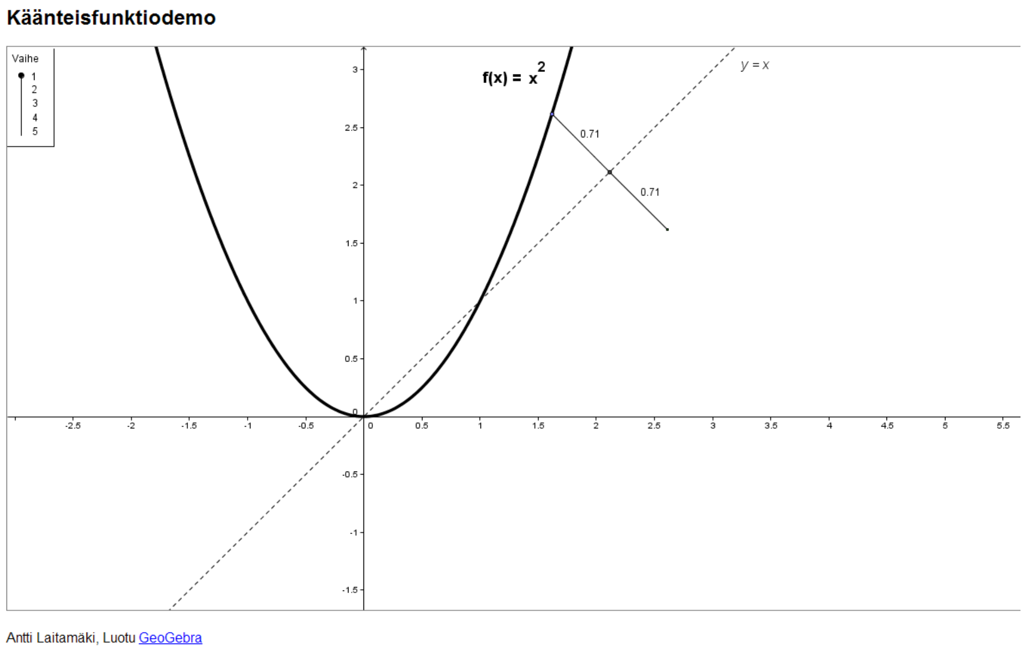
Tämänkaltaisen oppitunnin olisi toki voinut toteuttaa myös ilman GeoGebraa, mutta GeoGebra soveltui erityisen hyvin palvelemaan tämän oppitunnin tavoitteita. GeoGebran etuina suhteessa taulutyöskentelyyn tässäkin sovelluskohteessa ovat dynaamisuus ja selkeys, eikä demonstraation tekemiseen ja suunnitteluun kulunut tuntia kauempaa aikaa.

5.2 Käänteisfunktion olemassaolo

Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on olemassa käänteisfunktio. Opettaessani lukion pitkän matematiikan 8-kurssilaisille tätä lausetta, halusin opiskelijoiden saavuttavan konseptuaalisen ymmärryksen lauseen sisällöstä. Valjastin GeoGebran palvelemaan tätä tavoitetta.

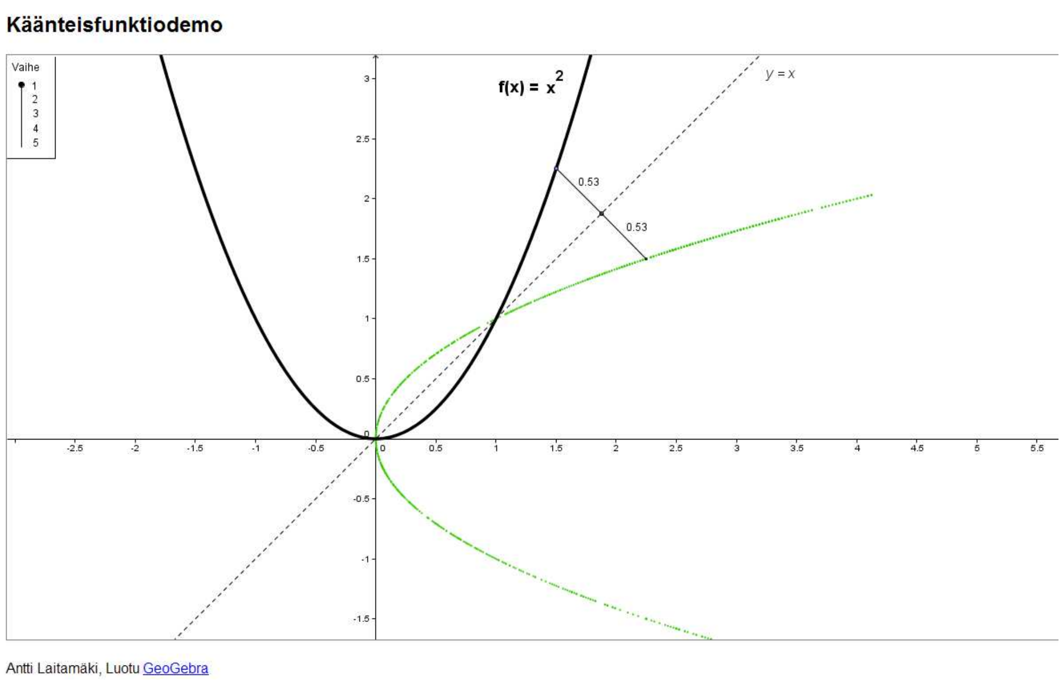
5.2.1 Käänteisfunktion olemassaolo -GeoGebra-demonstraation toteutus

Demonstraation tarkoitus oli siis havainnollistaa käänteisfunktion olemassaoloon liittyvää lausetta: ”Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on olemassa käänteisfunktio”. Oppitunnilla oli tarkoitus esitellä käänteisfunktion olemassaololauseen lisäksi käänteisfunktioiden geometrinen ominaisuus: ”Käänteisfunktion kuvaajan piste saadaan peilaamalla alkuperäisen funktion kuvaajan piste suoran y=x suhteen”. Päätin aiheuttaa hämmennystä muodostamalla funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ **”**käänteisfunktion” (osoitimme edellisellä oppitunnilla määritelmän perusteella, että sitä ei ole olemassa) tätä peilaustekniikkaa käyttämällä. Kappaleessa 4.1.4 mainittu GeoGebran objektin ominaisuus ”jälki” mahdollisti funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ käänteisfunktion kuvaajan piirtämisen peilaustekniikkaa käyttämällä. Lisäksi käytin hyväksi monivaiheisuutta (ks. 4.1.5).



Kuva 10

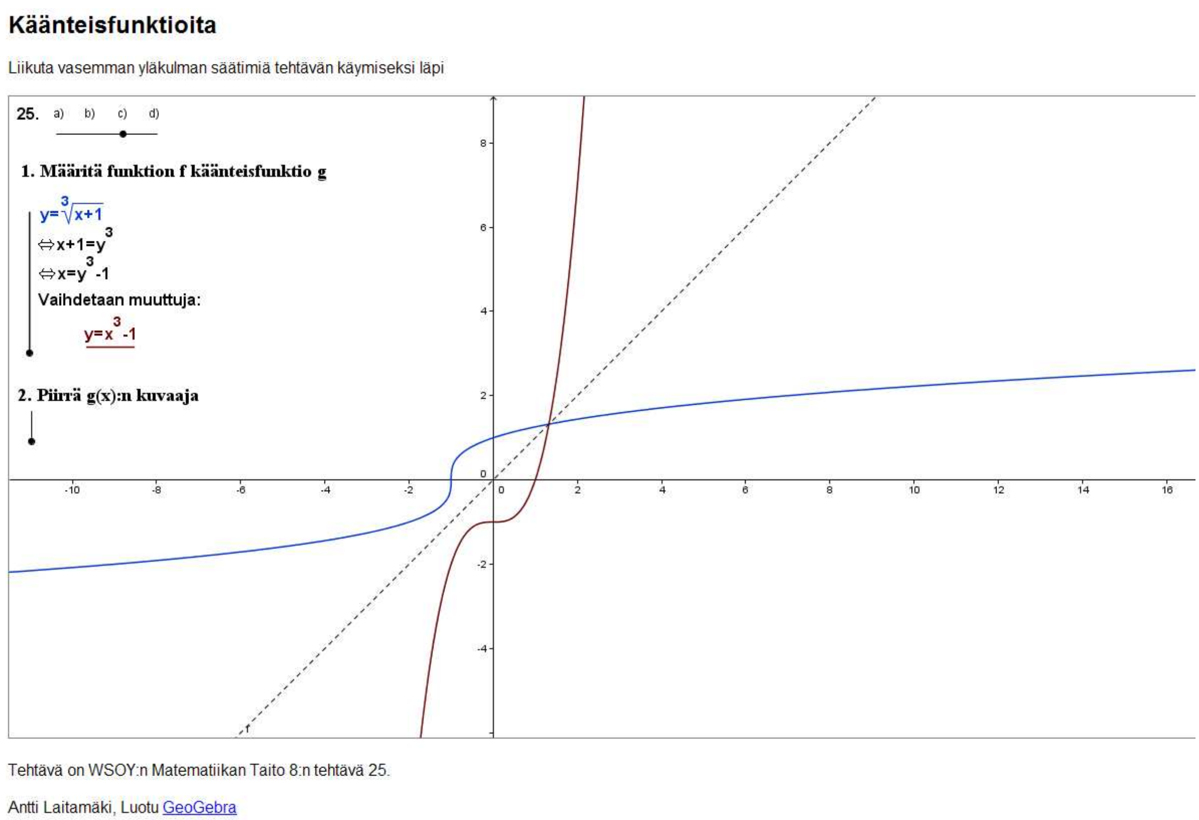
Kuvassa 10 on piirretty funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ kuvaaja sekä suora y=x katkoviivalla. Lisäksi on määritelty piste funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ kuvaajalta ja tämän pisteen peilaus funktion y=x kuvaajan suhteen. Peilatun pisteen ominaisuudet-valikosta on valittu ”näytä pisteen jälki dynaamisissa muutoksissa”. Nyt liikutettaessa funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ kuvaajalta määriteltyä pistettä muodostuu kuvassa 11 näkyvä ”kuvaaja”



Kuva 11

5.2.2 Käänteisfunktion olemassaolo -Oppitunnin kulku

Oppitunti alkoi kotitehtävien tarkastamisella. Viimeinen kotitehtävä sisälsi erilaisten käänteisfunktioiden lisäksi käänteisfunktioiden piirtämistä. Päätin toteuttaa tämän tehtävän tarkastamisen etukäteen suunnittelemallani GeoGebra-demonstraatiolla (ks. kuva 12). Kyseinen tehtävä on Matematiikan Taito 8 kirjan tehtävä numero 25. Tehtävä sisälsi a), b), c) ja d)-kohdat. Nämä pystytään tekemään samaan GeoGebra-työtiedostoon käyttämällä hyväksi kappaleessa 4.1.5 esittelemääni monivaiheisten demonstraatioiden tekotapaa. Kussakin kohdassa tehtävänä oli funktion f käänteisfunktion g määrittäminen sekä kuvaajan piirtäminen. Eheän kokonaisuuden saavuttamiseksi en tyytynyt pelkästään piirtämään käänteisfunktioita GeoGebralla, vaan halusin toteuttaa myös tehtävään liittyvän käänteisfunktion lausekkeen määrittämisen samassa ikkunassa (GeoGebrassa on tuki LATeXille). Lisäksi toteutin demonstraatioon suoran y=x piirtämisen katkoviivalla. Tämän avulla pystyin johdattelemaan opiskelijoita pian esiteltävälle funktion ja sen käänteisfunktion ”peilikuvaominaisuudelle”. Siirtyminen tästä GeoGebra-demonstraatiosta varsinaiseen käänteisfunktion olemassaolodemonstraatioon oli sujuvaa. Tämän kotitehtävädemonstraation huono puoli oli sen luomiseen kulunut suhteettoman pitkä aika (tutustu demonstraatioon tarkemmin liitteenä olevalta cd-rom levyltä).



Kuva 12

Kotitehtävän tarkastamisen jälkeen siirryttiin edellisessä kappaleessa esiteltyyn GeoGebra-demonstraatioon.

Edellisellä oppitunnilla osoitimme käänteisfunktion määritelmän:

Funktiot f : X → Y ja g : Y → X ovat toistensa käänteisfunktioita, jos kaikilla alkioilla x ∈ X ja y ∈ Y on
g(f(x)) = x ja f(g(y)) = y

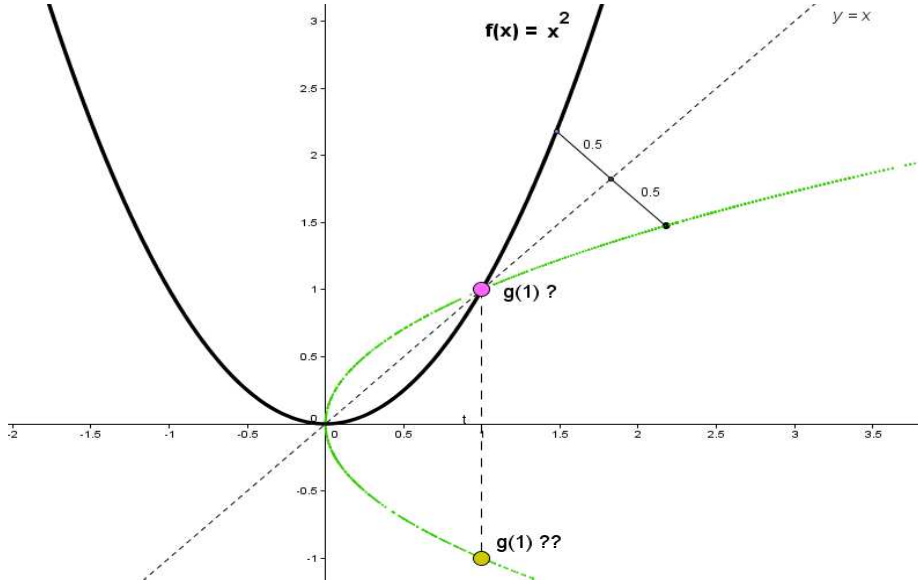
perusteella, että funktiolla $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ei ole olemassa käänteisfunktiota. Tämä ei kuitenkaan onnistunut saamaan opiskelijoita pohtimaan yleisemmin käänteisfunktion olemassaoloon liittyviä ehtoja. Miksi siis funktiolla $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ei ole käänteisfunktiota? Oppituntini tavoitteena oli tämän kysymyksenasettelun avulla johdatella opiskelijat konstruoimaan käänteisfunktion olemassaoloon liittyvä lause (sen sijaan, että antaisin oppilaille käänteisfunktion olemassaoloon liittyvän lauseen valmiina).

Demonstraation esittäminen eteni seuraavasti:

1. Esittelin opiskelijoille demonstraation ja palauttelin mieleen kuinka funktiolla $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ei siis määritelmän perusteella ole olemassa käänteisfunktiota.

2. Piirsin käänteisfunktion peilikuvaominaisuuden avulla funktiolle $f(x) = x^2, x \in [-2,2]$ ”käänteisfunktion kuvaajan” (ks. kuva 13) ja kysyin opiskelijoilta, miten ihmeessä onnistuimme piirtämään ”käänteisfunktion kuvaajan” tälle välille, vaikka määritelmän perusteella kyseisellä välillä määritellyllä funktiolla ei ole olemassa käänteisfunktiota? Ensimmäinen ehdotus opiskelijoilta oli, ettei käänteisfunktiota ehkä voitu määritellä alkuperäisen funktion peilikuvana suoran y=x suhteen (tämä oli hyvä kommentti, sillä emmehän olleet todistaneet kyseisen ominaisuuden määrittelevän käänteisfunktiota). Vakuutin kuitenkin opiskelijoille käänteisfunktion peilikuvaominaisuuden olevan matemaattisesti täysin pätevä tapa määrittää käänteisfunktio. Opiskelijat jatkoivat pohtimista ja keskustelua, kunnes eräs opiskelija kysyi, onko piirretty käänteisfunktion jälki ollenkaan funktio? Rohkaisin muita opiskelijoita miettimään tätä kysymystä, ennen kuin siirryin seuraavaan vaiheeseen.

3. Lopulta siirryin GeoGebra demonstraatiossa seuraavaan vaiheeseen



Kuva 13

Kuten kuvassa 13 näkyy, ”käänteisfunktio” g saa kaksi arvoa jokaisella x:n arvolla. Kysyin opiskelijoilta, mitä vikaa tällaisessa ”funktiossa” on? Eräs opiskelija vastasi että ”eihän se ole edes funktio”. Tämä demonstraatio siis muistutti opiskelijoita siitä, kuinka funktion lähtöjoukon arvoa vastaa enintään yksi maalijoukon arvo.

4. Mikä siis meni pieleen, kysyin opiskelijoilta? Mikä funktion $f(x) = x^2, x \in$[-2,2] ominaisuus estää käänteisfunktion olemassaolon (samalla keinutellen funktiolle määriteltyä pistettä pisteen x=0 oikealla ja vasemmalla puolella)? Ei kulunut aikaakaan, kun eräs opiskelija vastasi sen johtuvan siitä, että $f(x) = x^2, x \in$[-2,2] saa samat arvot negatiivisilla ja positiivisilla x:n arvoilla. Keskustelimme vielä käänteisfunktion olemassaololle riittävistä ehdoista yhdessä ryhmän kanssa monotonisuuden käsitettä käyttäen, ennen kuin muotoilimme lauseen käänteisfunktion olemassaololle.

Oppituntia oli ohjaavan opettajan lisäksi seuraamassa toinen opetusharjoittelija, jolta sain kirjallista palautetta oppitunnista. Palautteessaan hän kertoi vakuuttuneensa tunnin aikana GeoGebran mahdollisuuksista matematiikan opetuksessa. Negatiivisena puolena hän mainitsi sen, kuinka oppilaille ei 45minuutin oppitunnista jäänyt lainkaan aikaa tehdä harjoitustehtäviä itsenäisesti. Koko oppitunnin olisi voinut esittää paljon nopeammin muotoilemalla heti käänteisfunktion olemassaoloa koskevan lauseen. Mielestäni tämä olisi kuitenkin tapahtunut konseptuaalisen ymmärtämisen kustannuksella.

5.2.3 Pedagogisen ja didaktisen taustateorian rooli käänteisfunktion olemassaolo -oppitunnilla

Lukion pitkä matematiikka sisältää tunnetusti erittäin paljon asiaa opiskeltavaksi pienessä määrässä oppitunteja. Suurin osa opetusajasta kuluu proseduurien läpikäyntiin ja proseduraalisen sujuvuuden harjaannuttamiseen. Joutsenlahden (2005) pitkän matematiikan opiskelijoiden haastattelussa tuli ilmi kursseihin liittyvä alituinen kiire: Uusiin käsitteisiin ei ehditä paneutua pintaa syvemmältä. Käänteisfunktion olemassaolo joudutaan myös kiireen vuoksi varmasti usein esittämään pinnallisesti. Käänteisfunktion olemassaolonhan voisi lyhimmillään kuitata lauseella: ”Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on olemassa käänteisfunktio”, mutta koska asia oli omalla tunnillani tarkoitus esittää konstruktivistisen oppimiskäsityksen periaatteiden mukaisesti, oli aikaa asian käsittelyyn käytettävä enemmän.

Matemaattisen osaamisen lajeista halusin painottaa käänteisfunktion olemassaoloon liittyvää käsitteellistä eli konseptuaalista ymmärtämistä. Tämän saavuttamiseksi suunnittelin GeoGebra-demonstraatiooni edellisessä kappaleessa esitellyn kohdan 2 mukaisen kognitiivista ristiriitaa eli akkommodaatiota (ks. 2.2) tavoittelevan kohdan sekä jatkokeskustelut käänteisfunktion olemassaolon ehdoille. Ajatusten jakaminen ryhmän tasolla auttaa opiskelijoita tiedostamaan omia käsityksiään ja luo mahdollisuuden reflektoida ajattelua. Oppimisympäristön suunnittelun yhtenä keskeisenä lähtökohtana olikin tila, jossa opiskelijat pystyivät vapaasti tuomaan esiin omia käsityksiään käänteisfunktion olemassaolosta.

Oppitunnin keskeisenä pedagogisena keinona käytin kognitiivisen, tai paremminkin sosiokognitiivisen, konfliktin aikaansaamista (ks. 2.3). Kognitiivista konfliktia käsitellään usein sosiaalisena ilmiönä, vuorovaikutuksessa syntyvinä tiedollisina ristiriitoina (Tynjälä 1999, s93). Näiden ristiriitojen käsittelyn sosiaalisessa vuorovaikutuksessa ajatellaan johtavan käsitteelliseen muutokseen. Opetustyyliksi valitsin opettajajohtoisen kyselevän opetuksen ja oppijalähtöisen opetuksen välimuodon, jossa opettaja ei niinkään ensisijaisesti ota kantaa oppilaiden vastauksiin (oikein/väärin), vaan totuttaa oppilaat kommentoimaan, arvioimaan ja pohtimaan ääneen ratkaisuja esitettyyn ongelmaan. Yhteisesti käsiteltävä ongelmanratkaisuprosessi alkaa yleensä yksittäisten oppilaiden ratkaisuehdotusten arvioinnilla ja edelleen kehittelyn pohdinnalla (Inagaki, Hatano & Morita 1998).

5.2.4 GeoGebran rooli Käänteisfunktion olemassaolo -oppimisympäristössä

Oppimisympäristössä GeoGebralla oli keskeinen rooli. Samantyyppisen opetuksen toteuttaminen muita tekniikoita hyväksi käyttämällä vaikuttaa epähavainnollisemmalta. GeoGebran käytön keskeisinä etuina tässä oppimisympäristössä toimi dynaamisuuden ja selkeyden/tarkkuuden lisäksi pisteen jälki -ominaisuus. Viimeksi mainittu paitsi mahdollisti käänteisfunktion kuvaajan piirtämisen dynaamisesti, myös muistutti opiskelijoita siitä, millaisia olioita funktiot oikeastaan ovat.

5.3 Paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio

Opettaessani pitkän matematiikan integraalilaskennan kurssilla paloittain määriteltyjen jatkuvien funktioiden integroimista opiskelijoiden oli vaikea sisäistää integraalifunktion jatkuvuudesta johtuvaa kahden integroimisvakion riippuvuussuhdetta. Opettaja ei aina pysty ennakoimaan, miten oppilaat ymmärtävät opetetun asian ja minkä tyyppisiä vaikeuksia heille voi sen suhteen syntyä. Kappaleiden 5.1 ja 5.2 GeoGebra-demonstraatioista poiketen tämän kappaleen visualisointiin tarkoitettu demonstraatio ei ollut etukäteen suunniteltu, vaan syntyi oppitunnin aikana.

5.2.1 Paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio -GeoGebra demonstraation toteutus ja oppitunnin kulku

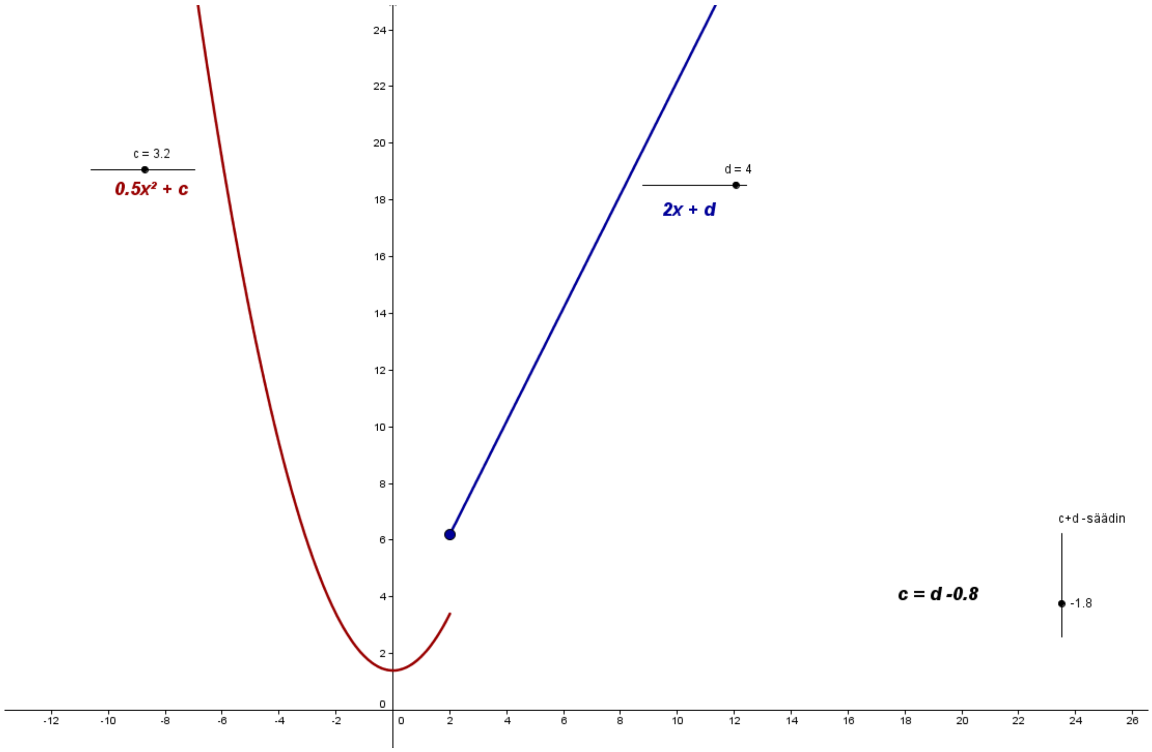
Oppitunnin aiheena oli paloittain määriteltyjen jatkuvien funktioiden integroiminen. Esitin opiskelijoille kahteen integroimisvakioon perustuvan ratkaisutavan (integraalifunktion jatkuvuusehto asettaa riippuvuussuhteen vakioiden välille). Opiskelijoiden vaikeus tämän tekniikan sisäistämiseen tuli minulle yllätyksenä.

Oppitunnin alussa esitin opiskelijoille lyhyesti esimerkin avulla paloittain määritellyn jatkuvan funktion integroimistekniikan ja painotin integraalifunktion jatkuvuusehdon luovan riippuvuussuhteen käytettyjen vakioiden välille. Olin suunnitellut oppitunnin painottuvan itsenäiseen työskentelyyn, joten pidin johdannon suhteellisen lyhyenä. Ensimmäisessä harjoitustehtävässä opiskelijoiden tuli määrätä funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

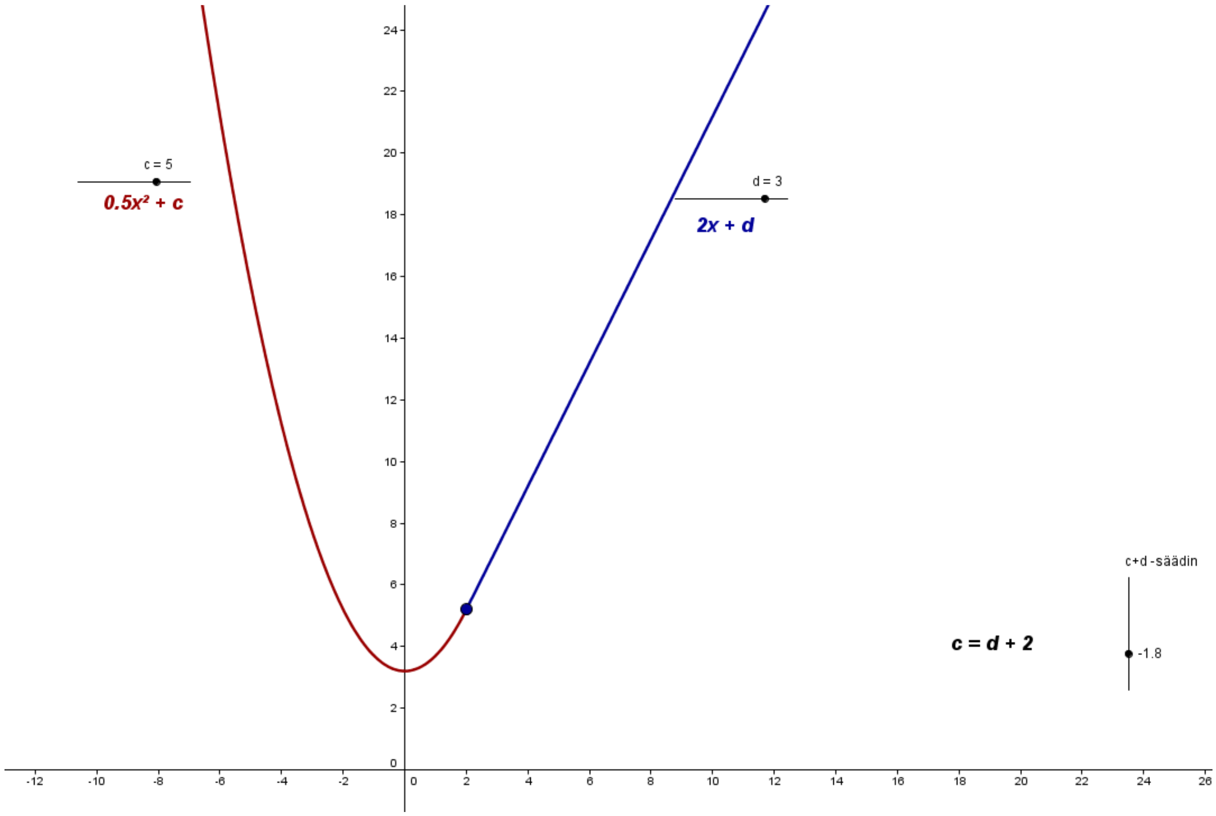
integraalifunktio. Kierreltyäni luokassa huomasin, että opiskelijat eivät olleet sisäistäneet kahden integroimisvakion käyttöön perustuvaa ratkaisutekniikkaa. Eräs opiskelija esitti kysymyksen ”miksi tarvitaan kaksi integroimisvakiota, kun ne kuitenkin molemmat voivat olla mitä tahansa”. Tässä vaiheessa sain idean demonstroida vakioiden välistä riippuvuutta mallintamalla kyseisen tehtävän GeoGebran avulla. Olin jo tässä vaiheessa opetusharjoitteluani tutustunut GeoGebraan sen verran hyvin, että tiesin kyseisen mallinnuksen hoituvan helposti lyhyessä ajassa.

Demonstraation ideana oli havainnollistaa liukuluvuiksi määriteltyjen vakioiden c ja d vaikutusta f(x):n paloittain integroituun funktioon (ks. Kuva14). Liukusäätimistä pystyi nyt säätämään c:n ja d:n arvoja dynaamisesti ja näkemään muutoksen paloittain määritellyn integraalifunktion kuvaajassa. Lisäksi loin oikeaan alakulmaan tekstiobjektilla c:n ja d:n riippuvuutta dynaamisesti kuvaavan lausekkeen, sekä liukusäätimen, jonka avulla pystyin muuttamaan c:n ja d:n summaa.



Kuva 14

Muutellessani c:n ja d:n arvoja dynaamisesti korostin jälleen integraalifunktion jatkuvuusehtoa. Säätämällä c sopivaksi suhteessa d:n arvoon (tai päinvastoin) saatiin paloittain määritelty integraalifunktio jatkuvaksi kohdassa x=2 (ks. Kuva15). Käytännössä siis löysimme vakion, jonka avulla c pystytään lausumaan d:n avulla (tai päinvastoin). Tämän jälkeen muuttelin vielä (c+d)-säätimen arvoa (tämä näkyy kuvaajan liikkumisena pystysuunnassa), ja huomautin että tämän arvon muuttaminen ei tietenkään vaikuta löytämämme vakion arvoon (tutustu tarkemmin liitteen cd-rom levyltä).



Kuva 15

5.2.2 GeoGebran rooli paloittain määritellyn jatkuvan funktion integraalifunktio -opetustilanteessa

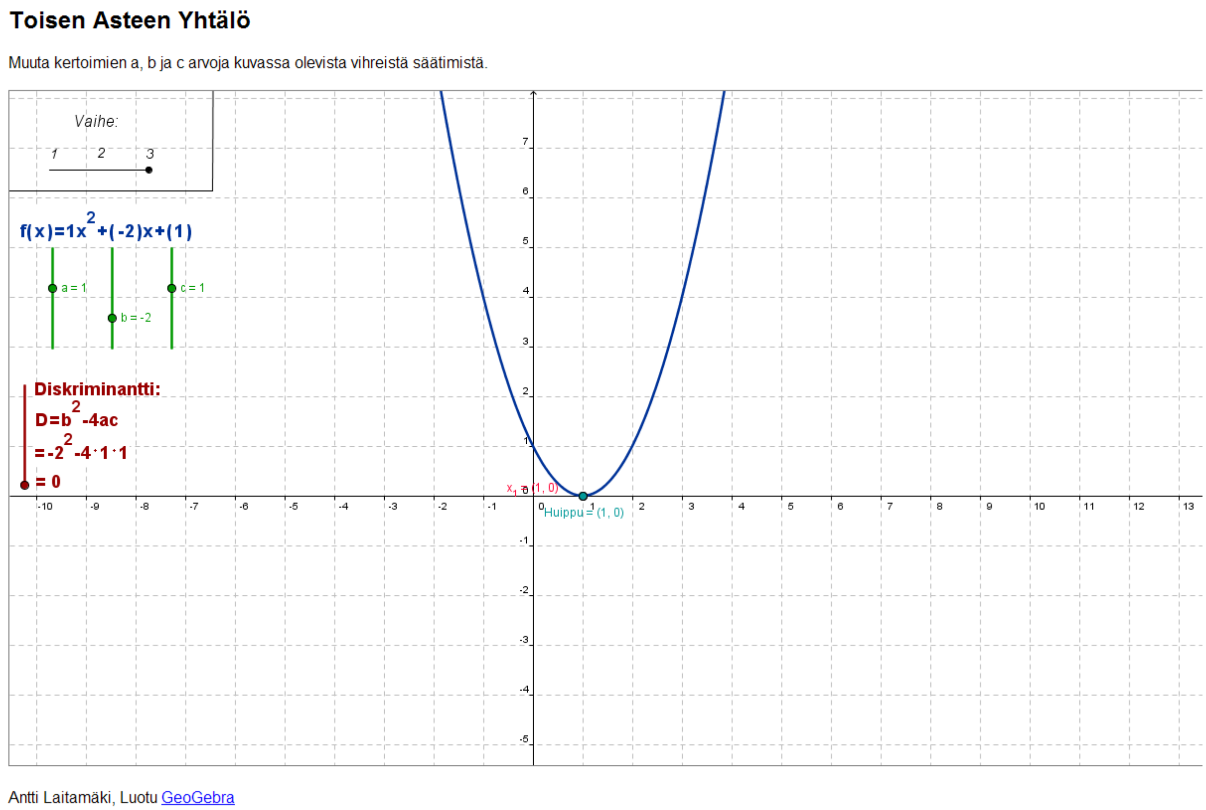
Tämä esimerkkitilanne kuvastaa hyvin dynaamisten geometriaohjelmien luomaa visualisointipotentiaalia sekä sillä saavutettavaa havainnollisuutta improvisoivassa matematiikan opetuksessa. Demonstraation tekemiseen ei kulunut aikaa kuin muutama minuutti, joten ajan puutekkaan ei voi täten muodostua esteeksi ohjelman käytölle.

5.4 Toisen asteen polynomifunktio

Demonstrointi ja opettajajohtoinen opetettavan asian visualisointi eivät suinkaan ole ainoa tapa käyttää GeoGebraa. Loin GeoGebran avulla lukion pitkän matematiikan "funktiot ja yhtälöt 2"-kurssille oppimisympäristön, jossa oppilaat pääsivät omatoimisesti tutkimaan toisen asteen polynomifunktion termien kertoimien vaikutusta kuvaajaan. Tarkoituksena oli linkittää edellisellä tunnilla opitut toisen asteen polynomifunktion kulun selvittämiseen käytetyt algebralliset proseduurit, nollakohtien laskeminen ja huipun määrittäminen, konseptuaaliseen geometriseen ymmärrykseen.

5.4.1 Toisen asteen polynomifunktio -GeoGebra-demonstraation toteutus

Toisen asteen polynomifunktioiden tutkimista varten toteuttamani GeoGebra-demonstraation toteutus vaati jälleen kappaleessa 4.1.5 esiteltyä monivaiheisten demonstraatioiden luomistekniikkaa. Jaoin demonstraation kolmeen vaiheeseen (vaiheesta toiseen siirrytään vasemmassa yläkulmassa olevasta säätimestä, ks. kuva16):



Kuva 16

1. Esillä toisen asteen polynomifunktion geometrinen ja algebrallinen muoto.
2. Edellisen lisäksi kuvaajaan merkityt polynomin nollakohdat ja huippu.
3. Edellisten lisäksi diskriminantti.

Tässä demonstraatiossa opiskelijat pääsivät itse muuttamaan dynaamisesti toisen asteen polynomifunktion termien kertoimia ja näkemään muutoksen vaikutuksen kuvaajassa. Loin termien kertoimien muuttamista varten liukusäätimet, joiden vaihteluvälit rajoitin seuraavassa kappaleessa esiteltävien tehtävien ja ikkunan koon kannalta sopiviksi. Lukija voi tutustua demonstraatioon tarkemmin liitteenä olevalta cd-rom levyltä.

5.4.2 Toisen asteen polynomifunktio - opetuksen järjestäminen ja oppitunnin kulku

Aloitin oppitunnin jakamalla opiskelijat kolmen hengen ryhmiin. Ohjasin ryhmät tietokoneille ja jaoin kullekin tehtävien ohjeistuksen (ks. liite1), sekä vastauspaperin (ks. liite2). Tästä eteenpäin roolini muuttui opetustapahtuman ohjaajasta oppimistapahtuman seuraajaksi.

Opiskelijoiden käynnistettyä verkossa olevan GeoGebra-demonstraation, alkoivat he ratkaista tehtäviä 1-3. Oppilaiden jakaminen ryhmiin ei johtunut pelkästään siitä käytännön syystä, että opetustilassa oli ainoastaan yhdeksän tietokonetta käytettäväksi 26:lle opiskelijalle. Tehtävien tutkivan luonteen vuoksi toivoin pienryhmätyöskentelyn johtavan luvussa 2.5 esitellyn tutkivan oppimisen periaatteita mukailevaan oppimiseen.

Rohkaisin opiskelijoita pohtimaan, keskustelemaan ja argumentoimaan ryhmissään. Mielenkiintoista oli se, että useimmissa ryhmissä vastuualueet jakautuivat ilman ohjausta seuraavasti:

1. Kirjuri: Yksi oppilas luki ja selitti tehtävät muille jäsenille, sekä kirjasi ryhmän vastaukset.

2. Proseduurien tutkija: Useimmissa ryhmissä oli yksi henkilö etsimässä oppikirjasta hyödyllistä tietoa tehtävien ratkaisemiseksi.

3. Visuaalinen tutkija: Jokaisessa ryhmässä oli vähintään yksi oppilas jatkuvasti esitetyn GeoGebra-demonstraation kimpussa. Tämä jäsen pyrki yleensä kertoimien muuttelun avulla päättelemään kertoimien vaikutusta käyrän muotoon.

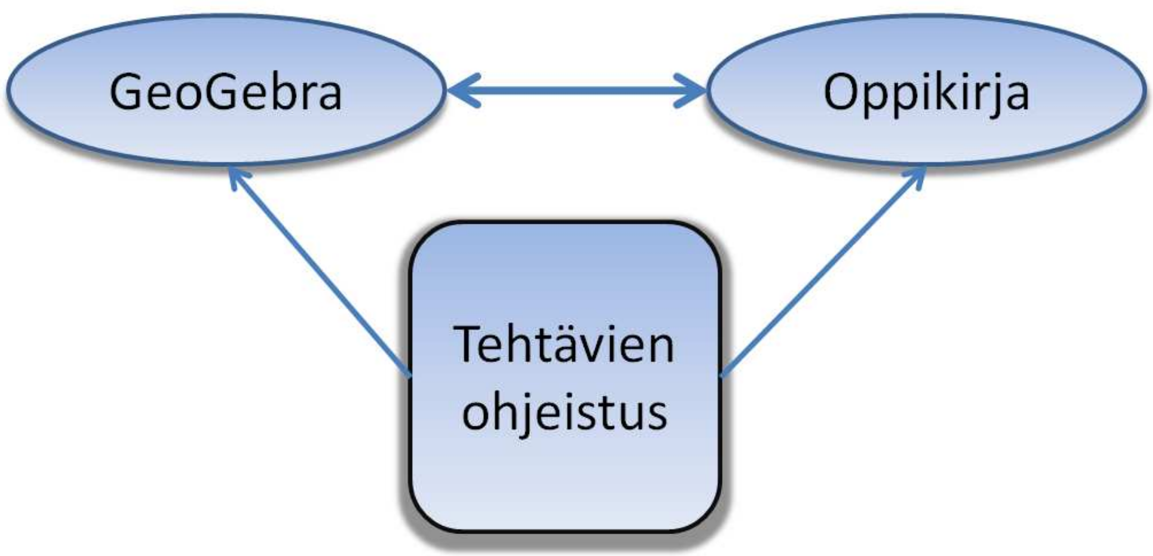
Yhdessä ryhmässä kaikki kolme osallistujaa keskittyivät tehtävien ratkaisemiseen GeoGebran avulla. Tämä ryhmä ei saavuttanut tehtävissä yhtä hyviä tuloksia kuin monet muut, mutta mieleeni jäi erityisesti erään tämän ryhmän jäsenen kysymys: ”Pystytäänkö nämä (samat) nollakohdat, jotka löydetään ohjelman avulla myös laskemaan?”. Vastasin hänelle: ”Kyllä, ja toisaalta kaikki lasketut pystytään tietysti löytämään myös kuvaajasta”. Kaikki kyseisen ryhmän jäsenet tuntuivat olevan innoissaan tuon kommentin jälkeen. Vaikka tämä ryhmä ei ehkä toiminutkaan optimaalisella tavalla, tämä oppitunti sai aikaan heidän proseduraalisen ja konseptuaalisen tietonsa linkittymistä, sekä lisäsi silminnähtävästi motivaatiota kurssin aihealueita kohtaan.

Kaikkien ryhmien sisäinen kommunikointi oli vilkasta. Oppitunnille varattu 45 minuutin aika riitti useimmille ryhmille kaikkien tehtävien suorittamiseen. Oppitunnin päätteeksi pyysin vielä opiskelijoilta vapaamuotoista palautetta. Palaute oli yhtä ryhmää lukuun ottamatta erittäin positiivista.

5.4.3 Toisen asteen polynomifunktio - pedagoginen ja didaktinen taustateoria, sekä tulokset

Kuvaajien piirtäminen tietokoneiden avulla on ollut mahdollista jo yli 20 vuoden ajan. Vanhemmilla ohjelmilla oppilaiden tulee kuitenkin hallita kuvaajien symbolinen esitystapa ennen kuin he pystyvät piirtämään niitä. Symbolisen esitystavan opettaminen ennen kuvaajien geometrista tutkimista noudattaa kehityksellistä lähestymistapaa (ks. 3.2), jossa proseduurien opetus edeltää konseptuaalista ymmärtämistä tukevaa opetusta. Haapasalo ja Kadijevich (2004) painottavat konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhdistämisen merkitystä. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi he käyttivät tutkimuksessaan hyväksi Casion Classpad 300 taskulaskimen ”drag&drop”-ominaisuutta, joka mahdollistaa samassa näkymässä olevien algebrallisen ja geometrisen esityksen dynaamisen muokkauksen ja muutosten havainnoinnin suhteessa toisiinsa (Haapasalo & Kadijevich 2004). Oma oppituntini osoitti, että tällainen proseduraalista ja konseptuaalista tietoa linkittävä opetusosuus voidaan helposti toteuttaa myös GeoGebraa hyväksi käyttäen.

Ryhmien omatoiminen työskentely ja roolien jakautuminen ryhmissä luonnostaan olivat vaikuttavaa katseltavaa. Kuva 17 kuvastaa ryhmien tapaa ratkaista annetut tehtävät.



Kuva 17

Parhaita tuloksia saavuttivat pääpiirteissään ryhmät, joissa yhteistyö eri rooleissa olevien opiskelijoiden kesken oli toimivaa. Erityisesti GeoGebralla työskentelevän ja oppikirjasta apuja etsivän opiskelijan vastavuoroinen kommunikointi vaikutti olevan merkittävässä roolissa.

Suunnittelemani tehtävien ohjeistus (ks. liite1) oli tarkasti rajaava tehtävien ja tehtävien taustalla olevien tavoitteiden suhteen. Tämä ohjeistus edisti oppimistapahtuman kontrollia. Toisaalta tällaisen tarkan ohjeistuksen huonona puolena on oppilaiden vastuun ja luovan ajattelun vähäisyys oppimistapahtumassa verrattuna suurpiirteisempään ohjeistukseen. Ehdottaisin tämän tyyppisen oppimistapahtuman järjestämiselle jatkossa suurpiirteisempää kappaleessa 3.6 esitellyn minimaalisen ohjeistuksen mukaista tehtävänantoa.

5.5 Yliopisto Geometria

Antiikin Kreikassa suuren suosion saavuttaneet harppi & viivain –konstruktiot ovat tärkeä osa matematiikan opetusta vielä tänäkin päivänä. Nykyisin ei havainnollistamiseen tosin enää välttämättä tarvita konkreettista harppia ja viivoitinta, vaan kostruktioita voidaan toteuttaa myös dynaamisten geometriaohjelmien avulla. Dynaamisuus luo omat etunsa tämäntyyppisten tehtävien toteuttamiseen GeoGebran avulla.

Suunnittelin Lauri Kahanpään Jyväskylän Yliopiston Geometria-kurssille laatimien Geometers' Sketchpad pohjien perusteella tietokoneharjoitukset toteutettavaksi GeoGebra-ohjelmalla. Näiden tietokoneharjoitusten päätavoitteet ovat:

1) Opettaa oppilaille GeoGebra-ohjelman käyttöä (konstruktivistisen oppimisnäkemyksen mukaan tämä saavutetaan toiminnan sivutuotteena).

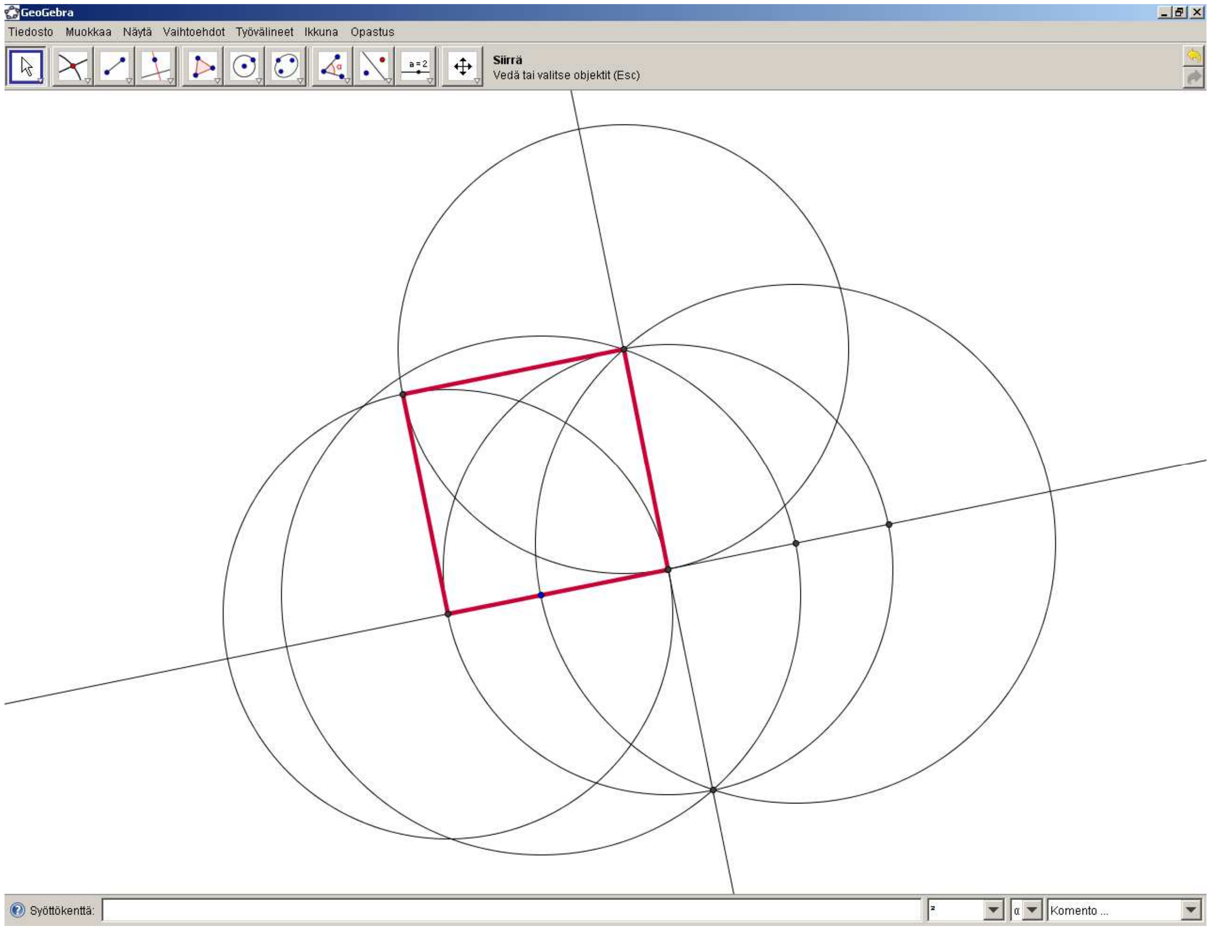
2) Kolmion konstruointi hyperboliseen puolitasoon.

3) Opiskelijoiden motivointi itsenäiseen, dynaamisia matematiikkaohjelmia hyödyntävään geometrian tutkimiseen.

5.5.1 Yliopistogeometrian Harjoitusten toteuttaminen

Harjoitusten ohjeistus jakautuu alkutoimenpiteisiin sekä tehtäviin 1 ja 2 (ks. liite). Tehtävässä 1 keskitytään tavoitteen 1) ja tehtävässä 2 tavoitteen 2) toteutumiseen. Nämä tehtävät poikkeavat toisistaan melko radikaalisti ohjeistuksensa osalta.

Alkutoimenpiteiden jälkeen suoritettava Tehtävä 1 (ks. liite) on muotoiltu suurpiirteisesti kappaleessa 3.6 esitellyn minimaalisen ohjeistuksen periaatteiden mukaisesti. Tämän vaiheen päätavoitteena on ohjelmaan tutustuttaminen, joka on konstruktivistisen oppimiskäsityksen periaatteiden mukaan toteutettu tapahtuvaksi toiminnan sivutuotteena. Ennen tehtävän 1 esittämistä, ohjeistuksessa viitataan tasakylkisen kolmion konstruointiesimerkkiin. Esimerkki on toteutettu ruutukaappausvideo -tekniikalla, joka on hyvä havainnointikeino niin verkko-opetuksessa kuin luokassa tapahtuvassa tietokoneavusteisessa opetuksessa (ks. cd-rom liite). Tehtävässä 1 kehotetaan opiskelijaa tekemään GeoGebralla erilaisia tasogeometrian konstruktioita, kuten neliön (harppi-viivain) konstruktio (kuva 18).



Kuva 18

Tehtävä 2 on puolestaan ohjeistettu alusta loppuun erittäin tarkasti ja systemaattisesti. Tällainen vaihe vaiheelta tarkasti ohjeistettu tietokoneavusteinen opetus oli suosittua tietokoneiden yleistyessä 1900-luvulla. Sitä kutsuttiin ohjelmoiduksi opetukseksi ja myöhemmin systemaattiseksi lähestymistavaksi.

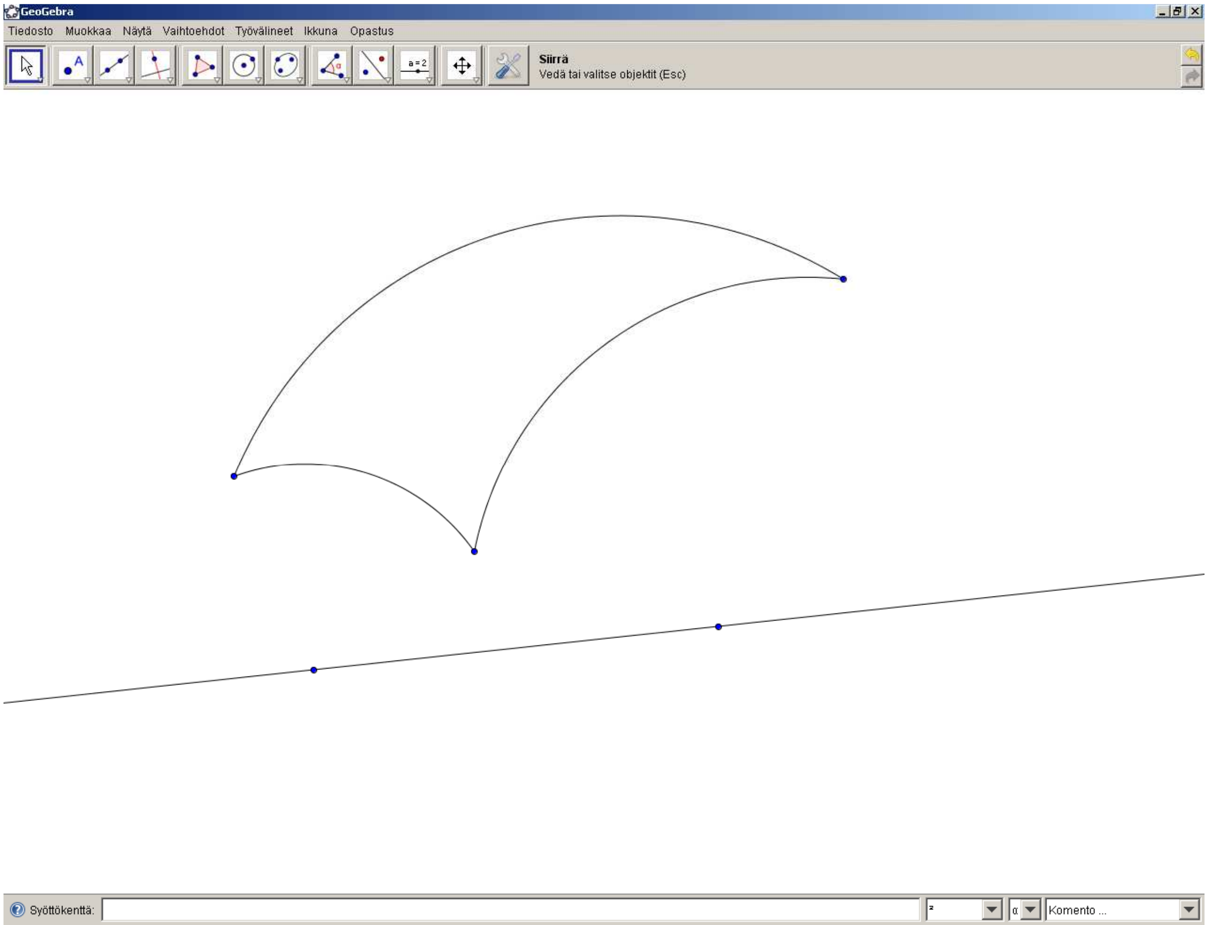
Tehtävä on jaettu neljään vaiheeseen (ks. tarkemmin liitteestä):

1. Aloitetaan hyperbolisen puolitason konstruointi piirtämällä suora, sekä kaksi pistettä A ja B suoran ulkopuolelle siten, että pisteiden välinen euklidinen jana ei leikkaa suoraa (pisteet samalla puolella suoraa).

2. Konstruoidaan hyperbolinen jana AB.

3. Luodaan GeoGebralla työväline, joka konstruoi hyperbolisen janan annetussa hyperbolisessa puolitasossa.

4. Käytetään edellistä työvälinettä hyperbolisen kolmion konstruointiin.



Kuva 19

Tällaisella systemaattista lähestymistapaa noudattavalla ohjeistuksella ei saavuteta konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista oppimisympäristöä. Tehtävän 2 tarkasti ennalta määrätty tavoite, hyperbolisen kolmion konstruointi, aiheutti viime kädessä minimaalisen ohjeistuksen periaatteiden ja konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen tehtävien suunnittelun pois sulkemisen. Tavoitteeseen kun olisi vaikeaa päästä suurpiirteisellä ohjeistuksella. Jos siis tehtävä 2 haluttaisiin muotoilla minimaalisen ohjeistuksen periaatteiden mukaisesti, olisi tavoitteet määriteltävä suurpiirteisemmin.

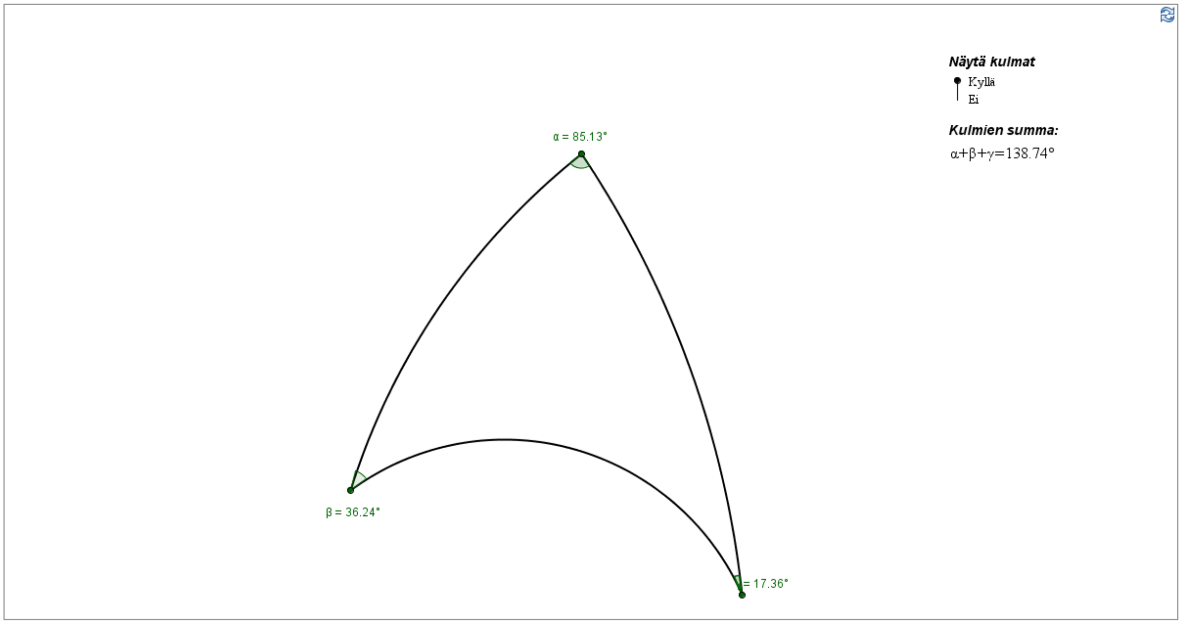
5.5.2 GeoGebran soveltuvuus yliopistogeometrian havainnointiin

Mainitsin yhtenä harjoitusten tavoitteena opiskelijoiden motivoinnin itsenäiseen, dynaamisia matematiikkaohjelmia hyödyntävään geometrian tutkimiseen. Tähän tarkoitukseen suunnittelin vielä kaksi hieman edistyneempää demonstraatiota, jotka voitaisiin esitellä opiskelijoille tehtävän 2 suorituksen jälkeen.

1. *Kolmion kulmien summa hyperbolisessa puolitasossa*

Lisäsin hyperbolisen kolmion konstruktioon tangenttien avulla määritellyt kulmat, sekä kulmien summan (ks. kuva 20). Tämän demonstraation avulla opiskelijat pystyvät tutkimaan kulmien astelukujen summan muutoksia erilaisissa dynaamisissa muunnoksissa. Tämän demonstraation toteuttaminen toimii myös hyvänä jatkotehtävänä tehtävälle 2 (ks. cd-rom).

Kolmio hyperbolisessa puolitasossa

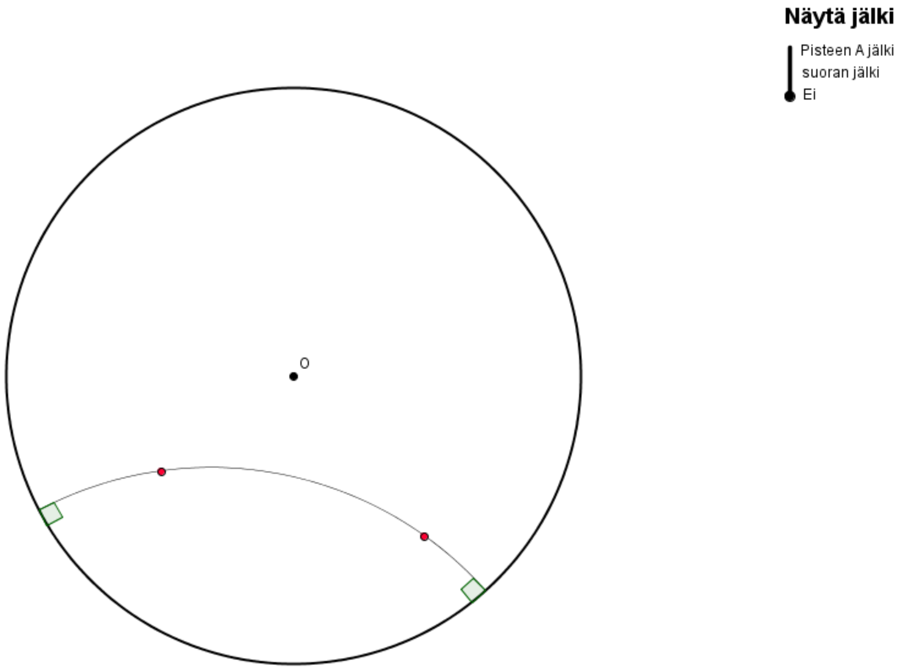


Antti Laitamäki, Luotu GeoGebra

Kuva 20

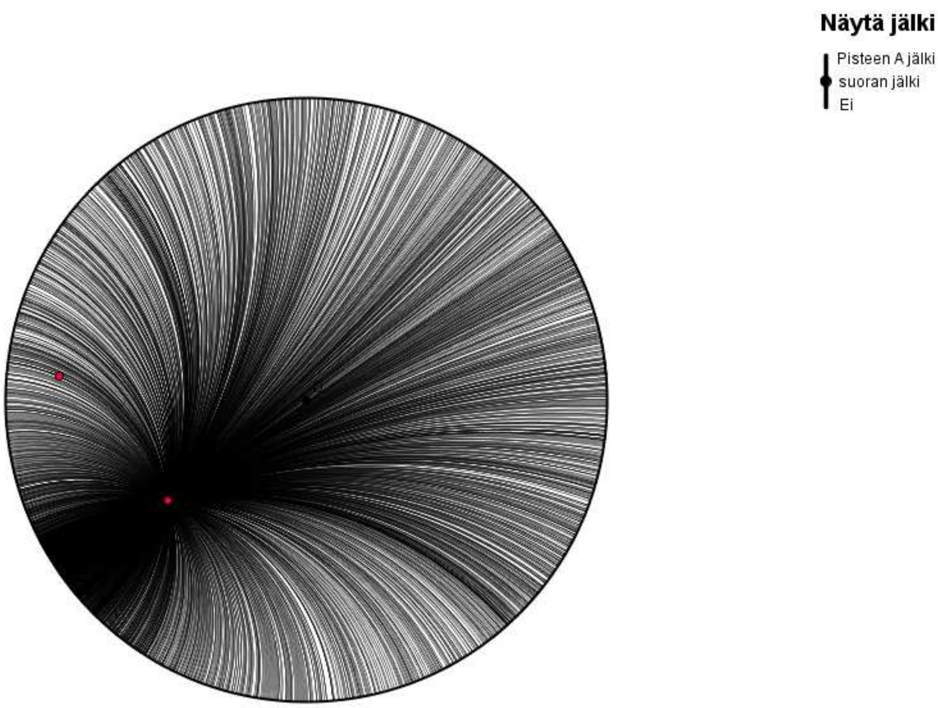
2. *Poincarén malli*

Päätin konstruoida GeoGebralla Poincarén mallin. Halusin selvittää, miltä näyttäisi Poincarén suoran jälki, liikuteltaessa toista suoran määrittelevää pistettä dynaamisesti toisen pysyessä vakiona. GeoGebran avulla tuotettu Poincarén malli tuo kynällä ja paperilla abstraktiksi jäävän mallin paljon konkreettisemmaksi dynaamisine muutoksineen (ks. kuva21).



Kuva 21

Vaihdettaessa demonstraation oikeassa yläkulmassa olevasta säätimestä suoran jälki päälle, ja pyöritettäessä toista suoran määrittelevää pistettä muodostuu kuvan 22 kaltainen torvimainen ”musta aukko” keskipisteenään paikoillaan oleva Poincaré-suoran määrittelevä piste.



Kuva 22

Nämä esimerkit osoittavat GeoGebran potentiaalin myös yliopistomatematiikan opetuksessa. Tämä potentiaali ei rajoitu pelkästään geometrian opiskeluun. Esimerkiksi analyysin ja kompleksianalyysin tueksi on kehitetty monia havainnollistavia demonstraatioita (ks. http://www.geogebra.org/en/wiki/).

6. Pohdintaa

Edellisessä luvussa esitetyt tietokoneavusteiset oppimisympäristöt toimivat hyvinä esimerkkeinä siitä, kuinka tietokoneiden avulla pystytään tukemaan ja tehostamaan konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista matematiikan opetusta. Opettajan teknologinen kompetenssi ei saa muodostua esteeksi tieto- ja viestintätekniikan käytölle. Toisaalta teknologian käytöstä innostuneen opettajan täytyy kuitenkin pitää mielessään, että tieto- ja viestintätekniikan käyttö tulee nähdä ennemmin välineenä, kuin päämääränä.

Haapasalo ja Silfverberg (2006) rohkaisevat vastavalmistuneita opettajia toimimaan kouluissa tieto- ja viestintätekniikan puolesta puhuvina "agentteina". Monet innovatiiviset opettajat integroivat tieto- ja viestintätekniikkaa opetukseensa. Vaikka nämä kokeilut jäävät yleensä raportoimatta, juuri näiden innovatiivisten opettajien ansiosta tieto- ja viestintätekniikka on hyväksytty tärkeäksi osaksi suomalaista koulutusta. Kuitenkin monissa traditionaalisissa, konservatiivisissa instituutioissa matematiikan oppimiselle ja opettamiselle nähdään vain yksi tyyli, joka on säilynyt samana jo vuosisadan ajan (Haapasalo & Sifverberg 2006). Edellisessä luvussa osoitin, miten jopa kovin abstraktitkin matemaattiset konseptit voivat saada alkunsa tietokoneavusteisessa opetuksessa oppilaiden spontaaneista ideoista.

GeoGebraa voisi hyvin verrata työkaluun, jota käytetään oppilaiden matemaattisen osaamisen tehostajana. Eri työkalujen laittaminen paremmuusjärjestykseen ei ole järkevää. Sen sijaan järkevää on käyttää oikeaa työkalua oikeassa paikassa. Opettajan tulisikin tiedostaa kunkin aihealueen esittämismahdollisuudet myös esimerkiksi GeoGebraa käyttäen. Näin se toimisi ikään kuin tehokkaana lisätyökaluna opettajan työkalupakissa. GeoGebralla on runsaasti sovelluskohteita niin peruskoulu-, lukio-, kuin myös yliopistotason matematiikan opetuksessa (ks. http://www.geogebra.org/en/wiki/). Olen pyrkinyt tässä työssä näyttämään esimerkkioppimisympäristöjen kautta mihin GeoGebra soveltuu ja miten sitä voidaan käyttää. Healy (2000) toteaa GeoGebran ja muiden dynaamisten matematiikkaohjelmien käyttöön sisältyvän myös riskin: Ohjelmien käytön myötä tuleva vahva geometrinen tuki matematiikan teorioille saattaa saada aikaan sen, että oppilaat eivät enää näe formaaleja matemaattisia todistuksia tarpeellisina! Dynaamisia matematiikkaohjelmia käyttävien opettajien tuleekin mielestäni korostaa erityisen paljon matematiikan aksioomajärjestelmistä lähtevien päättelyketjujen ja matemaattisen logiikan tärkeyttä koko tieteenalan perustana.

Koulun opetusmenetelmät ovat erkaantuneet oppilaiden tavoista ymmärtää maailmaa, mutta oppilaiden ja opettajien täytyisi elää samankaltaisessa kokemusmaailmassa, jotta voisivat ymmärtää toisiaan. Tämän vuoksi opettajien olisi pyrittävä olemaan ajan tasalla esimerkiksi nuorten tavoista toimia verkossa. Nykyajan nuoret oppivat ja ymmärtävät uusia teknologioita (tietokone, internet, matkapuhelimet ym.) visuaalisesti. Tämän vuoksi matematiikan oppiminen symbolisessa muodossa saattaa olla oppilaille tulevaisuudessa yhä vaikeampaa. Tätä kasvavaa vaikeutta voidaan lieventää käyttämällä dynaamisia matematiikkaohjelmia, kuten GeoGebraa, matematiikan opetuksessa, jolloin visuaalisen representaation merkitys opetuksessa kasvaa.

Maailman muuttuessa koulujen ja opetussuunnitelmien on pysyttävä muutoksessa mukana. Nykyisen informaatiotulvan aikakautena ei ole järkevää painottaa opetuksessa muistamista vaan pikemminkin kykyä löytää tietoa ja ratkaista ongelmia.

Kun yksittäisten tietojen ja taitojen erillinen opettaminen menettävät keskeisen roolinsa, esiin nousevat oppimisen taitojen opettamisen ehdot. Opetustilanteissa tulee keskeiseksi näiden taitojen kehittymistä edistävien oppimisympäristöjen luominen. (Rauste & von Wright 1994 s.201)

Opetuksen tavoitteeksi tulisi mielestäni asettaa taitavien oppijoiden kasvattaminen. Matematiikan ja tietotekniikan opetuksella on tässä prosessissa merkittävä rooli. Nämä tavoitteet tulisi mielestäni huomioida entistä paremmin myös opetussuunnitelmissa. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista opetusta tukevan opetussuunnitelman tulisi olla luonteeltaan hyvin joustava. Vaikka opetushallituksen vuonna 2004 julkistama perusopetuksen opetussuunnitelma perustuukin nimellisesti konstruktivistiselle oppimiskäsitykselle (ks. Opetushallitus 2004, s.18), ei asia matematiikan kohdalla käytännössä ole näin. Esimerkiksi vuosiluokkien 6-9 osalta suunnitelma listaa luettelomaisesti pitkän rivin matemaattisia tietoja ja taitoja, jotka oppilaan tulisi hallita täyttääkseen hyvän osaamisen kriteerit (ks. Opetushallitus 2004, s164-167). Nykyisen opetussuunnitelman orjallinen noudattaminen johtaa pahimmillaan näennäisen tehokkaaseen opettajajohtoiseen proseduurien opiskeluun konseptuaalisen ymmärryksen ja ongelmanratkaisutaitojen kustannuksella.

Kappaleessa 3.5 esitellyn minimaalisen ohjeistuksen periaatteita voidaan soveltaa myös opetuksen käytännön suunnittelussa. Esimerkiksi lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjat toimivat opettajalle systemaattisen lähestymistavan mukaisena oppaana kurssien läpikäymiseksi. Koska myös oppilaat omistavat oppikirjat, voidaan kysyä, voisiko oppitunnit suunnitella joustavammin ja keskittyä oppikirjaa orjallisesti seuraavaa tapaa enemmän esimerkiksi oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen parantamiseen tai proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistämiseen.

Lähdeluettelo

Arranz, J.M. and Losada, R. and Mora, J.M. and Sada, M. (2009) "http://mathstore.ac.uk/headocs/9217_arranz_j_etal_geogebrarealities.pdf" Realities from GeoGebra MSOR Connections, 9(2) 17-23

Carroll, J.M. (1990). An overview of minimalist instruction. Proceedings of fhe twenty-third Annual Hawaii International Conference on Systems Sciences (1.EEE’93). Washington, DC IEEE Computer Society Press Reprint.

Ernest, P. (1991) Philosophy of Mathematics Education, London: Falmer.

Eskelinen, P. 2005. Collobrative Design Activities of Student Primary School Teachers to Promote Their Constructivist Views on Teaching and Learning. Doctoral dissertation. University of Joensuu: Publications in Education (in preparation).

Green, D. and Robinson, C. (2009) "http://mathstore.ac.uk/headocs/9206_green_d_and_robinson_c_geogebrafoundationyear.pdf" Introducing GeoGebra to foundation year students .

Fey, J. (1989) Technology and Mathemtics Education: A survey of Recent Developments and Important Problems. Educational Studies in Mathematics, 20,3,237-272.

Haapasalo, L. (1991) Constructivism in the guidance and analysis of mathematical concept building. Institute for Educational Research. Publication series A. Research reports 43.

Haapasalo, L. & Kadijevich, Dj. 2000. Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. Journal für mathematik-Didaktik 21 (2), 139-157.

Haapasalo, L. & Kadijevich, Dj. 2004. Simultaneous Activation of Conceptual and Procedural Mathematical Knowledge by Means of ClassPad. In J-P Lagrange, M. Artigue, D. Guin, C. Laborde, D. Lenne, L. Trouche (Eds.) Actes du Colloque Européen ITEM École, Collége, Lycée, Université, IUFM Reims 20-22 juin 2003.

Haapasalo, L. & Silfverberg, H. 2006. Technology Enriched Mathematics Education. To appear in E. Pehkonen, M. Ahtee, J. Lavonen (Eds.) How Finns Learn Mathematics and Science. In preparation for press.

Haapasalo, L. & Eronen, L. 2007. Integrating the Pedagogical Studies of Student Teachers of Mathematics into Socio-Constructivist Technology-Based Environments. To appear in the Proceedings of XXIII Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. Åbo Akademi, Vaasa, Finland.

Haapasalo, L. 2008. Applying Minimalist Instruction for Socioconstructivist Technology-Based Environments in Mathematics Teaching and Teacher Education. To appear in Acta Didactica Universitatis Comenianae 8.

Haapasalo, L. 2008b. Building a Framework for Dynamic Assessment. Paper to be presented in the eleventh International Congress on Mathematical Education in Monterrey, Mexico, July 6 - 13, 2008.

Hohenwarter, M. and Lavicza, Z. (2009) "http://mathstore.ac.uk/headocs/9203_hohenwarter_m_geogebrainspire.pdf" The strength of the community: how GeoGebra can inspire technology integration in mathematics teaching .

Inagaki, K., Hatano, G. & Morita E. 1998. Construction of mathematical knowledge through whole-class discussion. Learning and Instruction 8 (6), 503-526.

Iranzo, N. (2009). "http://www.geogebra.org/publications/2009-06-30-Nuria-Iranzo-Dissertation.pdf" Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategies , Doctoral thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.

Johanssen, D.H. 2000. Computers as Mindtools for Schools. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen uskomusten ilmentämänä. Acta Universitatis Tamperensis 1061.

Kadijevich, Dj. & Haapasalo, L. 2001. Linking Procedural and Conceptual Mathematical Knowledge through CAL. Journal for Computer Assisted Learning 17, 156-165.

Kadijevich, Dj. 2004. Improving Mathematics Education: Neglected Topics and Further Research Directions. University of Joensuu. Publications in Education 101. Internet: http://www.joensuu.fi/research/.

Karadag, Z. (2008) "http://www.geogebra.org/publications/2008-Karadag-Improving-online-mathematical-thinking.pdf" Improving online mathematical thinking . 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.) 2001. Adding it up. National Academy Press, Washington DC.

OECD 2005, PISA 2003 Technical report.

Opetusministeriö, 2002. LUMA hankkeen kansallinen loppuraportti Suomalaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen vuonna 2002.

Opetushallitus, 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet.

Repo, S. 1994. Understanding and reflective abstraction: learning the concept of derivative in a computer enviroment. International DERIVE journal 1(1), 97-113.

SITES 2006 -raportti, 2008. Second Information Technology In Education Study 2006.

Tossavainen, T & Sorvali, T. 2003. Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka. Tieteessä tapahtuu 2003 (8), 30-35.

Tynjälä, P. (1999). Oppiminen tiedon rakentamisena. Kirjayhtymä Oy.

Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. (1994). Oppiminen ja Koulutus. WSOY.

Liite 1: Toisen asteen polynomifunktio, tehtäväpaperi

Toisen Asteen Yhtälö

18. tammikuuta 2009

Siirry osoitteeseen http://users.jyu.fi/~anjolait/opetus/paraabeli (matomerkin "~" saat painamalla "Alt Gr" näppäintä ja "¨" näppäintä yhtäaikaa). Käytä avautuvaa sovellusta apuna seuraavien tehtävien tekemiseen. Varaa paperia tulostesi kirjaamista ja tarkistamista varten!

1. Säädä vakioden a, b ja c arvoiksi a=0,6, b=-1, c = -3 ja ratkaise graafisesti:

   a) f(x)=0

   b) Huippupisteen koordinaatit

   Tarkista a)-kohdan tuloksesi käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Siirry vaiheeseen 2 vasemmassa yläkulmassa olevasta palkista. Säädä vakioiden a, b ja c arvoja siten, että:

   a) Paraabeli on alaspäin aukeneva ja sillä ei ole nollakohtia

   b) Paraabelin ainut nollakohta on $x = 1$ (*vihje:* $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$)

   c) Nollakohdat ovat $x_1 = -1$ ja $x_2 = 2$ *(vihje: tulon nollasääntö)*

   d) Paraabelin huippu on pisteessä $(2, -2)$ (*vihje: s.161*)

   Kirjaa ylös ratkaisemasi toisen asteen yhtälöt ja *tarkista tulokset laskemalla*. Ovatko ratkaisut yksikäsitteisiä?

3. Siirry vaiheeseen 3 vasemmassa yläkulmassa olevasta palkista. Näytön vasempaan laitaan ilmestyy yhtälön diskriminantti *(*$D = b^2 - 4ac$*, kun* $a \neq 0$). Säädä vakioiden a, b ja c arvoja siten, että:

   a) diskriminantin arvo on negatiivista

   b) diskriminantin arvo on positiivista

   c) diskriminantti D=0

   Tutki mikä yhteys diskriminantin etumerkillä ja funktion nollakohtien lukumäärällä on. Mieti myös, mistä yhteys johtuu.

Liite 2: Toisen asteen polynomifunktio, vastauspaperi

Vastauspaperi MAA02: Toisen asteen yhtälö

Ryhmän jäsenet : ____________________________

____

____

1. a)

   b)

2. a)

   b)

   c)

   d)

3. a) Mikä yhteys diskriminantin etumerkillä ja toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärällä on?

   b) Kirjan tehtävä 521 (sivu 174)

Liite 3: Yliopisto geometria, tehtäväpaperi

GEOMETRIA 2009 **Tietokoneharjoitukset**

Harjoitusten tekemiseen käytämme GeoGebra ohjelmaa. Ohjelmaa voi käyttää verkon yli mistä tahansa (kunhan Java-tuki on kunnossa).

Tehtävä: siirry osoitteeseen www.geogebra.org ja valitse ”Käynnistä GeoGebra” ja ”GeoGebra Web Start” (Ohjelman voi myös ladata omalle koneelle).

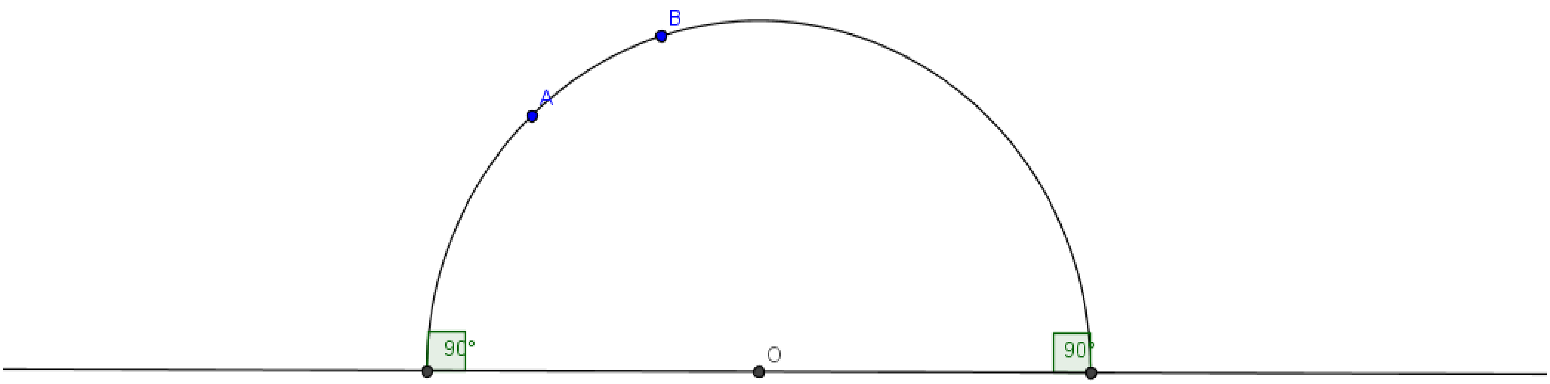
Alkutoimenpiteet:

1) Poista koordinaattiakselit näkyvistä (valitse valikosta ”*Näytä*” ja alasvetovalikosta ”*Akselit*”)
2) Poista vasemmassa laidassa oleva algebraikkuna näkyvistä (valitse valikosta ”*Näytä*” ja alasvetovalikosta ”*Algebraikkuna*”)

Alkutoimenpiteiden jälkeen voidaan alkaa suorittaa varsinaisia harjoituksia. Siirry osoitteeseen http://users.jyu.fi/~anjolait/geogebraopetus/yliopistokurssit/geometria/esim1.swf ja katso esimerkki tasakylkisen kolmion konstruoinnista GeoGebran avulla. Tämän jälkeen voit siirtyä tekemään tehtävää 1.

1. Opettele piirtämään yksinkertaisia kuvioita ja konstruoimaan geometrisia konstruktioita:
a) kulman puolitus
b) neliön konstruktio
c) pisteestä tangentti ympyrälle

2. -Tavoitteena on luoda kolmio hyperbolisessa puolitasossa. Tässä hyperbolisessa puolitasossa rajoitutaan tarkastelemaan pisteitä, jotka sijaitsevat tason kahtia jakavan suoran yhdellä puolella. Suora kahden pisteen kautta tässä mallissa on puoliympyrä, jonka keskipiste on halkaisijalla:



1) Aloita GeoGebra konstruktiosi piirtämällä suora, joka jakaa tason kahteen osaan. Piirrä sitten kaksi pistettä (kuvassa A ja B, oltava samalla puolella suoraa).
2) **Konstruoidaan hyperbolinen jana AB:** Piirrä jana AB ja sille keskinormaali. Keskinormaalin ja puolitasomme rajoittavan suoran leikkauspisteeseen (kuvassa O) muodostuu hyperbolisen suoran AB konstruoivan ympyrän keskipiste (mieti!). Käytä ”Ympyränkaari”-työkalua ja piirrä kaari B:stä A:han keskipisteenä O. Kokeile liikutella pisteitä A ja B. Miksi kaari piirtyy ”väärin päin”, jos A tai B liikutetaan toistensa ohi leveys-suunnassa?
3) **Luo uusi työväline, joka konstruoi janan hyberbolisessa puolitasossa:** valitse valikosta ”*Työvälineet*” ja alasvetovalikosta ”*Luo uusi työväline...*”. Tulostusobjekteiksi valitse listasta juuri konstruoimasi ympyränkaari, sekä puolitason jakava suora. Lähtöobjekteja ei tarvitse muuttaa (pisteet A,B,C,D). Seuraavassa vaiheessa voit nimetä työkalusi haluamallasi tavalla.

Valitse ”poistu”.

4) **Käytetään työvälinettä hyperbolisen kolmion konstruointiin:** Valitse valikosta ”Tiedosto” ja ”uusi” (edellistä konstruktiota ei tarvitse tallentaa). Valitse juuri tekemäsi työkalu (laitimmaisena oikealla oleva ikoni) ja konstruoi hyperbolinen jana (tämä tapahtuu merkitsemällä neljä pistettä, joista kaksi ensimmäistä määrittelee puolitason rajoittavan suoran ja kaksi jälkimmäistä hyperbolisen janan päätepisteet). Käytä työkalua muodostaaksesi janoista kolmion hyperboliseen puolitasoon. **KATSO VIDEO OSOITTEESSA** http://users.jyu.fi/~anjolait/geogebraopetus/yliopistokurssit/geometria/esim2.swf