Yleinen suhteellisuusteoria ja tapahtumien välinen yhteys siirtymäfunktioiden avulla

Hannu Nyrhinen

28. lokakuuta 2009

Tiivistelmä

Työssä käsitellään siirtymäfunktioita toisaalta kvanttimekaniikassa ja toisaalta neliulotteisessa avaruusajassa. Yleinen suhteellisuusteoria muotoillaan nk. geodeettisen siirtymäfunktion avulla, minkä jälkeen sen avulla tarkastellaan kahden avaruusajan pisteen, tapahtuman, välistä siirtymää.

Ensimmäisenä, Luvussa 2, käsitellään kvanttimekaanista siirtymäfunktiota Diego Meschinin vuonna 2008 julkaistun väitöskirjan [Meschini] mukaan. Tämä luku toimii vertailukohtana myöhemmin esiteltävälle geodeettiselle (geometriselle) siirtymäfunktiolle. Luvussa käsitellään lyhyesti kvanttimekaanisen siirtymäfunktion metageometrista perustaa ja todennäköisyyden mukaan tuloa teoriaan siirtymäfunktion kautta.

Loput työstä perustuu FT Markku Lehdon muistiinpanoihin ja suhteellisuusteorian kurssin luentoihin (jotka löytyvät hieman muokattuna myös Diego Meschinin väitöskirjasta [Meschini] (Chapter 10)).

Luvuissa 3 ja 4 esitellään myöhemmin käyttöön tulevaa matemaattista välineistöä. Luvussa 3 johdetaan yhtälö avaruusajan geodeettiselle maailmanviivalle (geodeesille) ja määritellään kaarevan avaruuden absoluuttinen ja kovariantti derivaatta. Luvussa 4 esitellään nk. tetradiformalismi, jossa hiukkasen liikettä kuvaillaan neljän (avaruusajan dimensio) vektorin ja kolmen käyrän kaarevuutta kuvailevan parametrin avulla.

Luvussa 5 määritellään geodeettinen siirtymäolio (tai "yhteysolio") ja siirtymäfunktio, joka kuvaa siirtymää ("yhteyttä") avaruusajan pisteiden välillä. Siirtymäfunktion kovarianttien derivaattojen avulla muotoillaan Einsteinin kenttäyhtälöt ja kahden avaruusajan tapahtuman välinen yhteys. Lopputuloksena on siirtymäfunktion toisen kovariantin derivaatan ja Riemannin vuorovesitensorin välinen relaatio. Tuloksella on merkitystä, sillä molemmat liittyvät havaintoihin ja näin siis saadaan johdettua yhteys kahden havaintoihin liittyvän suureen välille (5.30).

Liitteessä A vielä tarkastellaan Newtonin ja Einsteinin gravitaatioteorioita tetradiformalismin avulla. Molemmissa teorioissa merkittävään rooliin nousee jo mainittu Riemannin vuorovesitensori.

Luettavuuden parantamiseksi osa välivaiheista on jätetty kirjoittamatta tekstiin ja siirretty omaan liitteeseensä, Liitteeksi B.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Fysikaalisen teorian muotoiluun vaikuttavat muotoilun lähtökohdat ja tavoitteet. Saman ilmiön voi hahmottaa eri tavoin ja silti päätyä samankaltaisiin lopputuloksiin. Gravitaatiota kuvaili ensimmäisenä Newton, myöhemmin Einstein – ja siinä missä Newtonin teoriassa gravitaatio ajatellaan painovoimaksi, jolla kappaleet vetävät toisiaan puoleensa, Einsteinin yleisessä suhteellisuusteoriassa gravitaatio samastetaan avaruusajan muotoon. Molemmat teoriat kuitenkin tuottavat likimain samanlaiset liikeradat planeetoille.

Toisaalta saman asian voi rakentaa erilaisista palikoista: Jos tarvitaan yöpöytä, mikä tahansa tasainen alusta – jolla on riittävän kestävä rakenne, että sille voi laskea kohtuullisen määrän tavaraa – riittää. Puinen pöytä voi päätyä takkaan taloa lämmittämään, kun taas väärinpäin käännetystä pahvilaatikosta saattaa olla hyötyä seuraavassa muutossa. Molemmat toimivat yhtä hyvin pöytänä, vaikka niiden muu käyttö eroaakin toisistaan.

Myös yleisen suhteellisuusteorian voi rakentaa erilaisista palikoista: käyttäen tensorianalyysiä (kuten Einstein) tai differentiaaligeometriaa. Liikkeelle on historian saatossa lähdetty eri lähtökohdista. Tässä tutkielmassa Einsteinin kenttäyhtälöt johdetaan lähtien geodeettisesta siirtymäfunktiosta. Kullakin tavalla on omat ominaispiirteensä ja motivaationsa, vaikka saman suhteellisuusteorian ne tuottavatkin. Kyse on saman asian rakentamisesta erilaisin rakennusainein ja erilaisin menetelmin. Nyt käytettävän siirtymäfunktion avulla voi muotoilla Einsteinin kenttäyhtälöt, minkä lisäksi sen avulla kuvataan kahden pisteen välistä yhteyttä.

Siirtymäfunktio kuvaa, nimensä mukaisesti, siirtymää (tai yhteyttä) avaruusajan pisteiden välillä. Sen arvot riippuvat siten sekä siirtymän alku- että loppupisteestä. Kuitenkin esimerkiksi mainitut Einsteinin kenttäyhtälöt kuvaavat avaruusajan muotoa yhdessä pisteessä kerrallaan ja ne saadaan rajalla, jossa loppupiste lähestyy alkupistettä.

Havainto, joka tehdään varsinaisesti vasta liitteessä A on, että Riemannin vuorovesitensori $\mathscr{R}_{\alpha\beta}$ nousee merkittävään rooliin niin Newtonin gravitaatioteoriassa, Einsteinin lokaalissa teoriassa (Yleinen suhteellisuusteoria) kuin myös tässä tutkielmassa käsitellyssä (ei-lokaalissa) teoriassa.

Riemannin vuorovesitensori on myös tekijä, joka erottaa suppean suhteellisuusteorian edellä mainituista gravitaatiota kuvaavista teorioista. Suppean suhteellisuusteorian laakeassa avaruusajassa $\mathscr{R}_{\alpha\beta}$ on aina nolla.

Luku 2

Siirtymäfunktio kvanttimekaniikassa

Tässä luvussa käsitellään kvanttimekaanisten systeemien välistä siirtymää (tai yhteyttä). Koko aiheen käsittely ja päätelmät ovat peräisin Diego Meschinin vuonna 2008 ilmestyneestä väitöskirjasta [Meschini] (Chapter 12). Kirjassa on myös käsitelty käytetyn lähestymistavan motivaatiota ja (mm. psykologisia) perusteita ja analogioita.

Myöhemmin käsitellään kahden tapahtuman (avaruusajan pisteen) välistä yhteyttä suhteellisuusteorian kannalta ja tämä luku toimii ikään kuin johdantona tai vertailukohtana tulevalle.

Käsitteet *siirtymäolio* ja *siirtymäfunktio* johdatellaan metageometrisistä[1] lähtökohdista.

2.1 Metageometrinen perusta

Fysikaaliseksi perustaksi otetaan preparointi tai *esimittaus*. Tällä tarkoitetaan prosessia, josta jostakin raaka-aineistosta poimitaan ne systeemit, joilla on jokin haluttu ominaisuus. Siis jos observaabelin A mahdolliset mittaustulokset, eli spektri on $\{a_i\}$ (missä $i = 1, 2, \ldots$), *esimittauksen* jälkeen vain tietyt, tulokset ovat mahdollisia. On tietenkin myös mahdollista, että A:n spektri on jatkuva.

Esimerkiksi, jos halutaan tutkia vain tietyssä spin-tilassa olevia elektroneja, *esimittaus* poimii koko näytteen kaikista hiukkasista ne, joilla on haluttu spin.

Liitetään observaabeliin A, kuvaamaan esimittausta, metageometrinen *esimittausolio* $\mathscr{P}(a)$. Se kuvaa prosessia, jossa raaka-aineistosta poimitaan

[1]Metageometria – ”geometrian tuolla puolen”, vrt. *metafysiikka*, jolla tarkoitetaan fysikaalisen tieteen tavoittamattomissa olevaa [Meschini] s. 191.

fysikaaliset systeemit, jotka liittyvät ko. observaabeliin (ja suodattaa ne, joiden preparointi a-systeemeiksi ei onnistu).

Samaan tapaan $\mathscr{P}(a_i)$ erittelee observaabelin A spektristä ne systeemit a_i, joilla on jokin haluttu ominaisuus ja suodattaa ne a_j $(\forall j \neq i)$, joilla tätä ei ole.

Huomautetaan vielä, että $\mathscr{P}(a)$ on todella metageometrinen — $\mathscr{P}(a)$:n geometrinen muoto, $\left\|\mathscr{P}(a)\right\|$, $\left\langle \mathscr{P}(a) \middle| \mathscr{P}(b) \right\rangle$ tai dist $\left[\mathscr{P}(a), \mathscr{P}(b)\right]$ eivät kertakaikkiaan tarkoita mitään.

Otetaan käyttöön merkintä $\mathscr{P}(a_i) + \mathscr{P}(a_j)$ tarkoittamaan observaabeliin A liittyvää esimittausta, jolla erotellaan sekä a_i- että a_j-systeemit muista. Symboli '+' ymmärretään tässä siis tarkoittamaan samaa kuin logiikan TAI (poimitaan ne systeemit, joilla on ominaisuus a_i TAI a_j). Tuntuu selvältä, että mainittu esimittausten summa on kommutatiivinen;

$$\mathscr{P}(a_i) + \mathscr{P}(a_j) = \mathscr{P}(a_j) + \mathscr{P}(a_i) \tag{2.1}$$

ja assosiatiivinen;

$$\left[\mathscr{P}(a_i) + \mathscr{P}(a_j)\right] + \mathscr{P}(a_k) = \mathscr{P}(a_i) + \left[\mathscr{P}(a_j) + \mathscr{P}(a_k)\right]. \tag{2.2}$$

Esimittauksen, joka päästää kaikki a_i-systeemit läpi, kuvataan *identtisyysoliolla* $\mathscr{I}$. Niinpä sen on vastattava kaikkien mahdollisten (kyseessä olevaan observaabeliin liittyvien) esimittausolioiden summaa. Symbolein tämä (metageometrinen) *täydellisyysrelaatio* on

$$\sum_i \mathscr{P}(a_i) = \mathscr{I}, \tag{2.3}$$

missä summa $\sum_i$ sisältää kaikki $\mathscr{P}(a_i)$-termit – a_i:t ovat niin tihein välein, kun on havaintojen kannalta tarpeellista. Tärkeintä on, että kaikki mahdolliset mittaustulokset otetaan mukaan.

Samaan tapaan, kuin identtisyysolio yllä, otetaan mukaan myös sen vastakohta (esimittausten kannalta). Oliota $\mathscr{O}$, joka vastaa esimittausta, josta yhtään systeemiä ei pääse läpi, kutsutaan *nollaolioksi.*

Yhteen observaabeliin A liittyvää esimittausta, joka vaatii sekä tuloksen a_i että tuloksen a_j, merkitään tulolla $\mathscr{P}(a_j)\mathscr{P}(a_i)$ (vastaavasti $\mathscr{P}(a)\mathscr{P}(b)$ vaatii ominaisuudet a ja b). Tulo siis vastaa loogiikan operaatiota JA (läpi pääsevät systeemit, joilla on ominaisuus a_i JA a_j).[2] Näistä esimittauksista jälkimmäinen, $\mathscr{P}(a_j)$ päästää sisään tulevista a_i-systeemeistä läpi a_j-

[2]Joukko-opin kannalta yhteen observaabeliin liittyvien esimittausten joukossa summa + vastaa yhdistettä $\cup$ ja tulo leikkausta $\cap$. [Kirjoittajan huomautus]

systeemit. Toisin sanoen kaikki systeemit suodattuvat, ellei $i = j$.[3] Symbolein

$$\mathscr{P}(a_j)\,\mathscr{P}(a_i) = \mathscr{D}_{ij}\,\mathscr{P}(a_i), \tag{2.4}$$

missä on otettu käyttöön *deltaolio*

$$\mathscr{D}_{ij} = \begin{cases} \mathscr{O} & \text{kun } i \neq j \\ \mathscr{I} & \text{kun } i = j. \end{cases}$$

Tuloksesta (2.4) käsin on selvää, että myös yhteen observaabeliin A liittyvien esimittausolioiden tulo on sekä kommutatiivinen että assosiatiivinen (useampaan observaabeliin liittyvien esimittausolioiden tulo on yleisesti ainoastaan assosiatiivinen):

$$\mathscr{P}(a_j)\,\mathscr{P}(a_i) = \mathscr{P}(a_i)\,\mathscr{P}(a_j) \tag{2.5}$$

$$\left[\mathscr{P}(a_k)\,\mathscr{P}(a_j)\right]\mathscr{P}(a_i) = \mathscr{P}(a_k)\left[\mathscr{P}(a_j)\,\mathscr{P}(a_i)\right] \tag{2.6}$$

Todetaan vielä, ennen siirtymistä tutkimaan tilojen välistä vastaavuutta, että nollaoliolla $\mathscr{O}$ ja identtisyysoliolla $\mathscr{I}$ on tulon ja summan suhteen samanlaisia ominaisuuksia kuin luvuilla 1 ja 0:

$$\begin{aligned}
\mathscr{I} + \mathscr{O} &= \mathscr{I}, \\
\mathscr{P}(a) + \mathscr{O} &= \mathscr{P}(a), \\
\mathscr{I}\mathscr{I} &= \mathscr{I}, \\
\mathscr{O}\mathscr{O} &= \mathscr{O}, \\
\mathscr{I}\mathscr{P}(a) &= \mathscr{P}(a) = \mathscr{P}(a)\mathscr{I}, \\
\mathscr{O}\mathscr{P}(a) &= \mathscr{O} = \mathscr{P}(a)\mathscr{O}, \\
\mathscr{I}\mathscr{O} &= \mathscr{O} = \mathscr{O}\mathscr{I}.
\end{aligned}$$[4]

2.2 Kvanttimekaaniset siirtymäolio ja siirtymäfunktio

Kahteen eri observaabeliin A ja B liittyvien esimittausolioiden $\mathscr{P}(a)$ ja $\mathscr{P}(b)$ tulon tutkiminen antaa aihetta ottaa mukaan uuden, metageometrisen,

[3]

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(a_j)\,\mathscr{P}(a_i) &= \mathscr{O} && \text{kun } i \neq j \\
\mathscr{P}(a_j)\,\mathscr{P}(a_i) &= \mathscr{P}(a_i) && \text{kun } i = j
\end{aligned}$$

[4] Toisaalta erojakin löytyy esim. tarkastelemalla toimituksia $\mathscr{I} + \mathscr{I}$ ja $\mathscr{P}(a) + \mathscr{I}$. [Kirjoittajan huomautus]

olion. Yleisestihän

$$\mathscr{P}(b)\mathscr{P}(a) \neq \mathscr{P}(a)\mathscr{P}(b).$$

Ensimmäinen tulo suodattaa raaka-aineistosta muut kuin a-systeemit, jonka jälkeen ne a-systeemit, jotka eivät muunnu b-systeemeiksi, suodatetaan pois – jäljelle jää b-systeemejä. Jälkimmäisessä a:n ja b:n roolit vaihtuvat ja jäljelle jäävät ovet a-systeemejä. Vain täydellisesti yhteensopiville[5] observaabeleille A ja B yhtäsuuruus pätee (ja tietysti täydellisen yhteensopimattomille[6], jolloin molemmat tulot antavat $\mathscr{O}$:n).

Tulojen tarkastelu herättää kysymyksen, *kuinka yhteensopivia* observaabelit A ja B ovat. Tulo $\mathscr{P}(b)\mathscr{P}(a)$ koostuu oikeastaan kolmesta osasta; i) a-systeemien esimittauksesta raaka-aineistosta, ii) a-systeemien muuntamisesta b-systeemeiksi, siltä osin kuin se onnistuu (riippuu yhteensopivuuden määrästä) ja iii) a- ja b-systeemien yhteensopivuuden mitasta. Yhteensopivuutta tarkastellaan myöhemmin, mutta siirtymää (muunnosta) varten otetaan käyttöön kvanttimekaaninen (metageometrinen) *siirtymäolio* $\mathscr{P}(b\,|\,a)$. Se kuvaa a-systeemien muuntamista b-systeemeiksi ilman suodatusta – kaikki "sisään menevät" a-systeemit "tulevat ulos" b-systeemeinä.

Selvästi $\mathscr{P}(b\,|\,a) \neq \mathscr{P}(a\,|\,b)$, erityisesti tämä pätee siirtymille yhden observaabelin mittaustuloksissa – $\mathscr{P}(a_j\,|\,a_i) \neq \mathscr{P}(a_i\,|\,a_j)$ (koska a_i- ja a_j systeemit ovat toisensa pois sulkevia). Ja koska yhteen observaabeliin liittyvät eri systeemit ovat täysin yhteensopimattomia, jotta tulo $\mathscr{P}(a_l\,|\,a_k)\mathscr{P}(a_j\,|\,a_i)$ olisi nollasta poikkeava, on jälkimmäisen siirtymän alkutilan ja ensimmäisen lopputilan oltava yhteensopivia. On siis oltava

$$\mathscr{P}(a_l\,|\,a_k)\mathscr{P}(a_j\,|\,a_i) = \mathscr{D}_{jk}\mathscr{P}(a_l\,|\,a_i). \tag{2.7}$$

Tästä seuraa myös, etteivät siirtymäoliot yleisesti kommutoi. Itse asiassa ne kommutoivat täsmälleen silloin kun $j \neq k$ ja $i \neq l$, ja kun $i = j = k = l$.

Intuitiivisesti on myös selvää, etteivät eri observaabeleihin liittyvät siirtymäoliot $\mathscr{P}(b\,|\,a)$ ja $\mathscr{P}(d\,|\,c)$ kommutoi. Toisin kuin yhden observaabelin tilat, eri observaabeleihin liittyvät tilat eivät välttämättä ole täysin yhteensopimattomia tai täysin yhteensopivia. Tulolla $\mathscr{P}(d\,|\,c)\mathscr{P}(b\,|\,a)$ ja siirtymällä $\mathscr{P}(d\,|\,a)$ on varmaankin jotain yhteistä keskenään, vaikkei yhtäsuuruus pätisikään. Tulon lopputulos riippuu observaabelien b ja c *yhteensopivuuden määrästä.*

Huomautetaan vielä, että lopputulos on sama, jos suoritetaan observaabeliin A liittyvä esimittaus kahteen kertaan tai jos suoritetaan ensin esimittaus, jonka jälkeen muunnetaan a-systeemit a-systeemeiksi. Kummassakaan tapauksessa mitään ei suodateta ensimmäisen esimittauksen jälkeen, vaan

[5] engl. compatible
[6] engl. incompatible

kaikki systeemit selviytyvät loppuun asti. Symbolein

$$\mathscr{P}(a)\mathscr{P}(a) = \mathscr{P}(a\,|\,a)\mathscr{P}(a). \tag{2.8}$$

Tässä tapauksessa siirtymäolioiden tulo siis jakautuu kahteen osaan, esimittaukseen ja siirtymään – aiemmin mainittua systeemien yhteensopivuuden mittaa ei ole näkyvissä, kun siirtymän alku- ja lopputilat ovat samat. Ei ole vaikea arvata, että seuraavaksi otetaan mukaan yhteensopivuutta mitattaamaan *luvut* ja että täydellisesti yhteensopivien systeemien yhteensopivuus on 1.

Luvut tulevat mukaan kuvaan yhtälön (2.7) ja deltaolion $\mathscr{D}_{jk}$ kautta. Korvaamalla tämä Kroneckerin deltalla δ_{jk} saadaan mukaan luonnollisimmat luvut 0 ja 1:

$$\mathscr{P}(a_l\,|\,a_k)\mathscr{P}(a_j\,|\,a_i) = \delta_{jk}\mathscr{P}(a_l\,|\,a_i). \tag{2.9}$$

Aiemmin deltaolio esiintyi aina tulon osapuolena, jossa tuloksena oli olio. Luvun ja olion tulon on annettava myös olio, jotta esim. yhtäsuuruus (2.9) säilyy mielekkäänä. Asetetaan siis

$$0\mathscr{P}(a_l\,|\,a_i) = \mathscr{O} \tag{2.10}$$
$$1\mathscr{P}(a_l\,|\,a_i) = \mathscr{P}(a_l\,|\,a_i). \tag{2.11}$$

Nyt tehdään merkittävä postulointi: Yleistetään idea yhtälön (2.9) takana koskemaan myös useampaan observaabeliin liittyvien siirtymäolioiden tuloon ja asetetaan nk. *siirtymäpostulaatti*:

$$\mathscr{P}(d\,|\,c)\mathscr{P}(b\,|\,a) = \langle c|b\rangle\mathscr{P}(d\,|\,a), \tag{2.12}$$

missä merkintä $\langle c|b\rangle$ saa nimen *siirtymäfunktio*[7] ja edustaa lukua. Tämän luvun luonteesta (luonnollinen, rationaali-, reaali-, kompleksi- jne.) ei vielä sanota mitään. Sen paremmin ei (vielä) voi tulkita $\langle c|b\rangle$:a sisätuloksi – tässä vaiheessa se on vain merkintä fysikaaliselle toimitukselle. Siirtymäfunktio on täysin erilainen objekti kuin tähänastiset oliot, joten se kommutoi sekä siirtymä- että esimittausolion kanssa.

Fysikaalisesti siirtymäfunktio kuvaa sitä, mikä osa observaabeliin B liittyvistä b-systeemeistä onnistutaan muuntamaan observaabeliin C liittyviksi c-systeemeiksi. Se on osa, joka on yhteistä esimittausolioille $\mathscr{P}(b)$ ja $\mathscr{P}(c)$. Aiempi tulos $\langle a_j|a_i\rangle = \delta_{ij}$ on nyt erikoistapaus, jossa yhteen observaabeliin liittyvät tilat ovat joko täysin yhteensopivat (samat) tai täysin yhteensopimattomat (eri tilat).

[7] Funktio, lat. *fungi*– suorittaa toiminto. Siirtymäfunktio on tässä ymmärrettävä funktioksi tässä mielessä, ei eksplisiittiseksi kahden reaaliluvun, b ja c funktioksi $f(c, b)$ [Meschini] s. 213.

Nyt on koossa kaikki tarvittava kahden esimittausolion tulon ilmaisemiseksi, kuten jo ennakoitiin, kolmen objektin i) a-systeemien esimittauksesta raaka-ainestosta, ii) a-systeemien muuntamisesta b-systeemeiksi ja iii) a- ja b-systeemien yhteensopivuuden mitasta:

$$\mathscr{P}(b)\,\mathscr{P}(a) = \langle b|a\rangle\,\mathscr{P}(b\,|\,a)\,\mathscr{P}(a). \tag{2.13}$$

Tästä yhdistämällä tuloksen (2.8) kanssa saadaan jo aiemmin arvattu tulos $\langle a|a\rangle = 1$.

Ennen siirtymistä eteenpäin mainitaan vielä kaksi relaatiota, jotka päätellään *fysikaalisiin* syihin vedoten ([Meschini] s. 214):

$$\langle b|a\rangle = \sum_i \langle b|c_i\rangle\langle c_i|a\rangle \quad \text{ja} \tag{2.14}$$

$$\mathscr{P}(b\,|\,a) = \sum_{i,j} \langle d_j|b\rangle\langle a|c_i\rangle\,\mathscr{P}(d_j\,|\,c_i). \tag{2.15}$$

Näistä ensimmäinen tarkoittaa, että se osuus a-systeemeistä, jotka muuntuvat b-systeemeiksi, voidaan ajatella muuntuvan *kaikkien mahdollisten* c_i-systeemien kautta.

Jälkimmäinen puolestaan voidaan tulkita niin, että siirtymä a-systeemeistä b-systeemeiksi voidaan kasata siirtymistä c_i-systeemeistä d_j-systeemeihin, kunhan tiedetään, mikä osa c_i-systeemeillä ja a-systeemeillä – ja toisaalta b-systeemeillä ja d_j-systeemeillä – on yhteensopivaa. Siirtymäfunktiolla on siten rooli, kun muodostetaan lineaarikombinaatioita siirtymäolioista; siirtymäfunktiot antavat painon kullekin termille, sen perusteella, kuinka yhteensopivia eri systeemit ovat. Mitä enemmän on yhteistä, sitä suuremman painon ko. siirtymään liittyvä siirtymäolio saa.

2.3 Siirtymäfunktion käyttö

Aiemmin todettiin, että yhden observaabelin tapauksessa $\langle a_j|a_i\rangle$ on joko 0 tai 1. Toisaalta on todettu, että siirtymäfunktio kuvaa alku- ja lopputilojen yhteensopivuutta. Niinpä on enää lyhyt matka siirtymätodennäköisyyksien mukaan tuloon.

Meschini lähtee tutkimalla esimittauksen $\mathscr{P}(b)$ aiheuttamaa häiriötä a-systeemeihin ([Meschini] s. 215):

$$\mathscr{P}(a)\,\mathscr{P}(b)\,\mathscr{P}(a) = \langle a|b\rangle\langle b|a\rangle\,\mathscr{P}(a).$$

Seuraavaksi tutkitaan hieman tarkemmin siirtymäfunktion fysikaalista merkitystä ja todetaan, että sen kuvaamiksi luvuiksi luonnollisin (toimiva) valinta ovat kompleksiluvut. Ylläolevan siirtymäfunktioiden tulon alaraja on 0 (tiloilla ei ole mitään yhteistä).

Asetetaan myös $\langle b|a\rangle$ ja $\langle a|b\rangle$ toistensa duaalisiksi vastineiksi kompleksikonjugoinnin kautta[8],

$$\langle b|a\rangle^* = \langle a|b\rangle. \tag{2.16}$$

Nyt voidaan tulkita tulo $\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle$ todennäköisyydeksi. On saatu

$$\Pr(b|a) = \langle a|b\rangle\langle b|a\rangle = \langle b|a\rangle^*\langle b|a\rangle =: |\langle b|a\rangle|^2 \geq 0.$$

Tässä kunkin siirtymän todennäköisyys on symmetrinen: $\Pr(b|a) = \Pr(a|b)$.

Toisaalta koska

$$\sum_i \Pr(b_i|a) = \sum_i |\langle b_i|a\rangle|^2 = 1,$$

niin

$$0 \leq \Pr(b|a) \leq 1.$$

Siirtymäfunktion avulla saadaan suoritettua vielä seuraava mielenkiintoinen tarkastelu. Tutkitaan taas esimittausolioiden tuloja:

1. Ensimmäiseksi otetaan siirtymä a-systeemeistä c-systeemeihin jonkin tietyn b-systeemin kautta, $\mathscr{P}(c)\mathscr{P}(b)\mathscr{P}(a)$, (observaabeliin B liittyvä suodatin on päällä). Koska siirtymät a-systeemeistä b-systeemeihin ja b-systeemeistä c-systeemeihin ovat toisistaan riippumattomat, voi todennäköisyyden $\Pr(c|b|a)$ ilmoittaa tulona $\Pr(c|b)\Pr(b|a)$. Tällöin

$$\Pr(c|b|a) = \langle b|c\rangle\langle c|b\rangle\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle = |\langle c|b\rangle\langle b|a\rangle|^2.$$

2. Seuraavaksi tuloa $\mathscr{P}(c)\mathscr{I}\mathscr{P}(a)$ tarkastelemalla (tässä B:hen liittyvä suodatin on pois päältä), koska tulokset b_i ovat toisensa poissulkevia, saadaan

$$\sum_i \Pr(c|b_i|a) = \sum_i \langle b_i|c\rangle\langle c|b_i\rangle\langle a|b_i\rangle\langle b_i|a\rangle = \sum_i |\langle c|b_i\rangle\langle b_i|a\rangle|^2.$$

3. Viimeisenä tulo $\mathscr{P}(c)\mathscr{P}(a)$ (B:hen liittyvä suodatin on kokonaan poissa) kuvaa siirtymää, näennäisesti ilman kulkua yhdenkään b_i-systeemin

[8] Tämä on nk. *siirtymäfunktiopostulaatti*; Siirtymäfunktiot edustavat kompleksilukuja ja $\langle a|b\rangle$:n ja $\langle b|a\rangle$:n välinen yhteys on nimenomaan

$$\langle b|a\rangle^* = \langle a|b\rangle$$

kautta. Kuitenkin käyttäen hyväksi tulosta (2.14), todennäköisyys $\Pr(c|a) = \langle a|c\rangle\langle c|a\rangle$, saadaan kirjoitettua muodossa

$$\begin{aligned}\Pr(c|a) &= \sum_i \sum_j \langle a|b_i\rangle\langle b_i|c\rangle\langle c|b_j\rangle\langle b_j|a\rangle \\ &= \sum_i \langle a|b_i\rangle\langle b_i|c\rangle\langle c|b_i\rangle\langle b_i|a\rangle + \sum_i \sum_{j\neq i} \langle a|b_i\rangle\langle b_i|c\rangle\langle c|b_j\rangle\langle b_j|a\rangle \\ &= \sum_i \Pr(c|b_i|a) + \text{interferenssitermit.}\end{aligned}$$

Viimeisessä kohdassa interferenssitermit edustavat kaikkien mahdollisten tapojen (läpäistä b_i systeemit) interferenssiä. Aivan kuin systeemeille olisi – sen lisäksi, että ne kulkevat jonkin b_i systeemin läpi – mahdollista kulkea kaikkien b_i-systeemien kautta samanaikaisesti. Tämä on tietenkin kiellettyä klassisessa fysiikassa. Näin identtisyysoliolla $\mathscr{I}$ on fysikaalisia seurauksia, se muuttaa c:n mittauksiin liittyvää ennustetta riippuen siitä, onko observaabeliin B liittyvää esimittausta läsnä vai ei.

Tähän astinen kvanttimekaniikan käsittely on pysytellyt erossa geometrisista käsitteistä niin hyvin kuin mahdollista. Siirtymäfunktiota on merkitty, kuin tulevaa ennakoiden, $\langle a|b\rangle$:llä, vaikkei mistään tilavektoreista — puhumattakaan niiden sisätuloista — ole vielä sanottu mitään. Nyt ne kuitenkin otetaan mukaan tähänastinen meta- ja kvasigeometrinen[9] tarkastelu mielessä, analogian kautta.

Aiemmin todettiin, että $\sum_i |\langle b_i|a\rangle| = 1$. Samalla tavalla käyttäen Pythagoraan lausetta n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa yksikkövektrorille $\vec{a}$ ja ortonormitetun kannan kantavektoreille $\vec{b}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$ ja ortonormitus $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$) saadaan

$$\sum_i \cos^2(\theta_i) = \sum_i (\vec{b}_i \cdot \vec{a})^2 = 1,$$

missä θ_i on $\vec{a}$:n ja $\vec{b}_i$:n välinen kulma.

Loppujen lopuksi mukaan otetaan vektorit siten, että *ket*-vektori $|a\rangle$ yhdistetään sisään tulevaan tilaan ja *bra*-vektori $\langle a|$ ulosmenevään. Bra- ja ketvektoreiden sisätulo $\langle b| \cdot |a\rangle$ ajatellaan siirtymäfunktion $\langle b|a\rangle$ geometriseksi vastineeksi.

Näin tulkiten saadaan geometriset vastineet myös esimittaus ja siirtymäolioille. Siirtymäolio $\mathscr{P}(b\,|\,a)$ muuntaa sisään tulevat a-systeemit b-systeemeiksi. Tilavektoreiden $|a\rangle$ ja $|b\rangle$ *ulkotulo* $|b\rangle\langle a|$ tekee juuri tämän

$$(|b\rangle\langle a|)\,|a\rangle = |b\rangle,$$

[9] *kvasigeometria* ymmärretään tässä metageometrian ja geometrian väliseksi alueeksi. Kvasigeometrisellä oliolla on "joitakin yhtymäkohtia geometriaan, vaikkei se varsinaisesti geometrinen olekaan" ([Meschini] s. 190)

siis

$$\mathscr{P}(b\,|\,a) \stackrel{\mathrm{g}}{=} |b\rangle\langle a|. \tag{2.17}$$

Samalla tavalla

$$\mathscr{P}(a) \stackrel{\mathrm{g}}{=} |a\rangle\langle a|. \tag{2.18}$$

Mainitaan tässä, siirtymäfunktioihin liittyvässä luvussa, vielä yksi käsite. Yleisesti operaattorin $\hat{X}$ *jäljeksi* (operaattorikannassa $\{|a_i\rangle\langle a_i|\}$) kutsutaan sen diagonaalielementtien summaa,

$$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_i \langle a_i|\hat{X}|a_i\rangle.$$

Jäljen avulla, relaatiota (2.14) ja kompleksilukujen kommutatiivisuutta hyväksi käyttäen saadaan kirjoitettua muutama yhteys metageometristen ja geometristen olioiden välille:

1. Metageometrisen siirtymäolion $\mathscr{P}(b\,|\,a)$ jättämä geometrinen jälki on sisätulo (geometrisoitu siirtymäfunktio) $\langle b|a\rangle$:

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}(b\,|\,a)] \stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathrm{Tr}(|b\rangle\langle a|) = \sum_i \langle c_i|b\rangle\langle a|c_i\rangle = \langle a|b\rangle. \tag{2.19}$$

2. Erityisesti,

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}(a_j\,|\,a_i)] \stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathrm{Tr}(|a_j\rangle\langle a_i|) = \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{2.20}$$

3. Metageometrisen esimittausolion $\mathscr{P}(a)$ jättämä geometrinen jälki on

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}(a)] \stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathrm{Tr}(|a\rangle\langle a|) = \langle a|b\rangle = 1. \tag{2.21}$$

4. Metageometristen siirtymäolioiden $\mathscr{P}(d\,|\,c)$ ja $\mathscr{P}(b\,|\,a)$ tulon jättämä geometrinen jälki on

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\mathscr{P}(b\,|\,a)\mathscr{P}(d\,|\,c)] &= \mathrm{Tr}[\mathscr{P}(d\,|\,c)\mathscr{P}(b\,|\,a)] \\ &\stackrel{\mathrm{g}}{=} \mathrm{Tr}[(|d\rangle\langle c|)(|b\rangle\langle a|)] = \langle c|b\rangle\langle a|d\rangle, \end{aligned} \tag{2.22}$$

josta seuraa huomion arvoinen tulos:

5. Kahden metageometrisen esimittausolion $\mathscr{P}(a)$ ja $\mathscr{P}(b)$ tulon jättämä geometrinen jälki on a- ja b-systeemien välinen siirtymätodennäköisyys

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}(a)\mathscr{P}(b)] = \mathrm{Tr}[\mathscr{P}(b)\mathscr{P}(a)] \stackrel{\mathrm{g}}{=} \langle b|a\rangle\langle a|b\rangle = \mathrm{Pr}(b|a). \tag{2.23}$$

Toisin sanoen: *metageometristen olioiden geometrinen sormenjälki on kvanttimekaaninen todennäköisyys* ([Meschini] s.229).

Kvanttimekaniikkaa käsitellään vielä perusteellisemmin ja laajemmin nyt lainatussa väitöskirjassa ([Meschini]), mutta tässä on lyhyesti esitetty pääkohdat liittyen kvanttimekaaniseen siirtymäfunktioon $\langle b|a\rangle$. Myöhemmin esitellään suhteellisuusteoreettiset siirtymäfunktio ja siirtymäolio. Tämä kappale on liitetty tutkielmaan vertailun vuoksi, vaikkei samoista objekteista sinänsä olekaan kyse.

Luku 3

Maailmanviiva ja maailmanpinta

3.1 Maailmanviiva $x^\alpha = x^\alpha(u)$ ja geodeettinen yhtälö

Tästä kappaleesta eteenpäin tutkitaan neliulotteisen avaruusajan ominaisuuksia. Toisin kuin edellisessä kappaleessa esitetty kvanttimekaniikka on tuleva teoria täysin geometrinen.

3.1.1 Geodeettinen yhtälö

Kahden tapahtuman, A$\sim x^\alpha(u_A)$ ja B$\sim x^\alpha(u_B)$, *tapahtumaväli* on

$$\Delta s = \int_{\substack{A\\C}}^{B} \mathrm{d}s = \int_{u_A}^{u_B} f\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) \mathrm{d}u,$$

missä C on sellainen maailmanviiva $x^\alpha = x^\alpha(u)$, joka kulkee molempien tapahtumien kautta; u on parametri, joka kasvaa menneisyydestä tulevaisuuteen.

Käytössä on viivaelementti $\mathrm{d}s = \sqrt{-g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}$, joten

$$f(x, x') = f\left(x^\alpha, \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\right) = \sqrt{-g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}}.$$

Maailmanviivaa, jossa tapahtumaväli Δs saa ääriarvon, kutsutaan *geodeesiksi.* Toisin sanoen geodeesi on maailmanviiva, joka toteuttaa variaatioyhtälön

$$\delta \int_A^B \mathrm{d}s = 0, \qquad \text{eli} \qquad \delta \int_{u_A}^{u_B} f\left(u, x, x'\right) \mathrm{d}u = 0,$$

missä δ on variaatiosymboli ja $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ (tässä kappaleessa $'$ tarkoittaa derivointia u:n suhteen).

Otetaan nyt (reaali)luku ε ja riittävän siisti funktio $y^\alpha = y^\alpha(u)$, jolle $y^\alpha(u_A) = y^\alpha(u_B) = 0$ ja määritellään uusi maailmanviiva

$$z^\alpha(u) = x^\alpha(u) + \varepsilon y^\alpha(u).$$

Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}f(u, z^\alpha, z'^\alpha)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\frac{\partial z^\alpha}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial z'^\alpha}\frac{\partial z'^\alpha}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}y^\alpha + \frac{\partial f}{\partial z'^\alpha}y'^\alpha.$$

Jos nyt $z^\alpha(u) = x^\alpha(u)$ on etsitty ääriarvon antava maailmanviiva, niin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{u_A}^{u_B} f(u, z^\alpha, z'^\alpha)|_{z^\alpha = x^\alpha}\mathrm{d}u = \int_{u_A}^{u_B}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\right)y^\alpha \mathrm{d}u = 0.$$

Joten koska $y^\alpha(u)$ voi poiketa nollasta, pätevät geodeesin jokaisessa pisteessä (Eulerin-Lagrangen) yhtälöt,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{3.1}$$

missä $x'^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ ja $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Kätevämmäksi osoittautuu kuitenkin hieman muokattu muoto, jossa $f(x, x')$:n sijasta esiintyy $[f(x, x')]^2$:

Kun $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0$, niin myös (ks. liite)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x'^\alpha}\right) - \frac{\partial (f^2)}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2f^2}\frac{\mathrm{d}(f^2)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial (f^2)}{\partial x'^\alpha} = 0.$$

Tähän mennessä parametri u on ollut mielivaltainen, mutta valitaan nyt $u = s$. Tällöin $x'^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$, $f^2 = -g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta = \frac{-g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s^2} = +1$ ja $\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}u} = 0$, jolloin saadaan nk. ajanluonteisen geodeettisen yhtälön 1. muoto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x'^\alpha}\right) - \frac{\partial (f^2)}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{3.2}$$

Hieman eksplisiittisempi, 2. muoto saadaan sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön (3.2) $f^2 = -g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta$. Tällöin sievennysten jälkeen jäljelle jää ajanluonteisen geodeettisen yhtälön 2. muoto

$$g_{\gamma\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s} + [\alpha\beta, \gamma]x'^\alpha x'^\beta = 0, \tag{3.3}$$

missä

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$$

on nimeltään *ensimmäisen lajin Christoffelin symboli.*

Kolmas, vieläkin eksplisiittisempi muoto saadaan kertomalla 2. muotoa $g^{\gamma\delta}$:lla: Koska $g^{\gamma\delta} g_{\gamma\beta} = \delta^\delta{}_\beta$, tulee tulokseksi

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} x'^\alpha x'^\beta = 0 \tag{3.4}$$

missä $\left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} = g^{\gamma\delta}[\alpha\beta, \delta]$ on nk. toisen lajin Christoffelin symboli.

3.1.2 Absoluuttinen ja kovariantti derivaatta

Seuraavaa havaintoa varten tehdään parametrinvaihto $u \mapsto v = v(u)$. Geodeettinen yhtälö (3.4) muuttuu tällöin muotoon

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}v^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}v} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}v} = -\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \right)^{-2} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}v}.$$

Koska yhtälön oikea puoli on muotoa $f(v)T^\gamma$, siis vektori, on vasemmalla puolella olevan summankin oltava sitä (vaikkeivät sen termit erikseen olekaan). Näin ollen koordinaattimuunnoksessa $x \mapsto x'$ (tästä eteenpäin $'$ viittaa koordinaattimuunnokseen, ei derivointiin) vektorille

$$U^\gamma := \frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}$$

pätee $U'^\gamma = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} U^\delta$. Siis

$$\begin{aligned} U'^\gamma &= \frac{\mathrm{d}^2 x'^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' \frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} \\ &= \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} \frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2 x'^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\varepsilon} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\zeta} \frac{\mathrm{d}x'^\varepsilon}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x'^\zeta}{\mathrm{d}u}, \end{aligned}$$

ts.

$$\left(\left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' - \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} \right) \frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} = 0,$$

josta muunnosrelaatioksi 2. lajin Christoffelin symbolille saadaan

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' = \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \tag{3.5}$$

Viimeisen tulotermin mukana pysyminen osoittaa, ettei 2. lajin Christoffelin symboli ole tensori.

Otetaan nyt kontravariantti vektori T^α ja muodostetaan siitä johdannainen

$$\frac{\mathrm{d}T^\alpha}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} =: \frac{\delta T^\alpha}{\delta u},$$

T^α:n absoluuttinen derivaatta (maailmanviivaa $x^\alpha = x^\alpha(u)$ pitkin). Todetaan ensin, että $\frac{\delta T^\alpha}{\delta u}$ on myös kontravariantti vektori, ts. $\frac{\delta T'^\alpha}{\delta u} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\delta T^\beta}{\delta u}$:

Tutkitaan erotusta

$$\frac{\delta T'^\alpha}{\delta u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\delta T^\beta}{\delta u} = \frac{\mathrm{d}T'^\alpha}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\mathrm{d}T^\beta}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}' T'^\beta \frac{\mathrm{d}x'^\gamma}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \left\{ {\beta \atop \gamma\,\delta} \right\} T^\gamma \frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}. \tag{3.6}$$

Kaksi ensimmäistä termiä oikealla puolella sievenevät muotoon

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} (\neq 0),$$

eli pelkkä $\frac{\mathrm{d}T^\alpha}{\mathrm{d}u}$ ei ole kontravariantti vektori. Erotuksen (3.6) kaksi jälkimmäistä termiä puolestaan sievenevät muotoon

$$\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\varepsilon \partial x'^\zeta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x'^\varepsilon}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u},$$

Nyt huomataan, että koska (ks. liite)

$$\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\varepsilon \partial x'^\zeta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x'^\varepsilon}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0,$$

niin

$$\frac{\delta T'^\alpha}{\delta u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\delta T^\beta}{\delta u} = \left(\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\varepsilon \partial x'^\zeta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x'^\varepsilon}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} = 0.$$

Täten kontravariantin vektorin absoluuttinen derivaatta on myös kontravariantti vektori.

Jos

$$\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = 0$$

(jokaisessa maailmanviivan pisteessä), sanotaan, että on suoritettu vektorin T^α *yhdensuuntaissiirto* (maailmanviivaa pitkin).

Seuraavaksi herää kysymys, voiko absoluuttisen derivaatan ottaa käyttöön myös kovarianteille vektoreille T_α tai korkeamman kertaluvun tensoreille. Ja jos voi, millaisen?

Aloitetaan tarkastelemalla kovarianttia vektoria T_α maailmanviivalla $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Otetaan avuksi kontravariantti U^α, jota siirretään yhdensuuntaisesti pitkin em. maailmanviivaa, ts.

$$\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}u} = -\left\{ {\beta \atop \alpha\,\gamma} \right\} U^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}.$$

Koska (sisätulo)invariantin $T_\alpha U^\alpha$ derivaatta u:n suhteen on myös invariantti, saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(T_\alpha U^\alpha) = \frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}u}U^\alpha + T_\alpha\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}u} - \left\{{\beta \atop \alpha\,\gamma}\right\} T_\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\right) U^\alpha$$

(missä U^α on mielivaltainen jokaisessa maailmanviivan pisteessä). Sulkeissa olevaa nimitetään T_α:n absoluuttiseksi derivaataksi ja merkitään

$$\frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}u} - \left\{{\beta \atop \alpha\,\gamma}\right\} T_\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} =: \frac{\delta T_\alpha}{\delta u}$$

Koska saadun tulon $\frac{\delta T_\alpha}{\delta u}U^\alpha$ on edelleen oltava invariantti, on $\frac{\delta T_\alpha}{\delta u}$:n oltava kovariantti vektori.

T_α:n yhdensuuntaissiirto on, kuten aiemmin kontravariantin vektorin tapauksessa,

$$\frac{\delta T_\alpha}{\delta u} = 0.$$

Vastaavasti, käyttäen hyväksi sisätuloa, saadaan toisen kertaluvun tensorien absoluuttiset derivaatat

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T^{\alpha\beta}}{\delta u} &= \frac{\mathrm{d}T^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}u} + \left\{{\alpha \atop \gamma\,\delta}\right\} T^{\gamma\beta}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u} + \left\{{\beta \atop \gamma\,\delta}\right\} T^{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}, \\
\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta u} &= \frac{\mathrm{d}T_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}u} - \left\{{\gamma \atop \alpha\,\delta}\right\} T_{\gamma\beta}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u} - \left\{{\gamma \atop \beta\,\delta}\right\} T_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u} \quad \text{ja} \\
\frac{\delta T^\alpha{}_\beta}{\delta u} &= \frac{\mathrm{d}T^\alpha{}_\beta}{\mathrm{d}u} + \left\{{\alpha \atop \gamma\,\delta}\right\} T^\gamma{}_\beta\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u} - \left\{{\gamma \atop \beta\,\delta}\right\} T^\alpha{}_\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}.
\end{aligned}$$

Myös korkeamman kertaluvun tensoreiden absoluuttiset derivaatat muodostetaan samalla periaatteella — jokaista kontravarianttia komponenttia kohti tulee lisää yksi termi positiivisella etumerkillä, jokaista kovarianttia komponenttia kohti tulee termi negatiivisella etumerkillä.

Invariantille T sovitaan, että $\frac{\delta T}{\delta u} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}$.

Absoluuttisen derivaatan ominaisuuksista mainittakoon seuraavat

- Lineaarikombinaatiosääntö ja Leibnizin sääntö ovat voimassa kuten tavallisellekin derivaatalle. Siis

  $$\frac{\delta}{\delta u}(a\mathrm{T} + b\mathrm{U}) = a\frac{\delta \mathrm{T}}{\delta u} + b\frac{\delta \mathrm{U}}{\delta u} \quad \text{ja} \quad \frac{\delta}{\delta u}(\mathrm{TU}) = \frac{\delta \mathrm{T}}{\delta u}\mathrm{U} + \mathrm{T}\frac{\delta \mathrm{U}}{\delta u},$$

  mittä T ja U ovat derivoituvia olioita.

- Osittaisintegrointi

  $$\int_a^b g_{\alpha\beta}\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}V^\beta \mathrm{d}u = \Big/_a^b g_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta - \int_a^b g_{\alpha\beta}U^\alpha\frac{\delta V^\beta}{\delta u}\mathrm{d}u.$$

- $\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta u} = 0 = \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta u}$ ja $\frac{\delta(\delta^\alpha{}_\beta)}{\delta u} = 0$
- $g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}T^\alpha}{\mathrm{d}u} \neq \frac{\mathrm{d}T_\beta}{\mathrm{d}u}$ yleensä, mutta $g_{\alpha\beta}\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = \frac{\delta T_\beta}{\delta u}$.

Palataan vielä hetkeksi geodeettiseen yhtälöön (3.4). Sen voi nyt, käyttäen absoluuttista derivaattaa ja merkintää $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} =: U^\alpha$ (tangenttivektori), kirjoittaa muodossa

$$\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0. \tag{3.7}$$

Toisin sanoen: Geodeesin tangenttivektori $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ siirtyy yhdensuuntaisesti pitkin geodeesia (vrt. tason geodeesi: suora viiva).

Erityisesti yksikkötangenttivektori $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{s} =: V^\alpha$ (materiahiukkasen *nelinopeus*), siirtyy yhdensuuntaisesti pitkin geodeesia;

$$\frac{\delta V^\alpha}{\delta s} = 0.$$

Täten myös vapaan[1] m-massaisen materiahiukkasen *neliliikemäärä* $P^\alpha = mV^\alpha$ siirtyy yhdensuuntaisesti pitkin ajanluonteista geodeesia. Tätä voi verrata klassisen fysiikan Newtonin I lakiin, jonka mukaan vapaalle[2] hiukkaselle pätee $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.

Newtonin I lain mukaan vapaa massallinen hiukkanen jatkaa suoraviivaista liikettä vakionopeudella (tai pysyy paikallaan). Suhteellisuusteoriassa tämä korvataan *Einsteinin geodeettisella hypoteesilla*, jonka mukaan vapaan massallisen hiukkasen maailmanviiva on Riemannin-Einsteinin avaruusajan ajanluonteinen geodeesi. Vapaan fotonin maailmanviiva on *nollageodeesi*, jolle $\mathrm{d}s = 0$.

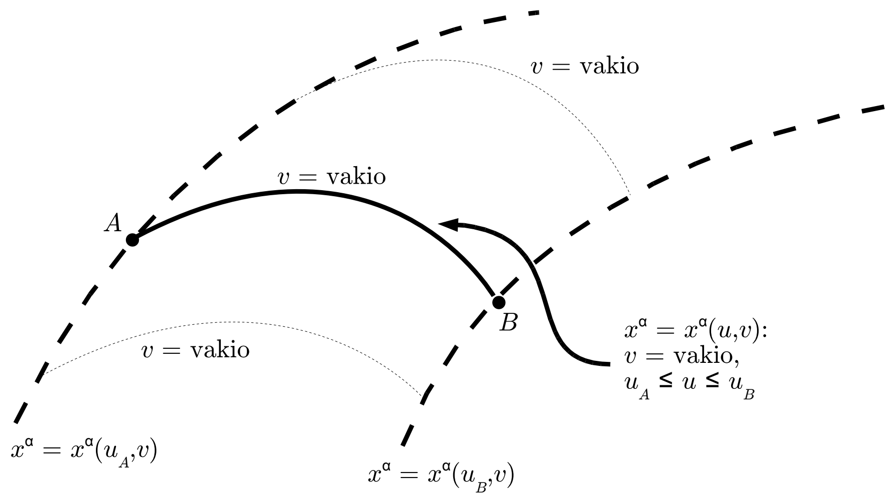
Absoluuttinen derivaatta riippuu tarkasteltavana olevasta maailmanviivasta (u:sta) ja on siksi käytännöllinen apuväline niin kauan kun tarkastellaan esimerkiksi geodeettista yhtälöä tai siirtymiä maailmanviivalla. Ennemmin tai myöhemmin halutaan kuitenkin liittää tensorit koko avaruusaikaan (tai johonkin sen osaan) ja näin ollen pitää siirtyä "maailmanviivaderivaatasta" "avaruusaikaderivaattaan" – ns. *kovarianttiin derivaattaan*.

Siirtyminen tapahtuu ottamalla $\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}$ yhteiseksi tekijäksi, kontravariantille vektorille siis

$$\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = \frac{\mathrm{d}T^\alpha}{\mathrm{d}u} + \left\{{\alpha \atop \beta\,\gamma}\right\} T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{\partial T^\alpha}{\partial x^\gamma} + \left\{{\alpha \atop \beta\,\gamma}\right\} T^\beta\right)\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u},$$

[1] Vapaan ulkoisista voimista. Suhteellisuusteoriassa gravitaatio halutaan määritellä avaruusajan absoluuttiseksi (geometriseksi) ominaisuudeksi, ei ulkoiseksi voimaksi. Näin se saattaa hyvinkin esiintyä, vaikka hiukkanen olisikin ns. vapaa.

[2] Klassisessa fysiikassa myös gravitaatio ajatellaan ulkoiseksi voimaksi.



Kuva 3.1: Maailmanpinta

missä suluissa oleva osa on tyyppiä (1,1) oleva 2. kertaluvun tensori (sillä sen ja kontravariantin vektorin $\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}$ tulo on kovariantti vektori — $\frac{\delta T^\alpha}{\delta u}$). Tätä nimitetään T^α:n kovariantiksi derivaataksi. Usein merkitään

$$\frac{\partial T^\alpha}{\partial x^\gamma} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} T^\beta = T^\alpha{}_{,\gamma} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} T^\beta = T^\alpha{}_{;\gamma},$$

missä $T^\alpha{}_{,\gamma}$ on T^α tavallinen osittaisderivaatta x^γ:n suhteen.

Kovariantin vektorin kovariantti derivaatta on

$$T_{\alpha;\gamma} = T_{\alpha,\gamma} - \left\{ {\beta \atop \alpha\,\gamma} \right\} T_\beta$$

— 2. kertaluvun kovariantti tensori.

Vastaavaalla tavalla absoluuttisesta derivaatasta saadaan myös korkeampien kertalukujen tensorien kovariantit derivaatat.

3.2 Maailmanpinta $x^\alpha = x^\alpha(u,v)$ ja geodeettinen yhtälö

Tarkastellaan seuraavaksi *maailmanpintaa* $x^\alpha = x^\alpha(u,v)$, missä parametrit u ja v vastaavat maailmanviivan $x^\alpha = x^\alpha(u)$ parametriä u (Kuva 3.2). Kiinnitetään ensin kaksi maailmanviivaa, joista toisella $u = u_A =$ vakio ja toisella $u = u_B =$ vakio ($u_A \neq u_B$). Valitaan sitten tapahtuma A ensin mainitulta ja tapahtuma B jälkimmäiseltä maailmanviivalta niin, että molemmat ovat käyrällä $x^\alpha = x^\alpha(u,v)$, jolla v pysyy vakiona ja $u_A \leq u \leq u_B$.

Edetään samaan tapaan kuin edellisessäkin kappaleessa muodostamalla variaatiointegraali (invariantti) A:sta B:hen

$$I(v) = \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \mathrm{d}u = \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \mathrm{d}u, \tag{3.8}$$

missä on merkitty tangenttivektorikenttää $\frac{\partial x^\alpha}{\partial u} =: U^\alpha$.[3]

Tutkitaan ensin, kuinka parametrin v muuttaminen vaikuttaa integraalin arvoon, toisin sanoen mitä on $\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v}$. Koska $I(v)$ on invariantti, tiedetään, että

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{\delta I(v)}{\delta v}.$$

Siten saadaan (liite)

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = 2 \Big/_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta - 2 \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} V^\beta \mathrm{d}u. \tag{3.9}$$

Muodostetaan nyt variaatio-ongelma kiinnittämällä tapahtumat A ja B, ts. asetetaan $V^\alpha(u_A) = V^\alpha(u_B) = 0$. Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = -2 \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} V^\beta \mathrm{d}u = 0,$$

mistä geodeettiseksi yhtälöksi saadaan, kuten aiemminkin, (koska $V^\alpha \neq 0$ yleisesti)

$$\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0. \tag{3.10}$$

Varsinainen tulos saadaan tästä ensin kertomalla (laskemalla sisätulo) puolittain U^α:lla:

$$g_{\alpha\beta} \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} U^\beta = 0. \tag{3.11}$$

Eli koska

$$g_{\alpha\beta} \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} U^\beta = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta u} \left(g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \right) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left(g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \right),$$

niin myös

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left(g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \right) = 0.$$

Tästä integroimalla u:n yli saadaan (1. integraali)

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta =: \varepsilon \zeta^2 (= \text{vakio}), \tag{3.12}$$

[3] Vastaavasti merkitään $\frac{\partial x^\alpha}{\partial v} = V^\alpha$.

missä indikaattori ε määrää merkin ($\varepsilon = +1$ tai $\varepsilon = -1$). Myös vakiosta ζ osataan sanoa hieman lisää.

Kirjoittamalla yhtälöä 3.12 auki eli sijoittamalla $U^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ huomataan, että vasemmalla puolella esiintyy siirtymäalkio $ds^2 = \varepsilon g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$. Näin ollen saadaan relaatio ds:n ja du:n välille:

$$\mathrm{d}s = \zeta \mathrm{d}u. \tag{3.13}$$

Tehdään vielä havainto liittyen U^α:lla kerrottuun geodeettiseen yhtälöön (3.11).

3.3 Geodeettinen kaarevuus

Yhtälön 3.11 mukaan

$$g_{\alpha\beta}\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}U^\beta = 0$$

ja se toteutuu, jos

1. $W^\alpha := \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0$, eli siirrytään pitkin geodeesia, tai
2. $W^\alpha \neq 0$, jolloin sisätulo $g_{\alpha\beta}W^\alpha U^\beta = 0$, eli vektorit W^α ja U^α ovat ortogonaaliset.

Tietenkään ei ole mitään syytä olettaa, että $W^\alpha = 0$ yleensä. $U^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ on x^α:n tangenttivektori(kenttä), joten jos W^α on sen kanssa ortogonaalinen, on sen oltava verrannollinen yksikkönormaalivektoriin N^α. Otetaan verrannollisuuskertoimeksi $k(>0)$ ja kutsutaan sitä *käyrän geodeettiseksi kaarevuudeksi*. Tällöin siis

$$\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = kN^\alpha. \tag{3.14}$$

(k siis kuvaa käyrän, ei itse avaruuden kaarevuutta.)

Määritelmä myös tuntuu luonnolliselta, jos tulkitaan absoluuttinen derivaatta poikkeamana geodeesin suunnasta; mitä suurempi on kaarevuus k, sitä suurempi on W^α:n suuruus eli U^α:n poikkeama geodeesista.

N^α:n avulla saadaan lauseke k:lle. Koska N^α on yksikkövektori, on

$$\varepsilon_N g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta = 1,$$

missä $\varepsilon_N = +1$ tai $\varepsilon_N = -1$ niin että sisätulo antaa tulokseksi $+1$. Sijoittamalla tähän yhtälöstä 3.14 ratkaistu N^α saadaan

$$k^2 = \varepsilon_N g_{\alpha\beta}\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}\frac{\delta U^\beta}{\delta u}. \tag{3.15}$$

Siis: Mitä suurempi kaarevuus, sitä enemmän tangenttivektori muuttuu liikuttaessa käyrällä $x^\alpha = x^\alpha(u)$.

Samanlaisilla kaarevuuksilla on merkitystä seuraavassa luvussa, kun käsitellään enemmän hiukkasten ratakäyriä ja liikettä.

Luku 4

Liikkeen kuvailu

4.1 Lämmittelyä: Ortonormitettu triadi kolmiulotteisessa euklidisessa avarudessa

Tässä kappaleessa käsitellään liikettä klassisen mekaniikan mukaan. Ollaan siis kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Myöhemmin vastaava liikkeen kuvailu suoritetaan avaruusajassa, joten tämä kappale toimii johdantona tulevalle.

Klassisessa mekaniikassahan (mitattavana) perussuureena on pituus. Geometrisena perusoperaationa, niin nyt kuin myöhemminkin, on sisätulo – kolmiulotteisen euklidisen avaruuden tapauksessa pistetulo ($\vec{a} \cdot \vec{b}$).

Ajatellaan avaruuteen hiukkasen ratakäyrä. Olkoon l ratakäyrän kaaren pituus niin, että $l \geq 0$ (ks. Kuva 4.1). Merkitään ratakäyrän yksikkötangenttivektoria (kullakin l:n arvolla) $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)$. Tälle siis $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l) \cdot \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l) = |\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)|^2 = 1$ kaikilla l.

Derivoimalla edellistä relaatiota (tai ominaisuutta) puolittain l:n suhteen saadaan

$$2\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l) \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)}{\mathrm{d}l} = 0.$$

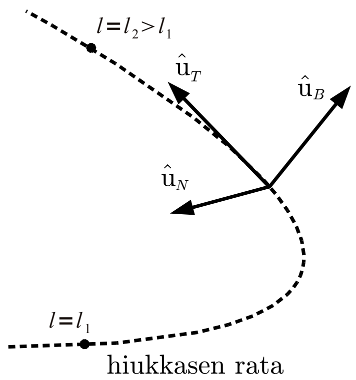
Toisin sanoen, koska $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)}{\mathrm{d}l}$ ei välttämättä ole nollavektori, on se kohtisuorassa $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)$:ää vastaan. Niinpä koska $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)$ on ratakäyrän tangenttivektori, on sen derivaattavektori verrannollinen yksikkönormaalivektoriin, ns. *päänormaalivektoriin* $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}}(l)$. Otetaan verrannollisuuskertoimeksi

$$\mathrm{k} = \mathrm{k}(l) \left(= \left| \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)}{\mathrm{d}l} \right| \right) \geq 0,$$

siis

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}(l)}{\mathrm{d}l} = \mathrm{k}(l)\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}}(l). \tag{4.1}$$

Myös päänormaalivektorille pätee $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}}(l) \cdot \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}}(l) = 1$.



Kuva 4.1: Ortonormitettu triadi hiukkasen ratakäyrällä

Koska myös päänormaalivektorille pätee $\hat{u}_N(l)\cdot\hat{u}_N(l)=1$, niin derivointi l:n suhteen antaa, kuten edellä

$$\hat{u}_N(l)\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{u}_N(l)}{\mathrm{d}l}=0$$

ja siten myös $\hat{u}_N(l)$:n derivaattavektori on kohtisuorassa itse $\hat{u}_N(l)$:ää vastaan. Asetetaan

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_N(l)}{\mathrm{d}l}=a(l)\hat{u}_T(l)+b(l)\hat{u}_B(l), \tag{4.2}$$

missä $\hat{u}_B=\hat{u}_T\times\hat{u}_N$ on ratakäyrän *binormaalivektori*. Se on siis kohtisuorassa sekä $\hat{u}_T(l)$:a että $\hat{u}_N(l)$:a vastaan. Lisäksi $\hat{u}_B(l)\cdot\hat{u}_B(l)=1$ ja siten, vastaavin perustein kuin aiemminkin, $\hat{u}_B(l)$:n derivaatta on kohtisuorassa itse vektoria vastaan. Asetetaan nyt

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_B(l)}{\mathrm{d}l}=\alpha(l)\hat{u}_T(l)+\beta(l)\hat{u}_N(l). \tag{4.3}$$

Tähän mennessä on siis liitetty hiukkasen ratakäyrään kolme toisiaan vastaan kohtisuoraa vektoria. Käyttäen hyväksi vektoreiden kohtisuoruutta ja niiden derivaatoille asetettuja ehtoja (4.1),(4.2) ja (4.3) saadaan näille (ks. liite)

$$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_T}{\mathrm{d}l} & = & k\hat{u}_N\\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_N}{\mathrm{d}l} & = & -k\hat{u}_T+\tau\hat{u}_B\\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_B}{\mathrm{d}l} & = & -\tau\hat{u}_N,\end{array}\right. \tag{4.4}$$

missä $\tau=\tau(l)=b(l)=-\beta(l)$ on ratakäyrän 2. kaarevuus, *kiertyneisyys* eli torsio (1. kaarevuus eli *mutkaisuus* on $k(l)$). 1. kaarevuus, eli $k(l)$, kuvaa käyrän poikkeamaa suorasta ja $\tau(l)$ poikkeamaa $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}$:n ja $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$ määräämästä tasosta. Siis jos $\tau(l) = 0$ kaikilla l, pysyy liike (2-ulotteisessa) tasossa.

Nyt hiukkasta kuvaa kullakin l:n arvolla triadi $\{\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l), \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l), \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}(l)\}$ ja sen ratakäyrää duaali $\{k(l), \tau(l)\}$. Täten triadiyhtälöissä (4.4) on kaikki tarvittava hiukkasen liikkeen kuvailuun.

Esimerkki 1. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $k(l) =$ vakio $\neq 0$ ja $\tau(l) \equiv 0$. Tällöin yhtälöt (4.4) ovat

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} &= k\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l} &= -k\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}}{\mathrm{d}l} &= 0 \quad \text{eli} \quad \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}(l) = \text{ vakio.} \end{cases}$$

Ratkaisu saadaan sijoittamalla ylemmästä yhtälöstä $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$ keskimmäiseen ja ratkaisemalla näin syntyvä toisen asteen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l}\right) = -k^2\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T},$$

Käyttämällä hyväksi vektoreiden $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l)$ ja $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l)$ ortonormaaliutta ja ottamalla käyttöön sopivat, keskenään ortogonaaliset, (vakio)yksikkövektorit $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ja $\hat{e}_3$, voidaan ratkaisu kirjoittaa muodossa[1]

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l) &= -\sin(kl)\hat{e}_1 + \cos(kl)\hat{e}_2 \\ \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l) &= -\cos(kl)\hat{e}_1 - \sin(kl)\hat{e}_2 \\ \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}(l) &= \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l) \times \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l) = \hat{e}_3 \end{cases}$$

Ratakäyrän $\vec{x} = \vec{x}(l)$ yksikkötangenttivektori on

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(l)}{\mathrm{d}l},$$

joten näillä valinnoilla ratakäyrä on

$$\vec{x}(l) = \frac{1}{k}\cos(kl)\hat{e}_1 + \frac{1}{k}\sin(kl)\hat{e}_2 + \vec{x}_0, \tag{4.5}$$

toisin sanoen $\frac{1}{k}$-säteinen ympyrä. $\vec{x}_0$ on vakiovektori, joka siirtää ympyrän haluttuun paikkaan, kun origo on kiinnitetty.

[1] Kullekin komponentille ($i = 1, 2$ tai 3) $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}i}(l) = (A_i \sin(kl) + B_i \cos(kl))\hat{e}_i$, missä A_i ja B_i ovat vakioita.

Esimerkki 2. Otetaan nyt molemmat kaarevuudet nollastapoikkeaviksi vakioiksi. Toisin sanoen $k(l) = \text{vakio} \neq 0$ ja $\tau(l) = \text{vakio} \neq 0$. Ratkaistavana on tällöin yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}l} & = & k\hat{u}_{\mathrm{N}} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}l} & = & -k\hat{u}_{\mathrm{T}} + \tau\hat{u}_{\mathrm{B}} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}l} & = & -\tau\hat{u}_{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

Tämän kanssa yhtäpitävä (derivoidaan ensimmäistä yhtälöä kaksi kertaa ja toista kerran l:n suhteen) yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^3\hat{u}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}l^3} & = & k\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}l^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}l^2} & = & -k\frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}l} + \tau\frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}l} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}l} & = & -\tau\hat{u}_{\mathrm{N}}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nyt saadaan $\hat{u}_{\mathrm{T}}$:lle yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^3\hat{u}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}l^3} + \Omega\frac{\mathrm{d}\hat{u}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}l} = 0,$$

missä $\Omega^2 = k^2 + \tau^2$. Yhtälön ratkaisu (liitteessä) voidaan, sopivilla valinnoilla kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} \hat{u}_{\mathrm{T}} & = & \frac{k}{\Omega}\cos(\Omega l)\hat{e}_1 - \frac{k}{\Omega}\sin(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{\tau}{\Omega}\hat{e}_3 \\ \hat{u}_{\mathrm{N}} & = & -\sin(\Omega l)\hat{e}_1 - \cos(\Omega l)\hat{e}_2 \\ \hat{u}_{\mathrm{B}} & = & -\frac{\tau}{\Omega}\cos(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{\tau}{\Omega}\sin(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{k}{\Omega}\hat{e}_3, \end{cases}$$

mistä ratakäyrän $\vec{x}(l)$ yhtälöksi yksikkötangenttivektoria $\hat{u}_{\mathrm{T}}$ integroimalla saadaan

$$\vec{x}(l) = \frac{k}{\Omega^2}\sin(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{k}{\Omega^2}\cos(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{\tau}{\Omega}l\hat{e}_3 + \vec{x}_0,$$

toisin sanoen ympyräruuviviiva, jonka paikan avaruudessa määrää vakiovektori $\vec{x}_0$.

Tämän kappaleen käsittely tapahtui siis kolmiulotteisessa avaruudessa. Kuitenkin, kuten tunnettua, fysikaalinen maailmankaikkeus on neliulotteinen, joten tarvitaan yksi yksikkövektori ja yksi käyrän kaarevuutta kuvaava muuttuja lisää, jotta saadaan vastaava muotoilu liikkeelle avaruusajassa.

4.2 Ortonormitettu tetradi neliulotteisessa avaruusajassa

Tarkastellaan nyt hiukkasen ratakäyrää (maailmanviivaa) neliulotteisessa avaruusajassa. Otetaan neljä keskenään ortogonaalista yksikkövektoria $\mu^\alpha_{(1)}, \mu^\alpha_{(2)}$,

$\mu^{\alpha}_{(3)}$ ja $\mu^{\alpha}_{(4)}$, missä α on kontravariantin vektorin indeksi ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) ja suluissa oleva numero on tetradin (nelikon) vektorin indeksi. Siis

$$\mu^{\alpha}_{(i)} = (\mu^{1}_{(i)}, \mu^{2}_{(i)}, \mu^{3}_{(i)}, \mu^{4}_{(i)}),$$

missä i = 1,2,3 tai 4. Tarkastellaan ensiksi hieman näihin liittyviä laskusääntöjä.

Kuten tavallista, saadaan $\mu^{\alpha}_{(i)}$:n kovariantti vastine metristä tensoria ($g_{\alpha\beta}$) hyväksi käyttäen; $\mu_{(i)\alpha} = g_{\alpha\beta}\mu^{\beta}_{(i)}$.

Asetetaan vektoreille ortonormitusehto

$$\mu^{\alpha}_{(i)}\mu_{(j)\alpha} = g_{\alpha\beta}\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{\beta}_{(j)} = \eta_{(ij)}, \tag{4.7}$$

missä $\eta_{(ij)} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$ on laakean avaruusajan metrinen tensori.

Metrisen tensorin $g_{\alpha\beta}$ (tai $g^{\alpha\beta}$) avulla voidaan nostaa ja laskea vektoreiden (ja tensoreiden) indeksejä ja yhdistää näin toisiinsa kovariantit ja kontravariantit vektorit $\mu^{\alpha}_{(i)}$ ja $\mu_{(i)\alpha}$. Otetaan käyttöön vastaavanlaiset merkinnät tetradin indekseille

$$\begin{array}{rcl} \mu^{(i)\alpha} & := & \eta^{(ij)}\mu^{\alpha}_{(j)} \quad \text{ja} \\ \mu^{(i)}_{\alpha} & := & \eta^{(ij)}\mu_{(j)\alpha}, \end{array} \tag{4.8}$$

missä $\eta^{(ij)}$ on laakean avaruusajan metrisen tensorin kontravariantti muoto (siis niin, että $\eta^{(ij)}\eta_{(jk)} = \delta^{i}_{k}$). Tällöin vastaavasti[2]

$$\begin{array}{rcl} \mu^{\alpha}_{(i)} & = & \eta_{(ij)}\mu^{(j)\alpha} \quad \text{ja} \\ \mu_{(i)\alpha} & = & \eta_{(ij)}\mu^{(j)}_{\alpha}. \end{array} \tag{4.9}$$

Toisin sanoen laakean avaruusajan metrisellä tensorilla nostetaan ja lasketaan nelikon vektorin indeksiä, aivan kuten, kussakin pisteessä, avaruusajan yleisellä metrisellä tensorilla nostetaan ja lasketaan vektorien kovariantteja ja kontravariantteja indeksejä.

Kertomalla ortonormitusehtoa ($\mu^{\alpha}_{(i)}\mu_{(k)\alpha} = \eta_{(ik)}$ (4.7)) puolittain $\eta^{(jk)}$:lla saadaan

$$\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{(j)}_{\alpha} = \delta^{j}_{i}. \tag{4.10}$$

Ylläolevan kertominen puolittain $\mu^{(i)}_{\beta}$:lla antaa puolestaan[3]

$$\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{(i)}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{4.11}$$

[2]

$$\begin{array}{rcl} \eta_{(ij)}\mu^{(j)\alpha} & = \eta_{(ij)}\eta^{(jk)}\mu^{\alpha}_{(k)} = \delta^{k}_{i}\mu^{\alpha}_{(k)} = & \mu^{\alpha}_{(i)} \text{ ja} \\ \eta_{(ij)}\mu^{(j)}_{\alpha} & = \eta_{(ij)}\eta^{(jk)}\mu_{(k)\alpha} = \delta^{k}_{i}\mu_{(k)\alpha} = & \mu_{(i)\alpha} \end{array}$$

[3]

$$\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{(i)}_{\beta}\mu^{(j)}_{\alpha} = \delta^{i}_{j}\mu^{(i)}_{\beta} = \mu^{(j)}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\mu^{(j)}_{\alpha}$$

4.2.1 Lorentzin muunnos

Liitetään samaan avaruusaikapisteeseen kaksi ortonormitettua tetradia, $\mu^{\alpha}_{(i)}$ ja $\nu^{\alpha}_{(i)}$.

Näiden vektoreiden sisätulo antaa (invariantin) nk. Lorentzin matriisin $\mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}$, siis

$$\mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)} = \mu^{(i)}_{\alpha}\nu^{\alpha}_{(j)}. \tag{4.12}$$

Lorentzin matriisin varsinainen hyöty tulee ilmi, kun tehdään seuraava havainto: Kerrotaan em. määritelmää puolittain ensin $\nu^{(j)}_{\alpha}$:lla ja sitten $\mu^{\alpha}_{(i)}$:llä. Saadaan kaksi relaatiota (liitteessä)

$$\begin{aligned} \mu^{(i)}_{\alpha} &= \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\nu^{(j)}_{\alpha} \\ \nu^{\alpha}_{(j)} &= \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\mu^{\alpha}_{(i)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

missä (i) ja (j) ovat Lorentz- eli tetradi-indeksit ja α on avaruusaika(tensori-) indeksi.

Siis: kertominen Lorenzin matriisilla muuntaa toisen tetradin vektorit toisen tetradin vektoreiksi. Toisaalta voidaan ajatella $\mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}$:tä muunnosoperaattorina, jolla operoimalla saadaan ns. Lorentz-muunnos kahden tetradin välillä[4].

Lisäksi (ks. liite)

$$\mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\eta_{(il)}\mathrm{L}^{(l)}{}_{(k)} = \eta_{(jk)},$$

matriisiyhtälönä

$$\mathrm{L}^{T}\eta\mathrm{L} = \eta$$

4.2.2 Vielä vektoreista

Tähän asti on tarkasteltu avaruusaikaan asetettuja yksikkövektoreita, mutta todetaan vielä, että mikä tahansa vektori tai tensori voidaan ilmaista $\mu^{\alpha}_{(i)}$:tä hyväksi käyttäen. Tämä perustuu tietoon, että neljä keskenään ortonormaalia vektoria asettavat kannan neliulotteiseen avaruuteen.

$$\begin{aligned} V^{\alpha} &= V^{(i)}\mu^{\alpha}_{(i)} \\ V_{\alpha} &= V_{(i)}\mu^{(i)}_{\alpha} \\ T^{\alpha\beta} &= T^{(ij)}\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{\beta}_{(j)} \\ T_{\alpha\beta} &= T_{(ij)}\mu^{(i)}_{\alpha}\mu^{(j)}_{\beta} \\ T^{\alpha}{}_{\beta} &= T^{(i)}{}_{(j)}\mu^{\alpha}_{(i)}\mu^{(j)}_{\beta} \\ & \text{jne...} \end{aligned} \tag{4.14}$$

[4] Erityisesti, jos kaikilla i pätee $\mu^{\alpha}_{(i)} = \nu^{\alpha}_{(i)}$, niin $\mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)} = \mu^{(i)}_{\alpha}\nu^{\alpha}_{(j)} = \delta^{i}_{j} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$; matriisiyhtälönä $\mathrm{L} = 1$

Kertomalla näistä ylintä $\mu_\alpha^{(i)}$:lla saadaan[5]

$$V^{(i)} = V^\alpha \mu_\alpha^{(i)}.$$

Vastaavasti saadaan muutkin käänteisrelaatiot ylläoleville:

$$\begin{aligned} V_{(i)} &= V_\alpha \mu^\alpha_{(i)} \\ T^{(ij)} &= T^{\alpha\beta}\mu_\alpha^{(i)}\mu_\beta^{(j)} \\ T_{(ij)} &= T_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(i)}\mu^\beta_{(j)} \\ T^{(i)}{}_{(j)} &= T^\alpha{}_\beta \mu_\alpha^{(i)}\mu^\beta_{(j)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Tähän asti on esitelty neljän yksikkövektorin muodostama nelikko, tetradi ja hieman siihen liittyviä ominaisuuksia. Seuraavaksi valitaan yksi vektori ajanluonteiseksi (loput paikanluonteisiksi) ja keskitytään näiden keskinäisiin suhteisiin.

4.2.3 Tetradiyhtälöt

Aiemmassa kappaleessa kuvailtiin hiukkasen ratakäyrä kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa käyttämällä kolmea keskenään ortogonaalista yksikkövektoria ja kahta kaarevuutta. Nyt tehdään sama neliulotteisessa avaruusajassa. Suurin ero tulee siinä, että neliulotteisessa avaruudessa tarvitaan neljä keskenään ortogonaalista vektoria ja kolme eri käyrään liittyvää kaarevuutta.

Liitetään avaruusajan käyrän ($x^\alpha = x^\alpha(u)$) kuhunkin pisteeseen ortonormitettu tetradi $\left\{\mu^\alpha_{(i)}\right\}_{i=1}^4$. Valitaan yksikkövektorit niin, että $\mu^\alpha_{(1)}$, $\mu^\alpha_{(2)}$ ja $\mu^\alpha_{(3)}$ ovat paikanluonteisia, siis

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(i)}\mu^\beta_{(i)} = 1 \quad \text{kaikille } i = 1, 2, 3$$

ja yksikkövektori $\mu^\alpha_{(4)}$ on ajanluonteinen, siis

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)} = -1.$$

Aiemmin kolmelle keskenään ortogonaaliselle yksikkövektorille johdettiin kolmen yhtälön ryhmä. Nyt vastaava yhtälöryhmä johdetaan tetradin vektoreille. Juoni on sama; otetaan tulo, päätellään tulos, tehdään sopiva valinta ja pidetään huolta, että ortogonaalisuus toteutuu.

Aloitetaan $\mu^\alpha_{(1)}$:stä. Ko. vektori valittiin ajanluonteiseksi, joten ottamalla absoluuttinen derivaatta (viivaparametrin u suhteen) puolittain normitusehdosta $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\beta_{(1)} = 1$ saadaan

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\frac{\delta\mu^\beta_{(1)}}{\delta u} = 0,$$

[5] $V^\alpha\mu_\alpha^{(i)} = V^{(j)}\mu^\alpha_{(j)}\mu_\alpha^{(i)} = V^{(j)}\delta^i_j = V^{(i)}$

toisin sanoen $\mu^\alpha_{(1)}$ ja $\frac{\delta\mu^\alpha_{(1)}}{\delta u}$ ovat ortogonaaliset. Valitaan

$$\frac{\delta\mu^\alpha_{(1)}}{\delta u} = A\mu^\alpha_{(2)}, \tag{4.16}$$

missä A on vakiokerroin, 1. kaarevuus ($A \neq 0$ yleensä). Tällöin siis $\mu^\alpha_{(1)}$ ja $\mu^\alpha_{(2)}$ ovat ortogonaaliset. Otetaan seuraavaksi absoluuttinen derivaatta tästä ortogonaalisuusehdosta ($g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\alpha_{(2)} = 0$). Saadaan[6]

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\frac{\delta\mu^\beta_{(2)}}{\delta u} = -A$$

Valitsemalla nyt

$$\frac{\delta\mu^\alpha_{(2)}}{\delta u} = -A\mu^\alpha_{(1)} + B\mu^\alpha_{(3)}, \tag{4.17}$$

missä myös B on yleensä nollasta poikkeava vakio, 2. kaarevuus, sijoittamalla edelliseen saadaan

$$-A = -Ag_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\alpha_{(1)} + Bg_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\alpha_{(3)} = -A + Bg_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\alpha_{(3)}$$

toisin sanoen $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\alpha_{(3)} = 0$ eli $\mu^\alpha_{(1)}$:n ja $\mu^\alpha_{(3)}$:n ortogonaalisuus toteutuu. Myös $\mu^\alpha_{(2)}$ ja $\mu^\alpha_{(3)}$ ovat ortogonaaliset: Kertomalla yhtälöä (4.17) puolittain $\mu^\alpha_{(2)}$:lla saadaan toiselle puolelle $\mu^\alpha_{(2)}$:n ja sen derivaatan tulo, joka on nolla (sillä $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\beta_{(2)} = 1$, mistä puolittain derivoimalla). Toiselle puolelle tulee $-A$ kertaa $\mu^\alpha_{(1)}$:n ja $\mu^\alpha_{(2)}$:n tulo, joka antaa nollan ja B kertaa $\mu^\alpha_{(2)}$:n ja $\mu^\alpha_{(3)}$:n tulo jonka on siis myös oltava nolla – myös $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\alpha_{(3)} = 0$ toteutuu.

Jatketaan. $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\alpha_{(3)} = 0$ joten puolittain absoluuttisen derivaatan ottamalla nähdään[7] , että

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\frac{\delta\mu^\beta_{(3)}}{\delta u} = -B$$

Taas tehdään valinta: Olkoon

$$\frac{\delta\mu^\alpha_{(3)}}{\delta u} = -B\mu^\alpha_{(2)} + C\mu^\alpha_{(4)}, \tag{4.18}$$

(3. kaarevuus $C \neq 0$ yleensä), jolloin yhdistämällä kaksi edellistä tulosta nähdään, että ortogonaalisuus $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\alpha_{(4)} = 0$ toteutuu. Aiemmin kerrottiin $\mu^\alpha_{(2)}$:lla yhtälöä (4.17) ja nähtiin, että $\mu^\alpha_{(2)}$ ja $\mu^\alpha_{(3)}$ ovat ortogonaaliset. Nyt

---

[6] $0 = \frac{\delta}{\delta u}\left(g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\beta_{(2)}\right) = g_{\alpha\beta}\frac{\delta\mu^\alpha_{(1)}}{\delta u}\mu^\beta_{(2)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\frac{\delta\mu^\beta_{(2)}}{\delta u} = Ag_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\beta_{(2)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\frac{\delta\mu^\beta_{(2)}}{\delta u}$

[7] $0 = g_{\alpha\beta}\frac{\delta\mu^\alpha_{(2)}}{\delta u}\mu^\beta_{(3)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\frac{\delta\mu^\beta_{(3)}}{\delta u} = g_{\alpha\beta}(-A\mu^\beta_{(1)} + B\mu^\beta_{(3)})\mu^\beta_{(3)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\frac{\delta\mu^\beta_{(3)}}{\delta u} = 0 + B + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\frac{\delta\mu^\beta_{(3)}}{\delta u}$

kerrotaan $\mu^\alpha_{(3)}$:lla yhtälöä (4.18) ja täysin vastaavalla päättelyllä nähdään, että ko. valinnalla ortogonaalisuus $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\mu^\beta_{(4)} = 0$ toteutuu.

On kasassa kolme differentiaaliyhtälöä ja vielä tarvitaan yksi $\frac{\delta\mu^\alpha_{(4)}}{\delta u}$:lle. Lähdetään liikkeelle ottamalla absoluuttinen derivaatta ortogonaalisuusehdosta
$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\mu^\beta_{(4)} = 0$. Saadaan[8]

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\frac{\delta\mu^\beta_{(4)}}{\delta u} = C.$$

Vakioita on jo tarpeeksi, joten valitaan

$$\frac{\delta\mu^\alpha_{(4)}}{\delta u} = C\mu^\alpha_{(3)} \tag{4.19}$$

joka sijoitettuna edelliseen yhtälöön antaa identtisyyden $(C = C)$.

Nyt on enää toteamatta $\mu^\alpha_{(4)}$:n ortogonaalisuus $\mu^\alpha_{(1)}$:n kanssa. Otetaan absoluuttinen derivaatta ortogonaalisuusehdosta $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\beta_{(4)} = 0$, jolloin nähdään[9] että myös $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\beta_{(4)} = 0$.

Tehdyillä valinnoilla siis kaikki toimii niin kuin pitääkin, joten voidaan koota tulokset (4.16), (4.17), (4.18) ja (4.19) etsityksi yhtälöryhmäksi, tetradiyhtälöiksi:

$$\begin{cases} \frac{\delta\mu^\alpha_{(1)}}{\delta u} &= A\mu^\alpha_{(2)} \\ \frac{\delta\mu^\alpha_{(2)}}{\delta u} &= -A\mu^\alpha_{(1)} + B\mu^\alpha_{(3)} \\ \frac{\delta\mu^\alpha_{(3)}}{\delta u} &= -B\mu^\alpha_{(2)} + C\mu^\alpha_{(4)} \\ \frac{\delta\mu^\alpha_{(4)}}{\delta u} &= C\mu^\alpha_{(3)} \end{cases} \tag{4.20}$$

tai sama kirjoitettuna matriisimuotoon:

$$\frac{\delta}{\delta u}\begin{pmatrix} \mu^\alpha_{(1)} \\ \mu^\alpha_{(2)} \\ \mu^\alpha_{(3)} \\ \mu^\alpha_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ -A & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & C \\ 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu^\alpha_{(1)} \\ \mu^\alpha_{(2)} \\ \mu^\alpha_{(3)} \\ \mu^\alpha_{(4)} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Huomautus. Kaarevuusparametrit A, B ja C kuvaavat nimenomaan käyrän kaarevuutta, eli poikkeamaa geodeesista. Itse avaruusajan kaarevuutta kuvaa Riemannin kaarevuustensori $\mathrm{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$. Geodeesilla $A = B = C = 0$.

[8] $0 = g_{\alpha\beta}\frac{\delta\mu^\alpha_{(3)}}{\delta u}\mu^\beta_{(4)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\frac{\delta\mu^\beta_{(4)}}{\delta u} = g_{\alpha\beta}(-B\mu^\alpha_{(2)} + C\mu^\alpha_{(4)})\mu^\beta_{(4)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\frac{\delta\mu^\beta_{(4)}}{\delta u} = 0 - C + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(3)}\frac{\delta\mu^\beta_{(4)}}{\delta u}$

[9] $0 = \frac{\delta}{\delta u}\left(g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\beta_{(4)}\right) = g_{\alpha\beta}\frac{\delta\mu^\alpha_{(2)}}{\delta u}\mu^\beta_{(4)} + g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\frac{\delta\mu^\beta_{(4)}}{\delta u} = g_{\alpha\beta}\left(-A\mu^\alpha_{(1)} + B\mu^\alpha_{(3)}\right)\mu^\beta_{(4)} + Cg_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(2)}\mu^\beta_{(3)} = -Ag_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(1)}\mu^\beta_{(4)}$

Esimerkkejä. Ratkaistaan tetradiyhtälöt esimerkin vuoksi muutamassa erikoistapauksessa. Ensinnäkin kolmiulotteisen euklidisen avaruuden tapauksessa voidaan yhtälöt kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu^a_{(1)}}{\mathrm{d}u} &= A\mu^a_{(2)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^a_{(2)}}{\mathrm{d}u} &= -A\mu^a_{(1)} + B\mu^a_{(3)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^a_{(3)}}{\mathrm{d}u} &= -B\mu^a_{(2)} \end{cases}$$

$(a = 1, 2, 3)$. Tämä ryhmä on ratkaistu jo aiemmin, kun $A = \text{vakio} \neq 0$ & $B = 0$ ja kun $A = \text{vakio} \neq 0$ & $B = \text{vakio} \neq 0$. Ei siis siitä sen enempää, mutta ratkaistaan yhtälöt nyt vastaavissa tapauksissa neliulotteisessa laakeassa avaruusajassa. Avaruuden laakeushan tarkoittaa sitä, että absoluuttisesta derivaatasta jää jäljelle tavallinen derivaatta ja yhtälöt ovat näin

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(1)}}{\mathrm{d}u} &= A\mu^\alpha_{(2)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} &= -A\mu^\alpha_{(1)} + B\mu^a_{(3)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u} &= -B\mu^\alpha_{(2)} + C\mu^\alpha_{(4)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} &= C\mu^\alpha_{(3)} \end{cases}$$

Asetetaan ensin muut kaarevuudet nollaksi $(A = B = 0)$ ja pidetään kolmas kaarevuus C nollasta poikkeavana vakiona. Tällöin

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(1)}}{\mathrm{d}u} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u} &= C\mu^\alpha_{(4)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} &= C\mu^\alpha_{(3)} \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan heti, että $\mu^\alpha_{(1)}(u) = \text{vakio}$ ja $\mu^\alpha_{(2)}(u) = \text{vakio}$. Kaksi viimeistä yhtälöä yhdistämällä puolestaan saadaan

$$\frac{\mathrm{d}^2\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u^2} - C^2\mu^\alpha_{(4)} = 0.$$

Kuten kolmiulotteisessakin tapauksessa, otetaan käyttöön sopivat vektorit m^α ja n^α niin, että yo. yhtälön ratkaisu näiden avulla on

$$\mu^\alpha_{(4)}(u) = \sinh(Cu)\mathrm{m}^\alpha + \cosh(Cu)\mathrm{n}^\alpha.$$

Vektoreista m^α ja n^α ei vielä ole sen enempää tietoa, mutta käyttämällä tietoa, että $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)} = -1$ saadaan

$$\begin{aligned} -1 = g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)} &= g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{m}^\alpha\sinh^2(Cu) + g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{n}^\beta\cosh^2(Cu) \\ &\quad +2g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{n}^\beta\sinh(Cu)\cosh(Cu), \end{aligned}$$

siis (koska $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha \mathrm{m}^\beta &= 1 \\ g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha \mathrm{n}^\beta &= -1 \\ g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha \mathrm{n}^\beta &= 0, \end{aligned}$$

eli m^α on paikanluonteinen yksikkövektori, n^α ajanluonteinen yksikkövektori ja nämä kaksi ovat tietenkin keskenään ortogonaaliset.

Nyt tehdään valinta: Olkoon $\mu^\alpha_{(4)}$ avaruusajan ajanluonteisen käyrän tangenttivektori. Koska $\mathrm{d}s^2 = -g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$, niin $g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = -1$ (vrt. $-1 = g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)}$). Otetaan siis käyräparametriksi kellonlukemia luonnehtiva s, jolloin $\mu^\alpha_{(4)} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$. Tällöin ratkaisu yhtälöön on

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = \sinh(Cs)\mathrm{m}^\alpha + \cosh(Cs)\mathrm{n}^\alpha,$$

ja ratakäyrä $x^\alpha(s)$ on näin ollen

$$x^\alpha(s) = \frac{1}{C}\sinh(Cs)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{C}\cosh(Cs)\mathrm{n}^\alpha + p^\alpha,$$

eli ajanluonteinen hyperbeli, jonka paikan määrää vakiovektori p^α (vrt. kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa ensimmäisen kaarevuuden pitäminen vakiona ja toisen kaarevuuden asettaminen nollaksi antoi ratakäyräksi ympyrän s.25).

Pysytään Minkowskin avaruudessa, mutta laitetaan nyt kaksi kaarevuutta nollasta poikkeaviksi vakioiksi (siis: $A = 0$, $B =$ vakio $\neq 0$ ja $C =$ vakio $\neq 0$). Tetradiyhtälöt ovat tällöin

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(1)}}{\mathrm{d}u} = 0, \qquad (\text{siis } \mu^\alpha_{(1)} \text{ on vakio}) \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} = B\mu^\alpha_{(3)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u} = -B\mu^\alpha_{(2)} + C\mu^\alpha_{(4)} \\ \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = C\mu^\alpha_{(3)} \qquad (0) \end{cases}$$

Vastaavan yhtälöryhmän ratkaisu kolmiulotteisessa euklidisessa tapauksessa oli ympyräruuviviiva. Lähdetään ratkaisemaan yhtälöitä kuten silloinkin, derivoimalla kolmatta yhtälöä kerran ja neljättä kaksi kertaa (u:n suhteen). Saadaan

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} = B\mu^\alpha_{(3)} & (1) \\ \frac{\mathrm{d}^2\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u^2} = -B\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} + C\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} & (2) \\ \frac{\mathrm{d}^3\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u^3} = C\frac{\mathrm{d}^2\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u^2} & (3) \end{cases}$$

Näistä halutaan ratkaista tangenttivektori $\mu^\alpha_{(4)}$, jolle yhtälöistä (0) - (4) yhdistämällä[10] saadaan nyt

$$\frac{\mathrm{d}^3\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u^3} + \Omega^2 \frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = 0,$$

missä $\Omega^2 = B^2 - C^2$. Tämä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $\mu^\alpha_{(4)}$:n derivaatalle u:n suhteen ja sen ratkaisu riippuu Ω^2:n arvosta. Sopivia (vakio)vektoreita m^α ja n^α käyttäen joko

1. $\Omega^2 < 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = \sin(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \cos(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha$,
2. $\Omega^2 > 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = \sinh(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \cosh(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha$ tai
3. $\Omega^2 = 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = u\mathrm{m}^\alpha + \mathrm{n}^\alpha$.

Tällöin

1. $\mu^\alpha_{(4)} = -\frac{1}{\Omega}\cos(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$,
2. $\mu^\alpha_{(4)} = \frac{1}{\Omega}\cosh(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega}\sinh(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$ tai
3. $\mu^\alpha_{(4)} = \frac{1}{2}u^2\mathrm{m}^\alpha + u\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$,

missä myös p^α on vakiovektori. Selvästikään tapauksessa 3. $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)} \not\equiv -1$, joten tämä vaihtoehto hylätään ilman sen kummempia perusteluja.

Tapauksessa 1. kun, $u = s$, ratakäyräksi tulee ajanluonteinen ympyräruuviviiva:

$$x^\alpha(s) = -\frac{1}{\Omega^2}\sin(\Omega s)\mathrm{m}^\alpha - \frac{1}{\Omega^2}\cos(\Omega s)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha s + \mathrm{q}^\alpha,$$

missä myös q^α on vakiovektori, joka määrää käyrän paikan.

Tapauksessa 2. kun, $u = s$, ratakäyräksi tulee ajanluonteinen, hyperbolinen ruuviviiva:

$$x^\alpha(s) = \frac{1}{\Omega^2}\sinh(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega^2}\cosh(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha + s\mathrm{p}^\alpha + \mathrm{q}^\alpha$$

(myös q^α on vakiovektori kuten ennenkin). Toisen ja kolmannen kaarevuuden keskinäinen suuruusjärjestys siis vaikuttaa käyrän tyyppiin.

---

[10]

$$\frac{\mathrm{d}^3\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u^3} \overset{(3)}{=} C\frac{\mathrm{d}^2\mu^\alpha_{(3)}}{\mathrm{d}u^2} \overset{(2)}{=} -BC\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(2)}}{\mathrm{d}u} + C^2\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} \overset{(1)}{=} -B^2C\mu^\alpha_{(3)} + C^2\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} \overset{(0)}{=} (-B^2+C^2)\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u}$$

4.2.4 Tetradin yhdensuuntaissiirto pitkin käyrää $x^\alpha = x^\alpha(u)$

Kappaleessa 3.1.2 otettiin käyttöön absoluuttinen derivaatta $\frac{\delta}{\delta u}$. Lisäksi määriteltiin *yhdensuuntaissiirto* niin, että jos esimerkiksi vektorin absoluuttinen derivointi käyräparametrin suhteen antaa nollan ($\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = 0$), sanotaan, että on suoritettu vektorin yhdensuuntaissiirto pitkin ko. käyrää.

Todetaan, että ortonormitettu tetradi säilyy ortonormitettuna tetradina yhdensuuntaissiirrossa pitkin käyrää $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Siis, kun $\frac{\delta \mu^\alpha_{(i)}}{\delta u} = 0$, kahden yksikkövektorin tulon $\mu^\alpha_{(i)}\mu^{(j)}_\alpha = \delta^j_i$ absoluuttinen derivointi käyräparametrin u suhteen antaa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\mu^\alpha_{(i)}\mu^{(j)}_\alpha\right) = 0 \quad \text{kaikilla } i, j = 1, 2, 3, 4,\text{[11]}$$

joten tetradin vektoreiden tulot säilyvät yhdensuuntaissiirrossa – ortonormitettu tetradi säilyy ortonormitettuna tetradina. Huomautettakoon vielä, että tämä ei tarkoita vektoreiden pysymistä vakiona, ne saattavat hyvinkin pyöriä johonkin suuntaan. Tästä ei suoraan nähdä, kuinka kukin vektori muuttuu. Ainoastaan niiden ortonormitus säilyy.

[11] kahden vektorin tulo on invariantti, joten absoluuttinen ja tavallinen derivaatta ovat samat

Luku 5

Siirtymä

Nyt siirrytään tutkimaan kahden pisteen välistä yhteyttä.

5.1 Siirtymäolio $\sigma(B|A)$

Otetaan lähtökohdaksi *geodeettinen siirtymäolio* (tai "yhteysolio") kuvaamaan siirtymää pisteestä A pisteeseen B pitkin geodeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$,

$$\sigma(B|A) = (u_B - u_A)I(v), \tag{5.1}$$

missä

$$I(v) = \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \mathrm{d}u$$

on jo aiemmin esiintynyt variaatiointegraali.

Määritelmään (5.1) mukaan otetun vakion $(u_B - u_A)$ merkitys selvenee, kunhan saadaan siirtymäoliolle $\sigma(B|A)$ hieman havainnollisempi esitys.

Miksi sitten siirrytään pitkin geodeesia, eikä esimerkiksi jotakin yleisempää maailmanviivaa? Ainakin tällä valinnalla päästään eteenpäin ja toisaalta minkä tahansa käyrän voi jakaa osiin siten, että jakopisteestä toiseen siirrytään pitkin geodeesia.

Käyttämällä hyväksi aiempaa tulosta (3.12) ($g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = \varepsilon\zeta^2 =$ vakio) saadaan

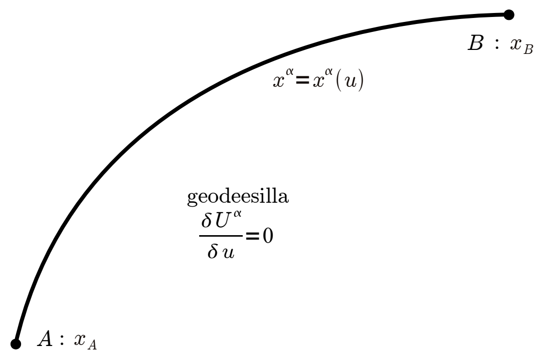
$$I(v) = \varepsilon\zeta^2(u_B - u_A).$$

Ja koska $\mathrm{d}s = \zeta\mathrm{d}u$ (3.13), niin siirryttäessä pitkin geodeesiä (pisteestä A pisteeseen B)

$$\zeta = \frac{\Delta s_{AB}}{\Delta u_{AB}} = \frac{s_B - s_A}{u_B - u_A},$$

missä $\Delta s_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s =$ tapahtumaväli geodeesia pitkin. Vastaavasti $\Delta u_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}u$ pitkin geodeesia. Täten

$$\sigma(B|A) = \varepsilon(\Delta s_{AB})^2. \tag{5.2}$$



Kuva 5.1: Pisteestä A pisteeseen B siirrytään pitkin geodeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Pisteessä A ovat koordinaatit x_A ja pisteessä B koordinaatit x_B

Näin siis siirtymäolio $\sigma(B|A)$ liittyy yksinkertaisella tavalla tapahtumaväliin Δs_{AB}.

Nyt nähdään myös, että ilman alussa mukaan otettua vakiota $(u_B - u_A)$ – määrittelemällä esimerkiksi $\sigma(B|A) = I(v)$ – esitykseen (5.2) olisi jäänyt u-riippuvuus.

Jos siirrytään infinitesimaalisen vähän, toisin sanoen A ja B ovat lähekkäin, $\Delta s_{AB} \approx \mathrm{d}s_{AB}$, missä $\mathrm{d}s_{AB}$ on tuttu siirtymäalkio. Tällöin

$$\sigma(B|A) = \varepsilon \mathrm{d}s_{AB}^2. \tag{5.3}$$

Tuloksen mielenkiinto piilee siinä, että jos nyt otetaan siirtymä pitkin paikanluonteista geodeesiä (ulos valokartiosta) ts. $\varepsilon = +1$, saadaan

$$\sigma(B|A) = \mathrm{d}s_{AB}^2.$$

Näin ollen näyttäisi paikanluonteinen (normaaleille valo- ja materiahiukkasille kielletty) siirtymä olevan luonnollinen lähtökohta suhteellisuusteorialle, sikäli kun $\mathrm{d}s^2$ yleensä on.

Perustulokseksi on siten saatu

$$\sigma(B|A) = \begin{cases} \varepsilon(\Delta s_{AB})^2 & \\ \varepsilon \mathrm{d}s_{AB}^2 & (A \text{ ja } B \text{ lähekkäiset}) \end{cases} \tag{5.4}$$

Nyt voi kysyä, riittääkö yleisen suhteellisuusteorian muotoilun lähtökohdaksi σ $\mathrm{d}s^2$:n sijaan. Ja jos ei riitä, kuinka pitkälle päästäisiin, toisin sanoen mitä voi sanoa yleisestä suhteellisuusteoriasta σ:n avulla?

Taulukko 5.1: Siirtymäfunktion kovariantteja derivaattoja ja niiden käyttäytyminen koordinaattimuunnoksissa

Derivaatta	Muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$	Muunnoksessa $x_B \mapsto x'_B$
σ	invariantti	invariantti
$\sigma_{;\alpha_A} = \sigma_{,\alpha_A}$	kovariantti vektori	invariantti
$\sigma_{;\alpha_B} = \sigma_{,\alpha_B}$	invariantti	kovariantti vektori
$\sigma_{;\alpha_A\beta_A} = \sigma_{,\alpha_A\beta_A} - \left\{ {\gamma_A \atop \alpha_A\,\beta_A} \right\} \sigma_{,\gamma_A}$	2. kertaluvun kovariantti tensori	invariantti
$\sigma_{;\alpha_B\beta_B} = \sigma_{,\alpha_B\beta_B} - \left\{ {\gamma_B \atop \alpha_B\,\beta_B} \right\} \sigma_{,\gamma_B}$	invariantti	2. kertaluvun kovariantti tensori
$\sigma_{;\alpha_A\beta_B} = \sigma_{,\alpha_A\beta_B}$	kovariantti vektori	kovariantti vektori
$\sigma_{;\alpha_B\beta_A} = \sigma_{,\alpha_B\beta_A}$	kovariantti vektori	kovariantti vektori
jne.	jne.	jne.

5.2 Siirtymäfunktio $\sigma(x_B|x_A)$ ja sen kovariantit derivaatat

Liitetään nyt edellisen kappaleen avaruusajan pisteisiin A ja B koordinaatit. Olkoot x_A koordinaatit A:ssä ja x_B vastaavasti B:ssa. Näiden yhteys toisiinsa, sen paremmin kuin muutkaan ominaisuudet (esimerkiksi suorakulmaisuus), eivät ole olennaisia tässä vaiheessa. Olennaista on, että koordinaatistot *voivat* olla erit.

Otetaan myös käyttöön *geodeettinen siirtymäfunktio* $\sigma(x_B|x_A)$. Se on siis kahden pisteen (kahdeksan muuttujan) funktio, joka kuvaa siirtymää pisteestä x_A pisteeseen x_B pitkin geodeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Koska fysikaalisesti on järkevää vaatia, etteivät $\sigma(x_B|x_A)$:n arvot riipu koordinaatiston valinnasta, voidaan heti julistaa, että $\sigma(x_B|x_A)$ on bi-invariantti — invariantti sekä muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$ pisteessä A että muunoksessa $x_B \mapsto x'_B$ pisteessä B.

Paljon muuta ei siirtymäfunktiolta vaadita, eikä siitä näin ollen paljoa tiedetä. Sen kovarianteista derivaatoista sentään osataan sanoa jotain. Taulukkoon 5.1 on lueteltu muutama ensimmäinen. (Perusteluja on liitteessä.)

Otetaan taas tarkasteluun variaatiointegraalin derivaatta parametrin v suhteen (3.9),

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = 2\Big/_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta - 2\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta} \frac{\delta U^\alpha}{\delta u} V^\beta \mathrm{d}u.$$

Nyt siis sijoitus ja integrointi tehdään x_A:stä x_B:hen. Aiemmin variaatio-ongelmaa muodostettaessa asetettiin $V^\alpha(u_A) = V^\alpha(u_B) = 0$. Nyt jätetään tämä tekemättä, mutta sen sijaan siirrytään A:stä B:hen pitkin geodeesia, jolloin $\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0$ ja derivaatan integraaliosa häviää. Tutkitaan siis sijoitusosaa

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = -2g_{\alpha\beta}(x_A)U^\alpha(x_A)V^\beta(x_A) + 2g_{\alpha\beta}(x_B)U^\alpha(x_B)V^\beta(x_B).$$

Toisaalta

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{\partial I(v)}{\partial x_A^\beta}V^\beta(x_A) + \frac{\partial I(v)}{\partial x_B^\beta}V^\beta(x_B),$$

joten

$$\begin{cases} \frac{\partial I(v)}{\partial x_A^\alpha} & = & -2U_{\alpha_A} \\ \frac{\partial I(v)}{\partial x_B^\alpha} & = & 2U_{\alpha_B}. \end{cases}$$

Täten, koska $\sigma = (u_B - u_A)I(v)$, $\Delta s_{AB} = \zeta\Delta u_{AB}$, kun liikutaan geodeesilla (3.13) ja koska $\sigma_{;\alpha} = \sigma_{,\alpha}$,

$$\begin{cases} \sigma_{;\alpha_A} & = & -2(u_B - u_A)U_{\alpha_A} & = & -2\Delta s_{BA}\eta_{\alpha_A} \\ \sigma_{;\alpha_B} & = & 2(u_B - u_A)U_{\alpha_B} & = & +2\Delta s_{BA}\eta_{\alpha_B}, \end{cases} \tag{5.5}$$

missä $\eta_{\alpha_A} = \frac{U_{\alpha A}}{\zeta}$ on yksikkövektori (ks. 3.12).

Mielikuvan saamiseksi saatuja tuloksia voi verrata tavallisen euklidisen tason paikkavektoriin (siirtymän toinen päätepiste on origo) $\vec{r} = |\vec{r}|\hat{r}$, missä $|\vec{r}|$ antaa siirtymän pituuden ja $\hat{r}$ (yksikkövektori) suunnan. Nyt siirtymän pituutta vastaa tapahtumaväli Δs_{AB} ja suuntaa η_α. Etumerkki kertoo, siirrytäänkö A:stä B:aan vai päin vastoin.

Ottamalla $\sigma_{;\alpha}$:n sisätulo itsensä kanssa ja käyttämällä aiempaa perustulosta $\sigma = \varepsilon(\Delta s_{AB})^2$ (5.2) saadaan nyt σ:lle osittaisdifferentiaaliyhtälö sekä pisteessä A että B:

$$\begin{cases} g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A} & = 4\sigma \quad A\text{:ssa} \\ g^{\alpha_B\beta_B}\sigma_{;\alpha_B}\sigma_{;\beta_B} & = 4\sigma \quad B\text{:ssä} \end{cases} \tag{5.6}$$

Näin on siis saatu siirtymäfunktiolle osittaisdifferentiaaliyhtälöt. Niiden ratkaisemiseksi täytyy kuitenkin tehdä lisäoletuksia $g^{\alpha\beta}$:sta, eikä niiden yleinen ratkaiseminen ole mitenkään triviaali operaatio.

Sivuhuomautus. Variaatiointegraalin derivaatasta ($\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v}$, ks. 3.9) lähtien on tuloksissa kulkenut mukana vakio 2. Tämä on seurausta valinnasta olla ottamatta variaatiointegraaliin tai siirtymäolioon vakiokerrointa. Kaikki tulokset kuitenkin ovat yhtälailla päteviä, oli sitten kertomassa mikä tahansa vakio (ei kuitenkaan 0).

Valitsemalla kertoimeksi $\frac{\mu^2}{4}$ ts.

$$I(v) = \frac{\mu^2}{4}\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \mathrm{d}u,$$

jolloin

$$\sigma(B|A) = (u_B - u_A)I(v) = \begin{cases} \frac{1}{4}\varepsilon\mu^2(\Delta s_{AB})^2 \\ \frac{1}{4}\varepsilon\mu^2 \mathrm{d}s_{AB}^2 \quad (A \text{ ja } B \text{ lähekkäin}), \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{\mu^2}{2}\Big/_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta - \frac{\mu^2}{2}\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}V^\beta \mathrm{d}u$$

ja geodeesilla

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} &= -\frac{\mu^2}{2}g_{\alpha\beta}(x_A)U^\alpha(x_A)V^\beta(x_A) + \frac{\mu^2}{2}g_{\alpha\beta}(x_B)U^\alpha(x_B)V^\beta(x_B) \\ &= \frac{\partial I(v)}{\partial x_A^\beta}V^\beta(x_A) + \frac{\partial I(v)}{\partial x_B^\beta}V^\beta(x_B).\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{cases} \sigma_{;\alpha_A} = -\frac{\mu^2}{2}(u_B - u_A)U_{\alpha_A} = -\frac{\mu^2}{2}\Delta s_{BA}\eta_{\alpha_A} \\ \sigma_{;\alpha_B} = \frac{\mu^2}{2}(u_B - u_A)U_{\alpha_B} = +\frac{\mu^2}{2}\Delta s_{BA}\eta_{\alpha_B}, \end{cases}$$

ja siten osittaisdifferentiaaliyhtälöiksi tulee

$$\begin{cases} g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A} = \mu^2\sigma \\ g^{\alpha_B\beta_B}\sigma_{;\alpha_B}\sigma_{;\beta_B} = \mu^2\sigma, \end{cases} \tag{5.7}$$

(vrt. hiukkasfysiikasta tuttu spin-0 -hiukkasen Kleinin-Gordonin Lagrangen tiheys (laakeassa avaruusajassa) ([Peskin & Schroeder] s. 16)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälö olisi nyt $\mathcal{L} == T - V = 0$, joka vastaa tapausta, missä hiukkasen liike- ja potentiaalienergiat ovat yhtä suuret.)

Lopullisena tavoitteena on kuvata kahden pisteen välistä yhteyttä (siirtymää) ja laskea tätä varten toinen kovariantti derivaatta $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ – derivoida siis nyt saatua ensimmäistä kovarianttia derivaattaa (5.5) vielä toisen pisteen koordinaatistossa. Tämä osoittautuu olevan hieman monimutkaisempi prosessi ja lopputulosta varten otetaan käyttöön käsitteet propagaattori ja Riemannin vuorovesitensori.

Seuraavaksi keskitytään kuitenkin tutkimaan rajankäyntiä $B \to A$, jolloin siirtymäfunktio tulee toden teolla käyttöön, kun sen avulla muotoillaan Einsteinin kenttäyhtälöt.

5.2.1 Rajankäynti $B \to A$, Einsteinin kenttäyhtälöt

Tutkitaan tilannetta, jossa A ja B ovat lähellä toisiaan. Tällöin (oletetaan) pisteiden välinen geodeesi on yksikäsitteinen[1]. Toinen oletus on, että pisteiden ollessa lähellä toisiaan koordinaatistot x_A ja x_B ovat samat (toisin sanoen $x_B \to x_A$, kun $B \to A$).

Nyt osataan sanoa hieman enemmän siirtymäfunktiosta ja sen kovarianteista derivaatoista. Ensinnäkin koska $\sigma(B|A) = (u_B - u_A)\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \mathrm{d}u$, niin

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma = \lim_{x_B \to x_A} \left[(u_B - u_A) \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \mathrm{d}u \right] = 0. \tag{5.8}$$

Toisin sanoen siirtymäfunktio lähestyy nollaa, kun siirtymän alku- ja loppupiste lähestyvät toisiaan. Tämä tuntuu luonnolliselta. Tämä on myös erona Luvussa 2 esiteltyyn siirtymäfunktioon (2.12). Siinä, missä $\langle a|a\rangle = 1$, lähestyy nyt määritelty siirtymäfunktio nollaa, kun loppupiste lähestyy alkupistettä.

Aletaan nyt tutkia siirtymäfunktion kovariantteja derivaattoja rajalla, jossa $x_B \to x_A$. Ensimmäinen derivaatta on $\sigma_{;\alpha_A} = -2(u_B - u_A)U_{\alpha_A} = -2\Delta s_{BA}\eta_{\alpha_A}$ (5.5), joten myös

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A} = 0. \tag{5.9}$$

Toiseen kovarianttiin derivaattaan pääsee käsiksi derivoimalla yhtälöä (5.6) ($g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A} = 4\sigma$) puolittain pisteessä A. Sijoittamalla näin saatuun

$$2\sigma_{;\gamma_A} = g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}\sigma_{;\beta_A}$$

siirtymäfunktion ensimmäinen derivaatta $\sigma_{;\alpha_A} = -2(u_B - u_A)U_{\alpha_A}$ (5.5) saadaan (liitteessä)

$$2U_{\beta_A} = \sigma_{;\alpha_A\beta_A}U^{\alpha_A}.$$

Siten, koska geodeesi, jota pitkin siirrytään oletetaan yksikäsitteiseksi, myös U^α on yksikäsitteinen ja yllä olevasta voi ottaa puolittain raja-arvon (muuten voisi tulla ongelmia esimerkiksi lähestymissuunnan kanssa). Tulos on

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A} = 2g_{\alpha_A\beta_A}. \tag{5.10}$$

Siis lähtemällä liikkeelle σ:sta, toisen kovariantin derivaatan laskeminen antaa metrisen tensorin $g_{\alpha\beta}$. Ratkaisemalla osittaisdifferentiaaliyhtälön on saatu yhtälölle reunaehto.

$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A}$:n avulla saadaan myös laskettua toinen kovariantti derivaatta $\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_B}$. Tämä ei tapahdu aivan yhtä suoraviivaisesti, kuin

[1] vrt. liikuttaessa pallopinnalla kohti etelänapaa: pohjoisnavalla alku- ja loppupisteitä yhdistäviä geodeeseja on äärettömän paljon, lähempänä etelänapaa enää yksi

edellinen, mutta on kuitenkin tehtävissä. Sitä paitsi, lopullisena tavoitteena on laskea $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ (ilman raja-arvoa), ja vaikka siihen on vielä matkaa, saadaan ensimmäiset tiedot lopputuloksen ominaisuuksista jo nyt.

Lasku on esitelty tarkemmin liitteessä, mutta idea on, että otetaan mielivaltainen vektori T^α, jota siirretään yhdensuuntaisesti pisteestä A pisteeseen B. Vektoreiden T^α ja $\sigma_{;\alpha}$ sisätulo on tietenkin invariantti, joten sen tavallinen ja absoluuttinen derivaatta ovat samat. Kehittämällä tulon Taylorin sarjaksi pisteessä A ja toisaalta pisteessä B ja korvaamalla tavallisen derivaatan absoluuttisella päästään käsiksi kovariatin derivaatan $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ ja $\sigma_{;\alpha_A\beta_A}$:n summaan rajalla $x_B \to x_A$. Lopputuloksena on

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_B} = -\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A}. \tag{5.11}$$

Siis $\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_B} = -2g_{\alpha_A\beta_A}$. Toisin sanoen $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$:n pitää lähestyä metristä tensoria, kun pisteet lähestyvät toisiaan.

Kun on saatu $\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A} = 2g_{\alpha_A\beta_A}$, on ensimmäinen arvaus, että seuraavan kovariantin derivaatan raja-arvo antaa nollan (koska $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$).

Lähdetään taas liikkeelle siirtymäfunktion osittaisdifferentiaaliyhtälöstä (5.6) ($g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A} = 4\sigma$). Derivoimalla molempia puolia nyt kolme kertaa saadaan (liite)

$$2\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A\delta_A\varepsilon_A} = 2\lim_{x_B\to x_A} (\sigma_{;\varepsilon_A\gamma_A\delta_A} + \sigma_{;\delta_A\gamma_A\varepsilon_A} + \sigma_{;\gamma_A\delta_A\varepsilon_A}),$$

josta sieventämisen ja kahden ensimmäisen indeksin järjestyksen vaihtamisen[2] jälkeen jää

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} + \lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\gamma_A\beta_A} = 0 \quad (*).$$

Toisin sanoen $\sigma_{;\alpha\beta\gamma}$ on antisymmetrinen kahden viimeisen indeksin vaihdon suhteen, kun $B \to A$.

Toisaalta (liite)

$$\sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} - \sigma_{;\alpha_A\gamma_A\beta_A} = \mathrm{R}^{\delta_A}{}_{\alpha_A\beta_A\gamma_A}\sigma_{;\delta_A},$$

missä

$$\mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ {\delta \atop \alpha\,\gamma} \right\}_{,\beta} - \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\}_{,\gamma} + \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\,\gamma} \right\}\left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\beta} \right\} - \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\,\beta} \right\}\left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\gamma} \right\}$$

on sekamuotoinen *kaarevuus-* eli *Riemannin tensori*. Täten, koska siirtymäfunktion ensimmäiselle kovariantille derivaatalle pätee $\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A} = 0$ (5.9), $\sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A}$ on myös symmetrinen kahden viimeisen indeksin vaihdon suhteen rajalla $B \to A$. Toisin sanoen

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} - \lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\gamma_A\beta_A} = 0 \quad (**).$$

[2] $\sigma_{;\alpha_A\beta_A} = (\sigma_{,\alpha_A})_{;\beta_A} = \sigma_{,\alpha_A\beta_A} - \left\{ {\gamma_A \atop \alpha_A\,\beta_A} \right\}\sigma_{,\gamma_A} = \sigma_{,\beta_A\alpha_A} - \left\{ {\gamma_A \atop \beta_A\,\alpha_A} \right\}\sigma_{,\gamma_A} = \sigma_{;\beta_A\alpha_A}$

Yhdistämällä näin saadut tulokset (*) ja (**) saadaan vahvistettua aiemmin tehty arvaus oikeaksi —

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \beta_A \gamma_A} = 0. \tag{5.12}$$

Kuten toisellekin derivaatalle, voi kolmannellekin laskea raja-arvon, kun on derivoitu molempien pisteiden koordinaatistojen suhteen. Täysin vastaavalla laskulla kuin $\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \beta_B}$ saadaan myös esimerkiksi $\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \beta_A \gamma_B}$. Tällä ei kuitenkaan ole suoraa käyttöä nyt, eikä lopputulos yllätä, mutta lasku löytyy liitteestä. Tulos on

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \beta_A \gamma_B} = 0.$$

Kolmannen kovariantin derivaatan laskemisen yhteydessä esiintyi jo toiveita antavasti Riemannin tensori. Päästäkseen tähän kunnolla käsiksi on kuitenkin vielä laskettava neljäskin derivaatta. Lähdetään derivoimalla puolittain relaatiota $\sigma_{;\alpha\beta\gamma} - \sigma_{;\alpha\gamma\beta} = \mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{;\delta}$. Saadaan

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha\beta\gamma\varepsilon} - \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \gamma_A \beta_A \varepsilon_A} = 2\mathrm{R}^{\delta_A}{}_{\alpha_A \beta_A \gamma_A} g_{\delta_A \varepsilon_A} = -2\mathrm{R}_{\alpha_A \varepsilon_A \beta_A \gamma_A},$$

missä on käytetty Riemannin tensorin ominaisuutta $\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathrm{R}_{\beta\alpha\gamma\delta}$. Toisaalta koska kahden viimeisen indeksin järjestystä voi vaihtaa (todetaan myöhemmin), pätee

$$\lim_{x_B \to x_A} (\sigma_{;\alpha_A \gamma_A \beta_A \delta_A} - \sigma_{;\alpha_A \delta_A \beta_A \gamma_A}) = -2\mathrm{R}_{\alpha_A \beta_A \gamma_A \delta_A}. \tag{5.13}$$

Riemannin tensori saadaan myös käyttämällä hyväksi siirtymäfunktion osittaisdifferentiaaliyhtälöä (5.6). Derivoimalla nyt neljä kertaa puolittain ja ottamalla raja-arvo saadaan (liite)

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \delta_A \varepsilon_A \zeta_A} = \lim_{x_B \to x_A} (\sigma_{;\zeta_A \gamma_A \delta_A \varepsilon_A} + \sigma_{;\varepsilon_A \gamma_A \delta_A \zeta_A} + \sigma_{;\delta_A \gamma_A \varepsilon_A \zeta_A} + \sigma_{;\gamma_A \delta_A \varepsilon_A \zeta_A})$$

Sievennys ja kahden ensimmäisen indeksin vaihto keskenään antaa

$$\lim_{x_B \to x_A} (\sigma_{;\gamma_A \zeta_A \delta_A \varepsilon_A} + \sigma_{;\gamma_A \varepsilon_A \delta_A \zeta_A} + \sigma_{;\gamma_A \delta_A \varepsilon_A \zeta_A}) = 0.$$

Vaihtamalla vielä keskimmäisen termin kaksi viimeistä indeksiä keskenään[3] saadaan neljänsille kovarianteille derivaatoille tulos

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \beta_A \gamma_A \delta_A} + \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \delta_A \beta_A \gamma_A} + \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A \gamma_A \delta_A \beta_A} = 0.$$

[3]

$$\begin{aligned} \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \zeta_A \delta_A \varepsilon_A} &= -\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \varepsilon_A \delta_A \zeta_A} - \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \delta_A \varepsilon_A \zeta_A} \\ &= -\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \delta_A \varepsilon_A \zeta_A} - \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \varepsilon_A \delta_A \zeta_A} \\ &= \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\gamma_A \zeta_A \varepsilon_A \delta_A} \end{aligned}$$

Koska siis neljännen kovariantin derivaatan kahden viimeisen indeksin järjestystä voi vaihtaa ja koska yllä olevan mukaan

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A\delta_A} = -\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\delta_A\beta_A\gamma_A} - \lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\gamma_A\delta_A\beta_A}$$

voidaan $\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A\delta_A}$ kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{3}\lim_{x_B\to x_A}(\sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A\delta_A} + \sigma_{;\alpha_A\beta_A\delta_A\gamma_A} - \underbrace{\sigma_{;\alpha_A\delta_A\beta_A\gamma_A}}_{=\sigma_{;\alpha_A\delta_A\gamma_A\beta_A}} - \sigma_{;\alpha_A\gamma_A\delta_A\beta_A}).$$

Siten aiemman tuloksen (5.13) mukaan

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A\delta_A} = -\frac{2}{3}(\mathrm{R}_{\alpha_A\gamma_A\beta_A\delta_A} + \mathrm{R}_{\alpha_A\delta_A\beta_A\gamma_A}). \tag{5.14}$$

Kun Riemannin tensori on käytössä, on myös Riccin tensorin $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = \mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\delta}$ ja kaarevuusinvariantin $\mathrm{R} = \mathrm{R}^{\alpha}{}_{\alpha}$ esittäminen siirtymäfunktion kovarianttien derivaattojen avulla mahdollista.

Käyttäen hyväksi Riccin tensorin symmetrisyyttä ja merkintää $\sigma_{;\gamma}{}^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}\sigma_{;\gamma\delta\alpha\beta}$ saadaan (ks. liite)

$$\frac{4}{3}\mathrm{R}_{\alpha_A\beta_A} = \lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\alpha_A\beta_A}. \tag{5.15}$$

Kaarevuusinvariantti (pisteessä A) on

$$\frac{4}{3}\mathrm{R}_A = \lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\alpha_A}{}^{\alpha_A} \tag{5.16}$$

ja niinpä Einsteinin tensoriksi ($\mathrm{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathrm{R}$) tulee lopulta

$$\mathrm{G}_{\alpha_A\beta_A} = \frac{3}{4}\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\alpha_A\beta_A} - \frac{3}{8}g_{\alpha_A\beta_A}\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\delta_A}{}^{\delta_A} \tag{5.17}$$

Einsteinin kenttäyhtälöt ovat näillä merkinnöillä

$$\frac{3}{4}\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\alpha_A\beta_A} - \frac{3}{8}g_{\alpha_A\beta_A}\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\gamma_A}{}^{\gamma_A}{}_{\delta_A}{}^{\delta_A} = -8\pi\mathrm{G}T_{\alpha_A\beta_A}, \tag{5.18}$$

missä G on (Newtonin) gravitaatiovakio ja $T_{\alpha\beta}$ materiasäteily-tensori (myös energia-liikemäärä -tensori).

Näin ollen siis ainakin yleisen suhteellisuusteorian muotoilu on mahdollista siirtymäfunktion $\sigma(x_B|x_A)$ avulla. Seuraavaksi tutkitaan jälleen siirtymistä pisteestä toiseen, jolloin sille tulee muutakin käyttöä.

5.3 Siirtymä pisteestä toiseen

5.3.1 Propagaattori $\mathscr{G}$

Kun tutkitaan kahden pisteen välistä yhteyttä, osoittautuu hyödylliseksi *propagaattori*, joka siirtää vektorin yhdensuuntaisesti pisteestä A pisteeseen B.

Tarkastellaan vektorin T^α yhdensuuntaissiirtoa pitkin käyrää $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Toisin sanoen

$$\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = 0,$$

eli pisteessä $x^\alpha(u)$ on voimassa yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}T^\alpha(u)}{\mathrm{d}u} = M^\alpha_\gamma(u) T^\gamma(u), \tag{5.19}$$

missä on merkitty

$$M^\alpha_\gamma(u) := -\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}$$

ja u on u_A:n (pisteessä A) u_B:n (pisteessä B) välissä.

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu onnistuu ottamalla käyttöön sopiva (Greenin) funktio, *propagaattori*, joka liittää toisiinsa kaksi pistettä, niin että

$$T^\alpha(u_B) = \mathscr{G}^\alpha{}_\beta(u_B|u_A) T^\beta(u_A), \tag{5.20}$$

missä siis $T^\alpha(u_B)$ on pisteestä A pisteeseen B yhdensuuntaissiirretty vektori $T^\alpha(u_A)$. Indeksien sijainnilla suhteessa toisiinsa ei vielä tässä vaiheessa ole merkitystä (yhtä hyvin voisi olla $\mathscr{G}^\alpha_\beta(u_B|u_A)$).

Kirjoitetaan nyt yhtälö (5.19) propagaattorin ja vektorin $T^\alpha(u_A)$ avulla:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\mathscr{G}^\alpha{}_\beta(u|u_A) T^\alpha(u_A) \right] = M^\alpha_\gamma(u)\, \mathscr{G}^\gamma{}_\beta(u|u_A) T^\alpha(a_A).$$

Tässä vektoriksi $T^\alpha(u_A)$ otettiin mikä tahansa (ei nolla-) vektori, joten yllä oleva yhtälö on oikeastaan riippumaton T^α:sta! Siis ratkaistavana on oikeastaan yhtälö propagaattorille. Ehtona on, että kun pisteet A ja B lähetyvät toisiaan, $\mathscr{G}$ lähestyy δ-funktiota[4]. Tämä vastaa tapausta, jossa siirtymää ei tapahdu. Myöhemmin $\mathscr{G}$ tulee käyttöön laskettaessa $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$:tä, mutta toisin kuin tähän asti $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}(u_A|u_A)$:ssa pisteen B vaikutus pysyy mukana!

Yhtälön

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathscr{G}^\alpha{}_\beta(u|u_A)}{\mathrm{d}u} = M^\alpha_\gamma(u)\, \mathscr{G}^\gamma{}_\beta(u|u_A) \tag{5.21}$$

voi nyt muuttaa integraaliyhtälöksi

$$\mathscr{G}^\alpha{}_\beta(u|u_A) = \delta^\alpha{}_\beta + \int_{u_A}^{u} M^\alpha_\gamma(u')\, \mathscr{G}^\gamma{}_\beta(u'|u_A)\mathrm{d}u'.$$

[4]koska $T^\alpha(u_A) = \mathscr{G}^\alpha{}_\beta(u_A|u_A) T^\beta(u_A) = \delta^\alpha{}_\beta T^\beta(u_A)$

Tästä iteroimalla saadaan lopulta ratkaisuksi

$$\mathscr{G}^{\alpha}{}_{\beta}(u|u_A) = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \int_{u_A}^{u} M^{\alpha}_{\beta}(u')\mathrm{d}u' + \int_{u_A}^{u}\left[\int_{u_A}^{u'} M^{\alpha}_{\gamma}(u')M^{\gamma}_{\beta}(u'')\mathrm{d}u''\right]\mathrm{d}u' + \cdots \tag{5.22}$$

Logiikka menee niin, että ensimmäisessä termissä "integroidaan yli pisteen (0-simpleksi)", toisessa integroidaan yli janan (1-simpleksi), kolmannessa yli kolmion (2-simpleksi) ja niin edelleen n. termissä yli (n-1)-simpleksin.

Käytännössä toivotaan tietenkin, että summan osat kutistuvat[5] pidemmälle mennessä, jolloin riittävään tarkkuuteen pääsee laskemalla mukaan vain ensimmäiset termit.

Otetaan vielä käyttöön muutama merkintä. Nostamalla ja laskemalla relaatiossa (5.20) sopivasti indeksejä (kertomalla metrisellä tensorilla), saadaan

$$\begin{aligned} T^{\alpha}(u_B) &= \mathscr{G}^{\alpha\beta}(u_B|u_A)T_{\beta}(u_A) \qquad \text{ja} \\ T_{\alpha}(u_B) &= \mathscr{G}_{\alpha\beta}(u_B|u_A)T^{\beta}(u_A) \end{aligned}$$

Siis jos metrisen tensorin $g_{\alpha\beta}$ ajattelee indeksin lasku- ja $g^{\alpha\beta}$:n nosto-operaattoriksi ja $\mathscr{G}^{\alpha}{}_{\beta}$:n olevan operaattori, joka yhdensuuntaissiirtää vektorin $T^{\alpha}(u_A)$ vektoriksi $T^{\alpha}(u_B)$, voi $\mathscr{G}^{\alpha\beta}$:n ja $\mathscr{G}_{\alpha\beta}$:n ajatella operaattoreiksi, jotka indeksin nostamisen ja laskemisen lisäksi siirtävät vektorin yhdensuuntaisesti pisteestä (tapahtumasta) toiseen.

Laitetaan myös merkintöjen selkeyttämiseksi informaatio pisteistä indekseihin. Tähän astihan on merkitty, kuten yllä, käyräparametri u näkyviin – sisällytetään tieto siitä, missä pisteessä (koordinaatistossa) ollaan, tästä eteenpäin indeksiin:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_B} &= \mathscr{G}_{\alpha_B\beta_A}T^{\beta_A} \\ T^{\alpha_B} &= \mathscr{G}^{\alpha_B\beta_A}T_{\beta_A} \end{aligned}$$

Huomautus Rajalla $B \to A$ propagaattorille $\mathscr{G}$ pätee

$$\lim_{B\to A} \mathscr{G}_{\alpha_B\beta_A} = g_{\alpha\beta}.$$

Tätä voi verrata aiempaan tulokseen (5.11)

$$\lim_{x_B\to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_B} = -2g_{\alpha_A\beta_A}.$$

Tästä yhtäläisyydestä ei vielä voi tehdä pitemmälle meneviä päätelmiä propagaattorin ja siirtymäfunktion $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ yhteydestä, muttei se ainakaan sulje mahdollista yhteyttä pois.

[5] itseisarvot pienenevät

Samaan tapaan, kuin metrisellä tensorilla voi laskea ja nostaa tensori-indeksejä, voi myös nyt esiteltyä propagaattoria käyttää muidenkin tensoreiden kuin vektorien indeksien muuttamiseen. Esimerkiksi toisen kertaluvun tensorille

$$T_{\alpha_B\beta_B} = \mathscr{G}_{\alpha_B\alpha_A}\,\mathscr{G}_{\beta_B\beta_A}T^{\alpha_A\beta_A}.$$

Analogia. Peruskvanttimekaniikassa ([Niskanen] s. 5-6) tilavektorin $|\alpha, t_0\rangle$ aikakehityksen kuvailua varten määritellään nk. *aikakehitysoperaattori* $U(t, t_0)$. Halutaan siis tutkia, miksi em. tilavektori on muuttunut hetkellä $t > t_0$ ja ajatellaan, että tähän päästään operoimalla aikakehitysoperaattorilla alkuperäiseen vektoriin. Symbolein

$$|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle.$$

Fysikaalisista syistä vaaditaan U:lta seuraavat ominaisuudet:

i) Unitaarisuus (kokonaistodennäköisyys säilyy),

ii) $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0), \qquad t_2 > t_1 > t_0$ ja

iii) $U(t, t_0) \to \mathbf{1}$, kun $t \to t_0$.

Infinitesimaaliselle siirtymälle $t_0 \to t_0 + \mathrm{d}t$ nämä ehdot toteuttaa

$$U(t_0 + \mathrm{d}t, t_0) = \mathbf{1} - i\Omega\mathrm{d}t, \quad \Omega^\dagger = \Omega,$$

missä Ω on aikakehityksen (infinitesimaalinen) generaattori. Identifioidaan nyt $\Omega = H/\hbar$ (H on systeemin Hamiltonin operaattori), jolloin ominaisuuden ii) perusteella

$$U(t + \mathrm{d}t, t_0) = U(t + \mathrm{d}t, t)U(t, t_0) = (\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}H\mathrm{d}t)U(t, t_0),$$

siis

$$U(t + \mathrm{d}t, t_0) - U(t, t_0) = \frac{1}{i\hbar}H\mathrm{d}tU(t, t_0).$$

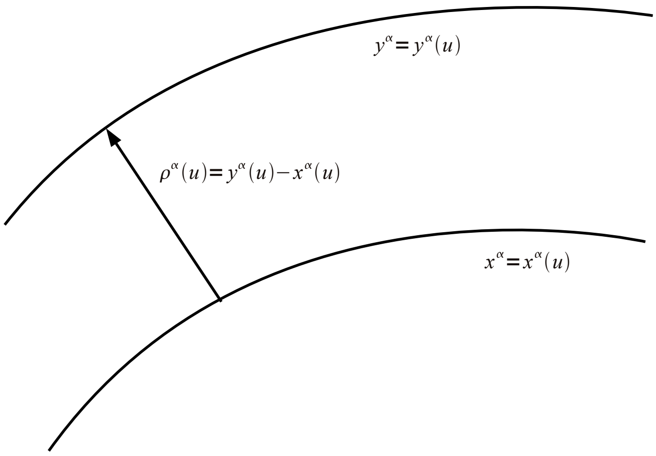
Ottamalla nyt raja-arvo $\mathrm{d}t \to 0$ saadaan Schrödingerin yhtälö (aikakehitysoperaattorille)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = HU(t, t_0).^{6} \tag{5.23}$$

Aiemmin saatiin saman muotoinen yhtälö (5.21) propagaattorille. Ei liene yllättävää, että ratkaisu on myös saman muotoinen.

[6] Operoimalla tilaan $|\alpha, t_0\rangle$ saadaan ko. tilan Schrödingerin yhtälö

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle = H|\alpha, t_0; t\rangle.$$



Kuva 5.2: Kaksi lähekkäistä, lähes yhdensuuntaista geodeesia ja niiden välinen erotusvektori

Kuten yhtälön (5.21) voi aikakehitysoperaattorin Schrödingerin yhtälön (5.23) muuttaa integraaliyhtälöksi

$$U(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} H(t') U(t', t_0) \mathrm{d}t'$$

ja iteroida. Lopputuloksena on $U(t, t_0)$:n esitys Dysonin sarjana

$$\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t_1} \left[\cdots \left[\int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) \mathrm{d}t_n \right] \cdots \right] \mathrm{d}t_2 \right] \mathrm{d}t_1 .$$

Tämä on täsmälleen saman muotoinen sarja, kuin aiemmin propagaattorille $\mathscr{G}^\alpha{}_\beta$ johdettu esitys (5.22).

5.3.2 Geodeettinen poikkeama

Suhteellisuusteoriassa on kolme tärkeää yhtälöä: Einsteinin kenttäyhtälöt, geodeettinen yhtälö ja geodeettisen poikkeaman yhtälö. Näistä kaksi ensimmäistä ovat (3.4) ja (5.18). Niitä on käsitelty jo aiemmin, keskitytään nyt kolmanteen eli *geodeettisen poikkeaman yhtälöön.*

Yhtälön johto on esitetty liitteessä, mutta idea on, että tutkitaan kahden lähekkäisen, toisiaan leikkaamattoman geodeesin ($x^\alpha = x^\alpha(u)$ ja $y^\alpha = y^\alpha(u)$)

erotusvektoria $\rho^\alpha(u) := y^\alpha(u) - x^\alpha(u)$ (Kuva B.1). Lähdetään liikkeelle kummankin geodeesin geodeettisestä yhtälöstä ja lasketaan näiden erotus (liitteessä).

Tuloksena on geodeettisen poikkeaman yhtälö (Jacobin yhtälö)

$$\frac{\delta^2\rho^\alpha}{\delta u^2} + \mathrm{R}^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}U^\gamma U^\delta \rho^\beta = 0. \tag{5.24}$$

Merkitsemällä *Riemannin vuorovesitensoria* $-\mathrm{R}^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}U^\gamma U^\delta =: \mathscr{R}^\alpha{}_\beta$, yhtälö (5.24) on nyt

$$\frac{\delta^2\rho^\alpha}{\delta u^2} = \mathscr{R}^\alpha{}_\beta \rho^\beta.$$

Vastaavasti *Riccin vuorovesi-invariantti* on $\mathscr{R} = \mathscr{R}^\alpha{}_\alpha = -\mathrm{R}_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta$.[7]

Tehdään huomio: Jos U^α on ajanluonteinen tangenttivektori, niin[8]

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta}U^\beta = 0.$$

Siis: Sikäli kun tensoriin voi liittää suunnan, voidaan sanoa, että $\mathscr{R}_{\alpha\beta}$ on ortogonaalinen U^α:n kanssa eli liittyy paikanluonteiseen suuntaan (nykyisyyteen)! Niin pitää tietysti ollakin, sillä vuorovesitensori on se osa Riemannin tensorista, joka voidaan havaita (eikä havaintoja tehdä menneisyyteen eikä tulevaisuuteen).

Muotoillaan geodeettisen poikkeaman yhtälön ratkaisu samaan tapaan kuin yhdensuuntaissiirtoyhtälön (5.19) aiemmin, sopivan Greenin funktion avulla.

Erona on, että yhtälössä (5.24) on toinen absoluuttinen derivaatta tavallisen sijaan. Tästä syystä otetaan avuksi kovariantti vektori (T_α), jota yhdensuuntaissiirretään pitkin käyrää $x^\alpha = x^\alpha(u)$. Kerrotaan puolittain T_α:lla jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{\delta^2(T_\alpha\rho^\alpha)}{\delta u^2} = \frac{\mathrm{d}^2(T_\alpha\rho^\alpha)}{\mathrm{d}u^2} = T_\alpha \mathscr{R}^\alpha{}_\beta \rho^\beta$$

(Tämä onnistuu, sillä $\frac{\delta T_\alpha}{\delta u} = 0$ (yhdensuuntaissiirto), jolloin

$$T_\alpha \frac{\delta^2\rho^\alpha}{\delta u^2} = \frac{\delta^2(T_\alpha\rho^\alpha)}{\delta u^2}.\Big)$$

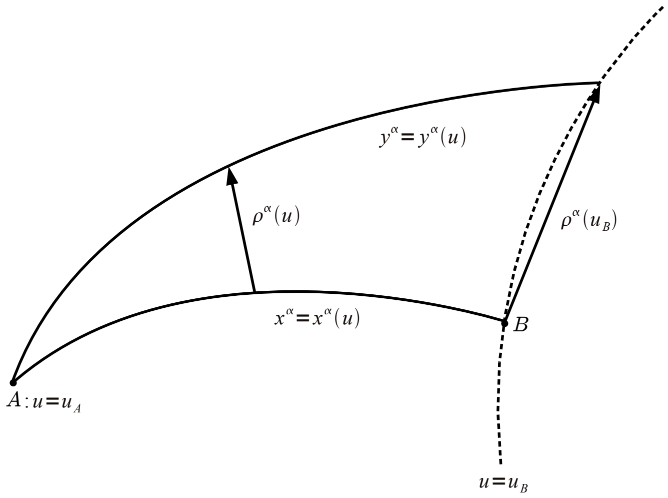
[7] Erityisesti: Tyhjiössä Einsteinin kenttäyhtälöt ovat

$$\mathrm{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathrm{R} = 0,$$

mistä $g^{\alpha\beta}$:lla kertomalla saadaan $\mathrm{R} - 2\mathrm{R} = 0$, siis $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0$. Ja siten

$$\mathscr{R} = 0 \quad \text{(tyhjiössä).}$$

[8] koska $\mathscr{R}_{\alpha\beta}U^\beta = -\mathrm{R}_{\alpha\gamma\beta\delta}U^\gamma U^\delta U^\beta = \mathrm{R}_{\alpha\gamma\delta\beta}U^\gamma U^\beta U^\delta = -\mathscr{R}_{\alpha\delta}U^\delta$



Kuva 5.3: Geodeeseille $x^\alpha(u_A) = y^\alpha(u_A)$, mutta $x^\alpha(u_B) \neq y^\alpha(u_B)$.

Asetetaan yhtälölle reunaehto, että geodeesit leikkaavat pisteessä A, mutteivät sen jälkeen ainakaan u:n arvoilla $u_A < u \leq u_B$ (Kuva 5.3). Toisin sanoen $x^\alpha(u_A) = y^\alpha(u_A)$, mutta $x^\alpha(u_B) \neq y^\alpha(u_B)$, siis

$$\rho^{\alpha_A} := \rho^\alpha(u_A) = 0 \quad \text{ja} \quad \rho^{\alpha_B} := \rho^\alpha(u_B) \neq 0.$$

Tilannetta voi verrata siihen, että siirrytään pallon pohjoisnavalta päiväntasaajalle pitkin kahta eri (lähekkäistä) pituuspiiriä.

Tämänkaltaisen differentiaaliyhtälön muuttaminen integraaliyhtälöksi on tehty liitteessä ja nyt käsillä olevassa tapauksessa

$$\underbrace{T_\alpha \rho^\alpha}_{T_\alpha(u)\rho^\alpha(u)} = \frac{u - u_A}{u_B - u_A} \underbrace{T_{\beta_B} \rho^{\beta_B}}_{T_\beta(u_B)\rho^\beta(u_B)} + \int_{u_A}^{u_B} \Gamma(u, u') \underbrace{T_{\gamma'} \mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'} \rho^{\delta'}}_{T_\gamma(u') \mathscr{R}^\gamma{}_\delta(u') \rho^\delta(u')} \, \mathrm{d}u',$$

missä $\Gamma(u, u')$ on tähän nimenomaiseen ongelmaan liittyvä Greenin funktio

$$\Gamma(u,u') = \frac{(u_A-u)(u_B-u')}{u_B-u_A} + (u-u')\theta(u-u').$$

($\theta(x)$ on Heavisiden porrasfunktio[9].)

Vektoria T_α yhdensuuntaissiirretään pitkin geodeesiä, joten voidaan ottaa avuksi kappaleessa 5.3.1 johdettu propagaattori. Yllä oleva integraaliyhtälö on tällöin sen avulla kirjoitettuna

$$T^\alpha \rho_\alpha = \frac{u-u_A}{u_B-u_A}\ \mathscr{G}_{\alpha\beta_B} T^\alpha \rho^{\beta_B} + \int_{u_A}^{u_B} \Gamma(u,u')\ \mathscr{G}_{\alpha\gamma'} T^\alpha\, \mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\rho^{\delta'} \mathrm{d}u'.$$

Toisaalta T_α:ksi otettiin mikä tahansa (mielivaltainen) kovariantti vektori, joten geodeettiselle poikkeamalle täytyy olla voimassa

$$\rho_\alpha(u) = \frac{u-u_A}{u_B-u_A}\ \mathscr{G}_{\alpha\beta_B}\rho^{\beta_B} + \int_{u_A}^{u_B} \Gamma(u,u')\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\ \mathscr{G}_{\alpha\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u'. \quad (5.25)$$

Ennen kuin jatketaan, tarkastellaan hetki saatua integraaliyhtälöä; Ensinnäkin laakeassa avaruudessa ja vakuumissa $\mathscr{R}^\alpha{}_\beta \equiv 0$, jolloin geodeettinen poikkeama saadaan pelkästä alkuosasta. Toisin sanoen laakea (ja vuorovaikutukseton) ja kaareva osa erotellaan toisistaan $+$ -merkillä.

Toisaalta on merkille pantavaa, että geodeettinen poikkeama riippuu toiseen geodeesiin liittyvästä propagaattorista ja Riemannin vuorovesitensorista (joka siis liittyy havaintoihin). Muut tekijät yhtälössä tulevat tilanteen matemaattisesta muotoilusta.

Palataan geodeettisen poikkeaman yhtälöön. Propagaattoria muotoillessa lopputulos saatiin iteroimalla integraaliyhtälöä, mutta nyt hyödyllisemmäksi osoittautuu geodeettisen poikkeaman absoluuttinen derivaatta.

$$\frac{\delta\rho_\alpha}{\delta u} = \frac{1}{u_B-u_A}\ \mathscr{G}_{\alpha\beta_B}\rho^{\beta_B} + \int_{u_A}^{u_B} \underbrace{\frac{\delta\Gamma(u,u')}{\delta u}}_{10}\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\ \mathscr{G}_{\alpha\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u' \quad (5.26)$$

Erityisesti käyttöön tulevat absoluuttiset derivaatat pisteissä A ja B. Ne on laskettu liitteessä.

[9]

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x<0 \\ 1, & \text{kun } x\geq 0 \end{cases}$$

[10]Koska

$$\Gamma(u,u') = \begin{cases} \frac{(u_a-u)(u_B-u')}{u_B-u_A}, & \text{kun } u<u' \\ \frac{(u_A-u')(u_B-u)}{u_B-u_A}, & \text{kun } u'<u \end{cases}$$

niin

$$\frac{\delta\Gamma(u,u')}{\delta u} = \begin{cases} \frac{u'-u_B}{u_B-u_A}, & \text{kun } u<u' \\ \frac{u'-u_A}{u_B-u_A}, & \text{kun } u'<u. \end{cases} .$$

5.4 Paluu siirtymäfunktioihin, $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$

Luvussa 3 käsiteltiin maailmanpintaa $x^\alpha = x^\alpha(u,v)$. Käytössä oli merkintä (tangenttivektoreille)

$$\begin{aligned} U^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \\ V^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}. \end{aligned}$$

Geodeettinen poikkeama lasketaan erotuksena jollakin parametrin u arvolla. Asetetaan siis $\rho^\alpha = V^\alpha$. Tällöin

$$\frac{\delta U_\alpha}{\delta v} = \frac{\delta \rho_\alpha}{\delta u}$$

(ks. liite: Lukuun 3 liittyvät laskut - Variaatiointegraalin derivaatta).

Geodeettiselle siirtymäfunktiolle pätee kaavan (5.5) mukaan

$$\begin{cases} \sigma_{;\alpha_A} &= -2(u_B - u_A)U_{\alpha_A} \\ \sigma_{;\alpha_B} &= 2(u_B - u_A)U_{\alpha_B}. \end{cases}$$

Derivoidaan nyt ylempää yhtälöä puolittain v:n suhteen (pisteessä B), jolloin saadaan

$$\frac{\delta U_{\alpha_A}}{\delta v} = -\frac{1}{2(u_B - u_A)} \underbrace{\sigma_{;\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B}}_{11} = \frac{\delta \rho_{\alpha_A}}{\delta u}$$

Täten sijoittamalla geodeettisen poikkeaman (liitteessä laskettu) absoluuttinen derivaatta[12]

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B} = & \mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\ & + \int_{u_A}^{u_B} \tfrac{(u'-u_A)(u'-u_B)}{u_B-u_A} \mathscr{R}^{\gamma'\delta'} \mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'} \mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots \end{aligned}$$

Geodeettista poikkeamaa johdettaessa valittiin toiseksi maailmanviivaksi mikä tahansa (lähellä alkuperäistä oleva) geodeesi. Toisaalta parametrin

[11] Pisteessä B:

$$\frac{\delta \sigma_{;\alpha_A}}{\delta v} = (\sigma_{;\alpha_A})_{;\beta_B} \frac{\partial x^{\beta_B}}{\partial v}$$

[12]

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_{\alpha_A}}{\delta u} &= \frac{1}{u_B - u_A} \mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\ & + \int_{u_A}^{u_B} \frac{(u'-u_A)(u'-u_B)}{(u_B-u_A)^2} \mathscr{R}^{\gamma'\delta'} \mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'} \mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots \end{aligned}$$

v olisi voinut valita toisinkin, joten ρ^{β_B} riippuu näistä valinnoista ja siirtymäfunktion toiselle derivaatalle pätee

$$\begin{aligned}\sigma_{;\alpha_A\beta_B} = & -2\,\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B} - \\ & -\tfrac{2}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_A)(u'-u_B)\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\,\mathscr{R}^{\gamma'\beta'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots .\end{aligned} \tag{5.27}$$

Tässä $|u_B - u_A|$ ei välttämättä ole ns. pieni (eikä ainakaan äärettömän suuri), vaan "$+\cdots$" sisältää nimenomaan $\mathscr{R}^{\alpha\beta}$:n korkeampia asteita, joiden ansiosta summa katkaistaan jossakin vaiheessa. Toisin sanoen gravitaatiovaikutuksen ajatellaan olevan sen verran heikko, että $\mathscr{R}^{\alpha\beta}$:n "korkeammat potenssit" voi jättää huomiotta.

Tulos on myös sopusoinnussa tuloksen (5.11) kanssa:

$$\lim_{B\to A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B} = -2g_{\alpha_A\beta_A},$$

niin kuin tietysti pitää ollakin.

Samanlaisella menettelyllä kuin $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ yllä voidaan laskea myös $\sigma_{;\alpha_B\beta_B}$. Lähtemällä nyt liikkeelle derivoimalla $\sigma_{;\alpha_B}$:tä parametrin v suhteen B:ssä

$$\frac{\delta U_{\alpha_B}}{\delta v} = \frac{1}{2(u_B-u_A)}\sigma_{;\alpha_B\beta_B}\rho^{\beta_B} = \frac{\delta\rho_{\alpha_B}}{\delta u}$$

johon sijoittamalla geodeettisen poikkeaman absoluuttinen derivaatta B:ssä[13] ja eliminoimalla ρ_{α_B} kuten aiemminkin saadaan

$$\begin{aligned}\sigma_{;\alpha_B\beta_B} = & \;2\,\mathscr{G}_{\alpha_B\beta_B} + \\ & +\tfrac{2}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_A)^2\,\mathscr{G}_{\alpha_B\gamma'}\,\mathscr{R}^{\gamma'\delta'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots .\end{aligned} \tag{5.28}$$

Aivan samaan tapaan voi laskea myös $\sigma_{;\alpha_A\beta_A}$:n. Nyt on vain huomioitava, että laskettaessa geodeettista poikkeamaa, asetettiin $\rho^{\alpha_A} = 0$. Tästä syystä on vaihdettava pisteiden A ja B rooleja jo geodeettisen poikkeaman yhtälöä (5.24) ratkaistessa. Tästä eteenpäin lasku menee samalla tavalla ja tulokseksi tulee

$$\begin{aligned}\sigma_{;\alpha_A\beta_A} = & \;2\,\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_A} + \\ & +\tfrac{2}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_B)^2\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\,\mathscr{R}^{\gamma'\delta'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_A}\mathrm{d}u' + \cdots .\end{aligned} \tag{5.29}$$

13

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_{\alpha_B}}{\delta u} = & \frac{1}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_B\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\ & +\int_{u_A}^{u_B}\frac{(u'-u_A)^2}{(u_B-u_A)^2}\,\mathscr{R}^{\gamma'\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots .\end{aligned}$$

Näin siis myös toisen pisteen vaikutus on edelleen jäljellä, vaikka siirtymän alku- ja loppupisteet asetettaisiin samoiksi.

Seuraavassa kappaleessa vielä hieman siistitään lopputulosta ottamalla käyttöön luvussa 4 esitelty tetradimerkintä.

5.4.1 Paluu tetradiformalismiin

Palautetaan käyttöön kappaleessa 4 esitelty tetradi $\{\mu^{\alpha}_{(i)}\}$ ja siirrellään sen vektoreita nyt yhdensuuntaisesti pitkin goedeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$, siis asetetaan

$$\frac{\delta\mu^{\alpha}_{(i)}}{\delta u} = 0.$$

Tetradin vektoreille on voimassa ortonormitusehto (4.7):

$$g^{\alpha\beta}\mu^{(i)}_{\alpha}\mu^{(j)}_{\beta} = \eta^{(ij)},$$

missä $\eta^{(ij)}$ on laakean avaruusajan metrinen tensori[14].

Otetaan käyttöön myös tetradien yhteydessä merkintä, joka liittää vektorin tiettyyn pisteeseen. Kuten aiemminkin $\mu^{\alpha_A}_{(i)}$ on pisteeseen A liitetty tetradivektori, vastaavasti $\mu^{\alpha_B}_{(i)}$ liittyy pisteeseen B.

Kerrotaan nyt relaatiota (5.27) puolittain $\mu^{\alpha_A}_{(i)}\mu^{\beta_B}_{(j)}$:lla. Tetradin vektoreita yhdensuuntaissiirretään pitkin geodeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$, joten

$$\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\mu^{\alpha_A}_{(i)}\mu^{\beta_B}_{(j)} = \mu_{(i)\beta_B}\mu^{\beta_B}_{(j)} = \eta_{(ij)}.^{15}$$

Näin päästään eroon propagaattoreistakin ja merkitsemällä (4.15) mukaisesti

$$\mu^{\alpha_A}_{(i)}\mu^{\beta_B}_{(j)}\sigma_{;\alpha_A\beta_B} = \sigma_{;(i_Aj_B)} \quad \text{ja} \quad \mu_{(i)\gamma'}\mu_{(j)\delta'}\mathscr{R}^{\gamma'\delta'} = \mathscr{R}_{(ij)}$$

on jäljellä kahden havaintoihin liittyvän suureen, σ:n ja $\mathscr{R}$:n, välinen relaatio

$$\sigma_{;(i_Aj_B)} = -2\eta_{(ij)} - \frac{2}{u_B - u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_A)(u'-u_B)\,\mathscr{R}_{(ij)}\mathrm{d}u' + \cdots . \tag{5.30}$$

Samalla tavalla, kertomalla sopivilla tetradivektoreilla, saadaan myös

$$\sigma_{;(i_Aj_A)} = 2\eta_{(ij)} + \frac{2}{u_B - u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_B)^2\,\mathscr{R}_{(ij)}\mathrm{d}u' + \cdots \text{ ja} \tag{5.31}$$

$$\sigma_{;(i_Bj_B)} = 2\eta_{(ij)} + \frac{2}{u_B - u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_A)^2\,\mathscr{R}_{(ij)}\mathrm{d}u' + \cdots . \tag{5.32}$$

Tetradien avulla on tensoreista tullut (avaruusaika)invariantteja; Viittaukset koordinaatteihin ovat piilossa – vain tapahtumat ovat jäljellä ...

[14] $\eta^{(ij)} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$

[15] Vastaavasti $\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\mu^{\alpha_A}_{(i)} = \mu_{(i)\gamma'}$ ja $\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\mu^{\beta_B}_{(j)} = \mu_{(j)\delta'}$.

Luku 6

Loppusanat

Teoria on nyt muotoiltu. Se ei ole uusi siinä mielessä, kuin esimerkiksi Einsteinin gravitaatioteoria on uusi Newtonin teoriaan nähden — niissä gravitaatio hahmotetaan kokonaan eriluonteisiksi (toisessa voimaksi, toisessa avaruusajan kaarevuudeksi). Nyt esitetty teoria ei ole uusi siinäkään mielessä, että tuloksena olisi uusia yhtälöitä kaarevuudelle, kappaleiden liikkeelle tai säteilylle. Sen sijaan työssä esitetty poikkeaa aiemmasta formalismiltaan.

Tavoitteena oli tutkia kahden pisteen välistä yhteyttä fysikaalisessa neliulotteisessa avaruusajassa. Tämä tavoite mielessä (ja vaatimus yhteensopivuudesta suhteellisuusteorian kanssa) asetettiin lähtökohdaksi kahden pisteen funktio kuvaamaan siirtymää pisteestä toiseen. Yhteensopivuus varmistettiin johtamalla Einsteinin kenttäyhtälöt tämän avulla. Sen jälkeen muotoiltiin kahden pisteen välistä yhteyttä kuvaava siirtymäfunktion toinen kovariantti derivaatta. Saatiin yhteys kahden havaintoihin liittyvän suureen välille.

Siitä, että teoria sinänsä on sama kuin ennenkin, seuraa, että siihen liittyvät testit, kokeelliset menetelmät ja sovellukset ovat myös ennallaan. Teorian soveltaminen gravitaatioaaltoihin tai muihin yleisen suhteellisuusteorian perinteisiin sovelluksiin olisi nyt mahdollista, mutta jää kuitenkin tämän tutkielman alueen ulkopuolelle. Toisaalta uusi muotoilu voi avata ovia uusillekin sovelluksille, tai ainakin tuoda niitä aiempaa paremmin esille.

Liite A

Gravitaatio

Tässä luvussa tarkastellaan Newtonin ja Einsteinin gravitaatioteorioiden yhtäläisyyksiä käyttäen muualla tutkielmassa esiintyneitä merkintöjä (tetradiformalismia).

A.1 Newtonin gravitaatioteoria

Newtonin gravitaatioteoriassa vapaassa putoamisliikkeessä olevan hiukkasen liikeyhtälö on

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_a}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_a}, \quad (a = 1, 2, 3)$$

missä ϕ on gravitaatiopotentiaali, $x_a = x_a(t)$ on paikkakoordinaatti ja t aikaparametri.

Luvussa 5 tutkittiin geodeettista poikkeamaa. Tarkastellaan nyt vapaassa putoamisliikkeessä olevien hiukkasten suhteellista liikettä.

Otetaan käyttöön maailmanpinta $x_a = x_a(u, v)$, missä parametri u vastaa aikaparametriä ja rataparametri v erottelee radat toisistaan. Tangenttivektorikentät ovat

$$U_a = \frac{\partial x_a}{\partial u} \quad \text{ja} \quad V_a = \frac{\partial x_a}{\partial v}.$$

Liikeyhtälö on näillä merkinnöillä $\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_a}$, siis

$$\frac{\partial U_a}{\partial u} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_a}.$$

Tätä yhtälöä derivoidaan puolittain parametrin v suhteen, jolloin saadaan yhtälö[1]

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a \partial x_b} V_b,$$

missä on käytössä Einsteinin summaussääntö (tässä summataan yli b:n).

Aiemmin merkittiin geodeettista poikkeamaa ρ^α. Merkitään myös nyt ratakäyrien välistä poikkeamavektoria $V_a \Delta v =: \rho_a$ (missä Δv on pieni). Se on siis kahden käyrän erotusvektori (molemmilla käyrillä sama parametrin u arvo). Tällöin poikkeamavektorille on voimassa differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^2 \rho_a}{\mathrm{d}t^2} = \mathscr{N}_{ab} \rho_b. \tag{A.1}$$

Tässä on merkitty matriisia $-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a \partial x_b} =: \mathscr{N}_{ab}$ (*Newtonin vuorovesitensori*). Samaan tapaan kuin Riemannin vuorovesitensorista $\mathscr{R}^\alpha{}_\beta$ muodostettiin Riccin vuorovesitensori $\mathscr{R}$, lasketaan nyt *Newtonin vuorovesi-invariantti* $\mathscr{N} := \mathrm{Tr} \mathscr{N}_{ab}$. Toisin sanoen[2]

$$\mathscr{N} = -\nabla^2 \phi. \tag{A.2}$$

Kenttäyhtälöt tyhjiössä ovat (ns. *Laplacen yhtälöt*)

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{siis} \quad \mathscr{N} = 0. \tag{A.3}$$

On saatu Newtonin ensimmäinen liikelaki: Tyhjiössä (ei vuorovaikutuksia) hiukkasten ratojen erotusvektorin toinen aikaderivaatta (suhteellinen kiihtyvyys) häviää. Ne siis ovat toisiinsa nähden tasaisessa etenemisliikkeessä (tai paikoillaan).

A.2 Einsteinin gravitaatioteoria

Tarkastellaan nytkin maailmanpintaa $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$, missä $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ ja tangenttivektorikenttiä

$$U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \quad \text{ja} \quad V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}.$$

1

$$\frac{\partial^2 U_a}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial U_a}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial U_a}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)\right) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial u^2} \text{ ja}$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_a}\right) = \frac{\partial x_b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_a}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a \partial x_b} V_b,$$

missä summataan yli indeksi b

2

$$\mathrm{Tr} \mathscr{N}_{ab} = \sum_a \mathscr{N}_{aa} = -\sum_a \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_a}^2} = -\nabla^2 \phi.$$

Todetaan ensimmäisenä, että

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta u \delta v} &= \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta U^\alpha}{\delta v}\right) = \left(\frac{\delta U^\alpha}{\delta v}\right)_{;\beta} U^\beta = (U^\alpha{}_{;\gamma} V^\gamma)_{;\beta} U^\beta \\
&= U^\alpha{}_{;\gamma\beta} V^\gamma U^\beta + U^\alpha{}_{;\gamma} V^\gamma{}_{;\beta} U^\beta = U^\alpha{}_{;\gamma\beta} V^\gamma U^\beta + U^\alpha{}_{;\gamma} \frac{\delta V^\gamma}{\delta u} \\
&= U^\alpha{}_{;\gamma\beta} V^\gamma U^\beta + U^\alpha{}_{;\gamma} \frac{\delta U^\gamma}{\delta v} \quad \text{ja} \\
\frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta v \delta u} &= \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}\right) = \left(\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}\right)_{;\gamma} V^\gamma = \left(U^\alpha{}_{;\beta} U^\beta\right)_{;\gamma} V^\gamma \\
&= U^\alpha{}_{;\beta\gamma} U^\beta V^\gamma + U^\alpha{}_{;\beta} U^\beta{}_{;\gamma} V^\gamma = U^\alpha{}_{;\beta\gamma} U^\beta V^\gamma + U^\alpha{}_{;\beta} \frac{\delta U^\beta}{\delta v}.
\end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta u \delta v} - \frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta v \delta u} &= (U^\alpha{}_{;\gamma\beta} - U^\alpha{}_{;\beta\gamma}) U^\beta V^\gamma = g^{\alpha\varepsilon} \left(U_{\varepsilon;\gamma\beta} - U_{\varepsilon;\beta\gamma}\right) U^\beta V^\gamma \\
&\overset{3}{=} g^{\alpha\varepsilon} \mathrm{R}^\delta{}_{\varepsilon\gamma\beta} U_\delta U^\beta V^\gamma = -\mathrm{R}^\alpha{}_{\delta\gamma\beta} U^\delta U^\beta V^\gamma.
\end{aligned}$$

Nyt, koska

$$\frac{\delta^2}{\delta u^2} = \frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta u \delta v} = \frac{\delta^2 U^\alpha}{\delta v \delta u} - \mathrm{R}^\alpha{}_{\delta\gamma\beta} U^\delta U^\beta V^\gamma,$$

niin kun tutkitaan geodeeseja, $\frac{\delta U^\alpha}{\delta u} = 0$, voidaan merkitä taas kahden lähekkäisen maailmanviivan erotus- eli poikkeamavektoria $\rho^\alpha = V^\alpha \Delta v$ (missä siis Δv on pieni), jolloin saadaan geodeettisen poikkeaman yhtälö (5.24)

$$\frac{\delta^2 \rho^\alpha}{\delta u} = -\mathrm{R}^\alpha{}_{\beta\delta\gamma} U^\beta \rho^\delta U^\gamma,$$

tai käyttäen *Riemannin vuorovesitensoria* (esitelty yhtälön (5.24) jälkeen)

$$\frac{\delta^2 \rho^\alpha}{\delta u^2} = \mathscr{R}^\alpha{}_\beta \rho^\beta. \tag{A.4}$$

Samoin esitellään myös Riccin vuorovesi-invariantti $\mathscr{R} = \mathrm{R}_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$. Tyhjiössä kenttäyhtälöt ovat nyt

$$\mathscr{R} = 0 \quad \text{toisin sanoen} \quad \mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0, \tag{A.5}$$

mikä on analogista Newtonin teorian vastaavuuden (A.3) kanssa.

[3]Samalla lailla kuin $\sigma_{;\alpha\beta\gamma} - \sigma_{;\alpha\gamma\beta} = \mathrm{R}^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{;\delta}$ Kappaleen 5 laskuissa (liite)

A.2.1 Geodeettisen poikkeaman yhtälön tetradimuoto

Muotoillaan nyt geodeettisen poikkeaman yhtälö käyttäen hyväksi kappaleessa 4 esiteltyä ortonormitettua tetradia $\{\mu^{\alpha}_{(i)}\}$ (missä $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ja $i = 1, 2, 3, 4$). Siirretään tetradin vektoreita yhdensuuntaisesti pitkin maailmanviivaa $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$, toisin sanoen otetaan

$$\frac{\delta \mu^{\alpha}_{(i)}}{\delta u} = 0.$$

Nyt voidaan kertoa yhtälöä (A.4) puolittain $\mu_{(i)\alpha}$:lla, jolloin voidaan yhdensuuntaissiirron ansiosta kirjoittaa

$$\frac{\delta^2 \overbrace{\mu_{(i)\alpha}\rho^{\alpha}}^{\rho_{(i)}}}{\delta u^2} = \mu_{(i)\alpha} \mathscr{R}^{\alpha}{}_{\beta} \underbrace{\rho^{\beta}}_{\mu^{\beta}_{(j)}\rho^{(j)}} \qquad \text{siis} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \rho_{(i)}}{\mathrm{d}u^2} = \mu_{(i)\alpha}\mu^{\beta}_{(j)} \mathscr{R}^{\alpha}{}_{\beta}\rho^{(j)}$$

tai vielä käyttäen tetradimerkintöjä

$$\frac{\mathrm{d}^2 \rho_{(i)}}{\mathrm{d}u^2} = \mathscr{R}_{(ij)}\rho^{(j)} \tag{A.6}$$

Tämä muistuttaa yhtälöä (A.1) Newtonin teoriassa.

A.3 Teorioiden välinen yhteys

Kappaleessa 4 ajateltiin $\mu^{\alpha}_{(4)}$ ajanluonteiseksi yksikkötangenttivektoriksi, siis otetaan nytkin

$$\mu^{\alpha}_{(4)} = U^{\alpha},$$

jolloin[4]

$$\mathscr{R}_{(ij)} = \mathrm{R}_{(i44j)}.$$

Kun nyt asetetaan $i = a$ ja $j = b$ (missä i,j = 1,2,3), niin yhtälöiden (A.1) ja (A.6) vertailu antaa Newtonin ja Einsteinin gravitaatioteorioiden väliseksi yhteydeksi

$$\mathrm{R}_{(a44b)} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_a \partial x_b} \quad \text{toisin sanoen} \quad \mathscr{R}_{(ab)} = \mathscr{N}_{ab}. \tag{A.7}$$

[4]
$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{(ij)} &= \mu_{(i)\alpha}\mu^{\beta}_{(j)} \mathscr{R}^{\alpha}{}_{\beta} = -\mu_{(i)\alpha}\mu^{\beta}_{(j)} \mathrm{R}^{\alpha}{}_{\gamma\beta\delta} U^{\gamma} U^{\delta} = \mu_{(i)\alpha}\mu^{\gamma}_{(4)}\mu^{\delta}_{(4)}\mu^{\beta}_{(j)} \mathrm{R}^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} \\ &= \mathrm{R}_{(i44j)} \end{aligned}$$

Tällöin

$$\sum_a \mathrm{R}_{(a44a)} = -\nabla^2\phi \quad \text{toisin sanoen}^5 \quad \mathrm{R}_{(44)} = \mathscr{N} \tag{A.8}$$

Ja nyt Einsteinin teorian tyhjiön kenttäyhtälöt (A.5) antavat (kun $\mathrm{R}_{(44)} = \mathrm{R}_{\alpha\beta}\mu^{\alpha}_{(4)}\mu^{\beta}_{(4)} = 0$)

$$\mathscr{N} = 0.$$

Huomionarvoista on, että Riemannin vuorovesitensorilla on merkittävävä rooli niin Newtonin gravitaatioteoriassa, Einsteinin (lokaalissa) teoriassa (YST) kuin myös tässä työssä käsitellyssä (ei-lokaalissa) teoriassa.

Riemannin vuorovesitensori tekee myös eron gravitaatiota kuvaavien (Newtonin ja Einsteinin) teorioiden ja suppean suhteellisuusteorian välille. Jälkimmäisessä ei ole gravitaatiota – Riemannin kaarevuustensori ja vuorovesitensori ovat identtisesti nollia.

[5]

$$\sum_a \mathrm{R}_{(a44a)} = \sum_a \mathrm{R}_{(a44a)} + \underbrace{\mathrm{R}_{(4444)}}_{=0} = \sum_i \mathrm{R}_{(i44i)} = \mathrm{R}_{(44)}$$

Liite B

Laskujen yksityiskohtia

B.1 Lukuun 3 liittyvät laskut

Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöt

$$\frac{\mathrm{d}f(u, z^\alpha, z'^\alpha)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}\frac{\partial z^\alpha}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial z'^\alpha}\frac{\partial z'^\alpha}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}y^\alpha + \frac{\partial f}{\partial z'^\alpha}y'^\alpha.$$

Jos nyt $z^\alpha(u) = x^\alpha(u)$ on etsitty ääriarvon antava maailmanviiva, niin

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{u_A}^{u_B} f(u, z^\alpha, z'^\alpha)|_{z^\alpha = x^\alpha}\mathrm{d}u = \int_{u_A}^{u_B}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}f(u, z^\alpha, z'^\alpha)|_{z^\alpha = x^\alpha}\mathrm{d}u \\
= \;& \int_{u_A}^{u_B}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}y^\alpha + \frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}y'^\alpha\right)\mathrm{d}u \\
\overset{1}{=} \;& \int_{u_A}^{u_B}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}y^\alpha\right)\mathrm{d}u + \underbrace{\Big/_{u_A}^{u_B}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}y^\alpha}_{\substack{=0,\text{sillä} \\ y^\alpha(u_A)=y^\alpha(u_B)=0}} - \int_{u_A}^{u_B} y^\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\mathrm{d}u \\
= \;& \int_{u_A}^{u_B}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\right)y^\alpha\mathrm{d}u = 0.
\end{aligned}$$

[1]osittaisintegrointi, $\int_a^b f'g\mathrm{d}x = \Big/_a^b fg - \int_a^b fg'\mathrm{d}x$

Tuloksen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x'^\alpha}\right) - \frac{\partial (f^2)}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2f^2}\frac{\mathrm{d}(f^2)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial (f^2)}{\partial x'^\alpha} = 0$ perustelu

Jos $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0$, niin

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right) &= 2f\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - 2f\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} - 2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha} \\
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(2f\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\right) - 2f\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2f^2}2f\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)2f\left(\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\right) \\
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x'^\alpha}\right) - \frac{\partial (f^2)}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2f^2}\frac{\mathrm{d}(f^2)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial (f^2)}{\partial x'^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Geodeettisen yhtälön toinen muoto

Sijoittamalla yhtälöön (3.2) $f^2 = -g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta$, saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(-g_{\beta\gamma}x'^\beta x'^\gamma\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-g_{\beta\gamma}x'^\beta x'^\gamma\right) \\
= &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-g_{\beta\gamma}(\delta^\beta{}_\alpha x'^\gamma + x'^\beta\delta^\gamma{}_\alpha)\right] + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[g_{\alpha\gamma}x'^\gamma + g_{\beta\alpha}x'^\beta\right] + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\alpha\beta}x'^\beta\right) + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-2\left[\frac{\mathrm{d}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}s}x'^\beta + g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s}\right] + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-2\left[g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s}}_{x'^\gamma}x'^\beta\right] + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-2\left[g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\right)x'^\beta x'^\gamma\right] + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}x'^\beta x'^\gamma \\
= &-2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s} - \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right)x'^\beta x'^\gamma (= 0),
\end{aligned}$$

ja ajanluonteisen geodeettisen yhtälön 2. muodoksi tulee siten

$$g_{\gamma\beta}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}s} + [\alpha\beta, \gamma]x'^\alpha x'^\beta = 0,$$

missä

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$$

on nimeltään ensimmäisen lajin Christoffelin symboli.

Parametrinvaihdon vaikutus geodeettiseen yhtälöön

Tehdään parametrinvaihto $u \mapsto v = v(u)$. Geodeettinen yhtälö (3.4) muuttuu tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}v}\right) + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}v} \\
= \;& \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}v} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}v^2} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}v} = 0,
\end{aligned}$$

eli

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}v^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}v} = -\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}v}.$$

2. lajin Christoffelin symbolin muunnoskaava

Vektorille

$$U^\gamma := \frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}$$

pätee $U'^\gamma = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} U^\delta$. Siis

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 x'^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' \frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\mathrm{d}^2 x^\delta}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} \\
= \;& \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u}\right) + \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x'^\varepsilon}{\mathrm{d}u}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\zeta}\frac{\mathrm{d}x'^\zeta}{\mathrm{d}u} \\
= \;& \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\right)}_{\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha}}\frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u} + \underbrace{\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}}_{\delta^\gamma{}_\alpha}\frac{\mathrm{d}^2 x'^\alpha}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\varepsilon}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\zeta}\frac{\mathrm{d}x'^\varepsilon}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x'^\zeta}{\mathrm{d}u} \\
= \;& \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha}\frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2 x'^\gamma}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\varepsilon}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\zeta}\frac{\mathrm{d}x'^\varepsilon}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x'^\zeta}{\mathrm{d}u},
\end{aligned}$$

ts.

$$\left(\left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' - \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x'^\alpha}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x'^\beta}{\mathrm{d}u} = 0.$$

Absoluuttisen derivaatan tensoriluonteen selvittäminen

Tutkitaan erotusta

$$\frac{\delta T'^\alpha}{\delta u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\delta T^\beta}{\delta u} = \frac{\mathrm{d}T'^\alpha}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\mathrm{d}T^\beta}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}' T'^\beta \frac{\mathrm{d}x'^\gamma}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\left\{ {\beta \atop \gamma\,\delta} \right\} T^\gamma \frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}.$$

Kaksi ensimmäistä termiä oikealla puolella sievenevät

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}T'^{\alpha}}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\mathrm{d}T^{\beta}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}T^{\beta}\right) - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\mathrm{d}T^{\beta}}{\mathrm{d}u} \\
= &\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)T^{\beta} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\mathrm{d}T^{\beta}}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\mathrm{d}T^{\beta}}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}T^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}u} \neq 0,
\end{aligned}$$

Erotuksen kaksi jälkimmäistä termiä sievenevät myös.

$$\begin{aligned}
&\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}' T'^{\beta}\frac{\mathrm{d}x'^{\gamma}}{\mathrm{d}u} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\left\{ {\beta \atop \gamma\,\delta} \right\} T^{\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\delta}}{\mathrm{d}u} \\
= &\left(\left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}}\right)\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\eta}}T^{\eta}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\vartheta}}\frac{\mathrm{d}x^{\vartheta}}{\mathrm{d}u} - \\
&\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\left\{ {\beta \atop \gamma\,\delta} \right\} T^{\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\delta}}{\mathrm{d}u} \\
= &\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\}\delta^{\varepsilon}{}_{\eta}T^{\eta}\delta^{\zeta}{}_{\vartheta}\frac{\mathrm{d}x^{\vartheta}}{\mathrm{d}u} + \frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\eta}}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\vartheta}}T^{\eta}\frac{\mathrm{d}x^{\vartheta}}{\mathrm{d}u} - \\
&\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\left\{ {\beta \atop \gamma\,\delta} \right\} T^{\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\delta}}{\mathrm{d}u} \\
= &\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\varepsilon}\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\gamma}}T^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}u},
\end{aligned}$$

missä viimeisessä vaiheessa on vaihdettu, tulevaa silmällä pitäen, summausindeksejä ($\eta \mapsto \beta$, $\beta \mapsto \varepsilon$, $\vartheta \mapsto \gamma$ ja $\gamma \mapsto \zeta$). Nyt huomataan, että koska

$$0 = \frac{\partial \delta^{\delta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\gamma}}\right) = \frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\varepsilon}\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial^2 x'^{\zeta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}},$$

mistä puolittain $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}$:lla kertomalla saadaan

$$\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\varepsilon}\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} = 0,$$

niin

$$\frac{\delta T'^{\alpha}}{\delta u} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{\delta T^{\beta}}{\delta u} = \left(\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{\varepsilon}\partial x'^{\zeta}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\zeta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}\right)T^{\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}u} = 0.$$

Variaatiointegraalin derivaatta $\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v}$

Koska $I(v)$ on invariantti, tiedetään, että

$$\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{\delta I(v)}{\delta v}.$$

Siten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{\delta I(v)}{\delta v} &= \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta v}\left(U^\alpha U^\beta\right)\mathrm{d}u \\
&\overset{2}{=} \int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}\left(\frac{\delta V^\alpha}{\delta u}U^\beta + U^\alpha\frac{\delta V^\beta}{\delta u}\right)\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha\frac{\delta V^\beta}{\delta u}\mathrm{d}u \\
&= 2\Big/_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}U^\alpha V^\beta - 2\int_{u_A}^{u_B} g_{\alpha\beta}\frac{\delta U^\alpha}{\delta u}V^\beta\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

B.2 Lukuun 4 liittyvät laskut

Differentiaaliyhtälöryhmän 4.6 ratkaiseminen tapauksessa $k(l) =$ vakio $\neq 0$ ja $\tau(l) =$ vakio $\neq 0$

Yhtälöryhmä

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} &= k\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \quad (0) \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l} &= -k\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T} + \tau\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B} \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}}{\mathrm{d}l} &= -\tau\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}.
\end{cases}$$

saadaan (derivoimalla ensimmäistä yhtälöä kaksi kertaa ja toista kerran) muotoon (4.6)

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}^3\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l^3} &= k\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l^2} \quad (1) \\
\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l^2} &= -k\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} + \tau\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}}{\mathrm{d}l} \quad (2) \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}}{\mathrm{d}l} &= -\tau\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \quad (3).
\end{cases}$$

Sijoittamalla saadaan differentiaaliyhtälö $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}$:lle:

$$\frac{\mathrm{d}^3\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l^3} \overset{(1)}{=} k\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l^2} \overset{(2)}{=} -k^2\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} + k\tau\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}}{\mathrm{d}l} \overset{(3)}{=} -k^2\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} - k\tau^2\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \overset{(0)}{=} -k^2\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} - \tau^2\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l},$$

---

[2]

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta v}(U^\alpha U^\beta) &= \frac{\delta U^\alpha}{\delta v}U^\beta + U^\alpha\frac{\delta U^\beta}{\delta v} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}v} + \begin{Bmatrix}\alpha \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix} U^\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}v}\right)U^\beta + U^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}U^\beta}{\mathrm{d}v} + \begin{Bmatrix}\beta \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix} U^\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}v}\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u} + \begin{Bmatrix}\alpha \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix}\frac{\partial x^\gamma}{\partial u}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}v}\right)U^\beta + U^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{\partial x^\beta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}\beta \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix}\frac{\partial x^\gamma}{\partial u}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}v}\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}u} + \begin{Bmatrix}\alpha \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix} V^\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\right)U^\beta + U^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}V^\beta}{\mathrm{d}u} + \begin{Bmatrix}\beta \\ \gamma\,\delta\end{Bmatrix} V^\gamma\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\right) \\
&= \frac{\delta V^\alpha}{\delta u}U^\beta + U^\alpha\frac{\delta V^\beta}{\delta u}
\end{aligned}$$

siis

$$\frac{\mathrm{d}^3\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l^3} + \Omega^2 \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} = 0,$$

missä on merkitty $\Omega^2 = k^2 + \tau^2$. Otetaan käyttöön koordinaatistoon liittyvät yksikkövektorit $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ ja $\hat{e}_3$ (vrt. (x,y,z)-koordinaatistoon yleensä liitettävät $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ ja $\hat{k}$) niin, että ratkaisu voidaan kirjoittaa näiden avulla muodossa

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} = -A\sin(\Omega l)\hat{e}_1 + B\cos(\Omega l)\hat{e}_2.$$

Tässä on otettu käyttöön vakiot A ja B jotka pitävät huolen siitä, että esiintyvät yksikkövektorit ($\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}$, $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$ ja $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}$) ovat oikean pituisia. Näillä valinnoilla

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l) = \frac{A}{\Omega}\cos(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{B}{\Omega}\sin(\Omega l)\hat{e}_2 + \vec{\mathrm{u}}_{T0},$$

missä $\vec{\mathrm{u}}_{T0}$ on vakiovektori.

Lähdetään selvittämään vielä tuntemattomia A:ta, B:tä ja $\vec{\mathrm{u}}_{T0}$:aa käyttäen päänormaalivektoria $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$. Koska

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}l} = -\frac{A}{k}\sin(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{B}{k}\cos(\Omega l)\hat{e}_2$$

ja koska

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}}{\mathrm{d}l} = \frac{A^2\Omega}{k^2}\sin(\Omega l)\cos(\Omega l) - \frac{B^2\Omega}{k^2}\sin(\Omega l)\cos(\Omega l) = 0,$$

pätee $A^2 = B^2$. Ja täten, koska sisätulon

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}(l)\cdot\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l) = -\frac{A^2}{k\Omega}\cos(\Omega l)\sin(\Omega l) + \frac{A^2}{k\Omega}\sin(\Omega l)\cos(\Omega l) + \vec{\mathrm{u}}_{T0}\cdot\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l) = \vec{\mathrm{u}}_{T0}\cdot\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}(l)$$

on oltava nolla ratakäyrän jokaisessa pisteessä (kaikilla l), on (vakio)vektori $\vec{\mathrm{u}}_{T0}$ yksikkövektorin $\hat{e}_3$:n suuntainen (sillä $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$ pyörii $\hat{e}_1$:n ja $\hat{e}_2$:n virittämässä tasossa). Toisin sanoen $\vec{\mathrm{u}}_{T0} = \mathrm{u}_{T0}\hat{e}_3$, missä u_{T0} on vakio.

$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T}$, $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N}$ ja $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{B}$ ovat yksikkövektoreita, joten

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} \cdot \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{N} = \frac{A^2}{k^2}\sin^2(\Omega l) + \frac{A^2}{k^2}\cos^2(\Omega l) = \frac{A^2}{k^2} = 1,$$

siis

$$A^2 = B^2 = k^2$$

ja

$$\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T} \cdot \hat{\mathrm{u}}_\mathrm{T} = \frac{k^2}{\Omega^2}\cos^2(\Omega l) + \frac{k^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega l) + \mathrm{u}_{T0}^2 = \frac{k^2}{\Omega^2} + \mathrm{u}_{T0}^2 = 1,$$

siis

$$\mathrm{u}_{T0} = (\pm)\left(1 - \frac{k^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\Omega^2 - k^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\Omega}.$$

Valitaan merkit niin, että

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} &= \frac{k}{\Omega}\cos(\Omega l)\hat{e}_1 - \frac{k}{\Omega}\sin(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{\tau}{\Omega}\hat{e}_3, \\ \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}} &= -\sin(\Omega l)\hat{e}_1 - \cos(\Omega l)\hat{e}_2 \qquad\qquad \text{ja} \\ \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}l} + \frac{k}{\tau}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} = -\frac{\tau}{\Omega}\cos(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{\tau}{\Omega}\sin(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{k}{\Omega}\hat{e}_3, \end{cases}$$

missä $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{B}}$ on ratkaistu alkuperäisen yhtälöryhmän keskimmäisestä yhtälöstä.

Nyt koska ratakäyrän $\vec{x} = \vec{x}(l)$ yksikkötangenttivektori on $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}\left(= \frac{\mathrm{d}x(l)}{\mathrm{d}l}\right)$, on ratakäyrä

$$\vec{x}(l) = \frac{k}{\Omega^2}\sin(\Omega l)\hat{e}_1 + \frac{k}{\Omega^2}\cos(\Omega l)\hat{e}_2 + \frac{\tau}{\Omega}l\hat{e}_3 + \vec{x}_0,$$

toisin sanoen ympyräruuviviiva. $\vec{x}_0$ on vakiovektori, joka siirtää käyrän haluttuun paikkaan, kun koordinaatiston origo on valittu.

Lorentzin muutos

Kahden tetradin $\mu^{\alpha}_{(i)}$ ja $\nu^{\alpha}_{(j)}$ vektorien sisätuloista saadaan nk. Lorentzin matriisi:

$$\mu^{(i)}_{\alpha}\nu^{\alpha}_{(j)} = \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}.$$

Kertomalla tätä puolittain ensin $\nu^{(j)}_{\alpha}$:lla ja sitten $\mu^{\alpha}_{(i)}$:llä. Saadaan kaksi relaatiota

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\nu^{(j)}_{\alpha} &= \mu^{(i)}_{\beta}\nu^{\beta}_{(j)}\nu^{(j)}_{\alpha} = \mu^{(i)}_{\beta}\delta^{\beta}_{\alpha} = \mu^{(i)}_{\alpha} \quad \text{ja} \\ \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\mu^{\alpha}_{(i)} &= \mu^{(i)}_{\beta}\mu^{\alpha}_{(i)}\nu^{\beta}_{(j)} = \delta^{\alpha}_{\beta}\nu^{\beta}_{(j)} = \nu^{\alpha}_{(j)}. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\eta_{(jk)} = \mu^{\alpha}_{(j)}\mu_{(k)\alpha} = \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\nu^{\alpha}_{(i)}\mu_{(k)\alpha} = \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\eta_{(il)}\nu^{(l)\alpha}\mu_{(k)\alpha} = \mathrm{L}^{(i)}{}_{(j)}\eta_{(il)}\mathrm{L}^{(l)}{}_{(k)},$$

matriisiyhtälönä

$$\mathrm{L}^T\eta\mathrm{L} = \eta$$

Yhtälön $\frac{\mathrm{d}^3\mu^{\alpha}_{(4)}}{\mathrm{d}u^3} + \Omega^2\frac{\mathrm{d}\mu^{\alpha}_{(4)}}{\mathrm{d}u} = 0$ ratkaisut

Yo. yhtälöhän on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $\frac{\mathrm{d}\mu^{\alpha}_{(4)}}{\mathrm{d}u}$:lle ja sen ratkaisut riippuvat Ω^2:n arvoista. Sopivia (vakio)vektoreita m^{α} ja n^{α} käyttäen joko

1. $B^2 - C^2 < 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^{\alpha}_{(4)}}{\mathrm{d}u} = \sin(\Omega u)\mathrm{m}^{\alpha} + \cos(\Omega u)\mathrm{n}^{\alpha}$, (jossa on merkitty $\Omega^2 = C^2 - B^2 > 0$)

2. $B^2 - C^2 > 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^{\alpha}_{(4)}}{\mathrm{d}u} = \sinh(\Omega u)\mathrm{m}^{\alpha} + \cosh(\Omega u)\mathrm{n}^{\alpha}$ (nyt $\Omega^2 = B^2 - C^2 > 0$) tai

3. $B^2 - C^2 = 0$, jolloin $\frac{\mathrm{d}\mu^\alpha_{(4)}}{\mathrm{d}u} = u\mathrm{m}^\alpha + \mathrm{n}^\alpha$.

Tällöin

1. $\mu^\alpha_{(4)} = -\frac{1}{\Omega}\cos(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$,

2. $\mu^\alpha_{(4)} = \frac{1}{\Omega}\cosh(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega}\sinh(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$ tai

3. $\mu^\alpha_{(4)} = \frac{1}{2}u^2\mathrm{m}^\alpha + u\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha$,

missä myös p^α on vakiovektori. Selvästikään tapauksessa 3. $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)} \not\equiv -1$, joten tämä vaihtoehto hylätään ilman sen kummempia perusteluja.

Tapauksessa 1. yhtäsuuruus $-1 = g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)}$ toteutuu esimerkiksi valitsemalla $g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{m}^\beta = \Omega^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{n}^\beta$ & $g_{\alpha\beta}\mathrm{p}^\alpha\mathrm{p}^\beta = -2$ & $g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{n}^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{p}^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{p}^\beta = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = & \quad g_{\alpha\beta}\left[\tfrac{1}{\Omega^2}\cos^2(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha\mathrm{m}^\beta + \tfrac{1}{\Omega^2}\sin^2(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha\mathrm{n}^\beta + \mathrm{p}^\alpha\mathrm{p}^\beta \right. \\ - & \quad \left. \tfrac{2}{\Omega^2}\cos(\Omega u)\sin(\Omega)\mathrm{m}^\alpha\mathrm{n}^\beta - \tfrac{2}{\Omega}\cos(\Omega u)\mathrm{m}^\alpha\mathrm{p}^\beta + \tfrac{2}{\Omega}\sin(\Omega u)\mathrm{n}^\alpha\mathrm{p}^\beta\right] \\ = & \quad \sin^2(\Omega u) + \cos^2(\Omega u) - 2 = -1. \end{aligned}$$

Kun valitaan $u = s$, niin $\mu^\alpha_{(4)}(s) = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$ ja

$$x^\alpha(s) = -\frac{1}{\Omega^2}\sin(\Omega s)\mathrm{m}^\alpha - \frac{1}{\Omega^2}\cos(\Omega s)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha s + \mathrm{q}^\alpha,$$

(myös q^α on vakiovektori.)

Tapauksessa 2. yhtäsuuruus $-1 = g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\beta_{(4)}$ toteutuu esim. valitsemalla $g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{m}^\beta = -2\Omega^2$ & $g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{n}^\beta = 2\Omega^2$ & $g_{\alpha\beta}\mathrm{p}^\alpha\mathrm{p}^\beta = 1$ & $g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{n}^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{p}^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{p}^\beta = 0$, sillä tällöin

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\mu^\alpha_{(4)}\mu^\alpha_{(4)} = & \quad g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{m}^\beta\tfrac{1}{\Omega^2}\sinh^2(\Omega u) + g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{n}^\beta\tfrac{1}{\Omega^2}\cosh^2(\Omega u) + g_{\alpha\beta}\mathrm{p}^\alpha\mathrm{p}^\beta \\ + & \quad g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{n}^\beta\tfrac{2}{\Omega^2}\sinh(\Omega u)\cosh(\Omega u) + g_{\alpha\beta}\mathrm{m}^\alpha\mathrm{p}^\beta\tfrac{2}{\Omega}\cosh(\Omega u) \\ + & \quad g_{\alpha\beta}\mathrm{n}^\alpha\mathrm{p}^\beta\tfrac{2}{\Omega}\sinh(\Omega u) \\ = - & \quad 2\sinh^2(\Omega u) + 2\cosh^2(\Omega u) + 1 = -1. \end{aligned}$$

Kun otetaan $u = s$, niin $\mu^\alpha_{(4)}(s) = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$ ja

$$x^\alpha(s) = \frac{1}{\Omega^2}\sinh(\Omega s)\mathrm{m}^\alpha + \frac{1}{\Omega^2}\cosh(\Omega s)\mathrm{n}^\alpha + \mathrm{p}^\alpha s + \mathrm{q}^\alpha,$$

(myös q^α on vakiovektori.)

B.3 Lukuun 5 liittyvät laskut

Siirtymäfunktion $\sigma(x_B|x_A)$ kovariantit derivaatat

Taulukkoon 5.1 sivulla 39 on taulukoitu siirtymäfunktion ensimmäisten kertalukujen kovariantteja derivaattoja. Tässä kappaleessa esitetään perustelut taulukon tuloksille.

Koska $\sigma(x_B|x_A)$ on bi-invariantti[1], on sen ensimmäinen kovariantti derivaatta — sekä x_A:n että x_B:n suhteen — sama kuin sen tavallinen derivaatta. Toisin sanoen

$$\sigma_{;\alpha_A} = \sigma_{,\alpha_A} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_A^\alpha},$$

joka käyttäytyy kuten kovariantti vektori muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$ ja on invariatti muunnoksessa $x_B \mapsto x'_B$. Samoin

$$\sigma_{;\alpha_B} = \sigma_{,\alpha_B} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_B^\alpha},$$

joka on invariantti muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$ ja joka muuntuu kuten kovariantti vektori muunnoksessa $x_B \mapsto x'_B$. Vastaava päättely käy myös toisen kertaluvun derivaatoille:

$$\sigma_{;\alpha_A\beta_A} = (\sigma_{;\alpha_A})_{;\beta_A} = (\sigma_{,\alpha_A})_{;\beta_A} = \sigma_{,\alpha_A\beta_A} - \left\{ {\gamma_A \atop \alpha_A\,\beta_A} \right\} \sigma_{,\gamma_A}.$$

Tämä on invariantti muunnoksessa $x_B \mapsto x'_B$, mutta toisen kertaluvun kovariantti tensori muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$, sillä

$$\begin{aligned}
\sigma'_{,\alpha_A\beta_A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_A^\alpha}\right)' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_A^\beta}\right)' = \frac{\partial x_A^\gamma}{\partial x_A'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_A^\gamma} \left(\frac{\partial x_A^\delta}{\partial x_A'^\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_A^\delta} \right) \\
&= \underbrace{\frac{\partial x_A^\gamma}{\partial x_A'^\alpha} \frac{\partial x_A'^\varepsilon}{\partial x_A^\gamma}}_{=\delta_\alpha{}^\varepsilon} \frac{\partial^2 x_A^\delta}{\partial x_A'^\varepsilon \partial x_A'^\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_A^\delta} + \frac{\partial x_A^\gamma}{\partial x_A'^\alpha} \frac{\partial x_A^\delta}{\partial x_A'^\beta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_A^\gamma \partial x_A^\delta}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\left\{ {\gamma \atop \alpha\,\beta} \right\}' \sigma'_\gamma &= \left(\left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x'^\gamma} \\
&= \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\zeta} \right\} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\delta}
\end{aligned}$$

missä on käytetty aiemmin saatua muunnoskaavaa Christoffelin symbolille (3.5). Niinpä

$$\sigma'_{,\alpha_A\beta_A} - \left\{ {\gamma_A \atop \alpha_A\,\beta_A} \right\}' \sigma'_{,\gamma_A} = \frac{\partial x_A^\gamma}{\partial x_A'^\alpha} \frac{\partial x_A^\delta}{\partial x_A'^\beta} \left(\sigma_{,\gamma_A\delta_A} - \left\{ {\varepsilon_A \atop \gamma_A\,\delta_A} \right\} \sigma_{,\varepsilon_A} \right)$$

[1] invariantti sekä muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$ pisteessä A että muunoksessa $x_B \mapsto x'_B$ pisteessä B

eli $\sigma_{;\alpha_A\beta_A}$ on toisen kertaluvun kovariantti tensori.

Vastaavasti $\sigma_{;\alpha_B\beta_B}$ on invariantti muunnoksessa $x_A \mapsto x'_A$ ja toisen kertaluvun kovariantti tensori muunnoksessa $x_B \mapsto x'_B$.

$\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$ on kovariantti vektori molemmissa muunnoksissa, sillä

$$\sigma_{;\alpha_A\beta_B} = (\sigma_{;\alpha_A})_{;\beta_B} = (\sigma_{,\alpha_A})_{;\beta_B} = (\sigma_{,\alpha_A})_{,\beta_B} = \sigma_{,\alpha_A\beta_B} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_B^\beta \partial x_A^\alpha}$$

Samoin

$$\sigma_{;\alpha_B\beta_A} = \sigma_{,\alpha_B\beta_A} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_A^\beta \partial x_B^\alpha}$$

on molemmissa muunnoksissa kovariantti vektori.

Näin voidaan jatkaa myös korkeampiasteisiin kovariantteihin derivaattoihin, mutta nämä riittäkööt tällä erää.

Kovariantit derivaatat rajalla $B \to A$

Toinen kovariantti derivaatta

Otetaan lähtökohdaksi siirtymäfunktion osittaisdifferentiaaliyhtälö (5.6)

$$\begin{aligned} 4\sigma &= g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A}, \quad \text{jolloin} \\ 4\sigma_{;\gamma_A} &= g^{\alpha_A\beta_A}(\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}\sigma_{;\beta_A} + \sigma_{;\alpha_A}\sigma_{;\beta_A\gamma_A}) = 2g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}\sigma_{;\beta_A}. \end{aligned}$$

Toisaalta $\sigma_{;\alpha_A} = -2(u_B - u_A)U_{\alpha_A}$ (5.5), joten

$$\begin{aligned} -8(u_B - u_A)U_{\gamma_A} &= 2g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}(-2(u_B - u_A)U_{\beta_A}) \quad \text{eli} \\ 2U_{\gamma_A} &= g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}U_{\beta_A} = g^{\alpha_A\beta_A}\sigma_{;\alpha_A\gamma_A}g_{\beta_A\delta_A}U^{\delta_A} = \sigma_{;\alpha_A\gamma_A}U^{\alpha_A}. \end{aligned}$$

Nyt rajalla $x_B \to x_A$ tiedetään, että U^α on yksikäsitteinen, joten

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\gamma_A} = 2g_{\alpha_A\gamma_A}.$$

Lasketaan seuraavaksi $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$, siis derivoidaan ensin toisen pisteen koordinaattien suhteen, sitten toisten.

Otetaan mielivaltainen vektori T^α, jota siirretään yhdensuuntaisesti pisteestä A pisteeseen B. Siis

$$\frac{\delta T^\alpha}{\delta u} = 0.$$

Nyt pisteessä A (käyräparametri u_A) T^α:n tulo siirtymäfunktion ensimmäisen kovariantin derivaatan kanssa on invariantti, merkitään $T(u_A) := \sigma_{;\alpha_A}T^\alpha(u_A)$. Vastaavasti merkitään (pisteessä B) $T(u_B) := \sigma_{;\alpha_B}T^\alpha(u_B)$.

Invariantin muodostamisen idea on siinä, että $T(u_B)$:n voi kehittää Taylorin sarjaksi pisteessä A (oletus, että pisteet ovat lähellä toisiaan, on edelleen voimassa), ja koska invariantin tavallinen ja kovariantti derivaatta ovat samat, päästään kiinni $\sigma_{;\alpha_B}$:n kovarianttiin derivaattaan $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$.

$$
\begin{aligned}
T(u_B) &= T(u_A) + \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_B}\right|_{u_B=u_A}(u_B-u_A)+\cdots \\
&= T(u_A) + \left.\frac{\delta T}{\delta u_B}\right|_{u_B=u_A}(u_B-u_A)+\cdots \\
&\overset{\frac{\delta T^\alpha}{\delta u_B}=0}{=} T(u_A) + \left(\frac{\delta\sigma_{;\alpha_A}}{\delta u_B}\right)_{u_B=u_A} T^\alpha+\cdots \\
&= T(u_A) + \left(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}\right)U^{\beta_A}T^{\alpha_A}(u_B-u_A)+\cdots,
\end{aligned}
$$

missä U^α on tangenttivektori $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$ Lasketaan myös $T(u_A)$: Samaan tapaan kuin aiemmin

$$
\begin{aligned}
T(u_A) &= T(u_B) + \left.\frac{\delta T}{\delta u_A}\right|_{u_A=u_B}(u_A-u_B)+\cdots \\
&= T(u_B) + \left(\lim_{x_A\to x_B}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}\right)U^{\beta_B}T^{\alpha_B}(u_A-u_B)+\cdots.
\end{aligned}
$$

Muodostetaan erotus

$$
\begin{aligned}
T(u_B)-T(u_A) &= T(u_A) + \left(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}\right)U^{\beta_A}T^{\alpha_A}(u_B-u_A)+\cdots \\
&\quad -T(u_B) - \left(\lim_{x_A\to x_B}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}\right)U^{\beta_B}T^{\alpha_B}(u_A-u_B)-\cdots,
\end{aligned}
$$

jaetaan puolittain (u_B-u_A):lla ja jätetään korkeamman kertaluvun termit pois laskuista

$$
2\cdot\frac{T(u_B)-T(u_A)}{u_B-u_A} = \left(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}\right)U^{\beta_A}T^{\alpha_A} + \left(\lim_{x_A\to x_B}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}\right)U^{\beta_B}T^{\alpha_B}
$$

ja muodostetaan T:n derivaatta pisteessä A ottamalla erotusosamäärän raja-arvo $(u_B\to u_A)$

$$
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_A} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B} + \lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}\right)U^{\beta_A}T^{\alpha_A}.
$$

Toisaalta voidaan ottaa raja-arvo $B\to A$ heti:

$$
T(u_A) = \underbrace{(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A})}_{=0}T^{\alpha_A} = 0 \quad \text{ja}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_A} = \underbrace{(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A})}_{=0}{}_{;\beta_A}U^{\beta_A}T^{\alpha_A} = 0.
$$

Niinpä $\frac{1}{2}\left(\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}\right)U^{\beta_A}T^{\alpha_A}=0$, eli

$$\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_B}=-\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha_A\beta_A}.$$

Kolmas kovariantti derivaatta

$\sigma_{;\alpha\beta\gamma}+\sigma_{;\alpha\gamma\beta}=0$**:** Jatketaan siitä, mihin edellisessä kappaleessa jäätiin. Tässä kaikki derivaatat lasketaan pisteessä A, jollei toisin mainita.

$$2\sigma_{;\gamma\delta}=g^{\alpha\beta}(\sigma_{;\alpha\gamma\delta}\sigma_{;\beta}+\sigma_{;\alpha\gamma}\sigma_{;\beta\delta})$$

Joten koska

$$\begin{aligned}
2\underline{\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon}} &= g^{\alpha\beta}(\sigma_{;\alpha\gamma\delta\varepsilon}\sigma_{;\beta}+\sigma_{;\alpha\gamma\delta}\sigma_{;\beta\varepsilon}+\sigma_{;\alpha\gamma\varepsilon}\sigma_{;\beta\delta}+\sigma_{;\alpha\gamma}\sigma_{;\beta\delta\varepsilon})\\
&\xrightarrow{x_B\to x_A} 2g^{\alpha\beta}(\sigma_{;\alpha\gamma\delta}g_{\beta\varepsilon}+\sigma_{;\alpha\gamma\varepsilon}g_{\beta\delta}+g_{\alpha\gamma}\sigma_{;\beta\delta\varepsilon})\\
&= 2(\sigma_{;\varepsilon\gamma\delta}+\sigma_{;\delta\gamma\varepsilon}+\underline{\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon}}),
\end{aligned}$$

pätee rajalla, jossa $x_B\to x_A$, tulos

$$\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\varepsilon\gamma\delta}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\delta\gamma\varepsilon}=0.$$

Siten, vaihtamalla molempien termien kaksi ensimmäistä indeksiä[2], saadaan

$$\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\beta\gamma}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\gamma\beta}=0.$$

$\sigma_{;\alpha\beta\gamma}-\sigma_{;\alpha\gamma\beta}=\mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{;\delta}$**:**

$$\begin{aligned}
\sigma_{;\alpha\beta\gamma}-\sigma_{;\alpha\gamma\beta} &= (\sigma_{;\alpha\beta})_{;\gamma}-(\sigma_{;\alpha\gamma})_{;\beta}\\
&= \sigma_{;\alpha\beta,\gamma}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\sigma_{;\delta\beta}-\underline{\left\{{\delta \atop \beta\,\gamma}\right\}\sigma_{;\alpha\delta}}-\sigma_{;\alpha\gamma,\beta}+\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\sigma_{;\delta\gamma}\\
&\quad+\underline{\left\{{\delta \atop \gamma\,\beta}\right\}\sigma_{;\alpha\delta}}\\
&= \left(\underline{\sigma_{;\alpha,\beta}}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\sigma_{;\delta}\right)_{,\gamma}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\left(\sigma_{;\delta,\beta}-\left\{{\varepsilon \atop \delta\,\beta}\right\}\sigma_{;\varepsilon}\right)\\
&\quad-\left(\underline{\sigma_{;\alpha,\gamma}}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\sigma_{;\delta}\right)_{,\beta}+\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\left(\sigma_{;\delta,\gamma}-\left\{{\varepsilon \atop \delta\,\gamma}\right\}\sigma_{;\varepsilon}\right)\\
&= -\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}_{,\gamma}\sigma_{;\delta}-\underline{\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\sigma_{;\delta,\gamma}}-\underline{\underline{\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\sigma_{;\delta,\beta}}}+\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\left\{{\varepsilon \atop \delta\,\beta}\right\}\sigma_{;\varepsilon}\\
&\quad+\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}_{,\beta}\sigma_{;\delta}+\underline{\underline{\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}\sigma_{;\delta,\beta}}}+\underline{\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\sigma_{;\delta,\gamma}}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}\left\{{\varepsilon \atop \delta\,\gamma}\right\}\sigma_{;\varepsilon}\\
&= \left(\left\{{\delta \atop \alpha\,\gamma}\right\}_{,\beta}-\left\{{\delta \atop \alpha\,\beta}\right\}_{,\gamma}+\left\{{\varepsilon \atop \alpha\,\gamma}\right\}\left\{{\delta \atop \varepsilon\,\beta}\right\}-\left\{{\varepsilon \atop \alpha\,\beta}\right\}\left\{{\delta \atop \varepsilon\,\gamma}\right\}\right)\sigma_{;\delta}\\
&= \mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{;\delta},
\end{aligned}$$

[2] $\sigma_{;\alpha\beta}=(\sigma_{,\alpha})_{;\beta}=\sigma_{,\alpha\beta}-\left\{{\gamma \atop \alpha\,\beta}\right\}\sigma_{,\gamma}=\sigma_{,\beta\alpha}-\left\{{\gamma \atop \beta\,\alpha}\right\}\sigma_{,\gamma}=\sigma_{;\beta\alpha}$

missä

$$\mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ {\delta \atop \alpha\,\gamma} \right\}_{,\beta} - \left\{ {\delta \atop \alpha\,\beta} \right\}_{,\gamma} + \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\,\gamma} \right\} \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\beta} \right\} - \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\,\beta} \right\} \left\{ {\delta \atop \varepsilon\,\gamma} \right\}$$

on sekamuotoinen kaarevuus- eli Riemannin tensori. Niinpä

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha\beta\gamma} - \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha\gamma\beta} = \lim_{x_B \to x_A} \left(\mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} \sigma_{;\delta} \right) = 0.$$

Kuten toisenkin kovariantin derivaatan kohdalla, voi tässäkin tietysti laskea derivaattoja eri pisteiden suhteen (eri järjestyksessä). Lasketaan nyt esimerkin vuoksi $\sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_B}$. Periaate on sama kuin $\sigma_{;\alpha_A\beta_B}$:n laskemisessa; Otetaan kaksi vektoria T^α ja S^α, joita siirretään yhdensuuntaisesti pitkin geodeesia $x^\alpha = x^\alpha(u)$ ja muodostetaan sisätulo (invariantti) $\sigma_{;\alpha\beta} T^\alpha S^\beta =: T$.

Kehitetään tulo Taylorin sarjaksi pisteissä A ja B

$$\begin{aligned}
T(u_B) &= T(u_A) + \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_B}\right|_{u_B = u_A} (u_B - u_A) + \cdots \\
&= T(u_A) + \left.\frac{\delta T}{\delta u_B}\right|_{u_B = u_A} (u_B - u_A) + \cdots \\
&= T(u_A) + \left(\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_B} \right) U^{\gamma_A} T^{\alpha_A} S^{\beta_A} (u_B - u_A) + \cdots \quad \text{ja} \\
T(u_A) &= T(u_B) + \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_A}\right|_{u_A = u_B} (u_A - u_B) + \cdots \\
&= T(u_B) + \left.\frac{\delta T}{\delta u_A}\right|_{u_A = u_B} (u_A - u_B) + \cdots \\
&= T(u_B) + \left(\lim_{x_A \to x_B} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} \right) U^{\gamma_B} T^{\alpha_B} S^{\beta_B} (u_A - u_B) + \cdots
\end{aligned}$$

Kuten toisenkin kovariantin derivaatan kohdalla, muodostetaan T:n derivaatta vähentämällä yllä lasketut sarjat toisistaan, jakamalla $(u_B - u_A)$:lla ja ottamalla raja-arvo $u_B \to u_A$:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_A} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_B} + \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} \right) U^{\gamma_A} T^{\alpha_A} S^{\beta_A}.$$

Toisaalta

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u_A} = \frac{\delta T}{\delta u_A} = \frac{\delta \sigma_{;\alpha_A\beta_A}}{\delta u_A} T^{\alpha_A} S^{\beta_A} + \sigma_{;\alpha_A\beta_A} \frac{\delta T^{\alpha_A}}{\delta u_A} S^{\beta_A} + \sigma_{;\alpha_A\beta_A} T^{\alpha_A} \frac{\delta S^{\beta_A}}{\delta u_A} \to 0,$$

kun $B \to A$. Siten

$$\lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_B} = - \lim_{x_B \to x_A} \sigma_{;\alpha_A\beta_A\gamma_A} (= 0).$$

Neljäs kovariantti derivaatta

$\lim_{x_B\to x}\sigma_{;\alpha\beta\gamma\delta}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\delta\beta\gamma}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\gamma\delta\beta}=0$: Jatketaan derivointia A:ssa:

$$\begin{aligned}
2\underline{\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon\zeta}} &= g^{\alpha\beta}(\sigma_{;\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta}\sigma_{;\beta}+\sigma_{;\alpha\gamma\delta\varepsilon}\sigma_{;\beta\zeta}+\sigma_{;\alpha\gamma\delta\zeta}\sigma_{;\beta\varepsilon}+\sigma_{;\alpha\gamma\delta}\sigma_{;\beta\varepsilon\zeta}\\
&\quad +\sigma_{;\alpha\gamma\varepsilon\zeta}\sigma_{;\beta\delta}+\sigma_{;\alpha\gamma\varepsilon}\sigma_{;\beta\delta\zeta}+\sigma_{;\alpha\gamma\zeta}\sigma_{;\beta\delta\varepsilon}+\sigma_{;\alpha\gamma}\sigma_{;\beta\delta\varepsilon\zeta})\\
&\overset{x_B\to x_A}{\longrightarrow} 2g^{\alpha\beta}(\sigma_{;\alpha\gamma\delta\varepsilon}g_{;\beta\zeta}+\sigma_{;\alpha\gamma\delta\zeta}g_{;\beta\varepsilon}+\sigma_{;\alpha\gamma\varepsilon\zeta}g_{;\beta\delta}+g_{;\alpha\gamma}\sigma_{;\beta\delta\varepsilon\zeta})\\
&= 2(\sigma_{;\zeta\gamma\delta\varepsilon}+\sigma_{;\varepsilon\gamma\delta\zeta}+\sigma_{;\delta\gamma\varepsilon\zeta}+\underline{\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon\zeta}}).
\end{aligned}$$

Niinpä

$$\lim_{x_B\to x_A}(\sigma_{;\zeta\gamma\delta\varepsilon}+\sigma_{;\varepsilon\gamma\delta\zeta}+\sigma_{;\delta\gamma\varepsilon\zeta})=0,$$

mistä vaihtamalla jokaisesta termistä kaksi ensimmäistä indeksiä keskenään saadaan

$$\lim_{x_B\to x_A}(\sigma_{;\gamma\zeta\delta\varepsilon}+\sigma_{;\gamma\varepsilon\delta\zeta}+\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon\zeta})=0$$

ja keskimmäisestä kahden jälkimmäisen vaihtaminen keskenään[3] antaa

$$\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\beta\gamma\delta}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\delta\beta\gamma}+\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\alpha\gamma\delta\beta}=0.$$

Riccin tensori ja kaarevuusinvariantti

Käyttäen hyväksi Riccin tensorin symmetrisyyttä ja Riemannin tensorin ominaisuutta $\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\mathrm{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ saadaan (pisteessä A)

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathrm{R}^{\delta}{}_{\alpha\beta\delta}+\mathrm{R}^{\delta}{}_{\beta\alpha\delta})=-\frac{1}{2}g^{\delta\gamma}(\mathrm{R}_{\gamma\alpha\delta\beta}+\mathrm{R}_{\gamma\beta\delta\alpha})\\
&= \frac{3}{4}g^{\delta\gamma}\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\delta\alpha\beta}=\frac{3}{4}\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma}{}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Kaarevuusinvariantti on tällöin

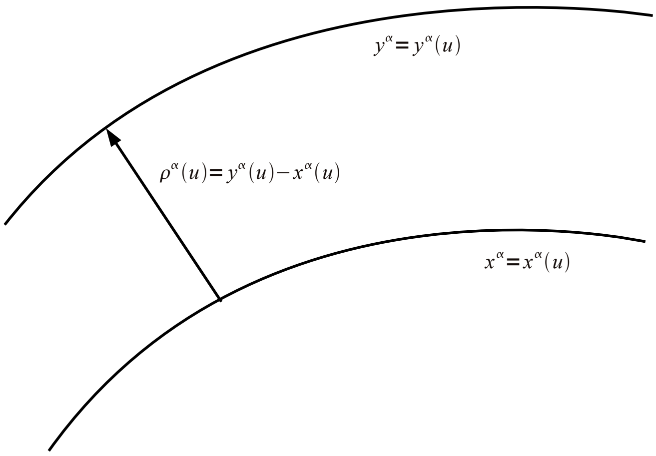
$$\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma}{}^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\alpha}=g^{\alpha\beta}\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma}{}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}==\frac{4}{3}g^{\alpha\beta}\mathrm{R}_{\alpha\beta}=\frac{4}{3}\mathrm{R}.$$

Geodeettisen poikkeaman yhtälön johtaminen

Tutkitaan kahden lähekkäisen, toisiaan leikkaamattoman geodeesin ($x^\alpha=x^\alpha(u)$ ja $y^\alpha=y^\alpha(u)$) erotusta $\rho^\alpha(u)=y^\alpha(u)-x^\alpha(u)$. Lähekkäinen tarkoittaa tässä sitä, että ρ^α on "pieni". Oletetaan myös, että geodeesit ovat suunnilleen yhdensuuntaiset, eli myös $\mathrm{d}\rho^\alpha/\mathrm{d}u$ on "pieni".

[3]

$$\begin{aligned}
\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\zeta\delta\varepsilon} &= -\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\varepsilon\delta\zeta}-\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon\zeta}\\
&= -\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\delta\varepsilon\zeta}-\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\varepsilon\delta\zeta}\quad=\lim_{x_B\to x_A}\sigma_{;\gamma\zeta\varepsilon\delta}
\end{aligned}$$



Kuva B.1: Kaksi lähekkäistä, lähes yhdensuuntaista geodeesia ja niiden välinen erotusvektori

x^α:aan ja y^α:aan liittyvät geodeettiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 y^\alpha}{\mathrm{d}u^2} + \overline{\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}} \frac{\mathrm{d}y^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\gamma}{\mathrm{d}u} = 0.\end{aligned}$$

Tässä on merkitty viivalla y^α:aan liittyvää Christoffelin symbolia erottamaan se x^α:aan liittyvästä Christoffelin symbolista.

Koska $y^\alpha = x^\alpha + \rho^\alpha$, niin sarjaksi kehitettynä (ensimmäisessä kertaluvussa)

$$\overline{\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}} = \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta} \rho^\delta.$$

Tällöin geodeettisten yhtälöiden erotus on (edelleen 1. kertaluvussa)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}^2y^\alpha}{\mathrm{d}u^2} - \overline{\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}}\frac{\mathrm{d}y^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\gamma}{\mathrm{d}u} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}u^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}^2(x^\alpha+\rho^\alpha)}{\mathrm{d}u^2} - \\
&\quad - \left(\left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta}\rho^\delta \right) \frac{\mathrm{d}(x^\beta+\rho^\beta)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}(x^\gamma+\rho^\gamma)}{\mathrm{d}u} \\
&= -\frac{\mathrm{d}^2\rho^\alpha}{\mathrm{d}u^2} - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\rho^\gamma}{\mathrm{d}u} - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}\rho^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\rho^\delta \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}\rho^\alpha}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\rho^\beta \right) + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\rho^\beta + \\
&\quad + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2x^\gamma}{\mathrm{d}u^2}}_{4}\rho^\beta - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\rho^\delta - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\rho^\gamma}{\mathrm{d}u} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho^\alpha}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\rho^\beta \right)}_{\frac{\delta\rho^\alpha}{\delta u}} - \left\{ {\alpha \atop \delta\,\varepsilon} \right\} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\rho^\delta}{\mathrm{d}u} + \left\{ {\delta \atop \beta\,\gamma} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\rho^\beta \right)}_{\frac{\delta\rho^\alpha}{\delta u}} \frac{\mathrm{d}x^\varepsilon}{\mathrm{d}u} - \\
&\quad - \underbrace{\left(\left\{ {\alpha \atop \gamma\,\delta} \right\}_{,\beta} - \left\{ {\alpha \atop \beta\,\gamma} \right\}_{,\delta} + \left\{ {\varepsilon \atop \gamma\,\delta} \right\}\left\{ {\alpha \atop \beta\,\varepsilon} \right\} - \left\{ {\varepsilon \atop \beta\,\gamma} \right\}\left\{ {\alpha \atop \delta\,\varepsilon} \right\} \right)}_{\mathrm{R}^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\rho^\beta \\
&= -\frac{\delta^2\rho^\alpha}{\delta u^2} - \mathrm{R}^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\rho^\beta .
\end{aligned}
$$

Siis

$$\frac{\delta^2\rho^\alpha}{\delta u^2} + \mathrm{R}^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}U^\gamma U^\delta \rho^\beta = 0,$$

joka on geodeettisen poikkeaman yhtälö

Yhtälön $\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} = g\,(x, f(x))$ muuntaminen integraaliyhtälöksi

Nyt on käsiteltävänä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} = g[x, f(x)], \quad \text{missä } a \le x \le b,$$

reunaehtoina

$$f(a) = f_a(=0) \quad \& \quad f(b) = f_b.$$

[4]

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\gamma}{\mathrm{d}u^2} = -\left\{ {\gamma \atop \delta\,\varepsilon} \right\} \frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\varepsilon}{\mathrm{d}u}$$

Saman yhtälön integraalimuoto on

$$f(x) = A + Bx + \int_a^b (x - x')\theta(x - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x',$$

(joka toteuttaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön). Tässä on otettu käyttöön integrointivakiot A ja B, jotka ratkaistaan seuraavaksi.

Koska $f(a) = f_a$ ja $f(b) = f_b$, niin

$$\begin{cases} f_a &= A + Ba + \int_a^b (a - x')\underbrace{\theta(a - x')}_{=0} g[x', f(x')]\mathrm{d}x' \quad \text{ja} \\ f_b &= A + Bb + \int_a^b (b - x')\underbrace{\theta(b - x')}_{=1} g[x', f(x')]\mathrm{d}x', \end{cases}$$

siis

$$\begin{cases} f_a &= A + Ba \\ f_b &= A + Bb + \int_a^b (b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x'. \end{cases}$$

Tästä laskemalla erotus

$$f_b - f_a = B(b - a) + \int_a^b (b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x'$$

ja ratkaisemalla kertoimet

$$\begin{cases} B &= \frac{f_b - f_a}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b (b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x' \quad \text{sekä} \\ A &= f_a - Ba = \frac{bf_a - af_b}{b-a} + \frac{a}{b-a}\int_a^b (b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x' \end{cases}$$

saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{bf_a - af_b}{b-a} + \frac{a}{b-a}\int_a^b (b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x' + \\ &\quad + \frac{f_b - f_a}{b-a}x - \frac{1}{b-a}\int_a^b x(b - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x' + \\ &\quad + \int_a^b (x - x')\theta(x - x')g[x', f(x')]\mathrm{d}x' \\ &= \frac{bf_a - af_b}{b-a} + \frac{f_b - f_a}{b-a}x + \\ &\quad + \int_a^b \left[\frac{(a - x)(b - x')}{b-a} + (x - x')\theta(x - x')\right] g[x', f(x')]\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

mistä identifioidaan Greenin funktio

$$\Gamma(x, x') \equiv \frac{(a - x)(b - x')}{b-a} + (x - x')\theta(x - x').$$ [5]

[5]

$$\Gamma(x, x') = \begin{cases} \frac{(a-x)(b-x')}{b-a}, & \text{kun } x < x' \\ \frac{(a-x')(b-x)}{b-a}, & \text{kun } x > x' \end{cases}$$

Kun (niinkuin nyt) $f(a)=0$, saadaan lopulta

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}f_b+\int_a^b \Gamma(x,x')g[x',f(x')]\mathrm{d}x'.$$

Geodeettisen poikkeaman absoluuttinen derivaatta pisteissä A ja B

Koska (5.26)

$$\frac{\delta\rho_\alpha}{\delta u}=\frac{1}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha\beta_B}\rho^{\beta_B}+\int_{u_A}^{u_B}\underbrace{\frac{\delta\Gamma(u,u')}{\delta u}}_{6}\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u'$$

siis

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_\alpha}{\delta u} &= \frac{1}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha\beta_B}\rho^{\beta_B}+\frac{1}{u_B-u_A}\int_u^{u_B}(u'-u_B)\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u'\\ &\quad+\frac{1}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u}(u'-u_A)\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u'.\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}\left.\tfrac{\delta\rho_\alpha}{\delta u}\right|_{u=u_A} := \tfrac{\delta\rho_{\alpha_A}}{\delta u} &= \frac{1}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B}+\\ &\quad+\frac{1}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_B)\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u' \quad \text{ja}\\ \left.\tfrac{\delta\rho_\alpha}{\delta u}\right|_{u=u_B} := \tfrac{\delta\rho_{\alpha_B}}{\delta u} &= \frac{1}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_B\beta_B}\rho^{\beta_B}+\\ &\quad+\frac{1}{u_B-u_A}\int_{u_A}^{u_B}(u'-u_A)\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_B\gamma'}\rho^{\delta'}\mathrm{d}u'\end{aligned}$$

Nyt koska (5.25)

$$\rho^{\delta'}=\rho^{\delta}(u')=\frac{u'-u_A}{u_B-u_A}\,\mathscr{G}^{\delta'}{}_{\beta_B}\rho^{\beta_B}+\cdots,$$

[6] Kun

$$\Gamma(u,u')=\begin{cases}\frac{(u_a-u)(u_B-u')}{u_B-u_A}, & \text{kun } u<u'\\ \frac{(u_A-u')(u_B-u)}{u_B-u_A}, & \text{kun } u'<u\end{cases}$$

niin

$$\frac{\delta\Gamma(u,u')}{\delta u}=\begin{cases}\frac{u'-u_B}{u_B-u_A}, & \text{kun } u<u'\\ \frac{u'-u_A}{u_B-u_A}, & \text{kun } u'<u.\end{cases}$$

niin iteroimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_{\alpha_A}}{\delta u} &= \frac{1}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\
&\quad + \int_{u_A}^{u_B} \frac{(u' - u_B)}{u_B - u_A}\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\frac{u' - u_A}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}^{\delta'}{}_{\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots \\
&= \frac{1}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\
&\quad + \int_{u_A}^{u_B} \frac{(u' - u_A)(u' - u_B)}{(u_B - u_A)^2}\,\mathscr{R}^{\gamma'\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_{\alpha_B}}{\delta u} &= \frac{1}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_B\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\
&\quad + \int_{u_A}^{u_B} \frac{(u' - u_A)}{u_B - u_A}\,\mathscr{R}^{\gamma'}{}_{\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\frac{u' - u_A}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}^{\delta'}{}_{\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots \\
&= \frac{1}{u_B - u_A}\,\mathscr{G}_{\alpha_B\beta_B}\rho^{\beta_B} + \\
&\quad + \int_{u_A}^{u_B} \frac{(u' - u_A)^2}{(u_B - u_A)^2}\,\mathscr{R}^{\gamma'\delta'}\,\mathscr{G}_{\alpha_A\gamma'}\,\mathscr{G}_{\delta'\beta_B}\rho^{\beta_B}\mathrm{d}u' + \cdots .
\end{aligned}
$$

Kirjallisuutta

[Meschini] Meschini, D. (2008). *A Metageometric Enquiry Concerning Time, Space, and Quantum Physics.* Ph.D. thesis, Research report No. 1/2008, Department of Physics, University of Jyväskylä.

[Niskanen] Niskanen, J. (1997). *Kvanttimekaniikka II,* Limes ry., Helsinki

[Peskin & Schroeder] Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory,* Westview Press,

[1] Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity,* Addison Wesley, San Fransisco

[2] Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation,* W. H. Freeman and Company, New York

[3] Ohanian, H. & Ruffini, R. (1994). *Gravitation and Spacetime,* W. W. Norton & Company, London