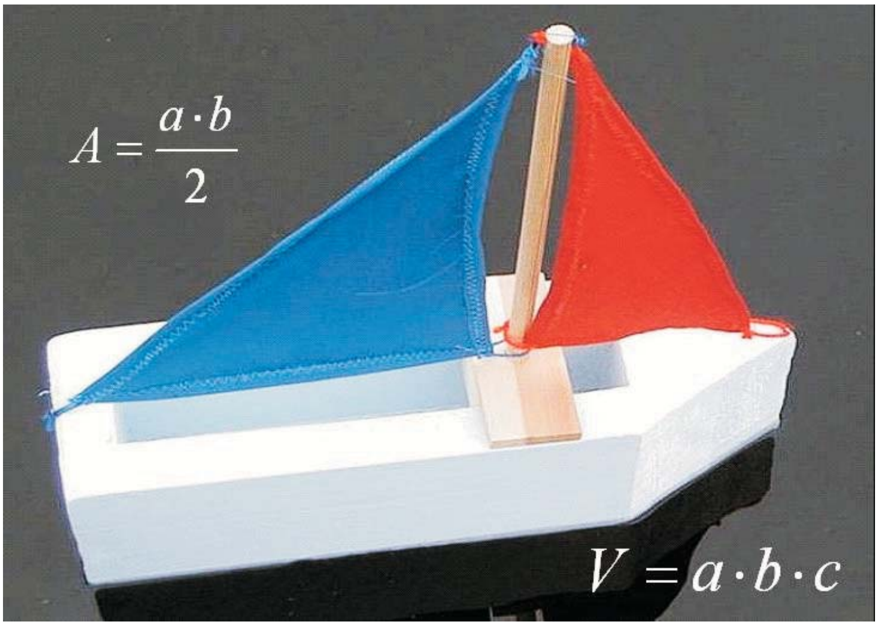
JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH

298

Henry Leppäaho

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa

Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 298

Henry Leppäaho

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa

Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi

Esitetään Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
julkisesti tarkastettavaksi yliopiston Agora rakennuksessa (Ag Aud. 1)
tammikuun 13. päivänä 2007 kello 12.

Academic dissertation to be publicly discussed, by permission of
the Faculty of Education of the University of Jyväskylä,
in the Building Agora (Ag Aud. 1), on January 13, 2007 at 12 o'clock noon.

UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

JYVÄSKYLÄ 2007

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa

Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi

JYVÄSKYLÄ STUDIES IN EDUCATION, PSYCHOLOGY AND SOCIAL RESEARCH 298

Henry Leppäaho

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa

Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi

UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ

JYVÄSKYLÄ 2007

Editors
Pauli Kaikkonen
Department of Teacher Education, University of Jyväskylä
Irene Ylönen, Marja-Leena Tynkkynen
Publishing Unit, University Library of Jyväskylä

Cover picture by Tapani Taipale.

URN:ISBN:9789513927325
ISBN 978-951-39-2732-5 (PDF)

ISBN 978-951-39-2702-8 (nid.)
ISSN 0075-4625

Jyväskylä University Printing House, Jyväskylä 2007

ABSTRACT

Leppäaho, Henry
Teaching mathematical problem solving skill in the Finnish comprehensive school. Designing and assessment of a problem solving course.
Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2007, 343 p.
(Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research
ISSN 0075-4625; 298)
ISBN 978-951-39-2732-5 (PDF), 978-951-39-2702-8 (nid.)
Summary
Diss.

This thesis describes the teaching of mathematical problem solving by means of a designed problem solving course in the Finnish comprehensive school. The intention was to create a learning environment through the course that develops pupils' mathematical problem solving skills. The study uses design research as the directive research method. The data were collected by assessing the teaching intervention, interviewing pupils and through quasi-experimental design. Conclusions were drawn on the basis of triangulation of the qualitative and quantitative results. The experimental group consisted of 17 pupils and the control group of 35. They used a similar textbook on which the designed course was based. Both groups took part in a pre- and post-test and delayed test. The main research results, which are iterative and are capable of being further developed, were: 1) The design procedure of a viable problem solving course itself for use in grade 6. The teaching of the problem solving skill was possible by integrating thirty lessons, including mathematics, mother tongue, natural sciences, art and crafts. 2) A concrete outcome of the design process was created and published as a textbook, which is now available to teachers. 3) According to the empirical results the created learning environment was productive. In the pre-test the groups were equally good, but in the post-test the experimental group was statistically better than the control group. There is no statistically significant difference between the groups in the delayed test administered 18 months after the post-test, although the experimental group's result was still 14.7% better. According to the interviews the motivation of the experimental group improved during the problem solving course.

Keywords: mathematical problem solving, integration, design research, teaching, problem solving course

Author's address Henry Leppäaho
Peltoniementie 4 A 35
40520 Jyväskylä
henry.leppaaho@edu.jyu.fi

Supervisors Professor (emerita) Maija Ahtee
University of Jyväskylä, Finland

Professor Jouni Viiri
Department of Teacher Education
University of Jyväskylä, Finland

Reviewers Professor Markku Hannula
University of Tallin, Estonia

PhD Raimo Kaasila
Faculty of Education
University of Lapland, Finland

Opponent Professor Markku Hannula
University of Tallin, Estonia

ESIPUHE

Mielenkiintoni erilaisiin ongelmatehtäviin ja niiden ratkaisemiseen on johtanut tämän tutkimuksen syntyyn. Pro gradu -tutkielman tekeminen innosti minua ongelmanratkaisutaidon opettamiseen ja sen tutkimiseen. Luokanopettajaksi valmistumisen jälkeen havaitsin työssäni, että myös monet oppilaista pitävät matematiikkaan liittyvistä ongelmanratkaisutehtävistä. Tämä havainto ja positiiviset opetuskokemukseni johdattelivat jatko-opintojen pariin. Lähdekirjallisuutta lukiessani törmäsin usein toteamukseen ”ongelmanratkaisu on matematiikan sydän”. Oma kokemukseni kuitenkin oli, että ”matematiikan sydäntä” ei käytännössä opeteta oppilaille. Tämä havainto tarjosi haasteellisen mutta mielenkiintoisen tavoitteen kehittää ongelmanratkaisutaidon opettamista peruskoulussa. Pyrin tavoitteeseeni myös urheilun parissa muotoutuneen ajatukseni avulla, jonka mukaan *Opettaminen on valmentamista ja valmentaminen opettamista. Molempien kehittämiseen vaaditaan tutkimusta sekä paljon suunnitelmallista ja pitkäjänteistä työtä.* Luokanopettajan monipuolinen työ eri oppiaineiden parissa puolestaan synnytti idean ”värin” tuomisesta matematiikan opetukseen eri oppiaineiden integroinnin avulla.

Minulla on ollut mahdollisuus tehdä tämä tutkimus Valtakunnallisen matematiikan, fysiikan ja kemian opetuksen tutkijakoulun päätoimisena tutkijakoulutettavana. Tutkijakoulu on muodostanut tiiviissä vuorovaikutuksessa toimivan yhteisön, jolta olen saanut useita arvokkaita kommentteja tutkimukseni eri vaiheissa. Lisäksi tutkijakoulu on mahdollistanut osallistumiseni kotimaisiin ja kansainvälisiin konferensseihin. Tästä tuesta kiitän kaikkia tutkijakoulussa mukana olleita, erityisesti tutkijakoulun johtajaa professori Erkki Pehkosta.

Päivittäisen työyhteisön kannustus on ollut tärkeää motivoitumiselleni tutkimustyöhön. Kiitos tästä kuuluu Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen johtajalle kasvatustieteen tohtori Jorma Ojalalle ja laitoksen koko henkilökunnalle.

Tutkimuksen ohjaajan ja tutkimuksen tekijän suhdetta voisi hyvin verrata valmentaja–urheilija-suhteeseen. Sen on oltava toimiva ja vuorovaikutuksellinen, mikäli tuloksia halutaan saada aikaan. Erityisen kiitollinen olen tutkimukseni ohjaajille professori (emerita) Maija Ahteelle ja professori Jouni Viirille. Olen saanut nauttia heidän taitavasta ja huolehtivasta ohjaustyöstään. He ovat valmentaneet minua välitavoitteiden kautta työn lopulliseen valmistumiseen saakka.

Lausun kiitokset työni esitarkastajille professori Markku Hannulalle ja kasvatustieteen tohtori Raimo Kaasilalle. He luotsasivat työni kriittisillä ja kannustavilla kommenteillaan lopulliseen muotoon.

Tutkimukseni myötä sain myös tilaisuuden oppia asiantuntijan ohjaamana oppimateriaalin suunnittelua ja valmistusta. Kiitokseni tästä mahdollisuudesta kuuluvat WSOY:n tuotepäällikölle kasvatustieteen lisensiaatti Tuula Uus-Leponiemelle. Kvantitatiivisten tutkimustulosten käsittelyyn liittyvistä asiantuntevista kommenteista ja neuvoista kiitän filosofian tohtori, erikoistutkija Kari

Törmäkangasta. Kiitän myös humanististen tieteiden kandidaatti Tiina Kasia työni kieliasun huolellisesta tarkistamisesta.

Lausun kiitokset professori Pauli Kaikkoselle, professori Esa Penttiselle, professori Bernd Zimmermannille, kasvatustieteen tohtorille dosentti Kaarina Merenluodolle, filosofian tohtori Jorma Joutsenlahdelle, filosofian tohtori Matti Kyllöselle, kasvatustieteen tohtori Liisa Kyyröselle, kasvatustieteen tohtori Aki Rasiselle, filosofian lisensiaatti Paula Sajavaaralle, filosofian tohtori Harry Silfverbergille, filosofian maisteri Markus Hähkiöniemelle, kasvatustieteen maisteri Timo Rissaselle, kasvatustieteen maisteri Tommi Vainiolle ja filosofian maisteri Antti Viholaiselle. He ovat kommentoineet työtäni aikaa ja vaivaa säästämättä sen eri vaiheissa. Taloudellisesta tuesta ja kannustuksesta kiitän kustannusyhtiö WSOY:tä, Printel Oy:tä ja Step Systems Oy:tä.

Tämä tutkimus ei olisi valmistunut ilman tutkimukseen osallistuneita opettajia ja oppilaita. Heille kuuluvatkin suuret kiitokset, sillä heidän avullaan olen myös oppinut paljon matemaattisesta ongelmanratkaisutaidosta ja sen opettamisesta.

Tutkimustyö vaatii kokonaisvaltaista paneutumista ja keskittymistä. Tutkimuksen parissa viettämiini vuosiin on sisältynyt onnistumisen ja epäonnistumisen hetkiä, joiden myötä olen tuntenut kasvavani niin tutkijana kuin ihmisenäkin. Väitöskirjan tekeminen on ollut minulle neljän vuoden maraton ja oppimisprosessi, joka on ollut kokemisen arvoinen. Jotta maaliin on päästy, on läheisiltä ihmisiltä vaadittu ymmärtämystä ja joustavaa suhtautumista. Haluan kiittää vanhempiani Ritvaa ja Erkkiä saamastani kasvatuksesta sekä tuesta ja kannustuksesta opiskeluani kohtaan ensimmäisestä kouluvuodestani lähtien. Veljeni Harri ja Mauri perheineen samoin kuin sukulaiseni ja ystäväni ansaitsevat kiitokset avustaan ja ajoittaisesta repäisemisestä harrastusten ja virkistävän vapaa-ajan vieton pariin. Lämpimimmät kiitokseni kuuluvat vaimolleni Maaritille. Hänen luottavainen ja positiivinen asenteensa työtäni kohtaan sen jokaisella askeleella on ollut korvaamaton.

Haluan omistaa työni edesmenneille isovanhemmilleni Martta ja Kauko Honkaniemelle sekä Maria ja Hemming Leppäaholle. Sota-aikana he joutuivat vaikeisiin ja todellisiin ongelmanratkaisutilanteisiin, joissa epäonnistuminen olisi ollut kohtalokasta. Isovanhempieni ja heidän sukupolvensa tekemien oikeiden ratkaisujen ja niihin sitoutumisen ansiosta tämäkin väitöskirja on voitu kirjoittaa itsenäisessä Suomessa.

Jyväskylässä itsenäisyyspäivänä 6.12.2006

Henry Leppäaho

KUVIOT

TAULUKOT

SISÄLLYS

LIITTEET

1 JOHDANTO

Maapallon ympärille kierretään köysi siten, että se kulkee maapallon pintaa pitkin. Tämän jälkeen köyteen lisätään Suomen kohdalla pituutta yksi metri ja köyden löystyminen tasataan niin, että köysi on saman verran irti maasta ympäri maapallon. Mahtuuko kissa kulkemaan köyden alta?

Yllä oleva esimerkki on matemaattinen ongelmanratkaisutehtävä. Sen ratkaiseminen vaatii matemaattisia perustietoja, loogista päättelyä, visuaalista hahmottamiskykyä ja oivallustakin. Tehtävän voi ratkaista useammalla kuin yhdellä tavalla. Ratkaisun löytämiseen käytettävä aika vaihtelee yksilöiden kesken suuresti iästä riippumatta. Kaikki eivät löydä oikeaa perusteltua ratkaisua ollenkaan. Kuinka sitten edellä mainitunlaiset tehtävät opetetaan koulussa? Seuraavassa kokemukseni ja havaintojeni mukainen kuvaus perinteisestä, matematiikan oppikirjan mukaan etenevästä tunnista:

Tunnin alussa tarkistetaan oppilaiden kotitehtävät, sitten otetaan oppikirjasta esille uutta asiaa käsittelevä aukeama. Opettaja pitää aiheesta opetustuokion, esittelee pari esimerkkiä ja tämän jälkeen oppilaat ryhtyvät laskemaan hiljaisesti oppikirjan aiheeseen liittyviä perustehtäviä. Kun nopeimmin laskeneet oppilaat ovat valmiit, opettaja käy vilkaisemassa suoritettuja tehtäviä ja kehottaa näitä oppilaita tarkistamaan ne tuloskirjasta omatoimisesti. Sitten opettaja kehottaa heitä tekemään itsenäisesti oppikirjan lopussa olevia lisätehtäviä, joissa saattaa olla myös ongelmanratkaisutehtäviä. Opettaja itse suuntaa opetuksensa ja ohjauksensa niiden oppilaiden auttamiseen, joilla on vaikeuksia perustehtävien suorittamisessa ja huolehtii, että kaikki luokassa saavuttavat aiheessa laskennallisen sujuvuuden.

Vastaavanlaiseen kuvaukseen oppikirjasidonnaisesta matematiikan oppitunnista on päätynyt esimerkiksi Perkkilä (2002, 21–22). Yllä mainitun esimerkin toistumista luokissa vahvistaa myös Kaasilan (2000, 80) tutkimus. Hänen tutkimuksensa alkukyselyssä mukana olleista luokanopettajaopiskelijoista peräti 42 % oli sitä mieltä, että uusi asia pitää opettaa ensin. Vasta sen jälkeen on soveltamisen ja ongelmanratkaisun vuoro. Edellä mainittu kuvaus oppitunnista ei tarkoita sitä, että se olisi huono tapa opettaa matematiikkaa. Sillä on etunsa matemaattisten perustaitojen oppimisessa. Myös kansainväliset tutkimukset ovat osoittaneet sen toimivuuden. Mutta kuinka matematiikan opetuksen tutkimuskirjallisuudessa ja opetussuunnitelmissa paljon korostettua oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa voitaisiin opettaa ja kehittää koulussa? Tähän kysymykseen pyritään tällä tutkimuksella etsimään vastausta.

Ongelmanratkaisu on liittynyt aina ihmisen elämään, ja sitä on tutkittu runsaasti. Ensimmäiset matemaattista ongelmanratkaisua käsittelevät asiakirjat ovat yli 5000 vuoden takaa. Mesopotamialaiset olivat keksineet kaupankäyntiä helpottaakseen kirjanpitotekniikan, jota he ylläpitivät nuolenpääkirjoituksen avulla. (Zimmermann 2003, 32.) Dewey (1910) kuvasi ongelmanratkaisuprosessia vaihemallin avulla. Mallin mukaan tehtävän ratkaisija esittää erilaisia oletuksia siitä, miten ratkaisu voitaisiin löytää, ja testaa esittämiään ratkaisuja. Näin muodostetaan hypoteesin ja testauksen sykli. Saman syklin voi löytää hieman eri muodoissa monilta muiltakin ongelmanratkaisumallien tutkijoilta, esimerkiksi Polyalta (1948), de Grootilta (1956) Newelliltä ja Simonilta (1972), Lesteriltä (1978), Masonilta, Burtonilta ja Staceylta (1982) sekä Schoenfeldiltä (1985).

Ongelmanratkaisu on yksi matematiikan tärkeimmistä osa-alueista (ks. Polya 1948, Schoenfeld 1985). Opettaja ratkaisee, kuinka keskeisesti tätä osa-aluetta oppilaille opetetaan. Luokkien 5-6 matematiikan oppikirjasarjat eivät juuri korosta itse ongelmanratkaisun opettamista, sillä ongelmatehtävät sijoitetaan yleensä oppikirjaan jakson loppuun tai opettajan oppaaseen monisteiksi. Oppikirjossa ja niiden lisämateriaaleissa on runsaasti hyviä ongelmatehtäviä. Opettajan oppaissa on monia tunnin alkuun tarkoitettuja päättelytehtäviä, joita ei kuitenkaan ole oppilaan kirjassa. (esim. Hei, nyt lasketaan, Opettajan kirja 6a & 6b, 2001; Laskutaito 6, Opettajan kirjan syysosa 2005 & kevätosa, 2003; Laskutaito 5, Opettajan kirjan syysosa 2006; Mieti ja laske 5, Opettajan kirja syksy & kevät 2001) Jää siis opettajan päätettäväksi, käsitelläänkö ongelmatehtäviä vai ei.

Ongelmatehtävien sijoittaminen oppikirjan viimeisiksi tehtäviksi johtaa koulun arjessa siihen, että ongelmanratkaisun, ”matematiikan ytimen”, opettaminen jää usein ns. rutiinitehtävien varjoon. Vain nopeimmat ja lahjakkaimmat ehtivät tutustua ongelmanratkaisutehtäviin lähinnä lisätehtävien avulla, useimmiten ilman opettajan ohjausta. Muille oppilaille ongelmanratkaisutehtäviin tutustuminen jää vähäiseksi. Varsinkin heikompien ja hitaampien oppilaiden harjoittelu ongelmatehtävien parissa saattaa olla jatkuvaa omatoimisten epäonnistumisten kokemista.

1.1 Miksi ongelmanratkaisua matematiikan opetukseen?

Unkarilainen George Polya (1948) on todennut, että ongelmanratkaisu on matematiikan ydin. Samaan käsitykseen ongelmanratkaisun roolista matematiikassa ovat päätyneet myös (Schoenfeld 1992, 338) ja Stanic & Kilpatrick (1988). Myös Halmos (1980, 519) pohtii artikkelissaan ongelmanratkaisun ja matematiikan merkitystä ja toteaa, että ongelmien ratkaiseminen on "matematiikan sydän".

Edellä mainittujen perusteluiden lisäksi Pehkonen, Pekama ja Seppälä (1991, 11) tuovat esiin seuraavia näkökohtia, jotka he ovat muodostaneet tutkimastaan laajasta kirjallisuudesta seuraavasti: Ongelmanratkaisu 1) kehittää yleisiä tiedollisia valmiuksia, 2) edistää luovuuden kehittymistä, 3) on osa matemaattista soveltamista ja 4) motivoi oppilaat matematiikan opiskeluun. Edellisten lisäksi Haapasalo (1994, 35) jakaa ongelmanratkaisun kehittämät taidot 15 osataitoon (esim. luovuus, huomiokyky, visualisointi, geometria, mallintaminen, tietokäsitys, käytännöllisyys, sitkeys) ja toteaa lopuksi: "Ongelmanratkaisun merkitys on siinä, että se kehittää ongelmanratkaisukykyä".

Ongelmanratkaisun keskeinen asema on todettu useita kertoja myös matematiikan valtakunnallisissa opetussuunnitelmissa. Uusimmissa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2004, 163) vuosiluokkien 6−9 matematiikan opetuksen ydintehtävä on tarjota oppilaille matemaattiset perusvalmiudet, joihin kuuluvat mm. *"arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintaminen, matemaattisten ajattelumallien oppiminen sekä muistamisen, keskittymisen ja täsmällisen ilmaisun harjoitteleminen".* Ongelmanratkaisu huomioidaan myös päättöarvioinnissa. Esimerkiksi arvosanalle 8 esitetään seuraavat vaatimukset luokkatason 6–9 kriteereissä: *"Oppilas osaa muuntaa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman matemaattiseen esitysmuotoon ja tehdä suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi, ratkaista sen ja tarkistaa tuloksen oikeellisuuden"* (mts. 165).

Vaikka opetussuunnitelma korostaa ongelmanratkaisun opettamista, opetuksen toteuttaminen koulussa on osoittautunut haasteelliseksi. Huoli ongelmakeskeisen matematiikan opetuksen kehittämisestä on askarruttanut alan johtavia tutkijoita. Zimmermann (2000, 62) pohtii miten opettajia voitaisiin auttaa, rohkaista ja motivoida opettamaan matemaattista ongelmanratkaisua. Cain (2000, 32) mukaan opettajat ovat keskeisessä asemassa tehtäessä muutoksia käytännön opetukseen. Opettajat myös tarvitsevat konkreettisia esimerkkejä ja ideoita, jotta voisivat opettaa ongelmakeskeistä matematiikkaa.

Vuonna 2003 tehdyn PISA-tutkimuksen mukaan suomalaiset 9.-luokkalaiset sijoittuvat kansainväliselle huipulle matematiikassa, ongelmanratkaisussa ja luonnontieteissä (Kupari ym. 2004, 10–21). Kuitenkin suomalaiset lukiot, tekniset ammattikorkeakoulut ja korkeakoulut ovat kritisoineet peruskoululaisten matematiikan tietojen puutteita (esim. Viiri 1996, 147). Suomalaisten koululaisten kiinnostus matematiikkaan on vähäistä muihin PISA-tutkimuksessa mukana olleisiin maihin verrattuna (Kupari ym. 2004, 42). Tämä on huolestuttavaa, sillä matemaattis-luonnontieteellisen osaamisen merkitys Suomen teollisuudelle ja ulkomaankaupalle on huomattava. Täten matemaattisluonnontieteellisellä osaamisella on vaikutusta myös jokaisen kansalaisemme hyvinvointiin. Suomalaisten oppilaiden asenne on ymmärrettävissä, jos tilannetta tarkastellaan oppilaiden näkökulmasta: opetussuunnitelmissa opetettavan aineksen määrää ei ole haluttu vähentää (vrt. esim. Opetushallitus 2000, 74–77 ja 2004,158–167), mutta lukuisissa Suomen kaupungeissa ja kunnissa säästötoimenpiteet ovat lakkauttaneet kouluja ja suurentaneet opetusryhmiä. Tällöin oppitunnilla opettajan käytettävissä oleva aika yhtä oppilasta kohti on vähentynyt. Tästä on seurannut paradoksaalinen tilanne – oppilaan tulisi omaksua yhä nopeammin ja vähemmällä opetuksella samat oppisisällöt. Lahjakkaat oppilaat selviävät tästä tilanteesta, ja myös heidän kiinnostuksensa säilyy. Sen sijaan muiden oppilaiden motivaatio laskee varmasti, jos jo perusasioidenkin osaaminen on epävarmalla pohjalla. Tilanteen korjaamiseksi on lisättävä opetuksen tuntimäärää. Tämä ei tarkoita opetettavien aiheiden lisäämistä opetussuunnitelmaan vaan opetusaikaa, sillä matematiikka on pohtimista ja päättelyä. Matematiikan opetuksen integrointi muihin oppiaineisiin tarjoaa lisää tunteja matemaattisten tehtävien käsittelyyn ja tuo matematiikan opiskeluun joustavuutta ja monipuolisuutta.

PISA 2003 -tutkimuksessa mitattiin käytännön elämään liittyvän matematiikan ja luonnontieteiden osaamista. Tulosten mukaan suomalaiset peruskoululaiset hallitsevat tämän alueen. Mutta, kun matemaattisten aineiden opiskelu etenee abstraktimmalle tasolle, oppilas saa ratkaistavakseen yhä vaativampia tehtäviä. Ne edellyttävät enemmän ongelmanratkaisua ja sellaista oppiaineen kontekstiin liittyvää tietoa, jota ei aina tehtävän yhteydessä edes mainita. Oppilaan on kyettävä soveltamaan omatoimisesti ongelman aihepiiriin liittyvää tietoa ja omaksuttava ongelmaan liittyvä ratkaisuprosessi. Tehtävät muuttuvat vaativimmiksi vuosiluokkien edetessä, mutta asioiden omaksuminen ei näytä edistyvän samassa suhteessa. Esimerkiksi Silfverberg (1999, 201–203) selvitti, että 7.–9. luokan geometriseen käsitetietoon liittyvien tietorakenteiden oppiminen ei juuri edistynyt yläasteen aikana. Tietorakenteiden oppiminen ei ollut kovinkaan pysyvää. Syyksi Silfverberg mainitsee sen, ettei käsitteiden määritelmiä tunneta eikä käsitteiden välisten suhteiden ymmärretä johtuvan niiden määrittelyistä.

Matemaattisia taitoja vaativien aineiden opiskelun edetessä kohdataan yhä useammin ajattelua ja pohdintaa vaativia ongelmia. Jos suuri osa oppilaista tuntee jatkuvaa epävarmuutta ja epäonnistumista ongelmatehtävien parissa, oppilaat alkavat pelätä näitä tehtäviä ja matemaattis-luonnontieteellisiä aineita. Tämä lienee yksi syy siihen, että matemaattis-luonnontieteellisiltä aloilta valmistuneista opiskelijoista on puutetta (ks. LUMA-tukiryhmä 2002, 11–13).

Matematiikkapelosta (*math anxiety*) onkin tullut jo oma käsitteensä. Sillä tarkoitetaan pelon ja jännittyneisyyden tuntemuksia, jotka häiritsevät matemaattisten ongelmien ratkaisemista ja numeroiden käsittelyä (Newstead, 1998, 54). Matematiikkapelko saattaa jatkua vielä pitkään peruskoulun jälkeenkin. Tätä kuvaa hyvin Kaasilan (2000, 170) tutkimuksessa mukana ollut luokanopettajaopiskelija, joka luonnehti kokemuksiaan ala-asteen matematiikasta edelleen seuraavasti: ”Sana matematiikka saa minut voimattomaksi”. Huhtalan (1999, 9) mukaan matematiikkapelko voi estää opiskelijan tehokkaan ajattelun matematiikassa ja siten myös sen oppimisen. Matematiikkapelkoa voidaan kuitenkin vähentää. Esimerkiksi ongelmanratkaisu ja keskustelu erilaisista ongelmanratkaisustrategioista saattaa estää matematiikkapelon muodostumista. Tällöin oppilas huomaa, että ei ole vain yhtä ainoaa oikeaa ratkaisutapaa, vaan hän voi löytää erilaisia ratkaisustrategioita, jotka ovat yhtä hyviä kuin ns. malliratkaisu. Myös henkilökohtaisen opetuksen ja ryhmätyöskentelyn on todettu vähentävän matematiikkapelkoa. (Huhtala 1999, 10–11.)

Perusajatuksena tässä tutkimuksessa on tutkia ongelmanratkaisutaidon suunnitelmallisen opettamisen mahdollisuuksia jo peruskoulussa ja selvittää kuinka matemaattis-luonnontieteellisten oppiaineiden opetusta voitaisiin havainnollistaa ja monipuolistaa. Oppiaineiden integroinnin avulla tarjotaan opetukseen ja oppimiseen oppiainerajat ylittävä ongelmakeskeinen näkökulma sekä oppilaille että opettajille.

1.2 Tutkimuksen tarkoitus

Niin aikuiset kuin lapsetkin kohtaavat päivittäin ongelmatilanteita, jotka vaativat ratkaisuja ja perusteluja. Vaaratilanteessa toimiminen, työhaastattelussa vastaaminen tai pääsykoetehtävän ratkaiseminen vaikuttaa ihmisen tulevaisuuteen ja elämään. Tämän tutkimuksen taustalla oli kaksi kysymystä: 1) Miten ongelmanratkaisutaitoa voitaisiin opettaa ja kehittää? sekä 2) Kuinka ongelmanratkaisun opetusta voitaisiin lisätä jo perusopetuksessa?

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, kuinka oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa voitaisiin opettaa ja kehittää peruskoulussa sekä suunnitella tähän tarkoitukseen soveltuva oppimisympäristö. Oppimisympäristöllä tarkoitetaan tässä tutkimuksessa tilaa, yhteisöä ja toimintakäytäntöä, joka sisältää sosiaalisia, fyysisiä, teknisiä ja didaktisia ulottuvuuksia. Oppimisympäristöön sisältyvät oppilaan käytössä olevat opiskelumuodot, oppimistavat ja työskentelyvälineet.

Oppimisympäristön luomiseksi laadittiin matemaattinen ongelmanratkaisukurssi. Se toteutettiin opetuskokeiluna yhdelle 6. luokalle, jonka oppilaista muodostui tutkimuksen koeryhmä. Kontrolliryhmä koostui saman koulun kahdesta 6. luokasta. Tutkimusongelmina oli 1) arvioida kuinka opetus toteutui opettajan näkökulmasta, 2) selvittää millaisia eroja oli koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisissa ongelmanratkaisukokeissa sekä 3) kartoittaa haastattelun avulla miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun.

2 OPPIMISKÄSITYS

Tässä luvussa esittelen oppimiskäsityksen, joka on muodostanut taustan tutkimukseni suunnittelulle ja toteutukselle. Erilaiset näkemykset opetuksesta ja oppimisesta perustuvat psykologian ja kasvatustieteen ihmiskäsityksiin.

Oppimiskäsityksellä tarkoitetaan niitä perusolettamuksia, joita tehdään oppimisprosessin luonteesta. Nämä perusolettamukset säätelevät niin kasvattajan kuin tutkijankin toimintaa. Oppimiskäsitykset voidaan luokitella mm. empiristis-behavioristisiin ja kognitiivis-konstruktivistisiin. Näiden rinnalla on myös kokemuksellisen oppimisen merkitystä korostava humanistinen oppimiskäsitys. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 146.) Pedagogiset näkemykset siitä, miten oppiminen tapahtuu ja miten sitä voidaan parhaiten edistää, kuuluvat myös oppimiskäsitykseen. Opetuksen ja koulutuksen taustalla on siis aina jokin oletus siitä, *mitä oppiminen on* ja *mitä opettaminen on*. Kupari (1999) toteaa, että behavioristinen ja konstruktivistinen traditio ovat matematiikan opetusajattelun kaksi empiiristä valtasuuntausta. Behavioristiset lähestymistavat ovat olleet matematiikan opetuksessa laajalti käytössä edellisillä vuosikymmenillä, kun taas konstruktivismiin pohjaava lähestymistapa on tutkimusten tukemana vähitellen lisääntynyt. (Kupari 1999, 40–41.) Seuraavaksi määrittelen oppimiskäsitykseen liittyvät keskeiset käsitteet:

> *Didaktiikka* eli opetusoppi on yksi kasvatustieteen osa-alue, jonka tutkimuskohteena on opetus (Kansanen 2004, 9; Lahdes 1997, 37). Hirsjärven (1983, 28–29) mukaan ”Didaktiikka on opetuksessa vallitsevien olosuhteiden ja niiden vaikutusten tutkimista ja näin saadun tiedon pohjalta muotoutunut kokonaisesitys”.
>
> *Opetus* on kasvatustavoitteiden suuntaista intentionaalista vuorovaikutusta, jonka tarkoituksena on saada aikaan oppimista (Hirsjärvi 1983, 131).
> *Kasvatus* (education) on inhimillistä toimintaa, jonka tarkoituksena on edellytysten luominen ihmisen monipuoliselle kehitykselle ja kasvulle (Hirsjärvi 1983, 72).
> *Pedagogiikalla* tarkoitetaan opetus- tai kasvatustaitoa. (Hirsjärvi 1983, 141).
>
> *Oppimisella (learning)* tarkoitetaan sellaisia käyttäytymisessä havaittavia pysyviä muutoksia, jotka jollakin tavalla ovat olion tai ympäristön vuorovaikutuksesta syntyneitä joko siten, että ympäristö systemaattisesti opetuksen avulla pyrkii muuttamaan käyttäytymistä tai siten, että vaikutus on tahatonta (Hirsjärvi 1983, 136).

Mikäli edellä esitetystä määritelmästä korostetaan vuorovaikutuksellisuutta, voidaan oppimista ajatella prosessina, jossa myös oppija itse rakentaa omien havaintojensa, kokemustensa ja oivallustensa pohjalta omaa ymmärrystään ja tietämystään maailmasta. Oppimisessa korostuu uusien ja ennestään olemassa olevien tietojen ja taitojen vuorovaikutus. Oppilaan on opittava ottamaan vastuuta omasta opiskelustaan, asettamaan opiskelulleen tavoitteita ja osallistuttava myöhemmin myös opiskelunsa suunnitteluun.

Kasvatustyöhön, tässä yhteydessä lähinnä opetukseen ja sen tutkimiseen, vaikuttaa myös opettajan ja tutkijan oma oppimiskäsitys, joka voi olla esimerkiksi yhdistelmä erilaisista kasvatustieteen opetus- ja oppimisnäkemyksistä sekä omista kokemuksista. Oman oppimiskäsityksen soveltamisen olisi oltava tietoista toimintaa, jolloin sitä on helpompi kehittää kuin tiedostamattomasti sovellettua. Opetustyössä oppimiskäsityksen tietoinen soveltaminen ilmenee didaktisena suunnitteluna. Seuraavaksi esittelen niitä oppimiskäsityksiä, jotka ovat vaikuttaneet tämän tutkimuksen oppimiskäsityksen muotoutumiseen ja ovat näin olleet tutkimuksessa toteutetun opetuskokeilun didaktisen suunnittelun perustana.

2.1 Behaviorismi

Behaviorismin eli luonnontieteellisen psykologian (n. 1920–1960) ydinaluetta oli oppimisprosessin tutkimus. Behavioristiseen oppimiskäsitykseen liittyy ajatus tiedon siirtämisestä: tiedon ajatellaan olevan jotain valmista, jonka opettaja siirtää sellaisenaan oppijalle (Tynjälä 1999, 29–31). Tässä perusajatuksessa korostuu jo Locken 1600-luvulla esittämä näkemys siitä, että oppijan mieli on kuin *"tabula rasa"*, tyhjä taulu, johon kokemukset piirtävät jälkensä (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 106). Oppimisen perusmuotona on ärsyke–reaktio-assosiaatioiden muodostuminen, jota säätelee vahvistaminen eli reaktion (toiminnan) seuraukset, kuten esimerkiksi toivotun toiminnan palkitseminen. Opettajan tehtävänä on opetettavan asian esittäminen opetussuunnitelman mukaisesti, ja hän pyrkii siihen, että opetus johtaa oppilaissa asetettujen tavoitteiden mukaisiin reaktioihin. Opettajan toiminnan kohde on oppilas, ja opettaja selkeästi hallitsee ja ohjaa koko prosessia. Opetus tulkitaan onnistuneeksi silloin, kun oppilas tuottaa ennalta määritetyt oikeat reaktiot ja suoritteet. (Mts. 151–152.) Oppimistulosten arviointi on tällöin määrällistä: oppijan katsotaan oppineen sitä paremmin, mitä enemmän opetettuja tietoja hän pystyy toistamaan kokeessa tai tentissä. Oppiminen muistuttaakin tiedon kopiointia. Opettajan tai oppimateriaalin tehtävänä on behaviorismin mukaan välittää tieto mahdollisimman selkeästi, jotta oppija voisi omaksua sen juuri siinä muodossa kuin se on esitetty. Tynjälän (1999, 30) mukaan behavioristinen opetus järjestetään seuraavien vaiheiden mukaisesti: 1) asetetaan käyttäytymistavoitteet, 2) jaetaan oppimateriaali osakomponentteihin, 3) määritetään sopivat käyttäytymisen vahvistajat, 4) opetus toteutetaan edeten vaihe vaiheelta ja 5) arvioidaan tulokset.

Tällaisen opetuksen mukaisesta oppimisesta on Leinon (1992, 1) mukaan seurauksena, että opiskelijat kyllä varastoivat informaatiota toistettujen käytäntöjen ja vahvistusten avulla, mutta tieto ei kuitenkaan organisoidu ja yhdisty oppijan luonnolliseen kieleen ja kokemuksiin, vaan se on eristettynä muistissa.

Myös Kupari (1999, 41) toteaa, että behavioristisessa lähestymistavassa matematiikkaa tarkastellaan absoluuttisena tietorakenteena, mikä ilmenee siten, että sisältö on jaettu hallittavaksi tehtäväjonoksi ja opittaviksi faktoiksi. Kiinnostus kohdistuu siihen, mitä oppilaat osaavat tehdä eikä niinkään siihen, mitä oppilaat ymmärtävät ja mikä merkitys opitulla on. Tietojen ja taitojen rutiinituotannon korostumisesta seuraa, että oppilaat eivät ymmärrä tuottamaansa.

Behaviorismin heikkoudet tulevat esille juuri ymmärtämistä painottavan opettamisen ja oppimisen yhteydessä. Behavioristinen malli on opettajalle johdonmukainen ja turvallinen, ja se myös tukee opettajan valtaa. Sitä on pidetty hyvin toimivana ainakin perustaitoja opetettaessa. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 113.)

Perkkilän (2002, 21) mukaan suomalaiset oppikirjat saivat vaikutteita behavioristisesta opettamisen mallista, sillä oppikirjojen kuvituksen ja sanastotason tuli vastata tutkimusten mukaisia ikäkausitasoja. Hänen mukaansa nykyisistä matematiikan oppikirjoista on edelleenkin löydettävissä behavioristisen oppimiskäsityksen piirteitä: oppiaines on jaettu oppitunnilla käsiteltäviksi aukeamiksi, valmiit mallit ja esimerkit ovat usein aukeaman yläosassa, tehtäväsarjat toistuvat samankaltaisina. Näin oppikirjat houkuttelevat oppikirjasidonnaiseen opetusmalliin, jossa oppitunnin alkuun kuuluu opetustuokio ja sen jälkeen oppilaat harjoittelevat hiljaisesti laskien. Opetuksen tavoitteena on behavioristisessa mallissa varmistaa laskennallinen sujuvuus. (Perkkilä 2002, 21–22.) Behavioristisen opetustavan säilymistä on tukenut Kuparin (1999, 43) mukaan selkeästi määritelty opetussuunnitelma, jonka toteutumista on arvioitu sisältöpainotteisilla kokeilla ja tutkinnoilla.

2.2 Konstruktivismi ja konstruktivistinen oppimiskäsitys

Kognitiivinen suuntaus alkoi saada jalansijaa 1950-luvulla. Sen keskeisiä tutkimuskohteita olivat esimerkiksi ongelmanratkaisu, muisti, kieli, valikoiva tarkkaavaisuus ja toiminnan rakenne. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 120–121.) Hakkaraisen, Longan ja Lipposen (1999, 16) mukaan kognitiotieteellisen tutkimuksen kohteena ovat ihmisen älykkään toiminnan selittäminen ja mallintaminen, ja esimerkiksi kognitiivinen psykologia edustaa tätä suuntausta. Matematiikan oppimisen tutkimuksessa alettiin 1970- luvun lopulta lähtien korostaa voimakkaasti oppilaan aktiivista osallistumista oppimisprosessiin oman tietämyksensä rakentajana ja hänen aikaisempien kokemuksiensa käyttöä oppimisen tukena. Ryhdyttiin puhumaan konstruktivistisesta oppimiskäsityksestä tai vain konstruktivismista (Kupari 1999, 35).

Konstruktivismi on Tynjälän, Heikkisen ja Huttusen (2005, 20) mukaan tietoteoreettinen eli epistemologinen paradigma. Paradigman he määrittelevät tässä yhteydessä tietoa koskevaksi uskomusten järjestelmäksi. Konstruktivismi ei ole yhtenäinen teoria, vaan se on sidoksissa monenlaisiin lähestymistapoihin eri tieteenaloilla ja sen merkityksestä on olemassa erilaisia tulkintoja. Konstruktivismi ei siis itsessään ole oppimisteoria vaan paradigma, joka käsittelee tiedon olemusta ja joka on levinnyt laajalle yhteiskunta- ja ihmistieteisiin.

Konstruktivistinen oppimiskäsitys sen sijaan on konstruktivismin tietoteoreettisen paradigman ilmenemismuoto pedagogiikan ja oppimisen tutkimuksen alueella (Tynjälä 1999, 37). Konstruktivistisen oppimiskäsityksen keskeinen ajatus on, että tieto ei siirry, vaan oppija ”konstruoi” sen itse. Hän valikoi ja tulkitsee informaatiota. Hän myös jäsentää sitä aiemman tietonsa pohjalta ja liittää sen aikaisemmin oppimaansa. Oppija rakentaa kokemustensa avulla ensinnäkin kuvaa maailmasta, jossa hän elää. Toiseksi hän rakentaa kuvaa myös itsestään tämän maailman osana. Konstruointiprosessilla tarkoitetaan oppimisprosessia, joka on aina sidoksissa myös siihen tilanteeseen ja kulttuuriin, jossa se tapahtuu. Konstruointi ankkuroituu sosiaalisiin vuorovaikutusprosesseihin ja niiden välityksellä syntyneisiin merkitysrakenteisiin. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 15.)

Konstruktivistinen oppimisnäkemys on hyväksytty yleisesti myös matematiikan opetukseen (Arcavi & Schoenfeld, 1992, 1; Kupari 1999, 36) ja luonnontieteelliseen opetukseen (Ahtee 1993, 63). ”Oppiminen nähdään konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä kokemuksen merkityksen muuttumisena, kun taas 1970- luvulla vallalla olleen behavioristisen näkemyksen mukaan oppiminen on käyttäytymisen muuttumista” (Ahtee ym. 1994, 57). Ahteen (1993, 67) mukaan oppimista ei nähdä pelkästään tiedonpalasten siirtymisenä muistiin, vaan oppiminen on aktiivinen tapahtuma, jossa oppilas aikaisempien kokemustensa ja itse muodostamiensa käsitysten pohjalta rakentaa tietoa.

Jo Dewey (1933, 31–32) näki tällaisen oppimisen ongelmanratkaisuprosessina, joka syntyy oppilaan testatessa uusia tilanteita aiemman tietämyksensä avulla. Oppimisen edellytyksenä on, että oppija itse ymmärtää, mitä hän kulloinkin opittavasta asiasta osaa tai ymmärtää tai ei osaa tai ei ymmärrä: tämä edesauttaa relevantin tiedon hakua ja relevanttien kysymysten asettamista (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 124).

Konstruktivistinen oppimiskäsitys korostaa, että yrittäessään ymmärtää uutta asiaa oppija etsii aikaisemmasta tietovarastostaan apua. Ausubelin mukaan mielekäs oppiminen edellyttää uuden tiedon kytkemistä entiseen, muussa tapauksessa on kyseessä rutiininomainen ulkoaoppiminen. (Ahtee ym. 1994, 59.)

Opettajan rooli muuttuu vaativaksi: ”Konstruktivistisesta oppimiskäsityksestä seuraa se, että opettajan tulisi olla reflektiivinen ongelmanratkaisija, jonka työ käytännössä vastaa informaalisten tutkimusohjelmien toteuttamista” (Cobb 1988, 101; Rauste-von Wright & von Wright 1994, 160).

Ahteen (1994, 57) mukaan konstruktivismissa on kaksi opetuksen kannalta keskeistä ominaisuutta: 1) Jokainen oppilas konstruoi uudet käsitteensä omien olemassa olevien ajattelu- ja tietorakenteittensa ja kokemustensa pohjalta. Näin jokaisen oppilaan täytyy omakohtaisesti ja aktiivisesti konstruoida tietonsa ennen kuin oppimista tapahtuu. 2) Jokaisella oppilaalla on omat kokemuksensa ja ajattelu- ja tietorakenteensa. Jotta opettaja tuntisi ne, hänen on selvitettävä oppilaittensa lähtökohdat.

Maailmassa oleva tietomäärä on lisääntynyt räjähdysmäisesti teknologian ja internetin kehittymisen myötä. Tämän kehityksen avulla myös tiedon saatavuus on helpottunut huomattavasti. Yhä tärkeämmäksi ovat tulleet tiedon valikoinnin, jäsentämisen, analysoimisen ja kriittisen arvioinnin taidot. Oppijalle olisikin luotava edellytykset oppia jatkuvasti uutta. Tästä tavoitteesta onkin ryhdytty käyttämään nimitystä *oppimaan oppiminen* (esim. Hautamäki ym. 2002 ja 2005), josta on tullut viime vuosina koulutuksen keskeinen tavoite eri kouluasteilla. Tällainen tavoite on osaltaan vaikuttanut konstruktivistisen oppimisnäkemyksen kehitykseen suunnaten sitä tiedonvalikoinnin ja tiedonhakumenetelmien hallitsemisen alueille. Uuden asian sisällöllisen oppimisen lisäksi on siis tärkeää oppia myös tiedon etsimistä eri menetelmiä käyttäen (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 18; Uusikylä & Atjonen 2000, 69–70). Täten oppijan mahdollisuus ja velvollisuus säädellä omaa toimintaansa lisääntyy. Tämä oman toiminnan tietoinen säätely tapahtuu metakognitioiden avulla. (Uusikylä & Atjonen 2000, 129.) Niillä tarkoitetaan tietoisuutta omista tai muiden ihmisten kognitiivisista toiminnoista, ajattelusta, oppimisesta tai tietämisestä. Metakognitioidensa avulla oppija voi esimerkiksi valita mielestään tehokkaimmat päättelyn strategiat päästäkseen tiettyyn tavoitteeseen.

Konstruktivismissa on useita suuntauksia. Leino (2004, 28) toteaakin, että matematiikan opetus voidaan toteuttaa konstruktivistisesti monella eri tavalla. Yksilökeskeisen konstruktivismin ohella matematiikan opetuksessa ja oppimisessa on ryhdytty huomioimaan uudempia konstruktivismin muotoja, joita Leino (1997, 39; 2004, 20) nimittää sosioperspektiivisiksi konstruktionismeiksi. Ne huomioivat oppimisessa myös sosiokulttuurisen ympäristön, johon kuuluvat yhteinen kieli ja kulttuuri. Tynjälä (1999, 38) jakaa niin ikään konstruktivismin erilaiset suuntaukset yksilökonstruktivismiin ja sosiaaliseen konstruktivismiin. *Yksilökonstruktivismi* keskittyy yksilöllisen tiedonmuodostuksen ja yksilön kognitiivisten rakenteiden tai mentaalisten mallien tarkasteluun. *Sosiaalisen konstruktivismin* painopiste-alueena on tiedon sosiaalinen konstruointi, ja siinä ollaan kiinnostuneita sosiaalisista, vuorovaikutuksellisista ja yhteistoiminnallisista prosesseista. (Tynjälä 1999, 39).

Tässä yhteydessä tarkastelen erityisesti kahta konstruktivismin suuntausta. Ensiksi selvitän yksilölliseen konstruktivismiin kuuluvaa suuntausta, jota kutsutaan radikaaliksi konstruktivismiksi, ja toiseksi sosiaalista konstruktivismia. Nämä suuntaukset ovat olleet merkittävässä roolissa etenkin suomalaisessa matematiikan, luonnontieteiden ja ongelmanratkaisun oppimisessa ja opetuksessa (Leino 2004, 24–25; Haapasalo 2004, 92–93; Kupari 1999, 27; Tynjälä 1999, 39).

2.2.1 Radikaalin konstruktivismi

Radikaalin konstruktivismin johtohahmoja on ollut Ernst von Glasersfeld. Hän tutki 15 vuoden ajan Massachusettsin yliopiston opiskelijoiden ongelmanratkaisua ja havaitsi, että esimerkiksi ensimmäisen vuoden fysiikan opiskelijat kykenivät opetuksen ja hyvän harjoittelun avulla antamaan melko hyviä ”oikeita” vastauksia standardikysymyksiin. Mutta kun heille annettiin ongelma, joka jollakin tavoin poikkesi oppikirjan tutuista ongelmista, selvisi, etteivät opiskelijat olleet ymmärtäneet ulkoa oppimiensa kaavojen käsitteellisiä yhteyksiä (von Glasersfeld 1995, 4–5). Tämä vahvisti von Glasersfeldin johtopäätöstä siitä, että opettaja ei voi siirtää käsitteitä oppilaalle, vaan oppilaan on ”keksittävä” ja ymmärrettävä ne itse. Radikaalin konstruktivismin mukaan jokainen yksilö konstruoi eli rakentaa oman tietonsa ja jokaisella on oma todellisuutensa (von Glasersfeld 1995, 7). Emme siis aisti todellisuutta ja tietoutta samalla tavalla. Radikaali konstruktivismi on saanut nimensä siitä, että sen mukaan tiedon ja todellisuuden suhde poikkeaa radikaalisti realistisista ja empiristisistä tietoteorioista. Realistinen tietoteoria myöntää tiedon ja todellisuuden vastaavuuden, joten tietoa voidaan pitää totena, kun se vastaa objektiivista maailmaa. Radikaali konstruktivismi sen sijaan kieltää mahdollisuuden, että ihminen voisi todistaa jonkin tiedon vastaavan täydellisesti todellisuutta, koska havaintomme eivät ole ”puhtaita”, vaan välissä on aina oma tulkintamme. Tietoa voidaan kuitenkin arvioida, mikäli arvioinnin kriteereiksi asetettaan tiedon pragmaattisuus, elinkelpoisuus ja tietyn yhteisön yksimielisyys. (Tynjälä 1999, 39–40.) Tiedon totuudellisuus on mitattava käytännössä. Jos tieto osoittautuu käyttökelpoiseksi, relevantiksi ja elinkelpoiseksi sekä auttaa toimimaan ympäristössämme, sitä voidaan pitää totena. Jos näin ei ole, tiedosta tulee kyseenalaista, hyödytöntä ja epäluotettavaa. (Tynjälä 1999, 40.)

Matematiikassa ja luonnontieteissä radikaali konstruktivismi merkitsee sitä, että tietoa on arvioitava, koeteltava ja testattava. Voimme esimerkiksi testata muodostamiamme matematiikan ja fysiikan sääntöjä oman kokemusmaailmamme näkökulmasta ja selvittää, pitävätkö ne paikkaansa vai eivät. Tässä tutkimuksessa oppilaat esimerkiksi testasivat konkreettisesti, pitävätkö pinta-alan ja tilavuuden kaavat käytännössä paikkaansa. Toteutetulla ongelmanratkaisukurssilla pyrittiin osoittamaan, ei ainoastaan toteamalla vaan konkreettisten esimerkkien avulla, että ongelmanratkaisu ja matematiikka ovat hyödyllisiä ja käyttökelpoisia taitoja oppilaan jokapäiväisessä elämässä. Oppilaat ratkoivat tehtäviä, joissa käsiteltiin esimerkiksi keskinopeutta ja matkustusaikaa, bensiinin kulutusta, yksikkömuunnosten merkitystä sekä tuotteen valmistamista mittakaavan avulla.

2.2.2 Sosiaalinen konstruktivismi

Sosiaalinen konstruktivismi tarkastelee ihmisten välistä kommunikatiivista toimintaa ja vuorovaikutusta (Tynjälä 1999, 59). Sosiaalisessa konstruktivismissa ihmistä ei voida erottaa sosiaalisesta ympäristöstään. Ihmisen vuorovaikutus ympäristönsä kanssa, sosiaalinen ympäristö mukaan lukien, vaikuttavat kokonaiskuvaan, joka ihmisestä muodostuu (Leino 1993, 15). Bauersfeld (1995, 142–156) esittää sosiaaliselle konstruktivismille seitsemän tyypillistä piirrettä, joiden mukaan:

1) Opettaminen tarkoittaa enemmänkin yritystä tarjota oppilaille mahdollisuuksia vuorovaikutteisiin ja reflektiivisiin prosesseihin, jotka luovat ja ylläpitävät opettajan ja oppilaiden keskinäistä työskentelykulttuuria. Opettaminen ei siis ole pelkästään objektiivisesti koostetun tiedon siirtämistä ja esittämistä oppilaille.

2) Oppiminen on oman elämän järjestämistä koskeva prosessi, jossa yksilö on jatkuvassa vuorovaikutuksessa kulttuuriin sosiaalisten siteittensä ja aktiivisen osallistumisensa kautta. Oppiminen ei siis ole arvojen, normien tai objektiivisen tiedon siirtämistä tai vastaanottamista.

3) Tiedon sisäinen esitys (=oppiminen) syntyy paremminkin niiden prosessien tuloksena, joita yksilö joutuu läpikäymään konstruoidessaan sosiaalisesti elinvoimaista tietoa ja välittäessään sitä muille kuin yrityksistä muodostaa kuvaa itselleen todellisuudesta tai annetuista tiedoista.

4) Tiedon ja käsitteiden merkitys ilmenee myös sosiaalisessa viestinnässä käytetyissä ilmauksissa eikä ainoastaan pelkkinä merkintöinä tai ulkoisina symbolisina esitystapoina.

5) Kieli merkitsee sosiaalista kommunikaatioväylää, jolla yksilö voi jakaa kokemuksensa ja tietämyksensä sekä orientoitua samaan kulttuuriin muiden kanssa. Kieli ei siis ole ainoastaan informaation ja merkitysten välittämistapa.

6) Tietäminen ja muistamien tarkoittavat paremminkin hetkellistä, kokonaisvaltaista kokemusten aktivoitumista kuin yksittäisten tietojen hakemista muistista.

7) Matematiikka on ennemminkin sosiaalisiin ja kulttuurisiin sopimuksiin pohjautuva kommunikoinnin muoto kuin ulkoisesti omaksuttu absoluuttisten totuuksien universaalinen kokoelma.

Edellä esitettyjä piirteitä sovellettiin tämän tutkimuksen opetuskokeilussa. Oppilaita kannustettiin aktiiviseen vuorovaikutukseen toistensa ja opettajan kanssa. Tähän pyrittiin suosimalla ongelmanratkaisussa ryhmätyöskentelyä ja kiinnittämällä huomiota matematiikan verbalisointiin siten, että oppilaita kehotettiin esittämään ja perustelemaan vastauksensa suullisesti ja kirjallisesti. Matematiikkaa ja ongelmanratkaisua pyrittiin liittämään oppilaiden kokemuksiin heidän kuvataiteen ja käsityön tunneilla valmistamiensa tuotosten kautta. Opetuksessa ei ollut tavoitteena pelkästään esittää tietoja oppilaille, vaan että oppilaat myös löytäisivät itse tiedon ongelmatilanteita ratkaistessaan. Esimerkkinä tällaisesta oppimistilanteesta voidaan mainita Arkhimedeen lakia käsittelevä oppitunti (ks. luku 10.3.1; tunti 28), jolla oppilaat etsivät syytä siihen, miksi muovailuvahapala uppoaa vesiastiaan mutta samasta palasta muovailtu ”vene” kelluu.

2.2.3 Kokemuksellinen oppimiskäsitys

”Does it grow naturally out of some question with which the student is concerned? Does it fit into his more direct acquaintance so as to increase its efficacy and deepen its meaning? If it meets these two requirements, it is educative. The amount heard or read is of no importance – the more the better, provided the student has a need for it and can apply it in some situation of his own”. (Dewey 1966, 186)

Kokemuksellinen oppimiskäsitys pohjautuu humanistiseen psykologiaan (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 140). Se sai alkunsa 1930-luvulla, jolloin

Dewey muodosti "learning by doing" -käsitteen tekemällä oppimisesta. Kokemuksellisuus oli tärkeää Deweylle koulussa välitettävän tiedon valinnassa ja määrässä, jonka yllä oleva lainaus osoittaa.

Tässä tutkimuksessa on tavoitteena opettaa, usein abstraktina aiheena pidettyä aihetta, matemaattista ongelmanratkaisua konkreettisten ja mielekkäiden oppimiskokemuksien kautta.

Konstruktivistissa oppimiskäsityksessä kokemuksellisen oppimisen menetelmien käyttö pohjautuu ihmisen informaation prosessointiin. Uteliaisuuden ja tiedon saamisen tarpeen oletetaan kuuluvan ihmisen perusluonteeseen. Tavoitteiden konstruktio on olennainen osa opetus–oppimis -prosessia, mutta itse opetusmenetelmiä ei ”sinänsä” pidetä mihinkään tiettyyn tavoitteeseen kytkeytyvinä. Opetukselle asetetusta tavoitteesta riippuu opetustapa, jolla kokemuksellisen oppimisen menetelmiä on tarkoituksenmukaista käyttää. Tavoitteiden virittämä suuntautuneisuus antaa prosessille henkisen kurinalaisuuden ja selkärangan. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 143–144.) Koulussa oppiminen tapahtuu opettajan ohjauksessa ja vuorovaikutuksessa sekä opettajan että muiden oppilaiden kanssa. Oppimista tapahtuu myös oppijan itsenäisenä prosessina. Oppiminen ei siis ole pelkkää passiivista vastaanottamista ja reagoimista, vaan se on prosessi, johon sisältyy oppijan omaa havaitsemista, muistamista, ajattelua, päätöksentekoa ja toimintaa. Kokemuksellisessa oppimisnäkemyksessä korostetaan ulkoista konkreettista tekemistä ja käytäntöön soveltamista enemmän kuin perinteisessä kognitiivisessa näkemyksessä. Kolb (1984, 68–69; vrt. Rauste-von Wright & von Wright 1994, 156) erottaa neljä erilaista oppimistapaa:

- *konkreettinen kokeminen*: henkilökohtaiset kokemukset, tunteet ja ”taiteellinen” orientaatio ovat tärkeitä
- *abstrakti käsitteellistäminen*: tyypillistä systemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisu.
- *reflektiivinen havainnointi*: keskitytään kokemusten ja tilanteiden monipuoliseen reflektointiin.
- *aktiivinen kokeilu*: käytännön toiminta ja ihmisiin tai tilanteisiin vaikuttaminen on olennaista.

Perusajatuksena kokemuksellisessa oppimisessa oppimisen eteneminen tapahtuu syklisesti konkreettisten kokemuksien ja toiminnan kautta kohti ilmiöiden teoreettista ymmärtämistä ja parempien toimintamallien luomista. Olennaista on myös oppijan aktiivinen reflektointi tämän prosessin aikana. (Rauste-von Wright & von Wright 1994, 143; 156–157.)

2.3 Tutkimuksen opetuskokeiluun sovellettu oppimiskäsitys

Tätä tutkimusta ohjaa kognitiivis-konstruktivistisesta ja kokemuksellisesta oppimiskäsityksestä sekä osittain behavioristisista piirteistä muodostettu synteesi. Koeryhmän oppilaille oli tarkoitus luoda mielekäs ja kokemuksellinen oppimisympäristö integroimalla eri oppiaineita matemaattiseen ongelmanratkaisuun laaditun oppimateriaalin avulla. Behaviorististen piirteiden mukanaolo ei kuulostane nykyaikaisen oppimisnäkemysten mukaiselta. Mutta ne ilmenevät suomalaisessa opetustyössä edelleenkin. Törnroosin (2004, 22–24) mukaan opetussuunnitelman uudistustyössä on pyritty siirtymään behavioristisesta oppimiskäsityksestä kohti konstruktivismia, mutta käytännössä tämän muutoksen toteutuminen kuntakohtaisissa opetussuunnitelmissa on ollut hyvin vaihtelevaa. Varsinkin opetussuunnitelmien käytännön toteutuksissa on vielä paljon eroja. Behavioristiset piirteet ovat siis edelleenkin läsnä matematiikan oppikirjoissa ja opetussuunnitelmissa, kuten esimerkiksi Kuparin (1999) ja Perkkilän (2002) tutkimukset osoittavat. Piirteitä ei myöskään ”torjuttu” tähän tutkimukseen kehitetyn oppimateriaalin valmistuksessa, vaan päinvastoin tavoitteena oli valmistaa selkeä, jäsennelty ja opetussuunnitelmaan sopiva oppimateriaali, joka auttaisi tavoitteellista oppimista ja opettamista. Behavioristisen mallin edut: opetuksen johdonmukainen ja turvallinen malli sekä sen toimivuus perustaitoja opetettaessa oli myös tarkoituksenmukaista säilyttää opettajan työn kannalta. Ajatuksena oli näin helpottaa ja kannustaa uuden aihepiirin opettamiseen. Konstruktivistisen ja behavioristisen oppimiskäsitysten yhdistämisellä pyrittiin tässä tutkimuksessa välttämään ”kasvatustieteellinen karikko”, jonka Patrikainen (1997, 85–86; 1999, 60–61) kuvailee osuvasti:

> ”Jotta opettaja voi kehittää ja sisäistää oman uuden opetussuunnitelma–ajattelun suuntaisen pedagogiikkansa on tärkeää, että hänellä on opetus- ja oppimisteoreettista tietämystä. Tämän tietämyksen avulla hän kykenee hahmottamaan ja järjestämään sen laajan käsitteistön, jonka hallinta on välttämätöntä oppimisprosessin ohjaajaksi kehittyvälle ammattilaiselle. Hallitun teorian ja käsitteistön avulla opettaja voi välttää mm. sen kasvatustieteellisen karikon, joka on syntynyt behaviorismin ja konstruktivismin tulkinnasta vastakkaisiksi, toisensa käytännön opetustyöstä poissulkeviksi näkemyksiksi.”

3 MATEMAATTINEN AJATTELU

Matemaattinen ajattelu on laaja käsite. Tässä luvussa määrittelen matemaattista ajattelua niiltä osin, kuin se liittyy tässä tutkimuksessa esitettyyn matemaattisen ongelmanratkaisun teoriaan ja opetukseen.

3.1 Matemaattisen ajattelun määrittelyä

Matemaattisen ajattelun käsitteeseen törmätään usein matemaattista ongelmanratkaisua käsittelevässä kirjallisuudessa ja opetussuunnitelmien tavoitteissa. Esimerkiksi vuoden 2004 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa mainitaan, että:

> ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen” (Opetushallitus 2004, 158).

Se, ettei matemaattista ajattelua kuvailla tai määritellä tarkemmin opetussuunnitelman yhteydessä, johtunee käsitteen laajuudesta ja sen määrittelemisen vaikeudesta.

Psykologisesta näkökulmasta tarkasteltuna ajattelu koostuu idea- tai ajatusketjuista, joita aikaisemmat kokemukset säätelevät. Ajattelun peruselementti on kahden erillisen idean tai ajatuksen opittu yhteys, joka syntyy kokemusten seurauksena. (Saariluoma 1990, 26.)

Leinonen (2005, 35) lisää Saariluoman määrittelyyn kielen ja ymmärtämisen. Hänen mukaansa ajattelu, kieli ja ymmärtäminen ovat monin tavoin kietoutuneet toisiinsa, mutta ne ovat myös kiinteästi kytköksissä oppimiseen. Leinonen tarkoittaa ymmärtämisellä jäsentynyttä tietoa, joka ilmenee kielenkäytön taitona, kuten laskualgoritmien osaamisena ja matemaattisten päättelysääntöjen hallintana. Primaaritason ymmärtämisessä on kyse menetelmien hallinnasta, joka on hänen mukaansa elegantin matemaattisen ongelmanratkaisun edellytys.

Saariluoma (1990, 27) tiivistää, että ajattelu on pohjimmiltaan yrityksen ja erehdyksen kautta tapahtuvaa yhteyksien muodostamista ja niiden käyttöä erilaisissa tilanteissa. Todettakoon jo tässä yhteydessä, että yritys ja erehdys tunnetaan yhtenä ongelmanratkaisustrategiana (ks. luku 4.4). Konneksiot edellyttävät ajattelijan kognitiivista toimintaa. Yrjönsuuri (2004, 116–118) liittää matemaattisen ajattelun kognitiivisen taidon käyttämiseen. Hän jakaa matemaattisen toiminnan algoritmiseen ja reflektoivaan ajatteluun.

Algoritmista ajattelua voidaan kuvata *taitotiedoksi*. Se esiintyy kognitiivisen taidon käyttämisenä esimerkiksi silloin, kun verbaalista lausetta täsmennetään symbolikieleksi ja päinvastoin. Tietyn periaatteen käyttäminen merkitsee taitoa toimia tietyllä tavalla. Tähän taitoon kuuluu Yrjönsuuren mukaan myös operaation valinta ja sen vaikutuksen tunteminen. Algoritminen ajattelu antaa välineet tehtävien ratkaisemiseen ja tulosten kehittämiseen.

Reflektoiva ajattelu on pohdiskelemista, joka houkuttelee kehittämään oivalluksia deduktiivisten päätelmien tekemiseen. Reflektoivan toiminnan tavoitteet liittyvät siihen, kuinka itsenäisesti, omiin kokemuksiinsa ja arviointeihinsa nojautuen yksilö suuntaa toimintaansa. Yrjönsuuri mainitsee lukujen merkitsemisen keksimisen esimerkkinä algoritmisesta ajattelusta ja esimerkkinä lukualueiden laajentamisen reflektoivasta ajattelusta. Yhtälön $x^2 - 2 = 0$ ratkaisemista tutkittiin kauan algoritmisesti, ja sille laskettiin mahdollisimman tarkkoja likiarvoja. Reflektoivan ajattelun tuloksena keksittiin laajentaa lukualuetta irrationaaliluvuiksi, ja vastaus voitiin ilmoittaa lyhyesti muodossa $x = \pm\sqrt{2}$.

Yrjönsuuren (2004) jako on yksi tapa jaotella matemaattista ajattelua. Matemaattisen ajattelun määrittely ei ole kuitenkaan yksiselitteistä. Joutsenlahti (2005, 50) vertaili eri tutkijoiden muodostamia matemaattisen ajattelun sisältökuvauksia ja päätyi siihen, etteivät ne ole yhdenmukaisia. Myöskään Sternberg (1996) ei löytänyt tutkimistaan matemaattisten ajattelun määritelmien kuvauksista yhteisiä elementtejä. Matemaattisen ajattelun luonteesta muodostuukin erilaisia käsityksiä riippuen siitä, missä yhteydessä käsitettä tarkastellaan. Joutsenlahden (2005, 51–63) mukaan matemaattista ajattelua voidaan tarkastella mm. seuraavista viidestä lähtökohdasta: opiskelijaa ympäröivästä kulttuurista, opiskelijan ongelmanratkaisutaidosta, hänen taidostaan prosessoida informaatiota, hänen matemaattisista kyvyistään ja uskomuksistaan.

Koska matemaattisen ajattelun yhteydessä toistuvat usein käsitteet matemaattinen tieto, taito ja kyky, on aluksi syytä tehdä selkoa niiden määritelmistä, ja siitä kuinka nämä käsitteet liittyvät toisiinsa tässä tutkimuksessa.

Matemaattinen tieto jaetaan usein kahteen tyyppiin: konseptuaaliseen *(conseptual knowledge)* eli käsitteelliseen tietoon ja proseduraaliseen *(procedural knowledge)* eli menetelmätietoon (Hiebert ja Lefevren 1986; Hiebert & Carpenter 1992; Haapasalo & Kadijevich 2000)

Haapasalo ja Kadijevich (2000, 141) antavat konseptuaaliselle ja proseduraaliselle tiedolle määritelmät, jotka Haapasalo (2004a, 53) on suomentanut seuraavasti:

> <u>Konseptuaalinen tieto</u> on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toi-

> mintansa perusteet sekä logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduureja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia.
>
> Proseduraalinen tieto tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.

Konseptuaalisen tiedon voidaan siis ajatella muodostuvan oppilaan tietoverkosta, jota hänen on käytettävä ja rakennettava tietoisesti. Proseduraalinen tieto taas on oppilaan tietoa siitä, kuinka eri menetelmiä käytetään suorituksen aikana. Proseduraalinen tieto ei välttämättä edellytä tietoista ymmärtämistä, mikäli suoritus on jo automatisoitunut. Tietoinen ymmärtäminen onkin merkittävä ero konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä. Haapasalon ja Kadijevichin (2000, 141) sekä Haapasalon (2004a, 54) mukaan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välistä eroa voidaan selventää tutkimalla suorituksen automatisoitumista ja sitä, kuinka tietoisesti yksilö perustelee toimintojensa vaiheet. Tämä on heidän mielestään kuitenkin käytännössä hankalaa ja jopa epätarkoituksenmukaista. Hiebertin ja Carpenterin (1992, 77) mielestä konseptuaalista ja proseduraalista tietoa ei myöskään pitäisi pyrkiä erottamaan toisistaan vaan tutkia niiden keskinäistä kytkeymistä toisiinsa.

Tietojen lisäksi matemaattiseen ajatteluun liittyvät taidot ja kyvyt. Mikä on taidon ja kyvyn välinen ero? Niiniluodon (1989, 49) mukaan ihmisillä ja eläimillä on lajityypillisiä kykyjä, jotka jokainen lajin normaali jäsen osaa luonnostaan tai harjoituksen jälkeen. Tällaisia ovat esimerkiksi puhuminen, kävely kahdella jalalla jne. Myös Hirsjärven (1983, 101) mukaan kyky voi olla olemassa koulutuksesta tai harjoituksesta riippumatta, mutta se voi myös seurata niistä.

Opitut taidot voivat sen sijaan olla yksilöllisiä. Esimerkiksi koira voi oppia istumaan ja taluttamaan sokeaa ihmistä. Tällaiset yksilölliset taidot ovat kuitenkin ”ehdollisia refleksejä” eli omaksuttuja käyttäytymistaipumuksia, joiden siirtäminen toisille ja jälkeläisille on rajoitettua tai mahdotonta (Niiniluoto 1989, 49). Saariluoma (1990, 17) toteaa: ”Taidot ovat opittuja käyttäytymismuotoja, jotka on saavutettu järjestelmällisen harjoittelun avulla”.

Näiden määrittelyjen mukaisesti tässä tutkimuksessa *kyvyt* ovat yksilön synnynnäisiä valmiuksia ja *taidot* opittuja ominaisuuksia, joita molempia voidaan kehittää harjoittelun avulla ja lisätä näin yksilön suoritustasoa eli taitavuutta tietyllä alueella. Tietty taito voi koostua useista kyvyistä ja osataidoista, eli esimerkiksi ongelmanratkaisutaito vaatii usein keskittymiskykyä ja lukutaitoa mutta myös monia muita kykyjä.

Oppilaan matemaattiset taidot ovat prosesseja, joita oppilaan matemaattiset kyvyt omalta osaltaan ohjaavat. (Joutsenlahti 2005, 89). Taidot edustavat Joutsenlahden (2004, 367) mukaan lähinnä proseduraalista tietoa. Tämän mukaan taito siis sisältyy tietoon, jota tukee hyvin myös aikaisemmin esitetty Yrjönsuuren kuvaus algoritmisesta ajattelusta taitotietona.

Edellä esitettyä taustaa vasten on ymmärrettävää, että matemaattisen ajattelun täsmällinen määritteleminen on hankalaa. Joutsenlahti (2004) on kuitenkin määritellyt matemaattisen ajattelun konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon avulla osuvasti:

Matemaattinen ajattelu on oppijalle merkityksellisten matemaattisten tietojen (konseptuaalisten tietojen, proseduraalisten tietojen tai niiden yhdistelmien) prosessointia. Tiedon prosessointi voi olla esimerkiksi intentionaalista ongelmanratkaisua, opittavan aineksen ymmärtämistä tai omaehtoista tietojen tutkimista. Tietoisuus ajatteluprosesseista ja niiden hallinnasta on toisaalta osa oppijan tietorakennetta. Ajatteluprosessia suuntaavat ja rajaavat oppilaan kyvyt, asenteet, uskomukset, senhetkiset tiedot ja taidot (mts. 367).

Joutsenlahden esittämä matemaattisen ajattelun määrittely sopii hyvin myös tähän tutkimukseen. Oppimisympäristön rakentamisen (opetuksen integrointi, ratkaisukartta ja laadittu oppimateriaali) avulla pyrittiin tarjoamaan oppilaille virikkeitä ja mahdollisuuksia omien tietoverkkojensa rakentamiseen ja kehittämiseen sekä matematiikan verbalisointiin.

Kyetäkseen tuloksekkaaseen opetukseen opettajan olisi hyvä saada tietoa siitä, miten oppilaan ajattelu etenee. Tämä onnistuu ainoastaan oppilaan tuottamien representaatioiden havainnoimisen avulla. Representaatiot ovat useimmiten kielellisiä tai visuaalisia, esimerkiksi oppilaan puhetta, kirjoitusta ja matemaattisia symboleja. Ne ovat siis ulkoisesti havaittavissa. Hähkiöniemen (2006a, 2006b, 2006c) mukaan erilaiset representaatiot ja niiden väliset kytkennät ovat olennainen osa matemaattista ajattelua. Ulkoisten representaatioiden oletetaan kytkeytyvän oppilaan sisäisiin representaatioihin (esim. Hiebert & Carpenter 1992, 66), joten niiden avulla opettaja saa tietoa oppilaan ajattelusta. Näkemys tukee tässä opetusinterventiossa käytettyä ratkaisukarttamenetelmää (ks. luku 7), jonka tarkoituksena oli kannustaa oppilasta esittämään ratkaisuprosessinsa systemaattisesti kirjoitetuin sanoin ja piirroksin.

3.2 Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Tässä tutkimuksessa matemaattista ajattelua lähestytään ongelmanratkaisun näkökulmasta. Tällöin ongelmanratkaisu nousee keskeiseen rooliin matematiikan opiskelussa. Valinnan käyttökelpoisuutta tukee myös se, että useat matematiikan oppimisen tutkijat ovat todenneet ongelmanratkaisun olevan koko matemaattisen ajattelun ydin (esim. Polya 1948; Mason, Burton & Stacey 1982; Stanic & Kilpatrick 1988; Schoenfled 1985; 1992; 1994). Lisäksi Joutsenlahden mukaan (2005, 68) oppilaan matemaattista ajattelua voidaan havainnoida koulussa pääasiassa kahden prosessin avulla: ongelmanratkaisussa ja käsitteen muodostumisessa.

Masonin, Burtonin ja Staceyn (1982, ix–x) mukaan matemaattinen ajattelu vaatii fyysistä, emotionaalista ja älyllistä osallistumista. Heidän näkemyksensä mukaan paras tilaisuus oppia matemaattista ajattelua on ongelmatilanne, jonka selvittäminen ei onnistu muutamassa minuutissa. Ongelmatilanteessa ollaan heidän mukaansa silloin, kun ongelman pohtimiseen on käytetty aikaa ja ollaan vakuuttuneita siitä, että lähes kaikki mahdolliset keinot sen ratkaisemiseen on jo kokeiltu. Huomioimalla kuitenkin tämän tutkimuksen konteksti ja kohderyhmä eli peruskoulun oppilaat, on tätä määritelmää syytä soveltaa tähän tutkimukseen hieman joustavammin. Jotta ongelmanratkaisutaidon opettamista ei aloitettaisi liian vaikeista tehtävistä, voidaan todeta, että ongelmatilanteessa ollaan jo siinä vaiheessa, kun oppilas ei kykene välittömästi ratkaisemaan tehtävää (vrt. kpl 4.1).

Ongelmatilanteen tiedostamisprosessi on Masonin, Burtonin ja Staceyn mukaan myös olennainen osa matemaattista ajattelua. Samaan päätyy myös Joutsenlahti (2005, 62). Hänen mukaansa ongelmanratkaisuprosessi edellyttää ratkaisijaltaan nimenomaan matemaattista ajattelua.

Masonin, Burtonin ja Staceyn (1982, 154) mukaan matemaattinen ajatteleminen ei rajoitu pelkästään matematiikkaan, vaan se on prosessi, joka kasvattaa ymmärtämystämme maailmasta ja mahdollisuuksistamme. Matemaattinen ajattelu ei ole vain matemaattis-luonnontieteellisten ongelmien käsittelyä vaan laajempi toimintatapa, jonka ylläpitämiseen vaaditaan enemmän kuin vain vaikeita kysymyksiä tai elegantteja vastauksia. Tämän tyyppiseen matemaattista ajattelua ja ymmärtämistä koskevaan laajempaan näkemykseen ovat päätyneet esimerkiksi Kilpatrick, Swafford ja Findel (2001) sekä Pirie ja Kieren (1994).

Kilpatrickin, Swaffordin ja Findelin (2001, 116) mukaan matemaattinen osaaminen *(mathematical profiency)* koostuu viidestä tekijästä (kuvio 1), jotka liittyvät matemaattisen ajatteluun, ymmärtämiseen ja ongelmanratkaisuun. Nämä tekijät ovat:

1) Konseptuaalinen ymmärtäminen *(conceptual understanding)*, johon kuuluu ymmärrys matemaattisista käsitteistä, operaatiosta ja näiden suhteista.

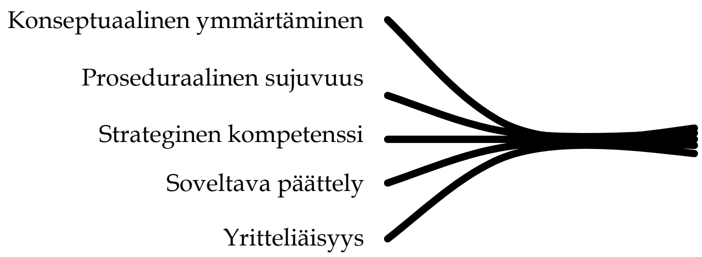
2) Proseduraalinen sujuvuus *(prosedural fluency)* ilmenee taitona toteuttaa matemaattiset menettelytavat joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.

3) Strateginen kompetenssi *(strategic competence) s*isältää taidon muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.

4) Soveltava päättely *(adaptive reasoning)* sisältää kyvyn loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selityksiin ja perusteluihin.

5) Yritteliäisyys *(productive disposition)* koostuu yksilön ahkeruudesta ja tehokkuudesta, jotka ovat seurausta yksilön asenteesta nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja vaivanarvoisena.

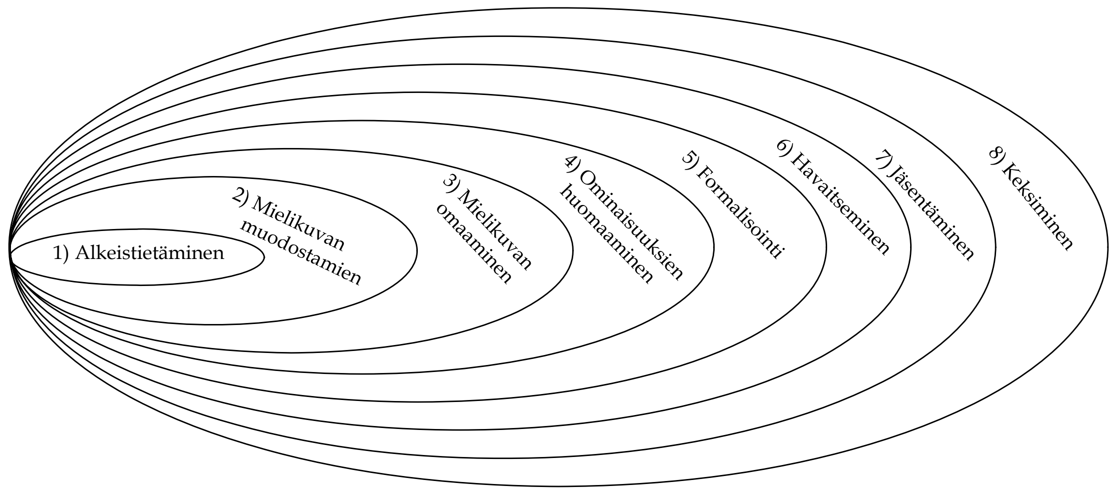
Edellä mainitut matemaattisen osaamisen tekijät ovat punoutuneet toisiinsa ja ovat toisistaan riippuvaisia (kuvio 1).



KUVIO 1 Matemaattisen osaamisen tekijät Kilpatrickia ym. (2001, 117) mukaillen

Kilpatrick ym. (2001, 116) toteavat, että matemaattinen ajattelu ja sen käyttö eivät kuulu pelkästään matematiikkaan vaan laajempaan kontekstiin. Matemaattiseen ajatteluun liittyy myös herkkyys tunnistaa uusia tilanteita, joissa voidaan käyttää hyväksi erilaisia tekniikoita ja ajattelutapoja. Ongelmanratkaisua tulisikin heidän mukaansa liittää matematiikan lisäksi myös muiden oppiaineiden tunteihin.

Matemaattiselle ajattelulle on olemassa erilaisia jaotteluita, joista on löydettävissä yhteneväisyyksiä. Mutta opetuksen kannalta on olennaista tarkastella oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä. Monivaiheisen teorian matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen arvioinnille antavat Pirie ja Kieren (1994, 165–190, ks. myös Silfverberg 1999; Joutsenlahti 2005), joiden näkemyksiin tässä tutkimuksessa toteutettu oppimisympäristön luominen pohjasi. Heidän teoriansa kuvaa matemaattisen ymmärtämisen ja ajattelun kasvua vaiheittaisina prosesseina. Pirien ja Kierenin teoria pohjautuu von Glasersfeldin (1987) näkemykseen siitä, että matemaattisen ymmärtämyksen kasvu voitaisiin esittää konstruktivistisen määritelmän mukaisesti jatkuvana yksilön tiedon rakenteen uudelleenjärjestymisen prosessina. Heidän mukaansa matemaattisessa ymmärtämisprosessissa on kahdeksan vaihetta: 1) alkeistietäminen, 2) mielikuvan muodostamien, 3) mielikuvan omaaminen, 4) ominaisuuksien huomaaminen, 5) formalisointi, 6) havaitseminen, 7) jäsentäminen ja 8) keksiminen (kuvio 2). Seuraavassa esittelen Piren ja Kierenin (1994, 166–171) ymmärtämisprosessin vaiheet ja havainnollistan kutakin vaihetta käyttäen esimerkkinä pinta-ala käsitteen ymmärtämisen etenemistä.



KUVIO 2 Matemaattisen ymmärtämisen ja ajattelun kehittyminen Pirien ja Kierenin (1994) mukaan

Alkeistietämisen vaihe *(primitive knowing)* on oppilaan matemaattisen ymmärtämisen lähtökohta. Sillä ei tarkoiteta tasoltaan alhaista matematiikkaa, vaan se sisältää ne oppilaan esitiedot käsitteistä, joita hän pyrkii ymmärtämään tai joita hän tarvitsee uuden käsitteen ymmärtämisessä. Esimerkiksi pinta-ala käsitteen opiskelussa oppilaan on hallittava mm. kerto-, yhteen- ja vähennyslaskutaidot ennen kuin tätä käsitettä on mielekästä opiskella.

Mielikuvan muodostamisen *(image making)* vaiheessa oppilas pyrkii käyttämään ja yhdistelemään esitietojaan uudella tavalla. Tässä vaiheessa (opettajan antamat) havaintovälineet helpottavat uuden mielikuvan muodostamista. Mielikuvan muodostuu oppilaan toiminnan kautta, eikä se ole pelkästään visuaalinen; pinta-ala käsitteen mielikuvan muodostamisessa auttavat erilaiset havaintovälineet, jotka esittävät pinta-alan koostuvan yksiköistä. Oppilas voi esimerkiksi koota annetuista yksikköpalasista erikokoisia ja muotoisia pinta-aloja.

Mielikuvan omaamisen *(image having)* vaiheessa oppilas ei tarvitse enää konkreettisia välineitä toimintaansa vaan selviytyy siitä mentaalisesti. Tosin mielikuva saattaa olla vielä tässä vaiheessa vajavainen. Pinta-alan opiskelussa oppilas ymmärtää, että esimerkiksi ”ruutu” merkitsee yhtä pinta-alayksikköä, josta voidaan muodostaa yhdistellen erilaisia pinta-aloja ja ruutujen koko voidaan esittää numeerisesti laskemalla esitetyn alueen ruudut yksitellen yhteen.

Ominaisuuksien huomaamisen *(property noticing)* vaiheessa oppilas pystyy käsittelemään tai yhdistelemään mielikuvistaan erilaisia näkökulmia muodostaen niistä ominaisuuksia, jotka liittyvät kontekstiin. Tällöin oppilaan mielikuva käsitteen toiminnasta on voimistumassa ja oppilas kykenee selittämään käsitteen ominaisuuksia ja rakennetta. Pinta-ala-käsitteen kohdalla oppilas voi nyt havaita ja kehitellä strategian pinta-alan laskemiseen. Hän kykenee itse ruuduttamaan monikulmaisen alueen, ja saa selville sen kokonaispinta-alan jakamalla sen aluksi neliön tai suorakulmion muotoisiin alueisiin. Lopuksi oppilaan tarvitsee vain laskea alueiden pinta-alat yhteen.

Formalisoinnin *(formalising)* vaiheessa oppilas ei tarvitse enää mielikuvia käsitteestä, vaan hän kykenee operoimaan pelkillä symboleilla ilman, että hänen tarvitsee liittää niitä välttämättä muodostamiinsa mielikuviin. Näin tapahtuu, kun oppilas esimerkiksi kykenee soveltamaan oppimaansa laskusääntöä tai kun hän pystyy luomaan taulukon tai kaavion tietyn tehtävän ratkaisemiseksi. Tässä vaiheessa oppilas on oivaltanut, että pinta-alan saa nopeasti selville kertomalla alueen pituuden ja leveyden. Hän kykenee laatimaan taulukon esimerkiksi siitä, kuinka neliön pinta-ala kasvaa, kun sen sivua pidennetään yhdellä pituusyksiköllä.

Havaitsemisen *(observing)* vaiheessa oppilas kykenee koordinoimaan ja kontrolloimaan formaalista toimintaansa ja pystyy tuottamaan myös matemaattisen teoreeman käsittelemälleen tehtävälle. Pinta-alan laskemisessa oppilaan suoritus varmistuu ja hän tiedostaa, millaisessa suhteessa pituus ja pinta-ala ovat toisiinsa. Ruudukkoja ei tarvita, ja myös pinta-alayksikön merkitys hahmottuu.

Jäsentämisen *(structuring)* vaiheessa oppilas pyrkii yleistämään formaalit havaintonsa. Hän tiedostaa kehittelemiensä matemaattisten ilmauksien ja malliensa yhteyden, joten hänen on myös mahdollista perustella väitteensä loogisesti tai matemaattisin argumentein. Pinta-alaesimerkissämme oppilas hallitsee myös erimuotoisten alueiden (suorakulmio, kolmio, ympyrä) laskemisen ja niiden vertailun sekä osaa soveltaa taitoansa erilaisten kappaleiden pinta-alojen laskemiseen.

Keksimisen *(inventising)* tasolla oppilas on saavuttanut käsitteestä jäsentyneen ymmärryksen. Tällöin hän kykenee vapautumaan käsitteeseen liittyvistä ennakkokäsityksistään, jotka saattaisivat haitata uusiin käsitteisiin johtavaa kysymyksenasettelua ja ymmärtämistä. Tässä vaiheessa oppilas ymmärtää pinta-ala-käsitteen, ja siihen liittyvät laskutoimitukset ovat automatisoituneet. Hän tietää kappaleen muodon vaikuttavan sivujen pinta-alojen summaan. Oppilaan olisi nyt helppo siirtyä opiskelemaan tilavuuden käsitettä ja oivaltaa sen yhteys pinta-alan laskemiseen. Tilavuuden ymmärtäminen alkaisi niin ikään alkeistietämisen vaiheesta (kuvio 2). Tässä tapauksessa alkeistietäminen sisältäisi jo pinta-alan käsitteen hallinnan ja ymmärtämisen.

Pirien ja Kieren (1994) teorian mukaan uuden käsitteellisen alueen oppiminen etenee edellä mainittujen vaiheiden kautta. Oppiminen ei kuitenkaan tapahdu läheskään aina suoraviivaisesti. Kohdatessaan ongelman tai kysymyksen, joka ei ole välittömästi ratkaistavissa, oppilas joutuu palaamaan sisemmälle tasolle kehittämään puutteellista ymmärtämystään ennen kuin hän pystyy jatkamaan aloittamansa ongelman parissa. Tätä palaamista sisemmälle tasolle Pirie ja Kieren nimittävät takaisin kiertymiseksi *(folding back).* Tasoilla eteneminen tapahtuu ensimmäisellä oppimiskerralla järjestyksessä, mutta takaisin kiertymisen jälkeen oppilas voi ohittaa ne vaiheet, jotka eivät ole enää ongelman prosessoinnin kannalta tarpeellisia. Edellä kuvattua takaisin kiertymistä pidetään matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen ominaisena piirteenä. (Pirie & Kieren 1994, 173; Silfverberg 1999, 58; Joutsenlahti 2005, 73). Erilaiset oppilaat liikkuvat vaiheiden läpi eri tavoilla ja eri nopeudella. Myös heidän ymmärryksensä voi olla syvyydeltään eriasteista. Pirien ja Kierenin (1994) teorian mukaan matemaattisen ymmärtämyksen kasvu perustuu dynaamiseen, kokonaisvaltaiseen, ei-lineaariseen kasvuprosessiin. Heidän teoriansa mukaan ymmärtämisen uloimmat tasot eivät välttämättä tarkoita korkeampaa matemaattista tasoa. Korkeamman tason matematiikka vaatii varsinkin alkuvaiheessa työskentelyä myös mielikuvan tekemisen tasolla, ennen kuin yksilö voi etsiä matematiikalle sopivaa formalisointia tai rakennetta.

Tässä tutkimuksessa Pirien ja Kierenin ajatuksia sovellettiin koeryhmän oppilaiden oppimisympäristön rakentamisessa. Heidän näkemystään siitä, että oppilas joutuu ongelman kohdatessaan palaamaan edelliselle ymmärtämisen tasolle *(folding back)* tuettiin ratkaisukartta-menetelmällä (luku 7). Menetelmän avulla oppilas voi siirtyä ratkaisuyrityksessään taaksepäin tai keskeyttää sen hetkeksi kerratakseen tietojansa tai parannellakseen vastausta uudessa ratkaisuyrityksessä.

Opetuskokeilun yhteydessä toteutetun oppiaineiden integroinnin (luku 6) avulla pyrittiin tarjoamaan oppilaille lisää virikkeitä ja mahdollisuuksia erilaisten mielikuvien luomiseen, mikä korostuu myös Pirien ja Kierenin teoriassa (kuvio 2). Tutkimusta varten suunnitellun ja toteutetun oppimateriaalin tavoitteena oli konkretisoida matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun liittyviä käsitteitä. Näin osaltaan helpotettiin Pirien ja Kierenin teorian mukaista mielikuvan ja käsitteen ymmärtämisprosessia.

4 ONGELMASTA MATEMAATTISEEN ONGELMANRATKAISUTAITOON

Tässä luvussa esittelen tämän tutkimuksen kannalta oleellista matemaattisen ongelmanratkaisun taustateoriaa ja siihen liittyvää käsitteistöä. Tarkastelu aloitetaan ongelman määrittelystä edeten ongelmanratkaisun jaottelun, ongelmanratkaisumallien ja -strategioiden kautta matemaattiseen ongelmanratkaisutaitoon.

4.1 Ongelma

Sanaa ongelma käytetään mitä moninaisimmissa yhteyksissä. Ongelman ja sen synonyymin probleeman (jota aiemmin käytettiin useammin kuin ongelmasanaa) määritelmiä on useita. Tässä tutkimuksessa ongelman käsite rajataan seuraavien määritelmien avulla.

Pehkonen ja Zimmermann (1990, 39–40) valitsevat ongelman määritelmäksi kirjallisuudessa yleisesti käytetyn määritelmän (ks. esim. Kantowski 1980, 195). Sen mukaan ongelma on sellainen tehtävätilanne, jonka ratkaisemiseksi yksilö joutuu yhdistelemään hänelle tuttuja tietoja uudella tavalla. Jos hän voi heti tunnistaa tehtävän suorittamiseen tarvittavat toimenpiteet, on tehtävä hänelle rutiinitehtävä – ei ongelma. Tehtävän ongelmallisuus on siis aina sidottu henkilöön ja aikaan.

Haapasalo (1985, 32; 1997, 17) korostaa määritelmässään pedagogista näkökulmaa: ”Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä tietoista ja päämäärähakuista (ajattelu) toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja.”

Ongelma ymmärretään tässä tutkimuksessa tehtävätilanteeksi. Edellisten esitysten pohjalta määrittelen ongelman seuraavasti: *Ongelma on sellainen tehtävätilanne, jota yksilö ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla.* Matematiikan ja ongelmanratkaisun luonteen kannalta on oleellista todeta, että *ratkaisun saavuttaminen voi kestää muutamista sekunneista viikkoihin tai jopa vuosiin*.

Ongelma on matemaattinen silloin, kun sen ratkaisemisessa käytetään jollakin tavoin apuna matemaattisia keinoja (Koponen 1995, 159). Ongelmatehtävät voidaan luokitella niiden tyypin mukaan sanallisiin, numeerisiin ja geometrisiin tehtäviin. Matemaattiset sanalliset ongelmat voidaan ratkaista muodostamalla tilanteesta laskulauseke tai apupiirros tai molemmat. Numeeriset ongelmat edellyttävät numeerista päättelyä tai sarjan tai kaavan löytämistä esimerkiksi lukujonosta. Geometriset ongelmatehtävät vaativat geometristen muotojen havaitsemista ja niihin liittyvien kaavojen soveltamista.

Se, onko tehtävä henkilölle ongelma vai rutiinitehtävä, riippuu myös henkilöstä ja ajasta. Kertolaskut ovat ongelmia koulunsa aloittaneille, mutta rutiinitehtäviä lukiolaisille. Esimerkiksi tehtävä:

Mikä on suorakulmion pinta-ala, kun sen leveys on 5 cm ja korkeus 3 cm?

on ongelmatehtävä 3.-luokkalaiselle, mutta rutiinitehtävä 9.-luokkalaiselle.

Ongelmatehtävät voidaan luokitella myös avoimiin ja suljettuihin (kuvio 3). Luokittelu tapahtuu tehtävän alku- ja lopputilanteen mukaan. Suljetussa ongelmassa tehtävän alku- ja lopputilanne on annettu tarkasti. Jos ratkaisijan annetaan tehdä valintoja alku- tai lopputilanteeseen tai molempiin, on kyseessä avoin ongelma. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 13–15.)

ONGELMA		**Lopputilanne**	
		SULJETTU	AVOIN
Alkutilanne	SULJETTU	alku- ja lopputilanne tarkasti selitetty	lopputilanne avoin
	AVOIN	alkutilanne avoin	alku- ja lopputilanne avoimia

KUVIO 3 Ongelmien luokittelu niiden lähtö- ja lopputilanteen mukaan (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14)

Kuvion 3 mukaisen luokittelun perusteella voidaan perinteisten suljettujen ongelmien lisäksi nimetä kolmenlaisia avoimia ongelmia.

Ratkaisun lopputilanne voi olla avoin (*open-ended problem*). Tällöin ongelmaan ei ole olemassa yhtä ainoaa oikeaa vastausta, vaan ratkaisijan luoma vastaus on oikein, kunhan sen lähtökohtana ovat tehtävässä annetut alkuehdot. Vaihtoehtoisesti tehtävän alkutilanne voi olla avoin (*open-beginning problem*), ja ratkaisija voi itse päättää miten ja mistä lähtökohdista hän pääsee vaadittuun lopputulokseen.

Avoimimmillaan tehtävä on silloin, kun alku- ja lopputilanne ovat avoimia (*both-ends-open problem*). Tällöin ratkaisija saa tehtäväkseen luoda oman tehtävän ja ratkaista sen haluamallaan tavalla.

Avoimet ongelmat ovat koulussa käyttökelpoisia, silloin kun matematiikan opetuksessa pyritään korostamaan ymmärtämistä ja luovuutta (ks. Stacey

1995, Nohda 2000). Avoimien tehtävien käyttöä opetuksessa on painotettu erityisesti Japanissa (ks. Nohda 2000). Koulumatematiikassa ongelmat ovat useimmiten suljettuja, eli oppilaiden tulee vain tietää mitä sääntöä ja prosessia heidän tulisi käyttää. Suljetussa tehtävässä luovalle ajattelulle ei juuri anneta mahdollisuuksia. (Pehkonen 2000a, 13.)

Tutkimustehtävät *(Investigation)* ovat yksi avointen ongelmatehtävien tehtävämuoto. Suljetuistakin ongelmatehtävistä voidaan annettuja ehtoja muuttamalla saada aikaan tutkimustehtäviä. Käytännössä tämä voi tapahtua esimerkiksi jättämällä oppikirjan sanallisista rutiinitehtävistä pois osa informaatiosta. Tehtävästä voidaan poistaa esimerkiksi kysymys tai osa alkutiedoista, jolloin tehtävä saa monimerkityksellisyyttä, ja siihen voidaan saada useampia oikeita vastuksia. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14–15.)

Tutkimuksessani toteutetulla ongelmanratkaisukurssilla käytettiin suljettuja ja erityyppisiä avoimia ongelmatehtäviä, joiden taustaa ja käyttöä opetuksessa esittelen luvuissa 5.3.4 ja 10.2.1. Kurssilla käytetyt ongelmatehtävät voidaan luokitella edellä esitetyn kuvion 3 avulla. Seuraavassa on muutama esimerkki koeryhmän oppilaille esitetyistä kurssitehtävistä, jotka edustavat luokittelun mukaisia ongelmatyyppejä:

Suljettu tehtävä:

Muunna. a) 100 mm = ______ cm = ______ dm (16. tunti; liite 15, moniste 13)

Avoimet ongelmatehtävät:

Avoin lopputilanne (*open-ended problem*):

”Laiva on lastattu litralla” (9. tunti; liite 15, moniste 16)

- Toimit suunnittelijana Pienoismalli-tehtaan L. Aiva:n insinööritoimistossa. Olette saaneet tilauksen 20 laivan valmistuksesta.
- Laiva valmistetaan 3 cm paksusta PS-E-levystä.
- Sinun on suunniteltava laiva, johon mahtuu 1 litra.

a) Tee piirustukset vihkoosi laivasta sivulta, edestä/takaa ja päältä. Valitse mittakaavaksi esim. 1 ruutu = 1cm. Ota huomioon, että 1 litran on pysyttävä laivassa, vaikka laiva hieman keinahtelisikin.

Avoin alkutilanne (*open-beginning problem*)

Suunnittele henkilöautolla tehtävä kesälomaretki Suomessa.
(25. tunti; liite 15, moniste 26)
Noudata muutamia matkustukseen liittyviä tosiasioita:

- Auton keskinopeus on 80 km/h
- Litra bensiiniä maksaa 1 euron
- Polttoaineen kulutus 8 litraa/100km
- Kahden tunnin ajon jälkeen on pidettävä 30 min tauko
- Yöpyminen hotellissa maksaa 30 euroa/hlö
- Ruokailu maksaa 10 euroa/hlö

Esitä matkasuunnitelma ja kustannukset muille.

Avoin alku- ja lopputilanne (*both-ends-open*):

Laadi tulitikkutehtävä parillesi. (26. tunti; liite 15, moniste 28)

4.2 Ongelmanratkaisu

Mikä saa ihmisen ratkaisemaan ongelman? Esitetyt tehtävät eivät välttämättä käynnistä kaikissa ongelmanratkaisuun tähtäävää toimintaa. Jokainen opettaja on varmasti kokenut tilanteen, jolloin oppilas ei viitsi laskea laskuja, vaikka tehtävä olisikin opettajan mielestä loistava.

Saariluoma (1990, 101) on koostanut Deweyn (1910), Polyan (1957) sekä Newellin ja Simonin (1972) määritelmien pohjalta ongelmanratkaisulle osuvan määritelmän:

"Ongelmanratkaisu on ajatteluprosessi, joka syntyy ongelmatilanteessa. Ongelmatilanteessa ratkaisijalla on aina jokin tavoite, jonka hän pyrkii saavuttamaan, mutta ei kykene saavuttamaan sitä välittömästi käytettävissä olevien keinojen avulla. Ongelmanratkaisuprosessissa ongelmatilanne on alkutila ja ratkaisuprosessi etenee sarjana transformaatioita, joissa alkutila muunnetaan ratkaisuksi". Määritelmä sisältää ongelmanratkaisuprosessin käynnistäjän eli ratkaisijan motivaation. Yksilöllä on aina oltava jokin tavoite, joka motivoi häntä ratkaisuyritykseen.

Hannula (2004, 24) on tutkimuksessaan johtanut määritelmän motivaatiolle: Motivaatio on tunteiden säätelymekanismin sisältämä potentiaali ohjata käyttäytymistä. Tämä potentiaali voi ilmentyä kognitiona, tunteina ja/tai käyttäytymisenä. Hän kuitenkin jatkaa, että tämän potentiaalin käyttämisen tarvitaan tavoitteita ja tarpeita. Motivaatio *(motivation)* ymmärretään siis tavoitteiden ja tarpeiden rakenteeksi, joka on ihmisen käyttäytymistä ohjaava voimavara. Sen vapauttamiseksi tarvitaan hänelle kiinnostavia tavoitteita ja tarpeita. Tämä voimavara saattaa ilmetä käyttäytymisen lisäksi myös kognitioina ja tunteina.

Ongelmanratkaisun määritelmän mukaan tehtävän alkutilasta *halutaan* siirtyä ratkaisuun. Ihmisellä täytyy siis olla motivaatiota eli halua löytää ongelmalle ratkaisu. Itse ongelmanratkaisulla tarkoitetaan niitä toimenpiteitä, joita yksilö ryhtyy tekemään ongelman ratkaisemiseksi (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14).

Ongelmanratkaisu on aina prosessi, joka sisältää ongelmaan orientoitumisen, ongelman työstämisen ja sen ratkaisemisen sekä lopuksi ratkaisun tulkinnan (Haapasalo 1994, 17). Ongelmanratkaisu määritellään käytännön taidoksi, jonka harjaannuttamiseksi on tarjottava runsaasti tilaisuuksia erityyppisten ongelmien ratkaisemiseen, ratkaisujen arvioimiseen ja perustelemiseen sekä uusien ongelmien muotoiluun (Johnson & Rising 1967, 108).

Kansainvälisessä PISA 2003 -tutkimuksessa ongelmanratkaisu määriteltiin taitona, joka luo pohjan oppilaan myöhemmälle oppimiselle, yhteiskunnassa vaikuttamiselle sekä henkilökohtaiselle toiminnalle. PISA tutkimuksessa ongelmanratkaisun määrittely esitettiin seuraavasti:

"Ongelmanratkaisu tarkoittaa yksilön kykyä käyttää kognitiivisia prosesseja aitojen, oppiainerajat ylittävien ongelmatehtävien kohtaamisessa ja ratkaisemisessa, missä ratkaisuun johtava reitti ei ole välittömästi nähtävissä ja missä mahdollisesti käyttökelpoiset osaamisalueet tai oppisisällöt eivät rajoitu yksinomaan matematiikan, luonnontieteiden tai lukemisen arviointialueeseen." (Kupari ym. 2004, 7.)

Yhteistä edellisille ongelmanratkaisun määritelmille on se, että ongelmanratkaisu kuvataan ratkaisijan ajatteluprosessiksi. Esitetyt määrittelyt myös laajentavat selkeästi ongelmanratkaisun matematiikan ulkopuolelle, mikä tarjoaa sen opetukseen oppiaineita yhdistävän näkemyksen. Tätä kokonaisvaltaista näkemystä ongelmanratkaisun opetuksesta toteutettiin tässä tutkimuksessa oppiaineiden integroimisen avulla.

Heikkilän (1981, 16) mukaan ongelmanratkaisua on harjoitettu ja tutkittu kautta historian. Ongelmanratkaisukirjallisuuteen tutustuminen paljastaa, että tällaiseen teokseen löytyy runsaasti aineksia. Ongelmanratkaisua on myös käsitelty lukuisten aiheiden yhteydessä. Se liittyy matematiikan ja luonnontieteiden lisäksi esimerkiksi taloustieteisiin, päätöksentekoon, johtamiseen, politiikkaan, sotilas- ja insinöörikoulutukseen sekä useisiin urheilulajeihin (shakki, suunnistus, joukkuepelien taktiset kuviot jne.).

Ongelmatilanteesta selviäminen vaatii ratkaisijalta myös luovuutta, sillä mikäli ongelma on hänelle todellinen, hän ei voi etukäteen varmasti tietää, miten ratkaisuun päästään. Luovalla ongelmanratkaisulla tarkoitetaan Virkkalan (1994, 17) mukaan tiedon yhdistelyä toimiviksi kokonaisuuksiksi. Esimerkkinä laajan mittakaavan luovasta ongelmanratkaisusta hän mainitsee tietokoneen suunnittelun ja suppeamman mittakaavan ongelmanratkaisusta tietokoneen näppäimen muotoilun siten, että se on helposti vaihdettavissa uuteen. Salhbergin, Meisalon, Lavosen ja Kolarin mukaan (1993, 26–27) luovalla ongelmanratkaisulla tarkoitetaan ongelmien käsittelyä ja ratkaisemista käyttämällä apuna erilaisia luovuuteen perustuvia avoimia ja joustavia menetelmiä. Tällaisiksi menetelmiksi Virkkala mainitsee (1994, 76–77) esimerkiksi tunnettujen vaihtoehtojen järjestelmällisen läpikäymisen, aivoriihen *(brainstorming)*, synektiikkatyyppisen ideakokouksen ja tuumatalkoot.

Luovan ongelmanratkaisun harjoittelu myös tukee matemaattista ongelmanratkaisua ja päinvastoin. Esimerkiksi Virkkalan (1994, 18–19) esittelemässä luovan ongelmanratkaisun mallissa (kuvio 4) on yhtäläisyyksiä jäljempänä esittelemiini matemaattiseen ongelmanratkaisuun malleihin.

KUVIO 4 Luovan ongelmanratkaisuprosessin malli Virkkalan (1994, 18) mukaan

Virkkalan mukaan todellista ongelmaa ratkaistaessa ei edetä suoraviivaisesti tosiasioiden ja ideoiden kautta ratkaisuun, sen hyväksyttämiseen ja viimeisteltyyn toteutukseen, vaan eri vaiheita käydään tunnustelemassa ja niitä palataan tekemään edellisiä perusteellisemmin. Näinhän toimitaan myös matemaattisessa ongelmanratkaisussa, sillä useimmiten ratkaisua haetaan etsien ja kokeillen eri vaihtoehtoja.

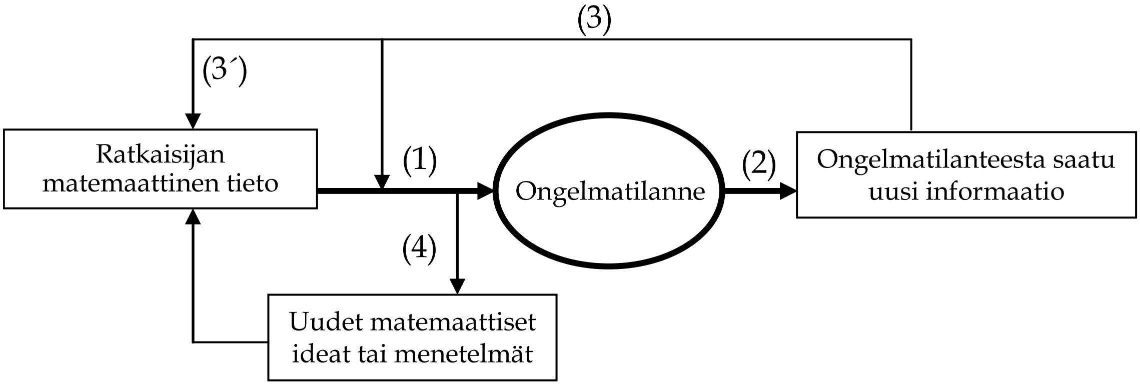
Koska ongelmanratkaisussa on kysymys todella laajasta aiheesta, keskityn tässä tutkimuksessa pääasiassa matemaattisen ongelmanratkaisun tarkasteluun. Oletuksenani on kuitenkin ajatus, että matemaattinen ja yleinen ongelmanratkaisu ovat perusidealtaan samanlaisia prosesseja. Ongelmanratkaisua tarvitaan jokapäiväisessä elämässä, ja siksi sen opettaminen on koulussa ennen kaikkea oppilaan kannalta hyödyllistä.

4.3 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Kiinnostus matemaattiseen ongelmanratkaisuun on ollut kansainvälisesti laajaa, mikä osaltaan osoittaa sen merkityksen mutta toisaalta myös sen haastavuuden tutkimuksen kohteena. Esimerkiksi Lerman, Xu ja Tsatsatorni (2002) tekivät analyysin Educational studies in mathematics -lehdessä julkaistuista artikkeleista vuosilta 1994–1998. Suurin osa (28 %) niistä käsitteli juuri matemaattista ongelmanratkaisua.

Baroodyn (2003, 21) luonnehti ongelmanratkaisua lähestymistavaksi, jossa keskitytään matemaattisen ajattelun kehittämiseen. Matemaattiseen ajatteluun kuuluvat olennaisesti päättely ja ongelmanratkaisu. Lähtökohtana tälle määrittelylle ovat olettamukset siitä, että matematiikka on pohjimmiltaan ajattelutapa, siis erilaisten mallien etsimistä ongelmien ratkaisemiseksi tai tietynlainen tutkimusprosessi.

Lester ja Kehle (2003, 510) määrittelevät matemaattisen ongelmanratkaisun ajatteluprosessiksi, jossa ratkaisija pyrkii ymmärtämään ongelmatilannetta käyttämällä matemaattista tietoansa ja tekee yrityksiä hankkiakseen uutta tietoa tästä tilanteesta, kunnes hän ratkaisee epätietoisuuden. Nunokawa (2005, 327–328) havainnollistaa tätä määritelmää kuvion 5 mukaisella kaaviolla.



KUVIO 5 Matemaattisen ongelmanratkaisun käsite Nunokawan (2005, 328) mukaan

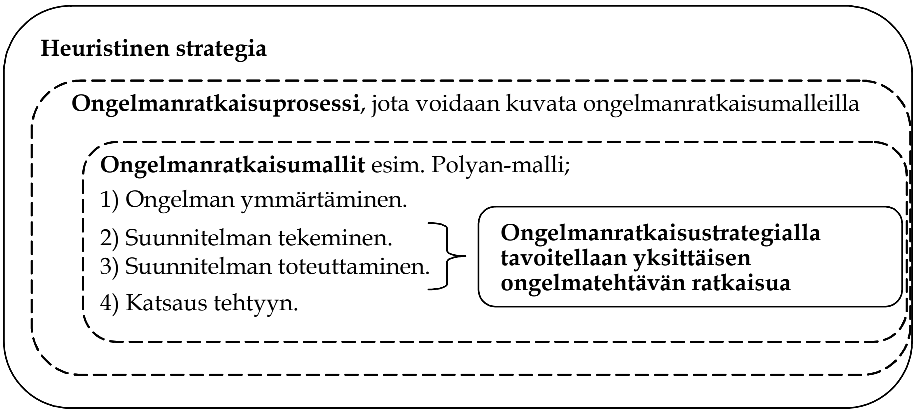
Nunokawa (2005, 327–328) aloittaa matemaattisen ongelmanratkaisun tarkastelun tilanteesta, jossa ratkaisija ei kykene soveltamaan tehtävään matemaattista tietoansa suoraan. Siispä ratkaisijan on muutettava tehtävää tai etsittävä siihen uusia näkökulmia, joiden avulla hän voisi soveltaa tehtävään matemaattista tietoansa. Nunokawan mukaan matemaattisessa ongelmanratkaisussa on kaksi vaihetta: ensin ratkaisija yrittää tutkia ongelmatilannetta miettien, kuinka hän voisi soveltaa siihen matemaattista tietoansa [ks. kuvio 5 kohta (1)], ja sen jälkeen hän saa itselleen uutta informaatiota ongelmatilanteesta (2). Mikäli ongelma ei ratkea, ratkaisija jatkaa ongelman tutkimista matemaattista tietoansa hyväksi käyttäen (3). Jos ratkaisija tunnistaa ongelmatilanteesta joitakin matemaattisia kokonaisuuksia ja löytää niistä uutta informaatiota, tällä tiedolla on mahdollisuus yhdistyä oppilaan matemaattiseen tietoon (3') esimerkiksi kaavana tai matemaattisena teoreemana. Joissakin tapauksissa ongelmatilanteen ratkaisuun käytetyt menetelmät tai tehokkaiden menettelytapojen puute saattaa johtaa matemaattisten menetelmien tai ideoiden luomiseen (4).

Tässä työssä tarkoitan *matemaattisella ongelmanratkaisulla sitä prosessia, jonka oppilas suorittaa yrittäessään ymmärtää ja ratkaista annettua ongelmaa, johon hän tarvitsee matemaattisen tietonsa soveltamista. Huomattakoon, että tämä prosessi ei läheskään aina päädy oikeaan vastaukseen, vaan se voi jatkua myöhemmin ratkaisuyritysten paranteluna kohti oikeaa vastausta.*

4.4 Heuristinen strategia, ongelmanratkaisumalli ja -strategia

Heuristiikalla tarkoitetaan oppia siitä, miten parhaiten saavutetaan uutta tietoa. Heuristisen opetusmenetelmän periaatteen mukaisesti oppilaan on itse keksittävä mahdollisimman paljon ratkaisuja ja hankittava näin tietoa omatoimisesti. (Hirsjärvi 1983, 58.) Polyan (1948, 118–123) mukaan heuristiset strategiat sisältävät kaikki ne keinot, jotka oikein käytettyinä parantavat kykyä ratkaista matemaattisia ongelmia. Schoenfeld (1985, 108) määrittelee heuristisen strategian tekniikaksi tai esitykseksi, jonka tarkoituksena on auttaa ratkaisijaa ymmärtämään paremmin ongelma ja parhaassa tapauksessa auttaa ratkaisemaan se. Tällaisia strategioita ovat esimerkiksi kaavion piirtäminen ja ongelman vertaaminen samantyyppisiin, helpompiin ongelmiin (mts. 108).

Ongelmanratkaisua käsittelevässä kirjallisuudessa on usein rinnastettu käsitteet heuristiikka, heuristinen strategia, ongelmanratkaisumalli, -strategia ja -prosessi toistensa synonyymeiksi (esim. Schoenfeld 1992, 352; Haapasalo 1994, 177). Tässä tutkimuksessa määrittelen näiden käsitteiden väliset suhteet seuraavasti (kuvio 6):



KUVIO 6 Heuristisen strategian, ongelmanratkaisuprosessin, -mallin ja -strategian suhde toisiinsa tässä tutkimuksessa

Heuristinen strategia sisältää kaikki ratkaisijan soveltamat ja hänen itse keksimänsä menetelmät, joilla hän pyrkii ratkaisun saavuttamisen. Ongelmanratkaisuprosessi, -mallit ja -strategiat ovat juuri näitä menetelmiä.

Ongelmanratkaisumallissa on esitetty karkea runko ongelmanratkaisuprosessin vaiheista. Ongelmanratkaisumallissa esitetään ne toiminnot, jotka sisältyvät ongelmanratkaisuprosessiin. Kirjallisuudessa on useita matemaattisen ongelmanratkaisun malleja. Yksi tunnetuimmista ongelmanratkaisumalleista on Polyan (1948, 5–18) malli, joka koostuu neljästä ongelmanratkaisuprosessin vaiheesta: ongelman ymmärtämisestä, suunnitelman tekemisestä, suunnitelman toteuttamisesta ja katsauksesta tehtyyn. Käytetyistä ongelmanratkaisumalleista voidaan Polyan mallin lisäksi mainita esimerkiksi Schoenfeldin (1985, 110) malli, johon palataan myöhemmin (luku 4.6.5).

Koska matemaattisia ongelmanratkaisumalleja on useita, voidaankin sanoa, ettei ole olemassa mitään yleispätevää mallia, jolla jokainen tehtävä ratkaistaan. Tässä tutkimuksessa esitellyt mallit perustuvat psykologisiin, yleistä ongelmanratkaisua kuvaaviin malleihin. Mallit painottavat ongelmanratkaisuprosessin vaiheita eri tavalla. Yleensä malleissa on oletettu, että ongelmanratkaisuprosessi voidaan esittää joidenkin vaiheiden lineaarisena jonona. Yksilön toteuttamaa ongelmanratkaisuprosessia voidaan kuvata ja jäsentää ongelmanratkaisumallien avulla. Oletuksena siis on, että ratkaisija todellakin päätyy lopulta oikeaan ratkaisuun.

Ongelmanratkaisuprosessia kuvaava malli ei kuitenkaan tuo ratkaisua tehtävään. Ratkaisijan on päätettävä ja valittava, millä keinolla hän ratkaisee ongelman. Valintapäätös on tehtävä ratkaisijan ennalta oppimista ongelmanratkaisustrategioista. *Ongelmanratkaisustrategia* on siis ennalta opittu keino, joka valitaan kunkin ongelman ratkaisemiseen. Se sisältää ne työskentelytavat, joita ongelmanratkaisussa voidaan käyttää. Ongelmanratkaisustrategioita voidaan helposti opetella ja harjoitella esimerkkitehtävien avulla. Opittua strategiaa on helpompi soveltaa uuteen ongelmatehtävään.

Ongelmanratkaisustrategioista ja niistä käytettävistä nimityksistä on useita esityksiä. Hammouri (2003, 571–572) luettelee tutkimuskirjallisuudesta löytämiään ongelmanratkaisustrategioita: erilaiset silmukointimenetelmät, ongelman jakaminen pienempiin osiin, etuperin ja takaperin työskentely, yleistäminen ja testaus, analyyttiset ja holistiset menetelmät, algebralliset menetelmät, ongelman vertaaminen samantyyppisiin ongelmiin ja ongelman yksinkertaistaminen.

LeBlanc (1977, 17) on jakanut ongelmanratkaisustrategiat yleisiin ja auttaviin taulukon 1 mukaisesti. Hänen tekemänsä jaottelu ja esitys valittiin tässä tutkimuksessa toteutettuun opetuskokeiluun, koska se on selkeä ja sisältää tyypillisimmät tutkimuskirjallisuudessa esiintyvät ongelmanratkaisustrategiat. Opetuskokeilun pituus ja koeryhmän oppilaiden ikä huomioiden LeBlancin esitystä pidettiin tämän tutkimuksen kannalta sopivana. Kaikkia tutkimuskirjallisuuden sisältämiä strategioita ei ollut tarkoitus esitellä ja opettaa, koska ongelmanratkaisukurssilla oli tavoitteena muokata oppilaan oppimisympäristöä, ei pelkästään opiskella ongelmanratkaisustrategioita.

TAULUKKO 1 Ongelmanratkaisustrategiat LeBlancin (1977) mukaan

Yleiset strategiat	Auttavat strategiat
1. Yritys ja erehdys 2. Järjestelmällinen lista eri mahdollisuuksista 3. Ongelman yksinkertaistaminen 4. Kaavan etsiminen ongelmasta 5. Kokeilu 6. Päättely 7. Yleistys 8. Takaperin työskentely	Diagrammit Taulukot Piirrokset Luettelot Yhtälöt – Ovat välivaiheita yleisten strategioiden toteuttamisessa. – Soveltuvat kaikkiin yleisiin ongelmanratkaisustrategioihin.

LeBlancin ongelmanratkaisustrategiat sisältyvät myös Polyan (1948, 5–18) mallin vaiheiden toteuttamisohjeisiin ja Schoenfeldin (1985, 109) listaamiin ongelmanratkaisustrategioihin. Palaan niiden ja muiden ongelmanratkaisumallien yksityiskohtaisempaan esittelyyn luvussa 4.6.

4.5 Matemaattinen ongelmanratkaisutaito

Luvussa 3.1 esittelin käsitteet matemaattinen tieto, taito ja kyky ja kuinka nämä käsitteet liittyvät toisiinsa tässä tutkimuksessa. Päädyin johtopäätökseen, jonka mukaan esimerkiksi ongelmanratkaisutaito voi koostua useista kyvyistä ja osataidoista. Se vaatii usein keskittymiskykyä ja lukutaitoa, mutta myös monia muita kykyjä.

Krutetskii (1976, 98, 350–351) jaotteli 12 vuoden aikana tekemiensä tutkimusten perusteella matemaattisessa ongelmanratkaisussa tarvittavat kyvyt neljään ryhmään. Kolme ensimmäistä ryhmää muodostuvat ongelmanratkaisuprosessissa erottuvien vaiheiden mukaan:

1. **Kyky ymmärtää ja hankkia matemaattista informaatiota.**

2. **Kyky käsitellä ja tuottaa matemaattista informaatiota kirjallisessa ja suullisessa muodossa.**

3. **Kyky muistaa matemaattista informaatiota.**

Neljäntenä, erillisenä alueena on

4. **Yleinen synteettinen komponentti, joka kuvaa matematiikan luonnetta.**

Osa-alueiden kesken vallitsee Kruteskiin mukaan tiivis vuorovaikutus ja näin ne yhdessä muodostavat yhtenäisen järjestelmän. Tätä järjestelmää hän kutsuu matemaattiseksi lahjakkuudeksi.

Vastaavasti Ballew ja Cunningham (1982, 203–204) jakavat ongelmanratkaisutaidon neljään kykyyn:

1. **Kyky lukea ongelma** tarkoittaa sitä, että tunnistaa ongelman olemassaolon sekä ongelman vaatimukset.

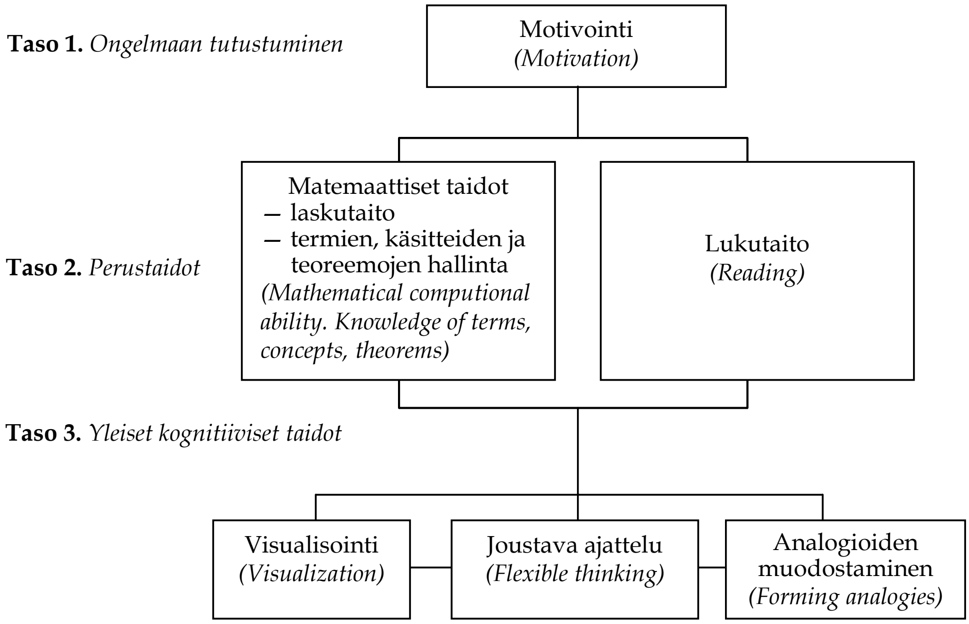
2. **Kyky tulkita ja käsitellä sanallista informaatiota**.
   Tämä edellyttää, että ratkaisija löytää ja osaa valita annetusta tiedosta vain oikeat tiedot. Lisäksi hänen on kyettävä yhdistelemään tekstissä annettuja tietoja kokonaisuuksiksi.

3. **Kyky suorittaa tarvittavat laskutoimitukset.**
   Ratkaisijan on hallittava peruslaskutoimitukset ja osattava soveltaa niitä laskutoimituksia, joita tehtävän ratkaisemisessa tarvitaan.

4. **Kyky yhdistää lukeminen, ongelman tulkinta ja laskeminen sanallisen ongelman kokonaisratkaisuksi**. Tämä edellyttää kaikkien edellisten vaiheiden hallitsemista, niiden käyttöä ja soveltamista tehtävään.

Krutetskiin sekä Ballewin ja Cunninghamin määrittelyt ovat samankaltaisia. Krutetskii tosin painottaa matemaattisen tiedon muistamista, kun taas Ballew ja Cunningham korostavat matemaattisen tiedon käsittelyä. Molemmissa määritelmissä neljäs komponentti kuvataan kolmea ensimmäistä aluetta yhdistäväksi ja soveltavaksi alueeksi, joka edellyttää kognitiivisia taitoja.

Moses (1982) on selvittänyt matemaattisessa ongelmanratkaisussa tarvittavia taitoja hieman toisesta näkökulmasta. Hän on tutkinut oppilailla esiintyvien vaikeuksien avulla, millaisia taitoja ongelmanratkaisussa tarvitaan. Vakuuttavaksi ja mielenkiintoiseksi luokittelun tekee se, että hän perustaa luokittelunsa satoihin seuraamiinsa matematiikan oppitunteihin, joilla oppilaat ratkoivat ongelmia. Moses esittää, että ongelmanratkaisussa ilmenevät vaikeudet voidaan luokitella kuvion 7 mukaisesti kolmeen tasoon.



KUVIO 7 Matemaattisessa ongelmanratkaisussa tarvittavat taidot (Moses 1982, 11)

Kuvion 7 esittämät vaikeudet tasolla 1 kohdataan heti ongelmaan tutustuttaessa. Ratkaisijan on motivoiduttava ja innostuttava ongelmatehtävän ratkaisemisesta. Mitä nuoremmasta ratkaisijasta on kyse, sitä enemmän opettaja voi vaikuttaa oppilaan motivoitumiseen. Opettaja voi motivoida oppilaita esimerkiksi valitsemalla vaikeustasoltaan sopivia tehtäviä, käyttämällä opetusryhmässä toimivia opetusmenetelmiä ja integroimalla ongelmanratkaisua muiden oppiaineiden aihepiireihin. Opettajan tavoitteena on saada oppilaat motivoitumaan ja asennoitumaan myönteisesti ongelmanratkaisuun. Tämä tietysti edellyttää, että myös opettaja itse on perehtynyt aiheeseen ja motivoitunut sen opettamisesta.

Mosesin (1982, 11) määrittelemän tason 2 vaikeudet liittyvät ratkaisijan perustaitoihin. On selvää, että ongelmanratkaisua varten on opetettava oppilaalle tehtävissä vaadittavat matemaattiset työkalut eli peruslaskutoimitukset ja niiden soveltaminen. Sanalliset ongelmatehtävät edellyttävät hyvää lukutaitoa, erityisesti lukemisen ymmärtämistä. Lukemistaitoihin on syytä lisätä vielä kirjoittamistaidot, sillä tehtävän ratkaisuun tarvittavien tietojen ja ajatusten kirjoittaminen on myös olennainen osa tehtävän ratkaisua. Matemaattisten perustaitojen ja lukemis- ja kirjoitustaitojen puutteista johtuvia vaikeuksia voidaan toki välttää käyttämällä riittävän selkeitä ja helppoja ongelmatehtäviä. Näiden taitojen puutetta ei voida kuitenkaan korvata kohdattaessa vaativia ongelmatehtäviä, ja siksi niiden harjoittelu on syytä aloittaa riittävän varhain.

Mosesin mukaan suurimmat vaikeudet oppilailla ilmenivät kolmannen tason taidoissa, jotka ovat yleisiä kognitiivisia taitoja. Hänen mukaan syynä tähän on, ettei oppilaita ole rohkaistu visuaalisten ajatteluprosessien tuottamiseen; mielikuvituksen käyttöön tai apupiirrosten laatimiseen. Joustavalla ajattelutaidolla hän tarkoittaa ideoiden tuottamista ja kykyä tunnistaa ongelmasta enemmän kuin vain siinä annetut faktat. Joustava ajattelu korostuu usein ongelmanratkaisussa; kun jouduttuaan umpikujaan, ratkaisijan on kyettävä palaamaan takaisin lähtötilanteeseen ja muutettava ratkaisuyritystään. Onneksi yleisten kognitiivisten taitojen harjoittelu voidaan aloittaa, vaikka oppilaalla olisikin vaikeuksia matemaattisissa taidoissa tai luku- ja kirjoitustaidoissa. Tällöin valitaan edellä mainittujen taitojen osalta oppilaalle sopivan tasoisia ongelmatehtäviä. Mosesin mukaan hyviä harjoituksia joustavan ajattelun ja visualisoinnin harjoitteluun ovat esimerkiksi Tangram–palapeli, SOMA-kuutiot, muovailuvahasta tehtyjen geometristen kappaleiden halkaisuleikkaukset *(cross sections)*, geotaulut, esineen piirtäminen suullisen ohjeen avulla ja tarinan kirjoittaminen siitä *(creative writing).* (Moses 1982, 11–14.)

Mosesin, Krutetskiin, Ballewin ja Cunninghamin jaotteluun on lisättävä vielä yksi taitoalue, nimittäin selektiivisyys. Ongelmanratkaisutilanteessa ratkaisija joutuu tekemään lukuisia valintoja siitä, mitä tietoja, heuristiikkoja, ongelmanratkaisumalleja ja -strategioita hän käyttää ongelman ratkaisemiseen. Tämä edellyttää ratkaisijalta järkevän valitsemisen taitoa eli selektiivisyyttä. Selektiivisyyden (*selectivity*) on havaittu erottelevan lahjakkaat ja keskitason oppilaat toisistaan ongelmanratkaisussa kognitiivisen ratkaisuprosessin tehokkuuden suhteen (Sternberg & Davidson, 1983; Davidson, 1986).

Paitsi lahjakkaat luonnollisesti myös tietyn alan ekspertit menestyvät saman alueen aloittelijoita paremmin erityisalueensa ongelmanratkaisussa. Eksperteille on tunnusomaista asiantuntemus oman alansa ongelmista. Heidän ongelmanratkaisuprosesseistaan onkin tunnistettu kaksi muuta selektiivisyyden kognitiivista komponenttia: tiedon haku (*retrieval*) ja päämääräsuuntaisuus (*goal directness*) (ks. esim. Berger & Wilde 1988; Gobbo & Chi 1986; Low & Over 1992; Reed, Willis & Guarino 1994; Resnick 1985).

Eksperttien ja lahjakkaiden samoin kuin aloittelijoiden ja keskitasoisten ongelmanratkaisuprosesseissa on todettu olevan yhtäläisyyksiä, joiden perusteella näiden kahden tutkimusryhmien tulokset on yhdistetty (Rabinowitz & Glaser 1985; Sternberg 1998). Ongelmien ja ratkaisijoiden ominaisuuksista huolimatta eri ryhmien jäsenten kognitiivisten prosessien on havaittu olevan samankaltaisia. Ryhmien erot johtuvat esimerkiksi siitä, että lahjakkaat ovat edellä kognitiivisessa kehityksessä keskitasoisiin verrattuna (Shore & Kanevsky 1993).

Gorodetsky ja Klavir (2003) tutkivat lahjakkaiden ja keskitason oppilaiden selektiivisyyden eroja erottelemalla viisi kognitiivista komponenttia oppilaiden ratkaisuista kvalitatiivisin menetelmin. He jakoivat selektiivisyyden viiteen komponenttiin, jotka ovat 1) muuntaminen, 2) kombinaatioprosessi, 3) analoginen päättelyprosessi, 4) tiedon hakuprosessi ja 5) päämääräsuuntaisuus. Gorodetsky ja Klavir (2003, 306–309) määrittelivät komponentit seuraavasti:

- Muuntamisella (*encoding*) tarkoitetaan sitä prosessia, jolla ratkaisija poimii tiedot annetusta ongelmasta.

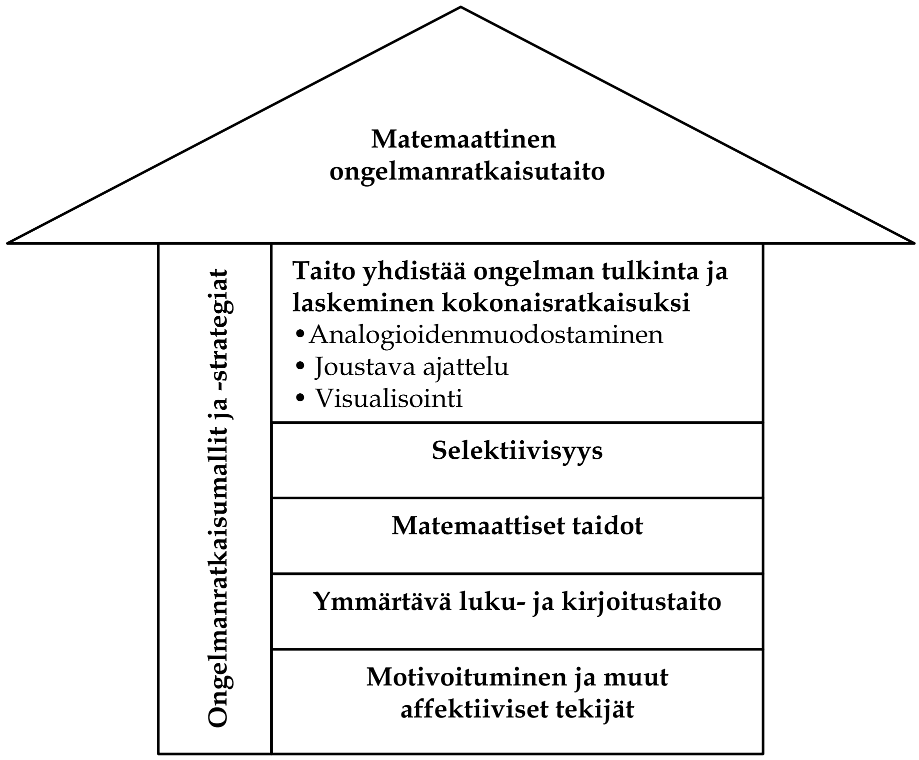
- Kombinaatioprosessissa (*combination*) ratkaisija yhdistelee ja tulkitsee poimimansa tiedon merkitystä ja hakee menettelytapaa, jolla ratkaisu saavutettaisiin.

- Analogisessa päättelyprosessissa (*comparison*) ratkaisija etsii mallia, joka saattaisi johtaa ratkaisuun ja samalla hän yrittää muistella sopivaa mallia mahdollisesti jo aikaisemmin oppimastaan ratkaisun rakenteesta.

- Tiedonhakuprosessi (*retrieval*) tarkoittaa käsitteiden ja termien aktivointia, joka mahdollistaa ongelman tulkinnan ratkaisijan termein. Ekspertit ja onnistujat näyttävät tunnistavan uudesta ongelmasta tutut termit automaattisesti.

- Päämääräsuuntaisuus (*goal directness*) ilmenee siten, että ratkaisun etsintä on suunnitelmallista ja tietoa käsitellään laajasti yksityiskohtaisesta tiedosta hämmentymättä. Jos sopiva ratkaisumalli puuttuu, sitä etsitään systemaattisesti.
  Eksperttien ratkaisuprosessi on yleensä päämääräsuuntautunutta, mikä on yksi syy siihen, että he ovat nopeampia saavuttamaan ratkaisut kuin aloittelijat.

Edellä esitettyjen ongelmanratkaisuun liittyvien taitojen ja kykyjen perusteella voidaan havaita, että Mosesin ongelmanratkaisutaidon määritelmä (kuvio 7) on samankaltainen kuin Ballewin ja Cunninghamin sekä Krutetskiin esittämät kykyjaottelut. Mosesin tasojen 1 ja 2 taidot vastaavat Ballewin ja Cunninghamin sekä Krutetskiin kolmea ensimmäistä osa-aluetta ja Mosesin taso 3 on yhtenevä Ballewin & Cunninghamin ja Krutetskiin neljännen osa-alueen kanssa, joissa kaikissa olennaisena tekijänä ovat yleiset kognitiiviset taidot. Kuviossa 8 havainnollistan ne taitoalueet, jotka vaikuttavat mielestäni matemaattiseen ongelmanratkaisutaitoon. Olen lisännyt kirjoitustaidot sekä Gorodetskyn ja Klavirin määrittelemän selektiivisyyden ongelmanratkaisutaidon jaotteluun.



KUVIO 8 Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon jaottelu tässä tutkimuksessa

Huomattakoon, etteivät kuvion 8 taitoalueet ole paremmuusjärjestyksessä; tosin ratkaisijan taito motivoitua ongelmanratkaisuun on ensiarvoista matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskelun kannalta. Tätä tukee Hannulan (2004, 35) näkemys siitä, että motivaatio on inhimillisistä tarpeista lähtevä ja tarmoa antava voimavara käyttäytymiselle. Juuri sitä tarvitaan ongelmanratkaisuprosessin käynnistämiseksi. Motivaatio kuuluu matematiikan opetuksen affektiivisiin tekijöihin. Muita affektiivisia tekijöitä ovat uskomukset, asenteet, emootiot ja arvot (Hannula 2004, 17–19). Nämä tekijät muodostavat todella laajan tutkimuskentän, joten rajaudun tarkastelemaan tässä tutkimuksessa affektiivisten tekijöiden osalta lähinnä motivaatiota.

Ratkaisijan omaksumien (kuvio 8) taitoalueiden määrä ja laajuus ”nostavat tai ”laskevat” hänen matemaattisen ongelmanratkaisutaitonsa tasoa, mikä näkyy käytännössä tehtäväkohtaisena osaamisena tai osaamattomuutena.

Edellä esitetyn perusteella tarkoitan tässä tutkimuksessa *matemaattisella ongelmanratkaisutaidolla yksilön kykyä ratkaista ongelmia, joihin tarvitaan matemaattisen tiedon soveltamista erilaisia ratkaisumalleja ja strategioita monipuolisesti hyväksi käyttäen*. Mitä useampia valmiita ongelmaan sovellettavissa olevia malleja ja strategioita henkilö hallitsee, sitä taitavampi ongelmanratkaisija hän on. Matemaattista ongelmanratkaisutaitoa voidaan siis kehittää siihen kuuluvia osataitoalueita (kuvio 8) harjoittamalla sekä niiden hallintaa ja yhteistoimintaa lisäämällä. Tähän ei ole oikotietä. Kuten jo Polya (1948, 4–5) totesi, ongelmanratkaisutaidon voi saavuttaa vain harjoittelun avulla, eli ainoastaan ratkaisemalla ongelmia voi oppia ratkaisemaan ongelmia. Siksi juuri oppilaan motivaation ylläpitäminen ja lisääminen ovat tärkeitä ongelmanratkaisutaidon kehittämisessä.

Lähtökohtana voidaan siis pitää ajatusta, että ongelmanratkaisu on käytännön taito. Taidon harjaannuttamiseksi on tarjottava runsaasti tilaisuuksia erityyppisten ongelmien ratkaisemiseen, ratkaisujen arvioimiseen ja perustelemiseen sekä uusien ongelmien muotoiluun. (Johnson & Rising 1967, 108.) Ongelmanratkaisutaito edellyttää joustavaa sovelluskykyä. Oppilaan on matemaattisen ongelman ratkaisemisessa osattava käyttää hyväkseen aiemmin oppimiaan matemaattisia tietoja ja taitoja sekä ymmärrettävä ongelman matemaattinen luonne ja formaalirakenne. (Leino 1978, 17.) Edellisen perusteella voidaan ajatella, että matemaattinen ongelmanratkaisutaito on myös mitattavissa ongelmanratkaisutehtäviä sisältävällä kokeella. Tätä tutkimusta varten koe- ja kontrolliryhmien matemaattista ongelmanratkaisutaitoa mitattiin kolmen erilaisen ongelmanratkaisukokeen avulla.

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittämiseen (ks. kuvio 8) pyrittiin tässä tutkimuksessa seuraavin keinoin: Oppilaiden *motivoituneisuutta* heräteltiin integroimalla matematiikkaa ja ongelmanratkaisua äidinkielen ja kirjallisuuden, kuvataiteen, teknisen työn sekä ympäristö- ja luonnontiedon tunteihin. Oppilaan *selektiivistä taitoa* ongelmanratkaisutilanteessa pyrittiin tukemaan vahvistamalla Gorodetskyn ja Klavirin (2003) jaottelun mukaisia selektiivisyyden pääkomponentteja. Tämä tapahtui ongelmanratkaisun opetuksen avulla seuraavasti: Muuntamis-komponenttia tuettiin integroimalla opetusta, kuvataiteen, käsityöhön sekä äidinkieleen ja kirjallisuuteen. Opetuksessa korostettiin luetun ymmärtämistä, ja sitä tehostettiin ratkaisukarttamenetelmän avulla. Oppilaat harjoittelivat esimerkiksi sanallisten tehtävien yhteydessä tehtävän ratkaisun kannalta olennaisten tietojen kirjoittamista ratkaisukartan tiedot-osioon. Kombinaatioprosessia, samoin kuin analogista päättelyprosessia, pyrittiin vahvistamaan erilaisten ongelmanratkaisustrategioiden opettamisella. Esimerkiksi kurssin kolmannella tunnilla oppilaille esiteltiin kahdeksan ongelmanratkaisustrategiaa (liite 15; moniste 3) ja tämän jälkeen heidän tehtävänään oli etsiä oppikirjasta tehtäviä, joissa jotakin niistä (esim. kaavan etsiminen, järjestelmällinen kokeilu, ongelman yksinkertaistaminen) voitaisiin käyttää.

Gorodetskyn ja Klavirin jaottelun mukainen tiedonhakuprosessi huomioitiin siten, että ongelmanratkaisukurssi oli sidoksissa myös oppilaiden matematiikan oppikirjaan. Oppikirjassa käsiteltyjä uusia termejä, kuten tilavuuden kaavaa, pyrittiin soveltamaan ongelmanratkaisukurssin tehtäviin. Lukuisten erityyppisten ongelmatehtävien tarkoituksena oli myös tukea tätä tiedonhakuprosessi-komponenttia. Oletuksena oli, että oppilaat muistaisivat joitain elementtejä ratkaisemistaan tehtävistä ja oppisivat soveltamaan niitä uusiin ongelmiin.

Ratkaisukarttamenetelmän tavoitteena oli ohjata koeryhmän oppilaita tehtävän ratkaisussa päämääräsuuntautuneisuuteen. Samoin koko ongelmanratkaisukurssilla oli tietty tavoite: oppilaan omien ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen. Tämä asetettiin jokaisen koeryhmän oppilaan tavoitteeksi alkukokeen jälkeen. Näin pyrittiin lisäämään oppilaan motivaatiota.

Koeryhmän oppilaiden *luku- ja kirjoitustaitojen* kehittämiseksi käsittelimme äidinkielen ja kirjallisuuden tunneilla sanallisia ongelmatehtäviä, ja oppilaat harjoittelivat luetun ymmärtämistä. Omien sanallisten tehtävien laadinta ja tehtävien ratkaiseminen ratkaisukartan avulla harjaannuttivat myös oppilaiden kirjoitustaitoja. Koeryhmän oppilaille opetettiin opetussuunnitelman mukaisia uusia *matemaattisia taitoja* heidän oppikirjansa mukaisesti. Ongelmanratkaisukurssilla käytetyt tehtävät oli laadittu niin, että edellä mainitut taidot oli mahdollista soveltaa tehtävien ratkaisemiseen. Oppilaille esiteltiin kurssin alkuvaiheessa esimerkkien avulla *ongelmanratkaisumalleja ja -strategioita.* Opetuksen tavoitteena oli harjaannuttaa oppilaita käyttämään niitä ratkaisutilanteessa ja ohjata heitä asennoitumaan ongelmanratkaisuun myönteisesti. Tähän työvälineeksi oppilaille opetettiin ratkaisukartan käyttöä. Sen tarkoituksena oli myös edistää oppilaan *taitoa yhdistää ongelman tulkinta ja laskeminen kokonaisratkaisuksi*, johon myös ongelmanratkaisukurssin opetus tähtäsi. Kokonaisratkaisun saavuttamista tukevaa *visualisointia, joustavaa ajattelua ja analogioiden* muodostamista harjoiteltiin konkreettisen toiminnan avulla. Ne toteutuivat opetuskokeilussa käsityössä ja kuvataiteessa käytetyn suunnittelun ja rakentelun avulla. Tunneilla matematiikan kaavojen toimivuutta konkretisoitiin käytännössä.

4.6 Ongelmanratkaisuprosessimalleja

Tässä luvussa esittelen ongelmanratkaisumalleja ja -strategioita, jotka ovat olleet tämän tutkimuksen kannalta olennaisia. Niiden avulla olen muodostanut toteuttamisperiaatteet matemaattisen ongelmanratkaisun kehittämiseen tähtäävään opetuskokeiluuni. Malleissa esitetään karkea runko ongelmanratkaisuprosessin vaiheista. Ongelmanratkaisustrategiat puolestaan kuvaavat ennalta opittuja työskentelytapoja, joita ongelmanratkaisussa voidaan käyttää. Matemaattisen ongelmanratkaisun mallit perustuvat psykologisiin yleistä ongelmanratkaisua kuvaaviin malleihin. Ongelmanratkaisusta on esitetty monia malleja, joiden mukaan yksilön ongelmanratkaisuprosessin on ajateltu etenevän. Mallien moninaisuus johtunee siitä, että ongelmanratkaisu on aina tehtävä-, ratkaisija- ja tilannesidonnaista. Eri teoriat myös käsittelevät ongelmanratkaisua eri tavoin ja niinpä ne tuottavat erilaisia malleja ongelmanratkaisusta.

4.6.1 Deweyn ongelmanratkaisumalli

John Dewey esitti teoksessaan ”How we think” (1910, 72) ensimmäisen ongelmanratkaisun tutkimukseen vaikuttaneen vaihemallin. Deweyn malli jakaantui seuraaviin vaiheisiin: 1) ongelman tunnistaminen, 2) ongelman paikantaminen ja määrittely, 3) mahdollisen ratkaisun esittäminen, 4) ehdotuksen seurausten pohdinta sekä 5) havainnointi ja kokeilu. Ideana Deweyn mallissa on, että tehtävän ratkaisija esittää erilaisia oletuksia siitä, miten ratkaisu voitaisiin löytää, ja testaa esittämiään ratkaisuja. Näin muodostetaan hypoteesin ja testauksen sykli. Saman syklin voi löytää hieman eri muodoissa monilta muiltakin ongelmanratkaisumallien tutkijoilta kuten Polyalta (1948), de Grootilta (1956) sekä Newelliltä ja Simonilta (1972), Lesteriltä (1978), Masonilta (1982) ja Schoenfeldiltä (1985). Tässä tutkimuksessa käytettiin Deweyn ideaa: hypoteesin ja testauksen sykliä. Kyselemällä etenevä, ongelmakeskeinen opetus antoi oppilaille mahdollisuuden etsiä ja testata ratkaisujaan (ks. luku 9.4).

4.6.2 Polyan ongelmanratkaisumalli

George Polyan (1948) ongelmanratkaisumalli on yksi tunnetuimmista. Malli on osoittautunut ajattomaksi ja käyttökelpoiseksi, sillä se soveltuu muihinkin kuin matemaattisiin ongelmiin. Polyan mallin pohjana on Descartesin ajatukset heuristiikoista ”keksimisen taiteena” (*Ars iniveniendi*) (Shoenfeld 1985, 22). Vaiheiden etenemisen kannalta on tärkeää, että ratkaisija esittää itsellensä oikeita kysymyksiä, jotta eteneminen seuraavaan vaiheeseen onnistuu. Polyan malli jakautuu neljään eri päävaiheeseen: ongelman ymmärtämiseen, suunnitelman laatimiseen, suunnitelman toteuttamiseen ja arviointiin. (Polya 1948, 5–18). Esittelen seuraavaksi nämä vaiheet Polyan esittämien kysymysten ja ohjeistuksen avulla:

1. **Ongelman ymmärtäminen**
   Tee ensin selväksi mistä ongelmasta on kyse. Mikä ongelmassa on tuntematon? Mitä on annettu? Mitkä ovat ehdot, jotka sitovat tuntemattomana annettuun tietoon? Onko ehdot mahdollista täyttää? Riittävätkö ne määräämään tuntemattoman? Piirrä kuvio. Ota käyttöön sopivat merkinnät. Erittele tiedot. Pystytkö merkitsemään ne paperille?

2. **Suunnitelman tekeminen**
   Etsi aineiston ja tuntemattoman välille yhteys. Ellei se selviä välittömästi, saattaa yhteys löytyä jonkin apuongelman välityksellä. Pyri pääsemään ratkaisusuunnitelmaan. Yritä keksiä jokin tuttu ongelma, jossa on sama tai samantapainen tuntematon.

3. **Suunnitelman toteuttaminen**
   Kun toteutat suunnitelmaa, tarkista jokainen askel. Voitko nähdä selvästi, että askel on oikea? Voitko todistaa sen oikeaksi?

4. **Katsaus tehtyyn**
   Voitko tarkistaa tuloksen? Voitko tarkistaa sen perustelut? Voitko johtaa tuloksen toisin? Voitko nähdä sen suoraan? Voitko käyttää tulosta tai menetelmää johonkin toiseen ongelmaan?

Polyan malli on ollut monien ongelmanratkaisumallien perustana (esim. Lester 1978, Mason 1982). Ajatuksena Polyan mallissa on, että ongelmanratkaisu etenee järjestelmällisesti ja lineaarisesti. On aiheellista kysyä, toteutuuko tämä itse ratkaisutilanteessa.

Luvussa 3.2. esittelemäni Pirien ja Kierenin (1994) teorian mukaan oppiminen ja ymmärtäminen eivät etene läheskään aina lineaarisesti. Pean (1993, 65–67) mukaan Polyan mallin vaiheet eivät etene käytännössä lineaarisesti, vaan ongelmanratkaisuprosessi on enemmänkin rinnastettavissa sykliseen järjestelmään. Hän toteaa myös, etteivät Polyan mallin mukaiset vaiheet ole aina yksilön oman ajattelun tulosta, vaan usein muiden rooli on ratkaiseva. Esimerkiksi Wertschin, McNameen, McLanen ja Budwigin (1980) tutkimuksen mukaan ”ongelman ymmärtäminen” voidaan nähdä lapsen ja toisten vaikuttajien sosiaalisena konstruktiona. Tällaista vuorovaikutusta tapahtuu esimerkiksi silloin, kun äiti ohjaa lasta ”näkemään” tavoitteen palapelin rakentamisessa.

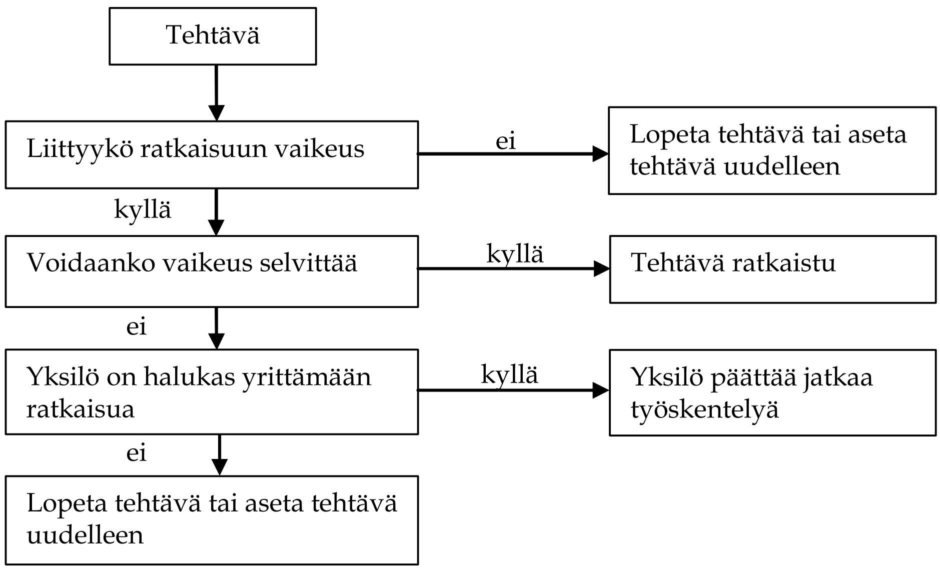
Pean (1993, 65–67) mukaan Polyan mallin vaiheet eivät useinkaan ole pelkästään mentaalisia rakenteita, vaan ne sisältävät usein myös ”työkaluja”. Ratkaisevassa roolissa ongelmanratkaisuvaiheiden esittämisessä ovat ulkoiset representaatiot, ympäristön ominaisuudet ja artefaktit. Suunnitelma siitä, miten ongelmanratkaisuun ryhdytään, on usein välittynyt ulkoisilla representaatioilla kuten kirjoitetuilla listoilla, kaavioilla tai diagrammeilla. Nämä tarjoavat kvalitatiivisia ongelmatilanteiden malleja. (Mts. 65–67.)

Tässä tutkimuksessa koeryhmän opetuksessa sovellettiin Polyan mallin ideaa ongelmanratkaisuprosessin päävaiheista. Oppilaille esitettyjä ongelmia pyrittiin havainnollistamaan integroitavien oppiaineiden tarjoamin keinoin (esimerkiksi konkreettinen toiminta, apupiirrokset). Oppilaille opetettu ratkaisukarttamenetelmä sisälsi Polyan mallin rungon. Samalla kuitenkin huomioitiin Pean kritiikki siitä, ettei ongelmanratkaisu etene lineaarisesti. Oppilaan laatima ratkaisukartta piirroksineen toimi representaationa, jonka avulla hän, ja myös opettaja, voi palata vastausprosessin edellisiin vaiheisiin ja parannella vastaustaan sekä tarkastella ongelmanratkaisuprosessinsa etenemistä.

4.6.3 Lesterin ongelmanratkaisumalli

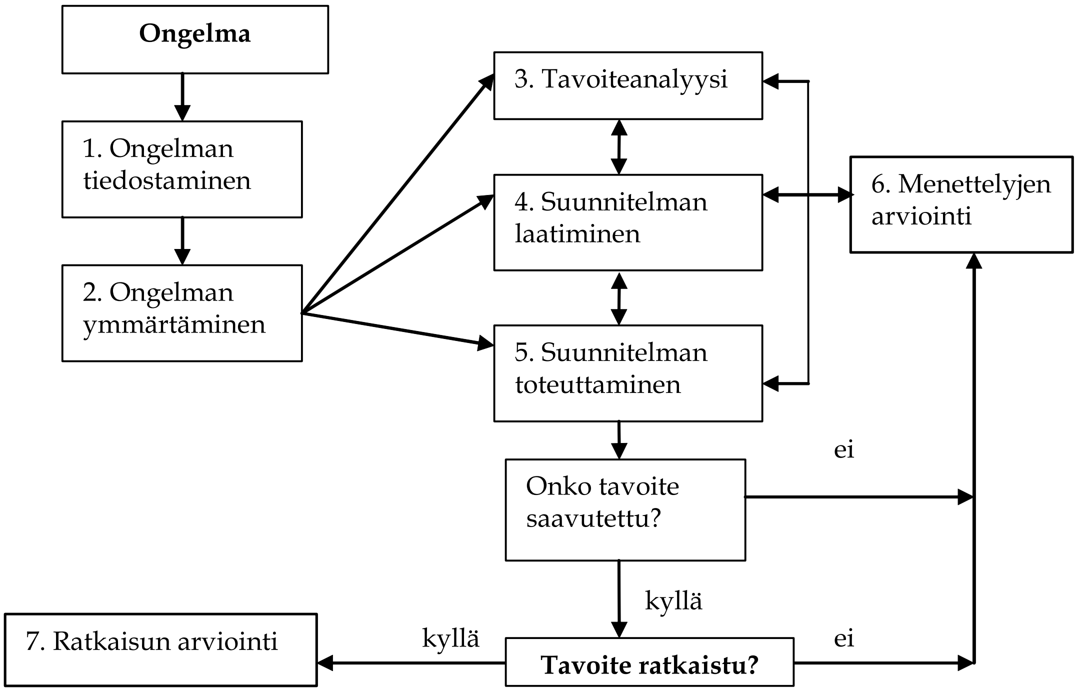
Esimerkkinä Polyan mallia monivaiheisemmasta mallista tarkastelen Lesterin (1978, 53–87) kehittämää ongelmanratkaisumallia. Lester (1978, 56) mainitsee kolme pääsyytä, jotka olivat hänen mukaansa esteenä oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen kehittämiselle kouluopetuksessa: 1) Ongelmanratkaisu on monimutkaisin ja vaikeimmin kehitettävä älyllinen taito. 2) Koulun matematiikan oppikirjat pikemmin hankaloittavat kuin helpottavat oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä, koska kirjojen tehtävät harjoittavat enimmäkseen algoritmisten kaavojen käyttöä. 3) Opettajat eivät näe ongelmanratkaisua tärkeäksi tekijäksi matematiikan opetuksessa. Vaikka Lesterin esittämät väitteet ovat 1970-luvulta, ne ovat edelleenkin huomionarvoisia. Ratkaisuksi esittämiinsä ongelmiin ja tueksi systemaattiseen ongelmanratkaisun opettamiseen Lester (1978, 77–83) rakensi informaation prosessoinnin psykologiset käsitykset huomioonottavan ongelmanratkaisumallin, joka on esitetty kokonaisuudessaan kuviossa 10. Lester on käyttänyt mallinsa runkona Polyan nelivaiheista ongelmanratkaisumallia jakaen sen tarkempiin osiin. Lesterin mallista ilmenee myös ongelmanratkaisun syklisyys: vastausta ei löydetä välttämättä ensimmäisellä yrittämällä, vaan usein on palattava takaisin lähtötilanteeseen ja yritettävä uudestaan. Malli sisältää kaiken kaikkiaan seitsemän vaihetta, jotka ovat 1) ongelman tiedostaminen, 2) ongelman ymmärtäminen, 3) tavoiteanalyysi, 4) suunnitelman laatiminen, 5) suunnitelman toteuttaminen, 6) menettelyjen arviointi ja 7) ratkaisujen arviointi. Seuraavassa kuvailen näitä vaiheita hieman tarkemmin.

1) Ongelman tiedostamisen vaiheet on esitetty kuviossa 9. Kun oppilas huomaa, että tehtävän ratkaisu ei onnistu nopeasti, on tehtävä muodostunut hänelle ongelmaksi. Ongelman tiedostamiseen kuuluu myös oppilaan halu ratkaista se.



KUVIO 9 Ongelman tiedostamisen vaiheet Lesterin (1978, 79) mallissa

2) Ongelman ymmärtäminen (kuvio 10) jakautuu kahteen osaan: ensin tehtävä on käännettävä eli on tulkittava tehtävän sisältämä informaatio. Seuraavaksi on vuorossa ongelman sisäistäminen. Sisäistämisvaiheessa löydetään ongelman olennainen informaatio ja sen keskinäiset suhteet määritellään.



KUVIO 10 Menettelyjen ja ratkaisun arviointi Lesterin (1978, 82) mallissa

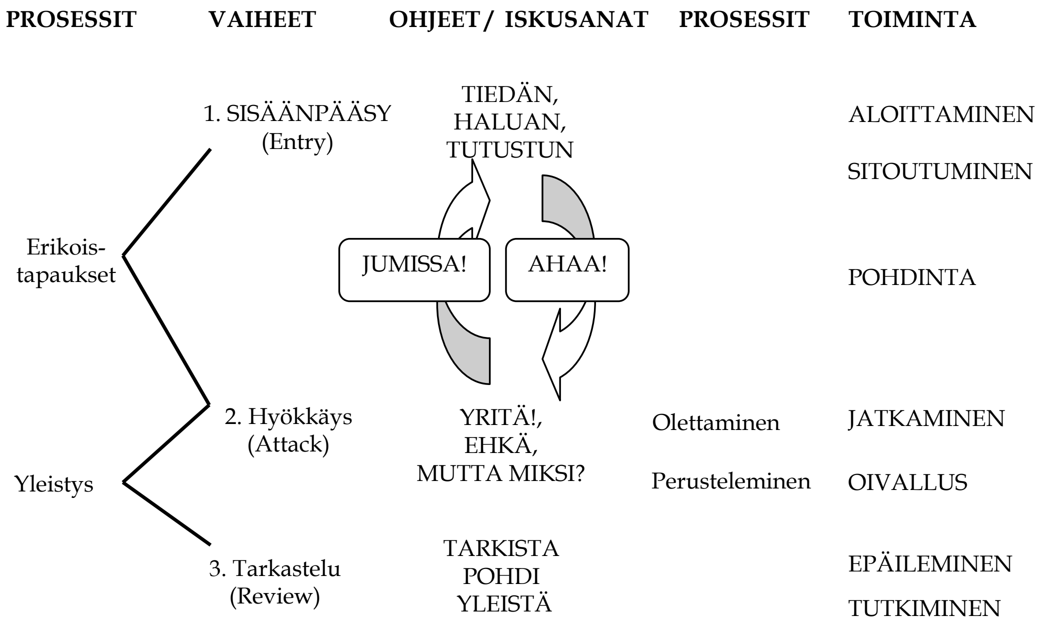
3) Tavoiteanalyysissa ongelma muotoillaan uudelleen siten, että siihen on mahdollista soveltaa tuttuja menetelmiä. Toisinaan on tarpeen jakaa ongelma osiin ja asettaa välitavoitteita, jotka helpottavat ongelmanratkaisua.
4) Suunnitelman laatimisvaiheessa täsmennetään suunnitelmassa käytettävät operaatiot, asetetaan välitavoitteet, piirretään mahdolliset kuviot ja ratkaistaan ongelmaan liittyvät helpommat ongelmat.
5) Toteuttaessaan suunnitelmaa ratkaisija kokeilee ja arvioi sitä. Saattaa käydä niin, ettei ratkaisija pysty sovittamaan yhteen suunnitelmansa osia. Joissakin tehtävissä on suuri merkitys ratkaisun saavuttamisen kannalta sillä, missä järjestyksessä osatavoitteet saavutetaan.
6) Suunnitelman menettelyjen arviointivaiheessa eri menettelyjen analysoiminen tapahtuu kunkin suunnitelman toteuttamisen jälkeen tai viimeistään silloin, jos ratkaisuun ei olla tyytyväisiä. Tällöin ryhdytään arvioimaan uudelleen ratkaisutapojen toimivuutta. Mikäli toivottuun ratkaisuun on päästy, menettelyjä voidaan käydä läpi oppimismielessä, jotta ne hallittaisiin jatkossakin samantyyppisessä ongelmassa.
7) Ratkaisun arviointi tehdään ratkaisuprosessin viimeisenä vaiheena. Tällöin tarkistetaan vastauksen järkevyys saadulla tuloksella.

Kun vaiheet 1–5 on läpikäyty, ratkaisija on saanut ongelmaan vastauksen. Tämä ei kuitenkaan vielä riitä, vaan on saatava selville, onko vastaus todellinen vai näennäinen. Ratkaisun oikeellisuus selviää arvioitaessa ratkaisua tavoitteiden pohjalta (kohdat 6 ja 7). Mikäli tavoite on saavutettu ja ongelmassa asetetut ehdot toteutuvat, on ongelma ratkaistu.

Lesterin mallissa painotetaan selkeästi ongelman ymmärtämistä (kuvio 10): vasta sen jälkeen on mahdollista siirtyä ratkaisuprosessissa eteenpäin. Tässä tutkimuksessa toteutetussa opetuskokeilussa painotettiin koeryhmän oppilaiden taitoa tulkita oikein esitetyt ongelmatehtävät. Tähän pyrittiin konkreettisen ja havainnollistavan opetuksen avulla. Ongelmatehtävät liitettiin oppilaiden valmistamiin tuotoksiin ja heitä opetettiin konkretisoimaan tehtäviä piirroksin ja taulukoin, joka auttaisivat tehtävien ymmärtämistä. Opetustilanteen kannalta Lesterin samoin kuin Polyan malli kuitenkin herättää kysymyksiä. Voiko oppilaan kognitiivinen ajattelutoiminta edetä lähestulkoon kaaviomaisesti tietyn mallin mukaan? Miten oppilaan tulisi toimia, kun tehtävä ei ratkeakaan helposti eikä pelkkä menettelyjen arviointi johda ratkaisuun? Vastauksia näihin kysymyksiin esitetään mm. Masonin ongelmanratkaisumallissa, jonka esittelen seuraavaksi.

4.6.4 Masonin ongelmanratkaisumalli

Polyan ja Lesterin malleja selkeämmin ongelmanratkaisuprosessin syklisyys näkyy Masonin (1982, 131) ongelmanratkaisumallissa (kuvio 11). Malli sisältää kolme vaihetta: sisäänpääsyn *(entry),* hyökkäyksen *(attack)* ja tarkastelun *(review)*. Tässä mallissa, kuten edellisissäkin, ongelmanratkaisua kuvataan ratkaisijan näkökulmasta, mutta nyt kiinnitetään huomiota enemmän itse ongelmatilanteeseen.



KUVIO 11 Masonin (1982, 131) ongelmanratkaisumalli

Masonin mukaan ratkaisijan tulee kirjoittaa paperiinsa itselleen ohje- ja iskusanoja, joiden tarkoituksena on auttaa häntä jäsentämään omaa ongelmanratkaisuprosessiaan. Esimerkiksi *tiedän*-sanan alle ratkaisija poimii tehtävässä annettuja tietoja. *Haluan*-sanan alle ratkaisija selvittää mitä tehtävässä kysytään jne. Kun ratkaisija kirjoittaa näiden sanojen alle ajatuksensa ja toimensa ratkaisua tehdessään, muodostuu ratkaisuprosessi, jonka avulla hänellä on mahdollisuus seurata matemaattista ajatteluaan ja sen kehittymistä. Mason ehdottaa, että ajatusten ja ratkaisujen kirjoittamisesta olisi kehitettävä vähitellen rutinoitunut tapa kaikkien kysymysten käsittelyyn. (Mason 1982, 17–19; ks. Pehkonen, Pekama & Seppälä 1991, 12–13.)

Mallissa ratkaisuprosessin aloitusvaihetta kutsutaan sisäänpääsyksi *(entry)*. Siinä pyritään tehtävän tietojen perusteella hakemaan vastaukset kysymyksiin: Mitä tiedän?, Mitä haluan? ja Mitä voin esittää? Kahteen ensimmäiseen kysymykseen saadaan vastaukset lukemalla tehtävä huolellisesti ja ymmärtäen. Viimeiseen kysymykseen Mason ehdottaa oleellisten tietojen kirjoittamista omin sanoin, sillä pelkkä tietojen kopioiminen on useimmiten vain ajan tuhlausta. (Mason 1982, 38.) Ratkaisuprosessin alkuvaiheessa tarkastellaan joitakin ongelman erikoistapauksia. Tämän jälkeen yritetään keksiä sopiva yleistys, jotta päästäisiin alkuperäisen ongelman ratkaisuun. (Mason 1982, 28–29.) Oleellista on siis tehtävän huolellinen lukeminen ja ymmärtäminen sekä tietojen poimiminen ratkaisuesitystä varten.

Varsinainen ratkaisuyritys tapahtuu hyökkäysvaiheessa *(attack)*. Nimitys kuulostaa sotilaalliselta, mutta kuvailee mielestäni hyvin asennetta, jolla ongelman kimppuun on käytävä. Tähän vaiheeseen liittyvät erityisesti ongelmatilanteeseen joutuminen (jumissa!) ja ratkaisuidean löytyminen (ahaa!) sekä matemaattiset perusprosessit eli oletusten tekeminen ja perustelu (todistaminen). Tässä vaiheessa ratkaisija voi tehdä useita vastausoletuksia. Ratkaisuoletus tehdään yksityistapausten antaman tiedon perusteella. Tämän jälkeen ratkaisuoletus pyritään todistamaan oikeaksi tai näyttämään vastaesimerkillä vääräksi. (Mts. 38–39.) Periaate noudattelee matemaattisen todistuksen ideaa. Mutta ennen kuin ratkaisuoletukseen edes päästään, ollaan tavallisesti useammankin kerran todellisessa ongelmatilanteessa. Ei tiedetä, mitä ratkaisuun pääsemiseksi pitäisi seuraavaksi tehdä. Ratkaisuksi tähän Mason esittää, ettei ole syytä mennä paniikkiin, vaan on paras rentoutua ja hyväksytään ″jumittunut″ tilanne. Tilanteesta voi myös nauttia, sillä se on tilaisuus oppia uutta. Järkevintä on palata alkuun, lukea tehtävä uudelleen ja tarkistaa vastaukset sisäänpääsyvaiheen kysymyksiin: Mitä tiedän?, Mitä haluan? ja Mitä voin esittää? (Mts. 50–51; 61.)

Tarkasteluvaiheeseen *(review)* päästään, kun ratkaisuun ollaan tyytyväisiä tai jos ollaan luovuttamassa eikä tehtävään saada ratkaisua. On kuitenkin tärkeää käydä läpi ja tarkistaa *(check)* huolellisesti ratkaisu tai ratkaisuyritys. Sitten pohditaan ja tunnistetaan *(reflect)* keskeiset ratkaisuideat ja pyritään yleistämään *(extend)* ratkaisuidea muihinkin yhteyksiin. (Mts. 39.)

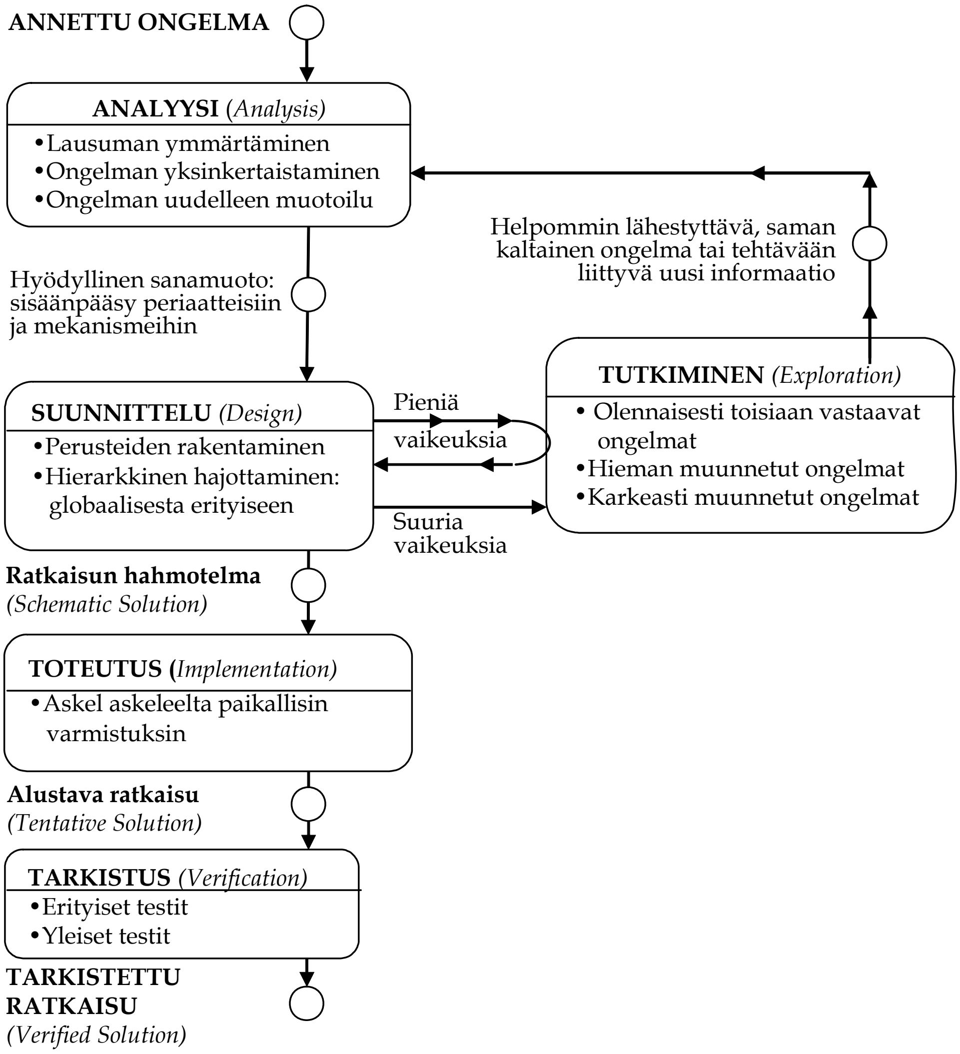
Tässäkin mallissa ongelmallisena pidetään alkutilannetta, josta on mahdollista edetä suoraan lopputilanteeseen eli ratkaisuun. Ongelmanratkaisun syklisyys ilmenee kuitenkin kehänä, joka muodostuu silloin, kun ongelma ei ensimmäisen ahaa-idean jälkeen ratkeakaan, vaan ollaan ongelmatilanteessa ″jumissa″ *(Stuck)*, kuten Mason tilanteen määrittelee. Tällöin ratkaisun tekeminen joudutaan aloittamaan uudelleen. Masonin mallissa tämä ratkaisuyritysten kehä käsitetään ongelmanratkaisuprosessin luonnolliseksi vaiheeksi. Ratkaisijan taitojen lisäksi myös ongelman vaativuudesta riippuu, montako kertaa kehää joudutaan kiertämään.

Masonin malli huomioi teknisesti suoritetun toteutuksen lisäksi myös ratkaisijan kohtaaman ongelmatilanteen ja kuvailee asennoitumisen merkitystä.

Hätääntymisen ja paniikin sijasta Mason ehdottaa rentoutumista ja ongelmatilanteen hyväksymistä. Hieno ajatus on mielestäni myös se, että ongelmatilanne nähdään tilaisuutena oppia uutta. Tätä ideaa sovelsin ongelmanratkaisukurssilla opettaessani koeryhmää kysymysten ja ongelmatilanteiden avulla, kun opetus tapahtui Schroederin ja Lesterin (1989, 32–33) näkemysten mukaisesti ongelmanratkaisun kautta (ks. luku 5.3.3). Opetuskokeilussa korostettiin Masonin mallin mukaisesti oppilaiden omaa kirjoittamista: Masonin malli vaikutti ratkaisukartan muotoutumiseen ja siihen ajatukseen, että virheelliset vastaukset voidaan nähdä tarpeellisina välivaiheina kohti oikeaa ratkaisua eikä ”pelkkinä” oppilaan epäonnistumisina. Masonin kuvaus ongelmanratkaisuun asennoitumisesta osoittaa, että ongelmanratkaisuprosessia ja siihen liittyviä malleja onkin syytä tarkastella monipuolisemmin kuin vain oppilaan teknisenä suorituksena. Esimerkkinä tällaisesta laajennetusta tarkastelusta esittelen seuraavassa luvussa Schoenfeldin ongelmanratkaisumallin.

4.6.5 Schoenfeldin ongelmanratkaisumalli

Schoenfeld (1985, 44–45) tarkastelee ongelmanratkaisutilannetta ratkaisijan matemaattisen käyttäytymisen näkökulmasta. Hän jakaa ongelmanratkaisuun vaikuttavat tekijät neljään ryhmään: resursseihin, heuristiikkoihin, kontrolliin ja uskomuksiin. Niitä esittelen tarkemmin luvussa 5.1. Käytännössä tekijät ovat osittain päällekkäisiä ja toimivat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa. Schoenfeld määrittelee ongelmanratkaisumallinsa karkeaksi ongelmanratkaisustrategiaksi *(problem-solving strategy)*, jolla hän tarkoittaa sitä tapaa, miten useimmat hyvät ja järjestelmälliset ongelmanratkaisijat toimivat ratkaistessaan ongelmia (mts. 107–108). Schoenfeldin ongelmanratkaisumalli (kuvio 12) on muotoutunut hänen Hamilton Collegessa, Berekeleyssä 1970-luvulla toteuttamiensa ongelmanratkaisukurssien (mts. 113) pohjalta. Mallin päävaiheet ovat analyysi, suunnittelu, tutkiminen toteutus ja tarkistus.



KUVIO 12 Schoenfeldin ongelmanratkaisumalli (1985, 110)

Schoenfeldin ongelmanratkaisumalli ei jää pelkäksi kaavioksi, vaan hän liittää myös käytännön sovelluksen kannalta olennaiset ongelmanratkaisuheuristiikat eli -strategiat mallinsa eri vaiheisiin. Malli on muotoutunut useiden hänen käytännössä toteuttamiensa ongelmanratkaisukurssien kokemusten tuloksena. Nämä syyt vakuuttivat osaltaan minut ongelmanratkaisumallien ja strategioiden opettamisen hyödyllisyydestä. Schoenfeld (1985, 109) liittää mallinsa vaiheisiin mielestään tärkeimmät ongelmanratkaisustrategiat, ja ne hän esittää ohjeiden ja kysymysten muodossa:

Analyysi

1. Piirrä kuvio, jos suinkin mahdollista.
2. Tutki erikoistapauksia:
   a. Valitse erityisarvoja kokeillaksesi ongelmaa ja saadaksesi siihen ”tuntumaa”.
   b. Testaa ääritapauksia tutkiaksesi mahdollisuuksien määrää.
   c. Aseta mitä tahansa peräkkäisiä kokonaislukuja, kuten 1, 2, 3, …, ja etsi induktiivista kaavaa.
3. Yritä yksinkertaistaa ongelmaa:
   d. hyödyntämällä symmetriaa tai
   e. järkeilyllä, yleisyyttä menettämättä (mittasuhteet säilyttäen).

Tutkiminen

1. Tarkastele oleellisesti samanlaisia ongelmia:
    a. Korvaa olosuhteet vastaavilla.
    b. Yhdistele uudelleen ongelman osia eri tavoilla.
    c. Perehdy apuelementteihin.
    d. Muotoile ongelma uudelleen joko
        i. muuttamalla näkökulmaa tai merkintöjä,
        ii. tarkastelemalla väitteitä puolesta ja vastaan tai
        iii. olettamalla, että sinulla on ratkaisu ja määrittelet sen ominaisuudet.
2. Tarkastele hieman poikkeavia ongelmia:
    a. Valitse osatavoitteita (jotka täyttävät ehdot osittain).
    b. Jousta ehdoista ja yritä määrätä ne uudelleen.
    c. Hajota ongelman sisältö ja työstä sitä tapauskohtaisesti.
3. Tarkastele laajasti poikkeavia ongelmia:
    a. Konstruoi analoginen ongelma, jossa on vähemmän muuttujia.
    b. Pidä vakiona kaikki muut paitsi yksi muuttuja selvittääksesi tämän muuttujan vaikutuksen.
    c. Yritä tutkia mitä tahansa tähän liittyvää ongelmaa, jolla on samanlainen
        i. muoto,
        ii. alkutilanne ja
        iii. johtopäätökset.

    Muista! Kun käsittelet helpompia samantyyppisiä ongelmia, pitäisi yrittää hyödyntää tulosta ja ratkaisumetodia annettuun ongelmaan.

Tuloksen tarkistaminen

1. Läpäiseekö ratkaisusi spesifit testit?
    a. Käytetäänkö siinä kaikkia annettuja tietoja?
    b. Onko se yhdenmukainen järkevien arvioiden tai ennustusten kanssa?
    c. Kestääkö se symmetriatestin, dimensioanalyysin ja skaalautumisen?
2. Läpäiseekö tulos yleiset testit?
    a. Voidaanko tulos saada toisin?
    b. Voidaanko siihen sisällyttää erikoistapaukset?
    c. Voidaanko se sieventää tunnetuksi tulokseksi?
    d. Voidaanko tulosta käyttää luomaan jotakin tietämääsi?

Lisäksi Schoenfeld antaa selkeät ohjeet siitä, kuinka ongelmanratkaisumallia (kuvio 12) ja sen yhteydessä käytettäviä, edellä esitettyjä ongelmanratkaisuheuristiikkoja tulkitaan ja käytetään (Shoenfeld 1985, 108–111):

Analyysivaiheessa toimitaan seuraavasti: Lue ongelma huolellisesti. Aloita analysoimalla mitä ongelmassa todella vaaditaan. Mitä tietoja on annettu ja mitä kysytään. Miksi annetut tiedot ovat tehtävässä? Näyttääkö siltä, että ratkaisu on mahdollista saavuttaa? Mitä periaatteita tai mekanismeja olisi järkevää soveltaa? Mitkä heuristiikat mahdollisesti sopivat ongelmaan? Heurististen strategioiden käsittely voisi edetä alla esitetyllä tavalla:

1. Piirrä kaavio, vaikka tuntuisi, että ongelman voisi ratkaista muutenkin. Piirrokset auttavat huomaamaan asioita.
2. Havainnollista ongelma (testaa erikoistapauksia) tuloksilla, jotka saat ratkaisemalla erikoistapauksia tai huomaat empiirisesti määriteltävistä kuvioista/kaavoista.
3. Yksinkertaista ongelmaa.

Suunnittelu on eräässä mielessä ”hallittua kontrollia”. Se ei ole erillinen kuvion 12 ”laatikko” vaan se ulottuu koko ratkaisuprosessiin. Suunnittelu on toiminto, joka varmistaa, että ratkaisija on sitoutunut kannattaviin toimintoihin. Ratkaisijan pitäisi hahmotella ongelman ratkaisu karkeasti ja sitten arvioida ratkaisua yksityiskohtaisesti ratkaisuprosessin edetessä. Esimerkiksi suunnitteluvaiheessa ei pitäisi ryhtyä laskujen suorittamiseen tai monimutkaisiin operaatioihin ennen kuin 1) on tarkasteltu ratkaisun eri vaihtoehtoja, 2) niille on selvä peruste ja 3) muut vaiheet ongelman ratkaisulle ovat edenneet siihen vaiheeseen, jossa tulosten laskeminen on välttämätöntä tai selvästi hyödyllistä.

Tutkiminen on mallin heuristinen sydän. Tässä vaiheessa valtaosa ongelmanratkaisuheuristiikoista tulee käyttöön. Tutkiminen jaetaan kolmeen vaiheeseen: 1) lähes samanlaisten, 2) hieman poikkeavien ja 3) karkeasti poikkeavia ongelmien ja niiden ratkaisujen tarkasteluun ja mahdollisuuksiin soveltaa niitä annettuun ongelmaan. Oleellisesti samanlaisten ongelmien avulla on helpompi päästä käsiksi alkuperäisen ongelman ratkaisuun kuin hieman poikkeavien ongelmien avulla. Vaikein tilanne on edessä silloin, jos joudutaan etsimään apua karkeasti poikkeavista ongelmista. Tätä tapaa Schoenfeld (1985, 112) nimittääkin jo ”epätoivoiseksi yritykseksi” *(desperation attempt)*.

Toteutus on ongelmanratkaisun selkeä ja yksiselitteinen vaihe, jolloin valittu ratkaisuyritys toteutetaan. Toteutuksen tulisi olla vasta viimeinen vaihe varsinaisessa ongelmanratkaisuprosessissa.

Tarkistus on vaihe, jonka merkitystä pitäisi korostaa, sillä opiskelijat tarkistavat harvoin ratkaisunsa ja ratkaisun unohtaminen voi koitua kohtalokkaaksi. Tarkastamalla ratkaisuprosessin voi usein huomata vaihtoehtoisen ratkaisun, keksiä yhteyden toisiin aiheisiin. Joskus voi jopa tulla tietoiseksi käyttökelpoisesta ongelmanratkaisutavasta, jota voi käyttää muualla, mikä voi auttaa kehittymään paremmaksi ongelmanratkaisijaksi. (Schoenfeld 1985, 108–111.)

Schoenfeldin ongelmanratkaisumalli ja -strategiat vaikuttivat tässä tutkimuksessa totutetun opetuskokeilun luonteeseen siten, että ajatus ongelmanratkaisustrategioiden opettamisesta ja lukuisten ongelmatehtävien tarjoamisesta koeryhmäläisille vahvistui. Esimerkiksi Schoenfeldin ongelmanratkaisumallin tutkimusvaihetta varten oppilaan on syytä harjoitella ongelmanratkaisutehtävien ratkomista erilaisia menetelmiä harjoitellen. Muutenhan nuoren oppilaan on mahdotonta verrata uutta ongelmatehtävää aikaisemmin ratkaistuihin tehtäviin. Schoenfeld (1992, 357–358; 1985, 114) pitää myös ongelmanratkaisustrategioiden opettelua hyödyllisenä, koska se harjoittaa tehokkaasti oppilaan ongelmanratkaisukäyttäytymistä. Oppimansa strategian avulla oppilas voi oppia itse kontrolloimaan toimintaansa ratkaisutilanteessa. Tällöin hänen epävarmuutensa vähenee ja hänen asenteensa voi muuttua myönteisemmäksi matemaattista ongelmanratkaisua kohtaan. Mitä nuoremmasta ongelmanratkaisijasta on kysymys, sitä enemmän tämä Schoenfeldin ajatus mielestäni korostuu.

Koska Schoenfeld toteutti ongelmanratkaisukurssinsa yliopisto opiskelijoilla, hänen mallinsa ajatusta oli sovellettava kuudennen luokan oppilaan tasoa vastaavaksi. Schoenfeldin ongelmanratkaisumallia (kuvio 12) ja -heuristiikkoja ei annettu monisteena suoraan koeryhmän oppilaiden käyttöön, vaan niitä pyrittiin opettamaan esimerkkien avulla. Tosin koeryhmälle annetut ohjeet ratkaisukartasta ja ongelmatehtävien ratkaisemisesta (liite 15; moniste 1) sisälsivät osia Schoenfeldin ongelmanratkaisustrategioista sellaisenaan.

4.6.6 Ongelmanratkaisumallien yhteenveto

Esitellyissä ongelmanratkaisumalleissa on eroja ja yhtäläisyyksiä. Dewey esittelee vaihemallissaan hypoteesin ja testauksen syklin, jota Polyan mallissa täydennetään ratkaisuprosessia vaihekohtaisesti ohjaavilla kysymyksillä. Lesterin ongelmanratkaisumallissa vaiheiden määrää on lisätty ja toiminta esitetään kaaviomuodossa. Mallissa huomioidaan myös mahdollisuus, ettei seuraavaan vaiheeseen pääsyä edellyttävää ratkaisua ole saatu tehtyä. Tällöin kaavio ohjaa palaamaan edelliseen vaiheeseen. Masonin malli ohjaa ratkaisijaa jäsentämään ratkaisuprosessiaan paperille kirjoitettujen iskusanojen avulla. Se huomioi ongelmanratkaisuun kuuluvan pohdinnan ja tuo esille selkeästi sen syklisen ja kokeiluja sallivan luonteen. Masonin mallissa kiinnitetään huomiota myös asennoitumiseen, sillä ohjeistuksen mukaisesti ratkaisijan tulisi kokea ongelmatilanne tilaisuutena oppia jotain uutta. Schoenfeld laajentaa ongelmanratkaisuprosessin tarkastelun näkökulmaa lähestymällä sitä matemaattisena käyttäytymisenä, joka jakautuu resursseihin, heuristiikkoihin, kontrolliin ja uskomuksiin. Viisivaiheiseen ongelmanratkaisumalliinsa hän liittää ohjeiden ja kysymysten muodossa ongelmanratkaisustrategiat. Schoenfeld korostaa mallissaan tutkimisvaihetta, jossa etsitään ratkaistavaan tehtävään analogioita muista vastaavanlaisista jo ratkaistuista tehtävistä.

Edellä esitetyt ongelmanratkaisumallit ja -strategiat tarkastelevat ongelmanratkaisua pääasiassa oppilaan näkökulmasta. Ne tarjoavat ratkaisijalle erilaisia keinoja selvitä ongelmatilanteesta, esimerkiksi tarkista, tutki, pohdi, arvioi menettelyjäsi jne. Jos oppilas ei niiden avulla pääse eteenpäin ratkaisuyrityksessään, motivaatio ja innostus ongelmanratkaisua kohtaan hiipuvat. Suuri rooli oppilaan ongelmanratkaisuprosessin ohjailussa on opettajalla. Hänen tavoitteensa on myös luoda motivoiva ilmapiiri oppilaiden keskuuteen opetusmenetelmien ja -materiaalien avulla. Luvussa 5 tarkastelen kuinka opettajan tulisi toimia tässä tehtävässä.

5 MATEMAATTISEN ONGELMANRATKAISUN OPETTAMINEN

Edellisessä luvussa määrittelin matemaattisen ongelmanratkaisutaidon yksilön kyvyksi ratkaista ongelmia, joihin tarvitaan matemaattisen tiedon soveltamista erilaisia ratkaisumalleja ja strategioita monipuolisesti hyväksi käyttäen. Taito muodostuu erilaisista osataidoista (luku 4.5; kuvio 8), joiden hallintaa ja yhteistoimintaa lisäämällä voidaan kehittää oppilaan taitavuutta matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Tutkimukseni tavoitteeseen pyrittiin opetuksella, johon kuuluivat opetusinterventiota varten tehdyt tuntisuunnitelmat ja niiden toteuttaminen (luku 10.4.1) sekä opetuksen integroiminen eri oppiaineisiin (luku 6). Johtoajatuksena toimi Leinon (1997, 49) kuvaus konstruktivismista; matematiikan opetus lähtee oppijan konstruktioiden asteittaisesta laajentamisesta siten, että suunnataan opiskelu tilanteiden matematisointeihin, ongelmanratkaisuun, ratkaisu–strategioiden pohdintaan ja uusien alueiden käsittelyyn. Leinon mukaan matematiikka on siis työväline ja asennoitumistapa ongelmien jäsentämiseen ja ratkaisemiseen.

Oppimistoiminnan aikana ovat vuorovaikutuksessa monet tekijät. Esimerkkinä tällaisista Silvén, Kinnunen ja Keskinen (1991, 35–38) mainitsevat oppilaan aiemmat tiedot ja taidot, motivaation, tavoitteet, tunteet, oppilaan elämän tilanteen, oppimistilanteen ja tehtävän. Näiden tekijöiden laajuus pakottaa työn rajaukseen. Esimerkiksi matematiikan opetuksen affektiivisten tekijöiden tutkimuksesta on muotoutunut oma laaja ja haasteellinen osa-alueensa (esim. Goldin 2000; Leder, Pehkonen, Törner 2003; Hannula 2004; Zan, Brown, Evans & Hannula 2006). Affektiivisten tekijöiden syvällisempi tarkastelu rajataan tämän tutkimuksen ulkopuolelle, koska se olisi vaatinut oppilaiden aiempien oppimiskokemusten ja asenteiden oppilaskohtaista selvittämistä.

Tässä tutkimuksessa keskitytään pääasiassa luokkatilanteessa ilmeneviin opetuksellisiin tekijöihin. Kurssin aikaisen oppimisympäristön luomisessa esimerkiksi integrointi oli keino, jolla pyrittiin vaikuttamaan myönteisesti oppilaiden suhtautumiseen matemaattista ongelmanratkaisua kohtaan. Tässä luvussa keskitytään tutkimuksessa toteutetun opetustyön kannalta oleellisiin näkökohtiin.

5.1 Opetukseen vaikuttavia tekijöitä

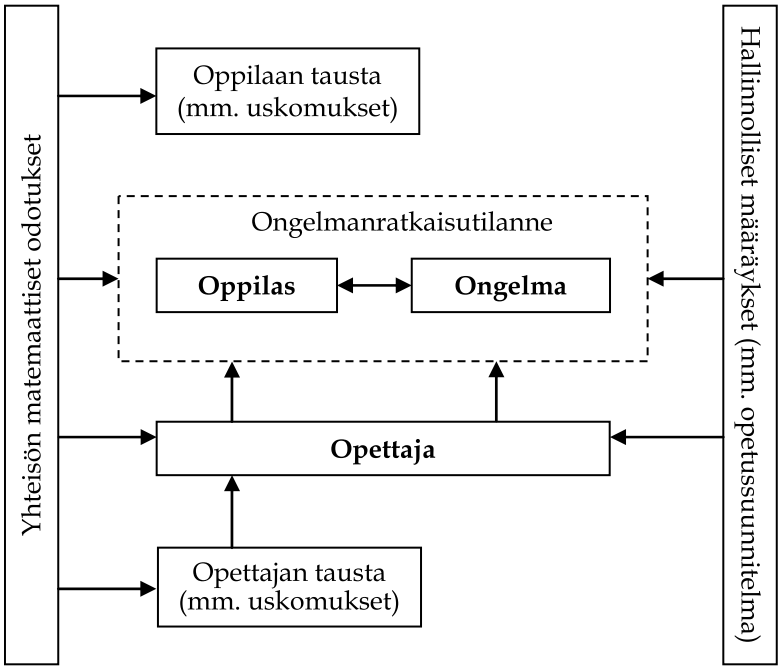
Matemaattisen ongelmanratkaisun opettamista on luontevinta lähteä pohtimaan siitä, miten oppilas käyttäytyy ja toimii ongelmatehtävää ratkaistessaan. Kuten jo luvussa 4 todettiin, ongelmanratkaisuprosessiin vaikuttavat useat tekijät.

Schoenfeld (1985, 44–45) tarkastelee ongelmanratkaisuprosessia laajasti yksilön *matemaattisena käyttäytymisenä*, joka muodostuu monien osatekijöiden yhteisvaikutuksesta. Hän on jakanut matemaattiseen käyttäytymiseen vaikuttavat tekijät neljään ryhmään: resursseihin, heuristiikkoihin, kontrolliin ja uskomuksiin. Ryhmät ovat osittain päällekkäisiä ja toimivat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa.

Resurssit *(resources)* ovat tietoa, jota oppilas kykenee tuomaan ratkaisutilanteeseen. Käytännössä ne ovat faktoja, menettelytapoja ja väittämiä, joita oppilas on omaksunut. Voidaankin sanoa, että resurssit ovat perusta, jolle ongelmanratkaisu rakennetaan. Heuristiikat *(heuristics)* taas ovat strategioita, opittuja ”nyrkkisääntöjä” tehokasta ongelmanratkaisua varten. Tällaisia ovat esimerkiksi apupiirrokset ja tehtävien välisten analogioiden muodostaminen.

Kontrolli *(control)* käsittää tietoisesti tehtyjen ratkaisuyritysten vertailun ja niihin liittyvien valintapäätösten tekemisen sekä ratkaisujen arvioinnin. Kontrollissa on kyse ratkaisijan resurssien käsittelystä ongelmanratkaisuprosessin aikana. Uskomukset *(belief systems)* liittyvät oppilaan uskomuksiin itsestään oppijana ja hänen tietoonsa tehtävistä. Ne muodostavat oppilaalle ”matemaattisen maailmankuvan” eli käsityksen matematiikasta ja sen merkityksestä. Ratkaisija lähestyy matematiikkaa ja matemaattisia tehtäviä uskomuksien muovaaman asenteensa ja näkökulmansa mukaisesti. Uskomukset määrittävät myös, kuinka kauan ja kuinka tehokkaasti ratkaisija jaksaa työskennellä tehtävän parissa.

Edellä esitetyt resurssit, heuristiikat, kontrolli ja uskomukset muotoutuvat oppilaalle kouluvuosien aikana. Itse ongelmanratkaisutilanteessa tärkein ulkopuolinen vaikuttaja on opettaja (Pehkonen 1991, 24–25). Pehkonen on koonnut ongelmanratkaisutilanteeseen vaikuttavia tekijöitä (kuvio 13) ja hän liittänyt niihin myös opettajan, joka puuttuu edellä esittelemistäni Polyan, Schoenfeldin, Lesterin ja Masonin ongelmanratkaisumalleista.



KUVIO 13 Ongelmanratkaisutilanteeseen vaikuttavia tekijöitä (Pehkonen 1991, 24)

Pehkonen lähtee ajatuksesta, että oppilaan ongelmanratkaisukäyttäytymiseen vaikuttavat oppilaskohtaiset taustatekijät kuten kokemukset matematiikasta, matemaattinen tietous, tarpeet ja motivaatio matematiikan oppijana sekä matemaattiset uskomukset. Tärkein ongelmanratkaisutilanteeseen koulussa vaikuttava ulkopuolinen tekijä on Pehkosen (1991, 25) mukaan kuitenkin opettaja. Opettajan toimintaan vuorostaan vaikuttavat hänen taustatekijänsä, kuten hänen opettamis- ja oppimiskokemuksensa, matemaattinen tietoutensa, tarpeensa ja motivaationsa matematiikan opettajana sekä matemaattiset uskomuksensa.

Ympäröivä yhteiskunta ei voi olla vaikuttamatta ongelmanratkaisutilanteeseen. Pehkosen (1991, 25) mukaan yhteisön matemaattisten odotusten lisäksi opettajan kautta tilannetta ohjailevat erilaiset hallinnolliset määräykset kuten matematiikan oppimäärät, tuntimäärät sekä luokan työjärjestys välitunteineen.

Tässä tutkimuksessa tarkastelen ongelmanratkaisutilanteen ulkopuolisista tekijöistä pääasiassa opettajan toimintaa luokkatilanteessa. Seuraavissa luvuissa esittelen niitä tutkimuskirjallisuudessa esiintyviä periaatteita, jotka liittyivät tutkimuksessa toteutetun ongelmanratkaisun opetukseen ja opettajan toiminnan periaatteisiin.

5.2 Ohjeita ongelmanratkaisun opettamiseen

Ongelmanratkaisu on monipuolinen käytännön taito, mikä tulee ottaa huomioon opetuksessa. Haapasalo (1994, 124) määritteleekin ongelmanratkaisun opettamisen hyvin laajassa merkityksessä. Hän tarkoittaa sillä kaikkia sellaisia toimenpiteitä, joilla tuetaan oppilaan ongelmanratkaisutaidon kehittymistä. Tämä perusajatus sopii tässä tutkimuksessa käytettyyn matemaattisen ongelmanratkaisutaidon määritelmään (luku 4.5). Sen mukaan matemaattinen ongelmanratkaisutaito koostuu kahdeksasta taitoalueesta, joita harjoittamalla voidaan kehittää matemaattista ongelmanratkaisutaitoa.

Pehkonen ym. (1991, 18–19) pitävät ongelmanratkaisuopetuksen onnistumisen välttämättöminä ehtoina niitä opettajan toimenpiteitä, joilla tähdätään matematiikan opiskelun ja oppimisen kannalta keskeiseen tavoitteeseen: oppilaiden ongelmanratkaisusitkeyden kehittämiseen. Tällä tarkoitetaan sitä, että oppilaat oppivat yrittämään ongelman ratkaisemista, vaikka he eivät heti keksisikään oikeaa ratkaisumenetelmää. Tällaisia opettajan toimenpiteitä ovat esimerkiksi myönteisen ilmapiirin luominen, oppilaiden luovuuden ja tiedollisten valmiuksien kehittäminen sekä ongelmanratkaisuasenteiden parantaminen.

Haapasalo (1994, 126) ehdottaa ongelmanratkaisun opetuksessa alkuvaiheeksi heuristiikkojen eli esimerkiksi ongelmanratkaisustrategioiden opettamista, niiden oppiminen parantaa hänen mukaansa yksilön ongelmanratkaisukykyä. Strategiat korostuisivat esimerkiksi siten, että samaa ongelmaa yritettäisiin ratkoa usealla eri menetelmällä. Haapasalon mukaan heuristiikkojen opettaminen olisi aloitettava yksinkertaisilla strategioilla selkeitä ja suoritettavissa olevia ohjeita käyttäen. Oppilaan on siis tiedettävä koko ajan, 1) miksi hän tekee sitä mitä tekee, 2) mitä hänen on seuraavaksi tehtävä ja 3) mitä hän voi tai hänen kannattaa jättää tekemättä. (Haapasalo 1985, 94–95.)

Opettaessaan ongelmanratkaisua opettajan on huomioitava opetuksen lisäksi myös luokan ilmapiiri, joka olisi saatava turvalliseksi ja myönteiseksi. Opettajan on kannustettava eri vaihtoehtojen kokeiluun ja uusien ratkaisutapojen etsimiseen. Oppilaiden virheisiin tulee suhtautua myönteisesti. Alkuun on suositeltavaa työskennellä yhdessä, jotta mahdollisuudet turvalliseen ja lämminhenkiseen työskentelyyn olisivat hyvät. (Johnson & Rising 1967, 123; Keranto 1982, 46.)

Krulik ja Rudnick (1982, 39) toteavat, että ongelmanratkaisun tulee olla didaktisesti suunniteltua ja jatkuvaa. Heidän mukaansa pelkillä ongelmanratkaisun teemapäivillä tai kampanjoilla saadaan aikaan enemmän haittaa kuin hyötyä. Samaa mieltä on myös Haapasalo (1994, 124).

Omien kokemuksieni mukaan en kuitenkaan tyrmäisi teemapäiviä ja kampanjoita. Avainasiana oppilaiden ongelmanratkaisutaidon kehittämisessä koulussa on mielestäni saada opettajat innostumaan ongelmanratkaisun opetuksen suunnittelusta ja toteuttamisesta. Lyhytkin ongelmanratkaisun teemapäivä saattaa motivoida opettajan ja oppilaat jatkossa pidemmän ongelmanratkaisujakson suunnitteluun ja toteutukseen; näin kävi itsellenikin. Lyhyellä ”kampanjalla” on tietysti myös vaaransa, sillä opettajalle ja oppilaille saattaa muodostua käsitys, että ongelmanratkaisu on vain kevyttä ajanvietettä oppikirjasta opetettavan matematiikan lisäksi. Tällainen väärinkäsitys uhkaa oppikirjasidonnaisesti työskenteleviä opettajia, sillä he eivät löydä matematiikan oppikirjoista varsinaista ongelmanratkaisun opetukseen keskittyvää jaksoa ennen lukiota. Tällainen selkeä jakso löytyy esimerkiksi Wuolijoen ja Norlamon (2000) laatimasta oppikirjasta: *Lukion lyhyt matematiikka; Matemaattinen ongelmanratkaisu*.

Tässä tutkimuksessa opetuskokeilua varten laadittiin etukäteen 30 oppitunnin ja puolentoista kuukauden mittainen opetusjakso siten, että se liittyi 6. luokan oppilaiden opetussuunnitelmaan. Opetusjaksoa ei voitane pitää enää pelkkänä kampanjana, sillä se vastaa esimerkiksi kurssimuotoisen lukiopetuksen opetuskurssin pituutta. Tämän mittainen jakso antaa jo tietoa ongelmanratkaisun opetuksen toimivuudesta. Tutkimuksessa toteutetussa opetuskokeilussa turvallisen työskentelyilmapiirin luomiseksi ongelmanratkaisun opetus aloitettiin opettajajohtoisilla esimerkkitehtävillä, joissa pyrittiin rohkaisemaan oppilaita ajatustensa ja ratkaisujensa esiintuomiseen. Tämän jälkeen oppilaat jatkoivat ongelmatehtävien ratkaisua ryhmissä, mistä edettiin yksilölliseen työskentelyyn.

Kymmenvuotisen opetuskokemukseni mukaan opettajan olisi antoisaa syventyä alkuinnostuksen jälkeen ongelmanratkaisuun ja siihen liittyvän kirjallisuuteen. Tämä vaivannäkö on palkitsevaa opetuksen kannalta, sillä se tarjoaa opettajalle runsaasti ideoita ongelmanratkaisun opetukseen. Opetuksessa havaitsin, että eri työmuotojen vaihtelu ja joustava käyttö säilyttävät oppilaiden aktiivisuuden ja mielenkiinnon opetukseen. Erityisesti pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattaa suosia, sillä näissä työtavoissa oppilaat innostuvat helposti vilkkaaseen ajatusten vaihtoon. Samalla he oppivat vähitellen puhumaan ongelmanratkaisusta ja ratkaisuvaihtoehdoista sekä omista ajattelumalleistaan. Samankaltaisia näkemyksiä ovat esittäneet Haapasalo (1985, 96–100), Krulik ja Rudnick (1982, 39).

Jotta ongelmanratkaisun opetusta pystyttäisiin suunnittelemaan ja jäsentämään, siihen tarvitaan jaottelua. Pehkosen ja Zimmermannin (1990, 43) mukaan ongelmanratkaisua voidaan opettaa erilaisten ongelmien avulla. Toisaalta ongelmanratkaisu voi myös toimia opetusmenetelmänä, jolloin esimerkiksi matematiikan opettaminen tapahtuu sen avulla. Tällaisen jaottelun avulla päästään ongelmakeskeiseen opetukseen. Pehkonen (1991, 17) määrittelee ongelmakeskeisen opetuksen opetustapahtumaksi, jossa opettaja problematisoimalla ongelmatilanteet johdattelee oppilaat itsenäiseen tiedonkeruuseen, -käsittelyyn ja arviointiin. Näin ollen opetuksen painopiste on tiedon käsittelyssä eikä niinkään tiedonvälityksessä. Zimmermannin (2000, 57–58) mukaan termi ongelmakeskeinen *(problem–orientation)* sisältää ongelmanratkaisun lisäksi myös ongelman löytämisen ja työskentelyn laajemmassa matemaattisessa ongelmakentässä. Ongelmakeskeisessä matematiikan opetuksessa olisi oltava Zimmermannin (2000, 57–58) mukaan mm. seuraavia päämääriä ja ominaispiirteitä:

- Annetaan mahdollisimman monelle oppilaalle tilaisuus onnistumisen kokemukseen.
- Suositaan keksivää oppimista.
- Tarjotaan monia mahdollisuuksia arvauksiin ja kriittiseen keskusteluun niistä. Tähän sisältyy myös keskustelu väitteiden todistamisesta ja kumoamisesta.
- Suositaan matematiikan eri alueet ja eri oppiaineet yhdistävää ajattelua.
- Tarjotaan mahdollisuuksia kokeilla heuristisia menetelmiä.
- Annetaan hyviä tilaisuuksia sisäiseen eriyttämiseen.
- Tarjotaan järkeviä mahdollisuuksia kommunikointiin ja ryhmätyöskentelyn kehittämiseen.

Tässä tutkimuksessa opetuksen ongelmakeskeisyys ilmenee kyselevänä opetuksena ja erilaisten ongelmatilanteiden esittämisenä. Oppilaat johdateltiin ongelmatilanteisiin esimerkiksi seuraavanlaisilla kysymyksillä: *Miksi metallista valmistettu laiva kelluu, mutta rautanaula uppoaa?* tai *Laske kävelynopeutesi 5 m matkalla?* Oppilaita kannustettiin tutkimaan ongelmaa käytännössä ja hakemaan tietoa sen selvittämiseen. Zimmermannin edellä esittämät ongelmakeskeisen matematiikan opetuksen päämäärät sopivat hyvin myös tämän tutkimuksen tavoitteiksi. Tutkimuksen tavoitteena on integroida eri oppiaineita opetukseen ja ylittää näin oppiainerajat ongelmanratkaisun opetuksessa. Koska ongelmanratkaisu ei ollut sidoksissa ainoastaan matematiikkaan, tutkimus pyrkii lisäämään eri oppiaineet yhdistävää ajattelua ja oppilaiden mahdollisuuksia kokea onnistumisen elämyksiä.

5.3 Lähestymistapoja ongelmanratkaisun opettamiseen

Ongelmanratkaisu ja sen opettaminen on monimuotoinen prosessi. Opettajan työtä eli opetuksen suunnittelua, jäsentämistä ja toteutusta helpottaa ongelmanratkaisunopetuksen jaottelu erilaisiin lähestymistapoihin. Niiden avulla opettaja voi tietoisesti painottaa opetuksessaan erilaisia näkökulmia tai pyrkiä käyttämään useampaakin tapaa monipuolisen opetuksen varmistamiseksi. Schroederin ja Lesterin (1989, 31–42) tavoitteena oli luoda käyttökelpoinen ja kouluopetukseen soveltuva jaottelu ongelmanratkaisun opetukseen. He päätyivät kolmeen lähestymistapaan: opetetaan *jotakin* ongelmanratkaisusta, opetetaan ongelmanratkaisua *varten* ja opetetaan ongelmanratkaisun *kautta*.

Myös Nunokawa (2005, 328–335) vertailee lähestymistapoja, joissa korostetaan eri näkökulmia matemaattisen ongelmanratkaisun opettamiseen ja oppimiseen. Mielenkiintoiseksi hänen esityksensä tämän tutkimuksen kannalta tekee se, että kolme tarkastelluista lähestymistavoista pohjautuu vahvasti Schroederin ja Lesterin lähestymistapoihin. Schroederin ja Lesterin tekemä jaottelu on siis edelleen käyttökelpoinen. Lisäksi Nunokawa antaa opettajille arvokkaita ehdotuksia siitä, millaisella ongelmanratkaisun opetuksella oppilaan oppimista voitaisiin tukea.

5.3.1 Opetetaan jotakin ongelmanratkaisusta

Tässä lähestymistavassa *(teaching about problem solving)* oppilaita ohjataan tulemaan tietoiseksi edistymisestään heidän ratkaistessaan ongelmia esimerkiksi Polyan nelivaiheisen ongelmanratkaisumallin kautta. Oppilaille opetetaan useita heuristiikkoja tai strategioita, joista he voivat valita tai joita heidän pitäisi käyttää keksiäkseen ja toteuttaakseen ongelmanratkaisusuunnitelmiaan.

Nunokawan (2005, 334) esittelemä lähestymistapa, jossa *korostetaan itse ratkaisumenetelmien käsittelyä*, pohjautuu tähän Schroederin ja Lesterin ensimmäiseen lähestymistapaan. Tässä tavassa keskitytään itse ongelmanratkaisuprosessiin, jolloin Nunokawan mukaan seurataan tiettyjä matemaattisen ongelmanratkaisun vaiheita (ks. luku 4.3; kuvio 5). Oppilaiden odotetaan oppivan, kuinka heidän tulisi suhtautua ongelmatilanteisiin, kuinka he käsittelevät ratkaisuprosessejaan ja kuinka he esittävät ajattelunsa. Opetuksessa ratkaisumenetelmien käsittelyä voidaan Nunokawan mukaan tukea seuraavasti: 1) Harjoitetaan ongelmanratkaisuprosessin jokaista komponenttia opettamalla heuristisia strategioita. 2) Järjestetään oppilaille toiminnallista ja todellista ongelmanratkaisua, sillä usein metakognitiivinen toiminta ja uskomukset opitaan ja muistetaan tilannekohtaisesti. 3) Tuetaan mielikuvaa ongelmaratkaisusta johdonmukaisesti eli siihen kiinnitetään huomiota erityisesti aidoissa tilanteissa. Ongelmanratkaisustrategioiden käyttöä opetetaan mieluummin ongelmatilanteiden kautta kuin tarkastelemalla vain malliratkaisuja. Esimerkiksi jos diagrammin piirtämistä käytetään ratkaisustrategiana, opitaan ja hyväksytään se tosiasia, että diagrammi muuttuu ja se saatetaan piirtää useitakin kertoja uudelleen ongelmanratkaisuprosessin aikana.

Tutkimuksessa toteutetulla ongelmanratkaisukurssilla koeryhmän oppilaille opetettiin tämän lähestymistavan pohjalta ongelmanratkaisumalleja ja -strategioita. Heille esiteltiin aluksi Polyan mallia ja LeBlancin listaamia ongelmanratkaisustrategioita esimerkkitehtävien avulla. Ongelmatehtävät pyrittiin laatimaan ja esittämään siten, että ne liittyisivät todellisiin tilanteisiin ja oppilaan kokemuspiiriin. Ratkaisukartta-menetelmän avulla oli tarkoitus osoittaa oppilaille, että ratkaisuyritys muuttuu ja muovautuu ongelmanratkaisun kuluessa. Hyväksyvää asennetta siihen, että virheellisetkin vastaukset kuuluvat ongelmanratkaisuprosessiin vahvistettiin siten, että oppilaille annettiin ohje laatia ratkaisukartta kuulakärkikynällä. Tällöin väärää vastausta ei voitu pyyhkiä pois, vaan uusi ratkaisuyritys tehtiin ratkaisuvihkoon edellisen yrityksen jälkeen.

5.3.2 Opetetaan ongelmanratkaisua varten

Schroederin ja Lesterin (1989, 32) mukaan opetettaessa ongelmanratkaisua varten *(teaching for problem solving)* painotetaan matematiikan käyttämisaspektia. Opettaja keskittyy tapoihin, joiden avulla opetettua matematiikkaa voidaan soveltaa rutiini- ja ongelmatehtävien ratkaisemiseen. Tämän näkökulman mukaan matematiikan opiskelussa korostuu ajatus tietojen hankkimisesta, jotta ongelmia kyettäisiin ratkaisemaan. Tällöin matemaattisen tiedon merkitys ja esimerkiksi peruslaskutoimitusten opettaminen painottuu. Opetuksen tavoitteena on antaa oppilaille useita esimerkkejä matematiikan käsitteistä ja rakenteista sekä luoda mahdollisuuksia, joissa oppilaat voivat soveltaa matematiikkaa ongelmien ratkaisemiseen.

Nunokawan (2005, 228–230) lähestymistapa, jossa *korostetaan oppilaan jo hankkimaa matemaattista tietoa,* pohjautuu tähän Schroederin ja Lesterin toiseen lähestymistapaan. Kun lähestymistapaa käytetään, oppilaiden odotetaan Nunokawan mukaan saavan kokemusta ja tietoa siitä, kuinka ja milloin he soveltavat omaamaansa matemaattista tietoa. Tätä päämäärää opettaja voi tukea Nunokawan mielestä kahdella tavalla. Ensinnäkin harjoitetaan oppilaan matemaattista tietoa niin runsaasti, että hän oppii soveltamaan sitä helpommin. Toinen tuen muoto on muokata ongelmatehtävät ja tilanteet sellaisiksi, että ne houkuttelisivat oppilasta käyttämään matemaattista tietoaan. Tällöin opettaja esimerkiksi muuttaa sanallisen tehtävän sanamuotoa ja aihetta siten, että oppilaat ymmärtävät tehtävän helpommin.

Tämän lähestymistavan mukaisesti tutkimuksessa toteutetulla ongelmanratkaisukurssilla opetettiin koeryhmän oppilaille kuudennen luokan oppimäärään liittyviä peruslaskutoimituksia (pinta-ala, tilavuus, yksikkömuunnokset; ks. luku 9.4.2). Osa tehtävistä, esimerkiksi *"Laske valmistamasi laivan tilavuus"* tai *"Kuinka paljon tarvitset laivasi valmistamiseen materiaalia?"*, liittyi näiden perustietojen käyttöön. Tehtävien tarkoituksena oli houkutella oppilaita myös soveltamaan oppimaansa matemaattista tietoa.

5.3.3 Opetetaan ongelmanratkaisun kautta

Ongelmanratkaisun kautta opetettaessa *(teaching via problem solving)* ongelmanratkaisu ymmärretään Schroederin ja Lesterin (1989, 33) mukaan opetusmenetelmänä. Tällöin ongelmia ei ratkaista ainoastaan matematiikan oppimista varten, vaan ne toimivat myös oppimisen työkaluina. Opetus aloitetaan ongelmanratkaisutilanteella, jossa esiintyvät aiheen avainkohdat. Tämän jälkeen matemaattisilla menetelmillä kehitetään "järkeviä vastauksia järkeviin ongelmiin". Matematiikan oppimisen tavoitteena on muuntaa tietty ei-rutiinitehtävä rutiinitehtäväksi. Tällöin matematiikan oppiminen nähdään siirtymisenä konkreetista abstraktiin. Näin arkielämän ongelma, josta on muodostettavissa matemaattinen käsite tai menetelmä, muunnetaan matemaattisiksi representaatioiksi (symbolit, kaavat), joita voidaan operoida matemaattisin menetelmin.

Nunokawan (2005, 332–333) kuvaama lähestymistapa, jossa *korostetaan ongelmatilanteen järkeistämistä uusien matemaattisten menetelmien ja ideoiden avulla*, perustuu tähän Schroederin ja Lesterin kolmanteen lähestymistapaan. Nunokawan mukaan oppilaan odotetaan ongelmanratkaisun kautta hankkivan matemaattista sisältöä ja oivaltavan, kuinka uusi sisältö liittyy jo omaksuttuun matemaattisen tietoon. Tätä lähestymistapaa voidaan käyttää erityisesti uusien matemaattisten ideoiden esittelyn alkuvaiheessa, jolloin tavoitteena on, että oppilas liittää uuden asian aiemmin omaksumaansa matemaattiseen tietoon. Toinen lähtökohta tällaisen lähestymistavan käyttöön on halu tarjota oppilaalle enemmän informaalia kuin matemaattista tietoa. Tällöin opetuksessa ei haluta painottaa ainoastaan opettajan antamien matemaattisten faktojen muistamista. Ongelmatilanteen järkeistämistä uusien matemaattisten menetelmien ja ideoiden avulla voidaan tukea Nunokawan mukaan kolmella tavalla: 1) Valitaan ongelmatilanne siten, että oppilaalle voidaan osoittaa sen avulla yhteys uuden ja vanhan tiedon välille. 2) Tuetaan muutosta kohti matemaattista tietoa, jolloin rohkaistaan oppilaita muotoilemaan matemaattisiksi tekemiä havaintojaan. 3) Luodaan luokkaan tilanteita ja tuetaan sellaisia arvoja, jotka kannustavat oppilaita matemaattiseen päättely- ja keskustelukulttuuriin. Näin toimitaan esimerkiksi silloin, kun kannustetaan oppilaita väitteidensä argumentointiin ja asioidensa loogiseen esittämiseen.

Käsillä olevassa tutkimuksessa ongelmanratkaisun opetuksella tähdättiin tämän lähestymistavan suuntaisesti siihen, että oppilas kykenisi konkreettisten havaintojen kautta omaksumaan matemaattisia abstrakteja käsitteitä ja menetelmiä. Esimerkiksi tilavuuden kaavan ja kolmion kulmien summan säännön yhdistäminen oppilaan valmistamaan tuotokseen tähtäsivät juuri tähän. Ajatuksena oli myös, että oppilaan konkreettinen tuotos auttaisi muistamaan paremmin siihen liittyvän matemaattisen informaation myöhemminkin. Kurssilla toteutettu opetuksen ongelmakeskeisyys (ks. luku 5.2) sopii hyvin mielestäni juuri tähän lähestymistapaan.

5.3.4 Avoin lähestymistapa

Avoin lähestymistapa on saanut alkunsa Japanista 1970-luvulta. Avoin lähestymistapa tunnetaan kirjallisuudessa myös nimillä: *The open–ended approach, The open approach, From problem to problem* ja *Various ways of thinking* (Nohda 2000, 39). Avoimen lähestymistavan alkuperäisenä tavoitteena oli seurata, kuinka oppilaat kykenevät matematisoimaan ongelmatilanteen. Toisin sanoen tarkkailtiin, miten oppilaat pystyvät tuomaan ongelman näkökohdat esille ja millaisella ajattelutavalla he soveltavat oppimaansa matematiikkaa. Toiseksi haluttiin selvittää, miten oppilaat pystyvät työskentelemään yhdessä ratkaistessaan matemaattisia ongelmia. Näitä tavoitteita varten kehitettiin avoimia ongelmia, joihin oli olemassa useita mahdollisia vastauksia. Oppilaiden työskentelyn ja vastausten perusteella arvioitiin, kuinka aktiivisesti he pystyvät toimimaan ja soveltamaan oppimaansa matematiikkaa. (Nohda 2000, 39–40.)

Pehkonen (2000b, 249–255) on toteuttanut kymmenen vuoden aikana tutkimusohjelman, joka sisälsi kolme tutkimusprojektia avoimien ongelmatehtävien koulukäytöstä *(Avoimet tehtävät matematiikassa, Oppilaiden matemaattisten uskomusten kehittäminen ja Opettajien käsitykset avoimista tehtävistä)*. Hän näkee avoimen lähestymistavan potentiaalisena ja kansainvälisestikin hyväksyttynä matematiikan ja ongelmanratkaisun opetuksen kehityssuuntana. Pehkonen (mts. 249–250) perustelee näkemystään sillä, että käsitteellisen tiedon (kuten tosiasioiden) ja menetelmällisen tiedon (kuten tosiasioiden käyttämisen) oppiminen tehostuu. Niiden oppiminen tapahtuu erilaisten mekanismien kautta. Tosiasioiden oppimiseen soveltuu hyvin konventionaalinen kouluopetus, mutta menetelmällisen tiedon oppiminen vaatii oppilaiden oma-aloitteista ja aktiivista opiskelua. Pehkosen mukaan avoin lähestymistapa tukee menetelmällistä oppimista samoin kuin avoimet oppimisympäristöt, joissa oppilaat voivat käsitellä todellisia ongelmia, olla aktiivisia ja oppia luonnollisissa olosuhteissa. Avoin lähestymistapa on siis opetusmenetelmä, joka painottaa oppilaan ymmärrystä ja luovuutta. Luovuutta kehitettäessä onkin Uusikylän (2002, 53) mukaan kiinnitettävä huomiota myös oppimisympäristöön. Hänen mielestään luovuutta edistäviä taitoja, esimerkiksi ongelmanratkaisua, voidaan kyllä opettaa, mutta suurempi vaikutus luovuuden kehittymiseen on oppilaan kasvu- ja elinympäristöllä, sillä *"luovuus syntyy yleensä sisäisestä pakosta, mutta se elää parhaiten turvallisessa vapaudessa"*. Tällaisen olotilan saavuttaminen on mahdotonta opiskeltaessa matemaattista ongelmanratkaisua suljettujen tehtävien parissa tiukkojen sääntöjen kontrolloimassa luokkatilanteessa.

Luokkatilanteessa avointa lähestymistapaa toteutetaan käyttämällä avoimia ongelmia, joihin on olemassa useita erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Avoimia ongelmia voivat olla esimerkiksi tutkimustehtävät, itse muotoillut ongelmat, arkielämän tilanteet, erilaiset projektit, ongelmien varioinnit tai tehtävät, joissa ei ole kysymystä (Pehkonen 2000b, 251). Tällaisten tehtävien avulla saadaan luokkaan syntymään helposti välitön ja vapautunut ilmapiiri. Lisäksi tehtävät, joihin on useita oikeita vastauksia, rohkaisevat oppilaita vertailemaan vastauksiaan keskustellen. Näin päästään myös luontevasti verbalisoimaan matematiikkaa ja ongelmanratkaisua.

Tässä tutkimuksessa ongelmanratkaisun opetuksessa käytettiin myös avointa lähestymistapaa. Integroimalla ongelmanratkaisun opetusta eri oppiaineisiin pyrittiin luomaan avoimia oppimisympäristöjä. Koeryhmän oppilaille annettiin tehtäväksi myös avoimia ongelmatehtäviä ja projekteja kuten laivan suunnittelu ja rakentaminen sekä omien tehtävien laatiminen. Ongelmanratkaisua harjoiteltiin myös ryhmissä, jolloin ryhmän oli muodostettava yhdessä keskustellen vastaus sanallisiin ongelmatehtäviin jokaiselle jäsenelle erikseen jaetusta vihjeestä.

5.4 Ongelmanratkaisun opettamisen haasteet

Davis (1966, 36) kuvailee ongelmanratkaisua yhdeksi monimutkaisimmista oppimisen muodoista. Lukuisten tutkimusten perusteella voidaan sanoa, että ongelmanratkaisutaidon tuloksekas opettaminen on vaativaa, sillä yhtenäistä teoriaa tai mallia ei tähän tarkoitukseen ole kyetty kehittämään. Tämän tutkimuksen teoriataustan pohjalta tehty johtopäätös siitä, että matemaattinen ongelmanratkaisutaito koostuu useista osa-alueista, asettaa jo opettajan taidotkin koetukselle. Kuitenkin ongelmanratkaisun merkitys näkyy vahvasti niin yksilön arkielämässä kuin globaalissa päätöksenteossakin. Kaikki yritykset opettaa ongelmanratkaisua ja luoda tilanteita sen harjoittelemiseen ovat siis varmasti vaivan arvoisia. Ongelmanratkaisun tulevaisuutta ajatellen tärkeimmät kysymykset ovat Zimmermannin (2000, 62) mukaan: Kuinka saadaan joustavia ja luovia opettajia, jotka haluavat opettaa matemaattista ongelmanratkaisua ja kuinka heitä autetaan, rohkaistaan ja motivoidaan tähän työhön?

Tässä onkin haastetta suomalaiselle opettajankoulutusjärjestelmälle. Pehkonen ja Merenluoto (2002, 69–70) tutkivat erääseen opettajankoulutuslaitokseen valittujen opiskelijoiden matemaattisia perustaitoja ja lukukäsitettä. Tulokset osoittivat, että opiskelijoilla oli ongelmia lukukäsitteen ymmärtämisessä. Myös opiskelijoiden matemaattisen ajattelun taso todettiin matalaksi. Tilanne lienee samansuuntainen Suomen muissakin opettajankoulutuslaitoksissa. Nämä tulokset eivät tietenkään kyseenalaista opiskelijoiden didaktisia taitoja, mutta jotain ne viestivät opiskelijoiden kiinnostuksesta matematiikan opiskeluun koulutuksessaan. Yksi keino vaikuttaa positiivisesti matematiikan ja ongelmanratkaisun opetukseen Suomessa olisi tehdä luokanopettajiksi opiskelevien valintaan muutoksia, joilla koulutukseen saataisiin enemmän matemaattis-luonnontieteellisistä aineista kiinnostuneita opiskelijoita. Opettajan kiinnostus matematiikkaan olisi erityisen tärkeää, sillä suurin osa peruskoulun matematiikan oppitunneista on vuosiluokilla 1–6. Niiden aikana oppilaalle muodostuu, pääasiassa opettajansa kautta, ensivaikutelma ja mielikuva matematiikasta oppiaineena.

5.5 Ongelmanratkaisun opettamiseen liittyviä tutkimuksia

Tutkimusten perusteella ei ole saatu yksiselitteistä vastausta siihen, miten esimerkiksi heurististen strategioiden opettaminen auttaa oppilaita ongelmien ratkaisussa. Schurterin (2002, 22) mukaan erilaisten heuristiikkojen opettelun hyödyllisyydestä ei ole saatu johdonmukaisia tutkimustuloksia, sillä joidenkin tutkimusten mukaan ne auttavat ongelmien ratkaisemisessa ja taas toisten tutkimusten mukaan eivät. Hän toteaa, että suunnitelman ja strategian lisäksi muillakin tekijöillä näyttäisi olevan tärkeä rooli ongelman ratkaisemisessa. Esimerkiksi Kellyn (1993, 2) tutkimuksessa yleisin este ongelmantehtävien ratkaisuun oli, etteivät opiskelijat hallinneet tarpeeksi hyvin tehtävän edellyttämiä matemaattisia sisältöjä eli ratkaisussa tarvittavia asiatietoja. Peruslaskutaitojen opettamista ei siis ole syytä unohtaa.

Matemaattisen ongelmanratkaisun tutkimuksessa on kuitenkin usein yritetty osoittaa yleisten ongelmanratkaisustrategioiden opettamisen käyttökelpoisuutta. Schoenfeld (1992, 353–354) toteaa viitaten 1960- ja 1970-luvulla toteutettuihin ongelmanratkaisustrategioiden opetukseen liittyviin tutkimustuloksiin, ettei strategioiden ohjattu käyttö parantaisi merkittävästi itse ongelmanratkaisukykyä. Myös Lesterin ja Kehlen (2003, 508) mukaan ongelmanratkaisustrategioiden ja -mallien opettaminen parantaa vain vähän oppilaiden kykyä ratkaista yleisiä matemaattisia ongelmia.

Onko ongelmanratkaisunstrategioiden ja -mallien opettaminen sitten ajanhukkaa? Ei, sillä varsinkin opetuksen alkuvaiheessa oppilaat tarvitsevat opetettujen strategioiden avulla oppimiaan menettelytapoja soveltaakseen ideoita uuteen ratkaisemattomaan ongelmaan. Vaikka onkin mahdotonta määrittää ideaalista ongelmanratkaisumallia tai yleispätevää ajatteluprosessia, Hammouri (2003, 585) toteaa, että oppilaille on kuitenkin opetettava erilaisia strategioita, prosesseja, malleja, mielikuvia ja metaforia, joita he voivat käyttää apuna ongelmien ratkaisussa.

On olemassa tutkimuksia, joiden perusteella vain muutamien ongelmanratkaisustrategioiden opettaminen on tuloksekasta. Esimerkiksi Kretschmer (1983) sai mielenkiintoisen tuloksen tutkiessaan ongelmanratkaisun opettamista erilaisilla opetusmenetelmillä. Hän laati ja toteutti 12 -vuotiaista koostuville opetusryhmille omat opetusohjelmat. Opetusryhmät olivat 1) ääneen ajatteluryhmä, 2) luovuusryhmä, 3) perusoperaatioiden ryhmä ja 4) strategiaryhmä. Alkukokeen jälkeen kutakin ryhmää opetettiin 8 viikkoa, minkä jälkeen suoritettiin lopputesti. Kaikkien muiden ryhmien kuin ääneenajatteluryhmän tulostaso nousi loppukokeessa. Kahdeksan viikkoa lopputestin jälkeen kaikille ryhmille suoritettiin vielä viivästetty mittaus, ja vain luovuusryhmä paransi suoritustaan loppumittauksen ja viivästetyn mittauksen välillä (mts. 282–283). Mikä oli luovuusryhmän salaisuus? Kretschmerin mukaan luovuusryhmän harjoittelemat aivoriihi (*brainstorming*) ja yksinkertaistamis- ja mallintamistekniikat vaikuttivat ryhmän tuloksiin myös viivästetyssä kokeessa (mts. 234–239).

Myös Schoenfeld (1992, 357–358; 1985, 114) näkee ongelmanratkaisustrategioiden opettelun hyödylliseksi, vaikka se ei hänen mielestään paranna merkittävästi itse ongelmanratkaisukykyä. Strategioiden opettelu harjoittaa hänen mukaansa tehokkaasti oppilaan ongelmanratkaisukäyttäytymistä siten, että hän oppii itse kontrolloimaan toimintaansa ratkaisutilanteessa aiemmin oppimansa strategian avulla. Näin vähennetään oppilaan epävarmuutta ja muutetaan myönteisemmäksi oppilaan asennetta matemaattista ongelmanratkaisua kohtaan.

Tukea ajatukselle strategioiden opettelun hyödyllisyydestä löytyy myös 2000-luvun tutkimustuloksista. Esimerkiksi Montague, Warger ja Morgan (2000, 110–116) kehittivät tutkimukseensa perustuvan *Solve it* -ohjelman oppilaille, joilla oli vaikeuksia ratkaista matemaattisia sanallisia ongelmia. Ohjelman tavoitteena on ohjata oppilasta päättämään, mitä ongelmanratkaisutilanteessa tehdään. *Solve it* -menetelmä opettaa matemaattista ongelmanratkaisua ohjatulla itsekysely tekniikalla, jonka tavoitteena on auttaa ratkaisijaa kontrolloimaan itse ratkaisuprosessiaan. Samalla pyritään kehittämään myös oppilaan ongelmanratkaisurutiinia. Ohjelman, joka etenee *sano, kysy ja tarkista* -kyselytekniikan avulla, tavoitteena on avustaa oppilaan ratkaisuprosessia. Seuraavassa esimerkki *Solve it* -menetelmän kyselytekniikasta (Montague, Warger & Morgan 2000, 111).

Lue (ymmärtäen)
Sano: Luen ongelman. Jos en ymmärrä, luen sen uudelleen.
Kysy: Olenko lukenut ja ymmärtänyt ongelman?
Tarkista: Ymmärränkö ongelman, niin että voin ryhtyä ratkaisemaan sitä?

Muotoile (omin sanoin)
Sano: Alleviivaan tärkeät tiedot. Kerron ongelman omin sanoin.
Kysy: Olenko alleviivannut tärkeät tiedot? Mikä on kysymys? Mitä etsin?
Tarkista: Liittyvätkö tiedot kysymykseen?

Visualisoi (tee kuva tai kaavio)
Sano: Teen piirroksen tai kaavion.
Kysy: Sopiiko kuvaukseni ongelmaan?
Tarkista: Vastaako kuva ongelman tietoja?

Tee hypoteesi (suunnittele ratkaisu ongelmaan)
Sano: Päätän kuinka monta askelta ja operaatiota tarvitaan. Kirjoitan operaatio symbolit (+, –, x, /)
Kysy: Jos suoritan laskun, mitä saan silloin ja mitä teen seuraavaksi? Kuinka monta vaihetta tarvitaan?
Tarkista: Onko suunnitelmassa järkeä?

Arvioi vastaus (ennusta tuloksen suuruus)
Sano: Pyöristän luvut.

Kysy: Pyöristinkö lukuja ylöspäin ja alaspäin? Kirjoitinko arvion?
Tarkista: Käytinkö olennaisia tietoja?

Laske (käytä aritmetiikkaa)
Sano: Teen laskutoimitukset oikeassa järjestyksessä.
Kysy: Millainen vastaukseni on arviooni verrattuna? Onko vastauksessani järkeä? Ovatko desimaalipilkut ja yksiköt oikein?
Tarkista: Olenko tehnyt kaikki operaatiot oikeassa järjestyksessä?

Tarkista (varmista, että kaikki on oikein)
Sano: Tarkistan laskun.
Kysy: Olenko tarkistanut jokaisen vaiheen? Olenko tarkistanut laskut? Onko vastaukseni oikein?
Tarkista: Onko kaikki oikein? Jos ei ole, palaan alkuun. Mikäli tarvitsen apua, pyydän sitä.

Edellä esitettyä kyselyohjelmaa on testattu kolmessa erilaisessa tutkimuksessa yhteensä 84 oppilaalla, joilla on ollut oppimisvaikeuksia. Kaikki kolmessa kokeilussa mukana olleet oppilaat kahta lukuun ottamatta paransivat tuloksiaan alkukokeen ja loppukokeen välillä.

Schurter (2002) selvitti, kuinka yliopisto-opintojaan aloittelevien ongelmanratkaisutaitoja algebrassa voitaisiin kehittää. Hänen tutkimuksessaan oli kaksi koeryhmää ja yksi kontrolliryhmä. Jokaiselle ryhmälle opetettiin ongelmanratkaisua 16 viikon ajan eri menetelmillä. Kontrolliryhmälle opetettiin ns. perinteisellä menetelmällä eli käsittelemällä pelkästään erilaisia ongelmanratkaisutehtäviä. Kahdesta koeryhmästä toiselle opetettiin ongelmanratkaisua siten, että oppilaat seurasivat tehtäviä ratkaistessaan omaa ymmärtämistään tätä varten laaditun kysymyslistan avulla. Toiselle koeryhmälle opetettiin ongelmanratkaisua saman ymmärtämisen seuraamistekniikan lisäksi Polyan nelivaiheisen menetelmän avulla. Tulosten mukaan koeryhmät paransivat tilastollisesti merkitsevästi suorituksiaan kontrolliryhmään verrattuna. Koska koeryhmien välillä ei ollut tilastollisia eroja, Schurter (2002, 30–32) toteaa, että molemmissa koeryhmissä käytetty oman ymmärtämisen seuraamistekniikka saattaisi olla ratkaiseva tekijä tulosparannukseen kontrolliryhmään verrattuna.

Hohn ja Frey (2002) kehittivät ongelmatehtävien ratkaisuun heuristisen menetelmän, jonka he nimesivät SOLVED-malliksi (*__S__tate the problem, __O__ptions to use, __L__inks to past, __V__isual aid, __E__xecute your answer, __D__o check back*). Tutkimuksessa suoritettiin kaksi kokeilua. Ensimmäinen kokeilu toteutettiin kolmelle koeluokalle, jotka olivat 3.-luokkalaisia (n = 31), 4.-luokkalaisia (n = 37) ja 5.-luokkalaisia (n = 35). Jokaiselta koeluokan luokka-asteelta otettiin kaksi luokkaa kontrolliluokaksi. Näin kontrolliluokkina toimi yhteensä kuusi luokkaa. Aluksi luokanopettajille esitettiin näytetunti ja ohjeet SOLVED-metodista. Alkutestin jälkeen opettajat pitivät joka toinen päivä neljä matematiikan tuntia, minkä jälkeen pidettiin lopputesti. Tulokset osoittivat, että koeryhmät paransivat suoritustaan kontrolliryhmään verrattuna. Toinen kokeilu toteutettiin samalla periaatteella, mutta uusien opettajien ja oppilaiden voimin. Kaksi viikkoa loppukokeen jälkeen koe- ja kontrolliluokille suoritettiin vielä viivästetty mittaus, joka sisälsi tehtäviä strategian eri kohdista. Hohnin ja Freyn tulosten mukaan heuristiikkojen harjoittelu johti parempaan osaamistasoon perinteiseen oppikirjan mukaiseen opetukseen verrattuna. Parannus näkyi loppumittauksissa ja säilyi selvästi viivästettyyn mittaukseen asti. Myös matemaattisesti heikot hyötyivät menetelmästä, eikä sukupuolella ollut vaikutusta menetelmän oppimiseen.

Zawojewski ja Carmona (2001, 549–553) toteavat, että ongelmanratkaisustrategioiden opettaminen auttaa oppilaita silloin, kun he ovat ongelmatilanteessa eivätkä tiedä, mitä pitäisi tehdä. Zawojewski ja Carmona esittävät myös kolme sosiaalista näkökohtaa, jotka tulevat esille kun strategioita opetellaan ja käytetään ryhmissä. Ensinnäkin ryhmän jäsenten käyttämien ongelmanratkaisustrategioiden avulla voidaan seurata ja vertailla heidän matemaattista kehitystään. Toiseksi strategioiden avulla oppilaat saadaan kommunikoimaan keskenään luontevasti, kun he ratkaisevat ryhmissä haastavia tehtäviä. Kolmanneksi keskustellessaan ongelmanratkaisustrategioista ja ratkaisuista ryhmässä heidän on mahdollista omaksua keskusteleva ja kriittinen ratkaisutapa itsenäiseen ongelmanratkaisuun.

De Corte, Verschaffel ja Masui (2004, 365) laajentavat ongelmanratkaisun opettamisen oppimisympäristöihin. He ilmoittavat opetuksen tutkimuksen päähaasteeksi nykyiselle ymmärtävälle oppimiselle suunniteltujen oppimisympäristöjen rakentamisen. Tällaisten oppimisympäristöjen tavoitteena olisi vahvistaa oppilaissa itsenäisiä ja yhteistoiminnallisia oppimistaitoja sekä tukea tiedonsoveltamiskykyä, ajattelukykyä sekä ongelmanratkaisua. Vastatakseen tähän haasteeseen he suunnittelivat CLIA-mallin *(Competence, Learning, Intervention, Assessment)*. Mallin periaatteena on luoda oppimisympäristö, jossa oppilaat pääsevät joustavasti käsiksi hyvin organisoituihin tietolähteisiin. Heille opetetaan heuristisia strategioita, joiden avulla ongelmia lähestytään systemaattisesti. CLIA- mallia kehiteltiin opetuskokeiluissa siten, että oppilaiden oppimista tuettiin oppikirjan tehtävistä poikkeavilla oppikirjan ongelmatehtävillä. Tehtävälähteinä käytettiin esimerkiksi sanomalehtien artikkeleita, taulukoita ja sarjakuvia. Oppitunneilla sovellettiin vaihtelevasti interaktiivisia opetustekniikoita kuten ongelmien ratkaisemista ryhmissä ja ratkaisujen vertailua yleisenä luokkakeskusteluna. Uutta innovatiivista oppimis- ja opetustapaa ongelmanratkaisuun pyrittiin luomaan suuntaamalla keskustelua ongelmanratkaisustrategioihin ja siihen, millaisia ongelmia ja ratkaisuja pidetään yleisesti hyvinä. Samoin viritettiin keskustelua (väärin)käsityksistä, uskomuksista ja tunteista, jotka liittyvät matemaattiseen ongelmanratkaisuun. (De Corte ym. 2004, 371–374.) Kyseisen mallin avulla Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts ja Ratinckx (1999) toteuttivat tutkimuksen, jossa luokanopettajat opettivat neljälle 5. luokalle ongelmanratkaisua 20 oppituntia neljän kuukauden aikana. Kontrolliluokkina toimivat 7 muuta 5. luokkaa. Intervention aikana oppilaille pyrittiin opettamaan yleisiä kognitiivisia, itsenäiseen työskentelyyn ohjaavia strategioita harjaannuttamalla heitä ratkaisemaan matemaattisia ongelmia seuraavalla viisi vaihetta ja kahdeksan heuristista strategiaa sisältävällä ongelmanratkaisumallilla (Verschaffel ym. 1999, 202):

Vaihe 1: Rakenna mielikuva ongelmasta.

Heuristiikat:

- Tee ajatuskartta
- Piirrä kuva.
- Tee lista, kaavio tai taulukko

- Erottele olennainen tietoa epäolennaisesta
- Käytä "maalaisjärkeä"

Vaihe 2: Päätä kuinka ratkaiset ongelman.
Heuristiikat:

- Tee ajatuskartta
- Arvaa ja tarkista
- Etsi kaava
- Yksinkertaista numeroita

Vaihe 3: Suorita tarvittavat laskut.

Vaihe 4: Tulkitse tulos ja muotoile vastaus.

Vaihe 5: Arvioi ratkaisu.

Oppilaiden kehittymistä arvioitiin alku- ja loppukokeella sekä viivästetyllä kokeella, jotka sisälsivät mm. kymmenen vaikeahkoa sanallista ongelmatehtävää. Tulosten mukaan alkukokeessa ryhmillä ei ollut eroa sanallisten ongelmien ratkaisussa, mutta loppukokeessa koeryhmä oli merkittävästi parempi ja ero säilyi vielä kolme kuukautta myöhemmin pidetyssä viivästetyssä kokeessa.

Edellä esitellyt esimerkit antavat viitteitä siitä, että tietyn ongelmanratkaisustrategian lyhytaikainenkin opettelu parantaa oppilaiden suorituksia. Siksi tämän tutkimuksen opetusinterventiossa oppilaille opetettiin ongelmanratkaisumalleja ja -strategioita. Lisäksi heitä opetettiin laatimaan tutkimusta varten kehitelty ongelmanratkaisukartta (ks. luku 7), jonka tarkoituksena oli toimia strategiatyökaluna ongelmatehtävien ratkaisussa. Viivästetty mittaus haluttiin tässä tutkimuksessa toteuttaa myöhemmin (1½ -vuotta) kuin edellä esitetyissä tutkimuksissa, jotta saataisiin selville, oliko oppiminen koeryhmän oppilailla pysyvämpää. Joustavia oppimisympäristöjä pyrittiin luomaan eri oppiaineiden integroinnin avulla. Integrointia esittelen seuraavassa luvussa.

6 OPETUKSEN INTEGROIMINEN

Käsite integrointi ja sen synonyymitermit integraatio ja eheyttäminen (Hirsjärvi 1983, 65; Lahdes 1997, 211; Malinen 1985, 146) ovat olleet käytössä useilla aloilla, ja näin niille on syntynyt myös monia erilaisia merkityksiä. Integraatiota käytetään koulutuksen lisäksi myös esimerkiksi psykologiassa. Kasvatustieteellisessä merkityksessä integraatiolla ja integroitumisella tarkoitetaan eheytymistä, yhteenkuuluvan kokonaisuuden muodostamista ja kokonaisvaltaisuutta (Hirsjärvi 1983, 65). Opetustyössä se ilmenee opetussisältöjen jäsentämisenä laajoiksi kokonaisuuksiksi. Hirsjärven (1983, 65) mukaan integroinnilla tarkoitetaan esimerkiksi oppiainesten sulauttamista yhdeksi kokonaisuudeksi. Kysymyksessä voi siis olla esimerkiksi esteettisen, humanistisen ja luonnontieteellisen oppiaineksen integrointi tarkoituksenmukaiseksi kokonaisuudeksi.

Malinen (1985, 146) tarkoittaa integroinnilla opetuksen eheyttämistä, jossa opetuksella muodostetaan oppilaalle mielekkäitä opetuskokonaisuuksia. Erikssonin (1986, 275) mukaan integraatio merkitsee opetustoiminnan suuntaamista siten, että oppilaan oppimistoiminta muodostaisi ajatuksellisesti ja emotionaalisesti loogisen kokonaisuuden suhteessa ainekseen.

Selkeyden vuoksi käytän tässä tutkimuksessa pelkästään *integrointi* -sanaa, koska sen johtaminen on johdonmukaisempaa kuin sanan integraatio *(integrointi→ integroida)*. Tosin kasvatustieteellisessä kirjallisuudessa synonyymitermiä integraatio on myös käytetty vakiintuneesti. Huomattakoon, että tässä tutkimuksessa integroinnilla ei tarkoiteta erityiskasvatukseen liittyvää erityisopetuksen ja yleisopetuksen yhteen sulauttamista (esim. Moberg 1998, 155).

6.1 Syitä oppiaineiden integroinnille

Tutkimuksessani opetuksen integrointia käytettiin apuna sellaisen oppimisympäristön luomisessa, joka kehittäisi oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa ja havainnollistaisi opetusta.

Vahvan perusteen integroinnin käytölle tässä tutkimuksessa antaa opetushallituksen perusopetuksen Opetussuunnitelman perusteet (2004, 38), johon on kirjattu seuraavasti: *"Opetus voi olla ainejakoista tai eheytettyä. Opetuksen eheyttämisen tavoitteena on ohjata tarkastelemaan ilmiöitä eri tiedonalojen näkökulmista rakentaen kokonaisuuksia ja korostaen yleisiä kasvatuksellisia ja koulutuksellisia päämääriä."*

Tukea oppiaineiden integroimiseen tarjoaa myös Deweyn näkemys tekemällä oppimisesta, jota esittelin alustavasti jo luvussa 2.2.3. Sanoista *learning by doing* on tullut aikojen kuluessa hyvin tuttu opettajien ja opettajankouluttajien keskuudessa. Näkemyksen mukaan tekemisen kautta oppimisen avulla harjoitteiden tuomat kokemukset siirtyvät yksittäisestä tilanteesta arkitodellisuuteen. Pelkkä puhtaan tiedon opetteleminen irrallaan sen laajemmista yhteyksistä ja käyttömahdollisuuksista johtaa sen sijaan vain erillisten tiedon sirpaleiden oppimiseen (Rauste-von Wright, 1994, 48).

Mutta kuinka tätä ideaa käytännössä toteutetaan tämän päivän kouluopetuksessa? Tämä kysymys sai minut pohtimaan vaihtoehtoisia tapoja, joilla lisättäisiin opetuksen toiminnallisuutta. Toiminnallisen ongelmanratkaisun toteuttaminen matematiikan oppitunneilla tarjoaa toki lukuisia mahdollisuuksia tekemällä oppimisen idean soveltamiseen erilaisten opetusvälineiden ja -materiaalien avulla. Matematiikan aihepiirit ja oppikirjat sekä luokkahuone rajaavat kuitenkin myös oppilaiden toimintaa. Jos opetukseen otetaan mukaan esimerkiksi käsityön ja kuvataiteen aihepiirejä ja välineistöä, oppilaiden mahdollisuudet toiminnallisuuteen lisääntyvät huomattavasti.

Luvussa 3 esittelin Pirien ja Kierenin (1994, 165–190) teoriaa matemaattisen ymmärtämisen ja ajattelun kehittymisestä. Teoriassa kiinnitetään huomiota oppijan mielikuvan muodostamiseen ja omaksumiseen, johon oppiaineiden integrointi antaa myös hyviä tilaisuuksia. Tämän tutkimuksen opetuskokeilussa oppilaan mielikuvanmuodostamisprosessia pyrittiin tukemaan juuri oppiaineiden integroinnin avulla.

Neljännen perusteen tutkimuksessa toteutetulle oppiaineiden integroinnille antaa variaatioteoria, joka liittyy fenomenografiaan (Marton & Pang 1999, 1; Pang 2003, 145). Tutkimuskohteena fenomenografiassa on Martonin ja Pangin (1999, 4) mukaan ensinnäkin yksilön tapa kokea jokin ilmiö tai asia *(a way of experiencing something)* ja toiseksi se, kuinka saman asian kokeminen eri tavoilla tuottaa erilaisen kokemuksen *(the actual difference between two ways of experiencing the same thing)*. Tutkimuksen painopiste on siis oppijan kokemuksen tutkimuksessa. Fenomenografisessa variaatioteoriassa kiinnitetään huomio siihen, 1) miten eri yksilöt voivat kokea ja ymmärtää saman ilmiön eri tavalla ja 2) kuinka samaa ilmiötä varioimalla saadaan tuotettua yksilöille erilaisia kokemuksia ja havaintoja (Marton & Pang 1999, 1–2).

Tässä tutkimuksessa oppiaineiden integroinnilla pyrittiin varioimaan matemaattista tietoa kuten kolmion kulmien summasääntöä tai tilavuuden määritelmää liittämällä niitä uuteen kontekstiin eli toisen oppiaineen aihepiiriin. Kolmion kulmasääntöä varioitiin kuvataiteen ja tilavuuden määritelmää teknisen työn aiheen avulla.

Marton, Runesson & Tsui (2004, 15) ovat sitä mieltä, että variaatio antaa oppilaille mahdollisuuden kokemuksiin, jotka ovat tärkeitä erityisesti oppimiselle ja tiettyjen kykyjen kehittymiselle. He toteavat, että esimerkiksi oppiaksemme ratkaisemaan ongelmia eri tavoilla tarvitsemme kokemuksia eri ratkaisustrategioista. Tämä onkin tämän tutkimuksen kannalta olennaista.

Pangin (2003, 150) mukaan variaatioteorian lähtökohtana on oppijan tietoisuuden dynaaminen rakenne. Tällöin oppiminen voidaan liittää huomiokyvyn ja varioinnin samanaikaiseen tiedostamiseen. Hänen mukaansa oppiminen yhdistetään huomiokyvyn lisääntymiseen, mikä antaa mahdollisuuden ilmiön keskeisten tarkastelunäkökulmien liittymiseen oppijan tietoisuudessa. Huomiokyvyn lisääntymisen katsotaan johtavan oppimiseen ja juuri variaatiota pidetään avaimena oppijan huomiokyvyn lisäämisessä (mts. 150). Martonin ja Pangin (1999, 7–8) mukaan variaatio onkin ratkaisevaa oppimisen kannalta. Lisäksi Marton ja Trigwell (2000, 381–382) toteavat, että kuten kertaustakin, myös variaatioita voidaan pitää ”opintojen äitinä”.

Martonin ja Boothin (1997, 145) mukaan oppimistilanteen ohjaava voima on variaatio. Heidän perusajatuksenaan on, että oppijan on saatava opittavasta asiasta ja sen aihepiiristä erilaisia kokemuksia, jotta hän voi tehdä siitä vertailuja ja havaintoja. Tämä tarkoittaa, että havaitakseen ja erotellakseen opittavasta ilmiöstä eri näkökohtia, joita oppilas ei ole aiemmin kyennyt havaitsemaan tai erottelemaan, sekä tiedostaakseen ne samanaikaiseksi, hänen on koettava jokin variaatio, joka antaa ilmiöstä erilaisen kokemuksen.

Marton, Runesson ja Tsui (2004, 11) konkretisoivat variaation merkitystä seuraavasti: Jos sanotaan, että jokin esine on raskas, emme ymmärrä lauseen merkitystä, jollei meillä ole kokemuksia erilaisista painoista. Samoin tietääksemme mitä on punainen, meillä on oltava kokemuksia muista väreistä.

Schupp (2005, 3–4) pitää variointia ihmisen perustoimintana, jota pitäisi toteuttaa matematiikan tunneilla enemmän. Hänen ehdotuksensa ongelmatehtävän varioinnista matematiikan tunnilla on seuraavanlainen: Ensin annettu ongelmatehtävä ratkaistaan ns. tavallisesti ja sitten oppilaita pyydetään varioimaan ongelmaa esimerkiksi lukuarvoja tai tehtävänantoa muuntelemalla. Tämän jälkeen opettaja kerää oppilaiden esitykset ja luokittelee ne virheellisiin, helppoihin ja vaikeisiin. Lopuksi tehtävät jaetaan oppilaille ja he pyrkivät ratkaisemaan toistensa varioimia tehtäviä. Näin oppilaiden käsitys tehtävästä ja sen kautta opittavasta asiasta syvenee ja monipuolistuu. (Schupp 2005, 6–11.)

Runesson ja Mok (2004, 75–79) toteuttivat varioivaa opetusta avoimella tehtävällä, johon oli useita oikeita vastauksia. Oppilaat ratkaisivat samaa tehtävää ensin ryhmissä, ja sen jälkeen vastausehdotukset koottiin taululle yhteistä tarkastelua varten. Toisin sanoen kuten edellä esitetyssä Schuppin (2005) ideassa alkuperäinen ongelma oli sama ja variaation avulla luotiin erilaisia ratkaisuja ongelmaan. Runesson ja Mok (2004, 81) tiivistävät, että variaation avulla oppilaille annettiin tilaisuus erottaa ratkaisuvaihtoehdot intuitiivisesti tuotettuihin tai matemaattisesti perusteltuihin. Oppilaat saattoivat havaita, että ongelmaan oli todellakin useita mahdollisia mutta myös mahdottomia ratkaisuja. Lopulta he myös lajittelivat oikeat ratkaisut paremmuusjärjestykseen. Edellä esitettyä variaation ajatusta pyrittiin käyttämään myös tässä tutkimuksessa. Kun oppilaat tekivät piirustuksia laivoistaan, he muodostivat litran kokoisia tilavuuksia eri mitoituksilla ja vertailivat niitä toisiinsa. Heidän oli myös huomioitava, että laivan olisi myös kelluttava ja pysyttävä pystyssä ja mikä tärkeintä – tämä projekti viritti matemaattista keskustelua.

6.2 Kolme näkökulmaa integrointiin

Koska opetuksen integrointi on erittäin laaja ja monitahoinen käsite, rajaan sen tämän tutkimuksen kannalta kolmeen keskeiseen näkökulmaan:
1) integroitavan opetuksen ajalliseen toteutukseen (*horisontaalinen–vertikaalinen)*,
2) integroinnin lähtökohtaiseen tarkasteluun (*oppijakeskeinen – opettajakeskeinen*)
ja 3) integroitavien oppiaineiden käsittelytapaan (*oppiaineet sulauttava – oppiaineet erilisinä yhdistävä*). Seuraavissa luvuissa esittelen näkökulmien keskeiset piirteet.

6.2.1 Integroinnin ajallinen toteutus

Suomessa opetuksessa yleisesti käytetty integroinnin jaottelutapa on ajallinen jaottelu vertikaaliseen ja horisontaaliseen. Vertikaalisessa integroinnissa samaan kokonaisuuteen, tavallisesti samaan oppiaineeseen kuuluvat oppisisällöt ja opetustilanteet järjestetään peräkkäin järkeviksi kokonaisuuksiksi. Horisontaalisessa integraatiossa opetuksessa ylitetään ainekohtaiset rajat, jotta oppilas voisi muodostaa opetettavasta aiheesta oppiainerajat ylittäviä mielekkäitä kokonaisuuksia. (Lahdes 1997, 211.)

Käytän tämän tutkimuksen yhteydessä seuraavia määritelmiä: *Horisontaalisella integroinnilla* tarkoitetaan eri oppiaineissa toisiinsa liittyvien oppiainesten samanaikaista, rinnakkaista opettamista siten, että läheiset oppimistilanteet muodostavat kokonaisuuden. (Hirsjärvi 1983, 65; Malinen 1985, 149.) *Vertikaalisella integroinnilla* tarkoitetaan ajallisesti peräkkäisten toisiinsa liittyvien asioiden opettamista niin, että oppilaalle muodostuu integroituja tietokokonaisuuksia. (Hirsjärvi 1983, 65.) Tällainen tavoite on nähtävissä esimerkiksi vuosiluokkien välisissä opetussuunnitelmissa. Integrointia tarvitaan jo yksittäisen oppiaineen sisällä, jotta opetettavasta aineesta muodostuisi oppilaan mielessä kouluvuosien aikana kokonaisuus.

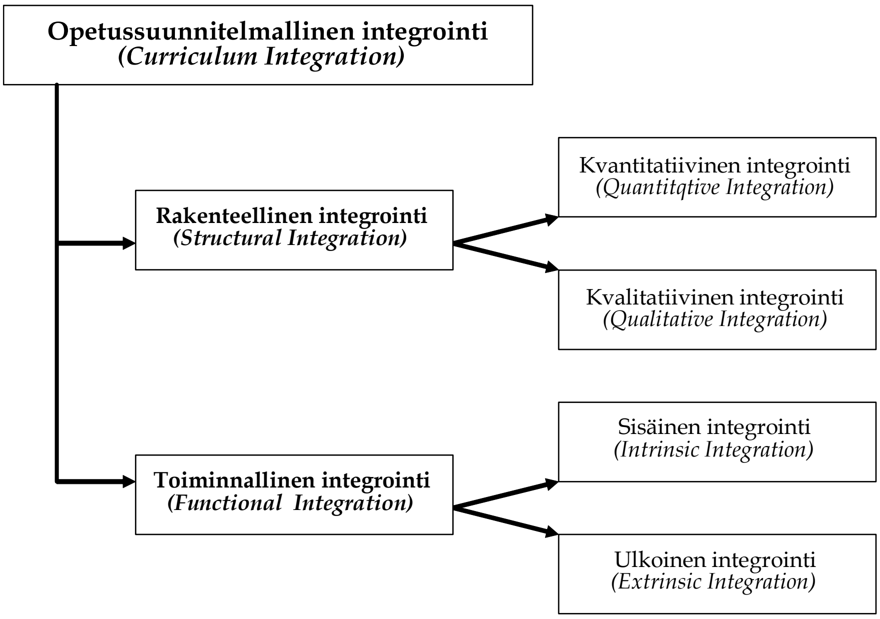
Miten integroinnin tavoitteissa onnistutaan, riippuu siitä, kenen kannalta tavoitteen saavuttamista tarkastellaan. Esimerkiksi Merenluodon ja Lehtisen (2000, 214–215) tutkimuksen mukaan matematiikan oppikirjoissa opetus näyttää etenevän johdonmukaisesti ja loogisesti ainoastaan opettajan ja ammattilaisten mielestä. Sen sijaan oppilaasta opetettava aines tuntuu sirpalemaiselta ja epäjohdonmukaiselta. Tämä tulos johdattelee osaltaan rajaukseni toiseen näkökulmaan, integroinnin lähtökohtaiseen tarkasteluun.

6.2.2 Integroinnin lähtökohta

Ingram (1979, 26–28) jakaa opetussuunnitelmallisen integroinnin *(curriculum integration)* rakenteelliseen integrointiin *(structural integration)* ja toiminnalliseen integrointiin *(functional integration)*.

Rakenteellinen integrointi määritellään opetussuunnitelman sisältämän tietoaineksen uudelleen järjestelemiseksi. Rakenteellisen integroinnin Ingram jakaa vielä kvantitatiiviseen ja kvalitatiiviseen integrointiin. Edellisellä hän tarkoittaa oppiaineet erillisinä säilyttävää integrointia ja jälkimmäisellä oppiaineita sulauttavaa integrointia (kuvio 14).

Toiminnallisessa integroinnissa tieto nähdään integrointikokemuksia edistävänä tekijänä. Toiminnallinen integrointi jaetaan Ingramin luokittelussa kahteen osa-alueeseen sisäiseen integrointiin *(intrinsic integration)* ja ulkoiseen integrointiin *(extrinsic integration)* (Ingram 1979, 28–29). Sisäisessä integroinnissa keskitytään oppilaan oppimiseen ja motivoitumiseen liittyviin psykologisiin tekijöihin. Ulkoisessa integroinnissa tarkastellaan opetussuunnitelmaa ja opetusta muokkaavia sosiaalisia ja yhteiskunnallisia tekijöitä. (Ingram 1979, 37–40.) Tähän jakoon pohjautuu myös tutkimuksessani integroinnissa käytetty toinen näkökulma; integroinnin lähtökohta.



KUVIO 14 Opetussuunnitelmallisen integroinnin jako Ingramin (1979, 27) mukaan

Erikssonin (1986, 275–276) jaottelu vastaa esitettyä Ingramin toiminnallisen integroinnin jakoa. Erikssonin mukaan ulkoisella integroinnilla tarkoitetaan opettajan opetustoimintaa ja -järjestelyjä. Sisäisen integroinnin Eriksson määrittelee tapahtuvan oppilaassa – se on siis oppimistoimintaa. (Eriksson 1986, 276.) Kuitenkin Aaltosen (2003, 54) käyttämät nimitykset edellä mainituista tyypeistä ovat mielestäni havainnollistavampia. Aaltonen tekee jaon *oppijakeskeiseen* ja *opettajakeskeiseen* integrointiin. Oppijakeskeisessä integraatiossa korostetaan oppiainesten ja erilaisten opetustapahtumien sulauttamista kokonaisuudeksi oppijan ajatuksissa. Tällöin integrointi nähdään oppijassa tapahtuvana sisäisenä prosessina, joka aiheuttaa hänessä muutoksen, esimerkiksi hänen kognitiivisen rakenteensa kehittymisen. Integrointi voi myös ilmetä oppijassa erilaisina taitoina kuten taitona soveltaa opittua uusissa tilanteissa tai havaita asioiden kausaalisia suhteita. Opettajan tehtävä oppijakeskeisessä integroinnissa on lähinnä mahdollistaa ja tukea oppijan prosessia.

Opettajakeskeisesti tarkasteltuna integrointi nähdään Aaltosen (2003, 54) mukaan teknisenä opetuksen organisointimenetelmänä, ikään kuin oppijan ulkopuolisena asiana. Tällöin tarkoitetaan jo olemassa olevien oppiaineiden ja -sisältöjen uudelleen organisoimista opetussuunnitelmissa ja opetustilanteissa. Oppilaiden odotetaan omaksuvan automaattisesti tietty valmiiksi integroitu kokonaisuus (Kiviniemi 1991, 63).

6.2.3 Integroitavien oppiaineiden käsittelytapa

Kolmas tutkimuksessani opetuksen integrointia jäsentävä näkökulma perustuu oppiaineiden käsittelyyn itse opetustilanteessa. Rajaan tarkasteluni tässä opetussuunnitelmalliseen integrointiin *(Curriculum Integration)*, koska tutkimuksessa toteutetussa integroinnissa huomioitiin viisi opetussuunnitelmaan kuuluvaa oppiainetta. Opetussuunnitelmallisessa integroinnissa voidaan käyttää *oppiaineet sulauttavaa* tai *oppiaineita erillisinä yhdistävää* toteutustapaa. Edellisessä integroidaan laajoja teemoja, ja näin oppiaineiden väliset käsitteelliset, proseduraaliset ja epistemologiset eroavaisuudet jätetään huomioimatta. Jälkimmäisessä toteutustavassa integrointi toteutetaan eri oppiaineita yhdistäen, ei kokonaan sulauttaen, jolloin eri tieteenalojen omat katsontakannat säilyvät ja silti oppilasta voidaan ohjata eri alojen yhteyksien ymmärtämiseen (Lederman ja Niess 1997, 57–59; Aaltonen 2003, 50). Ingram (1979, 28) nimeää nämä integrointityypit kvalitatiiviseksi ja kvantitatiiviseksi.

Integroinnin käytännön toteutuksessa on useita eri mahdollisuuksia. Esimerkiksi Ingram (1979, 27) toteaa, että hänen esittämänsä jaottelun kaikki variaatiot ovat mahdollisia. Tässä tutkimuksessa oppiaineiden integroinnissa tukeuduin Davisonin ja Millerin (1995, 226–230) jaotteluun, koska se soveltui mielestäni parhaiten valitsemieni oppiaineiden integrointiin. Davison ja Miller esittävät opetussuunnitelman mukaisten oppiaineiden väliseen integrointiin viittä mallia:

Ensimmäisenä mallina he esittelevät oppiaineiden erityisalojen integroimisen *(Discipline Specific Integration)*. Sillä tarkoitetaan toimia, joilla oppiaineen erillisiä alueita yhdistetään toisiin oppiaineisiin: esimerkiksi matematiikasta valitaan algebra ja geometria, jotka yhdistetään biologiaan, kemiaan ja fysiikkaan. Tavoitteena on ohjata oppilaita näkemään eri oppiaineiden välisiä yhteyksiä, mutta keskeiset käsitteet, taidot ja menettelytavat opetetaan kussakin aineessa oppiainekohtaisesti omilla tunneilla.

Toisena integrointimuotona on sisältökohtainen integroiminen *(Content Specific Integration)*. Tässä tavassa opetussuunnitelmasta valitaan yhdistettäväksi eri oppiaineiden tavoitteita. Samanaikaisesti tutkitaan oppiaineiden välisiä yhteyksiä. Esimerkkinä sisältökohtaisesta integroinnista Davison ja Miller mainitsevat esihistoriallisten eläinten ääriviivojen merkitsemisen oikeassa mittakaavassa maalarinteipillä voimistelusalin lattiaan niiden oppikirjan mukaisen käsittelyn yhteydessä. Sisältökohtaisessa integroimisessa on tavoitteena korostaa oppiaineen merkitystä ilmiön tutkimisessa. Oppiaineiden peruskäsitteiden opetus tapahtuu aineiden omilla tunneilla.

Prosessi-integroinnissa *(process integration)*, kolmannessa Davisonin ja Millerin integrointimallissa, oppilaat suorittavat minitutkimuksia, jotka liittyvät arkielämän ilmiöihin. Tavoitteena on ilmiöiden tutkimisen kautta yhdistää eri oppiaineita käyttämällä niiden menetelmiä ongelmien selvittämiseen. Oppilaat saavat valita pienissä ryhmissä heitä kiinnostavan aiheen. Sitten ryhmät suunnittelevat, kuinka he keräävät tiedot ja miten he käsittelevät tietoja. Lopuksi ryhmien on päätettävä, miten he tulkitsevat ja esittävät saamiaan tuloksia.

Neljäntenä mallina on metodologinen integrointi *(methodological integration)*, jonka perusajatus on, että tietyn oppiaineen parissa hyväksi koettuja opetusmenetelmiä käytetään apuna toisen aineen opetuksessa. Metodologinen integrointi keskittyy kokeellisiin menetelmiin. Oppilaat tutkivat valittuja aiheita integroitaviin aineisiin sopivilla strategioilla. Tällaisesta integroinnista esimerkkinä ovat opetustapahtumat, joissa matematiikan yhteydessä käytettyjä työkaluja sovelletaan muiden aineiden ongelmanratkaisussa ja vastaavasti luonnontieteellistä tutkivan oppimisen menetelmää käytetään matematiikan opettamisessa.

Viidentenä oppiaineiden välisenä integrointimallina Davison ja Miller esittelevät teemojen integroimisen *(thematic integration)*. Tällöin valitaan kerrallaan yksi teema, (esim. öljykatastrofi), johon voidaan yhdistää kaikki opetussuunnitelman oppiaineet. Valittu teema toimii oppiaineita yhdistävänä tekijänä, jonka aihepiirissä toimitaan kaikkien oppiaineiden tunneilla. (Davison ja Millerin 1995, 226–230.)

Tutkimukseni opetuskokeilussa käytin Davisonin ja Millerin kaikkia malleja: *Oppiaineen erityisalojen integroimista* toteutettiin yhdistettäessä matemaattista ongelmanratkaisua ja geometriaa muihin oppiaineisiin. Esimerkiksi valmistettavasta laivasta laadittiin mittakaavapiirrokset kuvataiteen tunnilla. *Sisältökohtainen integroiminen* toteutui esimerkiksi silloin, kun äidinkielen ja kirjallisuuden tavoitteisiin kuuluvaa luetun ymmärtämistä harjoiteltiin sanallisten ongelmatehtävien avulla. *Prosessi-integroiminen* tuli esiin käsityön tunneilla toteutetun laivanrakennusprojektin loppuvaiheessa, kun oppilaat selvittivät ympäristö- ja luonnontieteen tunneilla syitä laivojensa kellumiseen ja Arkhimedeen lakiin. *Metodologinen integroiminen* toteutui lähestulkoon koko ongelmanratkaisukurssin ajan, sillä opetusmenetelmänä käytettiin pääsääntöisesti ongelmakeskeistä opetusta ja tutkivan oppimisen avulla pyrittiin havainnollistamaan matemaattisia käsitteitä ja totuuksia. Koska pyrin opetuskokeiluni teeman eli matemaattisen ongelmanratkaisun avulla yhdistämään integroitavat oppiaineet, toteutui myös Davisonin ja Millerin esittelemä malli *teemojen integroimisesta*.

Davison ja Miller (1995, 229–230) toteavat, että olennainen näkökulma integrointiin saadaan, kun sitä lähestytään tieteellisenä ja järjestelmällisenä prosessina kiinnittämättä liikaa huomiota eri oppiaineiden sisältöihin. Ongelmanratkaisukurssin ja sen toteutuksen olikin tarkoitus olla prosessi, kuten tutkimusmenetelmänä käytetyn kehittämistutkimuksen *(design research,* Edelson 2002) tavoitteena on. Tätä menetelmää esittelen tarkemmin luvussa 9.1.1.

6.3 Opetuksen integroinnin haasteet ja hyödyt

Integrointi on aina ollut muodikas puheenaihe yleisissä opetuskeskusteluissa ja koulutuksen kehittämisessä. Kuitenkin integroidun opetuksen positiivisista tai negatiivisista vaikutuksista oppimiseen on olemassa vain vähän empiirisiä tutkimustuloksia (Meier, Cobbs & Nicol 1998, 439; Pang & Good 2000, 73). Opettajien laatimissa kokeiluraporteissa on yleensä korostettu integroinnin etuja ja positiivisia puolia. Raporteissa on pyritty enemmänkin vakuuttamaan kokeilujen käyttökelpoisuutta toiminnan kuvauksilla kuin osoittamaan käytänteet toimiviksi tieteellisellä tutkimuksella (Aaltonen 2003, 49). Juuri tämä on osaltaan johtanut yleiseen käsitykseen, että kaikkea voi ja kannattaa integroida. Jo 1980-luvun lopulla Lehtinen (1989, 29) varotteli liian positiivisesta suhtautumisesta integrointiin. Hän piti perusteettomana uskotteluna sitä, että pelkkien elämänläheisten teemojen varassa tapahtuvalla integroinnilla voitaisiin oleellisesti syventää oppilaille muodostuvia tiedon ja toiminnan rakenteita. Lehtisen mukaan koko käsityksessä tietämisessä olisi tapahduttava muutos. Hän painotti kouluopetuksen integroinnissa tiedonkäsityksen ja oppimisprosessin perusteellista pohdintaa.

Hytösen (1998) mukaan toteutettujen integrointikokeilujen tutkimusmetodien kriittinen tarkastelu on ongelmallista, koska raportit eivät täytä tieteellisen julkaisun kriteerejä. Niiden sisältönä ovat lähinnä opettajien kuvaukset siitä, mitä oppilaiden kanssa on tehty ja miten kokeilu on opettajan oman arvion mukaan sujunut. Tiedonhankintamenetelmiä ei esitellä eikä niillä saatuja tuloksia analysoida tai dokumentoida (mts. 136). Berlin ja Lee (2005, 23) toteavat matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian opetuksen integrointia käsittelevässä historiikkiartikkelissaan, että vaikka ohjeita ja teoreettisia integrointimalleja sisältävää kirjallisuutta onkin julkaistu vuosien 1990–2001 aikana runsaasti, tulevaisuudessa tarvittaisiin enemmän integroinnin empiiristä tutkimusta.

Teknologiakasvatuksen piirissä on kritiikkiin pyritty vastaamaan. Esimerkiksi Yhdysvalloissa, Pohjois-Carolinan yliopistossa käynnistettiin laajamittainen tutkimusprojekti TECH-know, jonka tavoitteena on selvittää, millaisia mahdollisuuksia opettajilla olisi parantaa oppilaiden oppimista matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian opetuksen integroinnin avulla. Jo tutkimuksen pilottivaiheeseen osallistui 144 opettajaa ja yli 3000 oppilasta. (Ernst, Taylor & Peterson 2005, 15–17.)

Mikä aiheuttaa ongelmia oppiaineiden integroinnille?
Yleisimpänä syynä pidetään opettajien aikapulaa (Lehman & McDonald 1988, 647–648). Integroinnin suunnittelu vaatii aikaa varsinkin jos integrointi toteute-

taan yhteistyössä muiden opettajien kanssa. Opettajien asenteet opetuksen integrointia kohtaan ovat olleet este integroidulle matematiikan ja luonnontieteiden opetukselle (Meier ym. 1998, 442) ja suunnitelmien toteuttaminen käytännössä on osoittautunut vaikeaksi. Esimerkiksi Lehmanin ja McDonaldin (1988; 1994) tutkimuksissa havaittiin peruskoulussa ja lukiossa luonnontieteen ja matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden integrointia koskevien käsitysten ja uskomusten olevan ristiriidassa heidän todellisen toimintansa kanssa. Vaikka luonnontieteiden opettajat eivät oikein edes tienneet integrointiin tarkoitetun opetusmateriaalin olemassaolosta, he silti kertoivat integroivansa opetustaan. Matematiikan opettajista vain alle puolet toteutti integrointia työssään, vaikka he kaikki pitivät integrointia tarpeellisena ja tarkoituksenmukaisena. Matematiikan opettajat olivat epävarmoja omasta osaamisestaan luonnontieteissä, ja he olivat myös huolissaan integrointiin ja opetukseen käytettävissä olevan ajan riittävyydestä. Vastaavanlaisia tutkimuksia ei ole Suomessa tehty ainakaan toistaiseksi, mutta tilanne lienee samansuuntainen.

Opetuksen integrointi vaikuttaisi olevan luokanopettajilla vaivattomammin ja laajemmin toteutettavissa kuin aineenopettajilla. Luokanopettajat opettavat useita oppiaineita, ja he ovat saaneet koulutuksen niiden opettamiseen. Näin ollen he eivät ole niin riippuvaisia yhteistyöstä toisten opettajien kanssa kuin aineenopettajat.

Mitä edellytyksiä tarvitaan integroimisen onnistumiseksi?

Esimerkiksi Huntley (1999, 57–68) pitää huolellisen suunnittelun lisäksi luonnontieteiden ja matematiikan integroimisen edellytyksenä sitä, että opettajalla on hyvä ymmärtämys integroitavista oppiaineista. Tätä päätelmää voidaan laajentaa varmasti kaikkiin integroitaviin oppiaineisiin. Aaltosen (2003, 57) mukaan integroitujen tuntien tehokkuus riippuu opettajan sisältötiedosta: jollei opettajalla ole riittävää sisältöosaamista oppiaineesta, hän ei pysty näkemään riittävän syvällisiä aineiden välisiä yhteyksiä ja hän menettää arvokkaita integrointimahdollisuuksia.

Tästä näkökulmasta katsoen aineenopettajilla on paremmat edellytykset integrointiin kuin luokanopettajilla, sillä heidän koulutuksensa oppiaineestaan on syvällisempää kuin luokanopettajilla. Kokeilemisen arvoinen ajatus olisikin yhdistää opettajien vahvuudet siten, että integrointi suunniteltaisiin ja toteutettaisiin yhteistyössä aineen- ja luokanopettajien kesken.

Mitä hyötyä on opetuksen integroinnista?

Opetuksen integrointi on moniulotteinen prosessi, joka vaatii onnistuakseen huolellista suunnittelua ja integroitavien aineiden oppisisältöihin perehtymistä. Onkin aiheellista kysyä miten integrointi hyödyttää oppilasta ja opettajaa. Sovelius–Sovio (1992, 33–34) erittelee teoriassaan integroinnin eduiksi mm. seuraavia näkökohtia:

– Integrointi auttaa oppilasta suhteuttamaan tiedot laajempaan kokonaisuuteen, mikä on käytännössä vaikeampaa toteuttaa ainejakoisessa opetuksessa.
– Opetuskokonaisuudet etenevät johdonmukaisesti ja keskitetysti.

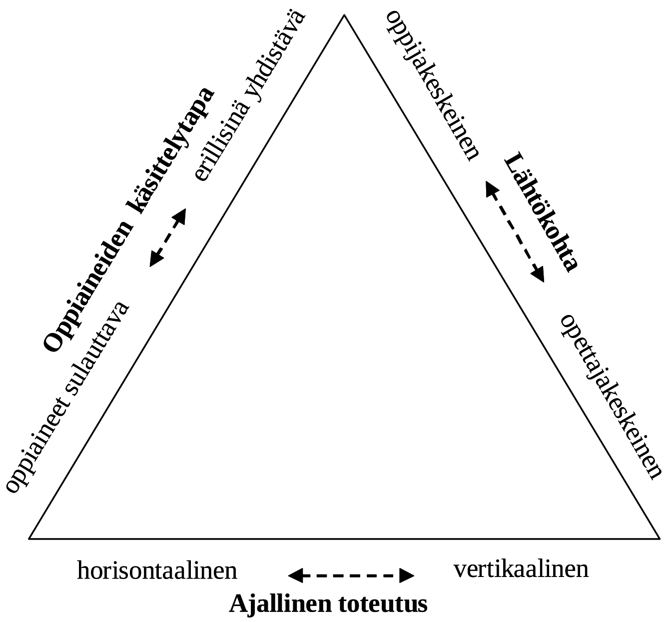
- Integrointi lisää uusien menetelmien käyttöä ja herättää tarpeen niiden ja opetussuunnitelman kehittelyyn.
- Integrointi johdattaa suunnitelmalliseen opettamiseen ja syventymään syvällisesti oppiainekseen.
- Integrointi auttaa vapautumaan opettajakeskeisestä opetustavasta.
- Opettaja paneutuu syvällisesti oppilaiden kokonaiskehitykseen.
- Integrointi lisää luovia kontakteja opettajien välille, mikä merkitsee myös opetusvoimien järkevämpää käyttöä.
- Integrointi ohjaa oppilaita asioiden monipuoliseen tarkasteluun ja näkemään kokonaisuuksia sekä tekemään yleistyksiä, koska etsitään samankaltaisuuksia ja syntetisoidaan.
- Integrointi luo edellytyksiä sosiaalisen opintoilmaston syntymiselle.

Lehtisen (1989, 14) tutkimustulokset osoittavat, että ainejakoinen kouluopetus suosii oppilaita, jotka automatisoivat mahdollisimman nopeasti mekaanisia, mutta puutteelliseen ymmärrykseen perustuvia suorituksia. Hänen mukaansa eräissä tapauksissa oppilaiden pyrkimykset ottaa selvää, mitä jotkin asiat todella tarkoittavat, ovat nopearytmisesti etenevän koulutyön kannalta jopa haitallisia. Oppiainerajat ylittävä integrointi helpottaisi tätä ongelmaa, sillä se tarjoaisi enemmän aikaa aihekokonaisuuksien opetukseen tuoden siihen oppiainekohtaisia näkökulmia. Tämä antaisi paremmat mahdollisuudet oppilaan ymmärrystä tukevaan syvällisempään oppimiseen.

Beane (1995, 617–618) samoin kuin Pang & Good (2000, 75) ilmoittavat artikkeleissaan matematiikan ja luonnontieteiden integroinnin perussyyksi tärkeän näkökohdan, joka soveltuu myös muiden aineiden integroinnin tavoitteeksi: matematiikka ja luonnontieteet pitäisi yhdistää arkielämän tilanteisiin niin, että oppilaat oppisivat ja ymmärtäisivät, kuinka aineet yhdessä käytettyinä ratkaisevat aitoja ongelmia.

6.4 Opetuksen integroinnin painopistekolmio

Kuvioon 15 olen koonnut edellä esittelemäni näkökulmat, joiden avulla olen rajannut ja lähestynyt tutkimuksessani käyttämääni opetuksen integrointia. Nämä kolme näkökulmaa integroinnista eli ajallinen toteutus, lähtökohta ja oppiaineiden käsittelytapa muodostivat kolmikannan, jonka avulla opetuksen integrointia voidaan suunnitella ja valita sille haluttuja painotusalueita. Konkreettisesti tämä voidaan tehdä asettamalla painopisteet kullekin näkökulma-akselille (kuvio 15). Samalla voidaan muodostaa malli sille, mihin osa-alueisiin toteutetun opetuksen integrointi asemoituu suunnittelu- ja toteutusvaiheissa. Nimeän tämän kehittämäni mallin *opetuksen integroinnin painopistekolmioksi*. Kolmiota voidaan käyttää apuna integroinnin suunnittelun ja toteutuksen karkeassa vertailussa. Huomattakoon, ettei opetuksen integroinnin painopistekolmion avulla ole tarkoitus sanoa, mikä olisi hyvä tai huono painotusmalli, vaan paremmuus riippuu täysin integroitavasta aiheesta. Integroitavan opetuksen painotusalueet on siis syytä määritellä aina tapauskohtaisesti.



KUVIO 15 Opetuksen integroinnin painopistekolmio

Kuvion 15 mukaisten näkökulmien jaottelu (esim. horisontaalinen – vertikaalinen) ei tarkoita sitä, että ne esiintyisivät toisensa poissulkevina, vaan niiden avulla voidaan määritellä opetuksen integroinnin painopistealueita integroitavan oppiaineksen tavoitteiden suuntaisesti. Luvussa 10.4.2 esittelen, millainen painopistekolmio tässä tutkimuksessa muodostui.

6.5 Opetuksen integroinnin toteuttaminen

Tässä luvussa esittelen niitä periaatteita, joiden mukaan opetuksen integrointi suunniteltiin ja toteutettiin tutkimuksessani. Koska integrointi toteutettiin kouluympäristössä, rajaan oppiainekohtaiset esittelyt ja integrointiperustelut ensisijaisesti valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 2004) esitettyihin näkökohtiin.

6.5.1 Integroitavien oppiaineiden valintaperusteet

Tutkimuksessa integroitujen oppiaineiden valinnassa huomioitiin koeryhmän koulutyöhön liittyvät käytännön tekijät (lukujärjestys, vuodenaika, koulun välineistö ja tilat). Matematiikan valinta oli jo tutkimuksen aiheen kannalta itsestäänselvyys. Ympäristö- ja luonnontieto matemaattis-luonnontieteellisenä ja ongelmanratkaisulle lukuisia mahdollisuuksia tarjoavana oppiaineena oli niin ikään luonteva valinta. Tutkimuskirjallisuudessa korostunut luku- ja kirjoitustaitojen yhteys matemaattisten taitojen kehittymiseen (esim. Morgan 1998; 2001; Pugalee 2004; 2005) puolsivat äidinkielen ja kirjallisuuden valintaa integroitavaksi aineeksi. Apupiirrokset ovat kuuluneet perinteisesti matematiikan koulutehtävien ratkaisuun, ja siksi kuvataiteen havainnollistamiskeinot oli järkevä liittää ongelmanratkaisun opetukseen. Oppilaiden iästä johtuen opetettavien asioiden konkretisoinnin tarve oli merkittävä. Käsityö oppiaineena ja käsityötilat oppimisympäristönä antoivat matemaattisten käsitteiden konkretisointiin kunnolliset lähtökohdat.

Valitut aineet soveltuivat myös luvussa 6.2.3 esitettyjen Davisonin ja Millerin (1995) esittämiin oppiaineiden integroinnin malleihin. Seuraavaksi esittelen pääasiassa opetushallituksen opetussuunnitelman perusteisiin liittyviä näkökohtia, joiden perusteella integroin valitsemiani oppiaineita ongelmanratkaisuun.

Matematiikan ja ongelmanratkaisun integrointi

Ongelmanratkaisu on useiden matematiikan oppimisen tutkijoiden mielestä koko matematiikan ydin (esim. Polya 1948, Schoenfeld 1985; 1992; 1994; Stanic & Kilpatric 1988). Opetushallituksen laatiman perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan (Opetushallitus 2004, 158) matematiikan opetuksen tulee mm. kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua ja ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2003, 118) korostetaan ongelmanratkaisua seuraavasti: ”Opiskelijaa myös kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin”.

Matematiikka ja ongelmanratkaisu liittyvät kiinteästi toisiinsa, eikä niitä tarvitse erityisesti integroida, vaan voimme painottaa ongelmanratkaisun korostamista matematiikassa. Lähestulkoon kaikki koulussa esitetyt matematiikan tehtävät sisältävät ongelmanratkaisua ja siksi tämän tutkimuksen yhteydessä on järkevää puhua *matemaattisesta ongelmanratkaisusta*. Onko tehtävä ratkaisijalle ongelma vai rutiinitehtävä, riippuu ratkaisijan matemaattisesta tasosta: hänen hallitsemistaan matemaattisista tiedoista ja taidoista.

Matemaattisen ongelmanratkaisun ja ympäristö- ja luonnontiedon integrointi

Ympäristö- ja luonnontieto määritellään biologian, maantiedon, fysiikan, kemian ja terveystiedon tiedon aloista koostuvaksi integroiduksi aineryhmäksi, jonka opetukseen sisältyy kestävän kehityksen näkökulma. Opetus tukeutuu *tutkivaan ja ongelmakeskeiseen* lähestymistapaan, jossa lähtökohtana ovat oppilaan ympäristöön ja oppilaaseen itseensä liittyvät asiat, ilmiöt, taidot ja kokemukset. (Opetushallitus 2004, 168.) Ympäristö- ja luonnontieto soveltuukin mitä parhaiten integroitavaksi matemaattisen ongelmanratkaisun opettamiseen. Ahtee (1994, 54) toteaa, että luonnontieteiden opetuksen tärkeänä tehtävänä on saada oppilaat omaksumaan luonnontieteellinen ajattelutapa, jonka avulla he oppisivat ottamaan huomioon realiteetit ajattelussaan ja toiminnassaan. Ongelmanratkaisukurssilla käsiteltiin luonnontieteiden piiriin liittyviä ilmiöitä ja luonnon lakeja (esim. Arkhimedeen laki) kokeellisesti ja ongelmakeskeisesti.

Luonnontieteissä oppilaiden tavoitteena on myös oppia soveltamaan yleisiä periaatteita ja teorioita käytäntöön tarkastellen niiden pätevyyttä kriittisesti tosiasioiden valossa (Ahtee, 1994, 54). Ongelmanratkaisukurssilla oppilaat esimerkiksi mittasivat keskinopeutta käsittelevällä tunnilla (ks. luku 10.3.1; tunti

25) aikaa itse kulkemaltaan matkalta ja laskivat kaavan avulla keskinopeutensa. Samoin he pohtivat aidossa tilanteessa, miksi käsityönä valmistettu laiva kelluu. Tällä tavoin Ahteen (1994, 59) korostamat luonnontieteiden oppimisen keskeiset tavoitteet eli kokeellisuus ja sosiaalinen vuorovaikutus toteutuivat opetuksen integroinnissa.

Matemaattisen ongelmanratkaisun integrointi kuvataiteeseen

"Matemaatikko ei tutki puhdasta matematiikkaa siksi, että se on hyödyllistä. Hän tutkii sitä siksi, että hän nauttii siitä, ja hän nauttii siitä, koska se on kaunista."
– Henri Poincaré –

Matemaattisten tehtävien konkretisointi ja havainnointi piirroksin ja kuvioin on kuulunut matematiikkaan kautta vuosisatojen. Matematiikan osa-alueista geometria tarjoaakin ehkä selkeimmin matemaattisia elämyksiä ja esteettisiä sovelluksia ympäröivästä maailmastamme. Kuvataiteen opetuksen tavoitteena on kehittää mielikuvitusta ja edistää oppilaiden luovan ongelmanratkaisun ja tutkivan oppimisen taitoja. Aihepiirit kytketään oppilaalle merkityksellisiin kokemuksiin. (Opetushallitus 2004, 234.)

Ongelmanratkaisukurssilla korostettiin ongelmanratkaisuprosessin kuvallista ilmaisua apupiirroksien avulla. Ratkaisukartta-menetelmän yksi vaihe oli juuri tehtävän kuvaaminen ja havainnollistaminen visuaalisin keinoin. Kuvataiteen tunnilla (ks. luku 10.3.1; tunti 5) oppilaat valmistivat kolmion muotoisen palapelin, jonka matemaattisena tehtävänä oli kolmion kulmien summan säännön konkretisointi käytännössä. Samoin kuvataiteen tunneilla harjoiteltiin teknisen piirtämisen sääntöjä, valmistettavan esineen kuvaamista eri suunnista ja mittakaavaan piirtämistä.

Matemaattisen ongelmanratkaisun integrointi käsityöhön

"Käsityön opetuksen tehtävänä on ohjata oppilasta suunnitelmalliseen, pitkäjänteiseen ja itsenäiseen työntekoon, kehittää luovuutta, esteettisiä, teknisiä ja psyykkis-motorisia kykyjä, ongelmanratkaisutaitoja sekä ymmärrystä teknologian arkipäivän ilmiöistä" (Opetushallitus 2004, 242). Ongelmanratkaisun suhdetta käsityöhön ja siihen kuuluvaan teknologiaan havainnollistaa Parikan ja Rasisen (1994, 18) toteamus, että ongelmanratkaisu on teknologian keskeinen käsite.

Yhdysvalloissa on määritelty teknologiakasvatuksen sisällöt luokille 0-12 mittavassa teoksessa Standards for technological literacy: Content for the study of technology (International Technology Education Association = ITEA, 2000). Näiden standardien mukaista teknologiakasvatusta käsityön opetuksen yhteyteen on sovellettu ja kehitetty myös Suomessa (esim. Kantola 1997; Parikka 1998; Rasinen 2000). Teknologian perusta on ongelmanratkaisu, sillä teknologia sisältää monia ongelmia ja tapoja ratkaista ongelmat. Näitä keinoja teknologian piirissä ovat esimerkiksi vianetsintä, tutkimus- ja kehitystyö, keksiminen ja kokeileminen. (ITEA 2000, 90.) Oppimistutkimukset tukevat edelleenkin käsitystä, että useimmat oppilaat oppivat paremmin kokeilemalla ja tekemällä kuin ainoastaan kuulemalla tai näkemällä. Teknologiaopinnoissa painotetaan juuri tämänkaltaista aktiivista oppimista. Oppilaille opetetaan esimerkiksi käytännön ongelmanratkaisutaitoja ja oppilaat työskentelevät erilaisten todellisten ongelmien parissa. (ITEA 2000, 5–6.) Sellaisen käsityön toteuttaminen, jota ei valmisteta suoraan mallista, aloitetaan suunnittelemalla. Tuotesuunnittelua pidetään keskeisenä erityisesti teknologisen kehitystyön ongelmanratkaisuprosessissa; se on yhtä olennaista teknologialle kuin lukutaito kielen opiskelussa (ITEA 2000, 90).

Koska käsityön osa-alueen, teknologiakasvatuksen, perusta on ongelmanratkaisu, matemaattisen ongelmanratkaisun integroiminen käsityöhön on luontevaa ja jopa siihen kuuluvaa. Myös tuotesuunnittelu ja keksiminen ovat prosesseja, joissa tarvitaan ongelmanratkaisutaitoja. Esineen valmistusprosessi teknisen työn tunnilla sisältää lukuisia ongelmatilanteita ja tarjoaa erinomaisen tilaisuuden matemaattisten ja fysikaalisten kaavojen konkretisointiin.

Matemaattisen ongelmanratkaisun integrointi äidinkieleen ja kirjallisuuteen

Vygotsky (1982) kuvailee kielen ja ajattelun suhdetta toisiinsa. Hänen mukaansa kielen ja ajattelun kehittymisessä on esiälyllinen ja esikielellinen vaihe, jolloin ne kehittyvät tosistaan riippumatta. Esimerkiksi pienen lapsen ääntely on kielenkehityksen vaihe, mutta sillä ei ole mitään yhteistä ajattelun kehityksen kanssa. Tietyssä vaiheessa kielen ja ajattelun kehityslinjat kuitenkin kohtaavat ja *"kielestä tulee älyllinen ja ajattelusta kielellinen"*. (Vygotsky 1982, 92–94.) Vygotskyn näkemyksen perusteella kieli ja ajattelu yhdistyvät toisiinsa jo kouluikäisillä niin, ettei niitä voida enää erottaa.

Kommunikointitaidot ovat yleisesti tärkeitä minkä tahansa oppiaineksen oppimisessa. Suullinen ja kirjallinen kommunikointitaito ovat keskeisiä niin ikään matemaattisen ongelmanratkaisun oppimisessa. Erityisesti peruskoulussa matematiikan oppimisessa on tärkeää matematiikan verbalisointi eli kielentäminen. Sillä tarkoitetaan oppilaan kykyä puhua matematiikkaa ja kirjoittaa matematiikasta (Joutsenlahti 2003b, 7–10, Ilmavirta 2003, 23–25). Oppilaan matemaattinen ajattelu ja sen ilmentäminen vaativat työkalukseen äidinkieltä. Joutsenlahden (2003b, 11) mukaan tie matematiikan käsitteistöön käy koulussa äidinkielen kautta, ja näin ollen kieli on vahvasti mukana oppilaan kognitiivisessa kehitysprosessissa. Kieli sisältää puhutun ja kirjoitetun kielen lisäksi kuvat, ilmeet, eleet sekä mm. matematiikan symbolikielen (Joutsenlahti, 2003a).

Opetushallituksen laatiman perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan (2004, 49–50) vuosiluokkien 3–5 äidinkielen ja kirjallisuuden keskeisinä sisältöinä tekstinymmärtämisessä ovat mm.

- Keskittyvän ja ymmärtävän kuuntelun harjoittelua
- Silmäilevä, etsivä, sana- ja asiatarkka sekä päättelevä lukeminen
- Tekstien sisällön ja rakenteen ennustaminen kuvien, otsikon ja aikaisempien lukukokemusten ja ennakkotietojen perusteella
- Pääasioiden erottaminen sivuasioista, tiivistäminen, väliotsikointi, kysymysten esittäminen, muistiinpanojen tekeminen, päätelmien teko sekä luetun ja kuullun arviointi
- Ajatuskarttojen laatiminen, tekstin ajatusten pohdinta ja tekstien vertaaminen

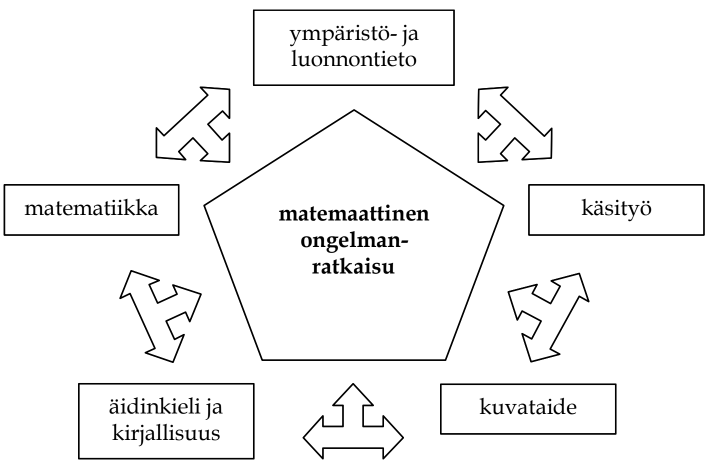
Edellä esitetyissä sisällöissä on runsaasti yhtymäkohtia toteuttamaani ongelmanratkaisun opetukseen. Suulliset ja sanalliset tehtävät, joihin sisältyy luetun ymmärtämistä ja päättelyä, mahdollistavat niin äidinkielen ja kirjallisuuden kuin matemaattisen ongelmanratkaisunkin keskeisten sisältöjen harjoittelun. Ongelmanratkaisukurssin tavoitteet olivat samansuuntaiset kuin 9. luokan päättöarvioinnin kriteereissä, sillä niissä arvosanan 8 edellytyksenä on, että oppilaan vuorovaikutustaidot ovat kehittyneet siten, että hän *osoittaa päättelevän ja arvioivan kuuntelemisen taitoa; osaa ottaa ideointi- ja ongelmanratkaisukeskusteluissa sekä muissa ryhmäviestintätilanteissa puheenvuoron ja esittää ehdotuksen, kannanoton, kysymyksen, lisätietoja ja perusteluja* (mts. 55–56).

Schiro (1997, 10–13) esittelee matematiikan ja kirjallisuuden integroimisen hyötyjä opetuksessa. Hänen mukaansa kirjallisuuden yhdistäminen matematiikan opetukseen 1) auttaa lapsia oppimaan matemaattisia käsitteitä ja taitoja, 2) tuo lapselle mielekkään kontekstin matematiikan opiskeluun, 3) helpottaa lasten kehittymistä ja matemaattisen kielen käyttöä sekä kommunikointia, 4) auttaa lapsia oppiminaan matemaattista ongelmanratkaisua, perustelua ja ajattelua, 5) mahdollistaa lapselle monipuolisen kuvan muodostumisen matematiikan luonteesta, 6) antaa tilaisuuden lapselle parantaa asenteitaan matematiikkaa kohtaan sekä 7) auttaa lapsia integroimaan matematiikkaa ja kirjallisuutta opiskelussa.

Äidinkielen suullisen ja kirjallisen taidon harjaantumista on tutkinut mm. Pugalee (2004, 27–47). Tutkimus käsittelee 9.-luokkalaisten algebran opiskelijoiden kirjoitettua ja verbaalista kuvausta matemaattisesta ongelmanratkaisuprosessista. Pugaleen mukaan sekä suullinen että verbaalinen kuvaus tarjosivat työkalun oppilaiden ajatusprosessien ymmärtämiseen.

6.5.2 Integroitavien oppiaineiden käsittely ongelmanratkaisukurssilla

Tutkimusta varten opetuksen integrointi pyrittiin suunnittelemaan siten, että matematiikan, äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon integrointi todellakin palvelisi oppilaan oppimista ja tutkimuksen tavoitetta, matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittymistä (kuvio 16).



KUVIO 16 Tutkimuksessa ongelmanratkaisun opetukseen integroidut oppiaineet

Toki muutkin oppiaineet olisivat tarjonneet erinomaisia mahdollisuuksia integroituun opetukseen, mutta käytännön seikat (talvinen vuodenaika yms.) aiheuttivat rajauksen edellä esittelemiini aiheisiin. Esimerkiksi liikunnassa toteutettu suunnistusjakso ja matemaattinen ongelmanratkaisu olisivat tarjonneet loistavia mittakaava- ja reitinvalintaongelmia, joiden avulla olisi ollut mielenkiintoista kokeilla ongelmanratkaisutaitojen opettamista ja oppimista.

Integroinnin suunnittelua ja toteutusta ohjaavina periaatteina käytin tutkimuksessani Aaltosen (2003, 56) väitöskirjassaan esittämää viittä kysymystä, jotka hän oli koonnut integroinnin toteutusta kuvaileviksi kriteereiksi. Esittelen seuraavassa tiivistetyt vastaukset näihin kysymyksiin:

1) Kuinka monta oppiainetta integroituun opetukseen sisällytetään?
Integroitavia oppiaineita on viisi: matematiikka, äidinkieli ja kirjallisuus, käsityö, kuvataide sekä ympäristö- ja luonnontieto (kuvio 16).

2) Miten integroinnissa säilytetään, hävitetään tai jätetään huomiotta eri oppiaineiden rajat?
Oppiainerajat säilytetään osittain Davisonin ja Millerin (1995, 226–230) jaotteluun tukeutuen. Opetuksen yhteisenä teemana on matemaattinen ongelmanratkaisu, jota pyritään käsittelemään kunkin oppiaineen omien aihepiirien ja työtapojen puitteissa.

3) Miten integrointi suunnitellaan?
Integrointi suunnitellaan käytössä olevan opetussuunnitelman mukaan oppiaineiden tavoitteiden ja sisältöjen uudelleenjärjestelynä siten, että se tukisi mahdollisimman hyvin matemaattisen ongelmanratkaisun opetusta.

4) Miten syvällisesti ja missä laajuudessa integrointi tapahtuu?
Ongelmanratkaisukurssiin liittyvät sisällöt eri oppiaineista pyritään opettamaan integroidusti siten, että oppilaalle muodostuisi käsitys matemaattisen ongelmanratkaisun hyödyllisyydestä, sen liittymisestä kyseisiin oppiaineisiin ja oppilaan lähiympäristöön (esim. sanalliset tehtävät äidinkielen ja kirjallisuuden tunneilla, Arkhimedeen laki ympäristö- ja luonnontiedon tunneilla, mittakaavapiirustusten hyödyllisyys vapaa-ajan töissä).

5) Miten integrointi toteutetaan?
Integrointi tapahtuu sisällöllisesti siten, että oppiaineista valittiin opetettaviksi ongelmanratkaisukurssiin liittyvät aihepiirit. Keskeisenä tavoitteena on liittää matemaattinen ongelmanratkaisu eri oppiaineisiin.

Tutkimuksessa integroitiin kuvataiteen, käsityön, äidinkielen ja kirjallisuuden, ympäristötiedon ja matematiikan oppisisältöjä matemaattiseksi ongelmanratkaisukurssiksi, joten käytännön toteutuksessa painotettiin siis horisontaalista integrointia. Koska matemaattisen ongelmanratkaisukurssin tarkoituksena oli tukea ja seurata oppilaiden oppimista ja kehittymistä, oli integroinnin oltava myös vertikaalista. Ongelmanratkaisun oli sovittava koeryhmän oppilaiden opetussuunnitelmaan ja tuettava heidän oppimistaan. Tavoitteena oli, että toisiinsa liittyvistä ongelmanratkaisukurssin tunneista muodostuisi oppilaiden mielessä integroituja tietokokonaisuuksia. Tosin integroimisen verikaalisuus rajoittui 1,5 kuukauden opetusjaksoon, joten opetuksen integrointi painottui tässä tutkimuksessa voimakkaammin horisontaaliseen kuin vertikaaliseen näkökulmaan.

Opetuksen suunnittelu aloitettiin opettajakeskeisesti, koska vastaavanlaista viiteen oppiaineeseen integroitua ongelmanratkaisunkurssia ei ole aikaisemmin toteutettu. Pilottikokeilujen (oppituntien ja tehtävien testaus sekä oppilaiden koehaastattelut) perusteella opetuksen integroinnin suunnittelun tavoitteena oli mahdollisimman oppijakeskeinen lähtökohta, johon pyrittiin havainnollistavan ja toiminnallisen opetuksen avulla.

Integroinnin suunnittelun ja toteutuksen avuksi kehitettiin opetuksen integroinnin painopistekolmio (ks. luku 6.4). Sen avulla arvioin luvussa 10.4.2 tässä tutkimuksessa toteutettua integrointia.

7 RATKAISUKARTTA

Edellisissä luvuissa esitetyt ongelmanratkaisumallit kuvaavat ongelmanratkaisuprosessia vaihe vaiheelta. Jos ratkaisuprosessi etenee kohti oikeaa vastausta, kuten yleensä oletetaan, vaihekaaviota on helppo noudattaa. Tehtävä ei olekaan enää ongelmanratkaisuprosessin lopussa ratkaisijalleen ongelma, vaan se muuttuu hänelle vähitellen rutiinitehtäväksi. Mikäli ratkaisija kykenee muistamaan ratkaisumallin ja osaa soveltaa sitä uudessa ongelmatilanteessa, on ongelmanratkaisusta ollut hänelle konkreettista hyötyä.

Opetustyötä tehneet tietävät sen tosiasian, että matematiikan opetus ei suju läheskään aina edellä mainittujen mallien mukaan. Opettajan arkea ovat tilanteet, joissa oppilas ei osaakaan ratkaista tehtävää sinnikkäästä yrityksestään huolimatta. Kuinka opettajan tulisi toimia tässä tilanteessa ja mitä oppilas voisi tehdä päästäkseen eteenpäin? Ajanpuutteen vuoksi tehtävän ratkaisusta on usein luovuttava. Opettaja voi kannustaa oppilasta yrittämään uudestaan ja antaa tehtävän kotitehtäväksi. Tällöin oppilas voi kokea, ettei opettaja opeta häntä. Toinen vaihtoehto on, että opettaja neuvoo oppilasta ja saattaa antaa tahtomattaan oppilaalle tehtävään sellaisen vihjeen, jonka avulla oppilas ratkaisee sen ilman omaa pohdintaa. Tällöin hyvä tehtävä menee ongelmanratkaisun kannalta hukkaan. Jos ongelmatilanne jatkuu ratkaisemattomana, oppilas tuntee epäonnistuneensa. Pahimmassa tapauksessa oppilaalle muodostuu käsitys omien matemaattisten taitojen heikkoudesta, mikä vaikuttaa oppilaan matematiikka-asenteeseen ja matematiikkapelon (*math anxiety*) syntymiseen (ks. Newstead 1998, 54; Huhtala 1999, 9).

Tässä luvussa esittelen tutkimusta varten kehittelemäni ratkaisukarttamenetelmän, jonka tavoitteena on osaltaan tuoda helpotusta edellä mainittuihin ongelmiin. Ratkaisukartta on oppilaille suunniteltu ongelmanratkaisustrategia, jonka perustana ovat aiemmin esitetyt ongelmanratkaisumallit ja -strategiat. Tutkimuksessa koeryhmän oppilaille tämä menetelmä opetettiin ongelmanratkaisukurssin alussa, ja sen avulla he pyrkivät ratkaisemaan matemaattisia ongelmatehtäviä.

7.1 Matematiikan kirjoittaminen

Matematiikan verbalisointi eli kielentäminen on noussut tärkeään rooliin matematiikan oppimisessa. Verbalisoinnilla tarkoitetaan oppilaan kykyä puhua ja kirjoittaa matematiikasta (Joutsenlahti 2003b, 7-10; Ilmavirta 2003, 23–25). Matematiikan integroimisella eri oppiaineisiin oli tässä tutkimuksessa tarkoitus lisätä oppilaiden mahdollisuuksia matematiikan verbalisointiin.

Kirjoittamisen merkitys matematiikan oppimisessa on jäänyt puhumisen ja kuuntelemisen varjoon, sillä suuri osa opettajista pitää matematiikan oppimisessa tärkeänä suullista kommunikointia. Puhe ja kuuntelu ovat toki ne ensisijaiset keinot, joilla oppilas kykenee osallistumaan matemaattiseen kommunikointiin: selittämään, kysymään, selventämään ajatuksiaan, kuuntelemaan muiden ajatuksia ja työskentelemään yhdessä toisten kanssa.

Loogisesti etenevää ajattelua – joka liittyy olennaisesti matematiikkaan – voidaan hahmottaa ja jäsentää myös kirjoittamalla. Kirjoittamiselle ja ongelmanratkaisulle on yhteistä, että ne ovat päämääräsuuntaisia kognitiivisia toimintoja, jotka toteutetaan tiettyjä menettelytapoja käyttäen. Molemmista voidaan erottaa kolme pääprosessia: suunnittelu, suunnitelmien ilmaiseminen kirjallisesti ja tarkistaminen. (Tynjälä, Mason & Lonka 2001, 9.) Kirjoittamisen hyödyllisyyttä matematiikan oppimisessa on tutkinut mm. Morgan (1998; 2001). Hänen mukaansa sekä kirjoittaminen että puhuminen tekevät näkyväksi oppilaan ajattelua, mutta kirjoittamisella on kuitenkin joitain käyttökelpoisia ominaisuuksia, joita puheella ei ole. Morgan (2001, 233–234) esittelee nämä ominaisuudet seuraavasti:

Kirjalliset tuotokset säilyvät. Oppilaan kirjallinen tuotos on käyttökelpoinen paitsi oppilaalle myös opettajalle. Kirjoitusprosessin aikana kirjoittaja voi palata kirjoituksessaan taaksepäin, tarkistaa ja korjata sekä luonnostella aikomuksensa uudestaan. Samoin opettajan on helppo havaita oppilaan ongelmakohdat ja suunnata ohjaustaan juuri niihin.

Kirjoittajan ei tarvitse olla lukijan/yleisön kanssa samassa tilassa. Kirjoittajalla on enemmän aikaa miettiä, selkeyttää ja kehittää ajatteluaan kuin puhujalla. Kirjoituksen täytyy olla täydellisempää ja tarkempaa kuin puheen, koska lukija ei voi tehdä tarkentavia kysymyksiä. Täydellisyys ja tarkkuus ovat erityisen tärkeitä matemaattisessa kommunikoinnissa ja matemaattisen ajattelun kehittämisessä.

Kirjoittaminen ja matematiikka ovat samanlaisia toimintoja. Kirjoittamisessa ja matematiikassa järjestetään ajatuksia ja luodaan suunnitelmia. Kirjoitusprosessi on samanlainen kuin matemaattinen ongelmanratkaisuprosessi: selkeyttä kehitetään rekursiivisesti ongelman luonteen ymmärtämisestä sen ratkaisuun.

Kirjoittaminen on siis apuväline ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseen, ja vastaavasti ongelmanratkaisun harjoittelu tukee oppilaan kirjoitustaitoja. Flowerin (1989, 2-3) mukaan taitavalla kirjoittajalla on oltava ongelmanratkaisutaitoja, kuten erilaisia kirjoitusstrategioita sekä suunnittelu- ja päätöksentekotaitoa. Samaa mieltä ovat myös Tynjälä, Mason ja Lonka (2001, 11), joiden mukaan taitavassa kirjoittamisessa on kysymys ongelmanratkaisustrategioiden hallinnasta. Flower (1989) esittelee yhdeksän vaihetta sisältävän kirjoittamisstrategian, joka muistuttaa ongelmanratkaisustrategioita: 1) tutki ja tarkastele kirjoitusaihetta/-ongelmaa, 2) tee suunnitelma, 3) tuo uusia ideoita, 4) jäsennä ideasi, 5) tiedosta lukijasi tarpeet, 6) muunna kirjoittajakeskeinen proosa lukijakeskeiseksi proosaksi, 7) tarkista kirjoituksesi ja tarkoituksesi, 8) testaa ja viimeistele kirjoituksesi ja 9) muokkaa kirjoitus yhtenäiseksi ja tarkista asiayhteydet.

Tutkimuksien avulla on osoitettu, että kirjoittamisen avulla on mahdollista edistää matemaattista ymmärtämistä (Sierpinska 1998; Morgan 1998; Brown 1997). Pugalee (2004) havaitsi, että kirjoittamisen ja ongelmanratkaisun yhdistämisellä on mahdollista edistää tehokkaasti oppilaan ymmärtämistä. Oppilaat, jotka kirjoittivat kuvauksensa ajattelustaan, olivat hänen tutkimuksessaan merkittävästi parempia ongelmanratkaisutehtävissä kuin ne oppilaat, jotka ilmaisivat ajattelunsa suullisesti.

Pugalee (2005, 39–40) esittää viisikymmentä tapaa harjoitella matematiikan kirjoittamista. Näitä ovat esimerkiksi listauksen laatiminen ongelman vaiheista tai ominaisuuksista, piirroksen tai taulukon tekeminen sekä sanallisen ongelmatehtävän laatiminen. Edellä mainittuja menetelmiä käytettiin tässä tutkimuksessa oppilaiden matematiikan kirjoittamisen aktivoimiseen. Kuitenkin pääasiassa matematiikan kirjoittamista harjoiteltiin ratkaisukartan laadinnan avulla. Esittelen ratkaisukartan luomista seuraavassa luvussa.

7.2 Kuinka ratkaisukartta luodaan?

Ongelmatehtävän ratkaistakseen oppilaan on löydettävä tehtävästä ratkaisun kannalta olennaiset tiedot. Hänen on hahmotettava ja ymmärrettävä tehtävä, jotta hän voi siirtyä varsinaiseen ratkaisuprosessiin. Lisäksi oppilaan on muistettava tehtävän tiedot ratkaisuprosessin aikana. Prosessi on vaativa ja oppilas tarvitsee siitä suoriutuakseen systemaattista opetusta ja ratkaisua auttavia menetelmiä. Yksi oppilasta auttava menetelmä on ratkaisukartta, joka edellyttää myös matematiikan kirjoittamista. Menetelmän toimivuutta testattiin tässä tutkimuksessa koeryhmän oppilailla.

Ratkaisukarttamenetelmän ajatuksena on, että oppilas oppisi kokoamaan ja kirjoittamaan ongelmatehtävästä muistiinpanot, joiden avulla tehtävä on mahdollista ratkaista. Ratkaisukartta sisältää 1) tehtävässä annetut tiedot, 2) mahdollisen apupiirroksen, 3) ratkaisuyritykset, myös virheelliset, ja toivottavasti myös 4) oikean ratkaisun (ks. myös Leppäaho 2004a, 80–83; 2005a, 108–109). Nimensä mukaisesti ratkaisukartta toimii siis opastajana ja oppilaan tukena, kun hän etsii reittiä ratkaisuun. Hän voi myös palata siihen tarkistaessaan ratkaisuyrityksensä vaiheita. Opettajalle oppilaan laatima ratkaisukartta paljastaa oppilaan ratkaisuprosessin. Ratkaisukartta toimii myös tutkimuksen tiedonhankintamenetelmänä. Ratkaisukartassa oppilaan ajattelun tuotokset eli representaatiot ovat nähtävissä paperilla, ja niiden avulla voidaan selvittää oppilaan tietojen havainnointia, ajatuksenkulkua ja ratkaisuyritysten monipuolisuutta.

Ratkaisukartta korostaa metakognitiivista ajattelua. Finkelin (1996, 345–368) mukaan metakognitiivisten tekniikoiden käyttö mahdollistaa oppilaalle matemaattisen ratkaisuprosessin kannalta kaksi hyvin tärkeää asiaa: 1) Ratkaisijalla on mahdollisuus seurata, mitä hän on ratkaisuyrityksessään tehnyt, joten hänen on myös helpompi suunnitella, mitä tehdään seuraavaksi. 2) Ratkaisijalla on myös tilaisuus yhdistää ongelmanratkaisuprosessi matemaattisiin sisältötietoihinsa ja menettelytapoihinsa.

Ajatus ratkaisukarttamenetelmästä muotoutui edellisissä luvuissa esittelemieni tutkimuksien pohjalta (Polya 1948; Mason 1982; Schoenfeld 1992; Verschaffel ym. 1999; Montague, Warger & Morgan 2000; Zawojewski & Carmona 2001; Hohn & Frey 2002). Niiden mukaan ongelmanratkaisumallin tai -strategian opettelu ja käyttö tukevat oppilaan ongelmanratkaisuprosessia ja harjoittavat oppilaan ongelmanratkaisukäyttäytymistä. Morganin (1998; 2001), Pugaleen (2004) ja Joutsenlahden (2003b) tutkimukset kirjoittamisen merkityksestä matematiikan oppimisessa osoittavat, että ratkaisukartan laatimisen harjoitteluun kannattaa uhrata opetusaikaa.

Tutkimuksessa koeluokan oppilaille opetettiin ratkaisukartan käyttöä. Oppilaille jaettiin jatkuvaan käyttöön A4 – kokoiset ratkaisuvihkot (ks. luku 7.3, kuvio 22), joihin he ratkaisivat kurssin aikana annettuja tehtäviä. Oppilaat saivat kuvioiden 17 ja 18 mukaiset ohjeet ratkaisukartan tekoa varten ja ohjeet, kuinka ongelmanratkaisutehtävään tulisi asennoitua (Leppäaho 2004b, 22).

On tärkeää, että opit tekemään ongelmatehtävästä paperille "kartan", joka sisältää:
1) *Tehtävässä annetut tiedot ja mahdollisen apupiirroksen*
2) *Ratkaisuyritykset (myös virheelliset!), joihin kirjoitat tarvittaessa mitä olet ajatellut*
3) *Ratkaisun*

KUVIO 17 Ohjeet ratkaisukartan laatimiseen (Leppäaho, 2004b, 22)

RATKAISUOHJEET

1) KESKITY!

2) OLE RAUHALLINEN! ÄLÄ HÄTÄILE!

3) TUTUSTU TEHTÄVÄÄN HYVIN
   a) *Lue se läpi 2-3 kertaa.*
   b) *Tarkista vielä mitä tehtävässä kysyttiin.*

4) ÄLÄ SÄIKÄHDÄ TEHTÄVÄÄ, SILLÄ SE ON TEHTY RATKAISTAVAKSI!

5) TEE TEHTÄVÄSTÄ RATKAISUKARTTA:
   a) *Kokoa tehtävässä annetut tiedot, sillä niiden avulla ongelma ratkeaa!*
   b) *Tee apupiirros, sillä se selvittää tehtävää!*

6) OLE SISUKAS! JOS TEHTÄVÄ EI RATKEA USEISTA YRITYKSISTÄSI HUOLIMATTA, JÄTÄ SE HAUTUMAAN JA PALAA SIIHEN MYÖHEMMIN. ÄLÄ ANNA PERIKSI!

7) RATKAISTUASI TEHTÄVÄN, KÄY SE LÄPI ALUSTA LOPPUUN.
   a) *Tarkistamalla heti löydät helposti mahdolliset virheet tehtävästäsi.*
   b) *Voit tarvita ratkaisuideaa myöhemmin. Kertaamalla opit ja muistat paremmin ratkaisuidean.*

KUVIO 18 Toimintaohjeet ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemiseen (Leppäaho 2004b, 22)

Seuraavassa esittelen kirjoitetun kuvauksen ratkaisukartan laatimisesta (ks. myös Leppäaho 2004b, 8, 73). Se ei ole koeryhmän oppilaan laatima, mutta kuvaa mielestäni hyvin ratkaisijan näkökulmasta sitä, kuinka ratkaisukarttaa käytetään. Vastaavan esimerkin avulla opetin koeryhmälle ratkaisukarttamenetelmää ongelmanratkaisukurssin ensimmäisellä tunnilla. Esimerkissä ratkaisijan pohdinta on kirjoitettu *kursiivilla*:

TEHTÄVÄ

> "Pojilla on taskulamppu, joka palaa vain 12 minuuttia. Heidän on selvittävä vaarallisen tunnelin läpi turvaan ennen kuin tunneli sortuu. Pojilla ei ole mitään muuta pelastumismahdollisuutta kuin tunnelin läpi kulkeminen. Tunneliin mahtuu enintään kaksi poikaa kerrallaan ja ilman taskulampun valoa on tunneliin meno liian vaarallista. Ollilta kuluu tunnelissa aikaa yksi, Timolta kaksi, Pekalta neljä ja Markukselta viisi minuuttia. Parit kulkevat tunnelissa hitaamman vauhtia. Missä järjestyksessä poikien on kuljettava, jotta he pääsisivät tunnelin läpi turvallisesti taskulampun palaessa?"

RATKAISUKARTTA:

Aluksi ratkaisija lukee tehtävän mahdollisimman huolellisesti. Tämän jälkeen hän kirjoittaa erilliselle vihkoon otsikoksi *"Tiedot"* (kuvio 19) ja pyrkii poimimaan sen alle tiivistetysti tehtävässä annetun ratkaisun kannalta oleellisen informaation.

Tiedot:
-Taskulamppu palaa vain 12 min ja se on oltava mukana tunnelissa kuljettaessa.
-Vain 2 mahtuu kerrallaan tunneliin.
-Poikien etenemisajat:

- *Olli 1 min*
- *Timo 2 min*
- *Pekka 4 min*
- *Markus 5 min*

-Parit kulkevat tunnelissa hitaamman vauhtia.

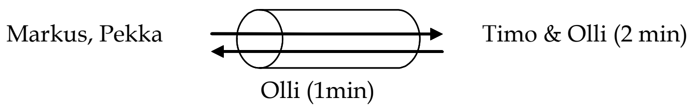
KUVIO 19 Esimerkki Ratkaisukartan tiedot-osasta

Tietojen kirjaamisen jälkeen aloitetaan ratkaisutavan ja -yrityksen etsiminen. Tehtävään haetaan tuntumaa eli hahmotellaan tilannetta tietojen ja piirrosten avulla. Tehtävän ratkaisua kokeillaan rohkeasti mutta järkevästi.

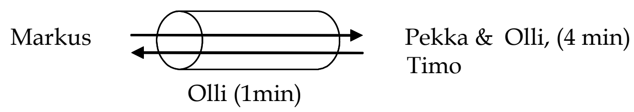
"Huomaan tehtävän tiedoista, että: Olli on nopein ja sitten Timo, joten he kuljettavat lamppua nopeasti myös takaisin. Koska Markus ja Pekka ovat hitaita, heitä ei taida kannattaa laittaa tunneliin lampun kanssa paluumatkalle. Piirrän tilanteen jossa Olli ja Timo menevät ensin yhdessä tunnelin läpi ja Olli tuo lampun takaisin. Sitten Olli vie Pekan tunnelin läpi ja hakee vielä Markuksen…Kirjoitan tietojen alle I Ratkaisuyritys, jonka alle kokoan ratkaisuvaiheet (kuvio 20)."

I. Ratkaisuyritys:
Olli ottaa lampun, koska hän on nopein!

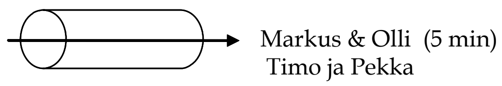
1. Olli vie Timon (2 min) ja palaa takaisin (1 min). *Yhteensä 3 min.*



2. Olli vie Pekan (4 min) ja palaa takaisin (1 min). *Yhteensä 5 min.*



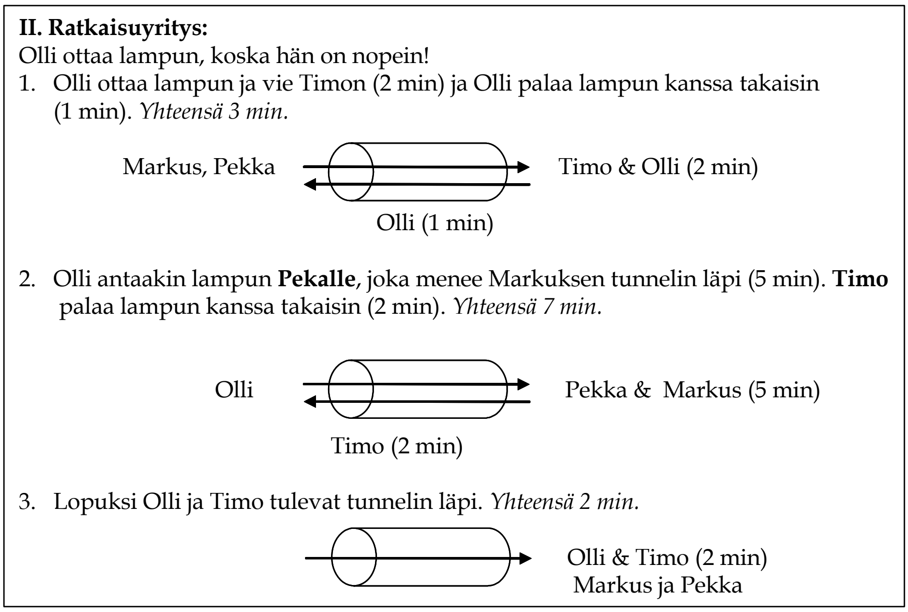
3. Lopuksi Olli vie Markuksen (5min) *Yhteensä 5 min.*



KUVIO 20 Ratkaisukartan ensimmäinen ratkaisuyritys

"Lasken ajat yhteen: 3 min + 5 min+5 min = 13 min. Tarkistetaan vastaus…ja sehän on ***väärin****, koska lamppu palaa vain 12 min.*

Hmm…En masennu, enkä luovuta, vaan hyväksyn että väärätkin vastaukset kuuluvat matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun. Nyt sain tuntumaa tehtävään ja pääsin siihen sisälle. Tämä ei olekaan rutiinitehtävä, vaan vaatii selvästi ongelmanratkaisutaitoa. Palaan tehtävän tietoihin ja tutkin edellistä ratkaisua. Enkä suinkaan pyyhi sitä pois, sillä se on ensimmäinen ratkaisuyritys kohti oikeaa ratkaisua! Ensimmäisen *yrityksen 13 minuutin vastausta on siis parannettava minuutilla. Mistähän sen saisi säästettyä?... Ahaa! Koska tunnelissa edetään hitaamman mukaan, niin aikaa säästyisi, jos hitain pari menisi tunnelin läpi samalla kertaa. Teen uuden yrityksen edellisen perään ja kirjoitan otsikoksi II Ratkaisuyritys* (kuvio 21).*"*



KUVIO 21 Ratkaisukartan toinen ratkaisuyritys

"Lasken ajat yhteen: 3 min + 7 min + 2 min = ***12 min!*** *Käyn tehtävän vielä huolellisesti läpi ja tarkistan vastauksen. Kaikki näyttäisi olevan kunnossa.*

Mietin vielä hetken voisinko löytää vielä paremman ratkaisun! Hmm…jos vaihdan hieman parien järjestystä: Jos Timo ja Olli menevät edelleenkin ensin tunneliin (2 min), mutta Timo (2 min) palaakin takaisin…sitten Pekka ja Markus (5 min) menevät tunnelin läpi, kuten edellisessäkin ratkaisussa ja antavat lampun Ollille (1 min), joka hakee Timon (2 min)…ja ajoistahan kertyy yhteensä 2 min + 2 min + 5 min + 1 min + 2 min = ***12 min****. Hyvä! Tehtävälle löytyi näköjään toinen symmetrinen vastaus, mutta alle 12 minuutin ei näköjään sääntöjen mukaan selviydytä. Jätän ensimmäisen ratkaisuyrityksen näkyviin, jotta siitä voi nähdä kuinka ratkaisuni on syntynyt ja lisään toisen ratkaisun ensimmäisen ratkaisun jälkeen."*

7.3 Perusteluja ratkaisukartan käytölle

Ratkaisukarttaidean käyttöä opetuksessa tukee Hähkiöniemen (2006b, 2006c) tutkimustulos siitä, että representaatiot eivät ainoastaan heijasta oppilaan mentaalisia käsityksiä, vaan ne ovat oppilaalle myös työkaluja ajatella matemaattisia käsitteitä. Hänen tutkimuksensa derivaatan oppimisesta lukion pitkässä matematiikassa viittaa siihen, että matemaattisen ajattelun tehostamiseksi opiskelijoille tulisi antaa mahdollisuus työskennellä muidenkin kuin pelkästään symbolisten representaatioiden parissa. Tämän tuloksen valossa konkreettisten representaatioiden tuottamisen harjoittelu peruskoulussa olisi erittäin suotavaa.

Samantyyppisiä ohjeita kuin ratkaisukartan tekemiseen on käytetty menestyksellisesti muissakin oppiaineissa. Esimerkiksi Sutherland (2002, 158–161) kehitti tutkimuksessaan kemian opiskelijoita varten ongelmatehtävien ratkaisuun viisivaiheisen kysymysanalyysistrategian *(question analysis strategy)*. Sen tarkoituksena oli ohjata opiskelijoita analysoimaan kemian ongelmatehtäviin liittyvää informaatiota kysymysten avulla ja avustaa heitä käyttämään alan tietoja ongelmanratkaisuun. Tulosten mukaan tutkimukseen osallistuneilla opiskelijoilla ei ollut keskinäisiä eroja alkukokeessa mutta loppukokeessa kysymysanalyysistrategia-opetuksen avulla harjoitelleet paransivat ongelmanratkaisusuorituksiaan ja olivat kontrolliryhmää tilastollisesti parempia. Loppukokeen tulokset säilyivät myös viivästetyssä kokeessa.

Van Garderen ja Montague (2003) tutkivat 6.-luokkalaisten suoriutumista ongelmanratkaisutehtävistä. He havaitsivat oppilaiden visuaalis-spatiaalisten representaatioiden (apupiirrokset, diagrammit jne.) käytöllä olevan merkitsevä yhteys oppilaan matemaattiseen ongelmanratkaisuun.

Lorenzo (2005, 33–36) toteutti 16–17-vuotiaille kemian opiskelijoille tapaustutkimuksen, jonka tavoitteena oli harjoittaa ongelmanratkaisuheuristiikkaa todellisessa luokkatilanteessa ja arvioida sen tehokkuutta. Opetetun heuristiikan tarkoituksena oli auttaa opiskelijoita ymmärtämään ongelmanratkaisuun sisältyviä vaiheita. Opiskelijoiden oli yritettävä kirjoittaa ongelmasta kartta, josta selviäisi, kuinka kysytty tieto ja tehtävässä annettu tieto liittyvät toisiinsa. Tulosten mukaan Lorenzon opettama heuristiikka oli opiskelijoille ongelmanratkaisuun käyttökelpoinen menetelmä, joka auttoi opiskelijoita myös ymmärtämään paremmin ongelmanratkaisuprosessin vaiheita (mts. 36–39). Kyselyn mukaan 94 % opiskelijoista tunsi hyötyvänsä ongelmanratkaisuprosessiin liittyvästä kognitiivisten toimintojen ohjauksesta, joita olivat ongelman jakaminen osiin, yhteyksien etsiminen annetun ja tuntemattoman tiedon välille sekä ongelmaa hahmottavan kaavion suunnitteleminen. Opiskelijoiden mielestä opetettu ongelmanratkaisumenetelmä auttoi heitä tunnistamaan käsitteiden välisiä suhteita ja rakentamaan monimutkaisempia yhteyksiä. (Mts. 53–56.)

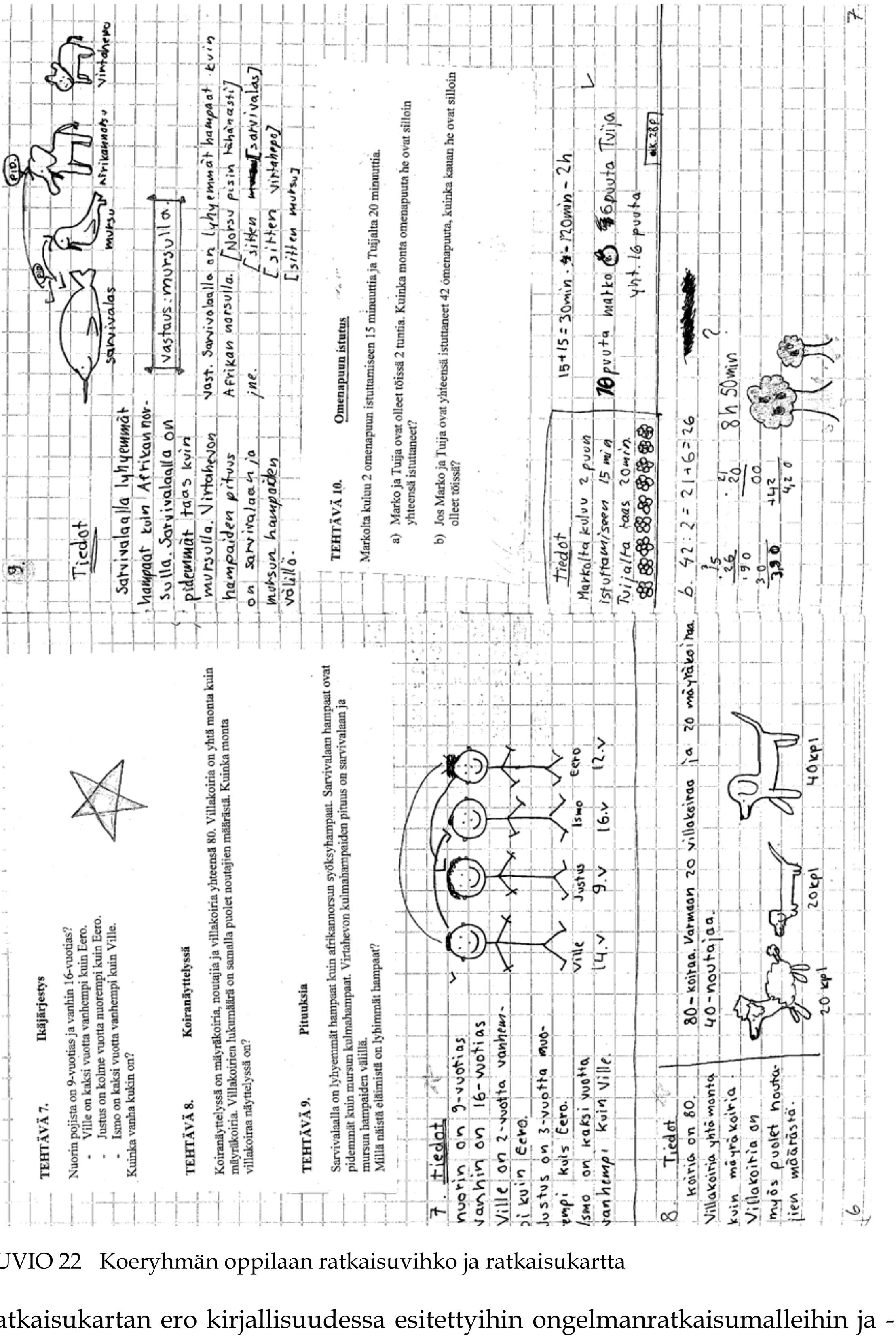
Glass ja Maher (2004) analysoivat opiskelijoiden ongelmanratkaisutehtävien ratkaisujen perusteluja. He havaitsivat, että ensiarvoisen tärkeitä ongelmanratkaisutehtävien perustelujen oppimisessa olivat oppilaan monipuoliset tilaisuudet osallistua kirjoittamalla ja puhumalla ideoiden vaihtoon. Tutkimuksessani ratkaisukarttamenetelmän opettamisessa keskeisenä tavoitteena oli juuri luoda tilaisuuksia matematiikan sanallistamiseen ja kirjoittamiseen.

Kotovsky, Hayes ja Simon (1985) huomasivat, että ulkoiset muistin apuvälineet helpottavat huomattavasti itse ratkaisuprosessia. Ihmisen muisti on rajallinen, eikä 6. luokan oppilas kykene samanaikaisesti muistamaan ja prosessoimaan mielessään suuria tietomääriä (Saariluoma 1990, 127–128). Tätä ongelmaa pyrittiin helpottamaan ratkaisukarttamenetelmällä. Se toimi oppilaiden muistin tukena, ja sen avulla he pystyivät palaamaan tehtävän tietoihin ja vaiheisiin sekä havainnollistamaan apupiirroksin ongelman rakennetta.

Ratkaisukartan käytöllä on tarkoitus tukea myös oppilaan matemaattisen ajattelun (ks. luku 3) etenemistä ja mielikuvan muodostamista. Oppilaan luoma piirros ja ratkaisuyritys auttavat häntä hahmottamaan tehtävää ja muodostamaan mielikuvaa siitä. Se, millaisen apupiirroksen oppilas luo, kertoo hänen matemaattisen ajattelunsa tasosta. Tätä päätelmää tukevat useat tutkimukset. Esimerkiksi Hegarty ja Kozhenikov (1999) tutkivat 6.-luokkalaisten (12-vuotiaiden) oppilaiden menestymistä ongelmanratkaisussa ja sen yhteyttä matemaattisten ongelmatehtävien ratkaisujen visuaaliseen tasoon. Tulosten mukaan toiset oppilaat kykenivät luomaan tehtävistä erityisen selkeän ja yksityiskohtaisen kuvallisen (*pictorial*) mielikuvan, kun taas osa oppilaista loi tehtävistä kaavamaisen (*schematic*) mielikuvan, jossa näkyivät objektien väliset spatiaaliset suhteet. Kaavamaisten representaatioiden käyttö liittyi menestykseen matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Sen sijaan kuvallisten representaatioiden käyttö korreloi negatiivisesti ongelmanratkaisussa menestymiseen (mts. 688). Hegartyn ja Kozhenikovin mukaan tämä tulos selittänee osaltaan, miksi aikaisemmissa tutkimuksissa (mm. Kruteskii 1976, Lean & Clements 1981, Presmeg 1986a, 1986b, 1992) ei löydetty yhteyttä visuaalis-spatiaalisten representaatioiden ja matemaattisen ongelmanratkaisun välillä.

Hegartyn ja Kozhenikovin (1999) tulos osoittaa osaltaan Pirien ja Kierenin (1994) teorian toimivuutta (luku 3, kuvio 2): pelkkä mielikuvan muodostaminen (taso 2) auttaa ongelmanratkaisussa menestymistä vähemmän kuin havaitseminen (taso 7) ja jäsentäminen (taso 8). Tutkimuksensa perusteella Hegarty ja Kozhenikov (1999, 688) luokittelevat oppilaat kahdentyyppisiin visualisoijiin: *kaavionkäyttäjiin*, jotka yleensä menestyvät matemaattisessa ongelmanratkaisussa paremmin kuin *kuvankäyttäjät*. Tämän tuloksen valossa on tärkeää, että oppilaita ohjattaisiin luomaan kaavamainen apupiirros, josta selviäisivät tehtävässä annettujen tietojen väliset suhteet.

Tutkimuksessa toteutetussa opetusinterventiossa oppilaiden tehtävänä oli laatia ratkaisukartta aina, kun se vain oli mahdollista. Ratkaisukarttojen selkeys vaihteli luonnollisesti tekijän mukaan. Kuviossa 22 on kuva yhden koeryhmänoppilaan ratkaisukartasta. Siitä on havaittavissa, että oppilas on poiminut erilliseen kohtaan tehtävän tiedot, tehnyt apupiirroksen, laatinut ratkaisuyrityksiä ja etsinyt ratkaisua virheellisten vastausten kautta päätyen lopuksi oikeaan vastaukseen.



KUVIO 22 Koeryhmän oppilaan ratkaisuvihko ja ratkaisukartta

Ratkaisukartan ero kirjallisuudessa esitettyihin ongelmanratkaisumalleihin ja -strategioihin on, ettei virheellistä ratkaisua pyyhitä pois vaan se hyväksytään ja jätetään näkyviin ratkaisuyrityksenä, jonka jälkeen tehdään uusi ratkaisuyritys. Tällä menettelyllä oli tarkoitus muuttaa oppilaiden suhtautumista virheisiin myönteisemmäksi, sillä tekeväthän myös taitavat matemaatikot useita yrityksiä ja erehdyksiä ratkaisuja kehitellessään (Stylianou 2002). Samalla pyrittiin kehittämään oppilaiden ongelmanratkaisusitkeyttä eli sitä, että oppilaat oppisivat yrittämään ongelman ratkaisemista, vaikka he eivät heti keksisikään oikeaa ratkaisumenetelmää (Pehkonen ym. 1991, 19).

Ratkaisukarttamenetelmä ei ollut tutkimuksen ainoa tapa kehittää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja. Kehitetyn oppimateriaalin ja oppiaineiden integroinnin lisäksi se oli yksi keino luoda oppilaille oppimisympäristö, jossa heidän ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä tuettaisiin.

8 TUTKIMUKSEN TAVOITTEET JA TUTKIMUSONGELMAT

Tutkimukseni tavoitteena oli selvittää, kuinka oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa voitaisiin opettaa ja kehittää peruskoulussa. Lähdekirjallisuuden pohjalta pääteltiin, että matemaattinen ongelmanratkaisutaito koostuu eri osa-alueista, joiden huomioiminen opetuksessa vaatii monipuolisuutta. Tämän perusteella suunniteltiin oppimisympäristö, joka toteutettiin *matemaattisen ongelmanratkaisukurssin* avulla. Se sisälsi opetuksen integroinnin (luku 6), tutkimusta varten kehitetyn opetusmateriaalin (luku 10.2.1 ja liite 15) ja ratkaisukarttamenetelmän (luku 7). Matemaattinen ongelmanratkaisukurssi toteutettiin matematiikan, äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontieteiden tunneilla. Kurssi perustui luvuissa 2–7 esitettyyn viitekehykseen ja 6. luokan matematiikan opetussuunnitelman syyslukukauden aihealueisiin. Kurssia varten laaditulle ongelmanratkaisukurssin oppimateriaalille asetettiin tavoitteeksi toteuttamiskelpoisuus ja se, että siitä (tuntisuunnitelmat, kokeet, tehtävät ja ohjeet) olisi opettajille konkreettista hyötyä ongelmanratkaisun opetukseen. Tämän kokonaisuuden tarkoituksena oli tukea ja osaltaan kehittää matemaattis-luonnontieteellisten aineiden opettamista peruskoulussa.

Kurssilla oli kaksi opetuksellista tavoitetta. Ensinnäkin sen oli tarkoitus tuoda matemaattiseen ongelmanratkaisuun monipuolisuutta opetuksen integroinnin avulla. Toiseksi tavoitteena oli opettaa ratkaisukarttamenetelmä (ks. luku 7) yhdeksi työkaluksi ongelmien ratkaisuun.

Oppilaille pyrittiin opettamaan myös tavoitteen asettamista ja pitkäjänteisyyttä. Kurssin alussa koeluokan oppilaille kerrottiin, että kurssi olisi luonteeltaan kuin urheilijan harjoitusohjelma, jonka avulla jokainen oppilas valmentautui ongelmanratkaisuun. Kurssin kymmenes tunti käytettiin oppilaan henkilökohtaisen tavoitteen asettamiseen. Tosin oppilaskohtainen keskusteluaika jäi kovin lyhyeksi tavatessani 17 oppilasta 45 minuutin aikana (n. 2,5 min/oppilas). Tällöin näytin koeluokan oppilaalle hänen alkukokeensa pistemäärä ja tavoitteeksi asetettiin sen parantaminen kurssin jälkeen loppukokeessa. Samassa yhteydessä katsottiin, kuinka oppilaiden vihkotyöskentely oli lähtenyt sujumaan.

Tutkimuksessani etsin vastauksia seuraaviin tutkimusongelmiin:

1. Kuinka opetus toteutui matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla opettajan näkökulmasta?

2. Millaisia eroja oli koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisissa ongelmanratkaisukokeissa?
   2.1 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli alku- ja loppukokeessa?
   2.2 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä oli viivästetyssä kokeessa?
   2.3 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä oli alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa?

3. Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun?

Taulukossa 2 on esitelty se tutkimusaineisto, jolla kuhunkin tutkimusongelmaan haettiin vastuksia. Viimeisessä sarakkeessa on ilmoitettu, mistä luvusta löytyvät vastaukset esitettyihin tutkimusongelmiin.

TAULUKKO 2 Tutkimusongelmat ja -aineisto

TUTKIMUSONGELMAT	TUTKIMUSAINEISTO	VASTAUS LUVUSSA
1. Kuinka opetus toteutui matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla opettajan näkökulmasta?	Tuntisuunnitelmat ja niiden arviointi	10.1
2. Millaisia eroja oli koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisissa ongelmanratkaisukokeissa?	Koe- ja kontrolliryhmien alku- ja loppukokeiden sekä viivästetyn kokeen tulokset	10.2
2.1 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli alku- ja loppukokeessa?		10.2.1
2.2 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä oli viivästetyssä kokeessa?		10.2.2
2.3 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä oli alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa?		10.2.3
3. Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun?	Koeryhmän oppilaiden haastattelut	10.3

9 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

Tässä luvussa esittelen tutkimusmenetelmiä ja sitä tutkimusasetelmaa, joiden avulla etsin vastauksia asettamiini tutkimusongelmiin.

9.1 Tutkimusmenetelmät

Tutkimusparadigmalla tarkoitetaan sitä perususkomusten joukkoa, joka edustaa tutkijan maailmankuvaa. Paradigmat perustuvat ontologisiin (oppi olevaisen luonteesta), epistemologisiin (oppi tiedosta ja sen olemuksesta) ja metodologisiin (oppi tiedonhankkimisen menetelmistä) oletuksiin. Uskomuksien totuudellisuutta ei voida osoittaa, mutta ne ovat kuitenkin yleensä hyvin perusteltuja. (Guba & Lincoln 2000, 107–108; Metsämuuronen 2005, 199–200.) Tutkimusparadigma vaikuttaa tutkijan tapaan tehdä tutkimustyötä eli siihen, miten hän hankkii tietoja, millaisia tutkimusmenetelmiä hän käyttää ja millainen on hänen roolinsa tutkimusprosessissa. Tutkimusparadigma on yhteydessä tutkimuksen tavoitteeseen, luotettavuuden arviointiin ja siihen, miten tutkija ymmärtää ja esittää tutkimuksensa tulokset.

Tutkimusmenetelmät voivat olla kvalitatiivisia (laadullisia) tai kvantitatiivisia (määrällisiä), ja tutkimuksessa voidaan soveltaa myös useampia menetelmiä rinnakkain. Kvalitatiivisilla ja kvantitatiivisilla tutkimusmenetelmillä on erilaiset tieteenfilosofiset lähtökohdat ja tavoitteet. Kvantitatiivisissa tutkimusmenetelmissä korostuvat positivismin tieteelliset arvot kuten testattavuus, objektiivisuus, täsmällisyys ja yksiselitteisyys (esim. Sintonen 1987, 16–18). Nämä arvot perustuvat mittaamiseen, ja tällöin tavoitteena on tuottaa selvästi rajatusta aineistosta perusteltua, luotettavaa ja yleistettävää tietoa (Erätuuli, Leino & Yliluoma 1994, 13–20). Myös postpositivistiset ihanteet voivat olla kvantitatiivisen tutkimuksen pohjana, jolloin hyväksytään ajatus, ettei täydelliseen objektiivisuuteen päästä, ja metodologisina keinoina voidaan käyttää kevyempiäkin koeasetelmia eli kvasikoejärjestelyjä (Metsämuuronen 2005, 200–203).

Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien tiedonintressi on ymmärtävä ja lähestymistavat perustuvat eksistentiaalis-fenomenologis–hermeneuttiseen tieteenfilosofiaan, jollaisiksi Metsämuuronen (2005, 201–203) nimeää kriittisen teorian ja konstruktivismin. Kvalitatiivinen lähestymistapa soveltuu tutkimukseen hyvin, kun ollaan kiinnostuneita tapahtumien yksityiskohtaisista rakenteista ja tapahtumissa mukana olleista tai kun halutaan tutkia luonnollisia tilanteita ja niihin liittyviä syy-seuraussuhteita. Kvalitatiivinen tutkimus ei käytä formaalisia ja strukturoituja mittareita vaan analysoi narratiivista tietoa järjestelmällisesti mutta intuitiivisesti. Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien avulla voidaan saada ilmiöstä syvällisempää ja rikkaampaa tietoa kuin kvantitatiivisilla menetelmillä. Kvalitatiivinen tutkimus soveltuu hyvin sellaisten aihealueiden tutkimiseen, joista ei tiedetä etukäteen runsaasti. (Eskola & Suoranta 1998, 13–24; Metsämuuronen 2005, 203.) Lankshearin ja Knobelin (2004, 74) mukaan tutkijat usein erikoistuvat yhden tutkimusmenetelmän käyttöön ja pitäytyvät siinä, vaikka hallitsisivat muidenkin menetelmien käyttöä. Tällöin voi jäädä huomioimatta mahdollisuus, että asetettuihin tutkimusongelmiin voisikin olla saatavissa kattavammat vastaukset useampien tutkimusmenetelmien käytön avulla.

Kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen tutkimuksen yhdistämisestä on kuitenkin tutkijoiden keskuudessa eriäviä mielipiteitä. Monet kvalitatiivisten menetelmien käyttäjät ovat sitä mieltä, että tutkimusotteiden yhteen saattaminen on perusristiriitaista (Kaikkonen 1999, 428–429). Moilasen (2000) kanta on varovaisen myönteinen. Hän toteaa, että tutkimuksen teon filosofiset premissit eivät ole yksioikoisesti liitettävissä tiettyyn tieteenfilosofian koulukuntaan ja siksi tutkimusmenetelmien onnistunut yhdistäminen voi osoittautua onnistuneeksi ratkaisuksi. Moilasen mukaan yhdistämiseen ei kuitenkaan kannata ryhtyä suin päin. (Moilanen 2000, 188.)

Jussilan (1992, 250) mukaan tutkimuksen laatu (kvaliteetti) on määrään (kvantiteetti) verrattuna tärkeämpää, koska ensin täytyy olla olemassa laatua kuvaavia kategorioita ennen kuin paljoudesta on mielekästä puhua. Laatu ja määrä eivät hänen mielestään ole kuitenkaan erillisiä tai toistensa vastakohtia, vaan määrä ilmaisee, kuinka paljon jotakin laatua esiintyy. Laatu ja määrä kulkevat tutkimustyössä siis käsi kädessä, ja niiden erossa pitäminen paradigmaattisesti voi jopa vääristää tutkimustilanteita. Lehtinen (1991, 29–30) onkin todennut, että kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen tutkimusmenetelmän vastakkainasettelu on harhaanjohtavaa. Tutkimusintressi ja kohde määräävät, painotetaanko määrää vai laatua. Tutkimusotteiden yhdistämisen ei tarvitse merkitä menetelmien integrointia, vaan ymmärtämisen syvyyttä voidaan lisätä synkreettisen tarkastelun avulla tutkimalla ilmiöitä rinnakkain eri menetelmiä käyttäen (Jussila 1992, 254). Heikkinen ym. (2005, 350) tutkivat kasvatustieteen metodeissa ja lähestymistavoissa tapahtunutta paradigmasiirtymää, josta he toteavat mm. seuraavaa: 1) kasvatustieteen kenttää ei ole tarkoituksenmukaista erotella dikotomisesti laadulliseen ja määrälliseen tutkimukseen, vaan oleellisempaa on pohtia metodien taustalla olevia ontologisia ja epistemologisia eroja, 2) tutkijoiden valmius yhdistellä tutkimusotteita lisääntyy, joten esim. *combined designs* ja *mixed-methods* tyyppiset tutkimusotteet yleistyvät tulevaisuudessa.

Tässä tutkimuksessa käytettiin sekä kvantitatiivisia että kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä. Näiden metodien avulla tutkija yhdistää ja vertailee kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia tekniikoita, menetelmiä, lähestymistapoja ja käsitteitä samassa tutkimuksessa (Johnson & Onwuegbuzie 2004, 17; Creswell ym. 2003, 213–215). Lankshear ja Knobel (2004, 74–75) nimittävät tällaista toteutustapaa *mixed methods* -tutkimukseksi. Esimerkkinä he mainitsevat kvalitatiivisen tapaustutkimuksen, jossa voidaan käyttää kvantitatiivisiin menetelmiin kuuluvaa kvasikokeellista koeasetelmaa (alku- ja loppukoe) tehtäessä päätelmiä oppilaiden oppimisesta opetusjakson aikana. Johnsonin ja Onwuegbuzien (2004, 20–22) mukaan *mixed methods:*in mukaisessa tutkimusotteessa on tärkeää ymmärtää, että tutkija voi muodostaa tutkimusmenetelmistä erilaisia yhdistelmiä tutkimusintressinsä ja resurssiensa perusteella. Tällöin voidaan painottaa kvantitatiivisia tai kvalitatiivisia menetelmiä esimerkiksi kuvion 23 vaihtoehtojen mukaisesti:

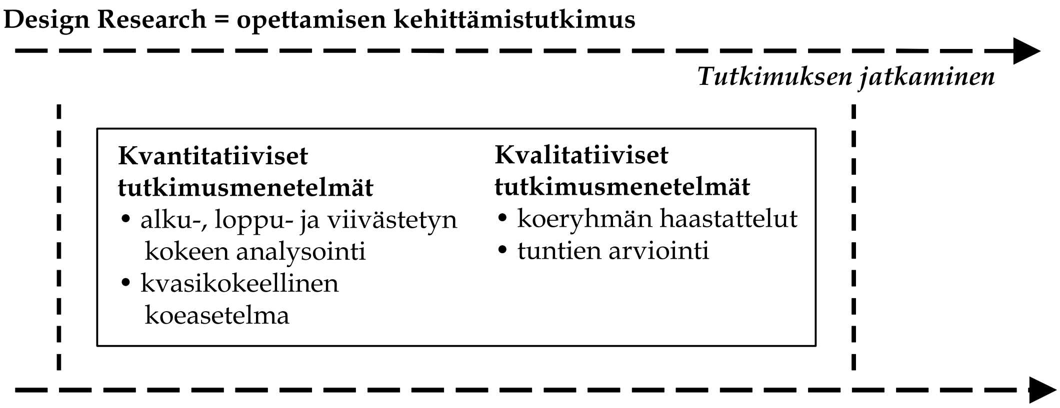
Tutkimusmenetelmän korostaminen	Painotus	Toteutuksen aikajärjestys: *Samanaikainen*	Toteutuksen aikajärjestys: *Peräkkäinen*
	Tasapainoinen	L + M	L→ M M → L
	Dominoiva	L + m M + l	L → m l→ m M → l m→ L

KUVIO 23 Tutkimusmenetelmien yhdistämisvaihtoehtoja Johnsonia ja Onwuegbuzieta (2004, 22) mukaillen. L ja l tarkoittavat laadullista (kvalitatiivista) ja M ja m määrällistä (kvantitatiivista) tutkimusmenetelmää. Iso kirjain kuvaa kyseisen menetelmän painotusta tai ensisijaisuutta ja pieni kirjain vähäisempää painotusarvoa. Samanaikaisuus on merkitty +-merkillä ja peräkkäisyys →-merkillä.

Jos kyseessä on, kuten tässä tutkimuksessa, laadullisin menetelmin kehitetty opetusinterventiojakso, oppilaiden koetuloksia voidaan käsitellä ensin kvantitatiivisin menetelmin ja tarkastella sitten koeryhmän haastatteluaineistoja laadullisin menetelmin. Saatujen tulosten ja kokemusten avulla voitaisiin taas edelleen kehittää laadullisin menetelmin parempi kurssi (ks. kuvio 23).

Menetelmien yhdistäminen oli mielestäni perusteltua, sillä tutkimuksen aihe ja ongelmat edellyttivät sekä laadullisten että määrällisten menetelmien käyttöä. Laadullisia menetelmiä tarvittiin esimerkiksi selvitettäessä koeryhmän oppilaiden suhtautumista ongelmanratkaisukurssiin ja määrällisten menetelmien avulla selvitettiin ongelmanratkaisukokeiden tilastollisia merkitsevyyksiä. Toisaalta halusin tutkia syvällisesti myös käytännön opetustilanteita luokassa ja siihen tarvittiin kvalitatiivisia menetelmiä. Käytännön syistä tutkimusjoukko ei voinut olla kovin suuri ja se olisikin ollut pienehkö pelkästään kvantitatiivisten menetelmien käyttöön. Mielestäni myös tutkimustulosten luotettavuus paranee, kun kvalitatiivisten ja kvantitatiivisten tutkimusmenetelmien avulla saatujen tulosten yhdenmukaisuutta vertailtiin ja arvioitiin keskenään.

Käsillä olevassa tutkimuksessa matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittämistä ja opettamista lähestyttiin opettajan, oppilaan ja oppimateriaalin tuottamisen näkökulmista. Ohjaavana tutkimusmenetelmänä käytettiin opettamisen kehittämistutkimusmenetelmästä *(design-research)* sovellettua muotoa, joka antaa hyvän mahdollisuuden toteutetun tutkimuksen jatkamiseen. Tutkimusaineiston keruuseen ja käsittelyyn käytettiin kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä. Tutkimuksessa käytetyt tutkimusmenetelmät jäsentyivät kuvion 24 mukaisesti.



KUVIO 24 Tutkimuksessa käytetyt tutkimusmenetelmät

Kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen tutkimusmenetelmän yhdistämisen seurauksena tutkimuksessani toteutuu myös metodologinen triangulaatio. Tällöin eri tutkimusmenetelmien tutkimuskohteena on sama ongelma (Denzin 1988, 511–513; Morse 1998 64–66; Metsämuuronen 2005, 245) eli tässä tutkimuksessa ongelmanratkaisukurssin toteutumista analysoitiin ongelmanratkaisukokeiden ja koeryhmän oppilaiden haastattelujen sekä tuntiarvioiden perusteella.

9.1.1 Kehittämistutkimus *(Design Research)*

Vaikka matematiikan opettamisen tutkimus on ollut Woodin & Berryn (2003, 195) mukaan tuotteliasta, vieläkään opettajankoulutuksessa ei ole kyetty identifioimaan niitä lähestymistapoja, joiden avulla autetaan opettajia kehittämään omaa opetustaan. Tämä tarve tulee esiin, kun opettajat huomaavat törmäävänsä esimerkiksi matematiikan opettamisen monimutkaisuuteen. Wood ja Berry (2003, 195) pitävät kehittämistutkimusta ratkaisuna tähän ongelmaan.

Kehittämistutkimus-nimitystä on käytetty kasvatustieteellisissä tutkimuksissa 1990-luvun alusta lähtien (Bannan-Ritland 2003, 21). Vaikka kehittämistutkimus on kasvatustieteilijöiden keskuudessa uudehko menetelmä, sen käyttö on lisääntynyt viime aikoina suomalaistenkin matematiikan, teknologian ja luonnontieteiden opetuksen tutkijoiden piirissä (esim. Aksela 2005, Heinonen 2002, Juuti 2005, Hassinen 2006).

Koska kehittämistutkimus on varsin uusi tutkimusmenetelmä, on syytä esitellä sitä hieman tarkemmin. Englanninkielisessä tutkimuskirjallisuudessa kehittämistutkimuksesta käytetään useita eri nimityksiä, jotka ovat toistensa synonyymeja laajassa merkityksessä (Wang & Hannafin 2005, 6). Esimerkkeinä näistä termeistä mainittakoon *design experiments* (Brown 1992), *developmental research* (Richey & Nelson 1996), *formative research* (Reigeluth & Frick 1999, 633–651), *didactical engineering* (Artique 1994), *design research* (Edelson 2002, 105–121), *user design research* (Carr–Chellman & Savoy 2004) ja *design–based research* (Wang & Hannafin 2005)

Artiquen (1994, 29) mukaan kehittämistutkimuksen (*didactical engineering*) avulla matematiikan opetukseen saadaan insinöörityöhön verrattava didaktisen työn malli. Artiquen vertaus on osuva: vaikka insinöörin työ perustuu hänen alansa sen hetkiseen tieteelliseen tietoon ja teorioiden soveltamiseen, hän joutuu kuitenkin luomaan uusia, entistä vaativampia ja monimutkaisempia tuotoksia, joihin sen hetkinen tiede ja tekniikka eivät vielä kykene antamaan apuvälineitä. Vastaavasti opetustyöhön olisi luotava tutkimuksen avulla uusia menetelmiä ja vanhoja opetusmenetelmiä olisi edelleen kehitettävä.

Artique (1994, 30) lähestyy opetuksen kehittämistutkimusta kahden kysymyksen kautta: 1) Mikä on tutkimuksen ja käytännön suhde opetuksessa? 2) Kuinka tutkimusmetodologiat sisällytetään luokan didaktisiin tilanteisiin? Nämä kysymykset antavat myös didaktisen perustelun kehittämistutkimukselle. Lisäksi ne hänen mukaansa auttavat määrittelemään tutkimukseen perustuvan opetuksen ja tutkimusmetodologian, joka pohjautuu luokassa toteutettuihin opetuskokeiluihin.

Vastauksia Artiquen kysymyksiin jouduttiin pohtimaan jo tämän tutkimuksen suunnitteluvaiheessa, sillä toteutettu opetusinterventio oli sidottava oppilaiden 6. luokan matematiikan opetussuunnitelmaan ja tutkimusmenetelmien käyttöä oli sovellettava aitoon opetus- ja oppimistilanteeseen.

Edelsonin (2002, 116–117) mukaan kehittämistutkimukselle tyypillisiä piirteitä ovat tutkimuksellinen ote, jolloin edetään kohti etukäteen asetettuja tutkimustavoitteita, tutkimusprosessin systemaattinen dokumentointi ja sen jatkuva arviointi sekä tutkimuksen yleistettävyys. Nämä piirteet sopivat lähes jokaiseen tutkimusmenetelmään, joten täsmennän kehittämistutkimuksen piirteitä Bereiterin (2002) luonnehdinnalla. Hän kuvaa kehittämistutkimusta neljällä ominaispiirteellä: 1) tutkimus on toteutettu läheisessä yhteistyössä tutkimuksen tekijöiden kanssa, 2) sen tavoitteena on muutoksen aikaansaaminen intervention avulla, 3) tutkimuksen ensisijainen tavoite on löytää ratkaisut havaittujen puutteiden ja esteiden perusteella muotoutuneisiin ongelmiin, 4) tutkimuksen tavoitteena on uusi, vielä toteutumaton visionäärinen päämäärä, jota tavoitellaan tutkimus- ja testaussyklien avulla.

Vastaavasti Wangin ja Hannafinin (2005, 6–12) mukaan kehittämistutkimus on systemaattinen, mutta joustava metodologia opetuksen teorian ja käytännön kehittämiseen. Sille luonteenomaisia piirteitä ovat: pragmaattisuus, vuorovaikutteisuus, toistettavuus, joustavuus, yhteistyö tutkijoiden ja tutkimuskohteen asiantuntijoiden kesken, tutkimusmenetelmien yhdistäminen *(mixed methods)* ja kehittäminen, joka perustuu teoriaan ja sen soveltamiseen.

Wood ja Berry (2003, 195–196) esittävät kehittämistutkimuksen viisi tärkeää piirrettä, jotka ovat hieman konkreettisempia kuin Edelsonin, Bereiterin sekä Wangin ja Hannafinin näkemykset:

1) Kehittämistutkimuksessa tuotetaan fyysinen tai teoreettinen artefakti tai tuote.
2) Tuote testataan useita kertoja ja sitä kehitetään toistojen kuluessa.
3) Tuotoksen parantelussa käytetään useita malleja ja teorioita.
4) Kehittämistutkimus sijoittuu todelliseen kontekstiin, matematiikan opettajan päivittäiseen työympäristöön, mutta tulokset ovat jaettavissa ja yleistettävissä laajemmaltikin.
5) Opettaja kasvattajana/tutkijana on mieluummin väliintulija kuin tarkkaileva osanottaja ja hän on vuorovaikutuksessa toisten opettajien kanssa, kun ammattimaisesti kehitettyä mallia kehitellään, testataan ja parannellaan.

Nämä ominaispiirteet toimivat tämän tutkimuksen toteutuksen tavoitteina.

Kaikki matematiikan opetuksen tutkijat eivät kuitenkaan ole vakuuttuneita uudehkon tutkimusmenetelmän erinomaisuudesta. Esimerkiksi Jaworski (2003, 32–33) toteaa kehittämistutkimuksen sisältyneen epäsuorasti hänen tutkimuksiinsa (esim. Jarowski 1998; Potari & Jarowski 2002), vaikka kyseisiä tutkimuksia ei ole toteutettu edellä mainittujen kehittämistutkimuksen tunnuspiirteiden mukaisesti, vaan hän on soveltanut niissä yhdessä oppimisen menetelmää (*co-learning*). Jarowskin (2003, 33) mielestä keskeistä hänen tutkimuksissaan oli, että itse tutkimus (ei siis sen tuotos) toimi työkaluna opettajan ja opettamisen kehittämisessä. Tällainen kehittyminen oli tulosta opettajien sitoutumisesta, tiedon kasvusta ja opetuksen kehittämisestä. Jarowski (2003, 33) kysyykin, mitä uutta kehittämistutkimuksella saataisiin matematiikan opetuksen ja oppimisen kehittämiseen. Hän on lisäksi erityisen huolestunut opettajan roolista kehittämistutkimuksessa jatkuvana opetuksen kehittäjänä. Kehittämistutkimuksessa opettajat ovat mukana yhteistyökumppaneina. Jos tutkimus on ainoastaan esimerkiksi yliopiston tutkijoiden intressi, kuinka opettajat pääsevät tuomaan esille omia mielipiteitään ja osallistumistaan ja kuinka he voivat vaikuttaa käytännön sisältöihin tulevaisuudessa. (Jaworski 2003, 34–35.)

Jaworskin mainitsemat epäkohdat ovat varmasti huomioimisen arvoisia. Työtään aloittelevien opettajien työtaakka on melkoinen, ja jatkuva opetuksen kehittäminen uuvuttaa ja vie opettajan aikaa ja voimia itse opetuksesta. Toisaalta jo vuosia opettajantyötä tehneet saattaisivat nähdä työn kehittämisen ja tutkimisen piristävänä ja mielenkiintoisena. Mielestäni tutkimusintressi on kohdallaan parhaiten silloin, kun tutkimuksen tavoite motivoi riittävästi molempia tahoja eli opettajaa ja yliopistoa. Tällainen tilanne syntyy, kun opettaja tekee työhönsä liittyvää jatkotutkimusta. Jaworskin epäilyt tuntuvat kuitenkin jäävän varsin vähäiselle huomiolle. Esimerkiksi Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ja Schauble (2003,9–11) arvioivat kehittämistutkimuksen soveltuvuutta opetuksen tutkimiseen ja kehittämiseen seuraavien piirteiden kautta: 1) Kehittämistutkimus kehittää kasvatusteorioita, jotka liittyvät oppimisprosesseihin ja tukevat niitä, 2) se etsii uusia kasvatuksellisia malleja oppimiseen tutkimalla ja testaamalla ja 3) luo olosuhteita teorioiden kehittämiselle sekä testaa niiden toimivuutta. 4) Kehittämistutkimuksen kehittämisprosessin on oltava toistettavissa ja 5) menetelmää noudattaen saadut tulokset ja tuotokset on oltava sovellettavissa käytäntöön. Edellä mainitut piirteet mukailevat aiemmin esittelemiäni Woodin ja Berryn (2003, 195–196) kehittämistutkimukselle antamia ominaisuuksia ja soveltuisivat niin ikään tutkimuksen toteutuksen tavoitteiksi.

Opettajan työn kannalta kehittämistutkimuksen tulosten ja tuotosten sovellettavuus on todella tärkeä ominaisuus. Cobb ym. (2003, 10) kritisoivatkin kasvatustieteessä käytettyjä filosofisia suuntauksia kuten konstruktivismia niiden kyvyttömyydestä antaa opettajille toimivia ohjeita opetuksen järjestämiseen.

Miksi kehittämistutkimusta olisi syytä soveltaa opetuksen tutkimuksessa?
Edelson (2002, 118–119) esittää kolme syytä, miksi kasvatustieteen tutkijoiden tulisi siirtyä käyttämään enemmän kehittämistutkimusta:

1) Kehittämistutkimus tarjoaa hyviä soveltamismahdollisuuksia teorioiden tai erilaisten menetelmien kehittämiseen. Sen yhtenä tavoitteena onkin juuri kehittää teorioita. Koska kehittämistutkimus toteutetaan todellisissa olosuhteissa ja tilanteissa, tutkimuksen mahdolliset ristiriitaisuudet havaitaan nopeammin kuin analyyttisessa tutkimusprosessissa.

2) Kehittämistutkimuksen tulokset ovat hyödyllisiä ja sen avulla tuotettu opetussuunnitelma ja oppimateriaali ovat heti opettajien käytettävissä.

3) Kehittämistutkimus johdattaa tutkijat todellakin kehittämään kasvatustyötä ja näin tutkijoilla ja heidän tuloksillaan on suoria vaikutusmahdollisuuksia käytännön kasvatustyöhön (ks. myös Reigeluth & Frick 1999, 635).

Edellä mainittujen Edelsonin syiden lisäksi opetusmenetelmien teoreettinen suunnittelu, niiden välitön testaaminen käytännössä ja mahdollisuus huomioida kehittelyssä myös oppilaan reflektiot, antoivat perustelun kehittämistutkimuksen soveltamiseen tässä tutkimuksessa.

Kehittämistutkimuksen toteuttaminen
Edelsonin (2002, 108–110) mukaan kehittämistutkimuksessa syntyvä tutkimustulos ja tieto muodostuvat päätöksistä, joita tutkimusprosessin aikana pyritään tekemään huomioiden tutkimukselle asetetut tavoitteet ja käytännön rajoitukset. Päätökset tekee tutkimuksen kehittämisryhmä, johon kuuluvat tutkimusalueen asiantuntijat ja ammattilaiset. Kehittämisryhmä tekee päätöksiä siitä, 1) miten kehittämisprosessi etenee, 2) mitä vaihtoehtoja tutkimuksen toteuttamisessa tarvitaan ja mistä niitä valitaan sekä 3) missä muodossa tulokset otetaan käyttöön. Edelsonin mukaan jokaista kehittämisprosessia voidaan luonnehtia tehtyjen päätösten perusteella. Hän mainitsee kolme päätöstentekoryhmää, jotka määrittelevät kehittämistutkimuksen tulokset: päätökset kehittämistutkimuksen menettelytavasta *(design procedure)*, päätökset ongelman analysoinnista *(problem analysis)* ja päätökset kehittämistutkimuksen ratkaisusta *(design solution)*.

Kehittämistutkimuksen menettelytapaan liittyvät päätökset määrittelevät tutkimusprosessin kulun ja ne ihmiset, jotka osallistuvat tutkimukseen. Suunnitteluun osallistuvien täytyy usein rakentaa tietty yhdistelmä erilaisista tutkimusprosesseista, jotka vastaavat tutkimustavoitetta tai sitä kontekstia, johon malli aiotaan rakentaa. Tällaiset yhdistettävät prosessit liittyvät suunnittelun tarpeisiin ja valmisteluun, tutkimuksen kehittämiseen, toimeenpanoon ja arviointiin sekä tutkimuksen viimeistelyyn. Mikäli tutkimuksen aikana ilmenee uusi tutkimukseen liittyvä ongelma, tutkimuksen tekijät kokoavat asiantuntijaryhmän selvittämään sitä. (Edelson 2002, 108.)

Tässä tutkimuksessa asiantuntijaryhmän muodostivat tutkimuksen ohjaajat ja tutkimuksen tekijä, jotka olivat mukana tutkimuksen jokaisessa vaiheessa. Asiantuntijoina päätöksenteossa kuultiin tilanteen vaatiessa oppimateriaaliasiantuntijaa sekä koe- ja kontrolliluokkien opettajia.

Ongelman analysointi sisältää Edelsonin mukaan kuvauksen tavoitteista, joita tutkimuksella halutaan saavuttaa. Ongelman analysointiin sisältyy myös tutkimuksen tarpeen määrittely tai sen tilanteen kuvaus, johon kehittämistutkimus on tarkoitettu sekä tutkimuksen arviointi. Näin ollen myös tutkimuksen rajoitukset ja haasteet tulevat esiin ongelman analysointiin liittyvien päätösten yhteydessä. Ratkaisua muodostaessaan kehittämisryhmän täytyy valita sopivia vaihtoehtoja ja arvioida kompromisseja huomioiden tutkimuksen haasteet, tavoitteet ja rajoitukset. Ongelman analysointi alkaa usein havaitusta ongelmasta tai tilanteesta ja ideasta vastata siihen. Ensimmäinen idea on tavallisesti laadittu analyyttisten prosessien yhdistelmästä, kuten yhdistämällä arviointi ja menetelmän mallintaminen tai empiirisen prosessin toteutus ja sen arviointi. Ongelman analysointi kehittyy tavallisesti kehittämisprosessin aikana, sillä siihen tulee lisää tietolähteitä prosessin edetessä. (Edelson 2002, 109.)

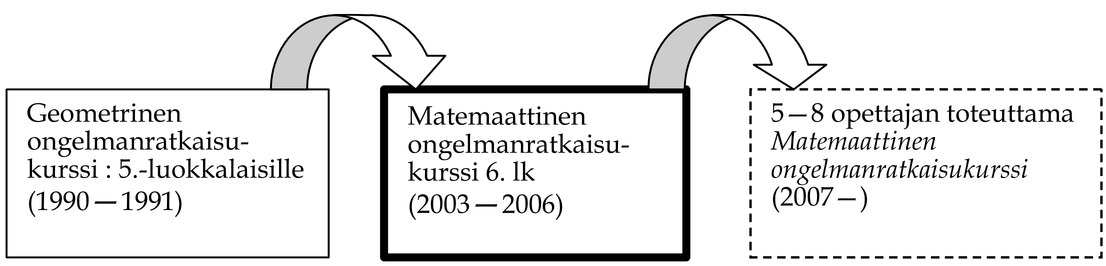
Tämän tutkimuksen tavoitteena oli luoda koeryhmän oppilaille toteuttamiskelpoinen oppimisympäristö, jonka avulla heidän ongelmanratkaisutaitoaan voitaisiin kehittää. Tähän pyrittiin ongelmanratkaisukurssilla, joka sisälsi eri oppiaineisiin integroitua matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opetusta kurssia varten laaditun oppimateriaalin avulla. Opetuksen toteutus vaati huolellista etukäteissuunnittelua ja -valmistelua. Kurssin toteuttaminen tavallisessa kouluympäristössä opetussuunnitelman tavoitteita noudattaen asetti rajoituksensa tuntien aiheisiin, opetuksen integrointiin ja tuntimääriin. Kurssin tunteja ja tehtäviä testattiin pilottitunneilla edellisenä keväänä. Niistä saatujen kokemusten ja tulosten perusteella päätettiin lopullisen kurssin sisältö.

Kehittämistutkimuksen ratkaisun Edelson määrittelee tutkimuksen tuloksena saaduksi tuotokseksi. Se on tulos tutkimuksen tekoon osallistuneiden ponnisteluista ja yrityksistä vastata ongelman analyysissä asetettuihin haasteisiin ja rajoituksiin. Kehittämistutkimuksen ratkaisussa on pyritty tasapainoisiin kompromisseihin, joita jouduttiin tekemään ongelman analyysissa. Ratkaisun rakentaminen koostuu erilaisista vaiheista, jolloin tutkijat usein hajottavat monimutkaisen ongelman helpommin käsiteltäviin osiin. Kuten muutkin kehittämistutkimuksen elementit niin myös ratkaisu kehittyy prosessin aikana sen myötä, kun tutkijoiden ymmärrys tutkittavaan aiheeseen syventyy. (Edelson 2002, 109.)

Tämän kehittämistutkimuksen ratkaisuksi ja tuotokseksi saatiin luvussa 10 esitetyt tulokset sekä lisäksi kustannettu oppimateriaali *Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle. (Helsinki: WSOY. 2004).*

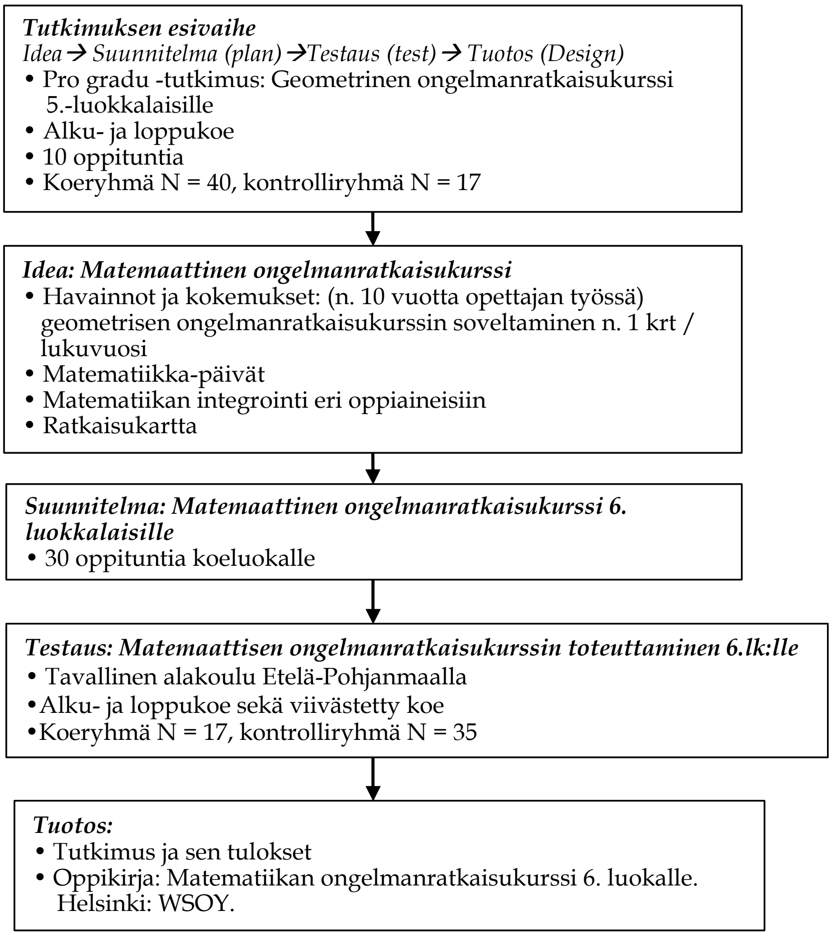
Kehittämistutkimusmenetelmän soveltaminen tähän tutkimukseen tapahtui seuraavasti: Tutkimuksen esivaiheena voidaan pitää vuonna 1991 Jussi Lehtisen kanssa tekemääni pro gradu -tutkielmaa nimeltä Geometrinen ongelmanratkaisukurssi 5.-luokkalaisille (Lehtinen & Leppäaho 1991). Se sisälsi niin ikään kvasikokeellisen tutkimusasetelman koe- ja kontrolliryhmineen sekä alku- ja loppukokeineen. Pro gradu -tutkimuksen avulla tutustuin ongelmanratkaisun tutkimukseen ja opetukseen. Työn tuloksena syntynyt kymmenen tunnin geometrinen ongelmanratkaisukurssi on tämän tutkimuksen kannalta merkityksellinen, koska testasin ja kehittelin sitä luokanopettajan työni yhteydessä, ja tällainen kehittely kuuluu olennaisena osana kehittämistutkimuksen luonteeseen. Saadut havainnot ja kokemukset ovat vaikuttaneet tutkimukseni toiseen vaiheeseen eli tässä tutkimuksessa toteutettuun *matemaattiseen ongelmanratkaisukurssiin*. Esimerkiksi oppilaille jaetut ratkaisuohjeet (liite 15; moniste 3) ovat lähestulkoon samanlaiset kuin pro gradu -tutkimuksessani. Samoin jo gradussa hyvin toimineet tehtävät siirrettiin tässä tutkimuksessa sellaisinaan alkukokeeseen tehtäviksi A4 ja A5 sekä loppukokeeseen tehtäviksi C5 ja D14 (liitteet 2 ja 3). Jatkotutkimusta aloittaessani tutkimuksen kehittämisryhmä oli muotoutunut. Kurssin tunteja ja koetehtäviä esitestattiin eri oppilasryhmillä. Saatujen tulosten ja kokemusten pohjalta niitä paranneltiin yhteistyössä tutkimuksen kehittämisryhmän kanssa.

Kehittämistutkimuksen periaatteiden mukaan kehitettyä mallia tulisi toistaa useamman kerran ja parannella sitä toistojen kuluessa. Toteutettu tutkimus rajoittui geometrisen ongelmanratkaisukurssin ja edellä mainittujen testausten pohjalta laaditun matemaattisen ongelmanratkaisukurssin toteutukseen. Toteutuksen perusteella tehtiin parannukset kurssin sisältöön, ja tällöin myös kustantajan kehittämisehdotukset otettiin huomioon. Näin saatu tuotos julkaistiin oppikirjan muodossa (Leppäaho, H. 2004b). Tutkimuksen tuotos on näin ollen varmasti toistettavissa. Tavoitteeni on jatkossa saada seuraavaan tutkimushankkeeseeni mukaan 5–8 opettajaa, jotka perehdytän tässä tutkimuksessa toteuttamaani matemaattiseen ongelmanratkaisukurssiin. Tämän jälkeen he toteuttavat kurssin ja raportoivat kokemuksensa ja palautteensa, joiden pohjalta kurssia voidaan parannella edelleen kehittämistutkimuksen periaatteiden mukaisesti (kuvio 25).



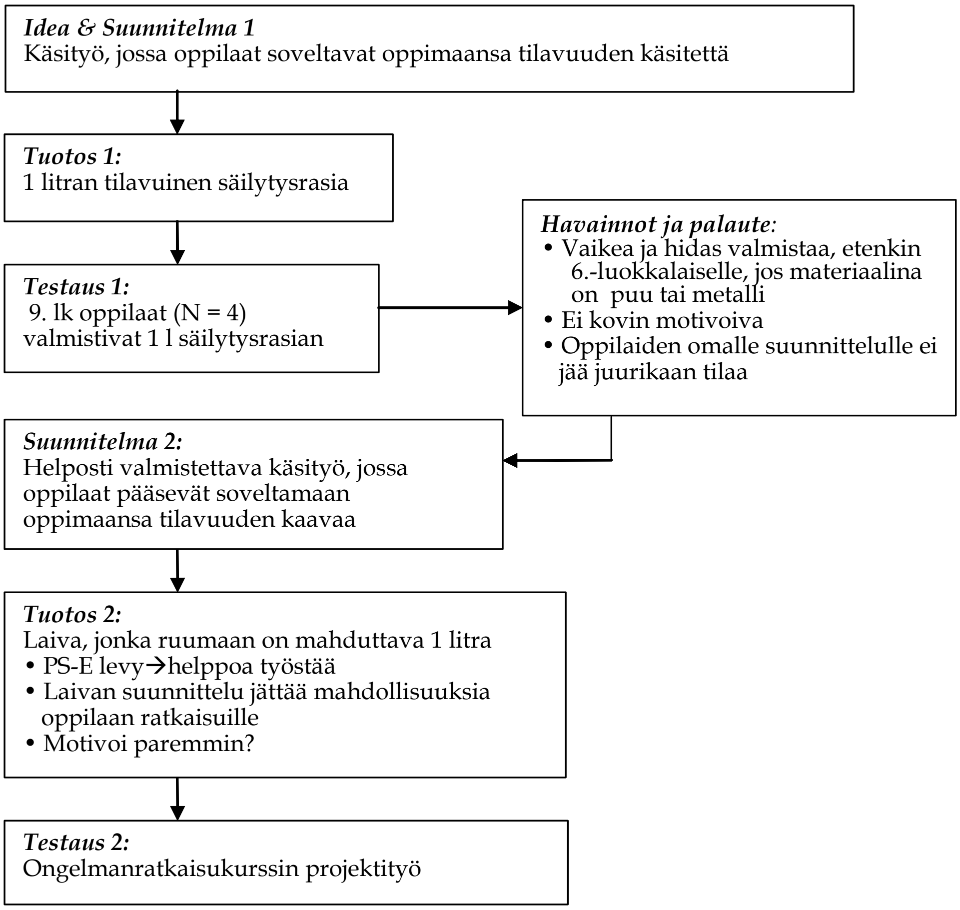
KUVIO 25 Tutkimuksen etenemissuunnitelma kehittämistutkimuksen periaatetta soveltaen

Seuraavaksi esittelen (kuvio 26) tutkimuksen tuloksena muodostuneen ratkaisun (ns. design ratkaisu), joka syntyi siis edellä mainittuja kehittämistutkimuksen toteutusperiaatteita hieman soveltaen.



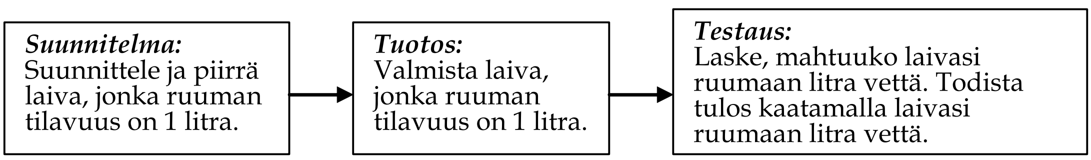
KUVIO 26 Tutkimuksen design-ratkaisu

Myös ongelmanratkaisukurssin aiheiden suunnittelu tapahtui osittain kehittämistutkimuksen periaatteen mukaisesti. Aiheita ideoitiin ja paranneltiin testausten kautta. Seuraavassa on esimerkki siitä, miten tilavuuden konkretisointia ja integroimista kehiteltiin, ennen kuin se toteutettiin laivanrakennusprojektina ongelmanratkaisukurssilla. Suunnittelun alussa ideana oli teettää oppilailla käsityö, jossa he pääsevät soveltamaan oppimaansa tilavuuden käsitettä konkreettisella tavalla. Toisin sanoen oppilaan itse haluttiin pääsevän rakentamaan ja kokeilemaan: *Onko kanta x korkeus x leveys = 1 litra?* Aluksi kokeiltiin litran tilavuista säilytysrasiaa, jonka valmistusmateriaalina oli puu. Rasian tuli olla vesitiivis, jotta se toteuttaisi samalla kertaa kaksi tavoitetta: siihen voitaisiin kaataa litra vettä ja se voitaisiin upottaa veteen, jotta se syrjäyttäisi tilavuutensa verran vettä. Näin oppilaat voitaisiin tutustuttaa Arkhimedeen lakiin. Ideaa testattiin ensin 9. luokan oppilailla kuvion 27 mukaisesti. Saadun palautteen jälkeen päätettiin toteuttaa toinen tutkimussykli, jossa tilavuuden käsitettä havainnollistavaksi projektityöksi valittiin PS-E-levystä valmistettava laiva.



KUVIO 27 Tilavuuden ja pinta-alan opetukseen käytetyn projektityön suunnitteluvaiheet

Myös opetuksessa ja oppilaiden työskentelyssä noudatettiin kehittämistutkimuksen ideaa. Esimerkiksi tilavuuden käsitteen opiskelussa oppilaille opetettiin ensin suorakulmaisen särmiön tilavuuden laskukaava, ja sitten oppilaat suunnittelivat ja piirsivät litran paperille, minkä jälkeen he valmistivat laivan käsityönään. Lopuksi arvioitiin työn tulosta (kuvio 28).

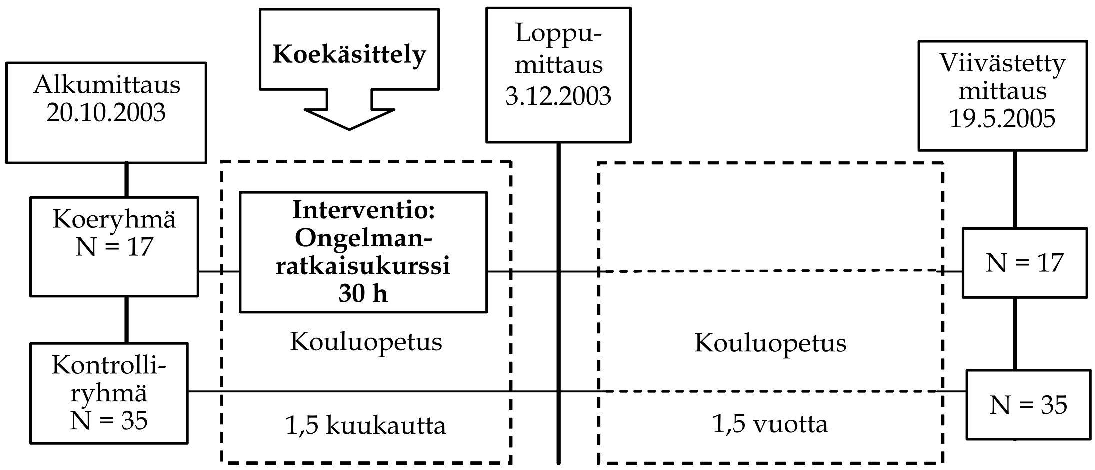


KUVIO 28 Tilavuuden käsitteen opiskelun eteneminen

9.1.2 Kvasikokeellinen tutkimusmalli

Saadakseni tietoa koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisista ongelmanratkaisutaidoista käytin kvasikokeellista eli näennäiskokeellista tutkimusmallia (*quasi experimental design*), jota tutkimuskirjallisuudessa nimitetään esikoe-jälkikoe-kontrolliryhmä-asetelmaksi (Cook & Campbell 1979, 103–120; Cohen & Manion 1992, 198–199; Moberg & Tuunainen 1989, 78–79). Kvasikokeellinen tutkimusasetelma on kuitenkin ongelmallinen, koska olosuhteiden standardointia mittausten ja koekäsittelyn aikana sekä väliin tulevien tekijöiden laajamittaista kontrollointia on yleensä lähes mahdotonta tehdä (Karma 1983, 78–80; Huttunen 1994, 145–146). Vaikeudesta huolimatta opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa on kuitenkin edelleenkin käytetty tätä tutkimusasetelmaa (esim. Jang 2006; Masui & De Corte 2005; Gordon & Debus 2002).

Koeasetelma, jossa koe- ja kontrolliryhmä muodostuvat koululuokista, on kouluympäristössä toteutettavassa tutkimuksessa luontevaa. Näin aiheutetaan mahdollisimman vähän muutoksia koehenkilöiden koulupäivään eli kouluvuosien aikana muodostuneisiin luokan sisäisiin rakenteisiin, käytänteisiin ja luokan ilmapiiriin. Samoin tutkimuksen mittareiden eli kirjallisten kokeiden suorittaminen oli tässä koulussa koulutyön arviointiin kuuluva normaali käytäntö. Toisaalta tutkimuksen koehenkilöt tarjosivat myös ihanteellisen lähtökohdan kvasikokeellisen tutkimusasetelman toteuttamiseen, sillä alkukokeen perusteella koeluokan alkukokeen keskiarvo oli lähestulkoon sama kuin kahden saman koulun rinnakkaisluokasta muodostetun ryhmän keskiarvotulos. Luokkien tasaväkisyys vastaa Morganin, Glinerin, Harmonin ym. (2005, 94) mukaan tilannetta, jonka avulla on mahdollista tutkia mittausten välillä tapahtuneen opetusintervention kausaalivaikutuksia. Tutkimuksen koeasetelma on kuvattu kuviossa 29.



KUVIO 29 Tutkimuksessa käytetty kvasikokeellinen koeasetelma

Koe- ja kontrolliryhmien alku-, loppu- ja viivästetyn kokeen tehtävien tuloksia analysoitiin kvantitatiivisesti. Koska koeryhmä oli pieni, aineistoa kerättiin myös kvalitatiivista käsittelyä varten haastattelemalla koeryhmän oppilaita ja kommentoimalla toteutetut tuntisuunnitelmat. Yksityiskohtainen kuvaus koeasetelman eri tekijöistä on luvuissa 9.2 ja 9.3.

9.1.3 Haastattelu

Koeryhmän oppilaiden kokemuksia ja mielipiteitä kurssista selvitettiin teemahaastattelun eli ns. puolistrukturoidun haastattelun avulla (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47). Haastatteluilla haluttiin saada kuvaa oppilaiden yhdestä matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueesta eli motivaatiosta (ks. luvut 4.2 ja 4.5) ja heidän suhtautumisestaan ongelmanratkaisukurssiin.

Teemahaastattelu pohjautuu kohdennettuun haastatteluun (*the focused interriew*), jonka ominaispiirteet ovat seuraavat: 1) Haastateltavat ovat kokeneet tietyn tilanteen. 2) Tutkija on tehnyt alustavan sisällön- tai tilanneanalyysin tutkittavan ilmiön oletettavasti tärkeistä osista, rakenteista, prosesseista ja kokonaisuuksista. Analyysin perusteella tutkija on päätynyt tiettyihin oletuksiin tilannetta määräävien piirteiden seurauksista siinä mukana olleille. 3) Analyysinsa perusteella tutkija kehittää haastattelurungon. 4) Haastattelu suunnataan tutkittavien henkilöiden subjektiivisiin kokemuksiin tilanteista, jotka tutkija on ennalta analysoinut. (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47.) Teemahaastattelu ei edellytä tiettyä kokeellisesti aikaansaatua yhteistä kokemusta, vaan siinä oletetaan, että yksilön kaikkia ajatuksia, kokemuksia, tunteita ja uskomuksia voidaan tutkia tällä menetelmällä (mts. 48).

Ryhmähaastattelun sijasta päädyttiin oppilaiden yksilöhaastatteluihin, jotta luokan valtahierarkia ei pääsisi vaikuttamaan siihen, kuka haastattelussa puhuu ja mitä sanotaan (Hirsjärvi & Hurme 2000, 63). Yksilöhaastattelun avulla varmistettiin jokaiselle koeryhmän oppilaalle mahdollisuus kertoa mielipiteensä muiden tietämättä.

Vaikka kysymykset oli ennalta suunniteltu, saatoin vaihdella niiden sanamuotoa joissakin tilanteissa varmistuakseni, että haastateltava ymmärsi kysymykseni oikein. Tällainen joustavuus kuuluu Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 48) mukaan teemahaastattelun luonteeseen. Myös haastattelun toteutuspaikka saattaa vaikuttaa haastattelutilanteeseen (Eskola & Suoranta 1998, 90–91), joten varasin koululta haastattelua varten erillisen huoneen, jossa haastattelin jokaisen koeryhmän oppilaan yksitellen häiriöttä. Haastattelut videoitiin ja litteroitiin kuvanauhan perusteella (ks. liite 9).

Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 42) korostamat tutkimushaastattelun piirteet huomioitiin seuraavasti:

1) *Haastattelu on ennalta suunniteltu, haastattelija on tutustunut tutkimuksen kohkohteeseen sekä käytännössä että teoriassa. Tavoitteena on, että haastattelija saa luotettavaa informaatiota tutkimusongelman kannalta relevanteilta alueilta.*

Harjoittelin haastattelua erilliselle testiluokalle keväällä 2003 suoritetun ongelmanratkaisutehtävien testauksen ja karsinnan yhteydessä. Tällöin testiluokan oppilaita haastateltiin ongelmanratkaisupäivän jälkeen. Samalla testattiin haastatteluvälineistöä ja -kysymyksiä. Kysymysrungon (liite 9) avulla selvitettiin oppilaiden mielipiteitä ja kokemuksia ongelmanratkaisukurssista sekä kartoitettiin heidän motivoitumistaan kurssin aikana. Haastatteluista koostettiin vastaus tutkimuksen kolmanteen tutkimusongelmaan: *Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun?*

Toimin itse oppilaiden haastattelijana ja olin näin ollen perehtynyt ongelmanratkaisutaidon opettamiseen, opetusintervention suunnitteluun ja toteutukseen. Opettaessani ongelmanratkaisukurssilla olin tutustunut haastateltaviin puolentoista kuukauden ajan.

2) *Haastattelu on haastattelijan alulle panema ja ohjaama.*

Koeryhmän oppilaiden haastattelu tapahtui loppukokeen jälkeen, joten oppilaat tiesivät, ettei haastattelu vaikuta kenenkään koetuloksiin tai arvosanoihin. Olin laatinut kysymysrungon, joka ohjaisi haastattelutilannetta. Tavoitteena oli saada mahdollisimman aidot ja totuudenmukaiset vastaukset esitettyihin kysymyksiin.

3) *Haastattelija joutuu tavallisesti motivoimaan haastateltavaa sekä ylläpitämään hänen motivaatiotaan.*

Oppilaan annettiin käyttää haastattelussa tukenaan ratkaisuvihkoansa, johon hän oli tehnyt ongelmanratkaisukurssin aikana annetut tehtävät. Sen avulla oppilas saattoi palautella mieleensä kurssin aikana käsiteltyjä aiheita ja tekemiään tehtäviä. Oppilaiden motivointi haastatteluun ei tuottanut ongelmia, koska haastattelut pidettiin alle 10 minuutin mittaisina ja ne toteutettiin heti kurssin jälkeen. Osoituksena motivaatiosta oli, että kaikki halusivat tulla haastatteluun, vaikka siitä oli mahdollisuus myös kieltäytyä.

4) *Haastattelija tuntee roolinsa, mutta haastateltava oppii sen haastattelun kuluessa.*

Tutkimuksen tekijänä ja siihen liittyvän opetuksen toteuttajana minun oli siirryttävä haastattelijan rooliin. Korostin oppilaille ennen haastattelua, etteivät heidän vastauksensa tule vaikuttamaan mitenkään heidän arvosanoihinsa tai ongelmanratkaisukokeiden tuloksiin. Kerroin myös, että tavoitteenani on kehittää matemaattista ongelmanratkaisukurssia heidän arviointinsa ja mielipiteidensä avulla. Näin pyrin tuomaan itseni kyselijän rooliin ja tarjosin samalla oppilaalle mahdollisuuden esittää vapaasti omat mielipiteensä ja näkemyksensä.

5) *Haastateltavan on voitava luottaa siihen, että annettuja tietoja käsitellään luottamuksellisesti.*

Oppilaille kerrottiin, että heidän haastattelujaan käytetään ainoastaan tutkimustarkoitukseen. Samalla ilmoitettiin, että raportoinnin yhteydessä oppilaiden nimitiedot muutetaan, jotta heidän anonymiteettinsä säilyy. Oppilaat eivät kokeneet tätä näkökohtaa mitenkään hankalaksi, sillä haastattelussa ei käsitelty erityisen arkaluontoisia aiheita.

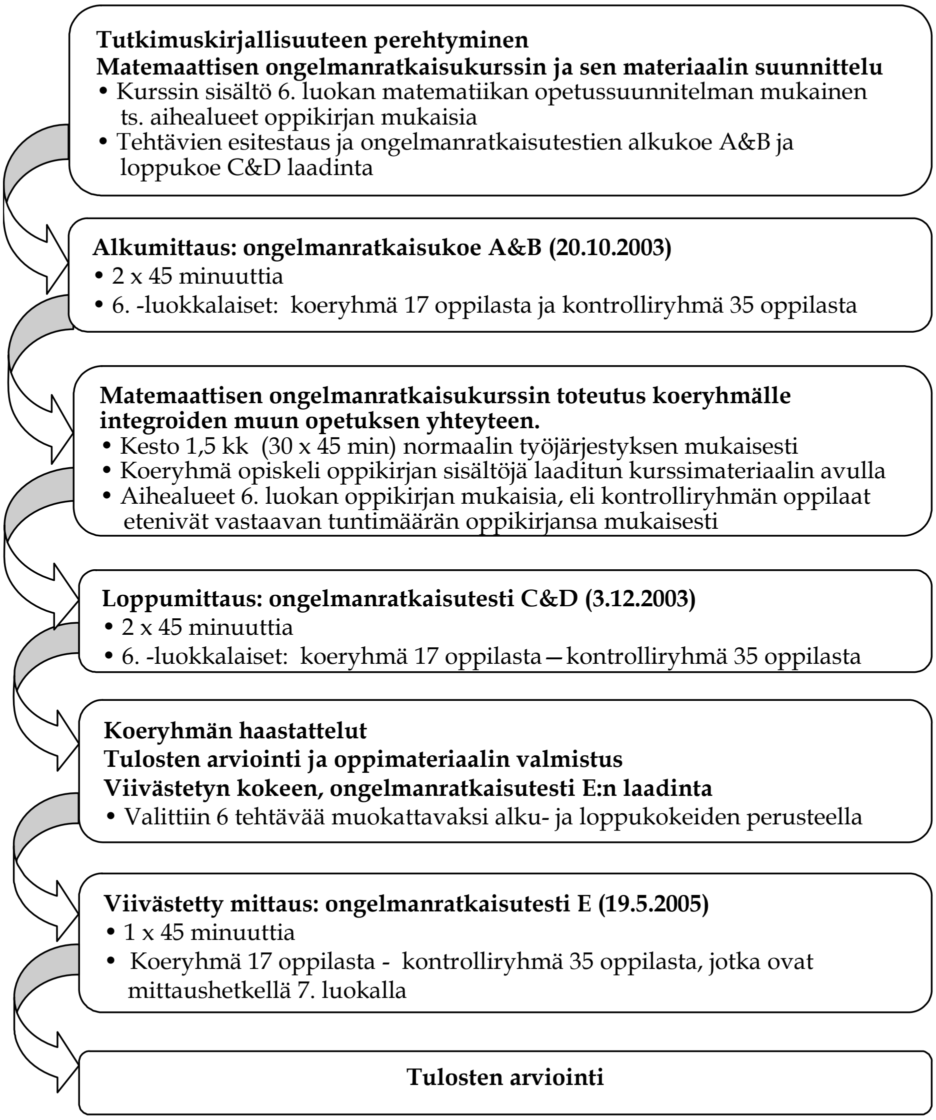
Koeryhmän haastatteluille tehtiin sisällönanalyysi, jonka avulla pyrittiin saamaan kuvaus tutkittavasta ilmiöstä (Tuomi & Sarajärvi 2002, 105), tässä tapauksesta oppilaiden motivoitumisesta ja suhtautumisesta ongelmanratkaisukurssiin. Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 153) mukaan sisällönanalyysissa voidaan käyttää analysointikeinoina teemoittelua, laskemista ja yhteyksien tarkastelua. Sisällönanalyysi toteutettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysiä noudatellen (Tuomi & Sarajärvi 2002, 110–115). Aluksi haastattelut kuunneltiin ja litteroitiin, minkä jälkeen ne luettiin ja jaoteltiin haastattelurungon kysymysten avulla. Oppilaiden vastaukset luokiteltiin pääsääntöisesti positiivisiin, neutraaleihin ja negatiivisiin, ja eri vastausten määrät olivat näin laskettavissa. Lisäksi oppilaiden vastauksista etsittiin yhteyksiä heidän alku- ja loppukokeidensa tuloksiin.

9.2 Tutkimusasetelma ja tutkimukseen osallistujat

Tutkimuksen opetuskokeilu toteutettiin noin 10 000 asukkaan kaupungin keskustan koulussa, jossa oli noin 300 oppilasta. Koulussa työskenteli rehtorin lisäksi 16 luokanopettajaa, 2 kieltenopettajaa ja yksi erityisopettaja. Koeryhmänä toimi yksi koulun 6. luokka, jossa oli 17 oppilasta: 9 tyttöä ja 8 poikaa. Kontrolliryhmä muodostui saman koulun kahdesta muusta kuudennesta luokasta, joissa oli yhteensä 35 oppilasta: 16 tyttöä ja 19 poikaa. Kaikilla kolmella kuudennella luokalla toimivalla opettajalla oli luokanopettajan pätevyys ja vähintään 7 vuotta työkokemusta. Lisäksi he olivat opettaneet luokkiansa vähintään yhden lukuvuoden ajan. Koulussa oppilaat sijoitettiin luokkiinsa sattumanvaraisesti, ilman mitään erityisiä valintaperusteita. Luokkajako säilytettiin samanlaisena koko alakoulun ajan, ja kukin luokka opiskeli kaikkia oppiaineita samat tuntimäärät samojen oppikirjojen ja materiaalien avulla.

Kuudesluokkalaisten valintaan päädyttiin siksi, että heille oli opetettu matemaattiset perustaidot (peruslaskutoimitukset ja -käsitteet) ja niiden soveltamista oli jo harjoiteltu. Syyslukukaudella iältään 11–12-vuotiaiden valintaa tukee myös Piaget´n kehitysvaiheteoria. Sen mukaan oppilaat olivat konkreettisten ja formaalien operaatioiden kehitysvaiheiden murrosvaiheessa. Tässä iässä lapsen ajattelun oletetaan muuttuvan Piaget'n (1967a, 61–62; Piaget 1967b, 148) mukaan konkreetista formaaliin, joten ajattelu voi tapahtua matemaattisten symbolien, oletusten ja sanojen avulla. Tosin murrosvaiheen ajankohdasta ja siitä, mitä lapset kykenevät tai eivät kykene tekemään, on oltu eri mieltä (Durkin 1995, 19). Hautamäen (1984, 122) tutkimuksen mukaan vain 1/3 oppilaista saavuttaa peruskoulun aikana formaalien operaatioiden vaiheen ja myös oppilaan perheen sosiaaliryhmä vaikuttaa hänen ajattelunsa tasoon. Myös Shayerin (2002, 182–183) mukaan valtaosa 14-vuotiaistakin on yhä konkreettisten operaatioiden vaiheessa. Edellä mainitut tulokset viittaavat vahvasti siihen, että useiden oppilaiden kehitys viivästyy tai jopa uhkaa pysähtyä konkreettisten operaatioiden vaiheeseen. Sen vuoksi tässä tutkimuksessa toteutetulla opetuskokeilulla oli tavoitteena opettaa ongelmanratkaisua ja matemaattisia formaaleja käsitteitä sitoen niitä konkreettisiin havaintoihin ja toimintaan. Ratkaisukartan ja muiden itse valmistamiensa tuotosten (laiva, palapeli) avulla oppilas voisi siirtyä ajattelussaan ja käsitteenmuodostuksessaan kohti formaalien operaatioiden vaihetta, mutta voisi ”palata” vertaamaan niitä konkreettisiin tuotoksiinsa.

Tutkimusprosessin selventämiseksi sen päävaiheet on esitelty kuviossa 30.



KUVIO 30 Tutkimuksen vaiheet

Alkumittaus suoritettiin ongelmanratkaisukokeella koe- ja kontrolliryhmissä. Tämän jälkeen pidin koeryhmälle 1,5 kuukauden aikana 30 oppituntia kestävän ongelmanratkaisukurssin, joka oli liitetty matematiikan oppikirjan aihealueisiin siten, että oppikirjan asioita opiskeltiin kurssin ohessa integroiden niitä muihinkin oppiaineisiin. Koeryhmän muut oppitunnit piti luokan oma opettaja. Ongelmanratkaisukurssin aikana kontrolliryhmä jatkoi opiskeluaan entiseen tapaansa matematiikan ja muiden oppikirjojen mukaisesti omissa luokissaan, omien opettajiensa johdolla. Kontrolliluokan opettajien kanssa sovittiin, että he käyttävät oppikirjan monisteita ja luokissa olevia pulmakortteja yms. materiaaleja tapansa mukaan. Molemmat opettajat olivatkin antaneet niitä oppilaille lisätehtäviksi. Tosin en pyytänyt heitä raportoimaan tai kontrolloimaan oheismateriaalien käyttöä. Koska koulun rinnakkaisten kuudensien luokkien alkukokeiden tulokset ja matematiikan arvosanojen keskiarvot olivat hyvin lähellä toisiaan, oletuksena oli, että myös opetuskäytänteet olivat olleet samantapaisia.

Vihkotyöskentelyssä otoksen oppilaat olivat tottuneet samoihin koulun sisällä sovittuihin tapoihin. Kirjan tehtävät laskettiin pääsääntöisesti vihkoon oppikirjasarjan vihkotyöskentelyohjeistuksen mukaisesti (esim. Laskutaito 5, 2002, 4). Opettajat olivat ohjeistaneet oppilaita selkeään vihkotyöskentelyyn, johon sisältyi marginaalien ja tehtävänumeroiden sekä apupiirrosten, lausekkeiden ja välivaiheiden merkitseminen. Opetuskokeilun päätyttyä koe- ja kontrolliryhmälle suoritettiin loppumittaus ongelmanratkaisukokeella. Loppumittauksen jälkeen koeryhmän oppilaat haastateltiin.

Koeryhmän oppilaiden ongelmanratkaisuvihot kerättiin pois, jotta varmistuttiin siitä, ettei koeryhmän oppilailla ole apukeinoja valmistautua 1,5 vuotta koeryhmän opetusintervention jälkeen. Näin pitkän aikajakson jälkeen pelkkä muistinvarainen työskentely kokeessa on lähes mahdotonta. Suoriutumiseen vaikuttanevat pikemminkin oppilaan asenne, motivaatio ja harrastuneisuus ajanjakson aikana.

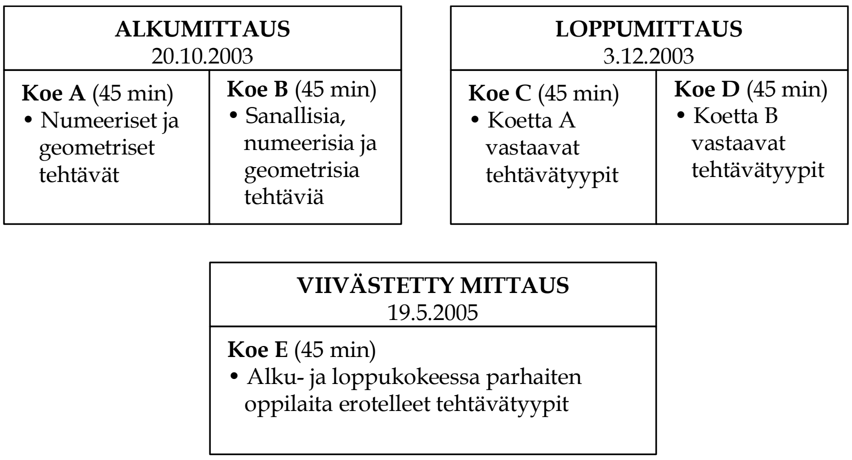
9.3 Alku- ja loppumittaus sekä viivästetty mittaus

Koe- ja kontrolliryhmän ongelmanratkaisutaidoista hankittiin tietoa käyttämällä alku- ja loppumittauksessa sekä viivästetyssä mittauksessa matemaattisen ongelmanratkaisutaidon mittaamiseen laadittuja kokeita. Kokeen käyttö oli luontevaa, koska tässä koulussa 6.-luokkalaiset olivat tottuneet säännöllisesti pidettäviin kirjallisiin kokeisiin. Tutkimusta varten kehitettyjen kokeiden ja opetusmateriaalien tavoitteena oli, että opettajien on mahdollista toteuttaa ja arvioida matemaattinen ongelmanratkaisukurssi jatkossakin heidän työympäristössään, koulussa. Seuraavaksi esittelen tutkimuksen mittareina käytettyjen kokeiden laadintaperusteita ja selvitän, mitä näillä kokeilla oli tarkoitus mitata.

9.3.1 Mittareiden laadinnan periaatteet

Mittareihin eli tässä tapauksessa alku- ja loppukokeeseen sekä viivästettyyn kokeeseen valittiin eritasoisia tehtäviä siten, että ne mittaisivat mahdollisimman monipuolisesti ongelmanratkaisutaitoa. Kokeet eivät olleet täysin samanlaisia, mutta niiden tehtävätyypit ja rakenne muistuttivat toisiaan (kuvio 31). Voidaan tietysti kysyä, olivatko samanrakenteiset ja -tyyppiset tehtävät enää ongelmia loppukokeessa ja viivästetyssä kokeessa. Kun huomioidaan 6.−7.-luokkalaisten oppilaiden ikä ja pitäydytään koulumatematiikan sisällöissä, niin tehtävät, joissa on eri luvut ja eri konteksti, riittävät täyttämään tässä tutkimuksessa asetetun ongelman määritelmän. Sen mukaan *Ongelma on sellainen tehtävätilanne, jota yksilö ei kykene <u>välittömästi</u> ratkaisemaan, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla.* Lisäksi nämä tehtävät esitettiin koetilanteessa 1,5 kuukautta ja 1,5 vuotta edellisen kokeen jälkeen. Kokeet toteutettiin myös kontrolliryhmälle, jotta lopullisissa tuloksissa saatiin huomioitua koeryhmän kasvuun ja normaaliin kehitykseen kuuluva luonnollinen kehittyminen.

Alku- ja loppumittausta varten laadittiin kaksi matemaattista ongelmanratkaisutaitoa mittaavaa koetta, jotka sisälsivät 14 tehtävää (ks. liite 2 ja 3). Tehtävät valittiin vuoden 2003 keväällä erilliselle 6. luokalle tehdyn esitestauksen perusteella. Ongelmanratkaisutehtävien tuli täyttää seuraavat kriteerit: 1) tehtävien tuli edustaa monipuolisesti erilaisia ongelmatehtävätyyppejä (numeerisia, sanallisia, geometrisia), jotta ongelmanratkaisutaidon eri osa-alueita (ks. luku 4.5) voitaisiin mitata, 2) niiden piti täyttää ongelman määritelmä ja 3) tehtävien oli oltava ratkaistavissa 6.-luokkalaiselle opetetuin tiedoin ja taidoin. Koetehtäviä ei käsitelty koeryhmälle toteutetulla ongelmanratkaisukurssilla. Kokeet koostuivat kahdesta osiosta, jotka koe- ja kontrolliryhmän oppilaat tekivät kahden oppitunnin aikana. Ensimmäinen osio (alkukokeessa koe A ja loppukokeessa koe C) koostui numeerisista ja geometrisista ongelmanratkaisutehtävistä. Toinen osio (alkukokeessa koe B ja loppukokeessa koe D) sisälsi edellä mainittujen lisäksi sanallisia ongelmatehtäviä. Loppukokeen tehtäviä ja lukuarvoja muutettiin, mutta niiden rakenteet ja tehtävätyypit säilytettiin samanlaisena kuin alkukokeessa. Poikkeuksena olivat numeeriset tehtävät A1d ja C1d sekä A1e ja C1e, jotka olivat lukuarvoiltaan samanlaiset. Alkukokeessa oppilaan oli vastattava 33 tehtäväkohtaan (a, b, c,…) ja loppukokeessa yhteensä 36 tehtäväkohtaan. Molemmissa kokeissa maksimipistemäärä oli 58. Näin alku- ja loppukoetta voitiin vertailla keskenään. Lopullisesta tulosten käsittelystä jätettiin pois tehtävät B6 ja D7, koska niihin ei ollut vastattu. Tehtävä D7 osoittautui myös liian vaikeaksi. Myös tehtävät B8a ja D8a hylättiin lopullisesta käsittelystä, koska D8a käsitteli kulutusta, eikä sitä ollut todistettavasti opetettu kontrolliluokille.



KUVIO 31 Tutkimuksessa käytettyjen mittareiden välinen yhteys

Viivästetty mittaus suoritettiin alku- ja loppukokeiden tehtävätyypeistä kootun ongelmanratkaisukokeen E avulla. Muokattavaksi valittiin sellaiset tehtävät, jotka erottelivat parhaiten oppilaita alku- ja loppukokeessa. Tämän jälkeen tehtävien lukuarvoja ja sisältöä muutettiin siten, että tehtävän rakenne säilyi samana ja alku- ja loppukokeen vastaaviin tehtäviin vertailukelpoisena. Näin menetellen rakennettiin yhden oppitunnin mittainen koe, joka koostui kuudesta numeerista, geometrista ja sanallista ongelmanratkaisutaitoa mittaavasta tehtävästä. Oppilaan oli vastattava viivästetyssä kokeessa yhteensä 11 tehtäväkohtaan, joista kertyi kokeen maksimipistemääräksi 22 pistettä.

Viivästettyä koetta ei siis voi verrata kokonaisuudessaan suoraan alku- ja loppukokeen tuloksiin, mutta sen tarkoituksena olikin selvittää, onko ongelmanratkaisussa 1,5 vuoden jälkeen enää eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä. Samoin kokeiden vertailua ryhmien välillä voidaan tehdä toisiaan vastaavien tehtävätyyppien kesken. Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävien vastaavuus on esitetty taulukossa 3.

TAULUKKO 3 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävien vastaavuus

ALKUKOE A	A1a	A1b	A1c	A1d*	A1e*	A1f	A2	A3	A4	A5
LOPPUKOE C	C1a	C1b	C1c	C1d*	C1e*	C1f	C2	C3	C4	C5
VIIVÄSTETTYKOE E			E1a	E1b	E1c			E2		
ALKUKOE B	B7	B8b	B9	B10	B11	B12	B13	B14		
LOPPUKOE D	D6	D8b	D9	D10	D11	D12	D13	D14		
VIIVÄSTETTYKOE E	E3			E4		E5	E6			

(merkityt tehtävät olivat samoja alku- ja loppukokeessa)*

Seuraavassa on esimerkki alkukokeen sanallisesta tehtävästä B7:

B7. *Ville kävi ostamassa kissan maaliskuun 13. päivänä. Se päivä oli torstai. Mikä viikonpäivä oli maaliskuun ensimmäinen päivä?*

Alkukokeen B7 tehtävää vastasi loppukokeessa tehtävä D6:

D6. *On hiihtokilpailu. Neljä hiihtäjää lähestyy maalia. Suomalainen on ensimmäisenä. Norjalainen on venäläisen takana. Venäläinen on ruotsalaisen edellä. Norjalainen on ruotsalaisen edellä. Kuka on viimeisenä?*

Viivästetyssä mittauksessa tehtäviä B7 ja D6 vastasi tehtävä E3:

E3. *Formula-kilpailussa nopeimmat autot lähestyvät maalia: Schumacher on Webberin takana. Webber on Alonson edellä. Schumacher on Alonson edellä. Räikkönen ajaa Webberin edellä ja Alonso ajaa Coulthardin edellä. Mikä on kilpailijoiden järjestys?*

Kaikkien kolmen tehtävän (B7, D6 ja E3) rakenne on sama: niissä on selvitettävä tekstin antaman informaation avulla tietty järjestys. Tehtävien aiheet ja tulokset ovat kuitenkin erilaiset, joten vastausten ulkoa muistaminen on tuloksen kannalta hyödytöntä.

Koska tehtävätyypit kokeissa olivat erilaisia, esittelen tässä yhteydessä vielä yhden esimerkin numeeristen tehtävien vastaavuudesta. Alkukokeen A1c, loppukokeen C1c- ja viivästetyn kokeen E1a-tehtävissä ratkaisuidea oli myös sama, mutta lukuarvot ja näin ollen myös tulokset olivat erilaisia:

A1. *Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.*

c)

1 → 4 → 9 → 16 → $\square$ → $\square$

C1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.
c)
1 → 5 → 11 → 19 → $\square$ → $\square$

____

E1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.
a)
2 → 4 → 8 → 14 → $\square$ → $\square$

____

Edellä esitetyissä tehtävissä oppilaan oli pystyttävä löytämään numeerinen säännönmukaisuus ja kyettävä antamaan sille myös kirjallinen perustelu.

9.3.2 Mitä taitoja ongelmanratkaisukokeiden tehtävät mittaavat?

Käytettyjä koetehtäviä on mahdollista luokitella usealla eri tavalla. Luokitteluperusteena voidaan käyttää esimerkiksi tehtävätyyppiä (avoin – suljettu), tehtävän aihealuetta (geometrinen – numeerinen), tehtävän edellyttämiä tietoja tai taitoja (kertolasku, pinta-ala, yksikkömuunnokset). Kun tehtäville laaditaan vielä yksityiskohtaiset pisteytysperusteet, on suurena vaarana, että luokitteluperusteeksi saadaan monimutkainen ja sekava esitys.

Tässä tutkimuksessa koetehtävien luokittelussa käytettiin luvussa 4.5 esittelemääni matemaattisen ongelmanratkaisutaidon jaottelua. Selkeyden säilyttämiseksi tehtäviä ei luokiteltu niiden motivoivuuden, selektiivisyyden tai niissä käytettävien ongelmanratkaisumallien ja strategioiden perusteella, vaikka tällainenkin luokittelu tehtävistä olisi voitu tehdä. Se olisi kuitenkin edellyttänyt jokaisen oppilaan toiminnan seurantaa ja haastattelua itse koetilanteessa. Tässä tutkimuksessa kokeiden avulla haluttiin mitata sellaisia oppilaiden matemaattisten ongelmanratkaisutaitojen muutoksia, jotka olisivat kirjallisesti havaittavissa. Niinpä tehtävien luokitteluryhmät muodostettiin matemaattisen ongelmanratkaisutaidon jaottelun kolmesta kirjallisten tuotosten perusteella havaittavasta osa-alueesta seuraavasti: 1) Tehtävät, jotka edellyttivät taitoa yhdistää ongelman tulkinta ja laskeminen kokonaisratkaisuksi (analogioiden muodostaminen, joustava ajattelu ja visualisointi). 2) Tehtävät, jotka edellyttivät matemaattisia taitoja. 3) Tehtävät, jotka edellyttivät ymmärtävää luku- ja kirjoitustaitoa. Näihin ryhmiin sijoitettiin ne osataitoalueet, joita kunkin tehtävän ratkaisemiseksi pääasiassa tarvittiin (taulukko 4). Näin ollen tässä tutkimuksessa käytetyt kokeet mittaavat kolmea ongelmanratkaisutaidon osa-aluetta.

Kuten jo luvussa 9.3.1 todettiin, tietyt tehtävät vastasivat rakenteeltaan toisiaan (B7 ≈ D6 ≈ E3; A1c ≈ C1c ≈ E1a), eli ne mittaavat samoja taitoalueita. Koska yhden koetehtävän ratkaisemiseen saatettiin tarvita useampaa matemaattisen ongelmanratkaisun taitoaluetta, koetehtäviä ei yritetty luokitella pelkästään yhteen alueeseen, vaan sama tehtävä sijoitettiin useampaankin kohtaan. Taulukossa 4 on esitetty tutkimuksessa käytettyjen ongelmanratkaisukokeiden A, B, C, D ja E (liitteet 2, 3 ja 4) tehtäväkohtainen jaottelu. Yksityiskohtainen analyysi tehtävien sisällöstä on liitteenä 22.

TAULUKKO 4 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävien jaottelu niissä vaadittavien taitojen perusteella

Taito yhdistää ongelman tulkinta ja laskeminen kokonaisratkaisuksi (analogioiden muodostaminen, joustava ajattelu, visualisointi)	
▪ Ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen	A4, C4, A5, C5, B7, D6, E3, B9, D9, B11, D11, B14, D14
▪ Lausekkeen muodostaminen	B9, D9, B10, D10, E4, B11, D11
▪ Ratkaisun visualisointi	A5, C5, B7, D6, E3, B13, D13, E6, B14, D14
▪ Kaavan muodostaminen	A2, C2, A3, C3, E2, B8, D8
▪ Looginen päättely	A5, C5, B7, D6, E3, B8, D8, B10, D10, E4, B11, D11, B12, D12, E5, B13, D13, E6, B14, D14
▪ Luova ongelmanratkaisu	B12, D12, E5, B13, D13, E6
Matemaattiset taidot	
▪ Numeerinen ongelmanratkaisu	A1, B1, E1, B10, D10, E4, B12, D12, E5
▪ Geometrinen ongelmanratkaisu	A2, C2, A3, C3, E2, B11, D11, B14, D14
▪ Laskutoimitusten suorittaminen	B8, D8, B9, D9, B10, D10, E4, B11, D11
Ymmärtävä luku- ja kirjoitustaito	
▪ Luetun ymmärtäminen	A5, C5, B7, D6, E3, B8, D8, B9, D9
▪ Säännön ilmaiseminen kirjallisesti	A1, B1, E1, A3, C3, E2, B12, D12

Koetehtävien luokittelun tarkoituksena (taulukko 4) on osoittaa, että kokeet todellakin mittaavat tässä tutkimuksessa määriteltyä matemaattista ongelmanratkaisutaitoa ja sitä, että pelkästään yhden taidon osa-alueen mittaaminen yhdellä tehtävällä on hankalaa. Tässä tutkimuksessa oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja haluttiin tarkastella koetulosten avulla pääasiassa kokonaisuutena. Koetehtävien pisteytysperiaatteena oli kuitenkin jakaa tehtävät ratkaisu- ja perusteluprosessiosaan, jotta voitiin vertailla koe- ja kontrolliryhmien suorituksia näillä osa-alueilla. Tätä esittelen tarkemmin luvussa (10.1).

9.4 Matemaattinen ongelmanratkaisukurssi

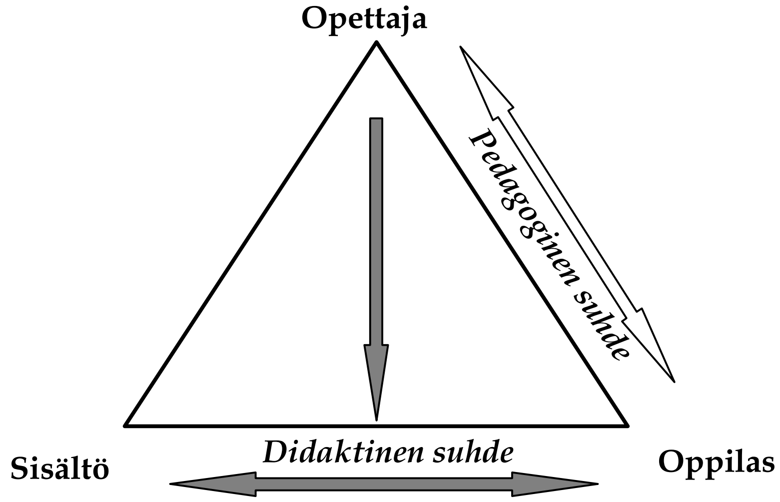
Tutkimuksessa toteutettu opetusinterventio nimettiin matemaattiseksi ongelmanratkaisukurssiksi. Se suunniteltiin ja toteutettiin edellä esitetyn teoriataustan ja viitekehyksen pohjalta. Kurssin tavoitteena oli luoda oppimisympäristö koeryhmän oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen kehittämiselle. Seuraavissa luvuissa esittelen kurssin suunnittelun ja opetuksen toteutuksen periaatteet.

9.4.1 Opetuksen lähtökohdat

Tutkimuskirjallisuus antoi teoreettiset perustiedot ongelmanratkaisutaidon opetukseen. Opetuksen toteuttaminen käytännössä tuo siihen kuitenkin aina omat haasteensa ja tilannekohtaiset muuttujansa. Tässä tutkimuksessa opetuksessa pyrittiin huomioimaan didaktisesti oppilas, opettaja ja opetuksen sisältö eli matemaattinen ongelmanratkaisu.

Kansasen (2004, 37) mukaan opetus on jatkuva prosessi, opetustapahtuma, jossa kaikki siinä vaikuttavat tekijät ovat kaiken aikaa vuorovaikutuksessa keskenään. Opettajan ja oppilaiden välistä suhdetta ja toimintaa sekä opetuksen sisältöä on usein havainnollistettu didaktisella kolmiolla (kuvio 32), jonka kehittäjänä pidetään Johan Friedrich Herbartia (Kansanen 2004, 70).

Opettajan toiminnassa ja ajattelussa ovat keskeisiä hänen suhteensa oppilaaseen ja opetettavaan sisältöön. Opetustapahtumassa ilmenevää opettajan ja oppilaiden välistä inhimillistä vuorovaikutusta kutsutaan *pedagogiseksi suhteeksi*. Pedagogisen suhteen välityksellä opettaja ohjaa oppilaita. Tunnusomaista sille on opettajan toiminta oppilaan parhaaksi sekä opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutus, joka tapahtuu oppilaan itsensä vuoksi. (Kansanen 2004, 75–76.)



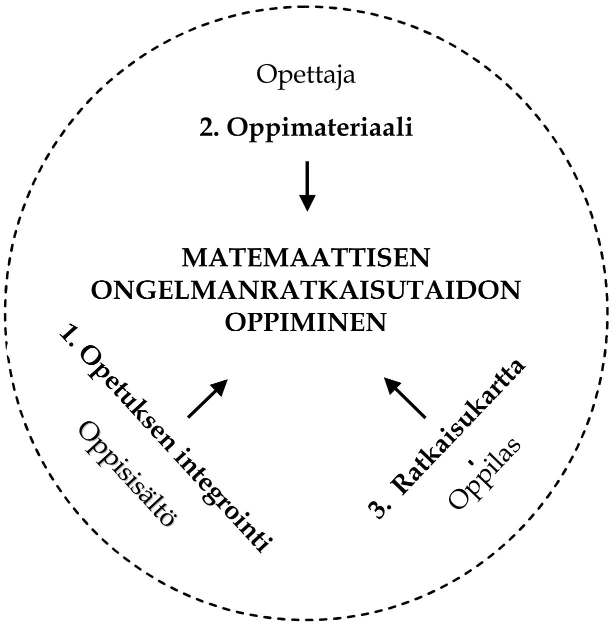
KUVIO 32 Pedagoginen ja didaktinen suhde (ks. Kansanen & Meri 1999, 112–114)

Kun painotetaan oppilaan suhdetta tavoitteeksi asetettujen sisältöjen oppimiseen, puhutaan didaktisesta suhteesta (Kansanen 2004, 80). Opettaja liittyy tähän suhteeseen siten, että hän yleensä ohjaa oppilaan tavoitteellista opiskelua. Opettajan toiminta siis vaikuttaa oppilaan ja sisällön väliseen suhteeseen. Didaktiseksi suhteeksi (kuvio 32) sanotaankin opettajan asiantuntemuksen tai näkökulman tuottamaa suhdetta pedagogiseen suhteeseen; on kuitenkin tärkeää, että oppiminen ja muut opetuksen seuraukset syntyvät oppilaiden omasta toiminnasta (Kansanen 2004, 81).

Opetustapahtuman tarkoituksena on saada oppilaissa aikaan oppimista. Opettajan tavoitteena on pyrkiä tähän päämäärään ohjaamalla oppilaan opiskelua. Tavoitteeseen päästäkseen opettajan on ensin varmistettava, että oppilaalla on edellytykset oppia opetettava sisältö. Opetustapahtuman voidaan ajatella muodostuvan didaktisen kolmion keskelle. Oppimiseen johtavan opetustapahtuman edellytyksenä on kaikkien didaktisen kolmion osatekijöiden tiivis vuorovaikutus.

Tässä tutkimuksessa toteutetussa opetuskokeilussa pedagoginen suhde muodostui pitämieni ongelmanratkaisukurssin tuntien kuluessa. Oppilaiden opettaminen ja heidän työskentelynsä ohjaaminen kurssin aikana antoi mahdollisuuden pedagogisen suhteen muodostamiselle. Tavoitteenani oli saada oppilaat kokemaan opetukseni heidän parhaakseen. Roolini tulikin olla heidän matemaattisen ongelmanratkaisutaitonsa valmentaja ja ohjaaja. Didaktisen suhteen luomiseksi "laitoin likoon" kymmenvuotisen kokemukseni opetustyöstä ja perehtyneisyyteni ongelmanratkaisutaitoon ja sen opettamiseen. Ennen opetusta oppilaan suhdetta matemaattiseen ongelmanratkaisuun selvitettiin oppilaiden suorittaman alkukokeen avulla. Tavoitteeni oli opetuksen avulla saada aikaan oppilaiden ongelmanratkaisussa taidollista ja asenteellista kehittymistä. Niitä arvioitiin opetuksen jälkeen loppukokeen, koeryhmän haastattelujen ja viivästetyn kokeen avulla.

Tutkimuksessa toteutetun matemaattisen ongelmanratkaisukurssin päämääränä oli luoda oppimisympäristö ja antaa konkreettisia työkaluja Herbartin didaktisen kolmion keskipisteessä olevan opetustapahtuman, tässä tapauksessa matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettamisen kehittämiseen (kuvio 33). Oppilaalle opetettiin *ratkaisukarttamenetelmä* avuksi erilaisten ongelmatehtävien käsittelyyn. Opettajalle suunniteltiin helposti käyttöön otettava ja testattu *oppimateriaali*. Oppisisältöä laajennettiin *integroimalla opetusta* eri oppiaineisiin ja oppilaan lähiympäristöön. Näiden yhteisvaikutuksen avulla muodostettiin kuvion 33 mukainen oppimisympäristö, jonka tavoitteena oli tarjota koeryhmän oppilaille mahdollisuudet mielekkääseen ja motivoivaan matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun.



KUVIO 33 Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin avulla luotu oppimisympäristö

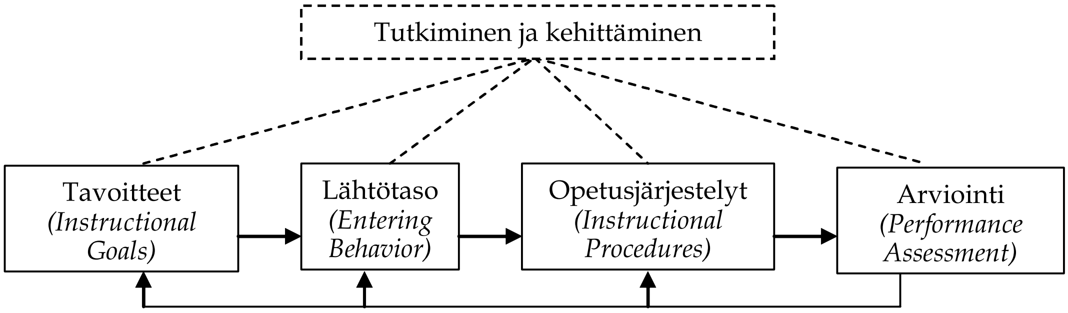
Perusajatuksena kurssia laadittaessa oli, että ongelmanratkaisua pyrittiin opettamaan mahdollisimman monipuolisesti. Työmuotoina käytettiin opettajajohtoista työskentelyä, ryhmätyöskentelyä sekä oppilaiden itsenäistä ja tutkivaa työskentelyä. Kurssin opetuksellinen sisältö valittiin sellaiseksi, että se kattoi luvussa 5.3 esittelemäni Schroederin ja Lesterin tekemän jaottelun kaikki kolme opetustavoitetta:

- Opetetaan jotakin ongelmanratkaisusta, jolloin seurataan Polyan kaaviota tai sen muunnoksia.
- Opetetaan ongelmanratkaisua varten, jolloin painotetaan matematiikan käyttämisaspektia.
- Opetetaan ongelmanratkaisun avulla, jolloin ongelmanratkaisu ymmärretään opetusmenetelmänä. (Schroeder & Lester 1989, 32–33.)

Kurssilla opetettiin *itse ongelmanratkaisusta* mm. ongelmanratkaisustrategioita (esim. ongelman yksinkertaistaminen, takaperin työskentely ja järjestelmällinen listaus). Strategioiden käyttöä opeteltiin ensin yhdessä esimerkkitehtävien avulla laskien, ja sitten oppilaat pyrkivät soveltamaan niitä itsenäisesti tunnilla ja kotitehtävinä laskettaviin tehtäviin. Yhtenä kurssin teemana oli tutkimusta varten kehitetyn ongelmanratkaisustrategian eli ratkaisukarttamenetelmän (ks. luku 7) opettelu ja soveltaminen ongelmatehtävien ratkaisussa.

Ongelmanratkaisua varten kurssilla opiskeltiin 6. luokan oppimäärään kuuluvia matemaattisia perustaitoja, joita olivat mm. pinta-ala, tilavuus ja yksikkömuunnokset. Taitojen opiskelun avulla voitiin myös laajentaa ongelmatehtävien aihealueita. Opetus pyrittiin toteuttamaan *ongelmanratkaisun avulla* aina, kun se vain suinkin oli mahdollista. Kyselevä opetus mahdollistaa ongelmakeskeisen opetustavan, kunhan opettaja vain malttaa olla itse vastaamatta liian nopeasti esittämiinsä *miksi?-*, *kuinka?-* ja *miten?*-kysymyksiin. Esimerkiksi Arkhimedeen lakia opetettaessa (luku 10.2.1 tunti 27 ja 28) oppilaille esitettiin kysymys: Miksi muovailuvahasta tehty vene kelluu ja miksi se uppoaa, jos sama vene muovaillaan palloksi? Tähän ongelmaan oppilaat etsivät vastausta omatoimisesti muovailuvahalla ja vesiastialla kokeillen.

Ongelmanratkaisukurssin opetuksessa toteutettiin Glaserin (1962, 5–21) opetuksen perusmallia *(component phases of an instructional system)*. Malli (kuvio 34) on perinteinen ja toimivaksi havaittu: saman rakenteen voi helposti löytää valtakunnallisista opetussuunnitelmien perusteista samoin kuin matemaattisten aineiden didaktisesta kirjallisuudesta (esim. Leino 1977, 12; Ahtee & Pehkonen 2000, 12–13). Opetuksessa huomioitiin sen neljä perustekijää: tavoitteet, lähtötaso, opetusjärjestelyt ja arviointi. Ne jäsensivät opetusta, ja niiden vuorovaikutus pyrittiin huomioimaan opetuksen aikana, niin yhdellä tunnilla kuin koko kurssinkin aikana.



KUVIO 34 Glaserin (1962, 6) opetuksen perusmalli

Oppilaan lähtötason selvittäminen on Ausubelin, Novakin ja Hanesian (1978, 46) mukaan tärkein yksittäinen oppimiseen vaikuttava tekijä. Oppilaiden lähtötaso kartoitettiin alkumittauksessa. Jokaisen oppilaan tavoitteena oli parantaa omaa suoritustaan loppukokeessa. Opetusintervention arviointi tapahtui loppukokeen avulla ja sen jälkeen koeryhmän oppilaille toteutetuissa haastatteluissa. Tulosten pysyvyyttä arvioitiin myös 1,5 vuotta myöhemmin pidetyllä viivästetyllä mittauksella. Tuntikohtainen lähtötaso huomioitiin kurssin tuntisuunnitelmissa siten, että aihealueet ja vaatimustaso olivat sidoksissa 6. luokan syksyn matematiikan opetussuunnitelmaan.

Opetusjärjestelyt on myös huomioitava tämäntyyppistä opetusjaksoa suunniteltaessa. Opetuksen toteutuksen suunnittelun yhteydessä käytetään yleensä kirjallisuudesta johdettuja lainalaisuuksia eli opetuksen periaatteita, kuten esimerkiksi spiraaliopetusta, ennakkojäsentelyä, havainnollistamista, konkreettista työskentelyä, avointa lähestymistapaa, kokeellista työskentelyä ja yhteyttä arkielämään (Ahtee & Pehkonen 2000, 43).

Ongelmanratkaisukurssilla käytettiin ennakkojäsentelyä, joka perustuu Ausubelin mielekkään oppimisen teoriaan (esim. Novak & Gowin 1984, 11). Ennakkojäsentäjinä toimivat kurssin alussa esitetty ongelmanratkaisukurssin runkosuunnitelma ja tavoitteet, jotka esitettiin alkutestin jälkeen. Oppilaille jaetun ongelmanratkaisuvihon tarkoituksena oli toimia oppilaalle annettujen tehtävien ja ratkaisujen tallentajana sekä koko ongelmanratkaisukurssin sisällön kokoajana ja hahmottajana.

Toisena opetuksen periaatteena käytettiin havainnollistamista, joka on Ahteen ja Pehkosen (2000, 47) mukaan keskeistä matematiikan sisältöjä opetettaessa. Tavoitteena on tällöin konkretisoida esitettävää asiaa piirroksin ja erilaisten välineiden avulla. Ongelmanratkaisukurssilla havainnollistamista toteutettiin käytännössä liittämällä opetus kuvataiteen ja teknisen työn tunteihin, joilla oppilaat itse valmistivat matematiikan ja ongelmanratkaisun havainnollistamiseen liittyviä tuotoksia. Tällainen menettely liittyi samalla myös konkreettiseen työskentelyyn, joka on eräs opetus- tai oppimismalli. Siinä oppilas itse tutkii ja käyttää erilaisia konkreettisia apuvälineitä ja näin tutustuu oppimisen sisältöihin ja luo pohjaa syvemmälle oppimiselle (Ahtee & Pehkonen 2000, 48). Esimerkkeinä konkreettisesta työskentelystä ongelmanratkaisukurssilla mainittakoon pinta-alan ja tilavuuden opiskelua varten käytetyt Multilink-kuutiot ja laivaprojekti.

Konkreettinen työskentely tarjoaa tilaisuuden oppilaan toiminnallisuuteen. Ajatus ei ole uusi, sillä konkreettista työskentelyä ja toiminnallisuutta on haluttu liittää oppimiseen jo yli 200 vuotta (esim. Francken, Fröbelin ja Pestalozzin ajatukset). John Dewey otti käyttöön iskusanat ”tekemällä oppii” (learning by doing) eli ajatuksen siitä, että opettajan on hyödynnettävä oppilaiden luontaista toimeliaisuutta. (Ahtee & Pehkonen 2000, 48.)

9.4.2 Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin opetuksen sisältö ja toteutus

Ongelmanratkaisukurssilla opiskeltiin 6. luokan matematiikan aihealueita (esim. pinta-ala, tilavuus, yksikkömuunnokset). Lisää aikaa matemaattiseen ongelmanratkaisuun ja sen syventämiseen saatiin liittämällä aiheet myös muiden oppiaineiden tunteihin. Liittäminen toteutettiin kuitenkin integroitavan aineen ehdoilla: tunnilla opetettiin ongelmanratkaisun lisäksi myös integroitavan oppiaineen tietoja ja taitoja. Esimerkiksi äidinkielen ja kirjallisuuden tunnilla harjoiteltiin sanallisten ongelmanratkaisutehtävien avulla luetun ymmärtämistä.

Opettaja voi käyttää ongelmanratkaisua opetusmenetelmänä lähes kaikkien kouluaineiden opetuksessa. Itse ongelmanratkaisun opettamisessa on kuitenkin monia ongelmia, koska se ei ole itsenäinen oppiaine. Käytännössä ongelmanratkaisua ei useinkaan edes opeteta, vaan perusasiat nopeasti oppineet oppilaat ratkovat ongelmatehtäviä lähinnä lisätehtävinä. Opettajienkin on ollut vaikea innostua ongelmanratkaisun opettamisesta, koska koottua ja suunnitelmallisesti etenevää oppimateriaalia on ollut hankala löytää opetuksen tueksi. Toki hyviä yksittäisiä ongelmatehtäviä löytyy kaikista matematiikan oppikirjasarjoista ja muustakin kirjallisuudesta, mutta niiden esiin kaivaminen vie opettajalta paljon aikaa. Tähän ongelmaan törmäsin itsekin. Jouduin kokoamaan ja laatimaan itse oppimateriaalin kurssia varten. Materiaali koostui kaksi tuntia kestävästä alkukokeesta, 30 tuntisuunnitelmasta ja niihin liittyvistä tehtävämonisteista sekä kahden tunnin loppukokeesta. Ongelmanratkaisukurssin aiheet ja tuntimäärät on esitetty taulukossa 5.

TAULUKKO 5 Ongelmanratkaisukurssin aiheet, integroitavat oppiaineet ja tuntimäärät

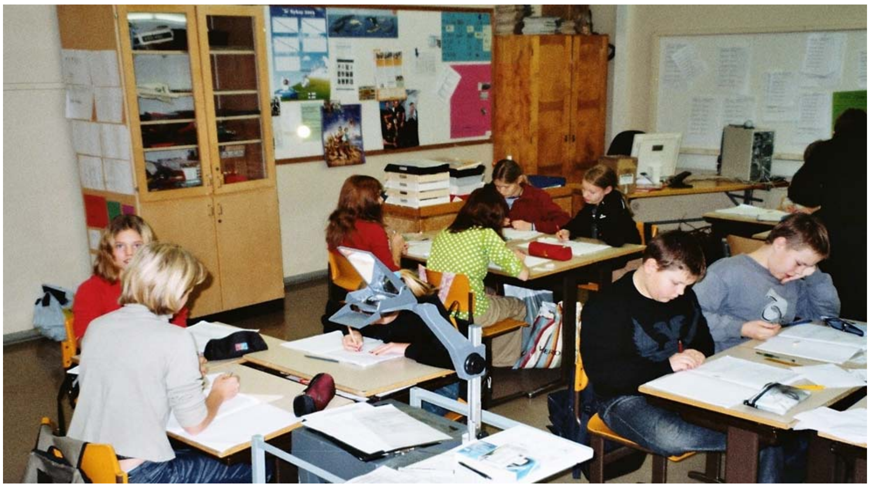
Aihe	**Integrointi**	**Oppi-tuntia**
Ongelmanratkaisutesti: Koe A&B (Alkumittaus 20.10.2003)		2
Sanalliset ongelmanratkaisutehtävät ja ratkaisukartta	AI / MA / YL / KU	3
Ongelmanratkaisumallit ja -strategiat	AI / MA / YL	1
Geometriaa	AI / MA / YL / KU	2
Pinta-ala ja tilavuus	MA / KU /	3
Yksikkömuunnokset	MA / YL	2
Henkilökohtainen palaute alkukokeesta ja tavoitteen asettaminen		*1*
Tekninen piirtäminen ja laivan suunnittelu	MA / KU	1
Laivan rakentaminen	KS / KU / MA / YL	6
Pythagoraan lause	MA / KU	1
Arkhimedeen laki / Laivan testaus	MA / YL / KS	2
Yhteistoiminnallista ongelmanratkaisua	AI / MA / YL	4
Keskinopeus ja kulutus	AI / MA / YL	1
Tulitikkutehtävät	MA / KU	1
Luku- ja kuviojonot	MA / KU	1
Ongelmanratkaisukurssin kertaus	AI / MA / YL	1
Ongelmanratkaisutesti: Koe C&D (Loppumittaus 3.12.2003)		2
	Oppitunnit yhteensä	34

Lyhenteet: AI = äidinkieli ja kirjallisuus, MA = matematiikka, YL = ympäristö- ja luonnontieto, KU = kuvataide ja KS = käsityö

Kurssin aiheet samoin kuin kurssilla käsiteltävät tehtävät ja tehtävätyypit on valittu koe- ja kontrolliryhmän matematiikan oppikirjan (*Laskutaito 6 syksy*, 2002) aihealueita mukaillen. Osaa matematiikan oppikirjan tehtävistä ja tehtävämonisteista käytettiin suoraan sellaisenaan (ks. luku 10.1.1). Samoja monisteita ja tehtävätyyppejä käsittelivät myös kontrolliryhmän oppilaat oppikirjansa avulla. Koeryhmän luokassa olevassa ongelmanratkaisukansiossa oli lisätehtäviksi ennalta kopioituna oppikirjan ja oppilaskirjaston tehtäväkirjojen tehtävämonisteita. Ne olivat niin ikään kontrolliluokkien oppilaiden saatavilla. Kurssilla käsiteltävät tehtävät ja tehtävätyypit koostuivat matematiikan, äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon aihepiirejä käsittelevistä ongelmatehtävistä.

Uusina erillisinä aiheina kurssissa olivat sanalliset ongelmanratkaisutehtävät ja ratkaisukartta, tekninen piirtäminen ja laivan suunnittelu, Pythagoraan lause, Arkhimedeen laki, keskinopeus ja kulutus. Aiheiden valinta ongelmanratkaisukurssiin perustui niiden tarjoamaan mahdollisuuteen toteuttaa opetusta ongelmanratkaisun avulla. Matematiikka ja ongelmanratkaisu integroitiin ympäristö- ja luonnontiedon, kuvataiteen, käsityön sekä äidinkielen ja kirjallisuuden tunteihin. Tarkoituksena oli näin antaa oppilaille mahdollisuus soveltaa eri aineissa oppimiaan tietoja ja taitoja ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan.

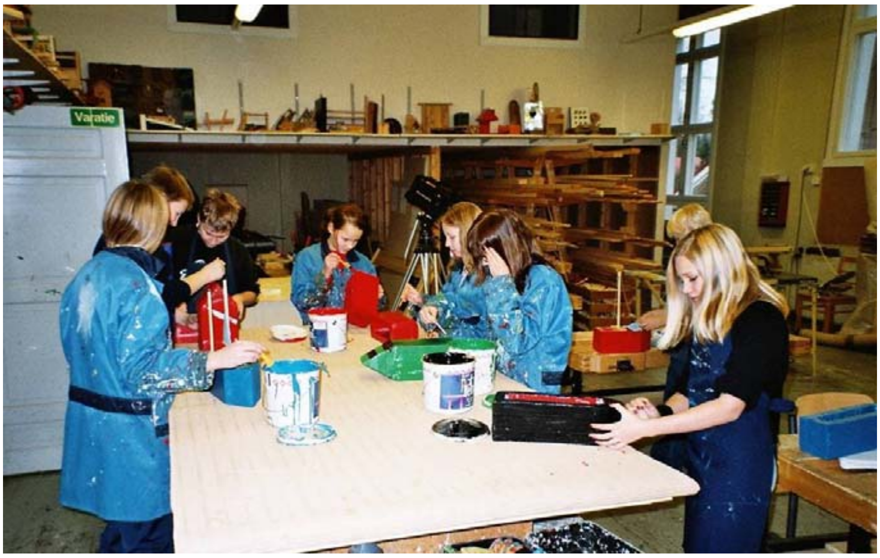
Seuraavassa on esimerkki siitä, kuinka integrointi käytännössä toteutettiin. Tilavuus tulee ensimmäistä kertaa opetettavaksi asiaksi kuudennella luokalla. Tilavuuden laskukaava opeteltiin oppikirjan avulla ja sitä harjoiteltiin kirjan tehtävien ja kurssin monisteiden avulla. Tilavuus-käsitteen syventämiseen liittyi myös kurssilla toteutettu laivanrakennusprojekti, joka integrointiin eri oppiaineisiin. Se aloitettiin kuvataiteen tunnilla, jolla oppilaat saivat tehtäväkseen suunnitella laivan piirustukset (kuvio 35). Aluksi oppilaille opetettiin teknisen piirtämisen perusteet ja mittakaavaan piirtäminen. Mitään mallia laivasta ei näytetty, vaan sen muoto oli täysin oppilaan päätettävissä. Ainoa huomioitava tekijä suunnittelussa oli laivan ruuma, johon täytyi mahtua litra vettä. Tässä vaiheessa oppilaat joutuivat kokeilemaan, millaisista mitoista litran tilavuus muodostuu.



KUVIO 35 Laivan piirustusten suunnittelu kuvataiteen tunnilla

Piirustusten viimeistely ratkaisuvihkoihin annettiin kotitehtäväksi. Seuraavalla tunnilla oppilaiden piirustuksista tarkistettiin laivojen toteuttamiskelpoisuus. Oppilaita kannustettiin toteuttamaan oma suunnitelma, mikäli se suinkin oli käytännössä mahdollista. Osalle oppilaista toteuttamiskelpoisen laivan suunnittelu näin lyhyessä ajassa oli liian vaikea tehtävä. Tähän oli varauduttu siten, että oppilaiden käytettävissä olivat mallipiirrokset, joiden avulla jokainen pääsisi aloittamaan laivan rakentamisen.

Laivan rakentaminen toteutettiin teknisen työn luokassa. Laivan osat mitoitettiin helposti työstettävälle PS-E-levylle, josta ne sahattiin irti. Ennen osien liimaamista laivan ruuman tilavuus laskettiin. Kokoamisen jälkeen osien saumakohdat tiivistettiin silikonilla, minkä jälkeen laiva maalattiin (kuvio 36). Lopuksi laivaan valmistettiin masto ja purje. Purje valmistettiin kankaasta tekstiilityön luokassa. Laivan rakentamisen yhteydessä törmättiin jatkuvasti käytännöllisiin arkielämän ongelmatilanteisiin, esimerkiksi: Kuinka osat kannattaisi piirtää levylle, niin ettei materiaalia menisi hukkaan? Miten osat kiinnitetään väliaikaisesti, jotta ruuman tilavuus saadaan laskettua? Kuinka laivan keula saadaan keskitettyä? Miten masto ja purje liitetään laivaan?

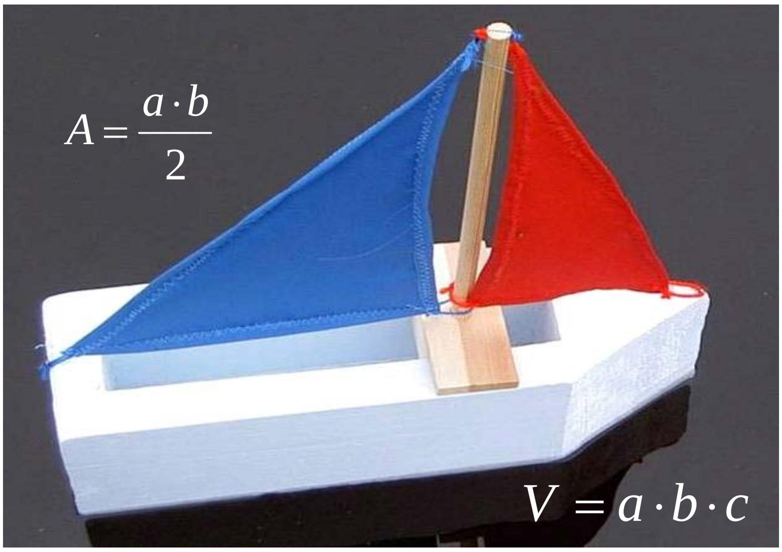


KUVIO 36 Laivan valmistaminen teknisen työn tunnilla

Valmiit laivat testattiin ympäristö- ja luonnontiedon kaksoistunnilla (kuvio 37). Kelluuko oma laiva? Mahtuuko siihen 1 litra? Kaatuuko laiva? Pitävätkö laivan saumat vettä? Jokaisen laivan ruuman tilavuus testattiin kaatamalla sinne litran mitallinen vettä. Tämän jälkeen oppilas piirsi laivansa ruuman vesirajan yläreunaan viivan myöhempää tarkistuslaskentaa varten. Toisella tunnilla käsiteltiin alustavasti Arkhimedeen lakia ja pohdittiin veden nostetta (ks. liite 15; tunnit 27 ja 28). Ongelmalähtöisenä ja mielenkiintoa herättelevänä kysymyksenä oli: Miksi teräsnaula uppoaa, mutta teräsrunkoinen valtamerialus kelluu? Oppilaat kokeilivat esineen muodon vaikutusta kellumiseen ja totesivat käytännössä, että muovailuvahapala uppoaa, mutta samasta palasta muovailtu vene kelluu.

KUVIO 37 Laivan testaaminen ympäristö- ja luonnontiedon tunnilla

Matematiikan tunnilla oppikirjojen sijasta otettiin esiin oppilaiden valmistamat laivat (kuvio 38). Oppilaiden tehtävänä oli laskea laivansa ruuman tilavuus ja purjeen pinta-ala. Muita käytännön sovellustehtäviä, joilla pyrittiin osoittamaan matematiikan ja ongelmanratkaisun käyttöarvo, oli selvittää laivaan tarvittavan materiaalin määrä ja sen kustannukset.



KUVIO 38 Matemaattisten kaavojen havainnollistaminen oppilaan valmistamassa käsityössä.

Myös luetun ymmärtäminen korostui laivan valmistamisen yhteydessä annetuissa sanallisissa ongelmatehtävissä. Samoin äidinkielen taitoihin kuuluvaa ohjeiden kuuntelemista, ymmärtämistä ja toteuttamista harjoiteltiin laivaprojektin aikana. Huomattakoon, että oppilaskohtaiset erot korostuivat edellä mainituissa taidoissa varsinkin teknisen työn luokassa. Toiset oppilaat tarvitsivat useammankin toiston ja runsaasti ohjausta ennen kuin pääsivät aloittamaan ohjeiden mukaisen työskentelyn. Toiset taas ryhtyivät heti ensimmäisen ohjeenannon jälkeen oikeisiin toimiin.

Koska matemaattisen ongelmanratkaisukurssin avulla toteutettu opetusinterventio toimi keskeisessä roolissa tutkimuksen tavoitteiden saavuttamisessa, sen yksityiskohtainen tarkastelu on paikallaan. Esittelen tulosten yhteydessä luvussa 10.1 jokaisen oppitunnin tuntisuunnitelman ja arvion kunkin tunnin toteuttamisesta.

10 TULOKSET

Tutkimuksen tulokset ovat kvantitatiivisten ja kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien avulla saatuja. Tulosten esittelyssä päädyin johdonmukaisuuden ja luettavuuden vuoksi seuraavaan järjestykseen: Ensin esittelen opetuksen toteuttamiseen käytettyjä tuntisuunnitelmia ja arvioita niistä sekä niiden edelleen kehittämisestä (luku 10.1). Tämän jälkeen käsittelen ongelmanratkaisukokeiden avulla saatuja koe- ja kontrolliluokan oppilaiden tuloksia (luku 10.2). Lopuksi esittelen koeryhmän oppilaiden haastatteluja verraten niitä heidän menestymiseensä alku- ja loppukokeessa (luku 10.3).

10.1 Kuinka opetus toteutui matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla opettajan näkökulmasta?

Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin suunnittelussa pyrittiin soveltamaan tutkimuksen teoriataustassa esitettyjä periaatteita ja hyödyntämään opetustyön ja pilottikokeilujen kautta saatuja kokemuksia. Opetustapahtuma on kuitenkin aina sidoksissa moniin muuttujiin, kuten ajankohtaan, välineisiin, paikkaan ja oppilaisiin. Huolellisestikin valmistellun suunnitelman toimivuus varmistuu vasta käytännön kokeilussa. Seuraavaksi esittelen matemaattisen ongelmanratkaisukurssin toteuttamiseen käytetyt tuntisuunnitelmat ja oman arviointini jokaisesta tunnista. Opetusjakson suunnittelun ja toteutuksen keskeisenä tavoitteena oli matemaattisen ongelmanratkaisun opetukseen soveltuvan oppimisympäristön luominen opetusmateriaalin ja opetuksen integroinnin avulla.

10.1.1 Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin tuntisuunnitelmat ja niiden toteutumisen arviointi

Opetuksessa käytetyt tuntisuunnitelmat voisivat tietysti olla tutkimuksen liitteenä. Kehittämistutkimuksen mukaan ne ovat kuitenkin tutkimuksen tuloksena saatua tuotosta eli tuloksia (esim. Edelson 2002, 118–119; Wood & Berry 2003, 195–196), joten ne on luontevaa esittää tuloksissa. Myös luettavuuden kannalta lienee mielekästä, että tunnin arvio ja siihen liittyvä suunnitelma on esitetty samassa yhteydessä, eikä arvioon liittyvää tuntisuunnitelmaa tarvitse etsiä liitteistä. Tunneilla käytetyt monisteet löytyvät liitteestä 15 tuntisuunnitelmassa mainitun monisteen numeron perusteella.

1. TUNTI	**AIHE**	**TARVIKKEET / VÄLINEET**
ke 22.10.03 9.05–9.50	**Kurssiaikataulun esittely.** **Ratkaisuvihkojen jako ja niiden käyttö.** **Sanallisiin ongelmanratkaisutehtäviin ja ratkaisukarttaan tutustuminen:** ▪ Käydään läpi yhdessä moniste Ratkaisukartta ja -ohjeet ja liimataan se vihkoihin. ▪ Luetaan ääneen tehtävä 1. ▪ Jaetaan oppilaat ryhmiin, minkä jälkeen oppilaat yrittävät ratkoa tehtävää ryhmissä. ▪ Vastaukset a- ja b-kohtiin löytyvät yleensä helpohkosti. Käydään ne läpi ja kannustetaan oppilaita yrittämään c-kohtaa, joka on vaativampi tehtävä.	piirtoheitin ph-kalvot sakset A4-ruutuvihkoja 1 kpl/oppilas paperiliimaa Monisteet 1 ja 2 (kalvot) Ratkaisuohjeet Ratkaisukartta Tehtävät 1, 2 ja 3

Arvio tunnista:
Tunti meni suunnitelmien mukaan, ei ongelmia. Vihkot otettiin innokkaasti vastaan. Videokamera ei aiheuttanut luokassa ongelmia, koska luokan oma opettaja oli totuttanut oppilaita kameraan kuvaamalla sillä edellisen viikon tunteja.

2. TUNTI	**AIHE**	**TARVIKKEET / VÄLINEET**
ke 22.10.03 10.05–10.50	**Sanalliset ongelmat ja ratkaisukartta:** ▪ Mikäli jokin ryhmä löytää ratkaisun c-kohtaan, pyydetään ryhmää esittämään se (taululla). ▪ Katsotaan kalvolta vielä ratkaisukartan tekovaiheet ja c-kohdan malliratkaisu. ▪ Oppilaat tekevät vihkoihinsa c-kohdan ratkaisun. ▪ Jaetaan tehtävät 2 ja 3, joiden ratkaisun oppilaat aloittavat tunnilla. ▪ Harjoitellaan sanallisten tehtävien ratkaisemista ratkaisukarttaa apuna käyttäen. ▪ Tehtävät 2 ja 3 jäävät kotitehtäviksi. Samoin ratkaisukartta ja ratkaisuohjeet jäävät ulkoläksyksi.	kuin edellisellä tunnilla

Arvio tunnista:
Kolme ryhmää löysi ratkaisun 1. tehtävän c-kohtaan – hyvä suoritus!
Tehtävät 2 ja 3 vaikuttivat vaikeustasoltaan sopivilta.

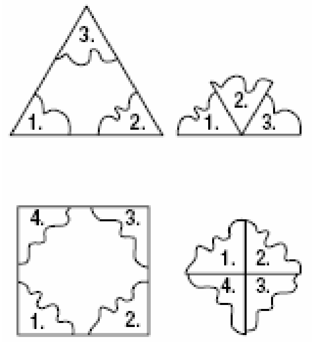
3. TUNTI pe 24.10.03 9.05−9.50	**AIHE** **Ongelmanratkaisumalli ja -strategiat** (Polya, Lester) ▪ Läksyjen kuulustelu kirjallisesti. ▪ Kotitehtävien tarkistaminen. ▪ Tutustutaan yhdessä jaettuun monisteeseen 3 ”Käsitteitä ongelmanratkaisuun”, jossa käsitellään ongelmanratkaisumallia ja ongelmanratkaisustrategiaa. ▪ Oppilaat yrittävät keksiä ja etsiä matematiikan kirjasta tehtäviä, joissa voi käyttää jotain ongelmanratkaisustrategioista.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Ratkaisuvihkot piirtoheitin ph-kalvot sakset paperiliima Moniste 3 Laskutaito 6 syksy

Arvio tunnista:
Läksyjen kuulustelu kirjallisesti herättää selvästi luokan. ”Käsitteitä ongelmanratkaisuun” oli turhan teoreettinen. Oppilaat löysivät kirjan tehtävistä strategiamalleja paremmin kuin odotin.

4. TUNTI pe 24.10.03 10.05–10.50	**AIHE** **Sanalliset ongelmat ja ratkaisukartta:** ▪ Annetaan oppilaille ohje käyttää ainoastaan mustekynää ratkaisuvihkoa täyttäessään. ▪ Käydään yhdessä kalvolla läpi Ratkaisukartta Tehtävästä 1. ▪ Oppilaat ratkovat pareittain tehtäviä 4, 7, 8, 9 ja 10, jotka jäävät kotitehtäviksi.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** kuulakärkikynät Moniste 1 ja 2 Moniste 4 ja 5 Tehtävät 4, 7, 8, 9 ja 10

Arvio tunnista:
Kuulakärkikynän käyttöohje otettiin innolla vastaan − oli muistutettava, että muihin vihkoihin kirjoitetaan lyijykynällä. Korostin, että vihkoon saa kirjoittaa myös omia ajatuksia ja mielipiteitä kurssista. Ratkaisukartan tekeminen vaatii harjoittelua, harvat kirjoittavat lauseita siihen.

5. TUNTI ma 27.10.03 9.05−9.50	**AIHE** **Geometriset muodot** ▪ Kerrataan lyhyesti moniste ” Käsitteitä ongelmanratkaisuun”. ▪ Oppilaat laskevat taululle kotitehtävät 7, 8, 9 ja 10, ja ne tarkistetaan yhdessä. ▪ Kolmio- ja neliö- tai suorakulmiopalapelit: 1. Jaetaan oppilaille A4-kokoiset kartongit. 2. Oppilaat piirtävät haluamansa muotoisen kolmion ja nelikulmion kartongille. Kolmio ja nelikulmio leikataan irti. ▪ Kerrataan kolmion, suorakulmion ja suunnikkaan pinta-alan laskeminen.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 3 A4-kartongit 2 kpl/oppilas sakset värikyniä

Arvio tunnista:
Jotenkin rauhaton tunti; askartelu vie oppilaiden huomion. Ohjeiden ymmärtäminen on vaikeaa muutamille. Jakotunti olisi ollut paikallaan. Palapelien tekeminen innostaa useimpia.

6. TUNTI ma 27.10.03 10.05– 10.50	**AIHE** **Geometriset muodot (edellinen jatkuu)**	**TARVIKKEET / VÄLINEET**
	▪ Oppilaat laskevat omien kolmioidensa ja nelikulmioidensa pinta-alan ja vertailevat saamiansa tuloksia ja kuvioidensa kokoa. 3. Kolmion ja suorakulmion kulmat numeroidaan. 4. Piirretään palat seuraavasti: kolmio jaetaan kolmeen ja nelikulmio neljään palapelin osaan (jokainen pala sisältää kulman). 5. Kääntöpuolelle suunnitellaan haluttu kuva/kuvio, joka toimii palapelinä. 6. Leikataan palat irti. 7. Numeroidut kulmat asetetaan vierekkäin ja lasketaan kulmien summa kummassakin kuviossa. 8. Todetaan oikokulman ja täysikulman syntyminen. Jaetaan oppilaille Moniste 6 Kolmio-/neliöpalapeli ▪ Oppilaat leikkaavat palat irti. ▪ Pyydetään oppilaita muodostamaan kaikista paloista: 1. jokin mieleinen muoto 2. kolmio 3. neliö. ▪ Kotiläksynä oppilaat laskevat uudestaan tehtävän 10 a ja b ja harjoittelevat kolmio-/neliöpalapelin tekoa.	kuin edellisellä tunnilla Moniste 6

Arvio tunnista:
Levottomuus jatkuu. Pinta-alalaskut osataan. Loppua kohden ote paranee. Kolmio-/neliöpalapelissä on sopivasti haastetta.

7. TUNTI pe 31.10.03 9.05−9.50	**AIHE** **Pinta-ala ja tilavuus** ▪ Tarkistetaan kotitehtävät: kolmio-/neliöpalapeli (piirtoheitin) ja Monisteesta 5 tehtävä 10 taululla. ▪ Kerrataan geometriset muodot monisteiden 7 ja 8 avulla: kulmat, kolmiot, nelikulmiot ja muita geometrisia perusmuotoja. Tarkistus yhdessä. ▪ Nelikulmioiden luokittelu (Moniste 9). Oppilaiden tehtävänä löytää luokittelusääntö. ▪ Jaetaan oppilaille Multilink-kuutioita. Kerrataan piirtoheittimen avulla pinta-alan laskeminen (palikat) 3 x 4 palikkaa (pinta-alayksikkö). ▪ Opetetaan tilavuuden laskeminen: Oppilaille näytetään 24 palikasta koostuvan tilavuuden malli (2 x 3 x 4), ja heidän tehtävänään on päätellä, kuinka palikoiden määrä saadaan laskettua. ▪ Selvitetään taululla: Kuinka muodostetaan pinta-ala- ja tilavuusyksiköt o Harjoitellaan erimuotoisten pinta-alojen laskemista Monisteen 10 avulla. ▪ mm^2, cm^2 dm^2 m^2 a, ha, km^2	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 5 Monisteet: 7, 8, 9 ja 10 (kalvot) piirtoheitin sakset Ratkaisuvihot paperiliima

Arvio tunnista:
Monistuskone rikki. Kiirettä. Onneksi pääsen monistamaan toisella koneella. Kiireestä huolimatta tunti lähti hyvin liikkeelle. Oppilaat olivat hyvin mukana. Pinta-alan ja tilavuuden konkretisointi Multilink-kuutioilla onnistuu hyvin. Oppilaat innostuivat tilavuuksien rakentelusta. Mukava tunti alkukiireistä huolimatta!

8. TUNTI pe 31.10.03 10.05–10.50	**AIHE** **Tilavuuden laskeminen** ▪ Kerrataan vielä edellisellä tunnilla opetettu tilavuuden laskeminen ja harjoitellaan sitä monisteen 11 avulla. ▪ Tutustutaan suorakulmaiseen särmiöön, kuutioon, tilavuuden yksiköihin. ▪ Jaetaan oppilaille moniste 12 ”Yksiköt ja muunnostaulukot”. o Oppilaiden tehtävänä on päätellä, miten taulukkoa voisi käyttää apuna muunnostehtävissä. ▪ Harjoitellaan muunnostaulukon käyttöä muutaman esimerkin avulla (Moniste 13). ▪ Kotiläksy: Laskutaito 6 syksy s. 76 t. 42, 43, 44 ja 45. ▪ Kerätään ratkaisuvihkot pois tarkistusta varten.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet: 11, 12 ja 13 (& kalvot) Laskutaito 6 syksy

Arvio tunnista:
Tilavuuden rakentelu kuutiopalikoilla toimii. Monisteessa painovirhe. Harmi! Korjaan ensi tunniksi koko monisteen. Taulukon opettelu vaatii näköjään aikaa. Osa oppilaista ei ole sisäistänyt taulukon käytön ideaa, sillä he siirtävät pilkkuja miten sattuu. Asiaa oli tunnille vähän liikaa. Osa ei haluaisi palauttaa vihkoja tarkistusta varten. Vihkoista on siis tullut henkilökohtaisesti tärkeitä.

9. TUNTI ma 3.11.03 11.30– 12.15	**AIHE** **Pinta-ala ja tilavuus** ▪ Tarkistetaan kotitehtävät: Laskutaito 6 syksy s. 76 t. 42, 43, 44 ja 45. ▪ Harjoitellaan muunnostaulukon (Moniste 12) käyttöä Monisteen 14 tehtäviin. ▪ Tutustutaan suorakulmaiseen särmiöön ja kuutioon monisteen 15 avulla. Opetellaan osien nimitykset: tahko, kärki, särmä ja kulma. Kerrataan vielä tilavuuden ja pinta-alan laskeminen. ▪ Jaetaan ”Laiva ja litra” -moniste 16 ja opetellaan: 1000cm^3 = 1 litra o tehtävät 1–4 kotiläksyksi. o kannustetaan oppilaita suunnittelemaan laiva ja tekemään siitä tarkat piirustukset ratkaisuvihkoon.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 12, 14, 15 ja 16 (& kalvot) piirtoheitin sakset paperiliima

Arvio tunnista:
Tehtävän tarkistus sujuu rivakasti. Muunnostaulukon käyttö vaatii edelleen harjoittelua. Tilavuuden laskeminen sujuu jo paremmin. Laivan suunnittelutehtävä herättää kummastusta. Syynä lienee oppilaille uudenlainen, osittain avoin tehtävä. En antanut enkä näyttänyt oppilaille mitään mallia. Katsotaan, kuinka avoin tehtävä toimii ja millainen käsitys oppilailla on laivasta.

10. TUNTI ma 3.11.03 12.30– 13.15	**AIHE** **Ratkaisuvihkojen palautus ja alkukokeen pisteiden näyttäminen oppilaalle** ▪ Oppilas kerrallaan 2–3 min ▪ Jokaiselle oppilaalle näytetään hänen oma sijoituksensa ja pistemääränsä alkukokeessa. ▪ Lyhyt keskustelu oppilaan kanssa tämänhetkisistä tunnelmista ja kurssikokemuksista. ▪ Arvioidaan oppilaan vihkotyöskentely merkitsemällä vihkoon: x = kohtalainen, xx = hyvä, xxx = erinomainen.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** oppilaiden ratkaisuvihot alkukokeen tulokset

Arvio tunnista:
Kahdenkeskinen keskustelu jokaisen oppilaan kanssa on tehokas tapa tutustua oppilaaseen. Alkukokeen tulokset kiinnostavat. Positiivista on, että jokainen oppilas haluaa parantaa omaa tulostaan! Sanon, että tämän kurssin tarkoitus on juuri valmentaa siihen. Keskityn palautteen annossa ratkaisuvihkojen käyttöön ja ratkaisukarttojen tekemiseen. Tuen ja korostan edelleen omien ajatusten kirjoittamista vihkoon. Monille tämä tuntuu olevan vaikeaa, mutta muutamat ovat kirjoitelleet ajatuksiaan tehtävien ratkaisun yhteyteen. Palaute kurssista tähän mennessä on myönteistä! Kotitehtäviä on kuitenkin joidenkin mielestä liikaa.

11. TUNTI ti 4.11.03 11.30– 12.15	**AIHE** **Laivan suunnittelu** ▪ Palaute vihkotyöskentelystä o selkeys, ajatusten kirjoittaminen, päiväkirjakommentit ▪ Tarkistetaan kotitehtävät monisteesta 16 tehtävät 1–4. ▪ Käydään läpi teknisen piirtämisen perusteita monisteesta 17 (opettajajohtoisesti). ▪ Parannellaan ja korjaillaan piirustuksia (itsenäinen työskentely).	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 16 ja 17 (& kalvot)

Arvio tunnista:
Suunnittelutehtävää ei ollut kovin moni tehnyt valmiiksi. Aluksi vaikutti siltä, että suurin osa oli unohtanut kotitehtävän, mutta kun kiertelin ja katsoin kaikkien vihkoja, huomasin, että yritystä oli ollut. Tehtävä oli ollut useimmille vaikea: tilavuuden laskukaava osataan, mutta sen soveltaminen onkin yllättävän hankalaa! Monilla ei oikein ollut käsitystä, millainen piirustuksen tulisi olla.

Muutamat oppilaat vaikuttivat kiinnostuneilta ja jäivät vielä tunnin jälkeen kyselemään ohjeita suunnitelman tekoon. Näytän vasta tässä vaiheessa mallipiirustuksen ja tekemäni laivan. Se herätti kiinnostusta ja havainnollisti tehtävää, koska laivan suunnitteleminenkin oli oppilaille vaikeaa. Yksi tyttö oli ottanut mitat maitopurkista. Hyvä oivallus! Laivat olivat mitoiltaan erikokoisia, mutta vain harvoilla oli selvästi erilainen malli.

12. TUNTI ke 5.11.03 10.05– 10.50	**AIHE** **Laivan valmistaminen (A-ryhmä)** ▪ Tarkastetaan oppilaiden laivapiirustukset. Oppilaat, joiden piirustukset ovat toteuttamiskelpoiset valmistavat laivan niiden mukaan. Mikäli oman piirroksen toteuttaminen käytännössä vaikuttaisi mahdottomalta, voi laivan tehdä valmiiden piirrosten mukaan (Monisteet 18 ja 19). ▪ Käydään läpi laivan rakennusohjeet (Moniste 20) ja tiedot Finnfoam-/PS-E-levystä (Moniste 21). ▪ Oppilaat aloittavat laivan rakentamisen. ▪ Piirustusten mukaisten kappaleiden piirtäminen ja mittaaminen levyyn ▪ Kappaleiden sahaaminen ja hionta **Sama tunti B-ryhmällä ke 5.11. klo 12.30–13.15**	**TARVIKKEET / VÄLINEET** teknisen työn luokka oppilaiden laivapiirustukset Monisteet 18, 19 20 ja 21 PS-E-levyä puuliimaa

Arvio tunnista:
Laivan rakentelu kiinnostaa. Osien mittaaminen ja tilavuuksien laskeminen tehostuu laivan osia valmistettaessa. Korostan tilavuuden laskukaavoja. Suunnitelmat ja piirustukset ovat parantuneet eilisestä. Helpotan tavoitetta: laivaan voi mahtua vähemmänkin kuin litra. Varon pilaamasta tekemisen riemua turhan tarkalla "matematisoinnilla".

13. TUNTI ke 5.11.03 11.30– 12.15	**AIHE** **Laivan valmistaminen (A-ryhmä)** ▪ Kappaleiden sahaus ja hionta ▪ Osien liimaaminen **Sama tunti B-ryhmällä ke 5.11. klo 13.30–14.15**	**TARVIKKEET / VÄLINEET** kuin edellisellä tunnilla

Arvio tunnista:
Aamuryhmän tunti sujuu mutkattomasti, mutta iltaryhmän tunnilla on levottomuutta ja hälinää, sillä B-ryhmään tulee 3 aamuryhmän poikaa. Osien liimaamisessa syntyy ruuhkaa. Alan itsekin jo väsyä viimeisellä tunnilla! 4 tuntia käsityötä yhteen menoon.

14. TUNTI to 6.11.03 11.30– 12.15	**AIHE** **Laivan valmistaminen (A-ryhmä)** ▪ Keulan muotoilu ja laivan viimeistely ▪ Silikonin lisääminen liitossaumoihin **Sama tunti B-ryhmällä pe 7.11. klo 10.05–10.50**	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 18, 19 20 ja 21 teknisen työn luokka PS-E-levyä puuliimaa silikonipistooli maalia (vesiohenteinen) pensseleitä mäntyrimaa 50 x 15 mm

Arvio tunnista:
Tunnin alussa pidän 10 minuutin opetustuokion tunnin työvaiheista. Esitän oppilaille ongelmakohdista kysymykset: Miten teet symmetrisen keulan laivaan? Miten muotoilet ja viimeistelet sen? Kuinka teet mastolle kiinnitysalustan? Kysely vie aikaa, mutta se kannattaa: oppilaat löytävät ratkaisuja ja pystyvät myös työskentelemään melko itsenäisesti. Laivan keula saadaan muotoiltua kaikille, ja pääsemme tiivistämään laivan saumakohdat silikonilla.

15. TUNTI to 6.11.03 11.30– 12.15	**AIHE** **Laivan valmistaminen (A-ryhmä)** ▪ Laivanrakentaminen jatkuu. ▪ Maston valmistaminen (moniste 19) ▪ Maalaus ▪ Kotiläksyksi tehtävämoniste 22: Laivan rakentaminen **Sama tunti B-ryhmällä pe 7.11. klo 11.30–12.15**	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 18, 19 20, 21 ja 22 teknisen työn luokka PS-E-levyä puuliimaa maalia (vesiohenteinen) pensseleitä mäntyrimaa 50 x 15 mm

Arvio tunnista:
Kaikki saavat saumattua silikonilla laivansa. Saumaus onnistuu hyvin kaikilta. Eri työvaiheet – maston alustan teko, silikonin laitto ja maalaus– porrastavat oppilaiden toimintaa. Kaikille riittää tekemistä.

16. TUNTI ma 10.11.03 10.05–10.50	**AIHE** **Yksikkömuunnokset** ▪ Tarkistetaan kotitehtävämoniste: Laivan rakentaminen o t. 1 ja 2 taululle; 3. muutama oppilas esittää aineensa ääneen lukien. ▪ Pinta-alan ja tilavuuden käsitteiden vertailua o Multilink-kuutiot ▪ Yksikkömuunnosmoniste o Miksi suhdelukuina 10, 100 tai 1000? ▪ Kotiläksyksi tehtävämoniste Laskutaito 6 syksy s. 158: t. 1–4 ja 161: t. 1–4.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 22 ja 12

Arvio tunnista:
Muutamilta kotitehtävät ovat jääneet tekemättä. Sovimme luokan oman opettajan kanssa, että nyt kiristämme hieman kuria: perjantaina jään unohtajien kanssa koulun jälkeen tekemään tehtäviä. Piia B pelleilee videossa. Mietimme perjantaina hänen kanssaan, kuinka tunnilla ollaan. Muutamien ääneen luettujen aineista kuuli, että laivan rakentamisesta oli pidetty!

Yksikkömuunnokset ovat oppilaille hankala aihe. Hyviä vastauksia tuli kysymykseen ”Minkä takia suhdeluku on 10, 100 tai 1000?”. Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden suhde toisiinsa havaitaan monisteen piirroksista ja Multilink-kuutioiden avulla.

17. TUNTI pe 14.11.03 9.05–9.50	**AIHE** **Yksikkömuunnokset** ▪ Keskustelu videoitavana olosta. Katsotaan edellisen tunnin videota. ▪ Kotitehtävien tarkistus. Pari tarkistaa. Vastaukset kalvolla. ▪ Kerrataan yksikkömuunnokset (moniste 12). ▪ Harjoitellaan yksikkömuunnoksia monisteista 14 ja 23.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 12, 14 ja 23

Arvio tunnista:
Ensiksi kohtaamme kouluelämään kuuluvan ongelmatilanteen. Luokan oma opettaja päättää palata vielä edellisen 16. tunnin tapahtumiin, jolloin Piia B häiriköi tunnilla. Koska tilanne tapahtui luokassa ja muut oppilaat näkivät tilanteen, käsittelemme asian koko luokan kanssa ja mietimme, kuinka tunnilla tulisi käyttäytyä. Riskinä tietysti on, että luokan mukava ilmapiiri rikkoontuu ja koko projekti vaarantuu. Epäkohtiin ja huonoon käytökseen on kuitenkin puututtava, jotta työrauha säilyy luokassa. Tämä kuuluu koulutyönarkeen. Tälläkin kurssilla tavoitteena on opettaa oppilaita elämää varten, ei pelkästään tutkimusta varten.

Neljällä tytöllä on kotitehtävät tekemättä. Sovimme, että jäämme koulun jälkeen tekemään ne. Päätämme kaikkien oppilaiden kanssa, että näin toimitaan jatkossakin. Nähtäväksi jää, kuinka Piia B suhtautuu opettajan ”ojennuksen” jälkeen jatkossa ope-

tukseeni. Hän ainakin vakuutteli parantavansa tapansa. Muut oppilaat hyväksyivät toiminnan, se kuuluu näköjään luokan kulttuuriin. Luokan oma opettaja osaa ja uskaltaa pitää järjestystä luokassa!

18. TUNTI pe 14.11.03 10.05– 10.50	**AIHE** **Pythagoraan lause** ▪ Jaetaan oppilaille moniste 24 ”Pythagoraan lause” ja annetaan heidän tutustua kohtiin a ja b pareittain. ▪ Käydään yhdessä läpi kohdat a ja b ja johdetaan Pythagoraan lause: $a^2+b^2=c^2$. ▪ Oppilaat laskevat tehtäviä c–e. Kohdat d ja e tulevat kotitehtäviksi, samoin Laskutaito 6 syksy s. 80.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 24

Arvio tunnista:

Tunti sujuu ongelmitta, edellisen tunnin keskustelu on toiminut. Esittelen potenssin a x a muodossa taululla ja oppilaille jaetun monisteen avulla, koska potenssin määritelmä ei kuulu 6. lk:n oppisisältöihin. Lopuksi esittelen, että a x a = a^2, *eikä se ainakaan näytä tuntuvan ongelmalliselta. Kävimmehän juuri läpi, mitä se käytännössä tarkoittaa. 4–5 oppilasta löytää todistuksen ja näyttää tuntevan selvästi oivaltamisen riemua!*

19. TUNTI ma 17.11.03 10.30– 11.15	**AIHE** **Ongelmanratkaisu ryhmässä** ▪ Muodostetaan 4 oppilaan ryhmät; yhdessä 2 oppilasta. ▪ Kotitehtävien tarkistus; Pythagoraan lauseen (Moniste 24) kertaus. ▪ Oppilaat antavat laatimansa tehtävän toisen ryhmän ratkaistavaksi. o 1 tehtävä/ryhmä; harjoitellaan ryhmän työskentelyä. ▪ **Ryhmät ratkaisevat Laskutaito 6:n yhteistuumakortteja** o Ryhmänjohtaja hakee kysymyskortin ja jakaa tietolaput ryhmäläisille. o Vastausta pohditaan ryhmässä keskustellen, ja kun vastaus on löydetty, oppilaat käyvät esittämässä vastauksen opettajalle. Jos vastaus on oikein, ryhmänjohtaja hakee uuden kysymyskortin. Mikäli vastaus on väärä, ryhmä jatkaa ratkaisua. o Ratkaistut tehtävät merkitään ryhmän suoritustaulukkoon.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 24 Laskutaito 6 yhteistuumat

Arvio tunnista:

Tunti lähtee tahmeasti liikkeelle. Ryhmien muodostus tapahtuu hitaasti. Läksyjä kerratessa harva muistaa Pythagoraan lauseesta juurikaan mitään! Käyn kuitenkin edellisen tunnin läpi ja yritän ”lypsää” tietoa. Muutamat ovat kuitenkin mukana ja pääsemme asiassa eteenpäin.

Kotitehtävien tarkistus menee kaavamaisesti: lähes kaikki käyttäisivät lausetta rakennuksissa ja maan lohkomisessa tai matematiikan kokeessa. Omia tehtäviä monisteesta on sen sijaan tehty hyvin, ja ne ovat erilaisia. Ohjeet yhteistuumakorttien käyttöön ymmärretään hyvin. Ryhmät ryhtyvät ratkaisemaan tehtäviä innokkaasti.

20. TUNTI ma 17.11.03 11.30–12.15	**AIHE** **Ongelmanratkaisu ryhmässä** ▪ Edellinen jatkuu. ▪ Kotitehtäväksi Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 3.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Laskutaito 6 yhteistuumakortit Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 3

Arvio tunnista:
Toiminta jatkuu jo ennen kuin ehdin itse luokkaan välitunnin jälkeen. Kortit innostavat, ja pieni kilpailuhenki sopii tähän luokkaan. Ongelmakortit ovat loistavia: matematiikkaa, ongelmanratkaisua ja äidinkieltä yhdessä parhaimmillaan! Tekijät Salonen ja Uus-Leponiemi ovat onnistuneet oppimateriaalin teossa.

21. TUNTI ke 19.11.03 12.30–13.15	**AIHE** **Laivan valmistaminen** ▪ Pistepörssi-taulukon käyttöön otto. ▪ Oppilas saa tehopisteen taulukkoon, kun oppilas on: a) tehnyt kotitehtävät b) on laskenut ongelmanratkaisuun liittyvän monisteen c) tuonut Ongelmanratkaisukansioon uuden ongelmatehtävän. ▪ Kotitehtävän tarkistus: Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 3 teknisen/tekstiilityön luokissa työn lomassa. ▪ Laivan viimeistely jatkuu: o Purjeen valmistus tekstiilityön luokassa. o Maalaus ja maston lakkaus teknisen työn luokassa. ▪ Mikäli laiva on valmis tai se on kuivumassa, oppilas voi tehdä ongelmatehtäviä, joita on koottu *Ongelmatehtäväkansioksi* monistamalla erilaisia tehtäviä oppikirjoista.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** teknisen työn luokka tekstiilityön luokka Moniste: Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 3 Ongelmatehtäväkansio

Arvio tunnista:
Kehittelin Pistepörssi-taulukon, ja se otettiin innostuneesti vastaan. Tavoitteena on saada kaikki oppilaat harjoittelemaan vapaaehtoisesti ongelmatehtäviä, sillä niin kuin useassa lukemassani lähteessä mainitaan: "Ongelmanratkaisutaitoa kehitetään harjoittelemalla ongelmien ratkaisua". Tätä varten monistin Ongelmatehtäväkansioksi oppikirjojen takaa erilaisia ongelmatehtäviä, joista oppilas voi valita mieleisiään. Useat oppilaat valittelevat antamieni kotitehtävien määrää, tosin osa oppilaista tekee kotitehtävänsä mielellään. Jospa tämä menetelmä kannustaisi hieman näitä "laiskempia" oppilaita positiivisella tavalla ilman pakkoa. Koulun jälkeen jääminen tappaa varmasti mielenkiinnon ja muuttaa asenteen matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan negatiiviseksi.

22. TUNTI ke 19.11.03 13.30– 14.15	**AIHE** **Laivan valmistaminen** ▪ Edellinen jatkuu. ▪ Kotitehtäväksi Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 34 (s. 35 vapaaehtoinen).	**TARVIKKEET / VÄLINEET** kuin edellisellä tunnilla Moniste: Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 34–35

Arvio tunnista:
Laivansa rakentaneet alkoivat laskea käsityötunnilla vimmatusti tehtäviä; yllättävää! Kaikki olivat tehneet kotitehtävänsä. Oppilaat vaikuttivat työteliäiltä: osa teki tekstiilityön luokassa purjeita laivaansa, osa maalasi, lakkasi, rakensi mastoa teknisen työn luokassa. Muutamat laskivat tehtäviä. Mielestäni tunnit toimivat hyvin. Tosin tekstiilityönopettaja, luokan oma opettaja, kouluavustaja ja minä ohjasimme oppilaiden työskentelyä eri tiloissa. Yhteistyö sujuu muiden opettajien kanssa saumattomasti. Oppilaat toimivat motivoituneesti, koska laivat alkoivat olla valmiita. Oppilaat tiesivät, mitä tekivät, ja se näkyi toiminnassa. Osasin itsekin pitää suuni kiinni ja olla "häiritsemättä" oppilaita, silloin kun työskentely sujuu.

23. TUNTI pe 21.11.03 9.05–9.50	**AIHE** **Ongelmanratkaisu ryhmässä** ▪ Kerrataan ratkaisukartan tekeminen monisteen 25 uima-allastehtävän avulla. Oppilaat aloittavat ryhmissä ongelmatehtävämonisteiden Laskutaito 6 kevät moniste s. 164 ja Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 34–35, t. 10 ratkaisemisen. ▪ Kotitehtävän tarkistus: Kirjataan oppilaiden suoritukset Pistepörssiin.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 25 Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 34–35, 10; Laskutaito 6 kevät; moniste s. 164

Arvio tunnista:
Ratkaisukartan kertaus sujuu rauhallisesti. Tosin litran ja kuutiodesimetrin vastaavuus on unohduksissa. Työskentely ryhmissä sujuu huonosti. Piia B ja Pirjo B ovat poissaolevan oloisia. Yritän opettaa heitä, mutta he eivät tunnu pääsevän mukaan, vaikka yritän selvittää kuinka havainnollisesti. Piia B osoittanee vähän mieltään videopalautteesta eikä "esiinny", vaan on päättänyt todellakin olla häiritsemättä. Samassa ryhmässä olevat Simo C ja Arvo A yrittävät parhaansa, mutta ilmeisesti tämän ryhmän tyttöjen ja poikien "kemiat" eivät sovi yhteen.

Huomioni kiinnittyy neljästä pojasta muodostettuun ryhmään. Ryhmän kolme poikaa Aapo A, Aaro A ja Paavo B ovat alkukokeen perusteella luokan parhaimmistoa ja Sampo C on selkeästi heikompi. "Heikoin lenkki" häiritsee ryhmän toimintaa. Seuraan tilannetta ja viimein hermostun ja menen hänen kanssaan käytävälle ja kysyn, miksi hän häiritsee tuntia. Sampo vastaa, että hän on ollut poissa eikä ole saanut kotitehtävä -monistetta eikä tehopisteitä, joita ryhmän muilla pojilla on paljon. Yritän lohduttaa häntä ja sanon, ettei maailma tähän kaadu. Menemme luokkaan, ja hän jatkaa töitä *ryhmässään. Kaksi muuta ryhmää toimivat luokassa paremmin. Tarkistan oppilaiden kotitehtävien suoritukset mutta en ehdi käydä tehtäviä läpi. Sovin opettajan kanssa, että oppilaat voivat tarkistaa päivän kuluessa tekemänsä monisteet, kunhan ovat ensin näyttäneet opettajalle tekemänsä tehtävät.*

24. TUNTI pe 21.11.03 10.05–10.50	**AIHE** **Ongelmanratkaisu ryhmässä** ▪ Samat ryhmät jatkavat Laskutaito 6 yhteistuumakorttien ratkaisemista. ▪ Kotitehtäväksi Laskutaito 6 kevät moniste s. 164 tai Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 10.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Laskutaidon 6 yhteistuumakortit Laskutaito 6 kevät s. 164

Arvio tunnista:
Samat ryhmät jatkavat yhteistuumakorttien ratkaisemista. Tunti sujuu nyt paremmin. Juttelen ruokalassa muutaman oppilaan kanssa, jotka valittavat kotitehtävien määrää. He eivät ole kuulemma tottuneet tekemään näin paljon kotitöitä! Yritän sanoa, ettei koulussa voi aina vain pelkästään viihtyä, vaan tämä on heidän työpaikkansa. Oppilaat vastaavat, että jaksaisivat tehdä vielä enemmän, jos saisivat palkkaa. Tästä päättelen, että tahtia olisi varaa tehostaa, mutta heikoimpien osalta kurssin mielekkyys kärsisi. Toisaalta totean, etten ole onnistunut motivoimaan näitä oppilaita riittävästi, jotta he kiinnostuisivat kotitehtävistä. On kai hyväksyttävä, etteivät kaikki voi olla innostuneita matematiikasta ja ongelmanratkaisusta.

25. TUNTI ma 24.11.03 11.30–12.15	**AIHE**
	Itsenäinen ongelmanratkaisu: Nopeus ja kulutus
	▪ Kotitehtävien tarkistus: Laskutaidon tuumavihko 6 syysosa: s. 10. Laskutaito 6 kevät moniste s. 164 t. 7 taululla.
	▪ Nopeuden käsitteen selvittäminen: Missä tilanteissa oppilaat ovat olleet tekemisissä nopeuden kanssa? (juoksukilpailut, auto)
	    o Nopeuden demonstrointi: mitataan 5 m luokan lattialle, valitaan kävelijä/juoksija, kellottaja ja lähettäjä ja lasketaan nopeus.
	    o Lasketaan monisteen 26 Keskinopeus-kohdan 1. tehtävä yhdessä.
	▪ Tutustutaan kulutuksen käsitteeseen (moniste 26):
	    o Kuinka paljon auto kuluttaa bensiiniä 100 km matkalla?
	    o Lasketaan monisteen 26 3. tehtävä.
	▪ Kotitehtäväksi monisteen 26 tehtävät 2 ja 5 sekä koko moniste vapaaehtoisena kotitehtävänä.
		TARVIKKEET / VÄLINEET
		
		Moniste 26
		
		mittanauha
		
		sekuntikello

Arvio tunnista:
Kotitehtävät on tehty hyvin. Ainoastaan Pekka B on unohtanut ja tulee ilmoittamaan asiasta reilusti ja omatoimisesti. Tehopisteiden saaminen tuntuu edelleen kaikista tärkeältä, ja monisteita on laskettu hyvin. Yksi tytöistä, joka on kokenut kurssin raskaaksi,

on nyt tehnyt 14 omaa tehtävää! Annan hänelle 5 tehopistettä taulukkoon upeasta suorituksesta. Nopeuden demonstrointi kiinnostaa oppilaita, samoin kulutus. Tunti sujuu ihmeen mukavasti verrattuna perjantain tunteihin: tänään luokalle tuntuu sopivan hyvin itsenäinen, opettajajohtoinen työskentely.

26. TUNTI ma 24.11.03 12.30–13.15	**AIHE** **Ongelmanratkaisu: Tulitikkutehtävät** ▪ Ratkaistaan kalvolla monisteen 27 ”Tulitikkutehtäviä 1” ensimmäinen tehtävä. o Oppilaat miettivät ja kokeilevat ratkaisun löytämistä piirtoheittimellä olevilla tikuilla. ▪ Oppilaat alkavat ratkoa tehtäviä yksin (tai pareittain). ▪ Käydään piirtoheittimen avulla monisteen 27 ratkaisut. o Oppilaat esittävät ratkaisujaan. ▪ Kotitehtäväksi moniste 28; Tulitikkutehtäviä 2	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Monisteet 27 ja 28

Arvio tunnista:
Tulitikkutehtävät motivoivat ja innostavat oppilaita. Paavo B ratkoo tehtäviä todella nopeasti. Aaro A ja Aapo A löytävät hyviä omia ratkaisuja pariin tehtävään. Tunti sujui mielestäni odotusten mukaisesti.

27. TUNTI ke 26.11.03 12.30–13.15	**AIHE** **Laivan testaus; Arkhimedeen laki** ▪ Oppilaat testaavat valmistamiaan laivoja 4–5 oppilaan ryhmissä koulun aulan suihkulähteellä. ▪ Laivanrakennustodistus (Moniste 29); o Pysyykö laiva pinnalla? Pitääkö laiva vettä? o Miksi laiva pysyy tai ei pysy pinnalla? o Miten lasket laivan tilavuuden? ▪ Kotitehtäväksi loput Monisteen 29 laskutehtävistä	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 29

Arvio tunnista:
Oppilaat testaavat laivojaan 4–5 oppilaan ryhmissä aulan suihkulähteellä. Valmistelut teettävät töitä: kamera, altaan kunnostus, tarvittavat monisteet, muovailuvaha, desilitramitat… Ehdin nipin napin, ennen kuin tunti alkaa.

Laivanrakennustodistuksen täyttäminen ja itsearviointi virallistaa asiaa. Jokaista oppilasta kiinnostaa, pysyykö oma laiva pinnalla ja mahtuuko laivan ruumaan litra vettä. Useat oppilaat vetävät suoranaisella hartaudella viivan ruuman sisäseinälle ja toteavat juhlallisesti: ”Tässä se litra nyt sitten on!”

28. TUNTI ke 26.11.03 13.30–14.15	**AIHE** **Laivan testaus; Arkhimedeen laki** Kokeillaan altaassa erilaisten materiaalien ja esineiden kellumista tai uppoamista: ▪ puupala, PS-E-levy, poranterä, ▪ Pohditaan, miksi esine kelluu tai uppoaa (tiheys, tilavuus, muoto). ▪ Miksi metallista valmistettu laiva pysyy pinnalla?	**TARVIKKEET / VÄLINEET** kuin edellisellä tunnilla Moniste 30

	Oppilaat huomaavat että muovailuvahasta tehty pallo tai pala uppoaa, mutta kun samasta pallosta muotoillaan ”vene”/kulho, se saadaan kellumaan. ▪ Kappaleen muoto vaikuttaa kellumiseen. ▪ Miksi? Koska sen syrjäyttämä vesimäärä saadaan suuremmaksi: astian vedenpinta nousee korkeammalle. ▪ Myös metallista valmistettu laiva voi kellua. ▪ Tutustutaan monisteeseen 30: Arkhimedeen lain mukaan ***nesteeseen upotettu kappale menettää painostaan yhtä paljon kuin sen syrjäyttämä nestemäärä painaa***. Kotitehtävien tarkistus. Merkitään tehopisteet.	

Arvio tunnista:

Muovailuvahapalan uppoaminen ja samasta palasta muovaillun veneen kelluttaminen onnistuvat ja ihmetyttävät oppilaita. Kappaleen muodon vaikutus kellumiseen havainnollistuu selkeästi, ja oppilaat todellakin löytävät itse vastauksen kellumisen ja uppoamisen ongelmaan. Nosteen ja Arkhimedeen lain selvittäminen taitaa kuitenkin mennä useimmilta ohi!

Työläät ja järjestelyjä vaativat tunnit. Valmisteluun kannattaa varata paljon aikaa. Oppilaat vaikuttivat kiinnostuneilta; toiminnallisuus aktivoi näitä oppilaita. Ei minkäänlaisia häiriöitä.

29. TUNTI	**AIHE** **Ongelmanratkaisu; Sarjat/kertaus**	**TARVIKKEET / VÄLINEET**
to 27.11.03 12.30– 13.15	▪ Kotitehtävien tarkistus. Merkitään tehopisteet. ▪ Laivan ruuman tilavuuden laskeminen ▪ Purjeen pinta-alan laskeminen ▪ Ongelmatehtäviä: sarjan päättelyä Laskutaito 6 syksy s. 162 ja 163. ▪ Kertausmoniste 31	Moniste 31 Laskutaito 6 syksy s. 162 ja 163 oppilaiden valmistamat laivat

Arvio tunnista:

Tytöillä oli välitunnilla tonttuleikki koulun pihassa. Vaatteiden vaihto vie aikaa, joten aloitamme poikien kanssa luku-/kuviosarjamonisteen tekemisen. Pojat tuovat omaaloitteisesti tehtäviänsä nähtäväkseni: tehopistetaulukko motivoi edelleen. Ensi tiistaina on kurssin viimeinen tunti. Muistutan oppilaita siitä, koska monet ovat unohtaneet, että tänään on ongelmanratkaisua. Yksi pojista on hankalalla tuulella, ja joudun vähän komentelemaan. Oppilaat laskevat innokkaasti laivoihinsa liittyviä laskuja eli purjeen pinta-aloja ja ruuman tilavuuksia. Itse valmistetun käsityön tutkiminen motivoi huikeasti nykyajankin lasta. Välillä tunnilla on aivan hiljaista. Oppilaat vaikuttavat työskentelevän todella itsenäisesti. Lopputunnista viemme valmiit laivat nähtäväksi koulun aulan vitriiniin; asia vaikuttaa oppilaista tärkeältä. Laivanrakennus on päätöksessään, ja itselläniki on huojentunut olo. Projekti oli todellakin toteuttamisensa arvoinen kokemus!

30. TUNTI ti 2.12.03 11.30–12.15	**AIHE** **Ongelmanratkaisu / Kertaus** ▪ Kotitehtävien tarkistus. Merkitään tehopisteet luokan taulukkoon.	**TARVIKKEET / VÄLINEET** Moniste 31

Arvio tunnista:
Kertaustehtävien tarkistusta ja kurssin kertailua leppoisissa tunnelmissa. Oppilailla on joulujuhlaesityksiä ja valmistautumista itsenäisyyspäivän juhliin. Kiitän oppilaita osallistumisesta ja toivotan onnea loppukokeeseen.

10.1.2 Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin toteutuksen arviointia

Edellisessä luvussa esittämieni tuntisuunnitelmien avulla toteutetusta opetuksesta ja sen antamista kokemuksista nousivat esille seuraavat näkökohdat: Keskeisiksi matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opetusta tukeviksi asioiksi muodostuivat *organisointi, matematiikan verbalisointi, opetuksen ongelmakeskeisyys, luokan ilmapiiri ja opetuksen integrointi*.

Kurssi osoitti, että ongelmanratkaisun opettaminen vaatii hyvää *organisointia*, joka käytännössä tarkoitti huolellista ennakkosuunnittelua. Tarvittavat tilavaraukset ja materiaalihankinnat oli suoritettava ajoissa. Opetuksen sisällöstä ja luonteesta tiedotettiin kaikille koeryhmää opettaville opettajille sekä hyvän tutkimustavan mukaisesti myös oppilaiden vanhemmille (liite 1). Vanhempien tuki ja myönteinen asennoituminen olivat tärkeitä oppilaiden motivoitumiselle ja opetuksen onnistumiselle.

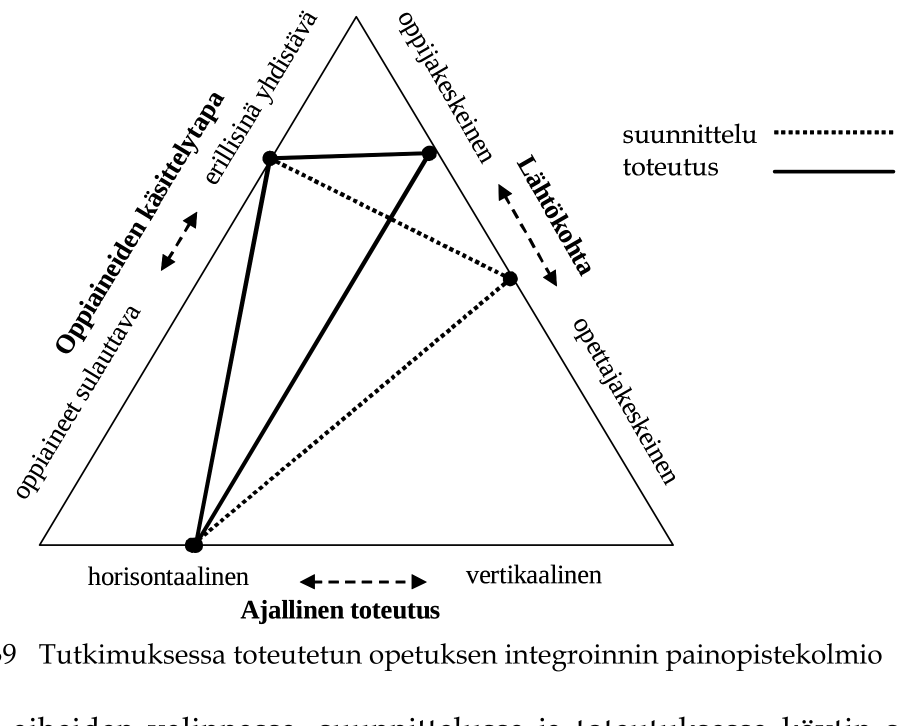
Keskeiseksi matematiikan ja ongelmanratkaisun opettamisessa nousi *matematiikan ja ongelmanratkaisun verbalisointi*. Oppilaille oli annettava aikaa ja heitä oli kannustettava puhumaan ja kirjoittamaan matematiikasta. Ryhmätyöt ja yhteistoiminnallinen matematiikka tarjosivat tähän luontevan tilaisuuden. Oppilaat oli myös totutettava selostamaan ratkaisujaan muille oppilaille esimerkiksi kotitehtävien tarkistuksen yhteydessä. Mielestäni ratkaisukartan opettelu jäsensi ja helpotti oppilaan selostusta, sillä siihenhän hän oli pyrkinyt kirjoittamaan ratkaisunsa etenemisen ja ajattelunsa kulun. Ratkaisukartan opettelu vei oppilaalta tietysti aikaa, mutta se auttoi myös minua opettajana ymmärtämään, missä kohdassa oppilaalla oli vaikeuksia.

Ongelmakeskeisen opetusmenetelmän soveltaminen tuntui luontevalta tähän aihepiiriin, mutta sen toteuttaminen ei aina ollut helppoa. Pyrin esittämään oppilaille aina kuin mahdollista kysymykset *miksi* ja *miten*. Vaikeinta itselleni oli malttaa antaa oppilaiden pohtia vastauksia ja tehdä vastausehdotuksia, sillä jouduin tietoisesti ”jarruttelemaan” itseäni neuvojen ja vihjeiden annossa.

Kannustavan ilmapiirin luomiseksi oli tehtävä lujasti töitä, koska ongelmatehtävä, jota oppilas ei osannut ratkaista tai jonka hän ratkaisi väärin, koettiin varsinkin kurssin alkuvaiheessa epäonnistumiseksi, eikä se voinut olla vaikuttamatta luokan ilmapiiriin. Virheellisten vastausten hyväksyminen ratkaisun välivaiheeksi oli mielestäni toimiva ajatus. Se vaikutti positiivisesti luokan ilmapiiriin, sillä aremmatkin oppilaat rohkaistuivat yrittämään ja kokeilemaan haasteellisten tehtävien ratkaisua.

Opetuksen integrointi toteutettiin liittämällä matemaattista ongelmanratkaisua matematiikan lisäksi äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon tunteihin. Tämä tapahtui luvussa 6 esittämieni periaatteiden mukaisesti. Oppiaineita integroitiin ongelmanratkaisukurssilla erillisinä yhdistäen. Tässä käytettiin apuna Davisonin ja Millerin (1995, 226–230) malleja, joita esittelin luvussa 6.6.2. Tällä tavoin oppilaille pyrittiin osoittamaan, että matemaattiselle ongelmanratkaisulle löytyy käyttömahdollisuuksia muidenkin oppiaineiden kuin matematiikan alueelta.

Arvioidessani opetuksen integroinnin suunnittelua ja toteutumista kehittelemäni integroinnin painopistekolmion (luku 6.4) avulla päädyn integroinnin lähtökohdan, oppiaineiden käsittelytavan ja ajallisen toteutuksen osalta kuvion 39 mukaisiin painotuksiin: painopisteet olivat mielestäni horisontaalisen, oppijakeskeisen ja oppiaineita erillisenä yhdistävän näkökulmien suunnissa. Vastasiko toteutus suunnittelua? Tutkimuksen lukijalle muotoutunee siitä oma mielipide. Mielestäni tässä tutkimuksessa suunnittelun painotusalue siirtyi integroinnin toteutuksessa oppijakeskeisempään suuntaan, koska oppilaiden toiminta ja palaute kurssin aikana huomioitiin tulevien tuntien toteutuksessa (esim. ajankäyttö, kotitehtävien määrä yms. toiveet). Kaksi muuta painotusaluetta: oppiaineiden käsittelytapa ja ajallinen toteutus pysyivät mielestäni karkeasti ottaen samoina integroinnin toteutuksessa.



KUVIO 39 Tutkimuksessa toteutetun opetuksen integroinnin painopistekolmio

Tuntien aiheiden valinnassa, suunnittelussa ja toteutuksessa käytin seuraavia periaatteita: Lähtökohtana oli, että aiheen oli liitettävä ongelmanratkaisuun ja koeryhmän oppilaiden opetussuunnitelmaan. Oppitunnin oli oltava sidottavissa kuhunkin integroitavaan aineeseen siten, että se tukisi nimenomaan opetettavan aineen sisältöjä. Luvun 9.4.2 taulukossa 5 esitin yhteenvedon siitä, mihin oppiaineisiin ongelmanratkaisun opetukseen käytettyjen tuntien aiheet integroituivat. Esimerkiksi kun lukujärjestyksen mukaisella äidinkielen ja kirjallisuuden oppitunnilla aiheena oli luetun ymmärtäminen, oppilaat tutustuivat kurssin ensimmäiseen teemaan eli sanallisiin ongelmanratkaisutehtäviin. Tehtäviä ratkaistessaan he käyttivät ja harjoittivat matematiikkaa ja ongelmanratkaisua. Ratkaisukarttaa luodessaan he piirsivät apupiirroksia, jolloin kuvaamataidolliset taidot harjaantuivat. Kotitehtäväksi annettiin äidinkielen ja kirjallisuuden kirjoitustehtävänä oman ongelmanratkaisutehtävän laatiminen.

10.2 Millaisia eroja oli koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisissa ongelmanratkaisukokeissa?

Kvantitatiivisten tulosten käsittelyä varten tarkistettiin, että ongelmanratkaisukokeiden avulla saatu aineisto täyttää käytetyille menetelmille, t-testille ja toistettujen mittausten varianssianalyysille, asetetut vaatimukset (liite 24). Tällöin esimerkiksi Metsämuurosen (2005, 365) mukaan on voitava: *"olettaa (ainakin kohtuullisella varmuudella), että otos on peräisin (ainakin kohtuullisen) normaalisti jakautuneesta populaatiosta"* ja mittaus on suoritettu vähintään välimatka-asteikollisella mittarilla (ks. myös mts. 727–728; Nummenmaa 2004). Vaatimus välimatka-asteikollisesta mittauksesta täyttyi, kun oppilaiden koevastaukset pisteytettiin samojen sääntöjen (liitteet 5, 6, 7 ja 8) perusteella. Koska tutkimuksen otoskoko on pieni, niin varmuuden vuoksi, tulokset käsiteltiin myös ei-parametrisilla menetelmillä (esim. Mannin–Whitneyn U-testi, Kruskalin–Wallisin -testi). Ne antoivatkin hieman paremmat tilastolliset tulokset kuin parametriset menetelmät. Eri menetelmillä saaduissa tuloksissa ei kuitenkaan ollut olennaisia eroja ja koska parametristen testioletusten katsottiin toteutuvan, päädyttiin parametristen menetelmien käyttöön.

Tulosten raportoinnissa ja tulkinnassa on käytetty apuna tilastollista merkitsevyystasoa (*p*-arvo), efektikokoa (Cohenin *d*), ryhmän tulosten keskiarvoa sekä kehitysprosenttia. Ryhmän sisäinen kehitysprosentti on laskettu loppukokeen tuloksesta vertaamalla sitä ryhmän alkukokeen tulokseen. Ryhmien välisessä vertailussa koeryhmän kehitysprosentti on laskettu kontrolliryhmän suorituksesta.

Koska efektikokoa ei voida laskea suoraan SPSS-ohjelmistolla kuten *p*-arvoa, esittelen lyhyesti sen perusidean. Tieteellisten julkaisujen raportointiohjeissa (esim. American Psychological Association 2001, 25–26) on kehotettu ilmoittamaan *p*-arvon lisäksi efektikoko *(Effect Size,* ES*)* osittain siitä syystä, että *p*-arvo on voimakkaasti riippuvainen otoskoosta. Pienillä otoksilla ryhmien välisten erojen täytyy olla huomattavasti suurempia kuin suurilla otoksilla, jotta ryhmille saataisiin sama tilastollinen merkitsevyys. Efektikoko kertoo, kuinka suuri yhteys, selitys tai ero ryhmien välillä on (Metsämuuronen 2005, 422–423; Cohen 1988, 8–13). Efektikokoon liittyviä mittoja on useita. Tässä tutkimuksessa se on esitetty keskiarvojen eroon perustuvan Cohenin *d*:n avulla (Cohen 1988, 20–21). Opetuksen tutkimuksessa sitä on käytetty oppilaiden alku- ja loppukoetulosten perusteella tehtyyn opetuksen vaikuttavuuden arviointiin (esim. Ruokamo 2000; Utriainen 2004). Metsämuuronen (2005, 426–427) tiivistää Cohenin *d*:n laskemiseen tarvittavat kaavat seuraavasti:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{pooled}}, \ \sigma_{pooled} = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2}},$$

missä $\bar{x}_1 \, ja \, \bar{x}_2$ ovat ryhmien keskiarvot ja σ_{pooled} on ryhmien yhdistetty populaatiokeskihajonta ja missä n_1 ja n_2 ovat ryhmien otoskoot ja σ_1^2 ja σ_2^2 viittaavat ryhmien populaatiovariansseihin. Populaatiovarianssit saadaan otosvarianssista kertomalla se tekijällä $\frac{(n-1)}{n}$.

Mikäli kokeellisessa asetelmassa otoskoko on ryhmissä sama, esimerkiksi verratessa saman ryhmän alku- ja loppumittausta, yhdistetty varianssi on helpompi laskea:

$$\sigma_{pooled} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}},$$

missä σ_1^2 ja σ_2^2 tarkoittavat ryhmän variansseja alku- ja loppumittauksissa. Tällöin Cohenin arvon laskemiseen voidaan siis käyttää kaavaa

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{pooled}}, \ \sigma_{pooled} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}.$$

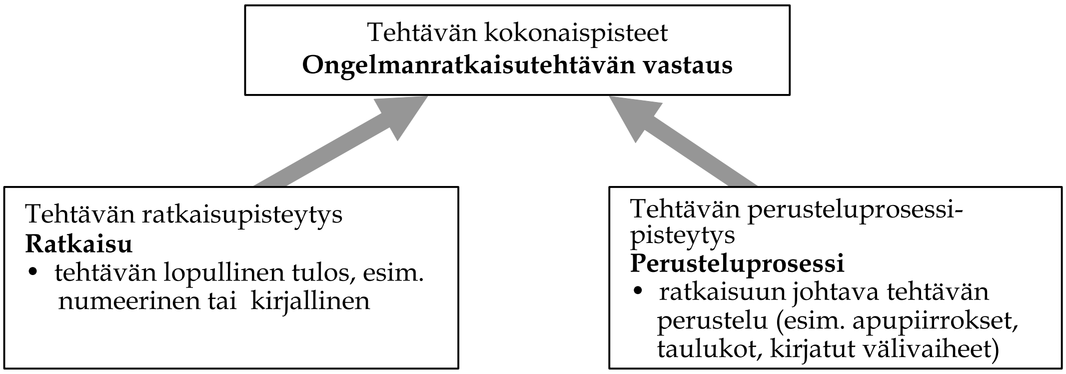
Cohen (1988, 24–27) on esittänyt karkeiksi efektikoon rajoiksi seuraavat rajat. Efektikoko on pieni, kun *d* on 0,20, keskisuuri *d*:n ollessa 0,50 ja suuri, kun *d* on 0,80.

Efektikoon etuna on, että se huomioi ryhmien keskiarvojen muutoksen lisäksi myös niiden keskihajonnan ja antaa näin ollen prosentuaalisiin muutoksiin verrattuna todellisemman kuvan esimerkiksi ryhmän alku- ja loppumittauksen välisistä eroista. Seuraavissa luvuissa esittelen tutkimuksessa mittareina käytettyjen matemaattisten ongelmanratkaisukokeiden avulla saadut tulokset. Laskemisessa on käytetty SPSS-tuloksissa annettua 4 tai 5 merkitsevän numeron tarkkuutta.

10.2.1 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli alku- ja loppukokeessa?

Alkukoe (A&B) ja loppukoe (C&D) oli jaettu kahteen osioon. A- ja C-osio sisälsivät lähinnä numeerista ja geometrista päättelyä edellyttäviä tehtäviä, B- ja D-osiot painottuivat sanallisten ongelmien ratkaisemiseen ja perustelemiseen. Ongelmanratkaisukokeiden arviointia ja pisteytystä varten laadittiin yhtenäiset arvosteluperusteet (liitteet 5, 6 ja 7).

Lähtökohtana koetehtävien arvioinnille ja pisteytykselle oli, että ongelmanratkaisutehtävän vastaus jaettiin tehtävän ratkaisuun ja tehtävän perusteluprosessiin kuvion 40 mukaisesti. Ongelmanratkaisutehtävien vastaukset pisteytettiin siten, että täydet pisteet sai tehtävän oikeasta vastauksesta ja siihen johtavasta selkeästä perustelusta.



KUVIO 40 Ongelmanratkaisutehtävän vastauksen jaottelu

Jokaisen tehtävän pisteytyksessä eroteltiin vielä erikseen ratkaisu ja perusteluprosessi siten, että varsinaisesta tehtävän ratkaisemisesta (tuloksesta) sai ratkaisupisteitä ja siihen johtavista apupiirroksista, taulukoista ja lausekkeista tai muusta ongelmanratkaisuun johtavasta esityksestä annettiin perusteluprosessipisteitä (kuvio 40). Toteutetun pisteytyksen avulla on mahdollista vertailla koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden vastausten tuloksia ja niiden perusteluja erikseen. Näin esimerkiksi ratkaisukartan käytön soveltamista voitiin arvioida koeryhmäläisten perusteluprosessipisteiden avulla. Tehtävän osittaisesta oikeasta suorituksesta sai myös pisteitä yhtenäisen arviointiperusteen mukaisesti (liitteet 5, 6 ja 7). Tällaista tehtävän portaittaista pisteytystä käytetään yleisesti koulussa pidettävien kokeiden arvioinnissa. Vastaavasti matematiikan oppimisen tutkimukseen sovelletuissa mittareissa on käytetty samantyyppistä pisteytysmenetelmää (esim. Hohn & Frey 2002, 376–378; Hegarty & Kozhenikov 1999, 686–687).

Koe- ja kontrolliryhmän sisäiset muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Koeryhmän alkukokeen ja loppukokeen kokonaistulosten sekä ratkaisu- ja perusteluprosessiosioiden tilastolliset tunnusluvut on esitetty taulukossa 6.

TAULUKKO 6 Koeryhmän tulokset alku- ja loppukokeessa

Koeryhmä / pisteet	N	Minimi	Maksimi	Keskiarvo	Keskihajonta
Alkukoe AB yhteensä	17	23,50	45,00	32,26	6,57
▪ Ratkaisu AB	17	10,00	25,00	15,94	4,23
▪ Perusteluprosessi AB	17	12,00	22,50	16,32	2,95
Loppukoe CD yhteensä	17	25,75	52,25	40,84	7,20
▪ Ratkaisu CD	17	11,25	29,00	20,78	4,56
▪ Perusteluprosessi CD	17	14,50	24,50	20,06	3,34

Koeryhmän kokonaispistemäärän keskiarvo oli loppukokeessa (taulukko 7) noin 8,5 pistettä (26,6 %) parempi kuin alkukokeessa. Koeryhmä paransi suoritustaan tehtävien ratkaisupisteiden osalta loppukokeessa vajaat 5 pistettä (30,4 %) ja perusteluprosessipisteiden osalta vajaat 4 pistettä (23,0 %). Koeryhmässä alku- ja loppukokeen välillä tapahtuneet kokonais-, ratkaisu- ja perustelupistemäärän parannukset olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä, ja opetuksen vaikutus eli efektikoko on ollut koeryhmään suuri (t-testi, p = 0,000; Cohenin *d* arvot > 0,80, liite 16).

TAULUKKO 7 Koeryhmän kehitys alku- ja loppukokeen tulosten perusteella

Koeryhmä (N = 17)	**Alkukoe** *max. 58 p*	**Loppukoe** *max. 58 p*	**Kehitys** *Loppukoe–Alkukoe*	**Efektikoko** *Cohenin d*
Kokonaispistemäärä	32,26	40,84	+8,58 p (26,6 %) ***	1,24
Ratkaisu	15,94	20,78	+4,84 p (30,4 %) ***	1,01
Perusteluprosessi	16,32	20,06	+3,74 p (23,0 %) ***	1,19

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Kaikki koeryhmän oppilaat paransivat henkilökohtaisia tuloksiaan loppukokeessa. Kokonaispistemäärien parannukset vaihtelivat 2,25 pisteestä 21,25 pisteeseen (ks. taulukko 16). Ratkaisupisteiden osalta vaihteluväli oli 1,25–13,0 pistettä ja perusteluprosessin osalta 0,25–9,00 pistettä.

Kontrolliryhmän alkukokeen ja loppukokeen kokonaistulosten sekä ratkaisu- ja perusteluprosessiosioiden tilastolliset tunnusluvut on esitetty taulukossa 8.

TAULUKKO 8 Kontrolliryhmän tulokset alku- ja loppukokeessa

Kontrolliryhmä / pisteet	**N**	**Minimi**	**Maksimi**	**Keskiarvo**	**Keskihajonta**
Alkukoe AB yhteensä	35	13,00	55,00	33,01	10,00
▪ Ratkaisu AB	35	5,50	27,00	15,96	5,49
▪ Perusteluprosessi AB	35	7,50	28,00	17,05	4,88
Loppukoe CD yhteensä	35	16,25	48,75	32,60	8,69
▪ Ratkaisu CD	35	5,50	28,00	16,99	5,49
▪ Perusteluprosessi CD	35	8,50	23,75	15,61	3,70

Kontrolliryhmän kokonaispistemäärän keskiarvo oli loppukokeessa (taulukko 9) vajaan puoli pistettä (−1,2 %) heikompi kuin alkukokeessa. Kontrolliryhmä paransi loppukokeessa suoritustaan ratkaisussa pisteen verran (6,1 %), mutta perusteluprosessista saatu keskiarvotulos laski vajaat 1,5 pistettä (8,4 %).

TAULUKKO 9 Kontrolliryhmän kehitys alku- ja loppukokeen tulosten perusteella

Kontrolliryhmä (N = 35)	**Alkukoe** *max. 58 p*	**Loppukoe** *max. 58 p*	**Kehitys** *Loppukoe – Alkukoe*	**Efektikoko** *Cohenin d*
Kokonaispistemäärä	33,01	32,60	−0,41 p (−1,2 %)	−0,04
Ratkaisu	15,96	16,99	+1,03 p (6,1 %)	0,19
Perusteluprosessi	17,05	15,61	−1,44 p (−8,4 %)	−0,33

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärien muutokset alku- ja loppukokeen kesken eivät olleet tilastollisesti merkitseviä (t-testi, p = 0,697; p = 0,115 ja 0,011; liite 17). Efekti kokeiden välillä on ollut vähäistä.

Poikkeuksen tekee perusteluprosessitulos, jossa pienen vaikutuksen raja ylittyy *(d = −0,33)*, tosin negatiiviseen suuntaan. Kontrolliryhmän perustelu- ja kokonaispistemäärien lievä heikkeneminen kuvannee sitä, että loppukoe oli hivenen vaativampi kuin alkukoe. Kokeiden laadinnassa tavoitteena oli tehdä vaikeudeltaan kaksi samantasoista koetta siten, että koe- ja kontrolliryhmän oppilaat olisivat myös loppukokeessa uusien ongelmien ja ongelmanratkaisutilanteiden edessä. Tämä lienee lähes mahdoton tehtävä, koska kokeiden tehtävät eivät tällöin voi olla täsmälleen identtisiä. Todettakoon vielä, että molempien kokeiden maksimipistemäärä oli 58, ja tähän suhteutettuna kontrolliryhmän alle puolen pisteen ero kokonaistulosten keskiarvoissa alku- ja loppukokeen välillä on kuitenkin vähäinen poikkeama. Kontrolliryhmän keskiarvotulosten perusteella alku- ja loppukokeita voidaan pitää likipitäen samantasoisina.

Kontrolliryhmän oppilaskohtaiset kokonaispistemäärien muutokset vaihtelivat 11,75 pisteen heikkenemisestä 11,5 pisteen parannukseen. Ratkaisuosion tulosten vaihteluväli oli $^{-}$6,5–$^{+}$8,0 pistettä ja perusteluprosessiosion $^{-}$8,50–$^{+}$4,50 pistettä.

Koe- ja kontrolliryhmien väliset muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Oppilaiden alku- ja loppukokeen maksimi- ja minimitulosten perusteella koeryhmä oli homogeenisempi kuin kontrolliryhmä (taulukot 6 ja 8). Toisaalta kontrolliryhmä oli koeryhmää kaksi kertaa suurempi, joten on todennäköistä, että kontrolliryhmässä tulosten vaihtelu on suurempaa. Koska oppilaiden alkukokeen tuloksissa oli hajontaa, olisi perusteltua käyttää tilastollisena menetelmänä tulosten käsittelyssä kovarianssianalyysia (esim. Metsämuuronen 2005, 1149–1151). Sen mukaan ryhmien välillä onkin erittäin merkitsevä ero (p = 0,000) koeryhmän eduksi kokonais-, ongelmanratkaisu- ja perusteluprosessituloksissa (liite 18). En kuitenkaan tyytynyt vain pehmeän tilastollisen menetelmän antamiin tuloksiin vaan käsittelin tuloksia myös toistettujen mittausten varianssianalyysin avulla.

Alkukokeen kokonaistulosten (taulukko 10) mukaan koeryhmä menestyi vajaan pisteen (2,3 %) verran heikommin kuin kontrolliryhmä, mutta efektikokoon tai tilastolliseen merkitsevyyteen perustuvia eroja ryhmillä ei ollut. Loppukokeessa osat olivat vaihtuneet. Koeryhmän kokonaistulos oli loppukokeessa reilut 8 pistettä (25,3 %) parempi kuin kontrolliryhmän tulos.

TAULUKKO 10 Koe- ja kontrolliryhmien väliset erot alku- ja loppukokeen kokonaispisteiden perusteella

Kokonaispistemäärä	**Alkukoe** *max. 58 p*	**Loppukoe** *max. 58 p*
Koeryhmä (N = 17)	32,26	40,84
Kontrolliryhmä (N = 35)	33,01	32,60
Ryhmien erot: *koeryhmä – kontrolliryhmä*	–0,75 (–2,3 %)	+8,24*** (25,3 %)
Efektikoko: *Cohenin d*	–0,08	1,02

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Ryhmien välinen ero loppukokeessa oli tilastollisesti erittäin merkitsevä (toistettujen mittausten varianssianalyysi, p = 0,000; liite 19). Myös ryhmien välinen efektikoon arvo oli loppukokeessa suuri.

Tarkasteltaessa ryhmien välisiä eroja alkukokeen tehtävien ratkaisupisteiden osalta havaitaan, että koe- ja kontrolliryhmä olivat keskiarvon perusteella lähestulkoon samantasoisia (taulukko 11). Ryhmien välinen ero oli hivenen kontrolliryhmän eduksi. Loppukokeessa koeryhmän ratkaisupistetulos oli vajaat 4 pistettä (22,3 %) parempi kuin kontrolliryhmän tulos. Tilastollisesti tarkasteltuna ero ryhmien välillä oli merkitsevä (toistettujen mittausten varianssianalyysi, p = 0,001; liite 19). Myös Cohenin arvo (*d* = 0,72) ylitti keskisuuren eron rajan.

TAULUKKO 11 Koe- ja kontrolliryhmien väliset erot alku- ja loppukokeen tehtävän ratkaisupisteiden perusteella

Ratkaisu	**Alkukoe** *max. 29 p*	**Loppukoe** *max. 29 p*
Koeryhmä (N = 17)	15,94	20,78
Kontrolliryhmä (N = 35)	15,96	16,99
Ryhmien erot: *koeryhmä – kontrolliryhmä*	–0,02 (–0,1 %)	+3,79** (+22,3 %)
Efektikoko: *Cohenin d*	–0,00	0,72

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Perusteluprosessipisteiden osalta erot olivat samansuuntaisia (taulukko 12). Alkukokeessa koeryhmä oli reilun puoli pistettä (4,3 %) heikompi kuin kontrolliryhmä mutta loppukokeessa koeryhmä oli noin 4,5 pistettä (28,5 %) parempi kuin kontrolliryhmä.

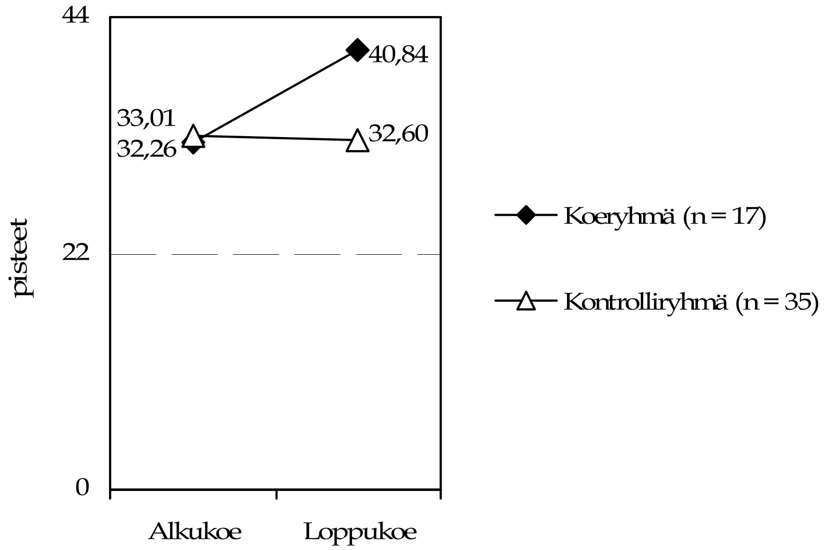
TAULUKKO 12 Koe- ja kontrolliryhmien väliset erot alku- ja loppukokeen perusteluprosessipisteiden perusteella

Perusteluprosessi	**Alkukoe** *max. 29 p*	**Loppukoe** *max. 29 p*
Koeryhmä (N = 17)	16,32	20,06
Kontrolliryhmä (N = 35)	17,05	15,61
Ryhmien erot: *koeryhmä – kontrolliryhmä*	–0,73 (–4,3 %)	+4,45*** (+28,5 %)
Efektikoko: *Cohenin d*	–0,17	1,26

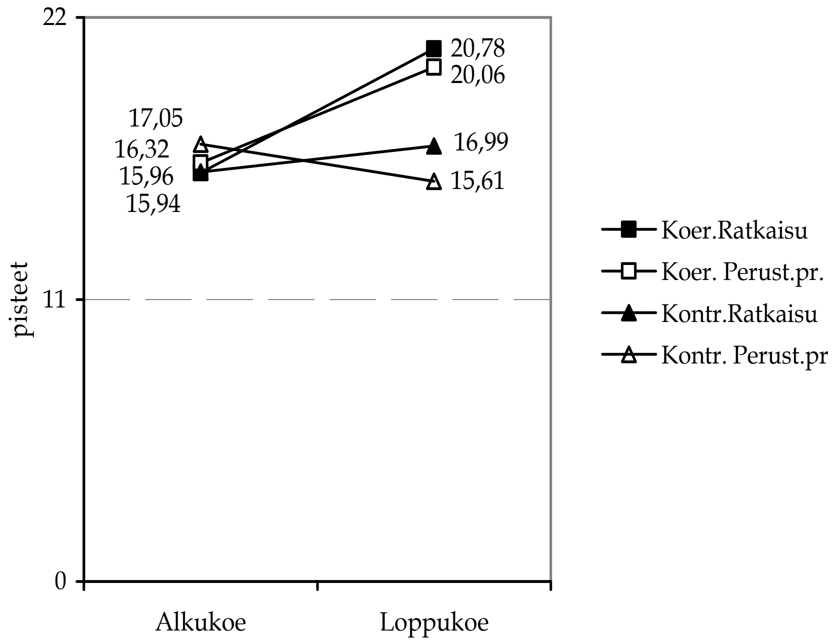
Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Ryhmien välinen ero perusteluprosessien pistemäärän osalta oli tilastollisesti erittäin merkitsevä (toistettujen mittausten varianssianalyysi, p = 0,000; liite 19). Cohenin arvo (*d* = 1,26) ylitti reilusti ryhmien välisen suuren eron rajan.

Yhteenveto koe- ja kontrolliryhmien sisäisistä ja ryhmien välisistä muutoksista kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessituloksissa alku- ja loppukokeiden välillä on esitetty kuvioissa 41 ja 42.



KUVIO 41 Koe- ja kontrolliryhmien väliset erot alku- ja loppukokeen kokonaistulosten perusteella



KUVIO 42 Koe- ja kontrolliryhmien tehtävien ratkaisujen ja perusteluprosessien väliset erot alku- ja loppukokeen tulosten perusteella

Koe- ja kontrolliryhmän tasoryhmien tulosten muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Tulosten yksityiskohtaisempaa tarkastelua varten otoksen 52 oppilasta jaettiin alkukokeen kokonaispistemäärien perusteella kolmeen tasoryhmään siten, että ryhmät olisivat oppilasmäärältään mahdollisimman samansuuruisia (taulukko 13, ks. myös liite 23). Sijoittumisen ryhmiin määräsi kunkin oppilaan alkukokeesta saama kokonaispistemäärä. Tapauksissa, joissa oppilailla oli sama kokonaispistemäärä, ratkaisupisteitä enemmän saanut asetettiin tuloksissa edelle.

Oppilaiden pistemäärät vaihtelivat alkukokeessa 13 pisteestä 55 pisteeseen. Ryhmä A nimettiin ”hyvien” ryhmäksi ja siihen pääsi, kun oppilas sijoittui alkukokeessa sijoille 1–17. A-ryhmän pisterajaksi tuli 36 pistettä. Ryhmää B kutsuttiin ”keskitason” ryhmäksi ja siihen sijoitettiin kokeessa sijoille 18–35 yltäneet oppilaat. Heidän pistemääränsä vaihtelivat 29 pisteestä 35 pisteeseen. Alkukokeessa alle 29 pistettä saaneet ja sijoille 36–52 jääneet kuuluivat tässä kokeessa ”heikkojen” ryhmään C. Loppukokeessa oppilaat pidettiin samoissa ryhmissä A, B ja C, jotta ryhmien kehittymistä alku- ja loppukokeen välillä voitaisiin seurata.

TAULUKKO 13 Koe- ja kontrolliryhmän tasoryhmien tulokset ja kehitys alku- ja loppukokeessa

Koeryhmän tasoryhmien tulokset			**Koeryhmä Kehitys**	
A-ryhmä: Hyvät; 1.–17. (Tulos > 35 pistettä) N = 5	alkukoe	loppukoe	ero *Loppukoe – Alkukoe*	Efektikoko *Cohenin d*
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	40,50	48,75	8,25 (20,3 %)	2,77
Ratkaisu *(max. 29 p)*	20,90	25,85	4,95 (23,6 %)	1,86
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	19,60	22,90	3,00 (15,3 %)	1,48
B-ryhmä: Keskitaso; 18.–35. (Tulos 35–29 pistettä) N = 7				
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	31,50	38,21	6,71 (21,3 %)	2,22
Ratkaisu *(max. 29 p)*	15,43	19,29	3,86 (25,0 %)	1,79
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	16,07	18,93	2,86 (17,8 %)	1,24
C-ryhmä: Heikot; 36.–52. (Tulos < 29 pistettä) N = 5				
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	25,10	36,60	11,50 (45,3 %)	1,91
Ratkaisu *(max. 29 p)*	11,70	17,80	6,08 (46,2 %)	1,70
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	13,40	18,80	5,92 (44,4 %)	1,98
Kontrolliryhmän tasoryhmien tulokset			**Kontrolliryhmä Kehitys**	
A-ryhmä: Hyvät; 1.–17. (Tulos > 35 pistettä) N = 12	alkukoe	loppukoe	ero *Loppukoe–Alkukoe*	Efektikoko *Cohenin d*
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	44,40	41,38	–3,02 (-6,8 %)	–0,52
Ratkaisu *(max. 29 p)*	22,25	22,50	0,25 (1,1 %)	0,08
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	22,15	18,88	–3,27 (-14,8 %)	–0,96
B-ryhmä: Keskitaso; 18.–35. (Tulos 35–29 pistettä) N = 11				
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	31,25	31,41	–0,16 (–0,5 %)	–0,53
Ratkaisu *(max. 29 p)*	14,55	15,82	1,27 (8,7 %)	0,57
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	16,70	15,59	–1,11 (–6,6 %)	–0,68
C-ryhmä: Heikot; 36.–52. (Tulos < 29 pistettä) N = 12				
Kokonaispistemäärä *(max. 58 p)*	23,25	24,92	1,67 (7,2 %)	0,30
Ratkaisu *(max. 29 p)*	10,98	12,54	1,56 (14,2 %)	0,40
Perusteluprosessi *(max. 29 p)*	12,27	12,38	0,11 (0,9 %)	0,04

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80

Koska tasoryhmien oppilasmäärät olivat pieniä, tuloksia analysoitiin vain efektikokoa ilmaisevan Cohenin *d*:n avulla. Kaikki koeryhmän oppilaista muodostetut tasoryhmät A, B ja C paransivat kokonaistuloksiaan loppukokeessa (taulukko 13). Parannukset ylittivät efektikoon arvon mukaan reilusti suuren vaikutuksen eli 0,80 rajan. Huomattavaa on, että heikot paransivat alku- ja loppukokeen välillä keskiarvotulostaan peräti 11,5 pistettä. Tosin heidän alkukokeen tuloksissaan oli paljon parantamisen varaa hyvien ryhmään verrattuna. Cohenin *d* -arvo osoittaakin, että hyvien 6,7 pisteen tulosparannus on suhteellisesti heikkojen parannusta suurempi. Kontrolliryhmän tasoryhmien kehitys kokonaistulosten osalta ei ollut vastaavanlaista kuin koeryhmällä, vaan Cohenin *d* -arvot ovat huomattavasti pienempiä kuin koeryhmällä. Hyvien ryhmän keskiarvotulos heikkeni ja keskitasoisten ryhmän tulos pysyi lähes ennallaan. Heikkojen ryhmän tulos parani reilun 1,5 pistettä.

Jos tarkastellaan koeryhmän tuloksia vastausten ratkaisupisteiden osalta, voidaan havaita, että kaikki tasoryhmät paransivat tuloksiaan. Kehitys oli heikkojen ryhmässä keskimäärin noin 6 pistettä, hyvät paransivat keskiarvotulostaan lähes 5 pistettä ja keskitasoryhmä keskimäärin vajaat 4 pistettä. Cohenin *d* -arvon mukaan kehitys on ollut kaikissa ryhmissä suurta. Kontrolliryhmässä tasoryhmien kehittyminen ratkaisupisteiden osalta oli vähäisempää. Tosin keskitason ryhmän Cohenin *d* -arvo ylitti keskisuuren efektin rajan. Hyvien tulos parani vain hieman, keskitason tulos reilun pisteen ja heikkojen reilun 1,5 pistettä.

Kaikkien koeryhmän tasoryhmien perusteluprosessipisteiden keskiarvotuloksen (taulukko 13) paraneminen osoittaa myös kehityksen samansuuntaisuutta. Kehitys oli voimakkainta heikkojen ryhmässä niin pisteiden kuin Cohenin *d* -arvonkin mukaan. Hyvät paransivat reilut 3 pistettä ja keskitasoryhmä vajaat 3 pistettä. Sen sijaan kontrolliryhmän perusteluprosessin tulokset poikkeavat huomattavasti ryhmän aikaisemmista tuloksista (taulukko 13). Hyvien ryhmän tulos laski reilut 3 pistettä ja keskitasoisten ryhmän vähän yli pisteen. Yllättäen Cohenin *d* -arvo ylittää negatiivisesti suuren ja keskisuuren efektin rajan. Heikkojen ryhmän tulos pysyi lähes samana.

Yhteenvetona voidaan todeta, että kaikki tasoryhmät paransivat tuloksiaan loppukokeessa tehtävien ratkaisussa ja perusteluprosessissa. Efekti on ollut Cohenin *d* -arvon perusteella erittäin voimakas, sillä suuren efektin raja 0,80 ylitetään kaikissa tasoryhmissä reilusti.

Myös kontrolliryhmässä tulokset paranivat Cohenin *d* -arvon perusteella tehtävän ratkaisussa. Heikkojen ryhmässä ylitettiin reilusti pienen efektin raja *(d = 0,40)* ja keskitason ryhmässä keskisuuren efektin raja *(d = 0,57)*. Hyvien ryhmässä efektikoko ei muuttunut, mutta kehityksen suunta oli positiivinen. Tämä antaisi viitteitä siitä, että kontrolliryhmän saama opetus tukisi tehtävien oikean ratkaisun saavuttamista. Sen sijaan perusteluprosessitulokset olivat koe- ja kontrolliryhmissä vastakkaisia. Verrattaessa kontrolliryhmän tasoryhmien perusteluprosessituloksia koeryhmän vastaaviin tuloksiin voidaan todeta, että koeryhmän oppilaat olivat vastausten perustelemisessa selvästi parempia. Tämä viittaisi siihen, että koeryhmän oppilaat kehittyivät heille opetetun ratkaisukarttamenetelmän soveltamisessa. Mitä ilmeisimmin ratkaisukartan edellyttämien taitojen soveltaminen myös vaikuttaa positiivisesti oikeiden ratkaisujen saavuttamiseen, sillä myös ratkaisutulokset olivat koeryhmällä tilastollisesti parempia kuin kontrolliryhmällä (taulukot 11 ja 12).

Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden siirtymiset tasoryhmästä toiseen alku- ja loppukokeiden välillä

Tekemällä ristiintaulukoinnin koko otoksen oppilaiden sijoituksista tasoryhmiin (A = hyvät, sijoitukset 1–17; B = keskitaso, sijoitukset 18–35; C = heikot, sijoitukset 36–52) alku- ja loppukokeessa voidaan seurata koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden liikkeitä näissä ryhmissä (taulukot 14 ja 15).

TAULUKKO 14 Koeryhmän oppilaiden sijoitusten muutokset tasoryhmissä alku- ja loppukokeen välillä

Koeryhmä		sijoitus loppukoe			
		heikot	keskitaso	hyvät	yhteensä
sijoitus alkukoe	heikot	1	2	2	5
	keskitaso	0	5	2	7
	hyvät	0	0	5	5
	yhteensä	1	7	9	17

TAULUKKO 15 Kontrolliryhmän oppilaiden sijoitusten muutokset tasoryhmissä alku- ja loppukokeen välillä

Kontrolliryhmä		sijoitus loppukoe			
		heikot	keskitaso	hyvät	yhteensä
sijoitus alkukoe	heikot	10	2	0	12
	keskitaso	6	5	0	11
	hyvät	0	4	8	12
	yhteensä	16	11	8	35

Viisi *koeryhmän* oppilasta sijoittui alkukokeessa heikkojen ryhmään. Loppukokeessa heistä kaksi nousi keskitasoisten ryhmään ja kaksi hyvien ryhmään (taulukko 14). Samoin seitsemästä alkukokeessa keskitasoryhmään sijoittuneesta koeryhmäläisestä kaksi nousi loppukokeessa hyvien ryhmään. Alkukokeen hyvien ryhmästä ei yksikään oppilas pudonnut alempiin ryhmiin. Keskitasoisten ryhmästä ei myöskään pudottu heikkojen ryhmään. Kaikkien koeryhmäläisten kehityssuunta oli siis ”ylöspäin”, ja tämä näkyi myös tuloskehityksessä, sillä kaikki koeryhmäläiset paransivat tuloksiaan. Parannukset vaihtelivat 2,25 pisteestä 21,25 pisteeseen. Yhteenvetona koeryhmän oppilaiden tasoryhmien muutoksista voidaan sanoa seuraavaa: Heikkojen ryhmässä oli alkukokeen viiden oppilaan sijasta loppukokeessa ainoastaan yksi oppilas. Keskitason ryhmän koko pysyi entisellään seitsemänä ja hyvien ryhmän oppilaiden määrä kasvoi viidestä yhdeksään.

Kontrolliryhmässä oppilaiden sijoituksissa tapahtui seuraavanlaisia muutoksia (taulukko 15). Yksikään oppilas huonojen tai keskitasoisten ryhmästä ei siirtynyt hyvien ryhmään. Alkukokeissa 12:sta hyvien ryhmään päässeestä neljä putosi loppukokeessa keskitasoisten ryhmään. Vastaavasti 11:sta alkukokeessa keskitason ryhmään sijoittuneesta oppilaasta 6 putosi loppukokeessa heikkojen ryhmään. Alkukokeessa 12:sta heikkojen ryhmään sijoittuneesta vain kaksi kykeni nousemaan loppukokeessa keskitasoisten ryhmään. Yhteenvetona kontrolliryhmän oppilaista voidaan sanoa, että heikkojen ryhmässä oli alkukokeen 12 oppilaan sijasta loppukokeessa 16 oppilasta. Keskitason ryhmän koko pysyi molemmissa kokeissa 12:na ja hyvien ryhmän oppilaiden määrä putosi 12:sta kahdeksaan.

Koeryhmän oppilaiden henkilökohtaiset suoritukset alku- ja loppukokeessa
Taulukossa 16 on esitetty koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden tulokset alku- ja loppukokeessa. Molempien ryhmien oppilaan nimityksen perään on merkitty alkukokeen perusteella määräytyvän tasoryhmän kirjain (esim. tyttö A, *Sampo C* jne.). Koeryhmän oppilaat on merkitty taulukkoon *kursiivilla* ja oppilaiden oikeat nimet ovat muutettu siten, että niiden avulla olisi helppo nähdä, mihin tasoryhmään oppilas kuului alkukokeen perusteella. Esimerkiksi Aapo A kuului alkukokeessa tasoryhmään A (= hyvät), Pirjo B tasoryhmään B (= keskitaso) ja Sini C tasoryhmään C (= heikot). Kontrolliluokan oppilaat on nimetty taulukkoon tytöiksi tai pojiksi. Taulukon vasempaan reunaan on listattu koko otoksen oppilaat alkukokeen sijoituksen perusteella. Keskelle taulukkoa oppilaat on järjestetty loppukokeen pistemäärän mukaan. Taulukon oikeassa reunassa oppilaat ovat paremmuusjärjestyksessä alku- ja loppukokeen pistemäärien erotuksen (=kehityksen) perusteella. Taulukon tarkoituksena on antaa kokonaiskuva oppilaiden tulosten muutoksista sekä selventää tasoryhmiin jakoa. Sen avulla voidaan myös nopeasti nähdä koe- ja kontrolliryhmän parhaimman ja heikoimman pistemäärän saaneet sekä parhaiten ja heikoiten kehittyneet.

TAULUKKO 16 Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden sijoituksien ja kokonaispisteiden muutokset alku- ja loppukokeissa

Oppilas	*sij. ak*	*sij. lk*	Pisteet alkukoe
tyttö A	1	5	55,00
poika A	2	14	50,25
poika A	3	20	49,50
tyttö A	4	17	49,00
tyttö A	5	3	47,50
poika A	6	19	47,25
tyttö A	7	13	45,00
Aapo A	8	1	*45,00*
Aaro A	9	4	*43,00*
tyttö A	10	12	42,00
Anne A	11	6	*39,50*
Ari A	12	7	*39,00*
tyttö A	13	15	37,75
poika A	14	8	37,00
tyttö A	15	26	36,50
Arvo A	16	2	*36,00*
poika A	17	34	36,00
Piia B	18	10	*35,00*
Paavo B	19	16	*34,50*
poika B	20	38	33,75
poika B	21	30	33,00
poika B	22	39	32,00
tyttö B	23	27	32,00
poika B	24	33	31,50
Pilvi B	25	23	*31,25*
Pekka B	26	25	*31,00*
tyttö B	27	22	31,00
poika B	28	44	31,00
tyttö B	29	47	31,00
Pirjo B	30	24	*30,25*
poika B	31	37	29,75
Pirkko B	32	18	*29,50*
tyttö B	33	36	29,50
tyttö B	34	32	29,25
Päivi B	35	31	*29,00*
tyttö C	36	43	28,75
poika C	37	21	28,75
Sampo C	38	35	*27,00*
poika C	39	51	26,50
Sari C	40	11	*26,00*
Sini C	41	28	*25,00*
poika C	42	41	24,50
tyttö C	43	48	24,25
poika C	44	52	24,00
tyttö C	45	29	24,00
Simo C	46	9	*24,00*
Suvi C	47	42	*23,50*
poika C	48	46	22,50
poika C	49	50	21,75
poika C	50	49	21,50
poika C	51	40	19,50
poika C	52	45	13,00

Oppilas	*sij. ak*	*sij. lk*	Pisteet loppukoe
Aapo A	8	1	*52,25*
Arvo A	16	2	*49,50*
tyttö A	5	3	48,75
Aaro A	9	4	*48,50*
tyttö A	1	5	48,50
Anne A	11	6	*47,00*
Ari A	12	7	*46,50*
poika A	14	8	46,00
Simo C	46	9	*45,25*
Piia B	18	10	*45,00*
Sari C	40	11	*44,75*
tyttö A	10	12	44,50
tyttö A	7	13	43,00
poika A	2	14	41,25
tyttö A	13	15	41,25
Paavo B	19	16	*39,50*
tyttö A	4	17	39,50
Pirkko B	32	18	*39,00*
poika A	6	19	38,25
poika A	3	20	37,75
poika C	37	21	37,00
tyttö B	27	22	37,00
Pilvi B	25	23	*37,00*
Pirjo B	30	24	*37,00*
Pekka B	26	25	*36,50*
tyttö A	15	26	35,75
tyttö B	23	27	35,25
Sini C	41	28	*35,25*
tyttö C	45	29	34,50
poika B	21	30	34,25
Päivi B	35	31	*33,50*
tyttö B	34	32	33,00
poika B	24	33	32,75
poika A	17	34	32,00
Sampo C	38	35	*32,00*
tyttö B	33	36	31,75
poika B	31	37	31,50
poika B	20	38	31,50
poika B	22	39	29,50
poika C	51	40	29,25
poika C	42	41	28,75
Suvi C	47	42	*25,75*
tyttö C	36	43	25,50
poika B	28	44	25,00
poika C	52	45	24,50
poika C	48	46	24,25
tyttö B	29	47	24,00
tyttö C	43	48	22,50
poika C	50	49	21,00
poika C	49	50	19,00
poika C	39	51	16,50
poika C	44	52	16,25

Oppilas	Muutos sijoitus	Muutos pisteet
Simo C	*37*	*21,25*
Sari C	*29*	*18,75*
Arvo A	*14*	*13,50*
poika C	7	11,50
tyttö C	16	10,50
Sini C	*13*	*10,25*
Piia B	*8*	*10,00*
poika C	11	9,75
Pirkko B	*14*	*9,50*
poika A	6	9,00
poika C	16	8,25
Anne A	*5*	*7,50*
Ari A	*5*	*7,50*
Aapo A	*7*	*7,25*
Pirjo B	*6*	*6,75*
tyttö B	5	6,00
Pilvi B	*2*	*5,75*
Aaro A	*5*	*5,50*
Pekka B	*1*	*5,50*
Paavo B	*3*	*5,00*
Sampo C	*3*	*5,00*
Päivi B	*4*	*4,50*
poika C	1	4,25
tyttö B	2	3,75
tyttö A	-2	3,50
tyttö B	-4	3,25
tyttö A	-2	2,50
Suvi C	*5*	*2,25*
tyttö B	-3	2,25
poika C	2	1,75
poika B	-6	1,75
tyttö A	2	1,25
poika B	-9	1,25
poika B	-9	1,25
poika C	1	-0,50
tyttö A	-11	-0,75
tyttö C	-5	-1,75
tyttö A	-6	-2,00
poika B	-18	-2,25
poika B	-17	-2,50
poika C	-1	-2,75
tyttö C	-7	-3,25
poika A	-17	-4,00
poika B	-16	-6,00
tyttö A	-4	-6,50
tyttö B	-18	-7,00
poika C	-8	-7,75
poika A	-12	-9,00
poika A	-13	-9,00
tyttö A	-13	-9,50
poika C	-12	-10,00
poika A	-17	-11,75

Kontrolliryhmän oppilaat on nimetty tytöiksi tai pojiksi ja koeryhmän oppilaat erisnimillä, esim. *Ari* tai *Sini*. Oppilaat on jaettu alkukokeen perusteella tasoryhmiin seuraavasti: A = hyvät, B = keskitaso, C = heikot.

Koetulosten (taulukko 16) mukaan loppukokeessa parhaiten kaikista otoksen oppilaista menestyi Aapo A. Hän oli koeryhmän oppilaista paras (8.) myös alkukokeessa. Vajaan kolmen pisteen päähän loppukokeessa hänestä jäi Arvo A. Heikoiten koeryhmän oppilaista menestyi niin alku- kuin loppukokeessakin Suvi C. Hän oli alkukokeessa 47. ja loppukokeessa 42.. Suvi C oli myös koeryhmän heikoin kehittyjä, sillä hän paransi tulostaan vain 2,25 pistettä. Parannus tosin oikeutti hänet koko otoksessa sijalle 28. Mielenkiintoista on myös havaita, että otoksen parhaimmat kehittyjät löytyvät koeryhmästä. Simo C paransi pistemääräänsä 21,25 pistettä, Sari C 18,75 pistettä ja Arvo A 13,50 pistettä.

Mutta mikä oli koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden järjestys 1,5 vuoden kuluttua pidetyssä viivästetyssä kokeessa? Näitä tuloksia esittelen seuraavassa luvussa.

10.2.2 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä oli 1,5 vuotta loppukokeen jälkeen suoritetussa viivästetyssä mittauksessa?

Viivästetty mittaus suoritettiin noin 1,5 vuotta loppukokeen jälkeen. Useissa tutkimuksissa aika loppumittauksen ja viivästetyn mittauksen välillä on ollut huomattavasti lyhyempi. Esimerkiksi Kretschmerin (1983) tutkimuksessa loppumittauksen ja viivästetyn mittauksen välissä oli 8 viikkoa ja Hohnin & Freyn (2002) tutkimuksessa ainoastaan kaksi viikkoa**.** Tässä tutkimuksessa haluttiin seurata oppilaiden matemaattisten ongelmanratkaisutaitojen kehitystä pidemmällä aikavälillä. White ja Arzi (2005, 138) pitävät pitkittäistutkimuksen vaatimuksena sitä, että samoille tutkimushenkilöille tehtyjen mittausten välinen aika on vähintään vuosi. Siksi tässä tutkimuksessa päädyttiin (viivästetyssä mittauksessa) 1,5 vuoden viiveeseen.

Oletuksena oli, että jos toteutettu opetusinterventio antaisi sysäyksen motivoituneeseen matematiikan ja ongelmanratkaisun opiskeluun, motivaatio näkyisi myöhemminkin ongelmanratkaisutuloksissa. Tälle oletetulle sysäykselle annettiin aikaa kehittyä ja kypsyä 1,5 vuotta. Samalla varmistettiin, etteivät tulokset ole muistinvaraisia, vaan ne kuvaisivat oppilaiden osaamista ja taitoja matemaattisessa ongelmanratkaisussa.

Viivästetty koe E oli ongelmanratkaisukoe, joka rakennettiin alku- ja loppukokeiden avulla. Viivästettynä kokeena olisi voitu teettää alku- tai loppukoe uudestaan, mutta tällöin olisi ollut suuri vaara, ettei se olisi enää riittänyt erottelemaan oppilaiden suorituksia, koska oppilaat kehittyvät ja kypsyvät 1,5 vuoden aikana niin tiedollisesti kuin taidollisestikin. Koeryhmän kypsymisestä ja heidän testaamisestaan 1,5 vuoden takaisella kokeella olisi seurannut Cohenin ja Manionin (1992, 200–203) mukaan myös uhka tutkimuksen sisäiselle validiteetille. Koska viivästetyssä kokeessa haluttiin vertailla oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa, oppilaat asetettiin taas uusien ongelmatehtävien eteen.

Tehtävätyypeiksi (viivästettyyn kokeeseen) valittiin alku- ja loppukoetta mahdollisimman monipuolisesti edustavia tehtäviä, jotka olisivat muokattavissa vaativuudeltaan sopiviksi 7.-luokkalaisen kokeeseen. Tehtävien lukuarvoja ja sisältöjä muutettiin kuitenkin siten, että tehtävän rakenne säilyisi samankaltaisena. Käytännössä viivästetystä kokeesta muodostui alku- ja loppukoetta vaativampi. Viivästetty koe oli yhden oppitunnin mittainen, ja se koostui kuudesta tehtävästä, jotka mittasivat oppilaan numeerista, geometrista ja sanallista ongelmanratkaisutaitoa. Oppilaan oli vastattava yhteensä 11 tehtäväkohtaan. Kokeen maksimipistemäärä oli 22. Viivästetyn kokeen toteutus oli siis osittain erilainen kuin alku- ja loppukokeessa, sillä tehtävät olivat vaativampia ja koeaika oli vain puolet alku- ja loppukokeen suoritusajasta. Viivästettyä koetta ei siis voi verrata kokonaisuudessaan suoraan alku- ja loppukokeen tuloksiin. Sen tarkoituksena olikin selvittää, onko ongelmanratkaisussa enää eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä.

Kaikki otoksen oppilaat siirtyivät syksyllä 2004 samaan yläkouluun seitsemännen luokan oppilaiksi kahdeksaan eri luokkaan. Koe- ja kontrolliryhmien luokat sekoittuivat keskenään. Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden kouluolosuhteet ennen viivästettyä koetta olivat samankaltaisia: heillä oli ollut lähes lukuvuoden ajan sama koulu oppimisympäristönä, samat oppikirjat ja samoja opettajia. Havaitaanko ryhmien välillä viivästetyssä mittauksessa enää eroja?

Ryhmien väliset erot viivästetyssä kokeessa

Koe- ja kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipisteiden erot eivät olleet enää viivästetyssä kokeessa tilastollisesti merkitseviä (t-testi: p = 0,235; p = 0,118 ja p = 0,144; liite 20). Koeryhmän paremmat tulokset kontrolliryhmään verrattuna voisivat siis kriittisesti arvioiden olla pelkästään sattumaa. Ryhmien välinen efektikoon arvo lähentelee kuitenkin keskisuuren eron rajaa varsinkin kokonais- ja perusteluprosessipisteiden osalta. Samoin keskiarvotulosten prosentuaaliset erot (taulukko 17) olivat selkeästi koeryhmän eduksi kaikilla osa-alueilla (14,7 %, 11,3 % ja 19,5 %).

TAULUKKO 17 Viivästetyn kokeen E kokonaistulokset

Viivästetty koe E		N	Keskiarvo	Keskihajonta	Ero *koer. – kontr.*	Efektikoko *Cohenin d*
Kokonaispisteet	Koeryhmä	17	13,34	3,59	1,71 (14,7 %)	0,45
	Kontrollir.	35	11,63	4,03		
Ratkaisu	Koeryhmä	17	7,76	2,31	0,79 (11,3 %)	0,36
	Kontrollir.	35	6,97	2,19		
Perustelu-prosessi	Koeryhmä	17	5,57	1,71	0,91 (19,5 %)	0,48
	Kontrollir.	35	4,66	2,05		

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

Tähän hivenen ristiriitaiseen tulokseen lienee osaltaan syynä viivästetyn kokeen tehtävien vähäinen määrä. Toisaalta on luonnollista, että erot ryhmien välillä ovat 1,5 vuoden aikana tasoittuneet, koska oppilaat eivät ole enää olleet entisissä opetusryhmissään.

Ryhmien erot viivästetyn kokeen tehtävässä E1

Viivästetyn kokeen ensimmäisen tehtävän E1 tuloksissa on ryhmien välillä myös tilastollisia eroja (kuvio 43).

E1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.

a)
2 → 4 → 8 → 14 → ☐ → ☐

b)
3 → 5 → 9 → 17 → ☐ → ☐

c)
1 → 2 → 2 → 4 → 8 → ☐ → ☐

KUVIO 43 Viivästetyn kokeen tehtävä E1

Tehtävän E1 kokonaistulosten (taulukko 18) mukaan koeryhmä oli tilastollisesti merkitsevästi kontrolliryhmää parempi (t-testi, p = 0,004; liite 20). Ratkaisupisteissä koeryhmä oli kontrolliryhmää parempi tilastollisesti melkein merkitsevästi (t-testi, p = 0,027; liite 20). Perusteluprosessin osalta saadaan samankaltaisia tuloksia. Koeryhmä oli tilastollisesti merkitsevästi kontrolliryhmää parempi (t-testi, p = 0,002; liite 20). Cohenin *d* -arvo ylitti kokonais- ja perusteluprosessipisteiden osalta suuren eron rajan (0,91 ja 0,97) sekä ratkaisupisteiden osalta keskisuuren eron rajan (0,97). Prosentuaalisesti keskiarvojen erot ovat suuria – 44,1 %, 27,7 % ja 64,9 % – kuten pienehkön otoskoon tilastolliset erot edellyttävätkin, jotta erot olisivat tilastollisesti merkitseviä (Metsämuuronen 2005, 422).

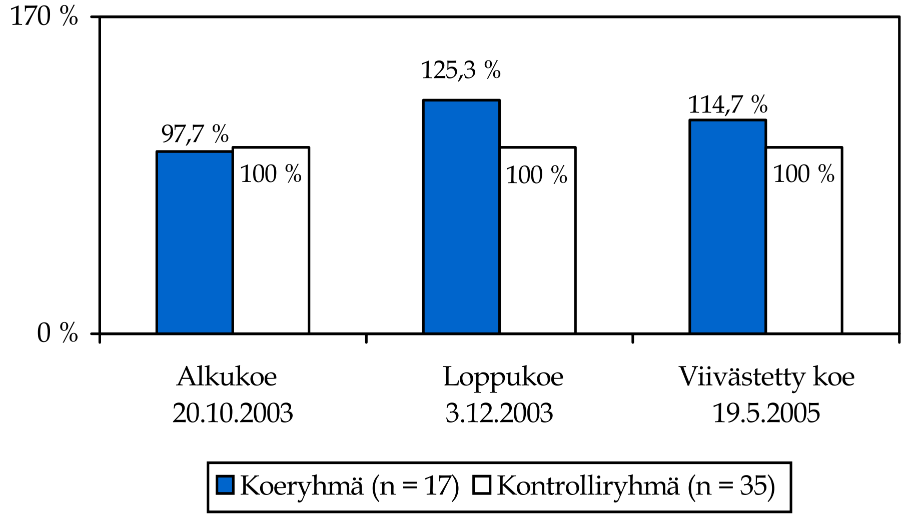
TAULUKKO 18 Viivästetyn kokeen tehtävän E1 tulokset

Viivästetty koe Tehtävä E1		**N**	**Keskiarvo**	**Keskihajonta**	**Ero** *koer.– kontr.*	**Efektikoko** *Cohenin d*
Kokonaispisteet	Koeryhmä	17	4,41	1,14	1,35 (44,1 %)**	0,91
	Kontrollir.	35	3,06	1,66		
Ratkaisu	Koeryhmä	17	2,21	0,47	0,48 (27,7 %)**	0,69
	Kontrollir.	35	1,73	0,80		
Perustelu-prosessi	Koeryhmä	17	2,21	0,75	0,87 (64,9 %)*	0,97
	Kontrollir.	35	1,34	0,98		

Cohenin d -arvon rajat: pieni d = 0,20; keskisuuri d = 0,50; suuri d = 0,80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

10.2.3 Millaisia eroja oli koe- ja kontrolliryhmän välillä alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa?

Koska alku- ja loppukokeen maksimipistemäärä oli lähes kolminkertainen viivästetyn kokeen pisteytykseen verrattuna, tulosten vertailu on sellaisenaan hankalaa. Viivästetyssä kokeessa oppilaan oli vastattava yhteensä 11 tehtäväkohtaan. Alkukokeessa vastattavia kohtia oli 33 ja loppukokeessa 36. Vastauskohtien vähäisempi määrä viivästetyssä kokeessa tietenkin vaikutti heikentävästi tulosten tilastolliseen merkitsevyyteen. Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tuloksia voidaan kuitenkin verrata prosentuaalisesti, jos normitetaan kontrolliryhmän suoritus kaikissa kokeissa 100 prosentiksi ja lasketaan koeryhmän tulosprosentti kontrolliryhmän pistemäärästä. Ajatuksena on, että kontrolliryhmän keskiarvotulos kolmessa kokeessa kuvaa perinteisen, oppikirjan mukaisen opetuksen tulosta matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Tällöin ryhmien välisiä eroja kokonaistuloksissa voidaan verrata prosentuaalisesti eri kokeiden välillä kuvion 44 mukaisesti.

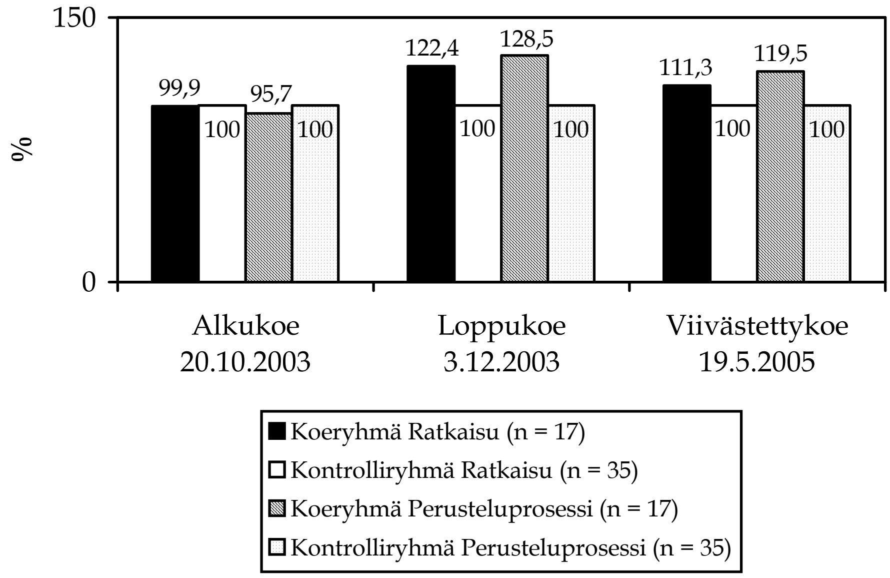


KUVIO 44 Koe- ja kontrolliluokkien väliset prosentuaaliset erot alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen kokonaistulosten perusteella

Koeryhmän suoritus oli alkukokeessa kontrolliryhmää heikompi, mutta (opetuskokeilun jälkeen) loppukokeessa koeryhmän keskiarvotulos ohitti selvästi kontrolliryhmän tuloksen. Viivästetyssä kokeessa ero oli tasaantunut, mutta edelleenkin koeryhmä saavutti paremman kokonaistuloksen ja korkeammat ratkaisu- ja perusteluprosessipisteet kuin kontrolliryhmä, kuten aiemmin esitetty taulukko 17 osoitti.

Vastaavanlainen prosenttitaulukko voidaan laatia ratkaisu- ja perusteluprosessipisteiden tuloksista (kuvio 45). Ratkaisupisteiden osalta ryhmät olivat alkukokeessa lähestulkoon yhtä hyviä: koeryhmän keskiarvotulos oli vain prosentin kymmenyksen heikompi ja perusteluprosessipistetulos yli neljä prosenttia heikompi kuin kontrolliryhmällä. Loppukokeessa koeryhmä oli ratkaisupisteissä reilut 22 % ja perusteluprosessipisteissä vajaat 30 % parempi kuin kontrolliryhmä.

Ryhmien väliset erot kaventuivat viivästetyssä kokeessa molempien osioiden osalta n. 10 %, mutta prosentuaalisesti ero säilyi koeryhmän eduksi ratkaisu- ja perusteluprosessituloksissa.

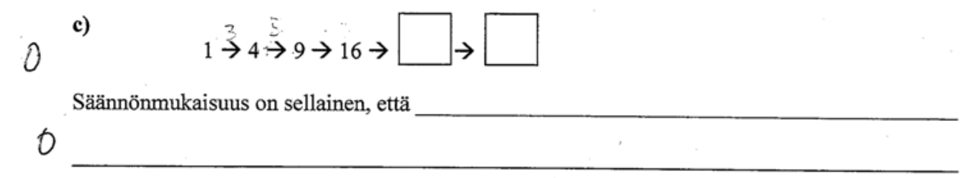


KUVIO 45 Koe- ja kontrolliryhmien väliset prosentuaaliset erot alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen ratkaisu- ja perusteluprosessitulosten perusteella

Esimerkkejä koeryhmän oppilaiden vastauksista alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa

Kuinka ongelmanratkaisukurssi näkyi koeryhmän oppilaiden koevastauksissa? Jotta koetulosten arviointi ei jäisi pelkästään numeeriseksi, esitän muutamia esimerkkejä siitä, millaisia muutoksia koeryhmän oppilaiden vastauksissa tapahtui kolmessa eri kokeessa. Esimerkeiksi valitut tehtävät vastasivat rakenteeltaan toisiaan alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa (ks. luku 9.3.1. taulukko 3). Kuviossa 46 on esitetty koeryhmän oppilas Pirkko B:n vastaukset kunkin kokeen ensimmäisiin tehtäväkohtiin. Otoksen kokonaistuloksissa hän sijoittui alkukokeessa sijalle 32. loppukokeessa sijalle 13. ja viivästetyssä kokeessa sijalle 33.

Alkukoe: tehtävä A1c

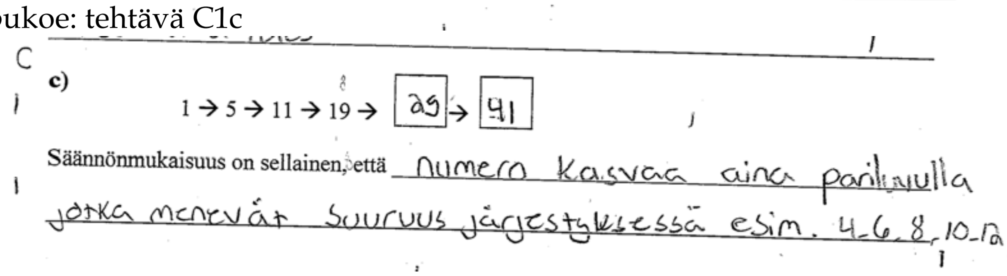


0 c) 1 → 4 → 9 → 16 → ☐ → ☐

Säännönmukaisuus on sellainen, että

0

Loppukoe: tehtävä C1c

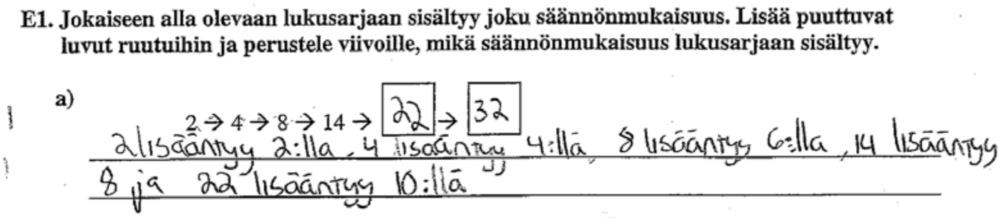


C

1 c) 1 → 5 → 11 → 19 → 29 → 41

1 Säännönmukaisuus on sellainen, että numero kasvaa aina parilisulla joka menevät suuruus järjestyksessä esim. 4,6,8,10,12

Viivästetty koe: tehtävä E1a



E1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.

1 a) 2 → 4 → 8 → 14 → 22 → 32

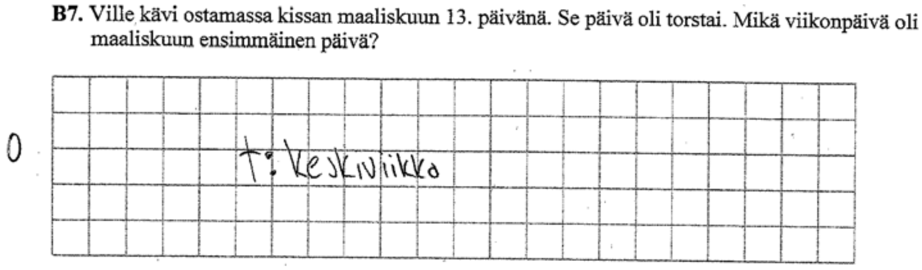
2 lisääntyy 2:lla, 4 lisääntyy 4:llä, 8 lisääntyy 6:lla, 14 lisääntyy 8 ja 22 lisääntyy 10:llä

KUVIO 46 Koeryhmän oppilaan vastaukset tehtäviin A1c, C1c ja E1a

Kuviosta 46 on havaittavissa, että Pirkko ei osannut vastata tehtävään A1c. Loppukokeessa hän on löytänyt oikean ratkaisun ja osannut perustella sen kirjallisesti, joten hän saa tehtävästä täydet kaksi pistettä eli yhden ratkaisupisteen ja yhden perusteluprosessipisteen. Hän on oppinut opetusjaksolla perustelemaan vastauksensa kirjallisesti tämän tehtävätyypin kohdalla. Perustelemisen merkitystä korostettiinkin kurssilla ja sitä harjoiteltiin ratkaisukartan avulla. Viivästetyssä kokeessa Pirkko on ratkaissut onnistuneesti rakenteeltaan vastaavan tehtäväkohdan E1a. Myös taito ilmaista perustelu kirjallisesti on säilynyt hänellä tässä tehtävätyypissä.

Ari A oli alkukokeessa otoksen 12, loppukokeessa 7 ja viivästetyssä kokeessa 20. Hänen vastauksissa on tapahtunut kuvion 47 mukaisia muutoksia.

Alkukoe: tehtävä B7

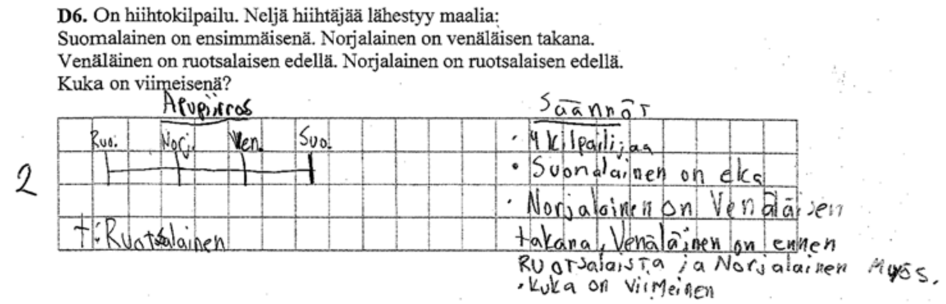


B7. Ville kävi ostamassa kissan maaliskuun 13. päivänä. Se päivä oli torstai. Mikä viikonpäivä oli maaliskuun ensimmäinen päivä?

0

t: Keskiviikko

Loppukoe: tehtävä D6



D6. On hiihtokilpailu. Neljä hiihtäjää lähestyy maalia:
Suomalainen on ensimmäisenä. Norjalainen on venäläisen takana.
Venäläinen on ruotsalaisen edellä. Norjalainen on ruotsalaisen edellä.
Kuka on viimeisenä?

Apupiirros

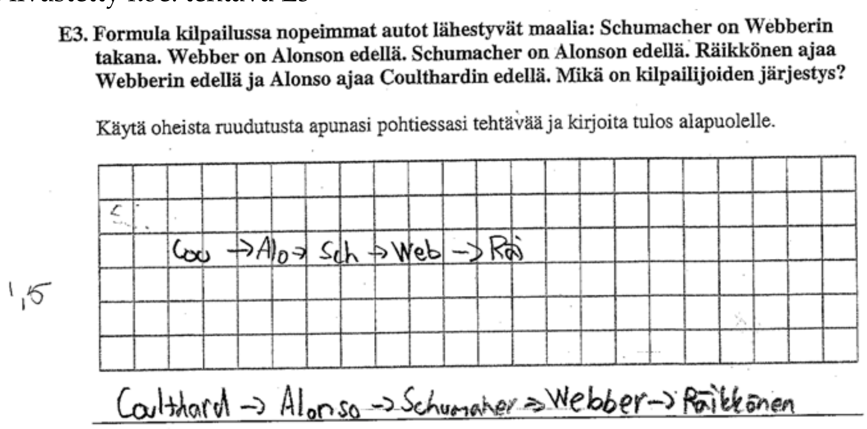
Ruo. Norj. Ven. Suo.

Säännöt
• 4 kilpailijaa
• Suomalainen on eka
• Norjalainen on Venäläisen takana, Venäläinen on ennen Ruotsalaista ja Norjalainen myös.
• Kuka on viimeinen

2

t: Ruotsalainen

Viivästetty koe: tehtävä E3



E3. Formula kilpailussa nopeimmat autot lähestyvät maalia: Schumacher on Webberin takana. Webber on Alonson edellä. Schumacher on Alonson edellä. Räikkönen ajaa Webberin edellä ja Alonso ajaa Coulthardin edellä. Mikä on kilpailijoiden järjestys?

Käytä oheista ruudutusta apunasi pohtiessasi tehtävää ja kirjoita tulos alapuolelle.

Coo → Alo → Sch → Web → Räi

1,5

Coulthard → Alonso → Schumaher → Webber → Räikkönen

KUVIO 47 Koeryhmän oppilaan vastaukset tehtäviin B7, D6 ja E3

Alkukokeen tehtävässä B7 (kuvio 47) Ari on kirjoittanut ainoastaan vastauksen, joka on virheellinen. Mitään perustelua tai apupiirrosta ei ole havaittavissa, joten hän saa nolla pistettä niin ratkaisusta kuin perustelustakin. Loppukokeen tehtävästä D6 on havaittavissa, että Ari A on käyttänyt ratkaisukarttaa esimerkillisesti. Tehtävänannosta on kirjattu oleelliset tiedot muistiin ja tehtävätilanteesta on piirretty apupiirros, joka tukee oikean ratkaisun löytämistä. Oikea ratkaisu tuottaa yhden pisteen ja selkeä perusteluprosessi yhden pisteen, joten Arin tulos tästä tehtäväkohdasta on täydet kaksi pistettä. Viivästetyssä kokeessa tehtävässä E3 Ari on hahmotellut järjestystä nimien lyhenteiden avulla. Järjestys on oikein, mutta vastauksesta ei voi päätellä selkeästi kummasta päästä sijoitusten jako aloitetaan. Tästä epätarkkuudesta seuraa 0,5 pisteen vähennys perusteluprosessipisteistä.

Edellä esitettyjen esimerkkien tarkoituksena on havainnollistaa, miten oppilaiden suoritusten muutokset näkyivät kokeissa ja kuinka niitä arvioitiin. Ratkaisupisteet kuvaavat ainoastaan oikeiden vastausten saavuttamista, eivätkä niihin vaikuta keinot, joilla vastaus on saavutettu. Perusteluprosessipisteytyksen avulla on sen sijaan mahdollista arvioida esimerkiksi sitä, kuinka koeryhmän oppilaat kykenivät soveltamaan ratkaisukartan käyttöä koetilanteessa.

Koe- ja kontrolliryhmän suoritusten vertailu alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtäväkohdissa A1c, d ja e, C1c, d ja e ja E1a, b ja c

Kunkin kokeen ensimmäinen tehtävä pyrittiin laatimaan ulkoasultaan ja sisällöltään mahdollisimman samanlaiseksi (kuvio 48). Viivästetyn kokeen tehtävässä E1 oli havaittavissa tilastollisia eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä, joten tarkastelen tehtävän tuloksia yksityiskohtaisemmin. Voidaan myös vertailla ryhmien suoriutumista alku- ja loppukokeen ensimmäisissä tehtävissä, sillä alkukokeen tehtävä A1c, loppukokeen tehtävä C1c ja viivästetyn kokeen tehtävä E1a vastasivat toisiaan. Myös tehtävät A1d, B1d sekä E1b samoin kuin tehtävät A1e, C1e ja E1c vastasivat toisiaan.

Mainittakoon, että tehtävät A1c ja C1c sekä A1d ja C1d olivat lukuarvoiltaan täysin samanlaisia. Näiden kahden samanlaisen tehtävän avulla haluttiin tarkistaa, onko lukuarvojen muunnoksella vaikutusta tuloksiin. Tulos oli odotetunlainen, sillä alku- ja loppukokeessa eri lukuja sisältävien tehtävien (A1c ja C1c) ratkaisupisteiden keskiarvotulokset paranivat kontrolliryhmässä loppukokeessa vähemmän (+10 %) kuin täsmälleen identtisten tehtävien (A1d ja C1d +20 %, A1e ja C1e +13 %). Tehtävien lukuarvojen ja ulkoasun muuttaminen siis osaltaan säilytti tehtävien ongelmallisuuden ja vaikeutti niiden muistamista.

Alkukoe

A1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.

c) 1 → 4 → 9 → 16 → ☐ → ☐

d) 2 → 5 → 11 → 23 → ☐ → ☐

e) 1 → 1 → 2 → 3 → 5 → ☐ → ☐

Loppukoe

C1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.

c) 1 → 5 → 11 → 19 → ☐ → ☐

d) 2 → 5 → 11 → 23 → ☐ → ☐

e) 1 → 1 → 2 → 3 → 5 → ☐ → ☐

Viivästetty koe

E1. Jokaiseen alla olevaan lukusarjaan sisältyy joku säännönmukaisuus. Lisää puuttuvat luvut ruutuihin ja perustele viivoille, mikä säännönmukaisuus lukusarjaan sisältyy.

a) 2 → 4 → 8 → 14 → ☐ → ☐

b) 3 → 5 → 9 → 17 → ☐ → ☐

c) 1 → 2 → 2 → 4 → 8 → ☐ → ☐

KUVIO 48 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävät A1c, d ja e, C1c, d ja e ja E1a, b ja c

Kuvion 48 mukaisissa tehtävissä mitattiin oppilaiden numeerista ongelmanratkaisutaitoa ja kykyä perustella annettu vastaus kirjallisesti. Taulukkoon 19 on laskettu koe- ja kontrolliryhmien kunkin kokeen kolmen tehtäväkohdan kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärän keskiarvo (esim. koeryhmän alkukokeen kokonaistuloksen keskiarvo A1c +A1d +A1e = 2,85). Näissä tehtävissä oppilaan täytyi laittaa oikea numero ruutuun. Tuloksen arviointi oli matemaattisen selkeää: vastaus oli joko oikein tai väärin. Oppilaan kirjoittaman perustelun oikeellisuus ja selkeys arvioitiin laaditun pisteytyksen mukaisesti (liitteet 5, 6 ja 7).

TAULUKKO 19 Kokonaispistemäärät tehtäväkohdista A1, C1 ja E1 alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa

Kokonaistulos	**Alkukoe A1 c, d, e**	**Loppukoe C1 c, d, e**	**Viiv. koe E1 a, b, c**
Koeryhmä (n = 17)	2,85	4,34	4,41
Kontrolliryhmä (n = 35)	2,57	3,28	3,06
Ryhmien ero:	0,28	1,06	1,35
koeryhmä – kontrolliryhmä	10,9 %	32,3 %	44,0 %
Ratkaisu	**Alkukoe A1 c, d, e**	**Loppukoe C1 c, d, e**	**Viiv. koe E1 a, b, c**
Koeryhmä (n = 17)	1,29	2,29	2,21
Kontrolliryhmä (n = 35)	1,34	1,77	1,73
Ryhmien ero:	–0,05	0,52	0,48
koeryhmä – kontrolliryhmä	–3,6 %	29,5 %	27,6 %
Perusteluprosessi	**Alkukoe A1 c, d, e**	**Loppukoe C1c, d, e**	**Viiv. koe E1 a, b, c**
Koeryhmä (n = 17)	1,56	2,04	2,21
Kontrolliryhmä (n = 35)	1,23	1,51	1,34
Ryhmien ero:	0,33	0,54	0,87
koeryhmä – kontrolliryhmä	26,9 %	35,6 %	65,1 %

Kokonaistulosten mukaan (taulukko 19) koeryhmä paransi eroaan kontrolliryhmään jokaisessa kokeessa. Alkukokeessa ero oli A1-tehtäväkohtien mukaan 10,9 %, loppukokeen C1-tehtävän c-, d- ja e-kohdissa 32,3 % ja viivästetyn kokeen E1-tehtävän tulosten mukaan 44,0 %. Jakamalla kokonaistulos tehtävän ratkaisusta ja perusteluprosessista annettuihin pisteisiin voidaan tarkastella näitä osa-alueita erikseen.

Ratkaisupisteiden osalta koeryhmän tulos alkukokeessa on hieman heikompi kuin kontrolliryhmällä, mutta loppukokeessa koeryhmä ohittaa selvästi kontrolliryhmän tuloksen. Viivästetyssä kokeessa molempien ryhmien tulokset taantuivat hieman, mutta ryhmien välinen ero säilyi edelleen koeryhmän eduksi.

Perusteluprosessipisteet (taulukko 19) kuvaavat tässä tehtävässä sitä, kuinka oppilaat ovat osanneet perustella ja selittää antamansa numeerisen vastauksen. Perusteluprosessipisteiden osalta koeryhmä paransi selkeimmin suoritustaan kontrolliryhmään verrattuna. Huomattavaa on, että koeryhmän tulos nousee viivästetyssä kokeessa korkeammaksi kuin loppukokeessa, kun taas kontrolliryhmän tulos laskee.

Koe- ja kontrolliryhmän sijoittuminen tasoryhmiin alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa

Koehenkilöiden sijoitusten muutoksia seurattiin jo aiemmin (ks. luku 10.2.1) jakamalla oppilaat alku- ja loppukokeessa sijoituksensa perusteella kolmeen tasoryhmään ja ristiintaulukoimalla oppilaiden siirtymiset näissä ryhmissä. Oppilas sijoitettiin "hyvien" ryhmään, jos hän oli kokeessa sijoilla 1.–17., "keskitasoisiin" sijoittuessaan välille 18.–35. ja "heikkoihin" jäädessään sijoille 36.–52. Seuraavassa tarkasteluun lisätään myös oppilaiden sijoittumiset näihin tasoryhmiin viivästetyssä kokeessa. Loppukokeen jälkeen kaikki otoksen oppilaat jatkoivat opiskelua omissa luokissaan vielä kevätlukukauden. Syksyllä 2004 he siirtyivät samaan kouluun ja heidät sijoitettiin 7. luokalle kahdeksaan eri luokkaan. Otoksen oppilaiden määrä vaihteli luokittain seuraavasti: a-luokassa 5, b-luokassa 12, c-luokassa 17, d-luokassa 2, e-luokassa 6, f-luokassa 3, g-luokassa 3 ja h-luokassa 4 oppilasta.

Taulukossa 20 on esitetty oppilaiden tulokset viivästetyssä kokeessa. Siihen on merkitty myös kunkin oppilaan sijoitukset alku- ja loppukokeessa. Näin voidaan seurata oppilaan sijoituksen muutoksia kaikissa kolmessa kokeessa. Molempien ryhmien oppilaan nimityksen perään on merkitty alkukokeen perusteella määräytyvän tasoryhmän kirjain (esim. tyttö A, *Sampo C* jne.). Koeryhmän oppilaat on merkitty taulukkoon *kursiivilla* ja kontrolliluokan oppilaat on nimetty taulukkoon tytöiksi tai pojiksi. Sarakkeessa *7. lk* on ilmoitettu, mihin luokkaan (a – h) otoksen oppilas sijoitettiin 7. luokalla.

Oppilaan uudella opetusryhmällä ei näyttäisi olevan merkitystä viivästetyn kokeen tulokseen, sillä kolme parhaiten menestynyttä oppilasta tulevat eri luokista (b, c ja d), samoin viisi heikointa neljästä eri luokasta (a, b, c, ja h). Lisäksi molemmissa sekä parhaimmissa, että heikoimmissa on a- ja b-luokan oppilaita (taulukko 20).

Viivästetyssä kokeessa koeryhmän oppilaista tiensä koko otoksen kärkeen raivasi Arvo A. Myös Aapo A, Aaro A ja Anne A olivat säilyttäneet paikkansa A tasoryhmässä 17 parhaan joukossa. A-ryhmään olivat nousseet myös Pekka B ja Pirjo B.

Alkukokeesta loppukokeeseen parhaiten kehittyneet Simo C ja Sari C olivat viivästetyssä kokeessa taantuneet sijoille 23 ja 29. Kuitenkin he sijoittuivat siinä paremmin kuin alkukokeessa. Alku- ja loppukokeessa koeryhmässä heikoiten sijoittunut Suvi C nousi 20 sijaa ylöspäin B-ryhmään ollen viivästetyssä kokeessa sijalla 22. Heikoiten koeryhmäläisistä menestyi nyt Sampo C, joka sijoittui 52 oppilaan joukossa sijalle 38.

TAULUKKO 20 Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden sijoitukset ja kokonaispisteet viivästetyssä kokeessa

Oppilas	*sijoitus alkukoe*	*sijoitus loppukoe*	***sijoitus viivästetty koe***	Pisteet viivästetty koe	7.lk
Arvo A	*16*	*2*	**1**	*21,50*	d
poika A	2	14	**2**	21,00	c
tyttö A	1	5	**3**	20,50	b
Aapo A	*8*	*1*	**4**	*19,50*	c
Aaro A	*9*	*4*	**5**	*19,00*	c
tyttö A	4	17	**6**	18,00	b
tyttö A	5	3	**7**	17,50	b
poika C	37	21	**8**	17,00	b
tyttö A	7	13	**9**	16,75	c
poika B	21	30	**10**	15,00	h
Anne A	*11*	*6*	**11**	*15,00*	c
tyttö A	10	12	**12**	15,00	e
poika A	14	8	**13**	14,00	h
tyttö A	15	26	**14**	14,00	b
Pekka B	*26*	*25*	**15**	*14,00*	c
tyttö A	13	15	**16**	14,00	c
Pirjo B	*30*	*24*	**17**	*13,50*	g
tyttö B	23	27	**18**	12,75	b
poika B	20	38	**19**	12,75	b
Ari A	*12*	*7*	**20**	*12,50*	c
Sini C	*41*	*28*	**21**	*12,50*	g
Suvi C	*47*	*42*	**22**	*12,50*	g
Simo C	*46*	*9*	**23**	*12,00*	d
Piia B	*18*	*10*	**24**	*12,00*	c
Paavo B	*19*	*16*	**25**	*12,00*	c
Päivi B	*35*	*31*	**26**	*11,50*	e
poika B	31	37	**27**	11,25	f
tyttö B	33	36	**28**	11,25	c
Sari C	*40*	*11*	**29**	*11,25*	e
poika A	17	34	**30**	11,00	c
tyttö C	45	29	**31**	11,00	b
tyttö B	34	32	**32**	11,00	c
Pirkko B	*32*	*18*	**33**	*10,50*	e
poika A	6	19	**34**	10,25	b
tyttö C	36	43	**35**	10,00	b
poika C	39	51	**36**	10,00	a
poika C	42	41	**37**	10,00	a
poika C	49	50	**38**	10,00	a
tyttö B	27	22	**39**	9,50	e
poika B	22	39	**40**	9,50	f
tyttö B	29	47	**41**	9,50	c
Pilvi B	*25*	*23*	**42**	*9,50*	e
poika C	50	49	**43**	8,50	b
poika C	52	45	**44**	8,00	f
Sampo C	*38*	*35*	**45**	*8,00*	c
poika C	44	52	**46**	8,00	h
tyttö C	43	48	**47**	7,50	c
poika C	51	40	**48**	7,50	c
poika B	28	44	**49**	7,00	b
poika C	48	46	**50**	6,50	h
poika A	3	20	**51**	6,00	a
poika B	24	33	**52**	5,50	a

Kontrolliryhmän oppilaat on nimetty tytöiksi tai pojiksi ja koeryhmän oppilaat erisnimillä, esim. *Anne* tai *Pekka*. Oppilaat on jaettu alkukokeen perusteella tasoryhmiin seuraavasti: A = hyvät, B = keskitaso, C = heikot. Sarakkeessa *7. lk* on ilmoitettu, mihin luokkaan (a – h) otoksen oppilas sijoitettiin 7. luokalla.

Koeryhmästä neljä oppilasta (Arvo A, Pekka B, Pirjo B ja Suvi C) eli 23,5 % paransi sijoitustaan sekä loppukokeessa että viivästetyssä kokeessa. Edellisten lisäksi kuusi (Aapo A, Aaro A, Simo C, Päivi B, Sari C ja Sini C) eli yhteensä kymmenen oppilasta (58,8 %) paransi sijoitustaan viivästetyssä kokeessa alkukokeeseen verrattuna, ja yhden oppilaan (Anne A) sijoitus pysyi samana. Kuuden (35,3 %) koeryhmän oppilaan (Ari A, Piia B, Paavo B, Pirkko B, Pilvi B ja Sampo C) sijoitus putosi viivästetyssä kokeessa alkukokeeseen verrattuna. Kaikki koeryhmän oppilaat (100 %) paransivat pisteitään ja sijoituksiaan alkukokeen ja loppukokeen välillä.

Vastaavasti kontrolliryhmästä viisi oppilasta (14,3 %) paransi sijoitustaan sekä loppukokeessa että viivästetyssä kokeessa. Heidän lisäkseen 13 oppilasta eli yhteensä 18 kontrolliryhmäläistä (51,4 %) paransi sijoitustaan viivästetyssä kokeessa alkukokeeseen verrattuna. Kontrolliryhmän 17 oppilaan (48,6 %) sijoitus putosi, yhden pysyi samana ja 17 oppilaan (48,6 %) nousi viivästetyssä kokeessa alkukokeeseen verrattuna. Kahdeksan oppilaan (22,9 %) sijoitus nousi ja 24 oppilaan (68,6 %) laski loppukokeessa alkukokeeseen verrattuna.

Koeryhmän ja kontrolliryhmän oppilaiden siirtymät tasoryhmissä eri kokeiden välillä on esitetty taulukossa 21.

TAULUKKO 21 Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden sijoittuminen tasoryhmiin alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa

Koeryhmä (n=17)	**Heikot 36.–52.**	**Keskitaso 19.–35.**	**Hyvät 1.-18.**
Alkukoe	5	7	5
Loppukoe	1	7	9
Viiv. koe	2	9	6
Kontrolliryhmä (n = 35)			
Alkukoe	12	11	12
Loppukoe	16	11	8
Viiv. koe	15	9	11

Suurin osa *koeryhmän* oppilaista sijoittui alkukokeessa tasaisesti kaikkiin kolmeen ryhmään. Loppukokeessa yli puolet oppilaista ylsi hyvien (1.–17.) joukkoon. Tähän ryhmään nousi alkukokeen keskitason ryhmästä kaksi (Paavo B ja Piia B) ja heikkojen ryhmästä kaksi oppilasta (Simo C ja Sari C). Keskitason ryhmään nousivat heikkojen ryhmästä kaksi oppilasta (Sini C ja Sampo C).

Loppukokeessa hyvien ryhmään sijoittuneet neljä oppilasta (Ari A, Simo C, Piia B ja Paavo B) putosivat viivästetyssä kokeessa keskitason ryhmään. Kaksi oppilasta (Pekka B ja Pirjo B) nousi keskitason ryhmästä hyvien ryhmään. Loppukokeen heikkojen ryhmästä viivästetyn mittauksen keskitason ryhmään nousi yksi oppilas (Suvi C). Vastaavasti kaksi oppilasta (Pilvi B ja Sampo C) putosi keskitason ryhmästä heikkojen ryhmään.

Alkukokeessa heikkojen ryhmässä oli peräti 5 koeryhmän oppilasta (Sampo, Sari, Sini, Simo ja Suvi), mutta loppukokeessa heikkojen ryhmässä oli koko otoksesta ainoastaan yksi oppilas (Suvi C) ja viivästetyssä kokeessa kaksi oppilasta (Pilvi B ja Sampo C).

Kontrolliryhmän oppilaiden sijoittuminen tasoryhmiin oli alkukokeessa tasaista, mutta loppukokeessa ja viivästetyssä kokeessa heistä valtaosa (15 ja 16 oppilasta) sijoittui heikkojen ryhmään. Loppukokeessa 8 oppilasta säilytti paikkansa hyvien ryhmässä eikä yksikään noussut hyvien ryhmään. Hyvien ryhmän neljä oppilasta putosi keskitason ryhmään. Kaksi oppilasta nousi heikkojen ryhmästä keskitason ryhmään. Vastaavasti kuusi oppilasta putosi keskitason ryhmästä heikkojen ryhmään.

Viivästetyssä kokeessa kolme oppilasta nousi loppukokeen keskitason ryhmästä hyvien ryhmään. Yksikään oppilaista ei pudonnut hyvien ryhmästä keskitason tai heikkojen ryhmään. Neljä oppilasta nousi heikkojen ryhmästä keskitason ryhmään ja kolme oppilasta putosi keskitason ryhmästä heikkojen ryhmään.

Yhteenvetona taulukosta 21 voidaan sanoa, että alkukokeen jälkeen heikkoihin sijoittuneista viidestä koeryhmäläisestä oli loppukokeessa jäljellä enää yksi ja viivästetyssä kokeessa kaksi. Kontrolliryhmäläisten määrä heikkojen ryhmässä sen sijaan lisääntyi. Kun alkukokeessa kontrolliryhmäläisiä oli heikkojen ryhmässä 12, niin loppukokeessa heitä oli siellä yhteensä 16 ja viivästetyssä kokeessa 15.

Koe- ja kontrolliryhmien keskiarvosijoitukset alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa saadaan laskemalla kummankin ryhmän oppilaiden järjestyslukujen keskiarvo erikseen jokaisessa kokeessa. Keskiarvosijoituksen avulla voidaan tarkastella karkeasti oppilaiden sijoitusten muutoksia eri kokeissa ja vertailla ryhmien sijoituksia toisiinsa (taulukko 22). Mitä korkeampi keskiarvosijoitus on, sitä paremmin ryhmä on menestynyt kokonaisuutena toiseen ryhmään verrattuna.

TAULUKKO 22 Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden sijoitusten keskiarvot alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa

Sijoitusten keskiarvo	**Koeryhmä N = 17**	**Kontrolliryhmä N = 35**
Alkukoe	26,6	26,4
Loppukoe	17,2	31,0
Viivästettykoe	21,4	29,0

Taulukosta 22 havaitaan, että koeryhmäläisten keskiarvosijoitus on hieman kontrolliryhmää heikompi alkukokeessa mutta parempi loppukokeessa ja viivästetyssä kokeessa. Ero on suurimmillaan loppukokeessa, jolloin koeryhmä on selkeästi kontrolliryhmää parempi. Ryhmien välinen ero pienenee viivästetyssä kokeessa mutta säilyy kuitenkin koeryhmän eduksi.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena ei ole yksilöidä syitä koe- ja kontrolliryhmän välisille eroille loppukokeessa ja viivästetyssä kokeessa. Olen rajannut tutkimuksen ulkopuolelle otoksen oppilaiden koti- ja lähikasvuympäristöön (vanhemmat, harrastukset, ystäväpiiri, vapaa-ajan vietto ym.) 1,5 vuoden aikana vaikuttaneet tekijät ja muutokset, jotka ovat luonnollisesti yhteydessä oppilaan kiinnostukseen ja motivaatioon koulutyötä kohtaan. Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden kouluympäristö sen sijaan pysyi samanlaisena. He siirtyivät samalta alakoululta samaan yläkouluun. Luokat sekoittuivat ja opettajat vaihtuivat, mikä on Suomen kouluissa yleistä, kun oppilaat siirtyvät 6. luokalta 7. luokalle. Ryhmien välillä ei ollut enää viivästetyssä kokeessa tilastollisia eroja kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessituloksissa. Koeryhmän kontrolliryhmää paremmat pistemäärät voisivat siis olla sattumaa. Ryhmien välille lasketut efektikoon arvot (taulukko 17) kuitenkin lähentelevät keskisuuren eron rajaa. Lisäksi ensimmäisessä tehtävässä, jossa tarvittiin numeerista ongelmanratkaisutaitoa sekä ratkaisuperustelun kirjoittamista, ryhmien ero oli tilastollisestikin merkitsevästi koeryhmän eduksi (taulukko 18), vaikka loppukokeesta oli kulunut jo 1,5 vuotta. Tämä antaisi viitteitä siitä, että tutkimuksessa toteutetulla opetusympäristöllä olisi pysyvämpääkin vaikutusta koeryhmän oppilaiden matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittymiseen ja asenteeseen matematiikkaa kohtaan.

Mitä mieltä koeryhmän oppilaat olivat matemaattisesta ongelmanratkaisukurssista? Sitä pyrin selvittämään oppilaiden haastattelujen perusteella seuraavassa luvussa.

10.3 Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun?

Kokeiden ja tuntisuunnitelmien arvioinnin avulla saadaan kuvaa siitä, kuinka oppilaat ovat suoriutuneet koetehtävistä ja miten opetus on edennyt opettajan/tutkijan näkökulmasta. Tässä tutkimuksessa haluttiin selvittää myös opetuksen kohteen eli koeryhmän oppilaiden mielipiteitä ja kokemuksia matemaattisesta ongelmanratkaisukurssista sekä kartoittaa heidän motivoitumistaan kurssilla. Mielenkiintoista oli myös tutkia, löytyykö koeryhmän oppilaiden koetulosten ja haastatteluvastauksien välille yhteyksiä. Hirsjärven, Remeksen ja Sajavaaran (2004, 194–195) mukaan haastattelututkimus soveltuu juuri tällaisten tavoitteiden saavuttamiseen. He pitävät haastattelun etuina mm. sitä, että ihminen nähdään tutkimustilanteessa subjektina ja, että haastattelun avulla voidaan selventää saatuja vastauksia sekä syventää saatavia tietoja.

Haastatteluvastausten avulla vastattiin myös tutkimuksen kolmanteen tutkimusongelmaan: *Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun?*

Ongelmanratkaisukurssin toteutuksen jälkeen kaikki koeryhmän oppilaat haastateltiin teemahaastattelun eli ns. puolistrukturoidun haastattelun avulla (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47). Haastattelut litteroitiin ja luokiteltiin analyysia varten kysymysten perusteella.

Seuraavaksi esittelen koosteen oppilaiden vastuksista, joka on saatu aikaan kysymysrungon (liite 9) avulla. Liitteestä 9 poimittujen vastausesimerkkien valinnan perusteina olivat luvussa 10.2.1 taulukossa 16 esitetyt tulokset: Kuinka kokeissa hyvin menestynyt ja heikosti menestynyt koki kurssin? Tätä varten esittelen koeryhmän parhaiten menestyneen Aapo A:n haastatteluvastaukset. Hän sijoittui alkukokeessa koko otoksen kahdeksanneksi ja loppukokeessa ensimmäiseksi. Suvi C sen sijaan menestyi alku- ja loppukokeissa koeryhmän oppilaista heikoiten. Hän oli alkukokeessa 47. ja loppukokeessa 42. Suvi C paransi tulostaan alkukokeesta loppukokeeseen 2,25 pistettä ja oli näin ollen myös koeryhmän heikoin kehittyjä. Tosin verrattaessa koko otoksen 52 oppilaan pistemäärien kehittymistä hän sijoittui 28.:ksi eli vähän alle puolen välin.

Koska kurssin tarkoituksena oli kehittää koeryhmän oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa, mielenkiinto kohdistui alku- ja loppukokeiden välillä tuloksiaan eniten parantaneisiin koeryhmän oppilaisiin. Miksi he paransivat tuloksiaan? Valitsin tarkasteluun koko otoksen kaksi eniten tuloksiaan parantanutta oppilasta. Muiden koeryhmän oppilaiden haastattelut ovat luettavissa liitteessä 9. Eniten (21,25 pistettä) tulostaan paransi Simo C, joka sijoittui alkukokeessa sijalle 46. (vrt. Suvi C 47.) ja loppukokeessa hän nousi yhdeksänneksi. Toiseksi eniten (18,75 pistettä) tulostaan paransi Sari C, joka sijoittui alkukokeessa 40.:ksi ja loppukokeessa 11.:ksi Molemmat olivat nousseet niin pistemääränsä kuin sijoituksensakin perusteella C-ryhmästä A:han eli "heikkojen" ryhmästä "hyvien" ryhmään.

Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?

AAPO A:	Mää pidin niistä tehtävistä, jossa joutu tekemään kaikkia numerotehtäviä. Emmä oikeen semmosista, jossa piti kirjottaa.
H:	Oliko muuta kivaa?
AAPO A:	Varmaan ku ratkastaan ongelmia. Oppia uutta asiaa.
SUVI C:	Mä tykkäsin ainaki niistä paritehtävistä. Ja sitte ite tekemisestä.
H:	Miksi?
SUVI C:	Mä tykkäsin enemmän tehdä parin kanssa kuin yksin.
H:	Oliko vielä muuta mistä tykkäsit?
SUVI C:	No ainaki se laivan tekeminen…Mä tykkään käsitöistä.
SIMO C:	Laivanrakennuksesta. Se oli aika kiva. Saatiin *(laivat)* vielä sinne kunniapaikalle *(koulun eteisaulan lasivitriiniin).*
H:	Oliko joku muu pistä pidit?
SIMO C:	Mää pidin siitä, kun oltiin Arvo A:n kanssa tekemässä niitä ryhmätöitä.
H:	Tuleeko kurssilta mieleen joku erityinen tehtävä, josta pidit?
SIMO C:	Ei.
H:	Oliko kaikki ihan samanlaisia?
SIMO C:	Kaikki oli yhtä mukavia.
SARI C:	Laivan rakentamisesta, sanallisista ja ryhmätöistä

Parhaiten menestynyt Aapo A koki numeeriset tehtävät ja niiden ratkaisemisen mielekkääksi, Suvi C, Simo C ja Sari C sen sijaan mainitsivat ryhmätyöt ja konkreettisen työskentelyn laivaprojektin parissa mukavimmiksi.

Yksitoista koeryhmän oppilasta mainitsi laivan rakentamisen opetusjakson mukavimmaksi asiaksi. Oppilaat pitivät myös ryhmätöistä (7 mainintaa) ja tulitikkutehtävistä (4 mainintaa). Sanalliset ja numeeriset tehtävät sekä laivan suunnittelu olivat kukin kahden oppilaan mielestä mukavia. Yhden maininnan saivat tilavuustehtävät, uuden oppiminen ja ongelmien ratkaiseminen. Yhden oppilaan mielestä kaikki toiminta kurssilla oli mukavaa.

Kerro mistä et pitänyt tällä kurssilla?

AAPO A:	En oikein pitänyt siitä, että piti asiat selittää niin tarkasti. Se vie aikaa ja siinä joutuu miettimään. Piti osata kirjottaa niin, että siitä ymmärtää toisetki.
H:	Mistä tehtävästä et pitänyt?
AAPO A:	Semmosista pitkistä tehtävistä, jossa lukee hirveesti niitä tekstejä. Ja onvaan vähän kunnollista laskemista *(sanalliset tehtävät).*
SUVI C:	Läksyistä.
H:	Miksi?
SUVI C:	Niitä ei ole hauska tehä.
H:	Oliko jotain muuta mistä et pitänyt kurssilla?
SUVI C:	No kun jotain vaikeita tehtäviä ei osannu.
SIMO C:	Ei tuu kyllä oikeen mieleen. Kaikki oli ihan OK.
SARI C:	Kaikki oli ihan mukavaa…
H:	Mutta jos joku tehtävätyyppi pitäis tiputtaa pois, niin mikä se olisi?
SARI C:	No ne kulutuslaskut niistä mä en oikein pitäny ja se Pythagoraan lause niistä mä en oikein tykänny
H:	Miksi sä tiputtaisit ne ensimmäisenä?
SARI C:	No ne oli vähä vaikeaa.
H:	Mitä asioita olisit vähentänyt kurssilla?
SARI C:	No ehkä vähän vähemmälle niitä muunnoslaskuja. Mutta jos se on tärkeää, niin sitä pitää opettaa kaikille niin, että jää päähän.

Kurssilla kehittyneiden Sari C:n ja Simo C:n vastuksista kuvastuu, että he pitivät kurssin tehtäviä ja aiheita mukavina ja hyödyllisinä. Sari C:n vastauksesta on luettavissa asenne, jolla hän suhtautui opetukseen: *Mutta jos se on tärkeää, niin sitä pitää opettaa kaikille niin että jää päähän.* Aapo A kykeni ratkaisemaan useimmat tehtävät päässään oikein, ja siksi tehtävien kirjoittaminen tuntui hänestä turhalta. Hän ei pitänyt kurssilla, eikä yleensäkään, kirjoittamisesta, mikä näkyi epäselvänä käsialana.

Suvi C koki tehtävät vaativina eikä läksyjen teko kiinostanut. Kotitehtävät eivät innostaneet monia muitakaan koeryhmäläisiä, sillä kymmenen oppilaan mielestä ne nousivat opetusjakson negatiivisimmaksi asiaksi. Tilavuustehtäviin (3 oppilasta), muunnostehtäviin (2 oppilasta), pinta-alatehtäviin (2 oppilasta) ja kulutustehtäviin (2 oppilasta) suhtauditiin myös negatiivisesti. Yhden oppilaan maininnan keräsivät seuraavat asiat: selittäminen ja kirjoittaminen, sanalliset tehtävät, numeropäättely, peruslaskutoimitukset ja Pythagoraan lause.

Mielipidettä ratkaisukartasta kysyttiin oppilaan ratkaisuvihkostaan valitseman esimerkkitehtävän avulla seuraavasti:

Käytitkö tässä (tehtävässä) ratkaisukarttaideaa? Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?

Oppilaiden vastaukset luokiteltiin positiivisiin, neutraaleihin ja negatiivisiin taulukon 23 mukaisesti.

TAULUKKO 23 Esimerkkejä oppilaiden vastauksista kysymykseen: Oliko ratkaisukarttamenetelmästä hyötyä vai häiritsikö se?

Positiivinen vastaus	Neutraali vastaus	Negatiivinen vastaus
”Hyötyä. Jos oli vaikka pitkä sanallinen…voi lukea ja laittaa vaikka paperille nimiä.” *Sari C, ak 40., lk 11.*	”Joissaki oli, joissaki ei. Sillon ku oli muutenki vaikea tehtävä, niin oli vaikea tehä ratkasukartta.” *Pirkko B, ak 32., lk 18.*	”No joissakin *(haittaa)*, ku piti käyttää karttaa vaikka oli jo ratkassu” *Suvi C ak 47., lk 42.*
”Oli siitä hyötyä. Sai ainaki selville, jos joku toinenki katto mitä siinä tehtävässä piti tehä.” *Pekka B, ak 26., lk 25.*	”Jonki verran” *Sampo C, ak 38., lk 35.*	”Emmä oikeen. Mä vaan mietin päässä.” *Aapo A, ak 8., lk 1.*
”Käytin mä joissaki, mutta joissaki ei tarttenu ollenkaan... Oli siitä hyötyä. Pystyy ratkasemaan kaikkia enemmän.” *Anne A, ak 11., lk 6.*		”Parissa tehtävässä. Aika harvoin.” *Simo C, ak 46., lk 9.*

(*ak* = oppilaan sijoitus alkukokeessa *lk* = oppilaan sijoitus loppukokeessa)

Sari C:n ja Pekka B:n vastauksista on luettavissa, että he ennen kaikkea pitivät ratkaisukarttaa hyödyllisenä tehtävien ratkaisemisessa. Mielenkiintoista on, että koeryhmän paras Aapo A, heikoin Suvi C ja parhaiten kehittynyt Simo C eivät kokeneet hyötyneensä ratkaisukartasta, kuten ei myöskään Piia B. Suurin osa (11) koeryhmän oppilaista kuitenkin totesi haastatteluissa ratkaisukartan käytön auttavan heitä ongelmatehtävän ratkaisussa. Aapo A:n, Suvi C:n ja Simo C:n haastatteluvastaukset on selitettävissä heidän tuntityöskentelynsä perusteella. Aapo A todellakin kykeni ratkaisemaan suurimman osan tehtävistä nopeasti päässä laskien. Hän merkitsi tarvittaessa vain luvut muistiin ja suoritti laskutoimitukset vihkoon. Ratkaisukartan välivaiheiden kirjoittaminen oli hänen mielestään näissä tehtävissä useimmiten tarpeetonta. Myös Suvi C pyrki laskemaan tehtäviä päässä, mutta ne eivät olleet kovinkaan usein oikein, kuten koetuloksetkin osoittavat. Suvi C:n laatima ratkaisuvihko on selkeä ja ”oikein” laadittu. Hänen ongelmanaan on ollut mielestäni se, ettei hän osannut käyttää ongelman ratkaisuprosessissa samanaikaisesti apunaan ratkaisukarttaa, vaan hän laati kuvaamataidollisesti ja käsialaltaan ”siistin” ratkaisukartan vasta sen jälkeen, kun hän oli jo ratkaissut tehtävän mielessään. Tälle johtopäätökselle antaa tukea Hegartyn ja Kozhenikovin (1999, 688) teoria kahdentyyppisistä visualisoijista, kaavionkäyttäjistä ja kuvankäyttäjistä (ks. luku 7.3), joista jälkimmäisiin Suvi C selvästikin kuului.

Simo C oli taas suorastaan hurmaantunut konkreettiseen työskentelyyn ja tekniseen työhön. Vihkotyöskentely ja kirjalliset työt näyttivät olevan hänelle työläitä. Hän yritti kuitenkin parhaansa, koska hän oli ilmeisen motivoitunut kurssista ja sen sisällöistä. Tämä näkyi myös hänen vastauksestaan: …*Kaikki (kurssilla) oli ihan OK.*

Pirkko B:n ja Sampo C:n neutraali (*joissaki oli ja joissaki ei* tai *jonkin verran*) näkökanta kertoo mielestäni siitä, ettei ratkaisukartan laatiminen ollut kaikkien tehtävien kohdalla helppoa eikä aina järkevääkään. Näkemykset kaikissa kolmessa tasoryhmässä (hyvät = A, keskitasoiset = B, heikot = C) jakaantuivat seuraavasti (taulukko 24).

TAULUKKO 24 Koeryhmän oppilaiden suhtautuminen ratkaisukarttamenetelmään (+ positiivinen, o neutraali ; – negatiivinen)

Oppilas	*Oliko ratkaisukartasta hyötyä vai haittaa?*		
Aapo A			–
Aaro A	+		
Anne A	+		
Ari A	+		
Arvo A	+		
Piia B			–
Paavo B	+		
Pilvi B	+		
Pekka B	+		
Pirjo B	+		
Pirkko B		o	
Päivi B	+		
Sampo C		o	
Sari C	+		
Sini C	+		
Simo C			–
Suvi C			–
yht:	**11**	**2**	**4**

Selvä yhdenmukaisuus oppilaiden mielipiteistä löytyi tehtävissä, joissa he pääsivät ratkaisuun helposti päässä laskien: tällöin ratkaisukartasta ei koettu olevan suurta apua. Useimmat oppilaat sen sijaan ilmaisivat vastauksissaan selvästi, että ratkaisukartan laatiminen auttoi heitä hahmottamaan tehtävää, selkeytti sitä ja helpotti ratkaisemisessa silloin, kun tehtävä oli koettu vaativaksi.

Koeryhmän oppilaiden motivoitumista kurssilla kysyttiin seuraavien kahden kysymyksen avulla:

1) Muuttuiko suhtautumisesi ongelmatehtäviin kurssin aikana?

2) Lisääntyikö vai vähenikö kiinnostuksesi ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan kurssin aikana?

1) AAPO A: Ei oikeen… Niitä on mukava tehä.
2) AAPO A: Kyllä se samalla tasolla pysyy.

1) SUVI C: Ei ehkä tai kun sai tehä niitä enemmän. Se helpottu.
2) SUVI C: Lisäänty… Kun tehtiin niitä, niin kai sitä vähä kiinnostu.

1) SARI C: Muuttu aika paljonki… ennen…ei tajunnu laittaa vaikka jotain piirustuksia, vaan yritti ratkoa päässä. Ja se meni aina väärin. No kiinnostu siitä ja oppi nyt sellasen kartan.
2) SARI C: Lisäänty… Kyllä mä matikasta oon tykänny, mutta… nyt tykkään vielä enemmän kun tuli tommosia tehtäviä.

1) SIMO C: Ei mun mielestä… Se on ihan mukavaa… ongelmanratkaisut… tulitikut, laiva, parityöt. Niitä on tosi mukavaa tehä aina kaikkien kavereitten kanssa.
2) SIMO C: Ehkä vähä kiinnostu enemmän.
H: Mistäs arvelet, että se johtui?
SIMO C: Ku mennään yläasteelle niin ajattelee, että mitähän kaikkea siellä tulee, niin nyt tiietään jo vähä etukäteen.

Aapo A:n ja Simo C:n vastauksista kysymykseen *1* on luettavissa, että he ovat pitäneet ongelmatehtävistä aikaisemminkin ja heidän suhtautumisensa ongelmatehtäviä kohtaan pysyi samanlaisena. Suvi C:n kiinnostus lisääntyi, ja erityisesti Sari C koki todellisen ahaa-elämyksen huomatessaan, että kykenee ratkaisemaan tehtäviä ratkaisukartan avulla oikein. Tämä näkyi myös reiluna tulosparannuksena loppukokeessa.

2 kysymykseen annettujen vastausten mukaan Suvi C:n, Sari C:n ja Simo C:n kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan lisääntyi. Perusteluna Suvi mainitsi tehtävien harjoittelun. Sari taas innostui kurssin tehtävätyypeistä, ja Simoa motivoi uteliaisuus uusiin aiheisiin, jotka tulevat yläasteella (esim. Pythagoraan lause ja Arkhimendeen laki). Aapon kiinnostus pysyi korkealla, minkä voi päätellä koetuloksistakin.

Vastaukset kysymyksiin *1* ja *2* kertovat mielestäni oppilaiden motivoituneisuudesta ja suhtautumisesta toteutettuun opetusjaksoon ja sen avulla luotuun oppimisympäristöön. Yllättävää oli, ettei kukaan oppilaista maininnut haastatteluissa mitään kahden tunnin mittaisista alku- ja loppukokeista. Niistä ei tosin suoraan kysyttykään, mutta etukäteen luulin niiden olleen yksi oppilaiden motivaatioon ja suhtautumiseen vaikuttava tekijä, jonka oppilaat olisivat tiedostaneet haastatteluissa.

Taulukossa 25 on esitetty luokittelu oppilaiden vastauksista edellä mainittuihin kysymyksiin. Yhdeksän oppilasta, kolme jokaisesta tasoryhmästä, oli sitä mieltä, että heidän kiinnostuksensa ongelmatehtäviä kohtaan lisääntyi kurssin aikana. Tosin osa, esimerkiksi Aapo A, oli jo aikaisemminkin pitänyt ongelmatehtävistä eikä kokenut suhtautumisensa muuttuneen. Näiden oppilaiden vastaus todettiin neutraaliksi. Neutraali mielipide kurssin vaikutuksesta ongelmatehtäviin kiinnostumisesta oli viidellä oppilaalla. Piia B, Pilvi B ja Päivi B totesivat kurssin vähentäneen kiinnostusta ongelmatehtäviä kohtaan. Syynä tähän oli yleensä tehtävien vaikeus tai vaikeutuminen ja se, ettei oppilas ollut pitänyt matematiikasta aiemminkaan.

Kiinnostus matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun yleensä kasvoi viiden oppilaan mielestä. Heistä suurin osa (4) kuului tasoryhmään C eli heikkoihin (taulukko 25). Valtaosan (11) mielenkiinto pysyi samanlaisena. Vain yhden oppilaan eli Piia B:n kiinnostus väheni. Syyksi tähän paljastui haastattelussa hänen heikohko itsetuntonsa ja negatiivinen mielikuvansa kyvyistään matematiikassa:

1) PIIA B: Muuttu. Mä en tykkää laskuista, niin nyt mä tykkään vielä vähemmän.
2) PIIA B: Emmä tiiä. Täällä oli liian vaikeeta… Mä oon niin typerä, ettei mun aivoihin mahu se.
H: En usko, että siitä on kysymys

TAULUKKO 25 Koeryhmän oppilaiden kiinnostus ongelmatehtäviin, ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan haastattelun mukaan
(+ kasvoi, o pysyi ennallaan; – väheni)

Oppilas	Kiinnostus ongelmatehtäviin			Kiinnostus matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun		
Aapo A		o			o	
Aaro A	+				o	
Anne A		o			o	
Ari A	+				o	
Arvo A	+				o	
Piia B			–			–
Paavo B		o			o	
Pilvi B			–		o	
Pekka B	+			+		
Pirjo B	+				o	
Pirkko B	+				o	
Päivi B			–		o	
Sampo C		o			o	
Sari C	+			+		
Sini C	+			+		
Simo C		o		+		
Suvi C	+			+		
yht:	**9**	**5**	**3**	**5**	**11**	**1**

Yhteenvetona koeryhmän oppilaiden haastatteluista voidaan todeta, että matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla useimpien oppilaiden suosikkiaiheeksi nousi laivan rakentaminen ja siihen liittyvä matematiikka. Opetusmenetelmistä ryhmätyöskentely tuntui oppilaista mielekkäimmältä. Epämieluisaksi oppilaat olivat tunteneet kotitehtävät, joita useimpien mielestä oli ollut liikaa. Suurin osa oppilaista koki ratkaisukartan hyödylliseksi vaativia ongelmatehtäviä ratkottaessa. Helposti ratkaistaviin tehtäviin sitä ei kannata oppilaiden mielestä soveltaa. Kurssi lisäsi tai piti ennallaan useimpien oppilaiden mielenkiintoa ongelmatehtäviä, ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan. Oppiaineisiin integroitu matemaattinen ongelmanratkaisukurssi materiaaleineen ja sen avulla luotu oppimisympäristö koettiin yleisesti myönteiseksi ja matematiikan ja ongelmanratkaisun opiskelua motivoivaksi tapahtumaksi. Tätä johtopäätöstä tukevat haastattelujen lisäksi myös oppilaiden koetulokset, sillä kaikki oppilaat paransivat tuloksiaan loppukokeessa.

10.4 Tutkimustulosten yhteenveto

Koska tutkimuksessa käytettiin kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä, niin tulosten yksityiskohtainen esittely vaatii useita kymmeniä sivuja.

Seuraavassa esitän vielä tiivistetyn yhteenvedon tutkimusongelmiini saamistani vastauksista.

1. *Kuinka opetus toteutui matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla opettajan näkökulmasta?(luku 10.1)*

Keskeisiksi matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opetusta tukeviksi asioiksi muodostuivat *organisointi, matematiikan verbalisointi, opetuksen ongelmakeskeisyys, luokan ilmapiiri ja opetuksen integrointi*.

Kurssi osoitti, että ongelmanratkaisun opettaminen vaatii hyvää *organisointia*, joka käytännössä tarkoitti huolellista ennakkosuunnittelua. Tarvittavat tilavaraukset ja materiaalihankinnat oli tehtävä ajoissa. Vanhempien myönteinen tuki ja asennoituminen olivat myös tärkeitä oppilaiden motivoitumiselle ja opetuksen onnistumiselle.

Matematiikan ja ongelmanratkaisun verbalisointi nousi opettamisessa keskeiseksi. Oppilaille oli annettava aikaa ja heitä on kannustettava puhumaan ja kirjoittamaan matematiikasta. Ryhmätyöt ja yhteistoiminnallinen matematiikka tarjosivat tähän luontevan tilaisuuden. Ratkaisukartan opettelu helpotti oppilaan selostusta; siihenhän hän oli pyrkinyt kirjoittamaan ratkaisunsa etenemisen ja ajattelunsa kulun. Samalla se auttoi opettajaa ymmärtämään, missä kohdassa oppilaalla oli vaikeuksia.

Ongelmakeskeisen opetusmenetelmän soveltaminen tuntui luontevalta tähän aihepiiriin. Tehtävien esityksen ja tarkistuksen yhteydessä pyrin esittämään oppilaille kysymykset *miksi* ja *miten*. Oli myös uskallettava olla neuvomatta oppilaita koko ajan ja annettava heidän itse pohtia vastauksia.

Kannustavan ilmapiirin luomiseksi oli tehtävä lujasti töitä, koska ongelmatehtävä, jota oppilas ei osannut ratkaista tai ratkaisi väärin, koettiin varsinkin kurssin alkuvaiheessa epäonnistumiseksi, eikä se voinut olla vaikuttamatta luokan ilmapiiriin. Virheellisten vastausten hyväksyminen ratkaisun välivaiheeksi oli toimiva ajatus, joka vaikutti positiivisesti luokan ilmapiiriin. Näin aremmatkin oppilaat rohkaistuivat yrittämään ja kokeilemaan haasteellisten tehtävien ratkaisua.

Opetuksen integrointi toteutettiin liittämällä matemaattista ongelmanratkaisua matematiikan lisäksi äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon tunteihin. Tämä tapahtui luvussa 6 esittämieni periaatteiden mukaisesti. Integroinnin avulla oppilaille pyrittiin osoittamaan, että matemaattiselle ongelmanratkaisulle on käyttömahdollisuuksia muidenkin oppiaineiden kuin matematiikan alueella. Opetuksen integroinnin suunnittelu ja toteutuminen arvioitiin kehittelemäni integroinnin painopistekolmion (ks. luvut 6.4 ja 10.1.2) avulla. Painopistekolmio muodostui integroinnin lähtökohdan, oppiaineiden käsittelytavan ja ajallisen toteutuksen näkökulmista. Integroinnin toteutuksen painopisteet olivat tässä tutkimuksessa horisontaalisen, oppijakeskeisen ja oppiaineita erillisenä yhdistävien näkökulmissa.

Tuntien aiheiden valinnassa, suunnittelussa ja toteutuksessa lähtökohtana oli, että aiheen oli liityttävä ongelmanratkaisuun ja koeryhmän oppilaiden opetussuunnitelmaan. Oppitunnin oli oltava yhdistettävissä kuhunkin integroitavaan aineeseen siten, että se tukisi nimenomaan opetettavan aineen sisältöjä. Luvun 9.4.2 taulukossa 5 on esitetty, mihin oppiaineisiin ongelmanratkaisun opetukseen käytettyjen tuntien aiheet integroituivat.

2. *Millaisia muutoksia koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matemaattisissa ongelmanratkaisutaidoissa tapahtui ongelmanratkaisukokeiden perusteella?(luku 10.2)*

2.1 *Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli alku- ja loppukokeessa? (luku 10.2.1)*

Koe- ja kontrolliryhmän sisäiset muutokset

Koeryhmän kokonaispistemäärän keskiarvo oli loppukokeessa noin 8,5 pistettä (26,6 %) parempi kuin alkukokeessa. Koeryhmä paransi suoritustaan tehtävien ratkaisupisteiden osalta loppukokeessa vajaat 5 pistettä (30,4 %) ja perusteluprosessipisteiden osalta vajaat 4 pistettä (23,0 %). Nämä tulosparannukset olivat tilastollisesti erittäin merkitseviä, ja opetuksen vaikutus eli efektikoko on ollut koeryhmään suuri (t-testi, $p = 0{,}000$; Cohenin d arvot > 0,80; liite 16). Lisäksi kaikki koeryhmän oppilaat paransivat alkukokeen tuloksia loppukokeessa.

Kontrolliryhmän kokonaispistemäärän keskiarvo oli loppukokeessa vajaan puoli pistettä (–1,2 %) heikompi kuin alkukokeessa. Kontrolliryhmä paransi loppukokeessa suoritustaan ratkaisussa noin pisteen (6,1 %), mutta perusteluprosessista saatu keskiarvotulos laski vajaan 1,5 pistettä (8,4 %). Tilastollisesti kontrolliryhmän tulosten muutokset alku- ja loppukokeen välillä eivät olleet merkitseviä. Myös efektikoko kokeiden välillä on ollut vähäinen. Poikkeuksen tekee perusteluprosessitulos, jossa pienen vaikutuksen raja ylittyy ($d = -0{,}33$), tosin negatiiviseen suuntaan.

Koe- ja kontrolliryhmien väliset muutokset

Alkukokeen kokonaistulosten mukaan koeryhmä menestyi vajaan pisteen (2,3 %) verran heikommin kuin kontrolliryhmä, mutta efektikokoon tai tilastolliseen merkitsevyyteen perustuvia eroja ryhmillä ei ollut. Loppukokeessa osat olivat vaihtuneet. Koeryhmän kokonaistulos oli loppukokeessa reilut 8 pistettä (25,3 %) parempi kuin kontrolliryhmän tulos. Ryhmien välinen ero loppukokeessa oli tilastollisesti erittäin merkitsevä. Myös ryhmien välisen eron ilmoittava Cohenin d -arvo osoitti eron olevan loppukokeessa suuri.

Ratkaisupisteiden osalta koe- ja kontrolliryhmä olivat alkukokeessa keskiarvoltaan lähestulkoon samantasoisia. Ryhmien välinen ero oli hivenen kontrolliryhmän eduksi. Loppukokeessa koeryhmän ratkaisupistetulos oli vajaat 4 pistettä (22,3 %) parempi kuin kontrolliryhmän tulos. Ero ryhmien välillä oli tilastollisesti merkitsevä. Myös Cohenin d -arvo ylitti keskisuuren eron rajan.

Perusteluprosessipisteiden osalta koeryhmä oli alkukokeessa reilun puoli pistettä (4,3 %) heikompi kuin kontrolliryhmä mutta loppukokeessa koeryhmä oli noin 4,5 pistettä (28,5 %) parempi kuin kontrolliryhmä. Ryhmien välinen ero perusteluprosessien pistemäärän osalta oli tilastollisesti erittäin merkitsevä. Myös Cohenin d -arvo ylitti reilusti ryhmien välisen suuren eron rajan.

Koe- ja kontrolliryhmän tasoryhmien muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Otoksen kaikki 52 oppilasta jaettiin alkukokeen kokonaispistemäärien perusteella kolmeen tasoryhmään siten, että ryhmät olisivat oppilasmäärältään lähestulkoon yhtä suuria (ks. luku 10.2.1 taulukko 16). Sijoittumisen määräsi kunkin oppilaan alkukokeesta saama kokonaispistemäärä. Ryhmä A nimettiin ”hyvien” ryhmäksi, ja siihen pääsivät alkukokeessa 17 parhaan joukkoon sijoittuneet. Ryhmään B eli ”keskitason” ryhmään kuuluivat sijoille 18–35 yltäneet oppilaat. Alkukokeessa sijoille 36–52 jääneet kuuluivat tässä kokeessa ”heikkojen” ryhmään C. Loppukokeessa oppilaat pidettiin samoissa ryhmissä, jotta heidän kehittymistään kokeiden välillä voitaisiin seurata.

Kaikki koeryhmän oppilaista muodostetut tasoryhmät paransivat kokonaistuloksiaan loppukokeessa. Opetuksen vaikutuksen eli efektin koon arvojen mukaan parannukset ylittivät reilusti suuren vaikutuksen rajan. Huomattavaa oli, että heikot paransivat alku- ja loppukokeen välillä keskiarvotulostaan peräti 11,5 pistettä. Tosin heidän alkukokeen tuloksessaan oli paljon parantamisen varaa hyvien ryhmään verrattuna. Kontrolliryhmän tasoryhmien kehitys kokonaistulosten osalta ei ollut vastaavanlaista, vaan Cohenin *d* -arvot ovat huomattavasti pienempiä kuin koeryhmällä. Hyvien ryhmän keskiarvotulos heikkeni ja keskitasoisten ryhmän tulos pysyi lähes ennallaan. Heikkojen ryhmän tulos parani reilun 1,5 pistettä. Ryhmien yksityiskohtaiset muutokset alku- ja loppukokeen välillä on koottu luvun 10.2.1 taulukkoon 13.

2.2 *Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli viivästetyssä kokeessa? (luku 10.2.2)*

Koe- ja kontrolliryhmälle suoritettiin viivästetty mittaus 1,5 vuotta loppukokeen jälkeen. Mittarina käytettiin viivästettyä koetta E (liite 4), joka rakennettiin alku- ja loppukokeiden avulla. Viivästetyssä kokeessa koeaika oli vain puolet alku- ja loppukokeen suoritusajasta, mutta vastaavasti tehtäviä oli ratkaistavana vähemmän. Viivästetyn kokeen tuloksia ei siis voi verrata suoraan alku- ja loppukokeen tuloksiin, mutta tarkoituksena olikin selvittää, onko ongelmanratkaisussa enää eroja koe- ja kontrolliryhmän välillä.

Koe- ja kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipisteiden erot eivät olleet enää viivästetyssä kokeessa tilastollisesti merkitseviä. Ryhmien välinen efektikoon arvo lähentelee kuitenkin keskisuuren eron rajaa, varsinkin kokonais- ja perusteluprosessipisteiden osalta. Prosentuaalisesti keskiarvotulosten erot olivat selkeästi koeryhmän eduksi kaikilla osa-alueilla (14,7 %, 11,3 % ja 19,5 %). Tähän hivenen ristiriitaiseen tulokseen lienee osaltaan syynä viivästetyn kokeen tehtävien vähäinen määrä. Toisaalta on luonnollista, että erot ryhmien välillä ovat 1,5 vuoden aikana tasoittuneet, koska oppilaat eivät ole enää olleet entisissä opetusryhmissään.

Poikkeuksena tästä ovat viivästetyn kokeen ensimmäisen tehtävän E1 (liite 4) tulokset. Tehtävän kokonaistulosten mukaan koeryhmä oli tilastollisesti merkitsevästi kontrolliryhmää parempi. Ratkaisupisteissä koeryhmä oli kontrolliryhmää parempi tilastollisesti melkein merkitsevästi. Perusteluprosessin osalta koeryhmä oli kontrolliryhmää parempi tilastollisesti merkitsevästi. Ryhmien välille lasketut Cohenin *d*-arvot ylittivät kokonais- ja perusteluprosessipisteiden osalta suuren eron rajan ja ratkaisupisteiden osalta keskisuuren eron rajan. Myös prosentuaalisesti keskiarvojen erot eri osa-alueilla tehtävässä E1 olivat suuria (44,1 %; 27,7 % ja 64,9 %).

2.3 Millaisia eroja koe- ja kontrolliryhmällä oli alku- ja loppukokeessa sekä viivästetyssä kokeessa? (luku 10.2.3)

Vaikka viivästetyn kokeen maksimipistemäärä (22 p) oli huomattavasti pienempi kuin alku- ja loppukokeessa (molemmissa 58 p), koe- ja kontrolliryhmän suorituksia näissä kolmessa kokeessa voidaan vertailla prosentuaalisesti. Tällöin kontrolliryhmän tulokset normitetaan 100 prosentiksi kaikissa kokeissa ja koeryhmän tulosprosentti lasketaan kontrolliryhmän pistemäärästä.

Loppukokeessa ryhmien väliset erot olivat kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipisteiden osalta t–testin mukaan tilastollisesti erittäin merkitseviä. Alkukokeessa ja viivästetyssä kokeessa ryhmien välillä ei ollut tilastollisia eroja. Poikkeuksen muodosti kuitenkin viivästetyn kokeen E1-tehtävä. Tässä tehtävässä ryhmien välinen ero kasvoi viivästetyssä kokeessa loppukokeen vastaavaan tehtävään verrattuna (ks. luku 10.2.2).

Prosentuaalisesti tarkasteltuna koeryhmä oli alkukokeessa kokonaistuloksissa kontrolliryhmää 2,8 % heikompi, mutta loppukokeessa 25,3 % parempi. Viivästetyssä kokeessa ero oli edelleenkin koeryhmän eduksi 14,7 %.

Ratkaisutulosten osalta ryhmät olivat alkukokeessa lähestulkoon samalla tasolla, mutta perusteluprosessin tulos oli koeryhmällä yli neljä prosenttia heikompi kuin kontrolliryhmällä. Loppukokeessa koeryhmä oli ratkaisujen osalta reilut 22 % ja perusteluprosessitulosten osalta vajaat 30 % parempi kuin kontrolliryhmä. Ryhmien väliset erot kaventuivat viivästetyssä kokeessa n. 10 % mutta erot säilyivät edelleenkin koeryhmän eduksi.

Esimerkkejä koeryhmän oppilaiden vastausten muutoksista kolmessa eri kokeessa on esitetty luvun 10.2.3 kuvioissa 46 ja 47. Niistä on havaittavissa oppilaiden perustelutaitojen kehittyminen ja harjaantuminen ratkaisukartan soveltamiseen koetilanteessa.

Koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden sijoittumisessa tasoryhmiin (A = hyvät, B = keskitaso ja C = heikot) tapahtui seuraavia muutoksia (ks. luku 10.2.1). Alkukokeessa *koeryhmän* (N = 17) oppilaat sijoittuivat tasaisesti kaikkiin kolmeen tasoryhmään. Loppukokeessa yli puolet (9) koeryhmän oppilaista ylsi hyvien ryhmään. Keskitasoisten ryhmässä oli saman verran oppilaita kuin alkukokeessakin (7). Heikkojen ryhmään jäi vain yksi oppilas. Viivästetyssä kokeessa heikkojen ryhmässä oli kaksi, keskitason ryhmässä yhdeksän ja hyvien ryhmässä kuusi koeryhmän oppilasta.

Alkukokeessa myös *kontrolliryhmän* (N = 35) oppilaiden sijoittuminen ryhmiin oli tasaista. Loppukokeessa lähes puolet (16) kontrolliryhmän oppilaista sijoittui heikkojen ryhmään. Keskitasoisten ryhmässä oli edelleenkin saman verran oppilaita kuin alkukokeessa (11) ja hyvien ryhmään ylsi kahdeksan oppilasta. Viivästetyssä kokeessa heikkojen ryhmässä oli 15, keskitason ryhmässä yhdeksän ja hyvien ryhmässä 11 kontrolliryhmän oppilasta (ks. luku 10.2.3).

Yhteenvetona voidaan todeta, että alkukokeessa heikkoihin sijoittuneista viidestä koeryhmäläisestä oli heikkoja loppukokeessa enää yksi ja viivästetyssä kokeessa kaksi. Kontrolliryhmäläisten määrä heikkojen ryhmässä sen sijaan lisääntyi alkukokeen jälkeen. Huomattavaa oli, että koeryhmän oppilaista yli puolet (9) ylsi loppukokeessa hyvien ryhmään.

3. *Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun? (luku 10.3)*

Ongelmanratkaisukurssin toteutuksen jälkeen kaikki koeryhmän oppilaat haastateltiin teemahaastattelun eli ns. puolistrukturoidun haastattelun avulla (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47). Aluksi haastattelut kuunneltiin ja litteroitiin, minkä jälkeen niille tehtiin sisällönanalyysi (Tuomi & Sarajärvi 2002, 110–115).

Koeryhmän oppilaiden haastatteluiden perusteella useimpien oppilaiden suosikkiaiheeksi matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla nousi laivanrakentaminen ja siihen liittyvä matematiikka. Opetusmenetelmistä ryhmätyöskentely tuntui oppilaista mielekkäältä. Epämieluisaksi oppilaat olivat kokeneet kotitehtävät, joita useimpien mielestä oli ollut liikaa.

Suurin osa oppilaista koki ratkaisukartan hyödylliseksi vaativia ongelmatehtäviä ratkottaessa. Helposti ratkaistaviin tehtäviin sitä ei oppilaiden haastatteluiden mukaan kannata soveltaa. Kurssi lisäsi tai piti ennallaan useimpien oppilaiden mielenkiintoa ongelmatehtäviä, ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan. Oppiaineisiin integroitu matemaattinen ongelmanratkaisukurssi materiaaleineen ja sen avulla luotu oppimisympäristö koettiin yleisesti myönteiseksi ja matematiikan ja ongelmanratkaisun opiskelua motivoivaksi. Tätä johtopäätöstä tukevat haastattelujen lisäksi myös oppilaiden koetulokset, sillä kaikki oppilaat paransivat tuloksiaan loppukokeessa.

11 TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS

Koska tutkimuksen toteuttamisessa käytettiin kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä, tulosten luotettavuutta voidaan arvioida triangulaation avulla (ks. luku 9.1). Sen perusideana on, että mitä useampaa tutkimusmenetelmää kohteen tutkimukseen käytetään, sitä varmempaa on saatu tieto (esim. Metsämuuronen 2005, 245). Eri menetelmien avulla saatujen tulosten tulisi olla toisiaan tukevia. Seuraavissa luvuissa tarkastelen käyttämieni tutkimusmenetelmien avulla saatujen tulosten luotettavuutta.

11.1 Tutkimuksen toteuttamisen arviointia

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli luoda kehittämistutkimusmenetelmän *(design research,* luku 9.1.1) avulla oppimisympäristö matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettamista varten ja selvittää sen aiheuttamia muutoksia koeryhmän oppilaiden suorituksiin. Tätä tavoitetta varten tutkimuksen teoriaosassa käsiteltiin oppimiskäsitystä, matemaattista ajattelua, matemaattista ongelmanratkaisutaitoa ja ongelmanratkaisun opettamista, opetuksen integroimista ja ratkaisukarttamenetelmää. Opetusintervention toteutuksessa käytettiin kvasieli näennäiskokeellista koeasetelmaa (*quasi-experimental design,* Cohen & Manion 1992, 198–199; Cook & Campbell 1979, 103–120). Tieto kerättiin luvussa 9.3 esiteltyjen kokeiden avulla. Oppilaiden mielipiteitä, heidän motivoitumistaan ja suhtautumistaan opetukseen intervention aikana selvitettiin haastattelun avulla (luku 9.1.3).

Kvalitatiivisessa tutkimuksessa on Lankshearin ja Knobelin (2004, 74) mukaan kiinnitettävä huomiota tutkijan rooliin tutkimuksessa. Tutkija hyväksytään tiedonkeruun instrumentiksi, joten kvalitatiivisessa tutkimuksessa tiedostetaan myös se tosiasia, että tutkijan arvot, oletukset, uskomukset ja aikaisemmat tiedot vaikuttavat päätöksiin siitä, millaista tietoa tutkimuksessa kerätään ja kuinka tuloksia raportoidaan. (Lankshear & Knobel 2004, 74.)

Tämä näkökohta toteutui tässä tutkimuksessa. Tutkija arvioi pitämänsä tunnit heti oppituntien jälkeen, ja arvioita tarkennettiin jälkikäteen tuntien videotallenteiden pohjalta. Lopuksi arviot raportoitiin tutkimustuloksina yhdessä opetusjakson tuntisuunnitelmien kanssa.

Alku- ja loppukokeiden numeeristen tulosten perusteella voidaan päätellä, että ongelmanratkaisukurssi oli tehokas: koeryhmän parannus oli loppukokeessa tilastollisesti merkitsevä, samoin ero kontrolliryhmän tuloksiin. Kriittisesti tarkasteltuna voidaan kuitenkin kysyä, mikä aiheutti koeryhmän oppilaiden tulosparannuksen kontrolliryhmään verrattuna. Oliko syynä kurssin uutuudenviehätys vai vanhempien positiivinen suhtautuminen ongelmanratkaisukurssiin?

Kasvatustieteellisessä tutkimuksessa on aina ongelmallista päästä varmuuteen kausaalisuhteista. Tässäkin tutkimuksessa koe- ja kontrolliryhminä toimivat koululuokat ja siksi ne olivat epäekvivalentteja ryhmiä, jotka poikkesivat toisistaan (Metsämuuronen 2005, 1141). Tosin tässä tutkimuksessa toteutui Mobergin ja Tuunaisen (1989, 79) mukaan selkein tilanne: koeryhmä menestyy alkumittauksessa heikommin kuin kontrolliryhmä, mutta loppukokeessa ohittaa kontrolliryhmän. Viivästetyssä kokeessa koe- ja kontrolliryhmän keskiarvotuloksilla ei ollut tilastollista eroa kuin yhdessä tehtävässä (E1), mutta pisteissä koeryhmä oli yhä kontrolliryhmää parempi.

Kokeellisen asetelman luotettavuuden tarkastelussa voidaan pohtia sisäistä ja ulkoista validiteettia. Sisäinen validiteetti kuvaa varmuutta, jonka mukaan kausaalipäätelmä oletetun syyn ja seurauksen suhteesta voidaan tutkimuksessa tehdä (Cohen & Manion 1989, 200–201; Moberg & Tuunainen 1989, 58).

Ulkoinen validiteetti tarkoittaa sitä varmuutta ja todennäköisyyttä, jonka mukaan tutkimusoloissa tehty päätelmä voidaan yleistää laajempaan joukkoon ja muihin olosuhteisiin eli ”kentälle” (Cohen & Manion 1992, 202–203; Moberg & Tuunainen 1989, 64). Seuraavassa tarkastellaan tutkimuksen sisäisen ja ulkoisen validiteetin uhkia Cohenin ja Manionin (1992, 200–203) mukaisesti. Cohenin ja Manionin mainitsemat uhat on merkitty tekstiin kursiivilla.

11.1.1 Sisäisen validiteetin uhat

Testaus eli esikokeen vaikutus jälkimittauksen tuloksiin, jolloin samaa mittausta uusittaessa voi mittaustulos muuttua pelkästään aikaisemman mittauksen vuoksi. Syynä tähän ilmiöön voivat olla oppiminen, motivaatio ja adaptoituminen.

Näin on varmasti kaikissa koulukokeiluissa, ja tämän merkitys tulee tiedostaa. Tosin koe- ja kontrolliryhmät olivat tottuneet kokeisiin, ja oppilaat olivat tehneet niitä koulutyössä säännöllisesti. Vaikka koetehtävät alku- ja loppukokeessa olivat rakenteeltaan samanlaisia, valtaosaa tehtävien lukuarvoista, sisällöistä ja ulkoasusta muutettiin loppukokeeseen.

Epäluotettava testi tai mittari aiheuttaa virheitä loppumittauksessa opetusjaksosta riippumatta (mittavälineen muutos). Tällainen vaara on erityisesti arviointi- ja observointimittauksissa, joissa mittaustulokset ovat osittain riippuvaisia mittauksen suorittajasta. Virheet voivat aiheutua arvioitsijan taitojen ja keskittymistason muutoksista kurssin aikana.

On totta, että kahden oppitunnin mittainen ongelmanratkaisutesti ei voi mitata kaikkia matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyviä osa-alueita. Koe- ja kontrolliryhmien alku- ja loppukokeiden arviointia varten laadittiin yhtenäiset pisteytysohjeet, joita noudatettiin kokeita tarkistettaessa (liite 5, 6 ja 7). Pisteytys tarkistettiin neljään kertaan ja tarkistukseen osallistui myös tutkimuksen ohjaaja. Kokeille laskettiin reliabiliteettikertoimet (Cronbachin alfa-kertoimet), kun kaikkien 52 oppilaan tulokset oli pisteytetty. Alkukokeessa reliabiliteettikertoimeksi tuli 0,884 ja loppukokeessa 0,885. Viivästetyn kokeen reliabiliteettikerroin oli 0,785. Kertoimien perusteella kokeet mittasivat ongelmanratkaisutehtävien osaamista samansuuntaisesti.

Oppilaiden kehittyminen eli kypsyminen voi vaikuttaa tuloksiin enemmän kuin itse opetusjakso.

Tällaista uhkaa ei ollut, sillä alku- ja loppukoe pidettiin yhtä aikaa koe- ja kontrolliryhmälle. Kontrolliryhmän ansiosta voitiin huomioida tämä mahdollinen 1,5 kuukauden aikana tapahtuva luontainen kehittyminen, jota ei ainakaan kontrolliryhmän tulosten perusteella tapahtunut. On selvää, että molemmissa ryhmissä tapahtui kehittymistä 1,5 vuoden aikana ennen viivästettyä koetta. Viivästetty koe laadittiin tarkoituksella vaativammaksi, ja se toteutettiin samanaikaisesti molemmille ryhmille. Viivästetyn kokeen avulla haluttiin selvittää, kuinka pysyviä mahdolliset muutokset olivat koe- ja kontrolliryhmässä.

Myös tilastollinen regressio saattaa olla sisäisen validiteetin uhka. Tilastollisella regressiolla tarkoitetaan ilmiötä, jonka mukaan esikokeessa ääripisteitä saaneiden on todettu olevan tilastollinen todennäköisyys saada jälkimittauksessa lähempänä keskiarvoa olevia pistemääriä kuin esimittauksessa. Tilastollisen regression mukaan alkumittauksessa korkeimpia pistemääriä saaneilla on taipumus saada loppumittauksessa alempia tuloksia, ja vastaavasti alkumittauksessa alimpia pistemääriä saaneilla on taipumus saada alkumittausta korkeampia tuloksia loppumittauksessa.

Koeryhmässä ei käynyt näin, vaan kaikki paransivat tuloksiaan loppukokeessa, ja ryhmän keskiarvo nousi reilut 8,5 pistettä. Parannukset vaihtelivat 2,25 pisteestä 21,25 pisteeseen. Kontrolliryhmän keskiarvo laski lähes 0,5 pistettä. Tuloskehitykset vaihtelivat $^{-}$11,75 pisteen heikkenemisestä 11,5 pisteen parannukseen. (Ks. luku 10.2.1 taulukot 6–8 ja 16.)

Koe- ja kontrolliryhmien erilaisen valikoitumisen eli selektion vaikutus lopputuloksiin. Tällä tarkoitetaan, että koe- ja kontrolliryhmä ovat saattaneet olla ominaisuuksiltaan vertailukelvottomia jo tutkimuksen alussa.

Koe- ja kontrolliryhmät valittiin täysin sattumanvaraisesti. Lähtökohtana oli, että opetuskokeilu tulisi voida toteuttaa missä tahansa tavallisessa kuudennessa luokassa. Valinta oli tutkimuksen kannalta onnistunut, sillä koeryhmäläisten matematiikan numeroiden keskiarvo oli syyslukukauden 2003 todistuksessa 8,53 ja kontrolliryhmän muodostaneiden 6b-luokkalaisten 8,59 ja 6c luokkalaisten 8,39. Yhteiseksi 6b- ja 6c luokkien keskiarvoksi muodostui 8,49 eli matematiikan numeron perusteella ryhmät olivat hyvin lähellä toisiaan (keskiarvo molemmilla ryhmillä noin 8,5). Koulun valintaan vaikutti sen myönteinen suhtautuminen tutkimushankkeeseen. Ei ole itsestään selvää, että opettaja ja rehtori myöntävät luvan 1,5 kuukauden ja kokonaisuudessaan 34 oppitunnin mittaiseen opetuskokeiluun, jonka toteuttaa koulun ulkopuolinen opettaja/tutkija. Yhteistyökykyä ja joustavuutta vaadittiin myös yläkoulun rehtorilta ja opettajilta siihen, että 52 seitsemännen luokan oppilaan viivästetty mittaus voitiin toteuttaa samanaikaisesti.

Koehenkilökato ei tässä tutkimuksessa päässyt vaikuttamaan, vaan tutkimukseen otettiin kaikki ne tavallisessa opetuksessa olevat oppilaat, jotka osallistuivat alku- ja loppukokeisiin. Kaikki nämä oppilaat osallistuivat myös viivästettyyn kokeeseen.

Esi- ja jälkikokeen välisenä aikana sattuva ennalta arvaamaton tapahtuma saattaa vaikuttaa lopputuloksiin.

Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin aikana ei sattunut mitään normaalista koulutyöskentelystä poikkeavaa. Oppilaat olivat samassa koulussa ja siirtyivät ennen viivästettyä koetta samaan yläkouluun, jossa koe- ja kontrolliluokat sekoittuivat.

11.1.2 Ulkoisen validiteetin uhat

Opetuskokeilun kuvaaminen on epäselvää. Jollei tutkija pysty kuvailemaan riittävästi, kokeilun toisto samoissa olosuhteissa on käytännöllisesti katsoen mahdotonta.

Opetuskokeilu dokumentoitiin niin tarkasti kuin mahdollista: oppitunnit videoitiin ja käytetty materiaali, tuntisuunnitelmat ja tuntien toteutukset kommentteineen taltioitiin. Toteutetun kurssin perusteella valmistettiin myös oppikirja (Leppäaho 2004b), joka noudattelee pääasiassa toteutettua kurssia. Opetuskokeilu on siis varmasti toteutettavissa uudelleen.

Koehenkilöiden otannan valikointiharha saattaa vaikuttaa siihen, ettei mittaustuloksia voida yleistää.

Oppilaat eivät voineet itse vaikuttaa valikointiin, vaan he olivat koe- tai kontrolliryhmässä etukäteen tehdyn päätöksen mukaisesti. Tosin koeryhmäläisiltä ja heidän vanhemmiltaan kysyttiin suostumus kokeiluun, mikä on hyvän tutkimustavan mukaista (liite 1).

Hawthrone-efekti saattaa vaikuttaa suorituksiin, sillä jo pelkästään koeryhmäläisten tietoisuus opetuskokeiluun osallistumisesta saattaa vaikuttaa lopputulokseen.

Tällainen vaikutus on olemassa, ja se huomioitiin. Efekti olisi sama, mikäli kokeilu toistettaisiin sellaisenaan alku- ja loppukokeineen, ja se voitaneen hyväksyä aina tämäntyyppiseen kurssiluontoiseen projektiopetukseen. Opetuskokeilun tavoitteena oli myös opettaa oppilaita tavoitteellisen ja pitkäjänteiseen työskentelyyn. Koulutyön pitäisikin olla tavoitteellista ja oppilaan omien tulosten kehittämiseen tähtäävää. Esimerkiksi Brown (1992, 167) juuri haluaa saada kehittämistutkimuksissa opetusintervention avulla aikaan Hawthorne-efektin kaltaisia vaikutuksia eli esimerkiksi parantaa oppilaiden kognitiivista tuotteliaisuutta hallitsemalla heitä ja näin selvittää teoreettisia perussyitä siihen, miksi jotkin asiat toimivat.

Tässä tutkimuksessa haluttiin viivästetyn kokeen avulla seurata loppukokeen tuloksen pysyvyyttä. Ennakko-oletuksena oli, että 1,5 vuotta loppukokeen jälkeen pidetyssä viivästetyssä mittauksessa palataan alkukokeen tulosten mukaiseen asetelmaan. Viivästetyssä kokeessa oli tilastollista eroa ryhmien välillä koeryhmän hyväksi yhdessä tehtävässä kuudesta. Kuten tulokset osoittivat, koeryhmä oli edelleenkin kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipisteissä kontrolliryhmää parempi, vaikka koeryhmä oli alkumittauksessa näissä osioissa ryhmistä heikompi.

Koehenkilöiden herkkyys koeolosuhteille voi olla tutkimuksen ulkoisen validiteetin uhka. Esimerkiksi koetilaisuus saattaa vaikuttaa koehenkilöiden suorituksiin.

Oppimistulosten mittaaminen säännöllisesti kirjallisten kokeiden avulla oli tässä koulussa normaalia koulutyöhön liittyvää ja oppilaan taitojen kehittämiseen motivoivaa toimintaa, johon tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat tottuneet. Myös kontrolliryhmän oppilaille kerrottiin tutkimuksesta, ja heitä pyydettiin osallistumaan alku- ja loppukokeeseen. He siis tiesivät, että heidän tuloksiaan verrataan alkukokeeseen ja koeryhmän tuloksiin. Tämän oletettiin osaltaan kannustavan myös heitä ongelmatehtävien ratkaisemiseen ja niiden opiskeluun oppikirjan avulla, sillä opetusjaksohan pohjautui koe- ja kontrolliryhmien käytössä olevan oppikirjan asiasisältöihin.

Alkumittaus oli tässä tutkimuksessa lähtötasokoe, jolla kartoitettiin oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa. Kokeen tulosten näyttäminen oppilaalle kuuluu oppilaan oikeusturvaan ja sen tavoitteena on motivoida oppilasta tavoitteelliseen työskentelyyn.

11.2 Mittareiden luotettavuus

Metsämuurosen (2005, 45) mukaan tutkimuksen luotettavuus on suoraan verrannollinen mittarin luotettavuuteen ja näin ollen luotettavuustarkastelut ovat oleellinen osa tutkimusta.

Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävien luotettavuutta voidaan aluksi arvioida niiden kyvyllä erotella oppilaiden suorituksia. Tehtävien vastausprosenttien laskeminen auttaa tässä arvioinnissa. Tutkimuksessa käytettyjen koetehtävien vastausprosentit on esitetty taulukossa 26.

TAULUKKO 26 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävien vastausprosentit

Alkukoe														
	A1	A2	A3	A4	A5	B7	B8b	B9	B10	B11	B12	B13	B14	yht.
max	12	9	6	2	3	2	2	3	4	4	4	5	2	58
keskiarvo	7,13	6,38	3,11	1,13	1,06	0,80	0,72	1,80	2,69	2,30	1,82	3,12	0,71	32,77
ratk. %	59,4	70,9	51,8	56,7	35,3	39,9	36,0	60,1	67,3	57,5	45,4	62,3	35,6	56,5
Loppukoe														
	C1	C2	C3	C4	C5	D6	D8b	D9	D10	D11	D12	D13	D14	yht.
max	12	9	6	2	3	2	2	3	4	4	4	5	2	58
keskiarvo	8,47	6,80	3,72	1,41	1,51	1,54	0,58	2,02	2,73	1,32	2,19	1,90	1,11	35,29
ratk. %	70,6	75,5	61,9	70,7	50,3	76,9	29,0	67,5	68,1	32,9	54,8	38,1	55,3	60,8
Viivästetty koe														
	E1		E2			E3			E4		E5	E6		yht.
max	6		6			2			2		3	3		22
keskiarvo	3,50		2,40			1,79			1,50		2,42	0,57		12,19
ratk. %	58,4		40,1			89,4			75,0		80,8	18,9		55,4

Taulukosta 26 voidaan havaita, että koetehtävien vastausprosentit vaihtelivat alkukokeessa 35,3 – 67,3 %:n, loppukokeessa 32,9 – 76,9 %:n ja viivästetyssä kokeessa 18,9 – 89,4 %:n välillä. Yksikään tehtävä ei ollut kaikille otoksen oppilaille liian vaikea tai helppo. Jos näin olisi ollut, tehtävän vastausprosentti olisi lähennellyt sataa tai nollaa prosenttia, eikä tehtävä olisi erotellut oppilaiden suorituksia.

11.2.1 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen reliabiliteettikertoimet

Tutkimuksessa mittareina käytettyjen ongelmanratkaisukokeiden reliaabeliuden ja validiuden tarkastelua varten kokeille laskettiin reliabiliteettikertoimet (Cronbachin alpha-kertoimet). Alkukokeessa reliabiliteettikertoimeksi saatiin 0,884 (N = 52; liite 12) ja loppukokeessa 0,885 (N = 52; liite 13). Viivästetyn kokeen reliabiliteettikerroin oli 0,785 (N = 52; liite 14). Kertoimien perusteella kokeet mittasivat ongelmanratkaisutehtävien osaamista samansuuntaisesti, koska jokaisen kokeen reliabiliteettikerroin oli suurempi kuin 0,65. Yhdenkään tehtävän pois jättäminen ei nosta kokeiden alpha -kertoimia olennaisesti (liitteet 12, 13 ja 14). Mittarin luotettavuuden takaamiseksi huolehdittiin myös, että loppukokeen tehtäviä ei käsitelty ongelmanratkaisukurssilla.

Kokeisiin ja kurssille valittujen ongelmanratkaisutehtävien oli täytettävä myös seuraavat kriteerit: 1) tehtävien tuli edustaa monipuolisesti erilaisia ongelmatehtävätyyppejä (numeerisia, sanallisia, geometrisia), 2) niiden piti täyttää ongelman määritelmä (ks. luku 4.1) ja 3) niiden tuli olla ratkaistavissa 6.-luokkalaiselle opetetuin tiedoin ja taidoin.

Kokeiden tehtäville lasketusta faktorimatriisista (liite 10) voidaan todeta, että suuremman kuin 0,3 latauksen saivat alkukokeen pisteytykseen eritellyistä 48 tehtäväkohdasta 34, loppukokeen 52 tehtäväkohdasta 39 ja viivästetyn kokeen 18 tehtäväkohdasta 12 tehtäväkohtaa. Tämä osoittaa, että suurin osa tehtävistä selitti kokeen lopputulosta samansuuntaisesti, mikä osaltaan vahvistaa kokeiden ja tehtävien luotettavuutta. Vaikka jotkin tehtävät saivat matalia faktorilatauksia, yhdenkään tehtävän pois jättäminen ei nosta kokeiden alpha-kertoimia olennaisesti (liitteet 12, 13 ja 14). Kokeeseen valittujen tehtävien toimivuutta voidaan siis pitää hyvänä.

Mittarin validiuden arviointia varten oppilaiden koetulosten ja kutakin koetta lähinnä annettujen matematiikan todistusarvosanojen välille laskettiin Pearsonin korrelaatiokertoimet (taulukko 27).

TAULUKKO 27 Alku- ja loppukokeen korrelaatio koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden matematiikan arvosanaan

	Pearsonin korrelaatio kerroin	Tilastollinen merkitsevyys (2-tailed)	N
Alkukoe / Mat. arvosana; syksy 2003	0,681	0,000	52
Loppukoe / Mat. arvosana; syksy 2003	0,652	0,000	52
Viiv.koe / Mat. arvosana; kevät 2005	0,560	0,000	52

Kertoimien mukaan koe- ja kontrolliryhmän oppilaiden koetulokset ja syksyllä 2003 annettu matematiikan arvosana korreloivat alku- ja loppukokeessa tilastollisesti erittäin merkitsevästi (liite 21). Samoin viivästetyn kokeen tulos korreloi tilastollisesti erittäin merkitsevästi keväällä 2005 annettuihin arvosanoihin (liite 21). Tulos osoittaa osaltaan alku- ja loppukokeen validiuden mutta myös sen, että koesarjalla mitatuilla tuloksilla voidaan ennustaa oppilaan matematiikan kouluarvosanaa.

11.2.2 Alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen korrelaatiokertoimet

Alku- ja loppukokeiden sekä viivästetyn kokeen toimivuuden arviointia varten laskettiin niiden välille Pearsonin korrelaatiokertoimet. Taulukoon 28 on poimittu liitteestä 11 kokonaistulosten, ratkaisuosioiden ja perusteluprosessiosioiden väliset korrelaatiokertoimet ja tilastolliset merkitsevyydet.

TAULUKKO 28 Pearsonin korrelaatiokertoimet ongelmanratkaisukokeiden välillä

Pearsonin korrelaatiokertoimet (N = 52)	**Alkukoe / Loppukoe**	**Alkukoe / Viivästetty koe**	**Loppukoe / Viivästetty koe**
Kokonaistulos	0,679**	0,632**	0,701**
p-arvo	0,000	0,000	0,000
Ratkaisu	0,729**	0,540**	0,619**
p-arvo	0,000	0,000	0,000
Perusteluprosessi	0,568**	0,561**	0,631**
p-arvo	0,000	0,000	0,000

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$

Kertoimien mukaan alkukoe ja loppukoe sekä viivästetty koe korreloivat toistensa kanssa tilastollisesti merkitsevästi. Myös kustakin kokeesta eritellyt tehtävän ratkaisu- ja perusteluprosessiosiot korreloivat toistensa kanssa tilastollisesti merkitsevästi (liite 11).

11.3 Opetusmateriaalin arvioinnin ja haastattelujen luotettavuus

Eskolan ja Suorannan (1998, 210) mukaan kvalitatiivisia menetelmiä käyttäviä tutkijoita ja kvalitatiivisia tutkimuksia on arvosteltu luotettavuuskriteerien hämäryydestä. Heidän mukaansa aineiston analyysivaihetta ja luotettavuuden arviointia ei voi erottaa toisistaan yhtä jyrkästi kuin kvantitatiivisessa tutkimuksessa. Tämä ominaisuus on johtanut siihen, että laadullisen tutkimusaineiston validiteetin ja reliabiliteetin arviointiin on kehitetty erilaisia käsitteitä, jotka eroavat toisistaan. Eskolan ja Suorannan (1998, 211) mukaan validiteetti ja reliabiliteetti perinteisesti ymmärrettynä eivät sovellu kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuuden perusteiksi.

Esimerkiksi Guban ja Lincolnin (1989, 233–243) mukaan sisäistä validiteettia tarkastellaan vastaavuuvuuden *(credibility)* perusteella, ulkoista vailiditeettia siirrettävyyden *(transferability)* perusteella, reliabiliteettia luotettavuuden *(dependability)* perusteella ja objektiivisuutta vahvistuvuuden *(confirmability)* perusteella.

Vastaavuudella eli tutkimuksen totuusarvolla Guba ja Lincoln tarkoittavat sitä, että tulokset kuvaavat tutkittavien käsityksiä ja kokemuksia. *Siirrettävyydellä* ei tarkoiteta, kuten kvantitatiivisessa tutkimuksessa, tulosten yleistettävyyttä koko populaatioon vaan tulosten siirrettävyyttä vain samankaltaisiin ympäristöihin ja tilanteisiin. Oleellista on myös se, että siirrettävyys jätetään lukijan arvioitavaksi. Tutkijan on siis kuvattava tutkimuksensa niin hyvin, että siirrettävyyden arviointi on mahdollista.

Luotettavuuden arvioinnissa keskitytään tutkimuksen tarkasteluun kokonaisuutena sekä tuloksiin vaikuttaneisiin tekijöihin, joita ovat esimerkiksi ilmiön luonne, tutkimustilanne ja tutkija. Luotettavuuteen liittyy myös tutkimuksen tilannetekijöiden huomioiminen. Tulosten pysyminen samana ei ole aina mahdollista eikä realistista, sillä laadullisessa tutkimuksessa kohdataan usein vuorovaikutustilanne ja ilmiön kontekstin muuttuminen.

Vahvistuvuuden lähtökohtana on ajatus, että tietynasteinen subjektiivisuus on aina väistämätöntä, koska yhteistä todellisuutta ei ole (ks. luku 2.2.1). Vahvistuvuutta tarkasteltaessa arvioidaan tutkijan vaikutusta tuloksiin. Tällöin huomion kohteeksi joutuvat tutkijan rehellisyys, luotettavuus, uskottavuus ja riippumattomuus. Tutkijan on raportoitava tutkimusprosessinsa niin, että vahvistuvuus on lukijan arvioitavissa.

Eskolan ja Suorannan (1998, 210) mukaan laadullisen tutkimuksen arviointi voidaan pelkistää kysymykseksi tutkimusprosessin luotettavuudesta. Heidän mukaan lähtökohtana ovat tutkijan avoin subjektiviteetti sekä sen myöntäminen, että tutkija itse on tutkimuksensa keskeinen tutkimusväline ja pääasiallisin luotettavuuden kriteeri. Tämän vuoksi luotettavuuden arviointi koskee laadullisessa tutkimuksessa koko tutkimusprosessia. Eskola ja Suoranta (mts. 211–212) määrittelevät luotettavuuskriteereiksi uskottavuuden, siirrettävyyden, varmuuden ja vahvistuvuuden. Nimitykset ovat samantyyppisiä kuin edellä esitetyt Guban ja Lincolnin kriteerit, mutta sisällöltään ne ovat hieman erilaisia. Jo näiden määritelmien eroavaisuudesta voidaan huomata tämän luvun alussa mainittu kvalitatiivisten luotettavuuskriteerien erilaisuus ja se, että tutkimuskohde ja menetelmä vaikuttavat luotettavuus kriteerien valintaan.

11.3.1 Opetusmateriaalin ja opetuksen toteuttamisen arviointi

Opetuksessa käyttämäni opetusmateriaali oli itse laatimaani. Arvioin myös itse oppituntien toteutumista kokemukseni ja videotallenteiden perusteella. Opetusmateriaali ja opetus osoittautuivat toteuttamiskelpoisiksi, samoin opetuksen integroiminen eri oppiaineisiin suunnittelemallani tavalla. Toteuttamiskelpoisuutta ilmentänee myös kustantajan päätös julkaista oppikirja laatimani opetusmateriaalin pohjalta. Tuntikohtaiset arvioni pohjautuvat noin kymmenen vuoden kokemukseen opettajantyöstä.

Olen pyrkinyt raportoimaan edellä mainitut arviointikohteet mahdollisimman tarkasti. Näiden syvällisempi luotettavuustarkastelu tässä yhteydessä olisi mielestäni liian subjektiivista, ja jätänkin arvioinnin kvalitatiivisen luotettavuustarkastelun hengen mukaisesti lukijalle.

11.3.2 Haastattelujen luotettavuus

Haastattelujen luotettavuuden arvioinnissa tukeudun seuraaviin laadullisessa tutkimuksessa käytettäviin näkökohtiin. Kvalen (1996, 235) mukaan luotettavuustarkastelu ei saisi olla vain erillinen luku tutkimusraportissa, vaan luotettavuuden tulisi näkyä koko tutkimuksen ajan. Vastaavasti Hirsjärvi ja Hurme (2000, 184) toteavat haastattelututkimuksesta, että haastattelun laatua tulisi tarkastella tutkimuksen eri vaiheissa. Haastatteluaineiston luotettavuus riippuu juuri sen laadusta. Laatu kärsii, jos vain osaa tutkittavista on haastateltu, tallenteiden kuuluvuus on huono, haastattelujen litterointi ei ole säännönmukaista tai niiden luokittelu on sattumanvaraista. (Mts. 185.)

Hirsjärvi ja Hurme (2000) toteavat, ettei luotettavastikaan toteutetussa haastattelututkimuksessa välttämättä saada kahdella tutkimuskerralla samoja tuloksia. Tämä on mahdollista, jos myönnetään, että ihmisen käyttäytyminen riippuu kontekstista ja siis vaihtelee ajan ja paikan mukaan. Samojen koehenkilöiden peräkkäisten haastatteluiden ero voi siis olla pikemminkin seurausta muuttuneista tilanteista kuin menetelmän heikkoudesta. (Mts. 186.)

Koska tarkastelen teemahaastattelujen luotettavuutta, käytän Kvalen (1996, 235–237) reliabiliteetti- ja luotettavuusmäärittelyjä. Kvale on perehtynyt juuri haastattelututkimusten luotettavuuden arviointiin.

Reliabiliteetti liittyy Kvalen mukaan tutkimustulosten johdonmukaisuuteen. Haastattelukysymykset, litteroinnin ja haastattelujen analysoinnin luotettavuus, haastattelutekniikan hallinta ja haastattelijan menettely johdattelevien kysymysten kohdalla vaikuttavat reliabiliteettiin. Kvale (mts. 236) toteaa kuitenkin, että liiallinen reliabiliteetin korostaminen saattaa estää subjektiivisuutta sekä vaihtelevien ja innovatiivisten tulosten ilmenemistä.

Reliabiliteetin parantamiseksi tuloksia trianguloitiin vertaamalla koetuloksia haastattelutuloksiin. Näin pyrittiin varmistamaan tulosten johdonmukaisuus. Haastattelu toteutettiin välittömästi opetusintervention jälkeen, ja oppilaalla oli muistinsa tukena kurssilla tekemänsä ratkaisuvihko. Loppukokeen tulokset eivät olleet vielä oppilaan eivätkä haastattelijan tiedossa. Sama etukäteen testattu teemahaastattelurunko (liite 9) ja samankaltaiset toimintatavat jokaisessa haastattelussa takasivat sen, että kaikkien oppilaiden kanssa keskusteltiin samoista aiheista. Haastattelukysymysten laadinnassa sovellettiin Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 131) ehdottamia keinoja lasten haastattelun helpottamiseksi. Heidän mukaansa kysymyksessä voidaan esittää kaksi vaihtoehtoa, esimerkiksi *Käytitkö tässä (tehtävässä) ratkaisukarttaideaa? Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?* Myönteinen toiminta esitettiin Hirsjärven ja Hurmeen ehdotuksen mukaisesti ennen kielteistä: *Mistä pidit kurssilla? Mistä et pitänyt kurssilla?* Jokainen haastattelu myös videoitiin samalla kameralla ja samasta suunnasta, joten ne ovat laadultaan samanlaisia. Yhtäkään haastattelua ei jouduttu hylkäämään äänen tai kuvan epäselvyyden vuoksi, vaan kaikki haastattelut pystyttiin myös litteroimaan. Haastatteluun käytetty aika osoittautui sopivaksi, koska kukaan haastatelluista ei vilkuillut kelloa tai kysynyt, kuinka kauan haastattelu vielä kestää. Kysymykset osoittautuivat oppilaiden kehitystasolle sopiviksi, sillä he ymmärsivät kysymykset viimeistään muutaman tarkentavan lisäkysymyksen avulla. Motivointi ei osoittautunut ongelmaksi, vaan lapset lähtivät helposti keskusteluun mukaan. Tosin joukossa oli niukkasanaisia oppilaita, joille esitin tarkentavia lisäkysymyksiä selkeämmän vastauksen saamiseksi. Pyrin kuitenkin välttämään oppilaiden johdattelua. Kaiken kaikkiaan koeryhmän oppilaat osasivat kertoa mielipiteensä haastattelulle asetetun tavoitteen mukaisesti: oppilaiden vastauksista pystyttiin muodostamaan yleiskuva oppilaiden suhtautumisesta ja motivoitumisesta opetusjakson sisältöön.

Haastattelututkimuksen *validiteettiin* liittyy Kvalen (1996, 236–237) mukaan seitsemän näkökohtaa. Näitä aspekteja ovat: 1) Tutkimuksen teema *(thematizing)*, jolla tarkoitetaan tutkimuksen teoreettisten olettamusten loogista johtamista teoriasta tutkimusongelmiksi. 2) Tutkimusasetelma *(designing)*. 3) Haastattelu *(interviewing)*, jonka validiteetti liittyy toiminnan ja toteutuksen luotettavuuteen ja itse haastattelun laatuun. Haastatteluun pitäisi sisältyä kysymyksiä, joilla varmistetaan, että kysymykset on ymmärretty oikein. 4) Litterointi *(transcribing)*, jonka myötä on pohdittu miten suullinen ilmaisu muutetaan kirjoitetuksi kieleksi. 5) Analysointivaihe *(analyzing)*, jossa haastattelujen litterointiin on valittava perusteltu käsittelytapa. 6) Vahvistaminen *(validating)*, jolla tarkoitetaan sitä, että tehdyt tulkinnat saavat tukea toisista vastaavaa ilmiötä tarkastelleista tutkimuksista ja että niitä on esitelty tiedeyhteisössä. 7) Raportointi *(reporting)*, joka sisältää kysymyksen siitä, vahvistaako tutkimusraportin lukeminen lukijaa tutkimuksen luotettavuudesta.

Tämän *tutkimuksen teeman* ja *tutkimusasetelman* olen esitellyt ja tehdyt valinnat perustellut luvuissa 8 ja 9, joten en käsittele niitä enää tässä yhteydessä.

Haastattelemalla kaikki koeryhmän oppilaat pyrittiin varmistamaan aineiston laatu ja tulosten luotettavuus. Haastattelujen toteutuksen esittelin jo edellä reliabiliteettitarkastelun yhteydessä. Kaikki haastattelut *litteroitiin* siten, että oppilaiden ja haastattelijan sanalliset ilmaisut kirjoitettiin tekstiksi videotallenteiden avulla. Koska haastattelut pohjautuivat oppilaiden kokemuksiin opetusinterventiosta, niin osaltaan myös tutkimuksen luotettavuuden parantamiseksi tuntisuunnitelmat, arvioni tuntien toteutumisesta ja kurssilla käsitellyt tehtävät ovat raportoitu luettaviksi tutkimukseen.

Haastattelujen *analysointi* tapahtui litteroinnin jälkeen. Oppilaiden haastatteluvastaukset luokiteltiin kysymysrungon avulla positiivisiin, neutraaleihin ja negatiivisiin sen mukaan, kuinka kukin oppilas oli vastannut kysymyksiin. Haastattelujen perusteella muodostettiin vastaus tutkimuksen kolmanteen tutkimusongelmaan: Miten oppilaat suhtautuivat integroituun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opiskeluun? Lisäksi jokaisen koehenkilön vastauksia vertailtiin hänen alku- ja loppukokeessa saamiinsa pistemääriin.

Tutkimuksen haastattelutulosten ja muidenkin tulosten *vahvistaminen* toteutui, kun tutkimukseni ohjaajat lukivat tutkimusraportin ennen sen lopullista valmistumista. Esittelin otteita haastatteluista ja niiden tulkinnoista myös alan kotimaisissa ja ulkomaisissa seminaareissa ja konferensseissa sekä arviointiprosessin läpi käyneissä artikkeleissani [esim. Leppäaho & Ahtee 2005; Leppäaho 2005a ja 2005b; Leppäaho *(painossa)*].

Haastattelujen ja niiden perusteella saatujen sekä niistä johdettujen tulosten *raportoinnin* olen pyrkinyt suorittamaan mahdollisimman yksityiskohtaisesti. Kaikki haastattelujen litteroinnit ovat luettavissa liitteenä 9. Myös haastattelun kuvaus ja haastattelukysymykset on esitetty raportoinnissa.

Haastattelumateriaalin analyysissa ja johtopäätösten teossa ei kuitenkaan voi olla näkymättä subjektiivisuuteni tutkijana ja opettajana. Alasuutari (2005, 149) toteaakin, ettei tutkija voi koskaan haastattelutilanteessa irrottautua kokonaan omista näkemyksistään tai tulkinnoistaan tutkittavan ilmiön suhteen. Tutkimusraportissa tämä ilmenee lähinnä lähestymistavassani: luokanopettajan työtä tehneenä näen matematiikan ja muut oppiaineet tasavertaisina, joihin voi liittää monin eri tavoin ongelmanratkaisua. Haastattelujen perusteella saatujen tulosten objektiivisuutta voidaan toki arvioida. Laadulliselle tutkimusotteelle tyypillisen haastatteluanalyysin tulos on kuitenkin nähtävä *tässä* tutkimuksessa mukana olleiden oppilaiden kokemusten ja mielipiteiden subjektiivisena kuvauksena.

12 POHDINTA

Tutkimukseni tavoitteena oli selvittää, kuinka oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa voitaisiin opettaa ja kehittää peruskoulussa. Lähdekirjallisuuden pohjalta pääteltiin, että matemaattinen ongelmanratkaisutaito koostuu eri osa-alueista, joiden huomioiminen opetuksessa vaatii monipuolisuutta. Tutkimuksen teoriataustan pohjalta suunniteltiin oppimisympäristö, joka toteutettiin matemaattisen ongelmanratkaisukurssin avulla. Kurssi sisälsi 30 oppituntia, jotka opetettiin 1,5 kuukauden aikana 6.-luokkalaisista koostuvalle koeryhmälle (N = 17). Opetus toteutettiin oppiaineita integroiden matematiikan, äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon tunneilla.

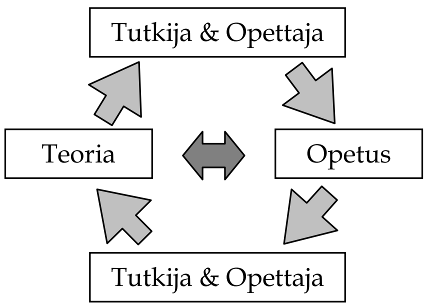
Tutkimuksen avulla pyrittiin kaventamaan tutkijoiden ja opettajien välistä kuilua, sillä esimerkiksi Tynjälän (2004, 186–187) mukaan tutkimus ja opetuksen ammattikulttuuri ovat toisistaan erillään eivätkä ne kohtaa toisiaan kovin usein. Myös Wittmann (2001) pitää matematiikan opetuksen ja oppimisen teorioiden kehittämisessä erityisen tärkeänä sillan rakentamista teorian ja käytännön opetuksen välille. Tämä vaatisi hänen mukaansa systemaattisen ja pitkäjänteisen yhteistyön aikaansaamista tutkijoiden ja opettajien välille. Wittmann esittääkin luotavaksi toimintaympäristöä, jossa tutkimus, tieteellinen tieto, ammattitieto ja opetus ovat tiiviissä vuorovaikutuksessa keskenään.

Tässä tutkimuksessa teoreettisen viitekehyksen perusteella kehitettyjä ideoita, esimerkiksi suunniteltua opetusjaksoa, sovellettiin suoraan käytännön luokkatilanteeseen. Koeasetelmana käytetty kvasikokeellinen malli (koe- ja kontrolliryhmä, alku- ja loppumittaus sekä viivästetty mittaus) edustaa kvantitatiivista tutkimusmenetelmää. Vaikka kvasikokeellinen tutkimusasetelma tiedetään yleisesti ongelmalliseksi, sen valintaan kuitenkin päädyttiin, koska se on helposti sovellettavissa kouluympäristöön. Ongelmanratkaisun opetukseen liittyvissä tutkimuksissa sitä on käytetty usein apuna (esim. Kretschmer 1983; Montague, Warger & Morgan 2000; Hohn & Frey 2002; Schurter 2002; De Corte, Verschaffel ja Masui 2004), samoin opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa yleensä (esim. Jang 2006; Masui & De Corte 2005; Gordon & Debus 2002).

Alku- ja loppumittausta sekä viivästettyä mittausta varten laadittiin kolme matemaattisen ongelmanratkaisutaidon arvioimiseen tarkoitettua koetta, jotka reliabiliteettikertoimiensa mukaan mittasivat kokeiden ongelmanratkaisutehtävien osaamista samansuuntaisesti. Tutkimusaineistoa kerättiin myös kvalitatiivisin menetelmin. Koeryhmän oppilaiden haastattelujen ja heidän laatimiensa ratkaisuvihkojen avulla voitiin havainnoida oppilaiden kokemuksia ja tuotoksia toteutetulla opetusjaksolla. Kvantitatiivisten ja kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien yhdistäminen mahdollisti tulosten vertailun triangulaation avulla. Tämä menettely osoittautui antoisaksi tulosten analysointivaiheessa, sillä kvalitatiivinen aineisto toi syvyyttä oppilaiden koetulosten selittämiseen ja toteutetun opetusintervention arviointiin.

12.1 Kehitystutkimusmenetelmän toteutuminen

Tutkimusta ohjaavana tutkimusmenetelmänä käytettiin sovellettua muotoa opettamisen kehittämistutkimusmenetelmästä *(design-research*; Edelson 2002*)*. Se tarjosi tähän tutkimukseen soveltuvan mahdollisuuden kokeilla ja arvioida teoriaa käytännössä ja pyrkiä kehittämään sitä edelleen kuviossa 49 esitetyn syklin mukaisesti. Teoreettisen viitekehyksen valinta tehtiin tutkijantyönä, jonka ohessa pilottikokeilujen avulla saatujen opetuskokemusten avulla teoriaa syvennettiin.



KUVIO 49 Tutkijan ja opettajan roolin yhdistyminen tutkimuksessa

Lopullinen teorian soveltaminen tapahtui tässä tutkimuksessa koeryhmälle toteutetun opetusintervention aikana, jolloin tutkija toimi opettajana. Tällöin eri teorioita testattiin ja arvioitiin opettajantyön näkökulmasta. Näin tutkimuksessa pyrittiin lähentämään teoriaa ja opetusta.

Etuna tällaisessa asetelmassa oli, että teorian soveltaminen opetukseen sekä opetuskokemusten havainnointi eri teorioihin vertaillen tapahtuivat ilman ”välikäsiä”.

Vaikeaa yhdistetyssä tutkijan ja opettajan roolissa oli tutkijan objektiivisuuden säilyttäminen. Minulle oli vaikeaa arvioida itse opetustani sekä sen vaikutusta oppimistuloksiin. Mikäli matemaattista ongelmanratkaisukurssia olisi ollut opettamassa useampi opettaja omille luokilleen, opettajan toiminnan vertailu olisi ollut mahdollista. Tosin olisi ollut hankalaa selvittää, omaksuvatko opetuksen toteuttajat tutkijan laatiman teorian ja sen soveltamisen opetukseen juuri sillä tavalla kuin tutkija on tarkoittanut. Tämä epävarmuus olisi ollut tässä tutkimuksessa ongelmallista, koska suunniteltua opetusinterventiota ei ollut vielä koskaan toteutettu kokonaisuudessaan, eikä sen toimivuudesta ollut tietoa. Edellä esitettyjen seikkojen sekä käytännön realiteettien ja resurssien vuoksi päädyin tutkimuksessa toteuttamaani ratkaisuun.

Rooliani tutkijana ja opettajana on kuitenkin syytä tarkastella myös kriittisesti. Kvantitatiivisessa tutkimusotteessa korostetaan tutkijan objektiivisuutta, kun taas kvalitatiivisessa tutkimuksessa tutkija hyväksytään tiedon keruun instrumentiksi. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa tiedostetaan, että tutkijan arvoilla, oletuksilla, uskomuksilla ja tiedoilla on vaikutusta tutkimusmenetelmien valintaan, tiedon keruuseen, tulosten raportointiin ja tutkimuksen toistettavuuteen. Siksi on kvalitatiivisen tutkimuksen hengen mukaisesti tärkeää tunnustaa, että tutkimuksessa ja sen tuloksissa on aina mukana myös tutkijan vaikutus (Lankshear & Knobel 2004, 74).

Wellington (2002, 20) luokittelee taulukossa 29 omaa työtään tutkivan opettajan kohtaamat *(Practitioner research)* edut ja ongelmat seuraavasti:

TAULUKKO 29 Opetusta tutkivan opettajan mahdollisesti kohtaamat edut ja ongelmat Wellingtonia (2000, 20) mukaillen

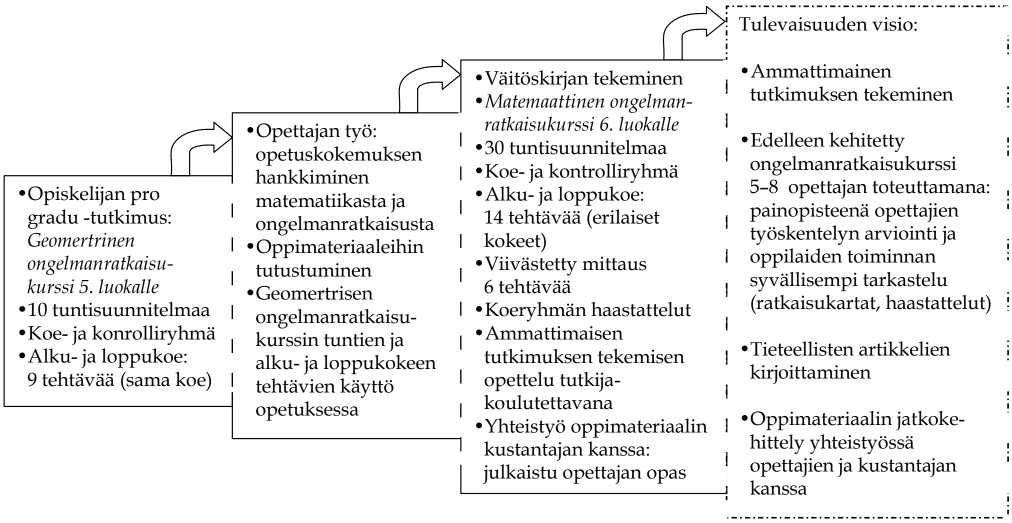
Mahdolliset edut	**Mahdolliset ongelmat**
Aiempi tieto ja kokemus kontekstista (sisäpiirin tieto)	Ennakkokäsitykset ja ennakkoluulot aiheesta
Ammattilaisen näkemys tilanteista ja ihmisistä	Ennakkoluuloton ja ulkopuolinen tutkijan rooli puuttuu
Tutkimuskohteen ympäristöön on vaivatonta päästä sisään ja siihen on helppo sopeutua	Ajan puute (jos tutkija on koulussa samanaikaisesti myös opetustyössä). Tunnettavuus saattaa aiheuttaa myös tutkimusta häiritseviä ja sitä ohjaavia tekijöitä
Hyvät henkilökohtaiset suhteet esim. toisiin opettajiin ja oppilaisiin	”Profeetan omalla maallaan” on vaikeaa raportoida tai antaa negatiivista palautetta
Ammattilaisen näkemys saattaa auttaa tutkimuksen suunnittelussa, etiikassa ja raportoinnissa	Koulun henkilökunnan asenteet ja ennakkoluulot tutkijan roolia kohtaan
Tuttavallisuus	Tuttavallisuus

Kaikki Wellingtonin mainitsemat ongelmat (taulukko 29) eivät koskeneet tutkimustyötäni sillä en toiminut vakituisena opettajana kyseisessä koulussa, joten sain keskittyä itse ongelmanratkaisukurssin tuntien toteuttamiseen. Koe- ja kontrolliryhmän oppilaat olivat minulle aluksi vieraita, mutta koulun opettajat tunsin toki entuudestaan, joten yhteistyö opettajien kanssa sujui heti alusta alkaen vaivattomasti.

Kokemukseni opetustyöstä ei voinut olla vaikuttamatta opetusjakson suunnitteluun ja toteutukseen sekä tekemiini arvioihin opetusjakson tunneista. On myös tärkeää pohtia millainen vaikutus koko tutkimushankkeella ja omalla asenteellani matemaattista ongelmanratkaisua kohtaan oli tutkimuksen toteuttamiseen ja siten myös sen tuloksiin. Voidaan myös kysyä, olisivatko kontrolliryhmän tulokset olleet erilaisia, mikäli heillekin olisi järjestetty opetusjakso, joka tosin olisi edennyt oppikirjan mukaisesti ilman integrointia, ratkaisukarttamenetelmää ja laadittua oppimateriaalia. Näihin kysymyksiin ei tämä tutkimus kykene antamaan vastausta. Tutkimuksen avulla valmistetun ja testatun materiaalin avulla opetus on kuitenkin toteutettavissa sisällöltään samanlaisena. Suunnitteilla olevassa jatkotutkimuksessa tarkoituksenani onkin toteuttaa kurssi useamman opettajan opettamana, jolloin opettajan työskentelyn arviointi on objektiivisempaa ja tuloksellisesti antoisampaa.

Kehittämistutkimusmenetelmä korostaa design-ratkaisun lisäksi kehittämisprosessin aikaansaamista (Design–Based Research Collective 2003). Tämä tutkimus itsessään on ollut kehittämisprosessi, jonka aikana olen selvittänyt ja oppinut matemaattisen ongelmanratkaisunopetuksen teoriaa ja käytäntöä sekä niiden yhdistämistä. Kehittämistutkimuksessa yhdistetään kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia tutkimusmenetelmiä, jotta saadaan monipuolista tietoa opetuksellisen innovaation toimivuudesta (Design–Based Research Collective 2003). Keino otettiin käyttöön myös tässä tutkimuksessa. Sen avulla tarjoutui tilaisuus perehtyä eri tutkimusmenetelmiin ja selvittää niiden avulla esimerkiksi, kuinka teorian pohjalta kehitetty matemaattinen ongelmanratkaisutaidon opetus toimii koulussa käytännössä. Kehittämistutkimusmenetelmässä korostetaan myös tutkimukseen osallistujien roolia (Carr-Chellman & Savoy 2004, 704–705). Tässä tutkimuksessa koeryhmän mielipiteet opetusjaksosta huomioitiin haastattelujen avulla ja tuntisuunnitelmat arvioitiin opettajan ja myöhemmin myös oppimateriaalin kustantajan näkökulmista.

Tutkimusprosessi (kuvio 50) alkoi pro gradu -tutkielmasta, ja siinä on ollut vaiheita, joiden tarkoituksena on ollut kehittää niin tutkimusta kuin tutkijaakin. Vaiheet ovat yhdistyneet toisiinsa siten, että edellisen vaiheen hyväksi havaittuja kokemuksia on pyritty kehittämään edelleen seuraavassa vaiheessa. Esimerkiksi pro gradu -tutkimuksessa ja opettajantyössä toimivia koetehtäviä oli mukana sellaisenaan ja edelleen kehiteltyinä tämän tutkimuksen alku- ja loppukokeissa. Tuntisuunnitelmien laadintamalli ja tutkimuksen koeasetelma koe- ja kontrolliryhmineen ovat olleet edellisen tutkimuksen perintöä. Oppiaineiden integrointi, oppituntien lisääminen, oppimateriaalin laatiminen, viivästetty koe ja koeryhmän oppilaiden haastattelu ovat olleet tässä tutkimuksessa niitä keinoja, joilla on ollut tarkoitus kehittää, syventää ja laajentaa edellistä tutkimusta. Tätä ovat edesauttaneet niin ikään tutkijan opetus- ja tutkimuskokemuksen karttuminen sekä asiantuntijoiden osallistuminen tutkimuksen ohjaamiseen ja kehittämiseen.



KUVIO 50 Kehittämistutkimusprosessi ja visio sen jatkamisesta

Opettajantyössä toteutettujen ongelmanratkaisun opettamiseen liittyvien kokemusten sekä tätä tutkimusta varten tehtyjen pilottikokeilujen kautta edettiin itse tutkimuksen toteuttamiseen. Oppimateriaalin valmistus on myös tämän kehittämistutkimuksen tuotos. Tutkimuksessa käytetyt tuntisuunnitelmat ja tehtävät työstettiin edelleen yhteistyössä kustantajan kanssa julkaistuksi oppimateriaaliksi. Tässä vaiheessa kustantajan asiantuntevat neuvot huomioitiin ja opettajan oppaaseen tehtiin seuraavia muutoksia: 1) Kirjan alkuun lisättiin tietoa tutkimuksesta ja annettiin lyhyt ohjeistus oppaan käytöstä sekä matemaattisen ongelmanratkaisun opetuksesta. 2) Tuntisuunnitelmaehdotukset sijoitettiin aihepiireittäin kirjan alkuun ja numeroidut tehtävämonisteet ratkaisuineen kirjan loppuun. 3) Lisäksi opettajan oppaasta jätettiin pois Pythagoraan lauseen opetus, koska se ei kuulu vielä 6. luokan opetussuunnitelmaan. Näin tämän kehittämistutkimuksen tulokseksi saatiin konkreettinen artefakti (esim. Edelson 2002, 118–119; Wood & Berry 2003, 195–196).

Edellisen tutkimuksen opetusinterventio laajeni tässä tutkimuksessa matemaattiseksi ongelmanratkaisukurssiksi, jossa pyrittiin luomaan oppimisympäristö oppiaineiden integroinnin ja laaditun oppimateriaalin avulla. Tutkimuksen eri osa-alueiden kehitysprosessia voidaan jatkaa tulevaisuudessa tämän tutkimuksen kokemusten ohjaamana. Neuvottelut työn ohjaajien ja oppimateriaalin kustantajan kanssa tuottivat mm. seuraavia tulevaisuuden visioita:

Tutkimuksellinen ja koulutuksellinen kehittäminen:

- Toteutetaan laajempi tutkimus 5−8 opettajan avulla, jotka opettavat luokissaan opettajan oppaan mukaisesti. Videoitujen oppituntien avulla on mahdollista vertailla objektiivisesti eri opettajien toimintaa. Palaute kurssin sisällöstä ja toimivuudesta saadaan haastattelemalla tutkimuksessa mukana olevat opettajat ja oppilaat.
- Tutkitaan kvalitatiivisin menetelmin muutaman oppilaan toimintaa opetusjakson aikana. Videoidaan näiden oppilaiden ongelmanratkaisutilanteita ja selvitetään, mitä he ajattelivat ratkaistessaan ongelmatehtäviä. Kehitetään oppilaiden vihkoihinsa tekemien ratkaisukarttojen analysointiin toimiva menetelmä.
- Järjestetään opettajille koulutusta (esim. VESO-koulutuspäivät), jossa opettajat perehdytetään ongelmanratkaisun opetukseen ja sen taustateoriaan.

Oppimateriaalin kehittäminen
- Suunnitellaan luokille 4–6 omat oppikirjat, joiden avulla luodaan pohjaa pitkäjänteiselle ongelmanratkaisun opetukselle.
- Suunnitellaan oppiaineisiin integroitua matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opetusta myös luokille 7–9. Tällöin eri oppiaineiden ongelmanratkaisunopetukseen soveltuvat aihealueet muokataan yhtenäiseksi kokonaisuudeksi ja oppimateriaaliksi, jonka mukaan eri aineiden opettajat etenevät.
- Muokataan ongelmanratkaisukurssi osaksi muuta oppimateriaalia, jolloin se sijoitetaan yhdeksi luvuksi oppilaan matematiikan kirjaan. Näin saadaan tuotua ongelmanratkaisunopetusta kouluihin edullisesti. Muiden aineiden opetukseen liittyvä materiaali, esimerkiksi laivanrakennusprojekti, voidaan yhdistää opettajan oppaaseen erillisenä liitteenä.

Jos tämän tutkimuksen opetusjaksoa toteutettaisiin uudelleen, sisällöllisesti kurssia ei kannattaisi enää laajentaa, vaan opetuksen toteutukseen käytettävää aikaa olisi mieluummin lisättävä, jotta oppimista voitaisiin syventää. Oppilaiden haastattelupalautteen mukaan kotitehtävien antoa olisi vähennettävä ja ryhmätyöskentelyyn sekä konkreettiseen tekemiseen käytettävää aikaa tulisi lisätä. Tutkimuksen syventämiseksi voitaisiin keskittyä opettajien opetuksen tutkimiseen ja vertailuun, koska kehitetty ja testattu opetusmateriaali olisi jo valmiina.

Oman työn tutkimuksessa on haasteensa, kuten jo aiemmin todettiin (taulukko 29), mutta myös yleiset hyötynsä. Esimerkiksi Lankshear ja Knobel (2004, 374) näkevät opettajien tekemät tieteelliset tutkimukset opettajan työn tulevaisuuden kannalta merkityksellisenä, sillä niiden avulla on mahdollisuus vaikuttaa poliittisiin päätöksiin ja taloudellisten resurssien suuntaamiseen.

Tämän tutkimuksen koulutuspoliittisena tavoitteena on osaltaan lisätä matematiikan ja ongelmanratkaisun opetusta kouluissa. Työssä toteutettu oppiaineiden suunnitelmallinen integrointi osoitti, että tuomalla matemaattista ongelmanratkaisun opetusta eri aineiden tunneille voidaan siihen käytettyä aikaa lisätä muiden aineiden opetuksen kärsimättä. Tämä lienee huomioimisen arvoinen seikka myös opettajankoulutuksessa. Tutkimuksen avulla kehitetty oppimateriaali on konkreettinen yritys helpottaa osaltaan opettajan työtä ja kannustaa häntä aloittamaan ongelmanratkaisunopetus luokassaan.

12.2 Opetusintervention ja tulosten arviointia

Ihmisen muisti on rajallinen, eikä 6. luokan oppilas kykene muistamaan ja samalla prosessoimaan mielessään suuria tietomääriä (Saariluoma 1990, 127–128). Tässä tutkimuksessa ratkaisukarttamenetelmä (luku 7) toimi oppilaiden muistin tukena, ja he pystyivät palaamaan tehtävän tietoihin ja vaiheisiin sekä havainnollistamaan apupiirroksin ongelman rakennetta. Kotovsky, Hayes ja Simon (1985) huomasivat, että ulkoiset muistin apuvälineet helpottavat huomattavasti itse ratkaisuprosessia. Koeryhmälle opetetun ratkaisukarttamenetelmän tavoitteena oli auttaa oppilasta havainnollistamaan ja prosessoimaan ongelmatehtäviä kirjoittaen ja apupiirroksin. Saatujen tulosten perusteella menetelmä näyttäisi parantavan oppilaiden suorituksia, ja se myös otettiin positiivisesti vastaan. Koeryhmän oppilaista 2/3 koki ratkaisukarttamenetelmän hyödylliseksi ja ratkaisuprosessia helpottavaksi.

Tätä tutkimustulosta tukee myös Hohnin ja Freyn (2002) tutkimus, jossa koeryhmän 3.–5. luokan oppilaat oppivat ratkomaan menestyksekkäästi ongelmatehtäviä heille opetetun strategian avulla. Lorenzon (2005, 33–36) tutkimuksessa 16–17-vuotiaille kemian opiskelijoille opetetussa ongelmanratkaisuheuristiikassa oli myös yritettävä kirjoittaa ongelmasta kartta, josta selviäisi, kuinka kysytty tieto ja tehtävässä annettu tieto liittyvät toisiinsa. Tulosten mukaan opiskelijat saivat menetelmästä käyttökelpoisen heuristiikan ongelmien ratkaisuun ja se auttoi heitä myös ymmärtämään ongelmanratkaisuprosessin vaiheita paremmin. Samoin Van Garderen ja Montague (2003) havaitsivat, että 6.-luokkalaisten oppilaiden visuaalis-spatiaalisten representaatioiden (apupiirrokset, diagrammit jne.) käytöllä oli merkitsevä yhteys oppilaan matemaattiseen ongelmanratkaisuun.

Syytä edellä mainittujen tulosten kaltaiseen yhteyteen selittää Hähkiöniemen (2006b, 2006c, 2006d) havainto siitä, että representaatioiden harjoittelu tarjoaa oppilaille työkaluja, joilla he voivat ajatella matemaattisia käsitteitä.

Tässä tutkimuksessa oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa pyrittiin kehittämään monipuolisesti. Idean tähän antoivat aiemmin tehdyt havainnot siitä, että pelkästään ongelmanratkaisustrategioiden opettaminen kehittää vain vähän itse ongelmanratkaisukykyä (esim. Schoenfeld 1992, 353–354; Lester & Kehle 2003, 508). Tulos on yhdenmukainen myös tutkimuksen teoriataustassa muodostetun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon määrittelyn kanssa, sillä *ongelmanratkaisumallit ja -strategiat* on vain yksi matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueista. Muita osa-alueita ovat *oppilaan motivoituneisuus ja muut affektiiviset tekijät, selektiivisyys, luku- ja kirjoitustaito, matemaattiset taidot sekä taito yhdistää ongelman tulkinta ja laskeminen kokonaisratkaisuksi*. Tässä tutkimuksessa käytettyjä keinoja eri osa-alueiden kehittämiseen esittelin luvussa 4.5. Niiden käyttökelpoisuuden puolesta puhuvat tutkimuksessa käytetyn loppukokeen tulokset. Ongelmanratkaisumallien ja -strategioiden opettamisessa onnistuttiin, jos tarkastellaan ratkaisukarttamenetelmän käyttöä. Oppilaat todella käyttivät ratkaisukarttaa vihkoissaan tehtävien ratkaisuun, ja koetulosten perusteluprosessipisteiden mukaan he oppivat soveltamaan menetelmää koetilanteessa. Tosin muiden strategioiden opettelu jäi muutamien esimerkkitehtävien varaan, eikä niihin ehditty paneutua opetuksessa juurikaan. Affektiivisista tekijöistä tässä tutkimuksessa seurattiin lähinnä oppilaiden motivoitumista, ja siinä oppiaineiden integrointi vaikutti tehokkaasti varsinkin niihin oppilaisiin, jotka eivät olleet pitäneet matematiikasta. Samoin kurssin tavoitteellinen luonne vahvisti useimpien oppilaiden motivaatiota. Luku- ja kirjoitustaitojen kehittäminen konkretisoitui useiden sanallisten tehtävien ratkaisemisessa, mutta parhaiten matematiikan verbalisointi onnistui ryhmätyöskentelyn avulla. Matemaattisten taitojen ja selektiivisyyden kehittämisessä sekä ongelman tulkinnan ja laskemisen yhdistämisessä kokonaisratkaisuksi onnistuttiin kohtuullisesti, mikäli tarkastellaan vain tämän opetusjakson sisältöjä ja tehtäviä. Nämä osa-alueet ovat kuitenkin niin laajoja kokonaisuuksia, että niiden opiskelu ja omaksumien perusteellisesti olisivat vaatineet huomattavasti pidemmän ajan. Toteutettu opetuskokeilu kuitenkin osoitti, että osa-alueiden huomioiminen opetuksessa on mahdollista etenkin oppiaineiden integroinnin avulla. Jo tässäkin laajuudessa toteutetulla matemaattisen ongelmanratkaisutaidon osa-alueiden huomioimisella näyttää todella olevan vaikutusta oppilaiden suorituksiin. Kaikkien osa-alueiden vahvistaminen tukee matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittymistä. Tämä tutkimustulos avannee näkökulmia matemaattisen ongelmanratkaisun kehittämiseen ja korostaa oppilaan oppimisympäristön monipuolisuuden merkitystä. Tukea johtopäätökselle antavat myös viimeaikaiset tutkimukset, joiden tavoitteena on ollut oppilaan oppimisympäristön huomioiminen. Esimerkiksi Depaepe, De Corte ja Verschaffel (2006) tutkivat, kuinka Verscaffelin ym. (1999) mukaiseen oppimisympäristön (ks. luku 5.5) toteuttamiseen suunniteltu oppikirja toimisi sanallisten ongelmantehtävien opettamisessa. Tulosten mukaan oppilaiden suoritukset olivat merkittävästi paremmat kuin aiemmassa Verscaffelin ym. (1999) tutkimuksessa, jossa käytettiin lähestulkoon samaa matemaattista ongelmanratkaisua mittavaa koetta. Syiksi oppilaiden parempiin tuloksiin Depaepe ym. (2006, 422) olettavat uudistetun oppikirjan ja aiempaa tutkimusta ongelmakeskeisemmän ohjeistuksen.

Oppimisympäristön luomisessa oppiaineiden integrointi (luku 6) toi ”väriä” matematiikkaan. Opetuksessa se osoittautui käyttökelpoiseksi motivointikeinoksi varsinkin sellaisille oppilaille, jotka eivät pitäneet matematiikasta. Integroinnin toteutuksen taustalla olivat Deweyn learning by doing -ajatus, Pirien ja Kierenin (1994) teoria mielikuvan muodostamisen tärkeydestä oppimisprosessissa sekä Martonin variaatioteoria (Marton & Pang 1999), jonka mukaan oppiminen perustuu käsitteiden ja kokemusten vertailuun erilaisissa yhteyksissä. Matematiikan ja ongelmanratkaisun opetuksen integroiminen matematiikan, äidinkielen ja kirjallisuuden, käsityön, kuvataiteen sekä ympäristö- ja luonnontiedon oppisisältöihin onnistuttiin toteuttamaan käytännössä koulun arjessa. Integroinnin avulla annettiin oppilaille mahdollisuus soveltaa eri aineissa opittuja tietoja ja taitoja ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan. Samalla tarjottiin virikkeitä erilaisten representaatioiden ja mielikuvien muodostamiseen sekä tilaisuuksia niiden ja matemaattisten käsitteiden yhdistämiseen.

Oppiaineiden integroimisesta on olemassa vain vähän empiirisiä tutkimustuloksia (Meier, Cobbs & Nicol 1998, 439; Pang & Good 2000, 73). Tämä tutkimus antaa yhden esimerkin integroidun opetuksen toteutusmahdollisuuksista. Lisäksi tutkimuksessa kehitetty integroinnin painopistekolmio (luku 6.4) on sovellettavissa muidenkin aiheiden integroinnin suunnitteluun ja toteutuksen arviointiin.

Haastatteluiden perusteella puolet koeryhmän oppilaista oli sitä mieltä, että kurssi integroituine sisältöineen ja materiaaleineen lisäsi heidän kiinnostustaan ongelmatehtäviin. Kuudesosa tosin arvioi kiinnostuksensa vähenneen ja kolmasosa totesi sen säilyneen ennallaan kurssin aikana. Valtaosan (65 %) mielestä kiinnostus matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun pysyi ennallaan kurssin aikana, 29 %:n mukaan lisääntyi ja 6 %:n mielestä kiinnostus laski.

Koeryhmän kokonaistulosten keskiarvotulos oli loppukokeessa tilastollisesti parempi kuin alkukokeessa, ja kaikki koeryhmän oppilaat paransivat tuloksiaan loppukokeessa. Alkukokeessa ryhmillä ei ollut tilastollista eroa, mutta pistemäärien mukaan kontrolliryhmä oli 2,3 % koeryhmää parempi. Loppukokeessa tulos oli 25,3 % koeryhmän eduksi ja ero oli myös tilastollinen. Tarkasteltaessa tuloksia ryhmien ratkaisupisteiden ja perusteluprosessista annettavien pisteiden osalta erikseen tilanne on sama: koeryhmä oli loppukokeessa kontrolliryhmää tilastollisesti parempi.

Viivästetty mittaus suoritettiin 1,5 vuotta myöhemmin alku- ja loppukokeista rakennetun ongelmanratkaisukokeen avulla. Viivästetyn kokeen tulosten mukaan ryhmillä ei ollut enää tilastollista eroa. Kokonaispisteitä koeryhmä sai kuitenkin 14,7 % enemmän kuin kontrolliryhmä. Sen sijaan numeerisessa ongelmatehtävässä (liite 4; E1) koeryhmä oli edelleen kontrolliryhmää parempi myös tilastollisesti. Kyseisessä tehtävässä oppilaan oli ratkaistava, kuinka numeerinen lukusarja jatkuu, ja kirjoitettava sille perustelu.

Tulosten valossa voidaan sanoa, että opetus matemaattisella ongelmanratkaisukurssilla ja sen avulla luotu oppimisympäristö kehittivät tämän tutkimuksen koeryhmän matemaattisia ongelmanratkaisutaitoja. Koetulosten mukaan perusteluprosessin kirjoittamisella ja ratkaisun oikeellisuudella oli selvä yhteys: kontrolliryhmässä perusteluprosessitulos laski hieman ja ratkaisupisteet nousivat vain hieman loppukokeessa, mutta koeryhmässä tapahtui molemmilla osa-alueilla voimakas tilastollinen parannus.

Matemaattisen kirjoittamisen opettelu oli kuitenkin vaikeaa koeryhmän oppilaille. Oppilaiden käsitys, että matematiikka on vain numeerista laskemista, oli silti vahva. Hyvä matemaattisen kirjoittamisen harjoittelumuoto oli antaa oppilaiden itse laatia sanallisia ongelmatehtäviä. Esimerkiksi Fordin (1990) tutkimuksen mukaan oppilaat oppivat tällä tavoin tunnistamaan ongelmatehtävien rakenteen, etsimään tehtävästä olennaiset tiedot ja pystyivät myös ratkaisemaan vaikeampia ongelmia kuin aikaisemmin.

Koko otos jaettiin alkumittauksen perusteella kolmeen tasoryhmään: heikkoihin, keskitasoon ja hyviin. Kaikki tasoryhmät paransivat tuloksiaan loppukokeessa. Oppilaan haastattelussa ilmaisema positiivinen asenne ratkaisukarttamenetelmään sekä lisääntynyt kiinnostus ongelmatehtäviin, ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan oli yhteydessä koetulosten parannuksiin. Nämä tulokset viittaisivat siihen, että erityisesti heikommat oppilaat hyötyisivät ja motivoituisivat toteutetusta oppimisympäristöstä, jossa matematiikkaa ja ongelmanratkaisua integroidaan muidenkin oppiaineiden opetukseen.

On tietysti mahdotonta osoittaa, että koeryhmän tulosten parantuminen johtuisi ainoastaan suoritetusta opetuskokeilusta. Opetuskokeilun tuloksiin liittyvissä kasvatustieteellisissä tutkimuksissa oppilaaseen vaikuttavien eri muuttujien (opettajat, koti, vanhemmat, ystävät, jne.) rajaaminen ja yhden muuttujan vaikutuksen selvittäminen kokonaistulokseen on lähestulkoon mahdotonta. Kuitenkin kouluympäristön muutokset olivat koe- ja kontrolliryhmän oppilailla samanlaisia: he siirtyivät samalta alakoululta samaan yläkouluun. Oppilaiden elämässä ei myöskään tapahtunut mitään merkittäviä muutoksia, jotka olisivat tulleet tutkijan tai heitä opettavien opettajien tietoon.

Matemaattista ongelmanratkaisukurssia varten laaditulle oppimateriaalille asetettiin tavoitteeksi, että siinä olevista tuntisuunnitelmista, kokeista, tehtävistä ja ohjeista olisi opettajille todella konkreettista apua ja hyötyä ongelmanratkaisun opetuksessa. Tämä tavoite saavutettiin, sillä tutkimuksessa käytetyistä tuntisuunnitelmista ja tehtävämonisteista julkaistiin opettajanopas, joka on vapaasti opettajien saatavilla (Leppäaho 2004b).

Toimivaa oppimisympäristöä ei luoda kuitenkaan pelkän oppimateriaalin avulla. Opettajan on myös tiedettävä, mitä opetetaan, miksi opetetaan ja miten opetetaan. Oppikirjat ja -materiaalit onkin ymmärrettävä kirjantekijöiden tulkinnoiksi opetussuunnitelmista. Tosiasia on, ettei oppikirja tai -materiaali kuitenkaan sido opettajaa millään tavalla, jollei hän itse päätä sitoutua siihen. Vertauskuva ”oppikirja on opettajan lapio” kuvaa hyvin oppikirjan roolia opetuksessa: lapio on oiva apu ojan kaivamisessa, mutta se ei määrää, mihin oja kaivetaan tai miten leveä tai syvä siitä tehdään. (Ahtee & Pehkonen 2000, 16).

Opettajana kokemukseni ongelmanratkaisun ja ratkaisukarttamenetelmän opetuksesta olivat seuraavanlaisia. Keskeistä oli matematiikan sanallistaminen ja kirjoittaminen. Oppilaille oli annettava aikaa ja heitä oli kannustettava puhumaan ja kirjoittamaan matematiikkaa. Tätä näkökulmaa tukee myös Glassin ja Maherin (2004) tutkimus, jossa analysoitiin opiskelijoiden ongelmanratkaisutehtävien ratkaisujen perusteluja. Glass ja Maher havaitsivat, että ongelmanratkaisutehtävien perustelujen oppimisessa on tärkeää tarjota oppilaalle monipuolisia tilaisuuksia osallistua kirjoittamalla ja puhumalla ideoiden vaihtoon. Opettajan rooli oppilaiden motivaation herättäjänä ja säilyttäjänä on ensiarvoisen tärkeää opetustyön kannalta. Tavoitteenani oli luoda koeryhmän oppilaisiin sellainen pedagoginen suhde, että he kokisivat minut matemaattisen ongelmanratkaisutaitonsa valmentajana ja ohjaajana. Tulosten perusteella tämä näyttäisi onnistuneen, ja haastattelujen perusteella suurin osa piti toteutetusta ongelmanratkaisukurssista. Tosin tämä ei välttämättä johdu roolistani, vaan ehkä pikemminkin opetusjakson sisällöstä ryhmätyöskentelyineen ja konkreettisine tekemisineen.

Matemaattisiin aineisiin liittyvää matematiikkapelkoa (Newstead, 1998, 54; Huhtala 1999, 9) voidaan osaltaan ehkäistä tutkimuksessa toteutetuilla menettelytavoilla. Ensinnäkin ratkaisukartan tarjoaman järjestelmällisen menetelmän avulla voidaan aloittaa lähes jokaisen ongelmatehtävän ratkaiseminen ja vähentää siten oppilaiden epävarmuuden tunnetta. Toiseksi ratkaisukartan laatimiseen liittyvä ajatus, että virheellisetkin vastaukset huomioidaan myönteisesti oikeiden ratkaisujen saavuttamisen välivaiheina, kannustaa oppilaita yrittämään ongelmatehtäviin erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Oppimista lamauttavaa virheiden pelkoa tulisikin pyrkiä vähentämään. Tekeväthän myös taitavat matemaatikot ratkaisuja kehitellessään yrityksiä ja erehdyksiä (Stylianou 2002). Liian usein koulumatematiikassa unohdetaan, että myös väärät vastaukset kuuluvat matematiikan opiskeluun.

Tässä tutkimuksessa jouduttiin paneutumaan varsin laajoihin teoreettisiin kokonaisuuksiin, kuten opetukseen, oppiaineiden integrointiin, matemaattiseen ajatteluun ja ongelmanratkaisuun. Kehittämistutkimusmenetelmän soveltaminen, samoin kuin kvasikokeellinen koeasetelma sopivat mielestäni hyvin opetuksen tutkimukseen ja sen kehittämiseen. Koska tämän tutkimuksen juuret juontavat jo 1990-luvun pro gradu -tutkielmaani, koin vaikeaksi irrottautua vanhoista teorialähteistäni (esim. Polya, Schroeder & Lester, Moses, Mason, Krutetskii). Mielestäni kehittämistutkimus sitoo tutkijan lähteisiin, joista hän on aloittanut tutkimuksen toteuttamiseen johtavan ajattelun ja toiminnan. Aivan tuoreiden teorioiden ja ideoiden soveltaminen suoraan suomalaiseen kouluun voi ajatuksena tuntua mielenkiintoiselta. Niiden käytäntöön vieminen saattaa kuitenkin osoittautua hankalaksi ja jopa kohtalokkaaksi tutkimuksen toteuttamisen kannalta. Harkitsinkin pitkään hyötyjä ja riskejä, ennen kuin sisällytin tutkimukseeni oppiaineiden integroinnin ja oppimateriaalin kehittämisen. Mielestäni näiden mukaanotto kuitenkin kannatti, vaikka työmäärä tuntuikin ajoittain valtavalta. Valitsemani teorian pohjalta toteutettu uusi oppimisympäristö osoittautui kokonaisuutena toteuttamiskelpoiseksi. Oppilaat suhtautuivat siihen pääasiassa positiivisesti, ja tämän tutkimuksen tulosten valossa oppilaiden ongelmanratkaisutaidot kehittyivät.

12.3 Jatkotutkimusehdotuksia

Ehdotuksia jatkotutkimukselle syntyi tutkimuksen aikana ja sen jälkeen, ja niitä olenkin jo alustavasti esitellyt luvussa 12.1. Tutkimusta voitaisiin jatkaa kehittämistutkimuksen hengessä kokeilemalla toteutettua matemaattista ongelmanratkaisukurssia useamman opettajan opettamana. Tämä mahdollistaisi eri opettajien työskentelyn vertailemisen, ja samalla saataisiin tietoa kurssin soveltuvuudesta suuremmalle koeryhmälle. Eri opettajien kokemukset kurssista sekä heidän kehitysehdotuksensa sen sisältöön ja toteutukseen antaisivat hyödyllistä tietoa opettajien työhön ja oppimateriaalien valmistukseen. Samoin oppilaiden ratkaisukarttojen analysointi oppilasta tehtäväkohtaisesti haastatellen avaisi mielenkiintoisia tutkimusnäkökulmia ratkaisuprosessiin ja siihen liittyvään matemaattiseen ajatteluun.

Matematiikan ja ongelmanratkaisun integrointia voitaisiin myös kokeilla eri kouluasteilla ja eri aloilla. Mielenkiintoisia tutkimusaiheita olisivat esimerkiksi ongelmanratkaisun opettaminen suunnistuksen tai yrityksen perustamisen opiskelun yhteydessä. Tutkimusta tehdessäni on tullut usein esille myös se, että ongelmanratkaisu liittyy kiinteästi ihmisten arkipäivään ja yhteiskunnallisen päätöksentekoon. Oikeuden päätösten ja rikosten selvittämisen tai lääkkeiden kehittelyn liittäminen ongelmanratkaisun opiskeluun tarjoaisivat myös hyödyllisen jatkotutkimusalueen.

Mielestäni tieteellisen tutkimuksen tekeminen yleensäkin on kuin ongelmanratkaisuprosessi. Tutkimusongelmien asettaminen, tutkimussuunnitelman tekeminen ja sen toteuttaminen sekä toteutuksen arviointi muistuttavat Polyan (luku 4.6.2) ongelmanratkaisumallin vaiheita. Tämän tutkimuksen ratkaisukarttoina ovat toimineet useat tutkimussuunnitelma- ja käsikirjoitusversiot sekä kaaviokuvat, joihin olen voinut palata aina tarvittaessa. Mitä pidemmälle tämä työ on edennyt, sitä hyödyllisemmäksi ratkaisukartan ylläpito tutkimuksen rungosta, kirjallisuudesta ja tuloksista on osoittautunut. Jo pelkästään ajan säästämiseksi suosittelen lämpimästi muillekin tutkimuksen tekijöille omaan työhön sovellettua ratkaisukarttamenetelmän käyttöä.

Mutta palataanpa lopuksi kouluun ja oppitunnille johdannossa (luku 1) esittämäni ongelman avulla. Kuinka tehtävän voisi toteuttaa koulussa niin, ettei se jäisi ainoastaan lisätehtäväksi luokan nopeimmille laskijoille? Seuraavassa esitän kuvauksen yhdestä vaihtoehdosta, jolla ongelmatehtävää voitaisiin ratkaista luokassa:

Opettaja voisi antaa tehtävän tunnin lopuksi oppilaille mietittäväksi. Todennäköisesti oppilaat esittävät sen kummemmin perustelematta arvauksia, että kissa "mahtuu" tai "ei mahdu" köyden alta. Mahdollisuus arvaamiseen saattaa tuntua matemaattisessa mielessä turhauttavalta. Opetuksellisesti se antaa kuitenkin matematiikkaan motivoitumattomille ja heikoille oppilaille mahdollisuuden pysyä nolostumatta mukana tehtävän ratkaisuun liittyvässä toiminnassa. Tärkeää on, ettei opettaja paljasta vastausta, vaan hän pyrkii esittelemään tehtävän siten, että kaikki oppilaat ymmärtävät sen varmasti. Tilannetta voidaan havainnollistaa vaikkapa karttapallon avulla.

Seuraavana päivänä opettaja ottaa tehtävän uudestaan esille. Osa oppilaista on ehkä pohtinut tehtävää yksin, kaverin tai vanhempien kanssa. Osa taas on varmasti unohtanut tehtävän mietiskelyn. Opettajan tehtävänä on taas herätellä keskustelua ongelmasta ja saada oppilaat tekemään vastausehdotuksia ja perusteluja. Todennäköisesti oppilaat esittävät arvauksia ja useita perusteluja. Nämä saattavat hymyilyttää opettajaakin, sillä hyvään tehtävään löytyy aina hauskoja ja yllättäviä vastausehdotuksia: "Totta kai mahtuu, koska maapallon pinnalla on ojia ja kuoppia" tai "Ei tietenkään mahdu, koska eihän tuollaista köyttä voi maapallon ympärille vetää". Molemmat vastausehdotukset ovat hyviä ja perusteltuja. Näitä ehdotuksia on tuettava ja oppilaita on kannustettava tämäntyyppisiin loogisiin perusteluihin. Tärkeää on, että luokassa säilyy mukava ja innostava ilmapiiri. Lopulta opettaja ohjailee keskustelua ja toimintaa kohti ratkaisuyrityksiä: "Miten voisimme ratkaista tällaisen ongelman? Olisiko se selvitettävissä?" Hän voisi jakaa luokan oppilaat sopiviin ryhmiin. Todennäköisesti joku oppilaista yhdistäisi maapallon ympärysmitan ympyrän kehään.

Mahdollisuuksien mukaan tehtävätilannetta voidaan demonstroida vaikkapa liikuntasalissa: yksi oppilasryhmä voisi teipata sopivassa mittakaavassa maapallon ympärysmitan ja kokeilla sen ympärille köyttä, jonka pituuteen lisätään samassa suhteessa metriä vastaava pala.

Toinen ryhmä voisi sijoittaa ympyrän kehän kaavaan tietokirjasta saamansa maapallon ympärysmitan ja lisätä siihen metrin, minkä jälkeen on mahdollista laskea ympärillä olevan köyden säde ja saada tulos köyden ja maapallon pinnan välisestä erosta. Mikäli suurehkojen lukujen laskutoimitukset onnistuvat, on vielä arvioitava, mahtuuko kissa läpi tulokseksi saadusta välistä.

Yksi ryhmä (tai opettaja) saattaisi tehdä tehtävästä seuraavanlaisen ratkaisukartan ja rakentaa tehtävästä yhtälön:

Tehtävän tiedot:

Kysymys: Mahtuuko kissa kulkemaan köyden alta?

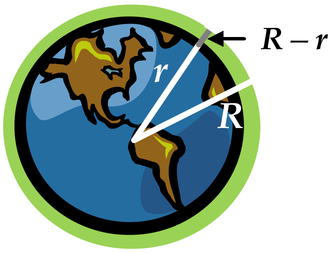
1) *Kierretään köysi maapallon ympärille*
2) *Lisätään köyteen 1 metri Suomen kohdalla*
3) *Köyden löystyminen tasataan niin, että köysi on saman verran irti maasta ympäri maapallon*

I Ratkaisuyritys:

1 m = 100 cm
Ympyrän kehä lasketaan: $2 \cdot \pi \cdot säde$

Apupiirroksen mukaan on selvitettävä kuinka paljon köyden pidentäminen metrillä lisää maapallon ympärillä olevan köyden sädettä!

Merkitään: r = maapallon säde, R = köyden säde, johon on lisätty 1 m, R – r = väli köyden ja maanpinnan välillä.



$$2\pi R - 2\pi r = 100\,cm$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(R - r) = 100\ cm$$

$$(R - r) = \frac{100\,cm}{2\pi} \approx 16\,cm$$

Ratkaisussa päästään yllättävään tulokseen, joka kannustaa tarkistamaan vielä tehtävän. Voiko kissa tosiaankin mahtua köyden ali?

Lopuksi opettaja kokoaa yhteen erilaiset ratkaisutavat ja perustelut. Niiden hyviä ja huonoja puolia vertaillaan yhdessä keskustellen. Jokaisessa ratkaisutavassa on lähtökohtana tehtävän ymmärtäminen ja konkretisointi, joiden jälkeen voidaan ryhtyä pohtimaan ratkaisukeinoa tehtävään.

Edellä mainitussa ratkaisuvaihtoehtojen tarkastelussa on mahdollisuus havaita abstraktin matematiikan voima. Oppilaat saattavat huomata, että edellä esitetyistä ongelmanratkaisuvaihtoehdoista matemaattisilla symboleilla operoiminen on tehokkainta ja nopeinta. Tällaisen näkökulman korostaminen ongelmanratkaisutilanteissa jo peruskoulussa saattaisi motivoida oppilaita myöhemminkin matemaattis-luonnontieteellisten aineiden opiskeluun.

Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettamisen ja opiskelun hyödyllisyys ei rajoitu vain tietylle oppiainealueelle. Koulun tulisi opettaa oppilailleen tietoja ja taitoja elämää varten. Jokainen ihminen tarvitsee elämässään ongelmanratkaisutaitoja etsiessään vastauksia elämän pieniin ja suuriin kysymyksiin. Tällöinkin on hyvä tiedostaa erilaisten ratkaisutapojen määrä ja laatu.

SUMMARY

Teaching mathematical problem solving skill in the Finnish comprehensive school. Designing and assessment of a problem solving course.

Introduction

The aim of the research was to find out how to teach and develop mathematical problem solving skill in the Finnish comprehensive school. According to the literature, the use of heuristics is not particularly helpful for improving problem solving performance or its transfer to a new situation (Schoenfeld 1992; Lester & Kehle 2003). Pupils, however, need examples of strategies in order to learn to apply procedures to new problems. Therefore, practising of problem solving strategies has the potential to serve as a powerful descriptor of problem solving behaviour (Schoenfeld 1992). In this way pupils' uncertainty can be reduced and their attitude towards mathematical problem solving may improve.

In this study an attempt was made to develop students' problem solving skills in a diverse and many-sided manner. This approach is logical on the basis of the theoretical background adopted in the study, according to which mathematical problem solving skill consists of several parts. In this study the mathematical problem solving skill was divided into six components: 1) problem solving heuristics and strategies 2) the skill to interpret the problem and calculate the overall solution, 3) mathematical skills 4) selectivity, 5) motivation and other affective factors, and 6) reading and the writing skills. The training of all component skills supports the development of mathematical problem solving skill.

Methods

The planned learning environment was based on the frame of reference derived from literature on teaching and mathematical problem solving. It was carried out in the 6th grade as a problem solving course. The course included all teaching materials (lesson plans, tasks and tests) needed for the integration of teaching of mathematics, mother tongue, science, art and craft.

A "focus triangle", which was developed for this study, was used for designing the integration of school subjects. With the assistance of the focus triangle the integration of the school subjects was defined along three dimensions: 1) temporal duration, 2) definition of the starting point, and 3) treatment of the integrated school subjects.

Design research (Edelson 2002) was used as the guidance method in this study. This method provides a suitable way of testing theories in practice, evaluating them and further developing them. The designed teaching intervention was evaluated by means of assessments of the teaching intervention, pupils' interviews and tests.

Quasi-experimental design was used as one of the research methods. Pupils' problem solving skills were measured by a pre-test, post-test and delayed test. The reliability coefficients (Cronbach's alpha) of the tests were calculated for the answers of 52 pupils. The reliability coefficients were 0.884; 0.885 and 0.785 respectively, so that the tests can be considered reliable.

The experimental group (n = 17) consisted of one 6th grade class of 12-year old pupils. The control group (n = 35) was made up of two parallel 6th grade classes from the same school. Both groups took part in a pre- and post-test. Between the tests the experimental group took part in the mathematical problem solving course. In the course the teaching of problem solving concentrated on three aspects: teaching about problem solving, for problem solving and via problem solving (Schroeder & Lester 1989; Nunokawa 2005). A central aim of the instruction was to teach the problem solving map method to the pupils. It was developed for this teaching intervention as a tool for solving problems. The purpose of the problem solving map method was to help pupils to illustrate and process problems using writing and helpful drawings.

The 30 lessons given to the experimental group were taught by the researcher, whereas the other lessons were taught by their own teacher. The control group studied mathematics and other school subjects in their normal way with their teachers and textbooks. The topics covered in mathematical problem solving followed the content of the same textbook being used in both groups. The pupils in the experimental group were interviewed after the post-test.

In the delayed test the structure of the items selected was based on the best tasks in the pre- and post-test. The problems in the delayed test were chosen to be slightly more demanding so that the pupils also encountered real problems in the delayed test. Both groups took part in the delayed test 18 months after the post-test. During this period the pupils of the experimental and control group had been mixed with each other in grade 7 at the same school.

Results and discussion

According to the principles of design research, one research result is the design procedure itself. The problem solving course in the 6th grade was carried out in school and it was viable. The teaching of the problem solving skill was possible by integrating thirty lessons, including mathematics, mother tongue, natural sciences, art and crafts. Furthermore, the design process produced a concrete outcome: the teaching material and instructions for creating a learning environment in this study were further developed into a published textbook, which is now available to teachers *(Leppäaho, H. 2004. Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle. [A mathematical problem solving course for 6th grade] Helsinki: WSOY).*

From the teacher's viewpoint, verbalisation of mathematics by writing and speaking played a central role in teaching. The reason for this was the observation that pupils have difficulties to express their thinking in mathematical language. The remedy used for this was teamwork on the problem solving course. From time to time pupils also worked in small groups discussing and solving the tasks. The other method used was to allow pupils to make their own tasks, for example as homework. It was important, too, that the teacher gave the pupils time to think and encouraged them to speak and write about mathematics.

According to the test results the designed learning environment proved to be productive. The results of the pre-test, post-test and delayed test are shown in Table 1. In the pre-test there are no significant or effect size differences between the groups. The control group's average scores were only slightly better than those of the experimental group.

TABLE 1 The total scores of the experimental and control group in the pre-, post- and delayed tests.

Total scores	**Pre-test**	**Post-test**	**Delayed test**
Experimental group (N = 17)	32.26	40.84	13.34
Control group (N = 35)	33.01	32.60	11.63
Difference between groups *Exp – Cont*	-0.75 (-2.3%)	+8.24*** (25.3%)	+1.71 (14.7%)
Effect Size: *Cohen's d*	-0.08	1.02	+0.45

Effect size by Cohen's d: small d = 0.20; medium d = 0.50; large d = 0.80
** p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001*

The total scores of the experimental group improved significantly in comparison to the control group between the pre- and post-test (analysis of variance). Similarly, the effect size measured by Cohen's d also shows a large difference between the groups. Another important finding was that all the pupils in the experimental group improved their scores in the post-test, by a range of 2.25 to 21.25 points.

In the delayed test there were no significant differences between the groups, except in one of the six tasks. In the first task the experimental group was statistically better than the control group. The effect size exceeds the small difference limit between the total scores. But in percentage terms the difference remains in favour of the experimental group in delayed test.

On the basis of the pre-test results the pupils of the control and experimental group were divided into three levels: "good, average and weak" groups. All of these groups had better results in the post–test. Effect size values indicate that the influence of teaching for these level groups was large. In the control group the effect size values were far smaller than in the experimental group.

After the post-test the pupils in the experimental group were interviewed. The interviews indicate that half of the pupils thought that the problem solving course increased their interest in mathematical problem solving. On the other hand, a sixth said that their interest in mathematical problem solving decreased and a third thought that it was unchanged during the course.

The positive attitude towards the problem solving map method expressed by pupils in the experimental group and their increased interest in problem solving and mathematics were clearly related to the improvement of test results in the post-test.

This study indicates that teaching mathematical problem solving through integration of other school subject is possible in an ordinary school and, according to the results of this study, it is productive. It was important to notice that most of the pupils liked this kind of combination of school subjects in teaching. It is possible that these findings open new perspectives on the development of problem solving and underline the importance of varied approaches in teaching.

Teaching and learning mathematical problem solving is not only useful in school. School should teach knowledge and skills for life. Everyone needs problem solving skills when they search for answers to life's questions, whether big or little. In these situations it would be worthwhile knowing the quantity and the quality of the various ways or styles of solving problems.

LÄHTEET

Aaltonen, K. 2003. Pedagogisen ajattelun ja toiminnan suhde. Opetustaan integroivan opettajan tietoperusta lähihoitajakoulutuksessa. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 89.

Alasuutari, M. 2005. Mikä rakentaa vuorovaikutusta lapsen haastattelussa? Teoksessa J. Ruusuvuori & L. Tiittula (toim.) Haastattelu: Tutkimus, tilanteet ja vuorovaikutus. Tampere: Vastapaino, 145–162.

Ahtee, M. 1993. Oppimisnäkemyksen kehittyminen konstruktivistiseksi: Esimerkkinä fysiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivismi: Teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 63–71.

Ahtee, M., Kankaanrinta, I-K. & Virtanen, L. 1994. Luonnontieto koulussa. Helsinki: Otava.

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: Edita.

Aksela, M. 2005. Supporting meaningful chemistry learning and higher-order thinking through computer-assisted inquiry: A design research approach. Helsingin yliopisto. Kemian laitos.

American Psychological Association. 2001. Publication manual of the American Psychological Association. (5. painos) Washington.

Arcavi, A. & Schoenfeld, A. 1992. Mathematics tutoring through a constructivist lens: The challenges of sense-making. Journal of Mathematical Behavior, 11(4), 321–335.

Artique, M. 1994. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. Teoksessa R. Biehler, R. Scholz, R. Strâer & B. Winkelmann (toim.) Didactics of mathematics as a scientific discipline Dordrecht: Kluwer, 27–39.

Ausubel, D., Novak, J & Hanesian, H. 1978. Educational psychology. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Ballew, H. & Cunningham, J. 1982. Diagnosing strengths and weakness of sixth-grade students in solving problems. Journal for Research in Mathematics Education 13 (3), 202–210.

Bannan–Ritland, B. 2003. The role of design in research: The integrative learning design framework. Educational Researcher, 32 (1) 21–24.

Baroody, A. 2003. The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa A. Baroody & A. Dowker (toim.) The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1–33.

Bauersfeld, H. 1995. The structuring of the structures: Development and function of mathematizing as a social practice. Teoksessa L. Steffe & J. Gale (toim.) Constructivism in education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 137–158.

Beane, J. 1995. Curriculum integration and the disciplines of knowledge. Phi Delta Kappan 76 (8), 616–623.

Bereiter, C. 2002. Design research for sustained innovation. Cognitive studies, bulletin of the Japanese cognitive science society, 9 (3), 321–327.

Berger, D. & Wilde, W. 1988. A task analysis of algebra word problems. Teoksessa D. Berger, K. Pezdek, & W. Banks (toim.) Applications of cognitive psychology: Problem solving education and computing. Hillsdale: LEA Press, 123–137.

Berlin, D. & Lee, H. 2005. Integrating science and mathematics education: Historical analysis. School Science and Mathematics, January 2005, 105 (1), 15–24.

Brown, A. 1992. Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. The Journal of the Learning Sciences, 2, 141–178.

Brown, T. 1997. Mathematics Education and Language: Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Cai, J. 2000. Problem based mathematics instruction: Promises and challenges–viewpoint from States. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world. Proceedings of the topic study group 11 at ICME-9 meeting August 2000 in Japan. University of Turku Faculty of Education Report Series C 14, 23–32.

Carr–Chellman, A. & Savoy, M. 2004. User–Design research. Teoksessa D. Jonassen (toim.) Handbook of research on educational communications and technology: A project of the association for educational communications and technology. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 701–716.

Cobb, F. 1988. The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. Educational psychologist 23, 87–103.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. 2003. Design experiments in educational research. Educational Researcher, 32 (1) 9–13.

Cohen, J. 1988. Statistical power analysis for the behavioral sciences. (2. painos) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cohen, L. & Manion, L. 1992. Research methods in education. (3. painos) Bristol: Routledge.

Cook, T. & Campbell, D. 1979. Quasi-experimentation: Design & analysis issues for field settings. Chicago, Illinois: Rand McNally College Publishing Company.

Creswell, J., Plano Clark, V., Gutmann, M. & Hanson, E. 2003. Advanced mixed methods research designs. Teoksessa: A. Tashakkori & C. Teddlie (toim.) Handbook of mixed methods in social and behavioural research. Thousand Oaks, CA: Sage, 209–240.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Masui, C. 2004. The CLIA-model: A framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. European Journal of Psychology of Education XIX, 4, 365–384.

Design-Based Research Collective. 2003. Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, 32, 5–8.

Davidson, J. 1986. Insight and giftedness. Teoksessa R. Sternberg & J. Davidson (toim.) Conceptions of Giftedness. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 201–222.

Davis, G. 1966. Current status of research and theory in human problem solving. Psychologial Bulletin 66 (1), 36–54.

Davison, D. & Miller, K. 1995. What does integration of science and mathematics really mean? School Science & Mathematics, May 95, 95 (5), 226–231.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. 2006. Investigating social and individual aspects in teacher's approaches to problem solving. Teoksessa J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková, (toim.) Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Prague, Vol. 2, 417–424.

Denzin, N. 1988. Triangulation. Teoksessa J.P. Keeves (toim.) Educational research, methodology, and measurement: An international handbook. Oxford: Pergamon, 511–513.

Dewey, J. 1910. How we think? New York: McMillan.

Dewey, J. 1933. How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. Boston: D. C. Heath and Company.

Dewey, J. 1966. Democracy and education: an introduction to the philosophy of education. New York: Free Press.

Durkin, K. 1995. Developmental social psychology: From infancy to old age. Cambridge, Massachusetts: Blackwell.

Edelson, D. 2002. Design research: What we learn when we engage in design. The Journal of the Learning Sciences 11 (1), 105–121.

Eriksson, K. 1986. Hoito-opin didaktiikka. Helsinki: Sairaanhoitajien koulutusäätiö.

Ernst, J., Taylor, J. & Peterson, R. 2005. Tech-know: Integrating engaging activities through standards-based learning. The Technology Teacher, October 2005, 15–18.

Erätuuli, M., Leino, J. & Yliluoma, P. 1994. Kvantitatiiviset analyysimenetelmät ihmistieteissä. Helsinki: Kirjayhtymä.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Finkel, E. 1996. Making sense of genetics: Students' knowledge use during problem solving in a high school genetics class. Journal of Research in Science Teaching. 33 (4), 345–368.

Flower, L. 1989. Problem solving strategies for writing. (3. painos) San Diego, California: Harcourt Brace Jovanovich.

Ford, M. 1990. The writing process: A strategy for problem solvers. Arithmetic Teacher 38 (3), 35–38.

van Garderen, D. & Montague, M. 2003. Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. Learning disabilities Research & Practice 2003, 18 (4) 246–254.
Glaser, R. 1962. Psychology and instructional technology. Teoksessa R. Glaser (toim.) Training research and education. University of Pittsburgh Press, 1–32.
von Glasersfeld, E. 1995. A constructivist approach to teaching. Teoksessa L. Steffe & J. Gale (toim.) Constructivism in education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 3–15.
Glass, B. & Maher, C. 2004. Students problem solving and justification. Teoksessa M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (toim.) Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, (PME), Bergen, Vol. 2, 463–470.
Gobbo, C. & Chi, M. 1986. How knowledge is structured and used by expert and novice children. Cognition Development 1, 221–237.
Goldin, G. 2000. Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. Mathematical Thinking & Learning, 2, 209–219.
Gordon, C. & Debus, R. 2002. Developing deep learning approaches and personal teaching efficacy within a preservice teacher education context. British Journal of Educational Psychology, 72, 483–511.
Gorodetsky, M. & Klavir, R. 2003. What can we learn from how gifted/average pupils describe their processes of problem solving? Learning and Instruction 13, 305–325.
de Groot, A. 1956. Thought and choice in chess. The Hague: Mouton.
Guba, E. & Lincoln, Y. 1989. Fourth generation evaluation. Newbury Park, CA: Sage.
Guba, E. & Lincoln, Y. 2000. Competing paradigms in qualitative research. Teoksessa N. Denzin & Y. Lincoln (toim.) Handbook of qualitative research. Thousand Oaks, CA, Sage: 105–117.
Haapasalo, L. 1985. Ongelmakeskeisen matematiikanopetuksen metodiikka. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetusmoniste 10.
Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Vaajakoski Jyväskylä: Medusa.
Haapasalo, L. & Kadijevich, D. 2000. Two types of mathematical knowledge and their relation. Journal für Mathematikdidaktik 21 (2), 139–157.
Haapasalo, L. 2004a. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50–83.
Haapasalo, L. 2004b. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 84–99.
Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. 1999. Tutkiva oppiminen: Älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen. Helsinki: WSOY.

Halmos, P. 1980. The heart of mathematics. American Mathematical Monthly, 87, 519–524.

Hannula, M. 2004. Affect in mathematical thinking and learning. Turun yliopisto. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja B, Humaniora 273.

Hammouri, H. 2003. An investigation of undergraduates' transformational problem solving strategies: Cognitive/metacognitive processes as predictors of holistic/analytic strategies. Assessment & Evaluation in Higher Education 28 (6), 571–586.

Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274.

Hautamäki, J. 1984. Peruskoululaisten loogisen ajattelun mittaamisesta ja esiintymisestä. Joensuun yliopiston yhteiskuntatieteellisiä julkaisuja 1.

Hautamäki, J., Arinen, P., Hautamäki, A., Kupiainen, S., Lindholm, B., Mehtäläinen, J., Niemivirta, M., Rantanen, P. & Scheinin, P. 2002: Oppimaan oppiminen toisen asteen koulutuksessa. Oppimistulosten arviointi 2/2002. Helsinki: Opetushallitus.

Hautamäki, J., Kupiainen, S., Arinen, P., Hautamäki, A., Niemivirta, M., Rantanen, P., Ruuth, M. & Scheinin, P. 2005. Oppimaan oppiminen ala-asteella 2: tilanne vuonna 2003 ja muutokset vuodesta 1996. Oppimistulosten arviointi 1/2005. Helsinki: Opetushallitus.

Hegarty, M. & Kozhenikov, M. 1999. Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology 9 (4) 684–689.

Heikkilä, J. 1981. Luovan ongelmanratkaisun didaktiikka. Porvoo: WSOY.

Heikkinen, H., Huttunen, R., Niglas, K. & Tynjälä, P. 2005. Kartta kasvatustieteen maastosta. Kasvatus 5, (36) 340–354.

Heinonen, A. 2002. Itseohjattu ja tutkiva opiskelu teknologiakasvatuksessa: Luokanopettajakoulutuksen teknologian kurssin kehittämistutkimus. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 79.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. London: Erlbaum, 1–27.

Hiebert, J. & Carpenter, T. 1992. Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. Grouws (toim.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 65–97.

Hirsjärvi, S. 1983 (toim.) Kasvatustieteen käsitteistö. Helsinki: Otava.

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 2000. Tutkimushaastattelu: Teemahaastattelun teoria ja käytäntö. Helsinki: Yliopistopaino.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2004. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi. 10. osin uudistettu laitos.

Hohn, R & Frey, B. 2002. Heuristic training and performance in elementary mathematical problem solving. The Journal of Educational Research 6 (95) 374–380.

Huhtala, S. 1999. "Mä inhoon tätä matikkaa...": Opiskelijan oma matematiikka oppimisvaikeuksien selittäjänä. Helsinki: Opetushallitus.

Huntley, M. 1999. Theoretical and empirical investigations of integrated mathematics and science education in the middle grades with implications for teacher education. Journal of Teacher Education 50 (1), 57–68.

Huttunen, J. 1994. Kasvatustieteellinen tutkimus. Teoksessa V. A. Niskanen (toim.) Tieteellisten menetelmien perusteita ihmistieteissä: opiskelijan opas. Helsingin yliopisto.

Hytönen, J. 1998. Lapsikeskeinen kasvatus. Helsinki: WSOY.

Hähkiöniemi, M. 2006a. Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. Journal of Mathematical Behavior, 25 (2), 170–184.

Hähkiöniemi, M. 2006b. Perceiving the derivative: The case of Susanna. Nordic Studies in Mathematics Education, 11 (1), 51–73.

Hähkiöniemi, M. 2006c. Ajattelun apuvälineet – tapaustutkimus derivaatan representaatioista. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82.

Hähkiöniemi, M. 2006d. The role of representations in learning the derivative. University of Jyväskylä. Department of Mathematics and Statistics. Report 104.

Ilmavirta, R. 2003. Kolmen kohdan ohjelma matematiikan opetuksen tehostamiseksi. Teoksessa Projekteja ja prosesseja. Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja 8, 15–27.

Ingram, J. 1979. Curriculum Integration and Lifelong Education. Oxford: Pergamon.

International Technology Education Association. 2000. Standards for technological literacy: Content for the study of technology. Reston, VA: ITEA.

Jang, S.-J. 2006. Research on the effects of team teaching upon two secondary school teachers. Educational Research, 48 (2), 177–194.

Jaworski, B. 2003. Teaching development through classroom research and its relations with/to ”Design Research”. Teoksessa J. Williams (toim.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23 (2) June 2003, 31–36.

Johnson, B. & Onwuegbuzie, J. 2004. Mixed methods research: A Research pardigm whose time has come. Educational Researcher, 33 (7), 14–26.

Johnson, D. & Rising, G. 1967. Guidelines for teaching mathematics. Belmont: Wadsworth.

Joutsenlahti, J. 2003a. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta, A. & Marttila, O. (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto. Opettajankoulutuslaitos B: 72.

Joutsenlahti, J. 2003b. Matemaattinen ajattelu ja kieli. Teoksessa Projekteja ja prosesseja. Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja 8, 3–12.

Joutsenlahti, J. 2004. Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 363–380.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 1061

Jussila, J. 1992. Kvalitatiivista ja kvantitatiivista tutkimusta koskeva kiista ja kasvatustieteen kriisi. Kasvatus (23) 3, 247–255.

Juuti, K. 2005. Towards primary school physics teaching and learning: Design research approach. Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 256.

Kaasila, R. 2000. "Eläydyin oppilaiden asemaan": luokanopettajiksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsitysten ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa. Lapin yliopisto. Acta Universitatis Lapponiensis 32.

Kaikkonen, P. 1999. Laadullinen tutkimus kasvatus- ja opetustyössä. Kasvatus 5, 427–435.

Kansanen, P. 2004. Opetuksen käsitemaailma. Jyväskylä: PS-kustannus.

Kansanen, P. & Meri, M. 1999. The didactic relation in the teaching–studying-learning process. Teoksessa B. Hudson, F. Buchberger, P. Kansanen, & H. Seel (toim.) Didaktik/Fachdidaktik as Science(-s) of the Teaching Profession? TNTEE publications 2 (1), 107–116.

Kantola, J. 1997. Cygnaeuksen jäljillä käsityönopetuksesta teknologiseen kasvatukseen. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 133.

Karma, K. 1983. Käyttäytymistieteiden metodologian perusteet. Helsinki: Otava.

Kelly, L. 1993. Making the unfamilar familar: Problem-solving heuristics as a means of confronting students' misconceptions in algebra. Stanford University.

Keranto, T. 1982. Lapsen matemaattisen ajatteluprosessien ja tiedollisen rakenteen kehitys. Teoksessa P. Kupari (toim.) Kognitiiviset prosessit ja matematiikan opetus: Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksessa 8.–9.2.1982 järjestetyn matematiikan opetuksen tutkijaseminaarin raportti. Jyväskylä: Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Selosteita ja tiedotteita 199, 35–48.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findel, B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Mathematics learning study committee. Washington: National Academy Press.

Kiviniemi, K. 1991. Tavoite ilman tiedostavaa suunnittelua on unelma. Kehittämisnäkökulmia yleis- ja ammattisivistyksen integrointiin ammatillisissa oppilaitoksissa. Teoksessa J. Ekola (toim.) Ammatillisen keskiasteen uudistus. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisujasarja B. Teoriaa ja käytäntöä 56, 61–86.

Kolb, D. 1984. Experimental learning: Experiences as source of learning development. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Koponen, R. 1995. Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille. (2. painos). Jyväskylä: Atena.

Kotovsky, K., Hayes, J & Simon, H. 1985. Why are some problems hard? Evidence from tower of Hanoi. Cognitive psychology, 17, 248–294.

Kretschmer, I. F. 1983. Problemlösendes Denken im Unterricht. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Krulik, S. & Rudnick, J. 1982. Teaching problem solving to preservice teachers. Arithmetic Teacher 29 (6), 42–45.

Krutetskii, V. 1976. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Kupari, P. 1999. Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun - Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Jyväskylän yliopisto.

Kupari, P. Välijärvi, J. Linnakylä. P, Reinikainen, P. Brunell, V. Leino, K. Sulkunen, S. Törnroos, J. Malin, A. & Puhakka, E. 2004. Nuoret osaajat: PISA 2003 -tutkimuksen ensituloksia. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kvale, S. 1996. Interviews: An introduction to qualitative research interviewing. Thousand Oaks, CA: Sage.

Lahdes, E. 1997. Peruskoulun uusi didaktiikka. Helsinki: Otava.

Lankshear, C. & Knobel, M. 2004. A handbook for teacher research: from design to implementation. Maidenhead: Open University Press.

Lean, C. & Clements, M. 1981. Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics 12, 267–299.

LeBlanc, J. F. 1977. You can teach problem solving. Arithmetic Teacher 25 (2), 16–20.

Leder, G., Pehkonen, E. Törner, G. 2003. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lederman, N. & Niess, M. 1997. Integrated, interdisciplinary, or thematic instruction? Is this a question or is it questionable semantics? School Science and Mathematics 97 (2), 57–59.

Lehman, J. 1994. Integrating science and mathematics: Perceptions of preservice and practicing elementary teachers. School Science and Mathematics 94 (2), 58–64.

Lehman J. & McDonald J. 1988. Teachers' perceptions of the integration of mathematics and science. School Science and Mathematics 88 (8), 642–649.

Lehtinen, E. 1989. Vallitsevan tiedonkäsityksen ilmeneminen koulun käytännöissä. Kouluhallituksen julkaisuja 18. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Lehtinen, E. 1991. Ihminen tutkimuskohteena. Operationalistamisen ongelma Teoksessa L. Syrjälä & J. Merenheimo (toim.) Kasvatustutkimuksen laadullisia lähestymistapoja: Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita ja selosteita 39, 11–31.

Lehtinen, J. & Leppäaho, H. 1991. Viidesluokkalaisen geometrisen ongelmanratkaisutaidon kehittäminen ohjatun ongelmanratkaisuopetuksen avulla. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Leino, J. 1977. Matematiikan didaktiikka 1. Helsinki: Kirjayhtymä.

Leino, J. 1978. Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa. Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 66.

Leino, J. 1992. The importance of project work in teaching mathematics. Teoksessa J. Leino (toim.) Mathematics teaching through project work. Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos. Julkaisu 27, 1–6.

Leino, J. 1993. Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen, E. Pehkonen & J. Leino (toim.) Matematiikan opetus ja konstruktivismi: Teoriaa ja käytäntöä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 116, 11–20.

Leino, J. 1997. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P. Malinen (toim.) Matematiikka: Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti, 39–51.

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 20–31.

Leinonen, J. 2005. Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä? Kasvatus 1, 33–42.

Leppäaho, H. 2004a. Development of problem solving at comprehensive schools. Teoksessa H. Rehlich & B. Zimmermann (toim.) ProMath Jena 2003. Problem solving in mathematics education. Hildesheim: Verlag Franzbecker, 71–86.

Leppäaho, H. 2005a. Integration of mathematical problem solving in the comprehensive school. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving in mathematics education. Proceedings of the Promath Meeting June 30-July 2, in Lahti. University of Helsinki. Research Report 261, 105–114.

Leppäaho, H. 2005b. Opetuksen integrointi avuksi matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittämiseen. Teoksessa E. Korpinen (toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa Jyväskylä: Tutkiva opettaja 2, 133–151.

Leppäaho, H. *(painossa)*. The problem solving map method as a learning tool in mathematical problem solving. Teoksessa: T. Asunta & J. Viiri (toim.) Pathways into research-based teaching and learning. Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 83.

Leppäaho, H & Ahtee, M. 2005. Teaching mathematical problem solving with the solving map method at primary school. Teoksessa J. Novotná (toim.)

SEMT´05, Proceedings. International symposium elementary maths teaching, 194–202.
Lerman, S., Xu, G. & Tsatsaroni, A. 2002. Developing theories of mathematics education research: The ESM story. Educational studies in mathematics. 51, 23–40.
Lester, F. K, Jr. 1978. Mathematical problem solving in the elementary school. Some educational and psychological considerations. Teoksessa L. Hatfield & D. A. Bradbard (toim.) Mathematical problem solving: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC Center for science, Mathematics an Environmental Education, 53–87.
Lester, F. K., Jr. & Kehle, P. E. 2003. From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. Teoksessa R. Lesh & H. Doerr (toim.) Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 501–517.
Lorenzo, M. 2005. The development, implementation, and evaluation of a problem solving heuristic. International Journal of Science and Mathematics Education 3, 33–58.
Low, R. & Over, R. 1992. Hierarchical ordering of schematic knowledge relating to area-of-rectangle problems. Journal of Educational Psychology 84 (1), 62–69.
Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003: Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet, Helsinki: Opetushallitus.
LUMA-tukiryhmä 2002. Helsinki. Suomalaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen vuonna 2002: Opetusministeriö. Koulutus-ja tiedepolitiikan osaston julkaisusarja.
Malinen, P. 1985. Opetussuunnitelmat nykyajan koulutuksessa. Helsinki: Otava.
Marton, F. & Booth, S. 1997. Learning and awareness. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Marton, F. & Pang M. 1999. Two faces of variation. Paper presented at 8th European conference for learning and instruction, August 24–28, Göteborg University, 1–12.
Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. 2004. The Space of Learning. Teoksessa F. Marton & A. Tsui (toim.) Classroom discourse and the space of learning. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 3–40.
Marton, F. & Trigwell, K. 2000. Variatio est mater studiorum. Higher Education Research & Development, 19 (3) 381–395.
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. 1982. Thinking mathematically. Bristol: Addison–Wesley.
Masui, C. & De Corte, E. 2005. Learning to reflect and to attribute constructively as basic components of self-regulated learning. British Journal of Educational Psychology 75, 351–372.
Meier, S., Cobbs, G. & Nicol, M. 1998. Potential benefits and barriers to integration. School Science and Mathematics 98 (8), 438–445.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. 2000. Käsitteellisen muutoksen ongelma matematiikassa. Teoksessa M. Ahtee & T. Asunta (toim.) Tietoa ja toimintaa: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksia. Jyväskylä: Tuope, 212–234.

Metsämuuronen, J. 2005. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Helsinki: International Methelp.

Moberg, S. 1998. Erityisopetuksen ja yleisopetuksen integraatio opettajien silmin. Teoksessa T. Ladonlahti, A. Naukkarinen, & S. Vehmas (toim.) Poikkeava vai erityinen? Erityispedagogiikan monet ulottuvuudet. Jyväskylä: Atena, 136–161.

Moberg, S. & Tuunainen, K. 1989. Erityispedagogiikan metodologinen perusta. Jyväskylä: Atena 136–161.

Moilanen, P. 2000. Laadullisen tutkimuksen filosofia. Kasvatus 2, 183–188.

Montague, M., Warger, C. & Morgan, T. 2000. Solve It! Strategy instruction to improve mathematical problem solving. Learning Disabilities Research & Practice 15, 110–116.

Morgan, C. 1998. Writing mathematically: The discourse of investigation. London: Falmer Press.

Morgan, C. 2001. The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: Routledge Flamer, 232–244.

Morgan, G., Gliner, J., Harmon, R., Kraemer, H., Leech, N. & Vaske J. 2005. Understanding and Evaluating Research in Applied and Clinical Settings Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Morse, J. 1998. Designing funded qualitative research. Teoksessa N. Denzin & Y. Lincoln (toim.) Strategies of qualitative inquiry. Thousand Oaks, CA: Sage, 56–85.

Moses, B. 1982. Individual differences in problem solving. Arithmetic Teacher 30 (4), 10–14.

Newell, A & Simon, H. A. 1972. Human problem solving. Engelwood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Newstead, K. 1998. Aspects of children's mathematics anxiety. Educational Studies in Mathematics 36, 53–71.

Niiniluoto, I. 1989. Informaatio, tieto ja yhteiskunta: Filosofinen käsiteanalyysi. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Nohda, N. 2000. Teaching by open–approach method in Japanese Mathematics Classroom. Teoksessa T. Nakahara & M. Koyama (toim.) Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME), Hiroshima, Vol. 1, 39–53.

Novak, J & Gowin, B. 1984. Learning how to learn: Cambridge University Press, suomennos: Opi Oppimaan. Helsinki: Gaudeamus 1998.

Nunokawa, K. 2005. Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. Journal of Mathematical Behavior 24, 325–340.

Opetushallitus 2000. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994 (4. korjattu painos). Helsinki: Opetushallitus.

Opetushallitus 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004: Oppivelvollisille tarkoitetun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, perusopetuksen valmistavan opetuksen opetussuunnitelman perusteet, lisäopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.

Pang, J. & Good, R. 2000. A review of the integration of science and mathematics: Implications for further research. School Science and Mathematics 100 (2), 73–82.

Pang, M. 2003. Two faces of variation: On continuity in the phenomenographic movement [1]. Scandinavian Journal of Educational Research, 47, (2), 145–156.

Parikka, M. & Rasinen, A. 1994. Teknologiakasvatuskokeilu: Kokeilun tavoitteet ja opetussuunnitelman lähtökohdat. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 15.

Patrikainen, R. 1997. Ihmiskäsitys, tiedonkäsitys ja oppimiskäsitys luokanopettajan pedagogisessa ajattelussa. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 36.

Patrikainen. R. 1999. Opettajuuden laatu. Ihmiskäsitys, tietokäsitys ja oppimiskäsitys opettajan pedagogisessa ajattelussa ja toiminnassa. Jyväskylä: PS-Kustannus.

Pea, R. 1993. Practices of distributed intelligence and designs for education. Teoksessa G. Salomon (toim.) Distributed cognitions: Psychological and educational considerations. Cambridge University Press, 47–87.

Pehkonen, E. 1991. Probleemakentät matematiikan opetuksessa, osa 2: Opettajankouluttajien käsityksiä probleemanratkaisun opettamisesta matematiikassa. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 98.

Pehkonen, E. 2000a. How do we understand problem and related concepts. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world; Proceedings of the topic study group 11 at ICME-9 meeting August 2000 in Japan. Turun yliopiston opettajankoulutuslaitos. Julkaisusarja C 14, 11–18.

Pehkonen, E. 2000b. Matemaattisen ongelmanratkaisun toteutuksesta peruskoulun yläasteella. Teoksessa M. Ahtee & T. Asunta (toim.) Tietoa ja toimintaa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksia. Jyväskylän yliopisto. Tutkiva opettaja 2/2000, 249–260.

Pehkonen, E. & Merenluoto, K. 2002. On primary teacher students´ mathematical skills and understanding. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Proceedings of the workshop on mathematical understanding at Turku in June 2002. Turun yliopiston opettajankoulutuslaitos. PrePrint 2, 64–71.

Pehkonen, E., Pekama, E. & Seppälä, R.1991. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. MAOL ry:n julkaisusarja 26. Forssa: MFKA-Kustannus.

Pehkonen, E. & Zimmermann, B. 1990. Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen. Osa 1. Teoreettinen tausta ja tutkimusasetelma. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 86.

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195.

Piaget, J. 1967a. Six psychological studies. New York: Random House.

Piaget, J. 1967b. The psychology of intelligence. (5. painos) London: Routledge & Kegan Paul.

Pirie, S. & Kieren, T. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and hoe we can represent it? Educational Studies in mathematics 26 (2–3) 165–190.

Pólya, G. 1948. How to solve it? A new aspect of mathematical method. (5. painos) Princeton, NJ: Princeton University Press.

Potari, D. & Jaworski, B. 2002. Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. Journal of mathematics teacher education 5, (4) 351–380.

Presmeg, N. 1986a. Visualization in high school mathematics. For Learning of Mathematics 63, 42–46.

Presmeg, N. 1986b. Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in Mathematics 17, 297–311.

Presmeg, N. 1992. Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics 23, 595–610.

Pugalee, D. 2004. A Comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. Educational Studies in Mathematics 55 (1) 27–47.

Pugalee, D. 2005. Writing to develop mathematical understanding. Norwood: Christopher–Gordon Publisher, Inc.

Rabinowitz, M. & Glaser, R. 1985. Cognitive structure and process in highly competent performance. Teoksessa F. D. Horowitz & M. O'Brien (toim.) The gifted and talented: Developmental perspectives. Washington, D.C.: American Psychological Association, 75–98. University of Pittsburgh. Learning Research and Development Center.

Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. 1994. Oppiminen ja koulutus. Helsinki. WSOY.

Rasinen, A. 2000. Developing technology education. In search of curriculum elements for Finnish general education schools. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 171.

Reed, S., Willis, D. & Guarino, J. 1994. Selecting examples for solving word problems. Journal of Educational Psychology 86, 380–388.

Reigeluth, C. & Frick, T. 1999. Formative Research: A Mehtodology for creating and improving design theories. Teoksessa C. Reigeluth (toim.) Instructional-Design theories and models. A new paradigm of instructional theory. Volume II. London: Lawrence Erlbaum Associates, 633–651.

Resnick, L. 1985. Cognition and instruction: Recent theories of human competence and how it is acquired. Teoksessa B. Hammonds (toim.) Psychology and learning: The master lecture series. Washington: APA, 123–187.

Richey, R. & Nelson W. 1996. Development research. Teoksessa D. Jonassen (toim.) Handbook of research on educational communications and technology: A project of the Association for educational communications and Technology. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1213–1245.

Runesson, U. & Mok, I. 2004. Discernment and the question: ”What can be learned?” Teoksessa F. Marton & A. Tsui (toim.) Classroom discourse and the space of learning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 63–87.

Ruokamo, H. 2000. Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 212.

Saariluoma, P. 1995. Taitavan ajattelun psykologia. (3. painos) Helsinki: Otava.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1993. Luova ongelmanratkaisu koulussa. Helsinki: Painatuskeskus.

Schiro, M. 1997. Integrating children’s literature and mathematics in the classroom. New York: Columbia University, Teachers college press.

Schoenfeld, A. 1985. Mathematical problem solving. London: Academic Press.

Schoenfeld, A. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense–making in mathematics. Teoksessa D. Grouws, (toim.) Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.

Schoenfeld, A. 1994 (toim.) Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schroeder, T. & Lester, F. 1989. Developing understanding in mathematics via problem solving. NCTM Yearbook, 31–42.

Schupp, H. 2005. Classroom variations on mathematical problems. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving in mathematics education. Proceedings of the Promath Meeting June 30-July 2, in Lahti. University of Helsinki. Research Report 261, 3–16.

Schurter, W. 2002. Comprehension monitoring: An aid to mathematical problem solving. Journal of Developmental Education. 26 (2), 22–33.

Shayer, M. 2002. Not just Piaget, not just Vygotsky, and certainly not Vygotsky as alternative to Piaget. Teoksessa M. Shayer & P. Adey (toim.) Learning intelligence: Cognitive acceleration across the curriculum from 5 to 15 years. Buckingham: Open University Press, 179–195.

Shore, B. & Kanevsky, L. 1993. Thinking processes: Being and becoming gifted. Teoksessa K. Heller, F. Monk, & A. Passow (toim.) International handbook of research and development of giftedness and talent. Oxford: Pergamon Press, 133–147.

Sierpinska, A. 1998. Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. Teoksessa H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (toim.) Language and communication in the mathematics classroom. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: 30–62.

Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Silvén, M., Kinnunen. R. & Keskinen, S.1991. Kohti itseohjautuvaa opiskelutaitoa. Turun yliopiston täydennyskoulutuskeskus.

Sintonen, M. 1987. Positivismi. Teoksessa: I. Niiniluoto & E. Saarinen (toim.) Vuosisatamme filosofia. Helsinki: WSOY, 1–39.

Sovelius–Sovio, E. 1992. Esteettisyys opetuksen sisältönä. Kuvaus esteettisen kasvatuksen kokonaisopetuskokeilusta. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 74.

Stacey, K. 1995. The chalenges of keeping open problem-solving open in school mathematics. International Reviews on Mathemtical Education 27 (2), 62–67.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. 1988. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Teoksessa R. Charles & E. Silver (toim.) The teaching and assessing of mathematical problem solving. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1–22.

Sternberg, R. 1996. What is mathematical thinking? Teoksessa R. Sternberg & T. Ben Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah NJ: Erlbaum, 303–318.

Sternberg, R. 1998. Abilities are forms of developing expertise. Educational Researcher, 27 (3), 11–20.

Sternberg, R. & Davidson, J. 1983. Insight in the gifted. Educational Psychologist, 18 (1), 51–57.

Stylianou, D. 2002. On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of a visual representation in expert problem solving. Journal of Mathematical Behavior 21, 303–317.

Sutherland, L. 2002. Developing problem solving expertise: The impact of instruction in a question analysis strategy. Learning and Instruction 12, 155–187.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2002. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena: Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

Tynjälä, P., Mason, L. & Lonka, K. 2001. Writing as a learning tool: An introduction. Teoksessa P. Tynjälä, L. Mason ja K. Lonka (toim.) Writing as a learning tool: Integrating theory and practice. Studies in writing vol. 7. Dordrecht: Kluwer Academic, 7–22.

Tynjälä, P. 2004. Asiantuntijuus ja työkulttuurit opettajan ammatissa. Kasvatus 35, (2), 174–190.

Tynjälä, P, Heikkinen, H. & Huttunen, R. 2005. Konstruktivistinen oppimiskäsitys oppimisen ohjaamisen perustana. Teoksessa P. Kalli & A. Malinen (toim.) Konstruktivismi ja realismi. Aikuiskasvatuksen 45. vuosikirja. Kansanvalistusseura. Vantaa: Dark, 20–48.

Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset: Seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Utriainen, O. 2004. Kokeellisuus ja voiman käsitteen merkityksen rakentaminen: ymmärtäminen ja selittäminen hahmottavassa ja mallintavassa lähestymistavassa. Helsingin yliopisto. Fysikaalisten tieteidenlaitos. Lisensiaatintutkimus.

Uusikylä, K. 2002. Voiko luovuutta opettaa? Teoksessa P. Kansanen & K. Uusikylä (toim.) Luovuutta, motivaatiota, tunteita: Opetuksen tutkimuksen uusia suuntia. Jyväskylä: PS-kustannus, 42–55.

Uusikylä, K. & Atjonen, P. 2000. Didaktiikan perusteet. Helsinki: WSOY.

Vaulamo, J. & Pehkonen, E. 1999. Avoimista ongelmatehtävistä peruskoulun yläasteen matematiikassa. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 205.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinckx, E. 1999. Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth grades, Mathematical Thinking & Learning 1, 195–229.

Viiri, J. 1996. Insinööriopiskelijoiden matematiikan alkutiedot. Teoksessa P. Maljojoki (toim.) Ammattikorkeakoulu rajojen murtajana. Joensuu: Pohjois-Karjalan ammattikorkeakoulun julkaisuja A. Tutkimuksia 2, 142–148.

Virkkala, V. 1994. Luova ongelmanratkaisu: Tiedon hankinta ja yhdistely toimiviksi kokonaisuuksiksi ammateissa, harrasteissa ja kotielämässä. (3. painos). Helsinki. Omakustanne.

Vygotsky, L. 1982. Ajattelu ja kieli. Vuonna 1931 ilmestyneestä venäjänkielisestä alkuteoksesta suomentaneet K. Helkama ja A. Koski-Jännes. Prismatietokirjasto. Espoo: Weilin & Göös.

Wang, F. & Hannafin, M. J. 2005. Design-based research and technology-enhanced learning environments. Educational technology research and development, 53 (4), 5–23.

Wellington, J. 2000. Educational research: contemporary issues and practical approaches. London: Continuum.

Wertsch, J., McNamee, G., McLane, J. & Budwig, N. 1980. The adult–child dyad as a problem-solving system. Child Development 51, 1215–1221.

White, R. & Arzi, H. 2005. Longitudinal studies: Designs, validity, practicality, and value. Research in Science Education 35, 137–149.

Wittmann, E. 2001. Developing mathematics education in a systematic process. Educational Studies in Mathematics 48, 1–20.

Wood, T. & Berry, B. 2003. Editorial: What does "Design Research" offer mathematics teacher education? Journal of Mathematics Teacher Education 6, 195–199.

Zan, R., Brown, L., Evans, J & Hannula, M., S. 2006. Affect in Mathematics Education: An Introduction. Educational Studies in Mathematics 62, (1) May

Zawojewski, J. & Carmona, G. 2001. A developmental and social perspective on problem solving strategies. Teoksessa R. Speiser, C. Maher & C. Walter (toim.) Proceedings of the PME-NA 2001 conference. Columbus (OH): ERIC (1), 549–560.

Zimmermann, B. 2000. On some issues on mathematical problem solving from an European perspective. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world. Proceedings of the topic study group 11 at ICME-9 meeting August 2000 in Japan. University of Turku Faculty of Education Report Series C 14, 55–62.

Zimmermann, B. 2003. On the genesis of mathematics and mathematical thinking–a net work of motives and activities drawn from the history of mathematics. Teoksessa L. Haapasalo & K. Sormunen (toim.) Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the Finnish mathematics and science education research association. University of Joensuu. Bulletins of the faculty of education 86, 29–47.

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. uudistettu painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111–122.

Oppikirjalähteet

Helin, E. & Lohi, K-L. 2001. Hei, nyt lasketaan 6 A. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Helin, E. & Lohi, K-L. 2001. Hei, nyt lasketaan 6 B. Opettajankirja. Helsinki: Otava.

Ilmavirta, R., Koivisto, M., Salonen, M. & Uus-Leponiemi, T. 2000. Laskutaidon tuumavihko 6, syysosa. (3. painos) Porvoo: WSOY

Karvinen, L., Vähäpassi, A. & Vaahtokari, A. 2001. Mieti ja laske 5: Kevät. Opettajan kirja. Helsinki: Tammi.

Karvinen, L., Vähäpassi, A. & Vaahtokari, A. 2001. Mieti ja laske 5: Syksy. Opettajan kirja. Helsinki: Tammi.

Koivisto, M., Salonen, M., Sintonen A–M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2006. Laskutaito 5. Opettajan kirjan syysosa. (1. uudistettu painos) Helsinki: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2002. Laskutaito 5. Opettajan kirjan syysosa. (3–4. painos) Helsinki: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2005. Laskutaito 6. Opettajan kirjan syysosa. (5. painos) Helsinki: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T. & Ilmavirta, R. 2003. Laskutaito 6. Opettajan kirjan kevätosa. (5. painos) Helsinki: WSOY.

Leppäaho, H. 2004b. Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle. Helsinki: WSOY.

Salonen, M. & Uus-Leponiemi, T. 2001. Laskutaidon yhteistuumat 6. (2. eurotarkistettu painos) Helsinki: WSOY.

Wuolijoki, H. & Norlamo, P. 1999. Matemaattinen ongelmanratkaisu. Lukion lyhyt matematiikka. Tutkivaa matematiikkaa 2. (4. uudistettu painos) Porvoo: WSOY.

LIITTEET

LIITE 1 Tutkimuslupahakemus koeryhmän oppilaiden vanhemmilta

6A LUOKAN VANHEMMILLE

Arvoisat vanhemmat!

Teen tutkimusta matematiikan opetuksen ja erityisesti ongelmanratkaisutaidon kehittämisestä peruskoulussa. Tätä varten olen suunnitellut kurssin, jonka avulla oppilaiden ongelmanratkaisu-taitoja ja matemaattista ajattelua pyritään kehittämään. Kurssi kuuluu valtakunnallisen matematiikan, fysiikan ja kemian opetuksen tutkijakoulun tutkimushankkeisiin ja sen ohjauksesta vastaa Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos.

Luokanopettaja Xxxxx Xxxxxx, Xxxxxxxx koulun rehtori Xxxxxx Xxxxxxx ja koulutoimenjohtaja Xxxxx Xxxxxxx, ovat antaneet luvan kurssin toteuttamiseen 6 A luokassa. Kurssi toteutetaan normaalien oppituntien puitteissa ja sen sisältö on voimassa olevan opetussuunnitelman mukainen.

Oppilaiden henkilötiedot ja niiden yhteys tutkimustuloksiin säilyvät tietysti luottamuksellisina tutkimuksen raportoinnissa.

Tärkeintä on, että Te vanhemmat, suhtaudutte myönteisesti tutkimushankkeeseen!
Vastaan mielelläni kurssia koskeviin kysymyksiin.

yhteistyöterveisin:

Henry Leppäaho
luokanopettaja / tutkijakoulutettava

p. 050–5251798

LIITTEET 2–8 ON POISTETTU VERKKOVERSIOSTA TEKIJÄNOIKEUDELLISISTA SYISTÄ

LIITE 9 Koeryhmän oppilaiden haastattelujen litteroinnit

Haastattelukysymysrunko:

Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
- Miksi pidit siitä, mitä kerroit?
- Mistä muusta pidit?

Tuleeko mieleesi kurssilta joku tehtävä, josta pidit erityisesti?
- Mikä siinä oli sinusta kivaa?
- Käytitkö tässä ratkaisukarttaideaa? Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?
- Mikä sinusta on ongelmanratkaisua?

Kerro mistä et pitänyt tällä kurssilla.
- Miksi et pitänyt siitä?
- Mistä muusta et pitänyt?

Tuleeko mieleesi kurssilta joku tehtävä, josta et erityisesti pitänyt?
- Miksi et pitänyt siitä? (Mikä siinä oli vaikeaa?)

Muuttuiko suhtautumisesi ongelmatehtäviin kurssin aikana?
- Jos muuttui, niin kerro miten?
- Mistä arvelet tämän johtuvan?

Lisääntyikö vai vähenikö kiinnostuksesi ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan kurssin aikana?
- Mistä arvelet tämän johtuvan?

Mitä asioita mielestäsi olisi saanut olla enemmän kurssilla? Mitä asioita olisit vähentänyt kurssilta?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

Lyhenteiden selitykset: *ak* = sijoitus alkukokeessa, *lk* = sijoitus loppukokeessa ja *vk* = sijoitus viivästetyssä kokeessa

ak	*lk*	*vk*	**Aapo A**
8	*1*	*4*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
AAPO A: Mää pi'in niistä tehtävistä, jossa joutu tekemään kaikkia numerotehtäviä. Emmä oikeen semmosista, jossa piti kirjottaa.
HL: Oliko muuta kivaa?
AAPO A: Varmaan ku ratkastaan ongelmia. Oppia uutta asiaa.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
AAPO A: En oikein pitänyt siitä, että piti asiat selittää niin tarkasti. Se vie aikaa ja siinä joutuu miettimään. Piti osata kirjottaa niin, että siitä ymmärtää toisetki.
HL: Oliko kurssilla joku tehtävä, josta pidit erityisesti?
AAPO A: Varmaan semmosta, että on pari kohtaa, että siinä lukee luvut ja pitää tietää vaikka kaheksannen kohan vastaukset.
HL: Käytiksä semmosessa tehtävässä ratkaisukartta-ideaa?
AAPO A: Emmä oikeen. Mä vaan mietin päässä.
HL: Sovelliksä siinä näitä ongelmanratkaisuvaiheita?
AAPO A: Piti siinä miettiä, mitkä luvut tulee mihin ja mitkä pitää kertoa millä. Ja tarkistaa vielä lopuks.
HL: Mikä siinä on ongelmanratkaisua?
AAPO A: Kun pitää tietää se luku, mikä siihen pitää tulla.
HL: Mistä tehtävästä et pitänyt?
AAPO A: Semmosista pitkistä tehtävistä, jossa lukee hirveesti niitä tekstejä. Ja on vaan vähän kunnollista laskemista.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
AAPO A: Ei oikeen.
HL: Minkälainen sun suhtautuminen on?
AAPO A: Ihan hyvä. Niitä on mukava tehä.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus ongelmatehtäviä ja matematiikkaa kohtaan kurssin aikana?
AAPO A: Kyllä se samalla tasolla pysyy.

ak	*lk*	*vk*	**Aaro A**
9	*4*	*5*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
AARO A: Ryhmätöistä, kun sai kavereitten kanssa laittaa…
HL: Mistä muusta?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

AARO A: Laivan rakennus oli ihan mukavaa. Sitä PS-E –levyä oli mukava rämplätä.
HL: Mikä oli susta mukava tehtävä?
AARO A: Varmaan, ku piti suunnitella laiva.
HL: Oliko muuta?
AARO A: Tää oli mukava.
HL: Tunnelitehtävä… Käytiksä noissa tehtävissä ratkaisu –ideaa?
AARO A: Vähän, mutta emmä kovin paljo.
HL: Oliko siitä hyötyä vai häirittikö se?
AARO A: Hyötyä ehkä vähän. Pysty helpommin hahmottamaan sen tehtävän.
HL: Mikä on susta ongelmanratkaisua?
AARO A: Joku tehtävä, mitä ei oo vielä ratkastu ja siihen pitää keksiä vastaus.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
AARO A: No ehkä läksyjä oli vähän liikaa, mutta…
HL: Mistä tehtävästä et pitänyt?
AARO A: Tämä omenapuu..kun siinä piti tehä tuo jana, kun sitä ei muuten saanu millään, niin siinä meni aikaa.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
AARO A: Ei oikeestaan. Niitä on joskus ihan mukava ratkoa.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan?
AARO A: Pysy ihan samana.
HL: Mitä asioita olisi saanut olla enemmän kurssilla?
AARO A: Esimerkiksi tehtäviä, jossa pitää miettiä, miten pääsee pois jostain.
HL: Mitä vähentäisit?
AARO A: Ehkä läksyjä ja ratkaisukarttoja, kun niitä piti kirjoittaa niin paljo.
HL: Tuntuko, että tiesit jo vastauksen, mutta kirjottaminen vei aikaa.
AARO A: Joo.

ak	*lk*	*vk*	**Anne A**
11	*6*	*11*	

HL: Mistä tykkäsit ongelmanratkaisukurssilla?
ANNE A: Tykkäsin tosi paljo niistä tulitikkutehtävistä.
HL: Mistä muusta?
ANNE A: Kaikesta ratkaisuhommasta. Ne pienet laput, jota me ryhmässä ratkaistiin.
HL: Mikä oli sun suosikkitehtävä?
ANNE A: Talotehtävä.
HL: Eli joutuu tekemään tietyn kokosia tontteja ja tontilla pitää olla talo ja puska.
ANNE A: Ja tulitikkutehtävät.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

HL: Käytitkö noissa tehtävissä sitä ratkaisukartta-ideaa?
ANNE A: Käytin mä joissaki, mutta joissaki ei tarttenu ollenkaan.
HL: Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?
ANNE A: Oli siitä hyötyä. Pystyy ratkasemaan kaikkia enemmän.
HL: Mikä susta on ongelmanratkaisua?
ANNE A: Kaikkia laskuja ja ratkaisutehtäviä.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
ANNE A: Näistä kilometri ja desilitra…
HL: Eli tilavuus- ja kulutuslaskut.
ANNE A: Ne oli vaikeita.
HL: Mistä muusta et pitänyt?
ANNE A: Läksyjä oli aika paljo. Enemmän kuin tavallisesti.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin?
ANNE A: Ei se kyllä oikein muuttunu. Edelleen ne on ihan kivoja.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
ANNE A: Ei sekään oikein muuttunu.
HL: Jos matikkaa aattelet kouluaineena, jos se pitäis järjestää, onko se loppu- vai alkupäässä?
ANNE A: Siinä keskivaiheilla.
HL: Mitä asioita tällä kurssilla olisi saanut olla enemmän?
ANNE A: Tulitikkutehtäviä. Ja ehkä muunnostehtäviä, pitää muuttaa eri tilavuusyksiköitä.
HL: Mitä oisit vähentäny?
ANNE A: Semmoset turhat, missä ei opi niin.
HL: Oppiiko tulitikkutehtävissä?
ANNE A: No ei niissäkään. Ne on vaan niin hauskoja.

ak	*lk*	*vk*	**Ari A**
12	*7*	*20*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
ARI A: Ryhmätöistä. Kun sai ryhmässä miettiä niitä tehtäviä.
HL: Oliko muuta mukavaa?
ARI A: No se pistepörssin voittaminen.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
ARI A: Liiasta läksyistä.
HL: Miksi se oli kurjaa?
ARI A: Kun niitä oli niin paljon, niin ei oikein jaksanu tehä.
HL: Mistä muusta et pitänyt?
ARI A: No…kun piti kirjottaa niin paljon.
HL: Oliko joku tehtävä, josta pidit erityisesti?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

ARI A: Omenapuun istutus, koska piti niin tarkasti miettiä niitä aikoja.
HL: Käytitkö siinä sitä ratkaisukartta-ideaa?
ARI A: Kirjotin tietoja ylös, mutten piirtäny.
HL: Oliko siitä kirjottamisesta hyötyä?
ARI A: Tajus vähä enemmän ku kirjotti.
HL: Tuliko sovellettua noita ongelmaratkaisuvaiheita siinä tehtävässä?
ARI A: Kyllä joissaki, kaikista vaikeimmissa tehtävissä.
HL: Jos katotaan istutustehtävää, mikä siinä on sun mielestä ongelmanratkaisua?
ARI A: Ainakin b –kohta…jos istuttavat yhteensä 72 omenapuuta, kuinka kauan he silloin ovat olleet töissä.
HL: Mikä siinä on sitä ratkasemista?
ARI A: Pitää ensin laskea kuinka paljo ne yhteensä istuttaa.
HL: Mistä et kurssilla pitänyt?
ARI A: Laivan suunnitteleminen oli tyhmää. Laivan tekeminen oli hauskempaa.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
ARI A: Tuli enemmän kiinnostusta. Ne on paljon mukavampia kuin matematiikan tehtävät.
HL: Miksi?
ARI A: Piti ratkasta niitä tehtäviä. Ei tarvinu niin paljo laskea. Piti päätellä.
HL: Vähenikö vai lisääntykö sun kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan?
ARI A: Ainaki ongelmaratkaisutehtäviin tuli kiinnostusta.
HL: Mikä siihen vaikutti?
ARI A: Tämä kurssi varmaan.

ak	*lk*	*vk*	**Arvo A**
16	*2*	*1*	

HL: Kerro mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
ARVO A: Ne oli kaikki ihan mukavia. Jotkut oli vähän vaikeita.
HL: Kerro mistä et pitänyt tällä kurssilla.
ARVO A: Kun tuli niitä monisteita niin lisää. Niissä vähä oli tekemistä.
HL: Onks teillä aikasemmin ollu läksyjä paljon?
ARVO A: Ei niin hirveesti.
HL: Mistäs muusta oot pitäny?
ARVO A: Ainaki tuon laivan suunnittelu…
HL: Tuleeko sun joku tehtävä mistä erityisesti pidit?
ARVO A: Tää…ihan hyvä.
HL: Eli sortuva tunneli. Mikä tommosessa tehtävässä oli mukavaa?
ARVO A: Siinä oli kaikkea selvitettävää.
HL: Käytiksä tossa ratkaisukartta-ideaa?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

ARVO A: Joo, kyllä.
HL: Härittikö vai oliko siitä hyötyä siinä tehtävässä?
ARVO A: Kyllä siitä ihan oli apua.
HL: Sovelliksä näitä ongelmaratkaisunvaiheita?
ARVO A: No kyllä mä…välillä.
HL: Mitä vaiheita ongelmaratkaisussa on oltava, kun sä tehtävää ratkot.?
ARVO A: No otetaan kaikki tiedot… voi tehdä jotain apupiirroksia…sitte ratkastaan.
HL: Mitä sitte on hyvä vielä tehä?
ARVO A: Tarkistaa.
HL: Mikä sun mielestä on ongelmanratkaisua?
ARVO A: Pitää selvittää vaikka kuka on ensimmäinen.
HL: Tuleeko sun mieleen tältä kurssilta tehtävä mistä et pitänyt?
ARVO A: Ei oikein…
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
ARVO A: No ehkä vähän…kun jou'uin tekeen niitä.
HL: Mistäs arvelet sen johtuvan?
ARVO A: Niitä on harjoteltu ja tehty paljo.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus näitä asioita kohtaan?
ARVO A: No ei kovinkaan muuttunu paljo muuten ku niissä ongelmatehtävistä…tietää paremmin, miten niitä kannattaa ratkaista.
HL: Ootko yleensä aina ollut kiinnostunut matematiikasta?
ARVO A: Oon.
HL: Onkse sun suosikkiaine vai onko vielä joku muu mukavampi aine?
ARVO A: No melkeen on.

ak	*lk*	*vk*	**Piia B**
18	*10*	*24*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
PIIA B: Laivan tekemisestä.
HL: Miksi?
PIIA B: Kun sai olla puukäsityöluokassa, kun muuten ei siellä tule oltua.
HL: Piditkö jostain muusta?
PIIA B: Päättely- ja pulmatehtävät, joissa ei tarvinnut laskea kovasti. Ne tulitikkutehtävät, koska niissä sai miettiä…muunnostehtävät oli kivoja.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PIIA B: Siitä, kun sai läksyä. Meillä ei muuten oo paljon läksyä.
HL: Mistä muusta et pitänyt?
PIIA: Tehtävistä, joissa piti laskea paljon...
HL: Piditkö jostain tehtävästä erityisesti?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

PIIA B: Semmosia…missä pitää laittaa kaikkea järjestykseen. Sitte nää…mielestäni osaan näitä *(näyttää tilavuuden ja pinta-alan muunnoksia)*.
HL: Pinta-alan ja tilavuuden muunnokset?
PIIA B: Niin. Ja sitte tää moniste oli ihan kiva *(näyttää pulmapaja monistetta)*.
HL: Eli pulmapajahomma.
PIIA B: Niin.
HL: Käytitkö ratkaisukarttaideaa missään tehtävässä?
PIIA B: En.
HL: Sovelsitko niissä tehtävissä ongelmanratkaisuvaiheita?
PIIA B: Joo.
HL: Muuttuko suhtautumisesi ongelmatehtäviin kurssin aikana?
PIIA B: Muuttu. Mä en tykkää laskuista, niin nyt mä tykkään vielä vähemmän.
HL: Lisääntykö tai vähenikö kiinnostuksesi matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
PIIA B: Emmä tiiä. Täällä oli liian vaikeeta.
HL: Miksi?
PIIA B: Mä oon niin typerä, ettei mun aivoihin mahu se.
HL: En usko että siitä on kysymys

ak	*lk*	*vk*	**Paavo B**
19	*16*	*25*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
PAAVO B: Ku laivaa rakennettiin.
HL: Mistä tehtävästä pidit erityisesti?
PAAVO B: Kaikkia fysikkaan liittyviä.
HL: Oliko ratkaisukartta-ideasta hyötyä vai häirittikö se?
PAAVO B: Oli siitä hyötyä. Se selvitti tehtävää.
HL: Mikä on ongelmanratkaisua?
PAAVO B: Kun ratkasee jonku tehtävän.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PAAVO B: Läksyjä oli liikaa.
HL: Mistä tehtävästä et pitäny?
PAAVO B: Emmä tiiä.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin?
PAAVO B: Ei.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan?
PAAVO B: Ei lisääntyny eikä vähentyny.
HL: Mitä laittasit kurssille lisää?
PAAVO B: En mitään. Tässä oli kaikki tarvittavat.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

HL: Mitä oisit vähentäny?
PAAVO B: En mitään.

ak	*lk*	*vk*	**Pilvi B**
25	*23*	*42*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
PILVI B: Ehkä laivan rakennus oli kivointa ja ehkä jotku tulitikkutehtävät.
HL: Miksi?
PILVI B: Oli kiva rakentaa ja tehä käsillä. Tikkuja oli kiva siirrellä. Ei tarvinnu niin kauheasti miettiä.
HL: Tuleeko mieleen joku tehtävä, josta erityisesti tykkäsit?
PILVI B: Tämä.
HL: Eli pitää nimetä tuohon kuvioon tietty luku, jotta tuo lauseke toteutuu.
PILVI B: Ja nuo tilavuuslaskut.
HL: Käytitkö ratkaisukartta- ideaa jossaki tehtävässä?
PILVI B: Käytin aika paljon.
HL: Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?
PILVI B: Hyötyä. Siitä sai selkeämmin katottua kaikki ne systeemit.
HL: Mikä susta on ongelmanratkaisua?
PILVI B: Vaikeitten tehtävien ratkaisemista.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PILVI B: Kotitehtävistä ja ärsyttävistä tehtävistä.
HL: Mitä ne ärsyttävät tehtävät on?
PILVI B: No kuinka monta palikkaa mahtuu minnekin.
HL: Miksi sä et tykännyt niistä?
PILVI B: Kun oli niin vaikea laskea. Emmä älynny.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
PILVI B: Muuttu. Ne alko tulla vaikeammaksi eikä niitä ollu enää kovin kiva laskea…niin kiinostuskin väheni.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
PILVI B: Pysyi samana. Onhan siitä *(kurssista)* hyötyä niissä laskuissa.
HL: Mitä oli saanut olla enemmän tällä kurssilla?
PILVI B: Ryhmätöitä ja jotain rakennusta.
HL: Mitä olisit vähentäny?
PILVI B: Läksyjä ja niitä ärsyttäviä tehtäviä.

ak	*lk*	*vk*	**Pekka B**
26	*25*	*15*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?

(jatkuu)

PEKKA B: Laivan rakentamisesta. Siinä sai tehä kaikkea käytännössä.
HL: Mistä tehtävästä pidit erityisesti?
PEKKA B: Tämmöset…
HL: Eli tämä lammas, susi, kaali -tehtävä. Mikä siinä oli kivaa?
PEKKA B: Siinä ei tarvinnu niin kauheesti miettiä. Se oli heleppo.
HL: Käytitkö vaikka tossa tehtävässä sitä ratkaisukartta –ideaa?
PEKKA B: Käytin. Piirsin tähän. Ne tiedot jäi vaan laittamatta.
HL: Oliko ratkaisukartta –ideasta hyötyä vai häiritsikö se?
PEKKA B: Oli siitä hyötyä. Sai ainaki selville, jos joku toinenki katto mitä siinä tehtävässä piti tehä.
HL: Mikä sun mielestä on ongelmanratkaisua?
PEKKA B: Vaikean tehtävän ratkaseminen. Missä on paljon laskettavaa.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PEKKA B: Niistä tilavuuslaskuista. Ne oli hankalia.
HL: Mitä läksyistä sanot? Oliko nyt enemmän?
PEKKA B: Ainahan sitä vähä enemmän, mutta ei se mitenkään…
HL: Minkä tehtävistä jättäisit pois?
PEKKA B: Tilavuuslaskut.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin?
PEKKA B: Muuttu se vähän. Oli helepompi ratkasta.
HL: Mistä se johtu?
PEKKA B: Ku opeteltii sitä niin paljo.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
PEKKA B: Ehkä se vähän lisäänty, kun nämä tehtävät oli aika hauskoja.
HL: Mitä pitäs olla enemmän tämmösellä kurssilla?
PEKKA B: Tehtäs enemmän puukäsityöluokassa.
HL: Mitä vähentäisit?
PEKKA B: Missä pitää paljo laskee.

ak	*lk*	*vk*	**Pirjo B**
30	*24*	*17*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
PIRJO B: Ryhmässä ne tehtävät oli hauskoja, kun sai tehä kavereitten kans.
HL: Mikä oli erityisen kiva tehtävä?
PIRJO B: Nämä. *(Näyttää sanallista tehtävää)*
HL: Nää on niitä sanallisia tehtäviä, jossa pitää laittaa järjestykseen.
PIRJO B: Oli hauska päätellä.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PIRJO B: Numeropäättelytehtävät oli vaikeita.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviä kohtaan?
PIRJO B: Tuli ne helpommaksi.
HL: Mistä se johtu?
PIRJO B: Varmaan niistä ratkaisukartoista.
HL: Niistäkö oli sulle apua?
PIRJO B: Joo.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
PIRJO B: Emmä tiiä.
HL: Ooksää yleensä ollu kiinnostunu matematiikasta? Onko se aine kärki- vai loppupäässä?
PIRJO B: Loppupäässä.
HL: Mitä asioita kurssilla olisi saanu olla enemmän?
PIRJO B: Emmä osaa sanoa, kun niitä oli ihan tarpeeksi.
HL: Entä vähemmän?
PIRJO B Kotitehtäviä

ak	*lk*	*vk*	**Pirkko B**
32	*18*	*33*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
PIRKKO B: Laivan rakennus, tikkutehtävät ja kun piti ryhmässä ne työt tehä.
HL: Miksi?
PIRKKO B: Emmä oikein tiijä. Ne oli hauskoja.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PIRKKO B: Pinta-alalaskuista.
HL: Miksi?
PIRKKO B: Mä en tykkää matikasta yhtään.
HL: Löytyykö jokin tehtävä, josta erityisesti pidit?
PIRKKO B: Kun sai tehdä ryhmässä.
HL: Tuliko niissä tehtävissä käytettyä ratkaisukartta-ideaa?
PIRKKO B: Tuli.
HL: Oliko siitä kartasta hyötyä?
PIRKKO B: Joissaki oli, joissaki ei.
HL: Missä se kartta häiritsi?
PIRKKO B: Sillon ku oli muutenki vaikea tehtävä, niin oli vaikea tehä ratkaisukartta.
HL: Milloin siitä oli hyötyä?
PIRKKO B: Kun piti matkoja mitata.
HL: Miten sä sovelsit ratkaisuohjeita?
PIRKKO B: Mä vaan laskin.
HL: Mikä on ongelmanratkaisua?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

PIRKKO B: Emmä tiiä.
HL: Mistä laskuista et pitänyt?
PIRKKO B: Nämä…*(näyttää peruslaskutoimituksia)*
HL: Peruslaskut…Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
PIRKKO B: Ne on helpompia, ku kurssi on käyty.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan?
PIRKKO B: Pysyy varmaan hyvin samana.

ak	*lk*	*vk*	**Päivi B**
35	*31*	*26*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
PÄIVI B: Mää tykkäsin varmaan siitä laivan rakennuksesta. Mää tykkään maalata ja kaikkee tällästä pikkunäpräystä, hioa ja hioin sitä mastoa varmaan liikaaki.
HL: Oliko muuta?
PÄIVI B: Mä tykkään kaikesta semmosesta, jossa täytyy käyttää älliä…niinku se järvenylityshomma.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
PÄIVI B: Muunnostehtävistä.
HL: Mistä erityisesti pidit?
PÄIVI B: Ryhmätehtävistä.
HL: Miksi?
PÄIVI B: Mä tykkään päätellä kaikkee.
HL: Käytittekö ryhmässä sitä ratkauskartta-ideaa?
PÄIVI B: Jonku verran.
HL: Oliko siitä hyötyä vai haittaa?
PÄIVI B: Oli siitä hyötyä jonku verran.
HL: Sovelliksä niitä ongelmaratkaisuvaiheita?
PÄIVI B: Emmä kai.
HL: Mikä niissä tehtävissä oli ongelmanratkaisua?
PÄIVI B: Se on sitä kun pitää setviä…emmä osaa selittää.
HL: Oliko jotain tehtävää, mistä et erityisesti pitänyt?
PÄIVI B: Se muunnostehtävä.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
PÄIVI B: Miinuksen puolelle. Mää en yhtään tykkää matikasta, niinku mun sisko.
HL: Muuttuko suhtautuminen yleensä ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan?
PÄIVI B: Se on ihan kiinni tehtävistä. Emmä tiiä. Mutta se kartta kyllä auttoi.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

ak	*lk*	*vk*	sp	*lk*	**Sampo C**
38	*35*	*45*	P	*a*	

HL: Kerro mistä pidit tällä ongelmakurssilla?
SAMPO C: Jostain tulitikkutehtävistä.
HL: Minkä takia?
SAMPO C: Ne on vaan niin hauskoja.
HL: Oliko muuta mukavaa?
SAMPO C: No jotku numerotehtävät.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
SAMPO C: En ainakaan läksyistä.
HL: Jaksoitko olla tunneilla?
SAMPO C: Joo.
HL: Mistä tehtävistä pidit kursseilla, tulitikkutehtävien lisäksi?
SAMPO C: Jotku ryhymätyöt.
HL: Mikä ryhmätyössä oli kivaa?
SAMPO C: Kun sai ratkoa yhessä.
HL: Oliko ryhmässä sellasia tehtäviä, jossa saattoi käyttää ratkaisukartta-ideaa?
SAMPO C: No ei ollu.
HL: Jäikö mieleen, että sovelsitko niissä ryhmätehtävissä ongelmaratkaisuvaiheita?
SAMPO C: Jonki verran.
HL: Osaatko kertoa miten?
SAMPO C: En.
HL: Mikä ryhmätehtävissä oli sun mielestä ongelmanratkaisua?
SAMPO C: Kaikki.
HL: Tuleeko kurssilta mieleen tehtävä, josta et erityisesti pitänyt?
SAMPO C: Ei.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
SAMPO C: Ei se oikein.
HL: Millainen suhtautuminen sulla yleensä on matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun?
SAMPO C: En osaa sanoa.
HL: Onko ne tärkeitä vai vähemmän tärkeitä?
SAMPO C: Vähemmän tärkeitä.
HL: Miten sun suhtautuminen muuttu ongelmatehtäviin kurssin aikana?
SAMPO C: Ei mitenkään.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

ak	*lk*	*vk*	**Sari C**
40	*11*	*29*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
SARI C: Laivan rakentamisesta, sanallisista ja ryhmätöistä.
HL: Minkä takia?
SARI C: Oli vaan hauska tehdä vihkoon ja yhessä miettiä.
HL: Mikä oli oikein mukava tehtävä?
SARI C: Kaikki tämmöset sanalliset.
HL: Miksi tykkäsit niistä?
SARI C: Ne oli vaan mukavia. Sai harjotusta ainaki.
HL: Tuliko sitä ratkaisukartta-ideaa käytettyä noissa tehtävissä?
SARI C: Tuli.
HL: Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?
SARI C: Hyötyä.
HL: Minkälaisissa siitä oli hyötyä?
SARI C: Jos oli vaikka pitkä sanallinen…voi lukea ja laittaa vaikka paperille nimiä.
HL: Mikä susta on ongelmanratkaisua?
SARI C: Vaikka kaikki vaikeammat tehtävät ja kotonakin voi tulla joskus semmosia…
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
SARI C: Kaikki oli ihan mukavaa…
HL: Mutta jos joku tehtävätyyppi pitäisi tiputtaa pois, niin mikä se olisi?
SARI C: No..ne kulutuslaskut, niistä mä en oikein pitäny ja se Pythagoraan lause niistä mä en oikein tykänny.
HL: Miksi sä tiputtaisit ne ensimmäisenä?
SARI C: No ne oli vähä vaikeaa.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
SARI C: Muuttu aika paljonki.
HL: Kerro miten?
SARI C: No ennen..ei tajunnu laittaa vaikka jotain piirustuksia, vaan yritti ratkoa päässä. Ja se meni aina väärin. No kiinnostu siitä ja oppi nyt sellasen kartan.
HL: Siitä oli sun mielestä apua, siitä kartasta?
SARI C: Joo.
HL: Jos ajatellaan ongelmaratkaisua ja matematiikkaa, niin lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus näihin asioihin?
SARI C: Lisäänty.
HL: Mistä arvelet sen johtuvan?
SARI C: Kyllä mä matikasta oon tykänny, mutta…nyt tykkään vielä enemmän kun tuli tommosia tehtäviä.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

HL: Jos järjestäisit tämmösen kurssin, mitä kurssilla voisi olla vielä enemmän?
SARI C: Ei mitään. Kaikki oli hyviä tehtäviä ja tarpeeksi oli välillä haastavia ja välillä helpompia.
HL: Mitä asioita olisit vähentänyt kurssilla?
SARI C: No ehkä vähän vähemmälle niitä muunnoslaskuja. Mutta jos se on tärkeää, niin sitä pitää opettaa kaikille niin että jää päähän.

ak	*lk*	*vk*	**Sini C**
41	*28*	*21*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?
SINI C: Oli kivaa ja kivoja tehtäviä ja sai rakentaa…*(laivaa)*
HL: Oliko muuta kivaa?
SINI C: Ne tikkutehtävät.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
SINI C: Niitten pinta-alojen laskemisesta.
HL: Mistä tehtävästä pidit erityisesti?
SINI C: Tämä.
HL: Kaks aikuista ja kaks lasta? Miksi?
SINI C: Kun oli niin kivaa arvailla.
HL: Tuliko sulla käytettyä sitä ratkaisukartta-ideaa?
SINI C: Yleensä käytin. Siitä oli hyötyä.
HL: Miten sä sovelsit niitä ongelmanratkaisuvaiheita?
SINI C: Ainaki yritin käyttää.
HL: Mikä susta on ongelmanratkaisua?
SINI C: Jos on vaikea tehtävä, se pitää ratkasta.
HL: Tuleeko mieleen joku tehtävä, josta et pitänyt?
SINI C: Tuo.
HL: Se liittyy niihin tila- ja pinta-alalaskuihin. Miksi et pitänyt?
SINI C: Niissä oli laskemista.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
SINI C: Ne tuntu vähän helpommilta.
HL: Mistä se johtu?
SINI C: Tästä kurssista.
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaa ja ongelmanratkaisua kohtaan?
SINI C: Ehkä vähä lisäänty.

ak	*lk*	*vk*	**Simo C**
46	*9*	*23*	

HL: Mistä pidit ongelmanratkaisukurssilla?

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

SIMO C: Laivanrakennuksesta. Se oli aika kiva. Saatiin vielä sinne kunniapaikalle.
HL: Minkä takia sä pidit siitä laivanrakennuksesta?
SIMO C: Sitä oli mukava tehä…ja mittailla. Mä oon muutenki pitäny puukäsityöstä.
HL: Oliko joku muu pistä pidit?
SIMO C: Mää pidin siitä, kun oltiin Arvo A:n kanssa tekemässä niitä ryhmätöitä.
HL: Mistä et pitänyt tällä kurssilla?
SIMO C: Ei tuu kyllä oikeen mieleen. Kaikki oli ihan OK.
HL: Tuleeko kurssilta mieleen joku erityinen tehtävä, josta pidit?
SIMO C: Ei.
HL: Oliko kaikki ihan samanlaisia?
SIMO C: Kaikki oli yhtä mukavia.
HL: Mikä noissa tehtävissä sitten oli kivaa?
SIMO C: Matikka on just samanlaista ku tämä, paitsi että mentiin jo eilen… yläasteen tehtäviä käytiin. Mukavaa tietää jo etukäteen.
HL: Puhuttiin ratkaisukarttaideasta…käytitsä sitä niissä tehtävissä?
SIMO C: Parissa tehtävässä. Aika harvoin.
HL: Jos ajatellaan ongelmanratkaisuvaiheita. Miten sä sovelsit niitä?
SIMO C: En mää huomannu oikeen.
HL: Sää vain teit?
SIMO C: Mää vain tein. Mutta sitte luokkakäsitykset tuli…ja joo…että oon tehny…sitä ratkaisukarttaa…
HL: Sä et ehkä tiedostanu, mutta huomasit sitte, että näinhän se meni?
SIMO C: Niin.
HL: Et tainu löytää mitään tehtävää, josta et olis pitänyt. Vai löysitkö?
SIMO C: En löytänyt mitään.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmantehtäviin kurssin aikana?
SIMO C: Ei mun mielestä.
HL: Mistäs arvelet, et näin kävi? Ootsä aina pitänyt ongelmatehtävistä vai et oo pitäny vai..
SIMO C: Se on ihan mukavaa..ongelmanratkaisut…tulitikut, laiva, parityöt. Niitä on tosi mukavaa tehä aina kaikkien kavereitten kanssa.
HL: Lisääntykö vai vähenikö kiinnostus ongelmanratkaisua ja matematiikkaa kohtaan kurssin aikana?
SIMO C: Ehkä vähä kiinnostu enemmän.
HL: Mistäs arvelet, että se johtui?
SIMO C: Ku mennään yläasteelle niin ajattelee, että mitähän kaikkea siellä tulee, niin nyt tiietään jo vähä etukäteen.

(jatkuu)

LIITE 9 (jatkuu)

ak	*lk*	*vk*	**Suvi C**
47	*42*	*22*	

HL: Mistä pidit ongelmaratkaisukurssilla?
SUVI C: Mä tykkäsin ainaki niistä paritehtävistä. Ja sitte itetekemistä.
HL: Miksi?
SUVI C: Mä tykkäsin enemmän tehdä parin kanssa kuin yksin.
HL: Oliko vielä muuta mistä tykkäsit?
SUVI C: No ainaki se laivan tekeminen.
HL: Mikä siinä oli kivaa?
SUVI C: Mä tykkään käsitöistä.
HL: Kerro mistä et pitänyt tällä kurssilla?
SUVI C: Läksyistä.
HL: Miksi?
SUVI C: Niitä ei ole hauska tehä.
HL: Oliko jotain muuta mistä et pitänyt kurssilla?
SUVI C: No kun jotain vaikeita tehtäviä ei osannu.
HL: Oliko kurssilla joku tehtävä, mistä pidit erityisesti?
SUVI C: Joenylitystehtävä.
HL: Miksi?
SUVI C: Kun ei tarvinnu laskea vaan piti koittaa… ja päättelytehtävä.
HL: Käytitkö ratkaisukarttaideaa noissa tehtävissä?
SUVI C: No joissakin.
HL: Oliko siitä hyötyä vai häiritsikö se?
SUVI C: No joissakin *(Haittaa)*, ku piti käyttää karttaa vaikka oli jo ratkassu sen.
HL: Kävitkö noita vaiheita läpi niissä tehtävissä?
SUVI C: No pakkohan oli lukee se…
HL: Mikä susta oli ongelmanratkaisua?
SUVI C: Se, että tietää sen vastauksen.
HL: Tuleeko mieleen, mistä et pitänyt kurssilla?
SUVI C: Ei.
HL: Muuttuko sun suhtautuminen ongelmatehtäviin kurssin aikana?
SUVI C: Ei ehkä tai kun sai tehä niitä enemmän. Se helpottu.
HL: Mistä se johtui, että helpottu?
SUVI C: Kun opeteltiin kaikkea semmosia…
HL: Lisääntykö vai vähenikö sun kiinnostus matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun kurssin aikana?
SUVI C: Lisääntyi.
HL: Miksi?
SUVI C: Kun tehtiin niitä, niin kai sitä vähä kiinnostu.

LIITE 10 Faktorianalyysi: Alku- ja loppukokeen sekä viivästettykokeen tehtävät, joiden faktorilataukset ovat yli 0,3

(Rat= tehtävän Ratkaisu-osio; Per= Tehtävän perusteluprosessi-osio)

Alkukokeen tehtävät	Lataus 1. faktorilla
A1dRat	0,709
A1dPer	0,706
B14Per	0,701
B14Rat	0,679
A5Rat	0,658
B11bRat	0,653
A5Per	0,652
B11bPer	0,599
B8bRat	0,530
B10bRat	0,524
A1bPer	0,509
B12bRat	0,499
A1bRat	0,498
A1cPer	0,493
A3cRat	0,465
B13aRat	0,445
B9Per	0,429
A4Per	0,427
A2eRat	0,417
A2bPer	0,412
B10bPer	0,400
B10aRat	0,399
B8bPer	0,395
B9Rat	0,382
A2aPer	0,378
B10aPer	0,361
A1fPer	0,353
A2dRat	0,352
A1cRat	0,335
A1eRat	0,333
B12aRat	0,319
B13bRat	0,308
B13bPer	0,305
A1ePer	0,304

Loppukokeen tehtävät	Lataus 1. faktorilla
D13aRat	0,661
D11bPer	0,635
C1fPer	0,606
D14Rer	0,602
D8bRat	0,571
C1cPer	0,564
D13bRat	0,550
D9Rat	0,547
D11aPer	0,533
D14Rat	0,530
D10aRat	0,511
C3eRat	0,505
D13aPer	0,487
C1cRat	0,482
C3dRat	0,479
D11bRat	0,478
C1fRat	0,469
D11aRat	0,469
C1aRat	0,457
C1ePer	0,455
D13bPer	0,439
D12cPer	0,436
C1dPer	0,422
C3bPer	0,421
C2gRat	0,413
C2fRat	0,413
D12aRat	0,408
C2dRat	0,389
C1aPer	0,388
C2eRat	0,370
C5bRat	0,368
C5bPer	0,354
D8bPer	0,347
C1eRat	0,338
D6Per	0,336
D10bRat	0,330
C4Per	0,315
C3cPer	0,315
D12bRat	0,308

Viivästetyn kokeen tehtävät	Lataus 1. faktorilla
E2cPer	0,865
E2bRat	0,767
E2bPer	0,661
E1bPer	0,641
E6Rat	0,641
E2cRat	0,629
E6Per	0,613
E1bRat	0,604
E1aPer	0,513
E4Per	0,495
E4Rat	0,364
E1cPer	0,322

LIITE 11 Ongelmanratkaisukokeiden väliset Pearsonin korrelaatiokertoimet

	N = 52	Loppukoe CD yhteensä	CD Ong. ratkaisu	CD Perust. prosessi	Viiv.koe E yhteensä	E Ong. ratkaisu	E Perust. prosessi
Alkukoe AB yht.	Pearson Correlation	,679(**)	,698(**)	,562(**)	,632(**)	,556(**)	,631(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,000
Ratkaisu AB	Pearson Correlation	,673(**)	,729(**)	,510(**)	,627(**)	,540(**)	,637(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,000
Perust. prosessi AB	Pearson Correlation	,618(**)	,593(**)	,568(**)	,577(**)	,519(**)	,561(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	,000
Loppukoe CD yht.	Pearson Correlation	1	,957(**)	,924(**)	,701(**)	,631(**)	,681(**)
	Sig. (2-tailed)		,000	,000	,000	,000	,000
Ong.ratk. CD	Pearson Correlation	,957(**)	1	,773(**)	,678(**)	,619(**)	,651(**)
	Sig. (2-tailed)	,000		,000	,000	,000	,000
Perust. prosessi CD	Pearson Correlation	,924(**)	,773(**)	1	,637(**)	,564(**)	,631(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000		,000	,000	,000
Viiv.koe E yht.	Pearson Correlation	,701(**)	,678(**)	,637(**)	1	,942(**)	,925(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000		,000	,000
Ong.ratk. E	Pearson Correlation	,631(**)	,619(**)	,564(**)	,942(**)	1	,745(**)
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000		,000
Perust. prosessi E	Pearson Correlation	,681(**)	,651(**)	,631(**)	,925(**)	,745(**)	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	,000	

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

LIITE 12 Alkukokeen reliabiliteettianalyysi

(Rat= tehtävän Ratkaisu-osio; Per= Tehtävän perusteluprosessi-osio)

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	52	100,0
	Excluded(a)	0	,0
	Total	52	100,0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,884	48

Item-Total Statistics

Tehtävän osio	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
A1aRat	31,8269	79,886	,120	,884
A1aPer	31,8269	79,867	,112	,884
A1bRat	32,0288	76,955	,423	,881
A1bPer	32,0673	76,731	,432	,880
A1cRat	32,3269	77,768	,297	,882
A1cPer	32,3654	76,109	,478	,880
A1dRat	32,3558	75,145	,629	,877
A1dPer	32,3365	74,968	,604	,878
A1eRat	32,2981	77,733	,280	,883
A1ePer	32,2692	77,931	,253	,883
A1fRat	32,0769	78,509	,202	,884
A1fPer	32,3269	77,575	,323	,882
A2aPer	32,0962	78,525	,300	,882
A2bPer	32,1058	78,322	,338	,882
A2cPer	30,0577	77,938	,199	,885
A2dRat	31,9038	78,476	,294	,882
A2eRat	31,9375	78,108	,326	,882
A2fRat	32,4423	78,433	,207	,884
A2gRat	32,4567	78,448	,210	,884
A3aPer	31,7981	79,909	,167	,884
A3bPer	31,0240	77,802	,222	,884
A3cRat	32,3750	76,146	,460	,880
A4Per	31,6346	74,746	,406	,881
A5Rat	32,1731	74,705	,586	,878
A5Per	32,3077	74,482	,593	,877
B7Rat	32,1538	78,902	,143	,885
B7Per	32,5865	78,786	,214	,883
B8bRat	32,2308	76,078	,462	,880

(jatkuu)

LIITE 12 (jatkuu)

B8bPer	32,5865	77,737	,370	,881
B9Rat	31,4808	75,159	,349	,883
B9Per	32,2548	78,812	,385	,882
B10aRat	31,8846	78,197	,366	,882
B10aPer	32,2404	77,113	,346	,882
B10bRat	32,0000	76,515	,497	,880
B10bPer	32,2596	76,779	,384	,881
B11aRat	31,9231	78,420	,263	,883
B11aPer	32,0769	78,234	,274	,883
B11bRat	32,3558	75,361	,560	,878
B11bPer	32,4231	76,259	,516	,879
B12aRat	32,0577	77,835	,291	,882
B12bRat	31,9615	71,484	,473	,881
B12cPer	32,4712	78,465	,281	,883
B13aRat	31,6827	75,961	,389	,881
B13aPer	32,5529	80,435	-,024	,885
B13bRat	32,1298	78,631	,241	,883
B13bPer	31,5962	77,922	,269	,883
B14Rat	32,4423	75,198	,605	,878
B14Per	32,3846	75,344	,621	,878

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
32,7692	80,392	8,96615	48

LIITE 13 Loppukokeen reliabiliteettianalyysi
(Rat= tehtävän Ratkaisu-osio; Per= Tehtävän perusteluprosessi-osio)

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	52	100,0
	Excluded(a)	0	,0
	Total	52	100,0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,885	52

Item-Total Statistics

Tehtävän osio	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
C1aRat	34,3510	80,069	,401	,883
C1aPer	34,3365	80,612	,330	,884
C1bRat	34,3702	80,683	,261	,884
C1bPer	34,4471	80,354	,203	,884
C1cRat	34,6394	78,165	,423	,882
C1cPer	34,6923	77,470	,495	,881
C1dRat	34,6202	80,268	,165	,885
C1dPer	34,7404	78,289	,389	,882
C1eRat	34,6779	79,011	,293	,883
C1ePer	34,7644	78,131	,400	,882
C1fRat	34,6298	78,472	,383	,882
C1fPer	34,7788	77,193	,549	,880
C2aPer	34,6298	80,957	,137	,885
C2bPer	34,6298	80,957	,137	,885
C2cPer	32,4567	80,742	,103	,886
C2dRat	34,4856	79,111	,359	,883
C2eRat	34,5433	79,012	,336	,883
C2fRat	34,7548	78,232	,374	,882
C2gRat	34,7548	78,232	,374	,882
C3aPer	34,3894	81,687	,007	,886
C3bPer	34,5817	78,448	,389	,882
C3cPer	34,6106	79,856	,277	,884
C3dRat	34,7981	77,363	,476	,881
C3eRat	34,3702	73,585	,459	,882
C4Per	33,8798	78,964	,267	,884
C5aRat	34,4087	80,779	,160	,885
C5aPer	35,1298	81,065	,126	,885
C5bRat	34,9856	80,165	,361	,883

(jatkuu)

LIITE 13 (jatkuu)

C5bPer	35,1394	80,464	,310	,884
D6Per	34,7356	79,045	,282	,884
D8bRat	35,0144	77,974	,503	,881
D8bPer	34,9952	79,259	,337	,883
D9Rat	33,8798	74,969	,482	,881
D9Per	34,6827	80,946	,179	,884
D10aRat	34,3702	79,526	,462	,882
D10aPer	34,8221	79,878	,194	,885
D10bRat	34,3894	80,187	,288	,884
D10bPer	34,8654	79,732	,213	,885
D11aRat	34,6779	77,913	,422	,882
D11aPer	34,8990	77,479	,488	,881
D11bRat	35,1587	79,061	,430	,882
D11bPer	35,1202	77,964	,593	,880
D12aRat	34,4856	78,905	,389	,882
D12bRat	34,2933	76,470	,245	,889
D12cPer	34,9087	79,221	,413	,882
D13aRat	34,7548	76,330	,595	,879
D13aPer	34,6106	77,761	,426	,881
D13bRat	34,8990	76,385	,479	,880
D13bPer	35,0048	79,151	,378	,882
D14Rat	34,7740	77,055	,509	,880
D14Per	34,7067	76,838	,589	,879

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviati-on	N of Items
35,2933	81,813	9,04506	52

LIITE 14 Viivästetyn kokeen reliabiliteettianalyysi
(Rat= tehtävän Ratkaisu-osio; Per= Tehtävän perusteluprosessi-osio)

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	52	100,0
	Excluded(a)	0	,0
	Total	52	100,0

a Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,785	19

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
E1aRat	11,5240	14,483	,245	,783
E1aPer	11,5865	13,608	,491	,766
E1bRat	11,6394	13,646	,490	,766
E1bPer	11,6587	13,488	,522	,764
E1cRat	11,5144	15,151	,061	,794
E1cPer	11,6971	14,082	,326	,778
E2aPer	11,2452	15,325	,132	,786
E2bRat	11,5721	12,092	,622	,751
E2bPer	11,8221	13,795	,422	,771
E2cPer	11,9183	13,168	,738	,752
E2cRat	11,9760	13,807	,515	,766
E3Rat	11,1875	15,556	,000	,787
E3Per	11,3990	15,258	,049	,792
E4Rat	11,3029	14,871	,234	,782
E4Per	11,5721	14,682	,374	,777
E5aRat	11,2644	15,030	,217	,783
E5bRat	10,6875	13,169	,256	,800
E6Rat	11,9760	13,518	,544	,763
E6Per	11,8317	13,715	,512	,765

Scale Statistics

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
12,1875	15,556	3,94412	19

LIITE 15 ON POISTETTU VERKKOVERSIOSTA TEKIJÄNOIKEUDELLISISTA SYISTÄ

LIITE 16 t-testi: Koeryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärien muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Kokonaispistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	yhtAB	32,2647	17	6,57378	1,59438
	yhtCD	40,8382	17	7,20403	1,74723

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	yhtAB & yhtCD	17	,733	,001

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	yhtAB - yhtCD	-8,57353	5,06579	1,22863	-11,17812	-5,96894	-6,978	16	,000

Ratkaisupistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	RatAB	15,9412	17	4,23207	1,02643
	RatCD	20,7794	17	4,55940	1,10582

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	RatAB & RatCD	17	,787	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	RatAB - RatCD	-4,83824	2,88306	,69924	-6,32057	-3,35590	-6,919	16	,000

(jatkuu)

LIITE 16 (jatkuu)

Perusteluprosessipistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	PerAB	16,3235	17	2,95244	,71607
	PerCD	20,0588	17	3,33838	,80968

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	PerAB & PerCD	17	,562	,019

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	PerAB - PerCD	-3,73529	2,96262	,71854	-5,25853	-2,21206	-5,198	16	,000

LIITE 17 t-testi: Kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärien muutokset alku- ja loppukokeiden välillä

Kokonaispistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	yhtAB	33,0143	35	10,00311	1,69083
	yhtCD	32,6000	35	8,68658	1,46830

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	yhtAB & yhtCD	35	,786	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	yhtAB - yhtCD	,41429	6,24174	1,05505	-1,72983	2,55840	,393	34	,697

Ratkaisupistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	RatAB	15,9643	35	5,48700	,92747
	RatCD	16,9857	35	5,49061	,92808

Paired Samples Correlations

Paired Samples Correlations		N	Correlation	Sig.
Pair 1	RatAB & RatCD	35	,768	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	RatAB - RatCD	-1,02143	3,73692	,63166	-2,30511	,26225	-1,617	34	,115

(jatkuu)

LIITE 17 (jatkuu)

Perusteluprosessipistemäärä

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	PerAB	17,0500	35	4,87558	,82412
	PerCD	15,6143	35	3,70430	,62614

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	PerAB & PerCD	35	,758	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	PerAB–PerCD	1,43571	3,17813	,53720	,34399	2,52744	2,673	34	,011

LIITE 18 Kovarianssianalyysi: Koe- ja kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärien erot alku- ja loppukokeiden välillä

Kokonaispistemäärä:

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: yhtCD

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	2798,727(a)	2	1399,363	49,914	,000
Intercept	673,011	1	673,011	24,006	,000
yhtAB	2022,154	1	2022,154	72,128	,000
KoeKontr	877,694	1	877,694	31,307	,000
Error	1373,738	49	28,035		
Total	68944,438	52			
Corrected Total	4172,465	51			

a R Squared = ,671 (Adjusted R Squared = ,657)

Ratkaisupistemäärä

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: RatCD

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	974,416(a)	2	487,208	43,575	,000
Intercept	186,102	1	186,102	16,645	,000
RatAB	809,736	1	809,736	72,421	,000
KoeKontr	166,260	1	166,260	14,870	,000
Error	547,867	49	11,181		
Total	18795,938	52			
Corrected Total	1522,282	51			

a R Squared = ,640 (Adjusted R Squared = ,625)

(jatkuu)

LIITE 18 (jatkuu)

Perusteluprosessipistemäärä

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: PerCD

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	550,296(a)	2	275,148	42,054	,000
Intercept	206,601	1	206,601	31,577	,000
PerAB	324,266	1	324,266	49,561	,000
KoeKontr	269,601	1	269,601	41,206	,000
Error	320,593	49	6,543		
Total	16018,125	52			
Corrected Total	870,889	51			

a R Squared = ,632 (Adjusted R Squared = ,617)

LIITE 19 Toistettujen mittausten varianssianalyysi: Koe- ja kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perusteluprosessipistemäärien erot alku- ja loppukokeiden välillä

Kokonaispistemäärä:

General Linear Model

Within-Subjects Factors

Measure: MEASURE_1

factor1	Dependent Variable
1	yhtAB
2	yhtCD

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

Descriptive Statistics

	KoeKontr	Mean	Std. Deviation	N
yhtAB	1	32,2647	6,57378	17
	2	33,0143	10,00311	35
	Total	32,7692	8,96615	52
yhtCD	1	40,8382	7,20403	17
	2	32,6000	8,68658	35
	Total	35,2933	9,04506	52

Multivariate Tests(b)

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
factor1	Pillai's Trace	,305	21,950(a)	1,000	50,000	,000
	Wilks' Lambda	,695	21,950(a)	1,000	50,000	,000
	Hotelling's Trace	,439	21,950(a)	1,000	50,000	,000
	Roy's Largest Root	,439	21,950(a)	1,000	50,000	,000
factor1 * KoeKontr	Pillai's Trace	,348	26,634(a)	1,000	50,000	,000
	Wilks' Lambda	,652	26,634(a)	1,000	50,000	,000
	Hotelling's Trace	,533	26,634(a)	1,000	50,000	,000
	Roy's Largest Root	,533	26,634(a)	1,000	50,000	,000

a Exact statistic
b Design: Intercept+KoeKontr
Within Subjects Design: factor1

Mauchly's Test of Sphericity(b)

Measure: MEASURE_1

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	Sig.	Epsilon(a) Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Lower-bound
factor1	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,000

Tests the null hypothesis that the error covariance matrix of the orthonormalized transformed dependent variables is proportional to an identity matrix.
a May be used to adjust the degrees of freedom for the averaged tests of significance.

(jatkuu)

LIITE 19 (jatkuu)

Corrected tests are displayed in the Tests of Within-Subjects Effects table.
b Design: Intercept+KoeKontr

Within Subjects Design: factor1

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Sphericity Assumed	380,876	1	380,876	21,950	,000
	Greenhouse-Geisser	380,876	1,000	380,876	21,950	,000
	Huynh-Feldt	380,876	1,000	380,876	21,950	,000
	Lower-bound	380,876	1,000	380,876	21,950	,000
factor1 * KoeKontr	Sphericity Assumed	462,160	1	462,160	26,634	,000
	Greenhouse-Geisser	462,160	1,000	462,160	26,634	,000
	Huynh-Feldt	462,160	1,000	462,160	26,634	,000
	Lower-bound	462,160	1,000	462,160	26,634	,000
Error(factor1)	Sphericity Assumed	867,607	50	17,352		
	Greenhouse-Geisser	867,607	50,000	17,352		
	Huynh-Feldt	867,607	50,000	17,352		
	Lower-bound	867,607	50,000	17,352		

Tests of Within-Subjects Contrasts

Measure: MEASURE_1

Source	factor1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Linear	380,876	1	380,876	21,950	,000
factor1 * KoeKontr	Linear	462,160	1	462,160	26,634	,000
Error(factor1)	Linear	867,607	50	17,352		

Tests of Between-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	110089,126	1	110089,126	831,258	,000
KoeKontr	320,842	1	320,842	2,423	,126
Error	6621,838	50	132,437		

(jatkuu)

LIITE 19 (jatkuu)

Ratkaisupistemäärä

Within-Subjects Factors

Measure: MEASURE_1

factor1	Dependent Variable
1	RatAB
2	RatCD

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

Descriptive Statistics

	KoeKontr	Mean	Std. Deviation	N
RatAB	1	15,9412	4,23207	17
	2	15,9643	5,48700	35
	Total	15,9567	5,06858	52
RatCD	1	20,7794	4,55940	17
	2	16,9857	5,49061	35
	Total	18,2260	5,46339	52

Multivariate Tests(b)

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
factor1	Pillai's Trace	,393	32,320(a)	1,000	50,000	,000
	Wilks' Lambda	,607	32,320(a)	1,000	50,000	,000
	Hotelling's Trace	,646	32,320(a)	1,000	50,000	,000
	Roy's Largest Root	,646	32,320(a)	1,000	50,000	,000
factor1 * KoeKontr	Pillai's Trace	,215	13,713(a)	1,000	50,000	,001
	Wilks' Lambda	,785	13,713(a)	1,000	50,000	,001
	Hotelling's Trace	,274	13,713(a)	1,000	50,000	,001
	Roy's Largest Root	,274	13,713(a)	1,000	50,000	,001

a Exact statistic
b Design: Intercept+KoeKontr
Within Subjects Design: factor1

Mauchly's Test of Sphericity(b)

Measure: MEASURE_1

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	Sig.	Epsilon(a)		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Lower-bound
factor1	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,000

Tests the null hypothesis that the error covariance matrix of the orthonormalized transformed dependent variables is proportional to an identity matrix.
a May be used to adjust the degrees of freedom for the averaged tests of significance. Corrected tests are displayed in the Tests of Within-Subjects Effects table.
b Design: Intercept+KoeKontr . Within Subjects Design: factor1

(jatkuu)

LIITE 19 (jatkuu)

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Sphericity Assumed	196,440	1	196,440	32,320	,000
	Greenhouse-Geisser	196,440	1,000	196,440	32,320	,000
	Huynh-Feldt	196,440	1,000	196,440	32,320	,000
	Lower-bound	196,440	1,000	196,440	32,320	,000
factor1 * KoeKontr	Sphericity Assumed	83,346	1	83,346	13,713	,001
	Greenhouse-Geisser	83,346	1,000	83,346	13,713	,001
	Huynh-Feldt	83,346	1,000	83,346	13,713	,001
	Lower-bound	83,346	1,000	83,346	13,713	,001
Error(factor1)	Sphericity Assumed	303,895	50	6,078		
	Greenhouse-Geisser	303,895	50,000	6,078		
	Huynh-Feldt	303,895	50,000	6,078		
	Lower-bound	303,895	50,000	6,078		

Tests of Within-Subjects Contrasts

Measure: MEASURE_1

Source	factor1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Linear	196,440	1	196,440	32,320	,000
factor1 * KoeKontr	Linear	83,346	1	83,346	13,713	,001
Error(factor1)	Linear	303,895	50	6,078		

Tests of Between-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	27770,429	1	27770,429	587,381	,000
KoeKontr	81,340	1	81,340	1,720	,196
Error	2363,918	50	47,278		

Perusteluprosessipistemäärä

Within-Subjects Factors

Measure: MEASURE_1

factor1	Dependent Variable
1	PerAB
2	PerCD

Between-Subjects Factors

		N
KoeKontr	1	17
	2	35

(jatkuu)

LIITE 19 (jatkuu)

Descriptive Statistics

	KoeKontr	Mean	Std. Deviation	N
PerAB	1	16,3235	2,95244	17
	2	17,0500	4,87558	35
	Total	16,8125	4,32443	52
PerCD	1	20,0588	3,33838	17
	2	15,6143	3,70430	35
	Total	17,0673	4,13234	52

Multivariate Tests(b)

Effect		Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.
factor1	Pillai's Trace	,111	6,253(a)	1,000	50,000	,016
	Wilks' Lambda	,889	6,253(a)	1,000	50,000	,016
	Hotelling's Trace	,125	6,253(a)	1,000	50,000	,016
	Roy's Largest Root	,125	6,253(a)	1,000	50,000	,016
factor1 * KoeKontr	Pillai's Trace	,387	31,617(a)	1,000	50,000	,000
	Wilks' Lambda	,613	31,617(a)	1,000	50,000	,000
	Hotelling's Trace	,632	31,617(a)	1,000	50,000	,000
	Roy's Largest Root	,632	31,617(a)	1,000	50,000	,000

a Exact statistic
b Design: Intercept+KoeKontr
Within Subjects Design: factor1

Mauchly's Test of Sphericity(b)

Measure: MEASURE_1

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	Sig.	Epsilon(a)		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Lower-bound
factor1	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,000

Tests the null hypothesis that the error covariance matrix of the orthonormalized transformed dependent variables is proportional to an identity matrix.
a May be used to adjust the degrees of freedom for the averaged tests of significance. Corrected tests are displayed in the Tests of Within-Subjects Effects table.
b Design: Intercept+KoeKontr
Within Subjects Design: factor1

(jatkuu)

LIITE 19 (jatkuu)

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Sphericity Assumed	30,254	1	30,254	6,253	,016
	Greenhouse-Geisser	30,254	1,000	30,254	6,253	,016
	Huynh-Feldt	30,254	1,000	30,254	6,253	,016
	Lower-bound	30,254	1,000	30,254	6,253	,016
factor1 * KoeKontr	Sphericity Assumed	152,980	1	152,980	31,617	,000
	Greenhouse-Geisser	152,980	1,000	152,980	31,617	,000
	Huynh-Feldt	152,980	1,000	152,980	31,617	,000
	Lower-bound	152,980	1,000	152,980	31,617	,000
Error(factor1)	Sphericity Assumed	241,926	50	4,839		
	Greenhouse-Geisser	241,926	50,000	4,839		
	Huynh-Feldt	241,926	50,000	4,839		
	Lower-bound	241,926	50,000	4,839		

Tests of Within-Subjects Contrasts

Measure: MEASURE_1

Source	factor1	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
factor1	Linear	30,254	1	30,254	6,253	,016
factor1 * KoeKontr	Linear	152,980	1	152,980	31,617	,000
Error(factor1)	Linear	241,926	50	4,839		

Tests of Between-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	27275,248	1	27275,248	1009,724	,000
KoeKontr	79,089	1	79,089	2,928	,093
Error	1350,629	50	27,013		

LIITE 20 t-testi: Koe- ja kontrolliryhmän kokonais-, ratkaisu- ja perustelu-prosessipistemäärien erot viivästetyssä kokeessa

Group Statistics

	1=KOER 2=KONTR	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
E1Rat	1	17	2,2059	,46967	,11391
	2	35	1,7286	,79837	,13495
E1Per	1	17	2,2059	,75122	,18220
	2	35	1,3357	,97946	,16556
E1Yht	1	17	4,4118	1,13517	,27532
	2	35	3,0643	1,66422	,28131
E2Rat	1	17	,9412	,96635	,23437
	2	35	,7714	,95750	,16185
E2Per	1	17	1,3529	,78591	,19061
	2	35	1,6857	,90818	,15351
E2Yht	1	17	2,2941	1,60136	,38839
	2	35	2,4571	1,77139	,29942
E3Rat	1	17	1,0000	,00000(a)	,00000
	2	35	1,0000	,00000(a)	,00000
E3Per	1	17	,8824	,28115	,06819
	2	35	,7429	,42654	,07210
E3Yht	1	17	1,8824	,28115	,06819
	2	35	1,7429	,42654	,07210
E4Rat	1	17	,9412	,24254	,05882
	2	35	,8571	,35504	,06001
E4Per	1	17	,6324	,21862	,05302
	2	35	,6071	,30490	,05154
E4Yht	1	17	1,5735	,35094	,08512
	2	35	1,4643	,60677	,10256
E5Rat	1	17	2,4706	1,00733	,24431
	2	35	2,4000	1,00587	,17002
E6Rat	1	17	,2059	,43513	,10553
	2	35	,2143	,47412	,08014
E6Per	1	17	,5000	,50000	,12127
	2	35	,2857	,38892	,06574
E6Yht	1	17	,7059	,83026	,20137
	2	35	,5000	,76696	,12964
YhtE	1	17	13,3382	3,59138	,87104
	2	35	11,6286	4,03494	,68203
RatE	1	17	7,7647	2,31245	,56085
	2	35	6,9714	2,19271	,37064
PerE	1	17	5,5735	1,70881	,41445
	2	35	4,6571	2,05448	,34727

(Rat = Ratkaisu-osio, Per = perusteluprosessi-osio ja Yht = tehtävän yhteispistemäärä)

(jatkuu)

LIITE 20 (jatkuu)

a t cannot be computed because the standard deviations of both groups are 0.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
E1Rat	Equal variances assumed	7,876	,007	2,274	50	,027	,47731	,20988	,05576	,89886
	Equal variances not assu-med			2,703	47,966	,009	,47731	,17660	,12223	,83239
E1Per	Equal variances assumed	1,073	,305	3,225	50	,002	,87017	,26981	,32825	1,41209
	Equal variances not assu-med			3,535	40,376	,001	,87017	,24618	,37276	1,36758
E1Yht	Equal variances assumed	2,663	,109	3,008	50	,004	1,34748	,44792	,44780	2,24716
	Equal variances not assu-med			3,423	44,184	,001	1,34748	,39362	,55429	2,14066
E2Rat	Equal variances assumed	,031	,861	,598	50	,553	,16975	,28390	-,40049	,73998
	Equal variances not assu-med			,596	31,525	,555	,16975	,28482	-,41076	,75026
E2Per	Equal variances assumed	3,150	,082	-1,292	50	,202	-,33277	,25747	-,84991	,18437
	Equal variances not assu-med			-1,360	36,300	,182	-,33277	,24474	-,82899	,16344

(jatkuu)

LIITE 20 (jatkuu)

E2Yht	Equal variances assumed	1,395	,243	-,321	50	,750	-,16303	,50813	-1,18362	,85757
	Equal variances not assumed			-,332	34,874	,742	-,16303	,49040	-1,15873	,83268
E3Per	Equal variances assumed	8,251	,006	1,222	50	,227	,13950	,11412	-,08971	,36871
	Equal variances not assumed			1,406	45,192	,167	,13950	,09924	-,06035	,33934
E3Yht	Equal variances assumed	8,251	,006	1,222	50	,227	,13950	,11412	-,08971	,36871
	Equal variances not assumed			1,406	45,192	,167	,13950	,09924	-,06035	,33934
E4Rat	Equal variances assumed	3,528	,066	,879	50	,384	,08403	,09558	-,10795	,27602
	Equal variances not assumed			1,000	44,138	,323	,08403	,08403	-,08531	,25338
E4Per	Equal variances assumed	1,416	,240	,304	50	,762	,02521	,08283	-,14116	,19158
	Equal variances not assumed			,341	42,614	,735	,02521	,07394	-,12395	,17437
E4Yht	Equal variances assumed	1,945	,169	,686	50	,496	,10924	,15914	-,21039	,42888
	Equal variances not assumed			,820	48,288	,416	,10924	,13328	-,15870	,37718
E5Rat	Equal variances assumed	,094	,761	,237	50	,813	,07059	,29750	-,52696	,66813
	Equal variances not assumed			,237	31,747	,814	,07059	,29765	-,53590	,67707

(jatkuu)

LIITE 20 (jatkuu)

E6Rat	Equal variances assumed	,092	,763	-,062	50	,951	-,00840	,13658	-,28273	,26593
	Equal variances not assumed			-,063	34,392	,950	-,00840	,13251	-,27759	,26079
E6Per	Equal variances assumed	,121	,729	1,695	50	,096	,21429	,12642	-,03963	,46820
	Equal variances not assumed			1,553	25,740	,133	,21429	,13794	-,06939	,49797
E6Yht	Equal variances assumed	,629	,431	,884	50	,381	,20588	,23289	-,26188	,67365
	Equal variances not assumed			,860	29,618	,397	,20588	,23949	-,28349	,69525
YhtE	Equal variances assumed	,813	,372	1,483	50	,144	1,70966	1,15250	-,60520	4,02453
	Equal variances not assumed			1,545	35,376	,131	1,70966	1,10629	-,53536	3,95469
RatE	Equal variances assumed	,070	,793	1,202	50	,235	,79328	,65976	-,53188	2,11844
	Equal variances not assumed			1,180	30,306	,247	,79328	,67225	-,57907	2,16562
PerE	Equal variances assumed	,877	,353	1,589	50	,118	,91639	,57663	-,24181	2,07459
	Equal variances not assumed			1,695	37,626	,098	,91639	,54071	-,17858	2,01135

(Rat= Ratkaisu-osio, Per= perusteluprosessi-osio ja Yht= tehtävän yhteispistemäärä)

LIITE 21 Koeryhmän oppilaiden koetulosten ja matematiikan todistusarvosanojen väliset Pearsonin korrelaatiokertoimet

Correlations

		Alkukoe	Mat. arvosana syksy 2003	Loppukoe	Mat. arvosana kevät 2005	Viivästetty koe
Alkukoe	Pearson Correlation	1	,681**	,679**	,782**	,632**
	Sig. (2-tailed)		,000	,000	,000	,000
	N	52	52	52	52	52
Matematiikan arvosana syksy 2003	Pearson Correlation	,681**	1	,652**	,801**	,580**
	Sig. (2-tailed)	,000		,000	,000	,000
	N	52	52	52	52	52
Loppukoe	Pearson Correlation	,679**	,652**	1	,691**	,701**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000		,000	,000
	N	52	52	52	52	52
Matematiikan arvosana kevät 2005	Pearson Correlation	,782**	,801**	,691**	1	,560**
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000		,000
	N	52	52	52	52	52
Viivästetty koe	Pearson Correlation	,632**	,580**	,701**	,560**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	,000	,000	
	N	52	52	52	52	52

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

LIITE 22 Mitä alku- ja loppukokeen sekä viivästetyn kokeen tehtävät mittaavat?

Tehtävä A1, C1 ja E1
- säännönmukaisuuden tunnistaminen lukusarjasta
- numeerinen ongelmanratkaisu ja päättelykyky
- säännön ilmaiseminen kirjallisesti

Tehtävä A2 ja C2
- geometrinen ongelmanratkaisu
- geometrisen säännön tunnistaminen esitetyistä kuvioista ja sen soveltaminen (kohdat: a, b, c)
- annetun ohjeen huolellinen noudattaminen
- geometrisen kaavan muodostaminen monimutkaisempaan (d, e) ja ei-konkretisoitavaan tilanteeseen (f,g)

Tehtävä A3, C3 ja E2
- geometrinen ongelmanratkaisu
- geometrisen kuviosarjan tunnistaminen ja annetun ohjeen huolellinen noudattaminen
- säännönmukaisuuden löytäminen ja matemaattisen kaavan muodostaminen kirjallisesti

Tehtävä A4 ja C4
- geometristen kuvioiden ja kappaleiden havaitseminen, tunnistaminen ja nimeäminen

Tehtävä A5 ja C5
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen kuviosta
- luetun ymmärtäminen
- kykyä havaita todelliseen tilanteeseen liittyvät rajoitukset ja säännöt
- kykyä hahmottaa ja päätellä loogisesti ratkaisu kuvioon ja havaintoihin perustuvien sääntöjen avulla
- ratkaisun visualisointi

Tehtävä B7, D6 ja E3
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen
- luetun ymmärtäminen
- ratkaisun visualisointi tai muun ratkaisustrategian soveltaminen
- looginen päättely
- kykyä havaita todelliseen tilanteeseen liittyvät rajoitukset ja säännöt

Tehtävä B8 ja D8
- luetun ymmärtäminen
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen

(jatkuu)

LIITE 22 (jatkuu)

- looginen päättely, (kertolasku/jakolasku)
- kaavan muodostaminen ja laskutoimituksen suorittaminen (kerto-/jakolasku)
- kykyä havaita todelliseen tilanteeseen liittyvät rajoitukset ja säännöt

Tehtävä B9 ja D9
- luetun ymmärtäminen
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen
- lausekkeen muodostaminen ja laskutoimituksen suorittaminen (yhteen-, vähennys-,kerto-ja jakolasku)

Tehtävä B10, D10 ja E4
- numeerinen ongelmanratkaisu
- lausekkeen muodostaminen ja laskutoimituksen suorittaminen
- looginen päättely
- kykyä työstää ja päätellä laskutoimitus käänteisesti (takaperin työskentely)

Tehtävä B11 ja D11
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen
- geometrinen ongelmanratkaisu
- lausekkeen muodostaminen ja laskutoimituksen suorittaminen (yhteen-, vähennys-kerto-ja jakolasku, pinta-ala, D11 tilavuus)
- looginen päättely (puuttuvien tietojen päättely annettujen tietojen perusteella) kuvion tai kappaleen osittaminen s.e. pinta-ala saadaan laskettua

Tehtävä B12, D12 ja E5
- numeerinen ongelmanratkaisu
- luova ongelmanratkaisu
- looginen päättely
- laskutoimituksen suorittaminen (yhteen- ja vähennyslaskutaidot)
- säännön löytäminen ja sen soveltaminen ja selittäminen
- säännön ilmaiseminen kirjallisesti (B12, D12)

Tehtävä B13, D13 ja E6
- luova ongelmanratkaisu
- avoin ongelmanratkaisu; toimivan ratkaisun luominen annettujen alkuehtojen mukaisesti
- looginen päättely; kykyä havaita todelliseen tilanteeseen liittyvät rajoitukset ja säännöt
- ratkaisun visualisointi
- pinta-alan (B13) ja tilavuuden laskeminen (D13, E6)
- mittakaava piirroksen valmistaminen

(jatkuu)

LIITE 22 (jatkuu)

Tehtävä B14 ja D14

- geometrinen ongelmanratkaisu
- ratkaisun kannalta oleellisten tietojen havaitseminen
- looginen päättely
- ratkaisun visualisointi
- kykyä havaita kuvion ominaisuudet s.e, kuvio voidaan saattaa tehtävän ehtojen mukaiseen asentoon

LIITE 23 Tasoryhmien keski- ja hajontaluvut alku- ja loppukokeessa

Descriptive Statistics Koeryhmä hyvät 1.-17.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	5	36,00	45,00	40,5000	3,53553
RatAB	5	18,50	25,00	20,9000	2,77038
PerAB	5	17,00	22,50	19,6000	2,16217
yhtCD	5	46,50	52,25	48,7500	2,29129
RatCD	5	22,50	29,00	25,8500	2,55930
PerCD	5	19,50	24,50	22,9000	2,30217
yhtE	5	12,50	21,50	17,5000	3,65718
RatE	5	7,50	12,50	10,0000	2,06155
PerE	5	5,00	9,00	7,5000	1,73205
Valid N (listwise)	5				

Descriptive Statistics: Kontrolliryhmä hyvät 1.-17.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	12	36,00	55,00	44,3958	6,39287
RatAB	12	17,50	27,00	22,2500	3,29083
PerAB	12	16,75	28,00	22,1458	3,71492
yhtCD	12	32,00	48,75	41,3750	5,08954
RatCD	12	18,00	28,00	22,5000	2,75103
PerCD	12	14,00	23,75	18,8750	3,05164
yhtE	12	6,00	21,00	14,8333	4,33581
RatE	12	4,00	12,50	8,5417	2,31063
PerE	12	2,00	9,50	6,2917	2,20751
Valid N (listwise)	12				

Descriptive Statistics: Koeryhmä keskitaso 18.-35.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	7	29,00	35,00	31,5000	2,35850
RatAB	7	12,00	17,50	15,4286	2,19238
PerAB	7	12,00	17,50	16,0714	1,90238
yhtCD	7	33,50	45,00	38,2143	3,56905
RatCD	7	16,25	21,75	19,2857	2,10866
PerCD	7	16,00	24,25	18,9286	2,66033
yhtE	7	9,50	14,00	11,8571	1,57359
RatE	7	3,50	9,50	6,9286	2,02954
PerE	7	3,50	6,00	4,9286	,97590
Valid N (listwise)	7				

(jatkuu)

LIITE 23 (jatkuu)

Descriptive Statistics: Kontrolliryhmä keskitaso 18.-35.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	11	29,25	33,75	31,2500	1,41421
RatAB	11	11,25	16,75	14,5455	1,65385
PerAB	11	16,00	18,00	16,7045	,66912
yhtCD	11	24,00	37,00	31,4091	3,97692
RatCD	11	10,00	18,50	15,8182	2,71130
PerCD	11	12,50	19,50	15,5909	2,20871
yhtE	11	5,50	15,00	10,4545	2,68286
RatE	11	4,00	9,50	6,5909	1,68550
PerE	11	1,50	5,50	3,8636	1,23675
Valid N (listwise)	11				

Descriptive Statistics: Koeryhmä heikot 36.-52.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	5	23,50	27,00	25,1000	1,43178
RatAB	5	10,00	14,50	11,7000	1,75357
PerAB	5	12,50	14,50	13,4000	,74162
yhtCD	5	25,75	45,25	36,6000	8,39568
RatCD	5	11,25	23,50	17,8000	4,77428
PerCD	5	14,50	23,50	18,8000	3,78896
yhtE	5	8,00	12,50	11,2500	1,88746
RatE	5	4,50	8,00	6,7000	1,44049
PerE	5	3,50	5,25	4,5500	,75829
Valid N (listwise)	5				

Descriptive Statistics: Kontrolliryhmä heikot 36.-52.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
yhtAB	12	13,00	28,75	23,2500	4,26135
RatAB	12	5,50	15,00	10,9792	2,74164
PerAB	12	7,50	15,00	12,2708	2,42960
yhtCD	12	16,25	37,00	24,9167	6,56725
RatCD	12	5,50	22,25	12,5417	4,78021
PerCD	12	8,50	17,00	12,3750	2,37051
yhtE	12	6,50	17,00	9,5000	2,73030
RatE	12	3,00	9,00	5,7500	1,57394
PerE	12	1,50	8,00	3,7500	1,53000
Valid N (listwise)	12				

LIITE 24 Aineiston normaalijaukamaoletuksen testaaminen

Koko otos

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviaton	Minimum	Maximum
yhtAB	52	32,7692	8,96615	13,00	55,00
RatAB	52	15,9567	5,06858	5,50	27,00
PerAB	52	16,8125	4,32443	7,50	28,00
yhtCD	52	35,2933	9,04506	16,25	52,25
RatCD	52	18,2260	5,46339	5,50	29,00
PerCD	52	17,0673	4,13234	8,50	24,50
yhtE	52	12,1875	3,94412	5,50	21,50
RatE	52	7,2308	2,24146	3,00	12,50
PerE	52	4,9567	1,97950	1,50	9,50

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		yhtAB	RatAB	PerAB	yhtCD	RatCD	PerCD	yhtE	RatE	PerE
N		52	52	52	52	52	52	52	52	52
Normal Parameters a,b	Mean	32,7692	15,9567	16,8125	35,2933	18,2260	17,0673	12,1875	7,2308	4,9567
	Std. Deviation	8,96615	5,06858	4,32443	9,04506	5,46339	4,13234	3,94412	2,24146	1,97950
Most Extreme Differences	Absolute	,130	,113	,148	,076	,084	,078	,116	,096	,145
	Positive	,130	,113	,148	,066	,050	,073	,116	,096	,145
	Negative	-,068	-,098	-,060	-,076	-,084	-,078	-,056	-,061	-,096
Kolmogorov-Smirnov Z		,940	,817	1,070	,551	,609	,565	,839	,696	1,047
Asymp. Sig. (2-tailed)		,340	,516	,202	,922	,852	,907	,482	,718	,223

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

LIITE 24 (jatkuu)

Koeryhmä

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df		Statistic	df	Sig.
yhtAB	0,150	17	0,200*	0,948	17	0,425
RatAB	0,118	17	0,200*	0,956	17	0,562
PerAB	0,125	17	0,200*	0,951	17	0,481
yhtCD	0,177	17	0,162	0,962	17	0,670
RatCD	0,123	17	0,200*	0,980	17	0,958
PerCD	0,143	17	0,200*	0,923	17	0,163
yhtE	0,239	17	0,011	0,881	17	0,033
RatE	0,165	17	0,200*	0,961	17	0,642
PerE	0,166	17	0,200*	0,885	17	0,038

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Kontrolliryhmä

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df		Statistic	df	Sig.
yhtAB	0,140	35	0,078	0,955	35	0,162
RatAB	0,141	35	0,075	0,949	35	0,109
PerAB	0,149	35	0,048	0,958	35	0,195
yhtCD	0,079	35	0,200*	0,980	35	0,774
RatCD	0,080	35	0,200*	0,984	35	0,891
PerCD	0,097	35	0,200*	0,970	35	0,447
yhtE	0,166	35	0,016	0,945	35	0,081
RatE	0,100	35	0,200*	0,975	35	0,594
PerE	0,179	35	0,006	0,932	35	0,032

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction