TAPAUSTUTKIMUS PERUSOPETUKSEN NELJÄNNEN LUOKAN OPPILAIDEN MATEMAATTISESTA AJATTELUSTA

Tanja Lavikonmäki

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
Kevät 2006
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

Lavikonmäki, T. Tapaustutkimus perusopetuksen neljännen luokan oppilaiden matemaattisesta ajattelusta. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma, 128 s.

Tämän tutkimuksen tavoite oli ymmärtää neljännen luokan oppilaiden matemaattista ajattelua ja ajattelun kulkua ongelmanratkaisutilanteessa. Aihetta lähestyttiin oppilaiden tietorakenteiden ja tiedon käyttötapojen näkökulmista: Mitä tietoja oppilas pystyy havaitsemaan ja käyttämään ongelmanratkaisutilanteessa? Minkälaisia geometrisiin kappaleisiin liittyviä käsityksiä tai uskomuksia oppilailla on? Miten käsitykset ja uskomukset vaikuttavat oppilaiden tekemiin ratkaisuihin ongelmanratkaisutilanteessa? Miten oppilaat ymmärtävät ja ratkaisevat saman tehtävän, ja mistä johtuvat mahdolliset ratkaisutapojen erot? Toistuvatko samat ratkaisutavat tai ajattelumallit oppilaan ongelmanratkaisussa tehtävästä riippumatta?

Tutkimusongelmia selvitettiin laadullisilla haastatteluilla, jotka toteutettiin ääneen ajattelun metodiikkaa soveltaen. Haastattelu perustui kuuteen geometriaan liittyvään ongelmatehtävään. Haastattelujen kohdejoukkona toimi erään neljännen luokan 18 oppilasta. Haastattelut suoritettiin samanaikaisesti oppilaiden ratkaistessa tehtäviä. Tutkimusaineisto analysoitiin laadullisella sisällönanalyysillä järjestäen litteroitua tutkimusaineistoa taulukoiksi ja käsitekartoiksi.

Tutkimus osoitti, että neljännen luokan oppilaat omaavat metakognitiivisia taitoja. He osasivat kertoa omasta ajattelustaan. Tehtävässä annettujen tietojen käyttäminen apuna ongelmia ratkaistessa sujui kaikilta oppilailta lähes poikkeuksetta. Havaittujen tietojen soveltaminen ei onnistunut kaikissa tilanteissa aivan jokaiselta oppilaalta. Osa oppilaista tulkitsi annettuja tietoja siten, että he pystyivät vastaamaan kysymykseen, vaikka heidän käyttämänsä tiedot eivät liittyneet tehtävään. He muodostivat ongelman ja tavoitteen välille yhteyden, jota ei ollut olemassa. Useamman tehtävässä annetun tiedon käyttö teki ratkaisun ehyemmäksi. Näin ei käynyt, jos oppilas ei hallinnut tehtävässä vaadittuja käsitteitä. Osa oppilaista käytti oivallukseen perustuvaa tietoa, omaa ajatteluaan, tehtävien ratkaisuissa. Oivaltavasta tiedosta huolimatta tehtävän ratkaiseminen saattoi pysähtyä tilanteeseen, jossa oppilas kiinnitti huomionsa ratkaisun kannalta epäolennaisiin asioihin. Kahdeksan oppilasta sekoitti käsitteet kuutio ja neliö toisiinsa. Näiden kahden käsitteen välisen eron hahmottaminen näyttäisi olevan haastavaa ainakin osalle neljännen luokan oppilaista. Tutkimuksessa nousi esiin oppilaiden käyttämiä termejä pallon ominaisuuksista sekä heidän käsityksiään neliön halkaisijasta. Tapa, jolla oppilas ymmärsi tehtävän, vaikutti sekä siihen, kuinka hän ratkaisi tehtävän että siihen, mitä tietoja hän tarvitsi ongelman ratkaisuun. Samojen oppilaiden ratkaisutavoista löytyi jatkuvuutta erilaisten tehtävien välillä. Tutkimuksen perusteella näyttää siltä, että oppilaiden käyttämien käsitteiden sisällöillä, aikaisemmilla kokemuksilla ja tietorakenteiden laadulla on vaikutusta oppilaan ongelmanratkaisuun.

Asiasanat: matemaattinen ajattelu, mentaalinen malli, skeema, geometria, geometrinen käsite, ääneen ajattelu.

SISÄLLYS

1 ASKELIA KOHTI LAPSEN MATEMAATTISTA MAAILMAA

Luokanopettaja työskentelee koulussa lasten kanssa, jotka vasta aloittelevat kerryttämään omia tietovarastojaan tulevaisuuttaan varten. Kaikki lapset ovat ehtineet nähdä ja havaita ja muodostaa käsityksiä asioista ennen koulunkäynnin aloittamista. Jokaisella meillä onkin oma, ainutlaatuinen tapamme ajatella. Joka ikisellä on myös oma tapansa muodostaa matemaattisia ajatuksia ja käsitteitä. Näin ajattelevat myös Ginsburg ja Seo (1999), joiden mukaan lapsen keksimä matematiikka sisältää monia matemaattisia ideoita. Ideat voivat olla synnynnäisiä, sopeutumisen pohjalta syntyneitä tai ympäristöstä poimittuja. (Ginsburg & Seo 1999, 113.) Tämän tutkimuksen pyrkimys on kuvata lapsen matemaattista ajattelua, tiedon käsittelyä sekä matemaattisia ideoita ongelmanratkaisuprosessissa. Lähtökohdat työlle syntyivät pikkuhiljaa opintojen edetessä, törmätessäni jatkuvasti tilanteisiin, joissa oppilaan ajattelu tuntui etenevän minulle uusia ja odottamattomia ratoja.

Ongelmanratkaisu ja sen opettaminen on ollut tärkeä tutkimuksen kohde maassamme 1980-luvun puolivälistä lähtien. Matemaattinen ajattelu ja erityisesti sen ymmärtäminen ovat nousseet esille tutkimuksen kohteena 2000-luvulla. (Räsänen, Kupari, Ahonen & Malinen 2004, 17.) Suomessa aihealueelta on tutkittu mm. matemaattisen ajattelun opetusohjelmien vaikutusta numerokäsitykseen (Aunio, Hautamäki & Van Luit 2005), käsitetiedon ja menetelmätiedon välistä suhdetta (Haapasalo 2004), matemaattisen ajattelun opettamista ja oppimista (Yrjönsuuri 2004) ja käsitteiden ymmärtämistä sekä käsitteellistä muutosta oppimisessa ja opetuksessa (Merenluoto & Lehtinen 2003;2004). Maailmalla on puolestaan tutkittu matemaattista ajattelua muun muassa prosessiltaan avoimien ja suljettujen ongelmien ratkaisussa (Cai 2000), mentaalisia malleja ja skeemoja geometristen ongelmien ratkaisussa (Chinnappan 1998), tiedon rakentumista ja divergenttiä ajattelua (Gray, Pinto, Pitta & David Tall 1999), matemaattista ajattelua murtolukujen jakolaskun ja ongelmanratkaisun yhteydessä (Sharp & Adams 2002), piirtämistä ja ongelmien ymmärtämistä (Nunokawa 2004) sekä matematiikkaa lapsen ajattelussa (Ginsburg & Seo 1999).

Tutkimukseni tarkoitus on selvittää, miten oppilaat pystyvät käyttämään aikaisempia tai ongelmatehtävissä annettuja tietoja ongelmanratkaisussa, minkälaisia käsitteitä ja ratkaisutapoja he käyttävät ratkaisuissaan sekä ratkaisumenetelmien toistuimista erilaisissa tehtävissä. Tutkimukseni avulla saadaan tietoa oppilaiden käyttämien käsitteiden rakenteista, tiedon käytön tavoista ja erilaisista tavoista ymmärtää, ajatella ja ratkaista ongelmia.

Tutkimusaineiston keruu tapahtui laadullisella menetelmällä videoimalla oppilaiden haastattelut. Tutkittavat ratkoivat kuutta eri ongelmatehtävää tuottaen samalla mahdollisimman paljon puhetta eli ääneen ajattelua. Ensimmäinen tehtävä, Hanoin Tornit, toimi tutustumiskeinona ääneen ajattelun -metodiikkaan. Toinen ongelma, Kuutio 1, keskittyi tiedon- ja käsitteiden käytön selvittämiseen. Kolmannella Neliö-tehtävällä selvitin oppilaiden ratkaisu- ja ajattelumalleja. Tehtävien 2 (Kuutio1) ja 4–6 (Janne ja Heikki, Kuutio 2, Kolmio) avulla tutkin ratkaisumenetelmien toistumista.

2 MATEMAATTINEN AJATTELU

Ympäristömme on täynnä ärsykkeitä: ääniä, hajuja ja makuja jne. Yhdistämme huomaamatta äänet esimerkiksi musiikkiin ja tutun hajun lempiruokaamme. Mikä on se mekanismi, joka saa aikaan ajattelutoimintaa meissä jokaisessa? Mitä toimintoja on olemassa ajattelun taustalla?

2.1 Ajattelun lähtökohdat

Fisherin (1990) mielestä asioiden havaitseminen on lähtökohta ajattelulle. Visuaalisia ja auditiivisia ärsykkeitä on pystyttävä havaitsemaan, ottamaan vastaan tai omaksumaan. Kuitenkaan pelkkä havainnoiminen ei ole ajattelua. Asioita tulee pystyä pitämään mielessä jonkin aikaa, jotta niihin voidaan reagoida. Tällöin voimme alkaa puhua ajattelusta. Kaikilla normaalisti kehittyneillä ihmisillä on kyky ajatella. Yksilöiden välillä voi kuitenkin olla suuria eroja ajattelun taitoja verrattaessa. Selvimmin ero on nähtävissä aikuisten ja lapsien välillä. Aikuisten ei tarvitse ponnistella asioiden muistamiseksi tai oppimiseksi yhtä paljon kuin lasten. Heillä on jo olemassa valmiita ajattelumalleja useimmista lapsille uusista tilanteista. (Fisher 1990, 1–2.) Kertolaskun laskeminen sujuu varttuneemmalta nopeammin kuin lapselta, joka vasta opettelee ymmärtämään kertolaskun käsitettä. Ekspertin, tässä yhteydessä aikuisen, tietorakenne on kytkennöiltään rikas verrattuna noviisin, tässä yhteydessä lapsen, kytkennöiltään köyhempään tietorakenteeseen (Haapasalo 1997b, 53).

Fisher (1990) toteaa ajattelun vaativan kriittisyyttä ja luovuutta päättelyn ja uusien ideoiden luomiseksi. Ajattelua tarvitaan mentaalisissa toiminnoissa, jotka puolestaan auttavat ratkaisemaan ongelmia, tekemään päätöksiä ja etsimään uutta ymmärrystä. Suurimmaksi osaksi ajattelu on tietoista. Tietoisuus ei kuitenkaan sulje pois sen tiedostamatonta puolta. (Fisher 1990, 4.) Metakognitioilla tarkoitetaan yksilön oman mentaalisen toiminnan ohjaamista ja tarkkailua. Ne ovat merkittävä osa ongelmanratkaisuun tarvittavien tietojen ja menetelmien valintaa. (Pugalee 2001, 237.)

2.2 Matemaattisen ajattelun ja tiedon yhteys

Ajattelu ja tieto ovat läheisesti yhteydessä toisiinsa. Siegler (1991) näkeekin ajattelun tiedon prosessointina eli järjestelynä. Hänen mukaansa lapsen ajattelun laatu riippuu siitä, minkälaista tietoa hän esittää tilanteessa ja kuinka hän käsittelee sitä saavuttaakseen tavoitteensa. Oma merkityksensä on sillä, kuinka paljon kerrallaan lapsi kykenee pitämään tietoa mielessään. (Siegler 1991, 59.)

Matemaattisen ajattelun olennainen elementti on kyky tunnistaa suhteita ja sääntöjä asioiden välillä (Fisher 1990, 207). Sieglerin (ks. Siegler 1991) tavoin Fisherin näkemys ajattelusta liittyy tietoon ja sen muodostamiin suhteisiin muiden tietojen kanssa. Fisher vertaa matematiikkaa verkkoon, jonka osaset liittyvät toisiinsa usealla eri tavalla. Hänen mukaansa matemaattinen ajattelu edellyttää kykyä muodostaa asioiden välillä yhteyksiä. Matematiikka on toisiinsa liittyvien käsitteiden ja menetelmien kehys. (Fisher 1990, 207–208.) Fisherin (1990) ja Sieglerin (1991) ajatusten pohjalta voinee todeta tiedon olevan perustavanlaatuinen osa matemaattista ajattelua. Ajattelu on riippuvainen siitä, miten ihminen on järjestänyt havaitsemansa tiedon. Tämän johdosta tietorakenteita kehittämällä pystytään edistämään matemaattista ajattelua.

Matemaattisen ajattelun kehitys liittyy lasten kehittyviin kykyihin ymmärtää ja rakentaa lausekkeita (Smith 2002, Aunion ym. 2005, 131 mukaan). Matemaattisen lauseen muodostaminen käsittää kaksi vaihetta: tiedon muodostamisen ja tiedon oikeellisuuden varmistamisen (Haapasalo 1997a, 138). Koska tieto on osa lausekkeen muodostamisprosessia ja koska matemaattisen ajattelun kehitys liittyy lausekkeiden rakentamiseen, lausekkeissa käytettyä tietoa tarkastelemalla voidaan tutkia matemaattista ajattelua.

Edellä todettiin tiedon ja sen rakentumisen ymmärtämisen olevan merkittävä osa matemaattista ajattelua. Tiedon mainittiin vaikuttavan lausekkeiden muodostamiseen ja ymmärtämiseen, asioiden välisten suhteiden syntymiseen ja tiedon käsittelyn mahdollisuuksiin. Näin ollen tutkittaessa matemaattista ajattelua tiedon rakentumisen kautta, olennaista on kiinnittää huomiota tutkittavien käsitteiden rakenteisiin. Minkälaisia suhteita asioiden välille on luotu? Linkittyvätkö käsitteet toisiinsa?

2.3 Tieto

Tiedolla ja sen rakentumisella on keskeinen sija ajattelussa ja ongelmanratkaisussa. Fisherin (1990) mukaan tiedon merkitystä on aliarvioitu kasvatuksessa ja koulutuksessa. Todellinen ongelmanratkaisu kuvataan usein toiminnaksi, johon kuuluvat sekä taidot että ymmärrys. Ongelmanratkaisu perustuu kuitenkin tietoon, vaikka se olisikin tunnetun strategia- tai yritys-erehdys-tiedon muodossa. Ongelmanratkaisu edellyttää tietotaitoa. (Fisher 1990, 113–114.) Klassisen määritelmän mukaan tieto on a) hyvin perusteltu, b) tosi c) uskomus. Ehto (a) erottaa tiedon pelkästä *luulosta*, (b) *erehdyksestä* ja (c) hypoteettisesta *arvauksesta*. (Niiniluoto 1989, 57.) Uskomukset ovat yksilön käsityksiä matematiikasta. Ne voivat vaikuttaa siihen, kuinka ongelmaa lähestytään ja mitä tekniikoita käytetään tai mitä vältetään. (Schoenfeld 1985, 45.)

Tiedon laadulla on vaikutusta siihen, kuinka sitä pystytään käyttämään. Hirsjärven (1995) mukaan tieto kytkee ajattelun ja todellisuuden toisiinsa. Tieto on merkittävää ymmärtämisen kannalta. Aito ja oikea tieto auttaa ymmärtämään todellisia tilanteita. Ei siis ole samantekevää, millaista tietoa koulussa välitetään. Hirsjärvi (1995) jakaa tieto-käsitteen kahteen osaan: *sirpaletietoon* ja *oivallukseen perustuvaan tietoon.* Sirpaletiedolla tarkoitetaan detaljitietoa, kuten faktojen ja tapahtumien rekisteröintejä, urheilutuloksia ja luetteloita. Sirpaletieto ei kytke asioita toisiinsa oikealla tavalla, tai paremminkin se ei kytke tietoja lainkaan toisiinsa. Oivallukseen perustuvassa tiedossa on keskeistä oppilaan järjen käyttö ja ymmärrys. Se auttaa mieltämään kokonaisuuksia, koska se luo tapahtumille taustaa ja tuo esiin syy-yhteyksiä. (Hirsjärvi 1995, 79–80.) Leinonen (2002) näkee sirpaleisen tiedon tietona, joka taltioidaan yksittäisinä tapauksina, mutta joka ei kuitenkaan ole rakentamassa jäsentynyttä struktuuria. Ymmärretty tieto on tavoittelemisen arvoista, koska se auttaa yksilöä näkemään paremmin oman tilanteensa ja vaihtoehtojensa seuraukset (Leinonen 2002, 475, 477). Täten koulujen opetuksen tulisi pyrkiä esittämään tieto juuri oivallukseen tai ymmärrykseen perustuvan tiedon muodossa. Tällöin oppilaan olisi vaivattomampaa yhdistää tietorakenteeseensa uusia tietoja verrattuna tilanteeseen, jossa tieto on omaksuttu sirpaletietona. Samalla oppilaan oppisivat rakentamaan toimivia tietomalleja. Haapasalo (2004) on määritellyt käsitteisiin liittyvän tiedon, konseptuaalisen tiedon seuraavasti:

> Konseptuaalinen tieto on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet sekä logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä, menetelmiä, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia. (Haapasalo 2004, 53.)

Solmut ja linkit voivat perustua yksilön omiin mentaalisiin konstruktioihin (Haapasalo 2004, 53.) Jos tieto sisältää linkkejä ja solmuja, on mahdollista muodostua Hirsjärven (1995) ja Leinosen (2002) mainitsemaa oivaltavaa tietoa tai ymmärtävää tietoa. Pelkän tiedon lisäksi olisi osattava rakentaa tiedosta käsitteellistä tietoa, jotta sen käyttö ja sovellus mahdollistuisi mahdollisimman erilaisissa tilanteissa. Vasta sitten, kun oppilas oppii itse rakentamaan tietonsa, hän on ymmärtänyt niiden yhteyden ja pystyy yleistämään ja soveltamaan tietoa (Yrjönsuuri 2004, 121). Konseptuaalisen tiedon lisäksi Haapasalo (2004) määrittelee menetelmiin liittyvän tiedon, proseduraalisen tiedon seuraavasti;

> *Proseduraalinen tieto tarkoittaa* dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän sääntöjen ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on tietoisesti automatisoitunut. (Haapasalo 2004, 54.)

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon eroa luonnehtii suorituksen automatisoituminen ja se, kuinka tietoisesti yksilö perustelee tai joutuu perustelemaan toimintojensa vaiheet. (Haapasalo 2004, 54.)

Presmegin ja Balderas-Cañasin (2001) määrittelemä perustiedon käsite on tärkeä tekijä ongelmanratkaisussa, jotta tietoon päästäisiin käsiksi. Perustiedot sisältävät monia aikaisemmin luotuja mielikuvia. (Presmeg & Balderas-Cañas 2001, 291.) Jos perustiedot sisältävät virheellisiä mielikuvia, heijastuvat ne siihen, miten oppilas ratkaisee annetun tehtävän. Tämän perusteella oppilaan matemaattisen ajattelua voidaan tutkia mielikuvia ja perustietoja tarkastelemalla. Grayn ym. (1999) mukaan geometrisen tiedon perusta on muotojen havaitsemisessa. Aluksi muodot havaitaan hahmoina, tämän jälkeen niitä kyetään kuvaamaan verbaalisesti ja lajittelemaan ominaisuuksien perusteella. Verbalisoinnin kautta lapsi hahmottaa hierarkioita kappaleiden luokittelussa. Geometrian käsite (esim. neliö) pitää sisällään muita käsitteitä (sivut, sivujen pituus, piiri, jne.). Geometriaan kuuluu huomion kiinnittäminen joidenkin kohteiden havainnoimiseen. Tämä kehittyy aktiivisella kappaleiden mentaalisella mallintamisella. (Gray ym. 1999, 112–113, 128.) Koska geometriset kappaleet sisältävät käsitteitä itsessään, on tärkeätä omata taidot muodostaa konseptuaalista tietoa kappaleen sisältämien käsitteiden linkittämiseksi toisiinsa. Jos näin ei tapahdu, muodostuu erillisistä tiedon osista sirpaletietoa (ks. Leinonen 2002; Hirsjärvi 1995).

2.3.1 Tiedon järjestely

Järjestyneen tiedon avulla tietoa pystytään käyttämään tehokkaammin ongelmanratkaisua edistävänä tekijänä. Siegler (1991) kuvailee neljä muutosmekanismia, joilla on informaation prosessoinnissa huomattava rooli: automatisaatiolla, koodauksella (eli tunnistamisella), yleistyksellä ja strategian luomisella. Automatisaation seurauksena mentaalisia prosessit hallitaan yhä tehokkaammin. Tämän johdosta ne vaativat aina vain vähemmän huomiota. Tunnistamiselle kohteesta samastetaan sen olennaisimmat ominaisuudet. Näitä tietoja hyödyntämällä siitä luodaan sisäinen malli. Ongelmanratkaisussa on olennaista erottaa olennainen tieto epäolennaisesta, jolloin tehokkaalla tunnistamisella on ongelmanratkaisun kannalta merkitystä. Ratkaisustrategia syntyy, kun aikaisemmin tietyssä tilanteessa toiminutta taktiikkaa kokeillaan uudestaan samantyyliseen tilanteeseen. Samalla strategian käyttö yleistyy muihin vastaaviin tilanteisiin.(Siegler 1991, 9–10.) Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että aluksi oppilas oppii esimerkiksi ratkaisemaan yhteenlaskulla kertolaskutehtävät. Kertolaskujen ratkaisustrategiaksi kehittyy yhteenlasku-menetelmä, joka yleistyy kaikkiin muihinkin kertolaskutehtäviin. Oppilas tunnistaa tietyntyyliset tehtävät kertolaskuiksi, ja liittää sisäiseen malliinsa kertolaskuille tyypilliset piirteet, esimerkiksi saman määrän toistumisen. Automatisoituneessa tilanteessa oppilaan ei enää tarvitse kauan pohtia, mikä laskutehtävä hänelle on määrätty setvittäväksi. Sisäisen mallin ja siihen liittyvän ratkaisustrategian avulla oppilas pystyy nopeasti aloittamaan varsinaisen kysymyksen laskemisen.

Jos tieto on organisoitunut heikosti, eikä asioiden välille ole juuri muodostunut yhteyksiä, hankaloituu ongelmien ratkaisun onnistuminen. Chinnappan (1998) toteaa hyvin järjestyneen tehtäväkohtaisen tietopohjan edistävän tietoon käsiksi pääsemistä sekä määrittävän, kuinka hyvin tietoa pystytään käyttämään ongelmanratkaisussa. Pitkäkestoisessa muistissa sijaitsevan tiedon organisaation laatu edistää tai ehkäisee tiedon aktivointia suorituksen aikana. Tämän vuoksi geometrisen ongelmanratkaisun tutkimuksen tulisi suuntautua oppilaiden geometrisen tiedon rakenteisiin, laajuuteen jolla he sitä käyttävät sekä käytön tehokkuuteen.(Chinnappan 1998, 202–203.) Tarkastelemalla oppilaiden käsitteiden ja tiedon käyttöä tämä tutkimus pyrkii selvittämään, kuinka heidän käyttämänsä tiedon laatu vaikuttaa ongelmanratkaisuun.

2.3.2 Tietorakenteiden järjestelmä

Ihminen jäsentää maailmaa oman henkilökohtaisen käsitejärjestelmänsä varassa. Käsitejärjestelmät ovat jatkuvan muutoksen alaisia. Ne voivat sisältää erillisiä tai jossakin määrin integroituneita osia. Käsitejärjestelmien sisälle voidaan muodostaa käsitteellisiä viitekehyksiä. Jokainen käsitteellistää maailmaa viitekehyksensä puitteissa (Leinonen 2002, 479.)

Mentaaliset mallit ja skeemat. Skeemat ovat tiedon ryhmiä, jotka sisältävät tietoa ydinkäsitteistä, käsitteiden välisistä suhteista sekä siitä, miten ja milloin käsitteitä tulisi käyttää. Skeemat ohjaavat tiedon vastaanottoa, mieleen palauttamista sekä käyttöä. (Chinnappan 1998, 202–203.) Kuusinen ja Korkiakangas (1991) viittaavat kognitiiviseen oppimissuuntaukseen, jonka mukaan tieto jäsentyy tietopaketeiksi eli skeemoiksi, jotka voivat sisältää tietoa eri alueilta. Skeemat muodostavat verkostoja, sekä hierarkkisia että päällekkäisiä ja toisensa läpäiseviä. Ne muuttuvat kokemusten ja uuden tiedon myötä; ideat liittyvät toisiinsa, käsitteet muuttuvat ja laajentuvat. Skeemat toimivat uuden informaation nivomisen perustana. Ne ovat yksilöittäin erilaisia, koska ihmisten kokemukset ovat erilaisia. (Kuusinen & Korkiakangas 1991, 53.)

Chinnappan (1998) luonnehtii geometristen skeemojen tärkeiksi piirteiksi niiden organisaation ja levinneisyyden. Organisaatio viittaa ideoiden välillä oleviin yhteyksiin. Levinneisyys taas liittyy yhteyksien laajuuteen. Skeemoja tarkastelemalla ei pystytä tutkimaan, kuinka ne toimivat keskenään ongelmanratkaisussa. Mentaalisten mallien avulla tutkija pystyy tarkastelemaan skeemojen yhteistoimintaa pyrittäessä ratkaisuun. Mentaaliset mallit koostuvat sarjoista kognitiivisia toimintoja, esimerkiksi päätöksenteosta ja tietojen käyttötapojen pohdinnoista. (Chinnappan 1998, 203–204.) Mentaaliset mallit ovat ikään kuin johtajia ja skeemat työntekijöitä. Johtajat ohjaavat alaistensa työntekoa ohjaten osaa toimimaan yhdessä ja toisia erikseen erilaisissa työtehtävissä.

Haapasalon (1997b) mielestä tarve uuden ja käyttökelpoisen skeeman löytämiselle seuraa tilanteesta, jossa ongelmatilanteen liittäminen olemassa oleviin rakenteisiin ei ole enää mahdollista. Uuden skeeman avulla pyritään aktiivisen kokeilun ja toiminnan avulla saavuttamaan asioille merkitykset, jotka ovat sopusoinnussa kokemusten kanssa. Uudessa ongelmatilanteessa syntyy *loogis-kognitiivinen ristiriita*, jos olemassa olevista kognitiivisista struktuureista ei löydy tulkintaan sopivaa mentaalista mallia. (Haapasalo 1997b, 61–63.) Lesh ja Harel (2003) kutsuvat skeemaa käsitteelliseksi työkaluksi. Työkalun avulla konstruoidaan, kuvaillaan ja selitetään ratkaisun kohteena oleva matemaattinen systeemi: suhteet, toiminnot, säännöllisyydet jne. Siihen saattaa kuulua menetelmiä ja ennusteita tavoitteiden saavuttamisesta. (Lesh & Harel 2003, 159.)

Käsitteet. Leinosen (2003, 57–58) mukaan käsitteet ovat ajattelemisen ja tietämisen kulmakiviä. Niitä voidaan käyttää myös luokitteluperusteena. Haapasalo (1997b) ymmärtää käsitteet sekä yksilön henkisenä rakenteena että yhteisesti hyväksyttyinä ilmausten merkityksinä. Ne voidaan määritellä joko väljästi ilmoittamalla käsiteluokkaan kuuluvia tai kuulumattomia jäseniä tai esittämällä määritteleviä ominaisuuksia tai ehtoja. (Haapasalo 1997b, 63.) Entwistlen, McCunen ja Walkerin (2001) mukaan käsitteiden erot johtuvat yksilöiden tietorakenteiden ja kokemusten erilaisuudesta. Tämän vuoksi heidän oppimansa käsitteet poikkeavat toisistaan. Nämä käsitteet vaikuttavat siihen, miten asioita tulkitaan. (Entwistle ym. 2001, 105.) Yrjönsuuren (2004) mukaan matemaattiset käsitteet määritellään lauseina, joihin sisältyy sekä käsitteiden ominaisuuksia että tehtävän laskemiseen liittyviä menetelmällisiä ohjeita. Käsitteen tunnuspiirteitä ovat ominaisuudet ja ala. Ominaisuudet ovat piirteitä, jotka määrittävät kyseisen käsitteen. Käsitteen alalla taas tarkoitetaan tapauksia, jotka kuuluvat kyseisen käsitteen piiriin. Yksilön käsitykset voivat olla kummassakin suhteessa puutteellisia. Käsitys on yksilön henkilökohtainen näkemys käsitteestä. Uusi asia ja uusi käsite tulevat ymmärretyksi vasta, kun ne tulkitaan aikaisemmin rakentuneiden tietojen ja käsitysten avulla. (Yrjönsuuri 2004, 112.)

Niin Haapasalo (1997b), Entwistle ym. (2001), ja Yrjönsuuri (2004) korostavat käsitteiden henkilökohtaista luonnetta. Todennäköisesti kenenkään käsitys käsitteestä ei ole täysin identtinen toisen henkilön vastaavan käsitteen kanssa. Tämä johtaa siihen, että opetus- ja oppimistilanteissa ohjaajan on osattava hahmottaa ja havaita, minkälainen ymmärrys kullakin oppijalla opiskeltavasta asiasta on. Yrjönsuuri (2004) toteaa kuitenkin, että kaikilla käsitteen käyttäjillä tulisi olla käsitteestä sama käsitys tietyssä tilanteessa. Tähän voi pyrkiä havaintojen, harjoitusten ja ohjatun opiskelun avulla. (Yrjönsuuri 2004, 112.) Merenluodon ja Lehtisen (2004) käsityksen mukaan niin matematiikalle kuin useille muillekin tieteille näyttää olevan tunnusomaista se, että jotkut käsitteet ovat selvästi vaikeampia oppia kuin toiset. Käsitteiden oppimisen ongelmallisuudesta syntyneet virhekäsitykset ovat sitkeitä ja ”vastustuskykyisiä”. (Merenluoto & Lehtinen 2004, 302.) Koska yksilöiden käsitteiden pitäisi olla mahdollisimman samankaltaisia keskenään, on niiden opettamiseen ja oppimiseen suhtauduttava huolella. Väärinkäsitykset on oikaistava mahdollisimman varhaisessa vaiheessa. Clementsin, Wilsonin ja Saraman (2004) mukaan geometrian käsitteet liittyvät kappaleiden muotoihin ja niiden välisiin suhteisiin. Kyky kuvailla, käyttää ja visualisoida geometristen muotojen rakentumista on sekä käsitteellisesti että tiedollisesti tärkeä osa geometriaa. (Clements ym. 2004, 164.) Jos oppilas ei esimerkiksi hahmota millainen jokin kappale on, on lähes mahdotonta ratkaista kyseiseen kappaleeseen liittyviä ongelmia.

Objektit. Dörflerin (2002) mukaan matematiikan tehtävissä esiintyy runsaasti objekteja. Geometriassa niillä tarkoitetaan esimerkiksi pisteitä, viivoja, kolmioita, neliöitä jne. Objekteihin liittyy monia ominaisuuksia, jotka niille on annettu määritelmässä (käsitteen määritelmässä) tai ne ovat seurauksia määritelmästä. (Dörfler 2002, 337). Esimerkiksi neliön määritelmästä seuraa, että sen sivujen (objektien) on oltava yhtä pitkiä. Tämän johdosta kaikkien neliön kulmien (objektien) tulee olla suoria, sillä muuten määritelmä ei pitäisi paikkaansa. Kognitiiviset teoriat (Dörfler 2002) näkevät matemaattisten objektien rakentuvan kognitiivisten prosessien avulla. Objektit sisältävät oppijan käsityksiä soveltuvasta kognitiivisesta rakenteesta. (Dörfler 2002, 340.) Leinonen (2003, 58) käyttää objektien yhteydessä termiä olio. Hänen mukaansa objektit (oliot) ovat esimerkiksi materiaalisia kappaleita tai Dörflerin määritelmän mukaisia pisteitä tai viivoja. Ominaisuuksien lisäksi objekteilla voi olla käsite tai useita käsitteitä. Esimerkiksi viiva objektina voi muodostaa neliön sivun. Objektia vastaava käsite on neliön sivu, jonka ominaisuus on tietty pituus, koska kaikki neliön sivut ovat samanpituisia. Dörflerin (2002) mukaan skeemat eroavat objekteista siten, että objektit liittyvät läheisesti kirjoitettuun kieleen. Skeemat taas ovat yksilön sisäisiä malleja objekteista. Objekteilla ja skeemoilla on yhteisiä osia, kuten objektien ominaisuudet, jotka voivat olla osa vastaavan kappaleen skeemaa. Koska objektit sisältävät oppijan omia käsityksiä, voi niiden käyttö lisätä tietoa oppijan ajattelusta ja reflektiosta (Dörfler 2002, 348). Objektit edustavat käsitteiden kuvia todellisuudessa. Objektilla on nimi (esim. neliö) sekä kuva. Käsite kertoo, minkälainen objekti on.

KUVIO 1. Konstruoimani pyramidimalli mentaalisten mallien, skeemojen, käsitteiden ja objektien välistä suhteista

2.4 Muistin merkitys ongelmanratkaisussa ja tiedon käytössä

Muistin käyttö on kognitiivinen taito, jota tarvitaan ongelmanratkaisussa tiedon ja metakognitioiden lisäksi. Tieto ja muisti ovat läheisessä yhteydessä toisiinsa. Muistilla on mainittava arvo kaikessa ajattelussa. Se on osa ongelmanratkaisua sen jokaisessa vaiheessa. Pohdiskellessamme työstämme asioita, joita muistamme maailmasta. Muistin avustuksella on mahdollista laajentaa ratkaistavien ongelmien kenttää, koska voimme mielessämme kuvitella tapahtumat uudelleen menneisyydestä nykyhetkeen. (Fisher 1990, 113–114.)

Aluksi tieto tallentuu lyhytkestoiseen muistiin (työmuistiin), josta se siirtyy pitkäkestoiseen muistiin (Fisher 1990, 115). Työmuisti koostuu tiedoista, jotka säilytetään vain lyhyen hetken. Pitkäkestoista muistia käytetään tietojen säilyttämiseen. (Atkinson, Atkinson, Smith, Bem & Nolen-Hoeksema 2000, 270.) Fisher (1990) tähdentää pitkäkestoisen muistin järjestyvän käsitteiden ja mielikuvien verkostoksi. Muistin tietoihin pääsee käsiksi erilaisten strategioiden ja menetelmien kautta. Osa asioista säilyy toisia asioita paremmin muistissa. Tämä voi olla seurausta joko alkuperäisen havainnon luonteesta tai siitä, kuinka hyvin tiedot on liitetty aikaisempien muistikuvien seitteihin. Kokemuksen puutteesta johtuen lapset ovat heikompia siinä, miten heidän tulisi käyttää tietämäänsä tietoa. (Fisher 1990, 116.)

Työmuistilla on tärkeä rooli ajattelussa. Ongelmanratkaisussa työmuistia käytetään ongelman osien järjestelyyn sekä pitkäkestoisesta muistista tuodun tiedon organisointiin. Tutkijat käsitteellistävät työmuistin usein liitutauluksi, jolla mieli suorittaa laskutoimitukset ja välitulokset jatkokäyttöä varten. (Atkinson ym. 2000, 274.) Swansonin ja Beebe-Frankenbergerin (2004) tutkimuksen mukaan työmuistilla on merkittävä rooli tietojen yhdistelyssä ongelmanratkaisun aikana. Siellä säilytetään aikaisemmin prosessoitua tietoa, jotta siihen voidaan liittää myöhemmin käsitelty tieto. Työmuisti varastoi tiedon ydinasiat koko ongelman esitysmuodon rakentamista varten. (Swanson & Beebe-Frankenberger 2004, 488.) Työmuistissa pysyvät tallessa esimerkiksi laskutoimitusten välitulokset, joita voidaan käyttää uudelleen pohjatietona uusien tietojen aikaansaamiseksi. Atkinsonin ym. (2000) mukaan työmuistia käytetään sekä numeeristen ongelmien että erityyppisten monimutkaisten ongelmien ratkaisussa. Mitä suurempi työmuisti yksilöllä on, sitä paremmin yksilö ratkaisee ongelmia, vaikkakin työmuistien koot vaihtelevat vain vähän yksilöiden välillä. Työmuistin voidaan ajatella toimivan pysäkkinä matkalla pitkäkestoiseen muistiin. Sen kautta tieto siirretään säilytettäväksi pitkäkestoiseen muistiin. (Atkinson ym. 2000, 275–276.)

Verbaalisen materiaalin yhteydessä pitkäkestoiseen muistiin tallentuu asian merkitys (Atkinson ym.2000, 277). Geometriaan ja matematiikkaan soveltaen pitkäkestoiseen muistiin tallentuu asian sisältö, esimerkiksi käsitys siitä, millainen kolmiulotteinen kappale kuutio on, mistä tekijöistä se koostuu ja mikä on sille ominaista. Atkinson ym.(2000) toteavat unohtamisen olevan yleensä seurausta siitä, että reitti tietoon pääsemiseksi on kadonnut. Tieto sinänsä ei katoa pitkäkestoisesta muistista. Huono muisti liittyy usein tiedon uudelleen hakemisen epäonnistumiseen ennemminkin kuin tiedon varastoinnin epäonnistumiseen. Tiedon järjesteleminen vaikuttaa mieleen palauttamiseen. Mitä enemmän tietoa järjestetään, sitä yksinkertaisempi se on palauttaa mieleen. Tietoa voi järjestää esimerkiksi luokittelemalla pieniä palasia saman luokan sisälle. Myös kontekstilla on merkitystä tiedon mieleen palauttamisessa: on vaivattomampaa palauttaa mieleen asia, jos yksilö on samassa tilanteessa kuin sitä koodatessaan. (Atkinson ym. 2000, 278, 282.) Kuusinen ja Korkiakangas (1991) viittaavat mielikuviin, jotka toimivat muistin apuvälineinä. Niitä käytetään uusien asioiden mieleen painamisessa. Mielikuvien avulla uudet asiat painetaan mieleen ennestään hallittua tuttua kehikkoa tai tietoa soveltaen. (Kuusinen & Korkiakangas 1991, 55.)

2.5 Matemaattinen ajattelu osana ongelmanratkaisua

Dewey (1921, Boltonin 1972, 9 mukaan) ymmärtää ajattelun kokemuksen ja käyttäytymisen uudelleen järjestämisenä. Aikaisemmin Dewey (1910) on määrittänyt termin *reflektiivinen ajattelu*. Reflektiivistä ajattelua ohjaa tarkoitus, joka syntyy ongelmallisen tilanteen kohtaamisessa. Jotta tilanne saa aikaan ajattelua, sen tulee muodostaa este tavoitteeseen suuntautuvan toiminnan tielle. Ajattelu liittyy läheisesti ongelmanratkaisuun. Ajattelua ei tapahdu ongelmanratkaisutilanteessa, mikäli ongelma ratkeaa sattumalta. Jos ratkaisuun päädytään päättelyn avulla, tapahtuu ajattelua. Päättelyn avulla asiat ja tapahtumat pyritään saamaan järjestykseen suhteessa toisiinsa. Ajattelu on objektien ja tapahtumien arviointia ja arvostelua. Sitä pidetään osana prosessia, jonka myötä yksilö sopeutuu ympäristöönsä.(Dewey 1910, Boltonin 1972, 5, 7–9 mukaan.) Holtonin, Andersonin, Thomasin ja Fletcherin (1999) käsitys ongelmanratkaisusta on samansuuntainen Deweyn näkemyksen kanssa. He näkevät tapahtuman ongelmanratkaisuna ainoastaan silloin, kun ratkaisutapa ei ole ratkaisijalle entuudestaan tuttu tai ilmiselvä. Ratkaisijan tulee päättää oma tapa lähestyä ongelmaa ja toteuttaa tarvittavat matemaattiset ratkaisumenetelmät. (Holton ym. 1999, 351.) Vaikka Deweyn (1910) näkemys ajattelusta sisältää ajatuksen tiedon järjestelystä, on hänen määrittelemänsä reflektiivisen ajattelun lähtökohta ongelmassa, joka saa aikaan ajattelua. Holtonin ym.(1999) määritelmässä on lisäksi kiinnitetty huomiota siihen, etteivät tehtävät ole ratkaisijalle liian helppoja. Molemmat näkemykset sisältävät ajatuksen esteestä, joka on ylitettävä ennen ratkaisuun päätymistä. Holtonin ym. asettama ehto ongelman uutuudesta herättää kysymyksiä. Eikö ennalta tuttu tilanne pysty aiheuttamaan estettä uudelleen? Jos tilanne on ylipäätään vaikea ratkaista, voiko ongelma aiheuttaa esteen uudelleen?

Ongelmanratkaisutaidon merkitys. Tehokkaat ajattelemisen taidot heijastuvat kaikkeen oppimiseen ja vaikuttavat lapsen käsitykseen itsestään oppijana. Oppilas kokee uuden tehtävän usein sen mielikuvan perusteella, joka hänelle on muodostunut aiemmasta, samantyyppisestä oppimistilanteesta. (Ilmavirta 1995, 48.) Jos tilanteesta tai omista taidoista on muodostunut kielteinen käsitys, se suuntaa oppilaan käyttäytymistä ongelmanratkaisutilanteessa. Huhtala ja Laine (2004, 320) tukevat väitettäni toteamalla aikaisempien matematiikkakokemusten vaikuttavan suuresti opiskelijoiden tapaan kohdata matematiikka myöhemmissä elämänvaiheissa.

Oppilaan käsitys itsestä muodostuu varhain perusopetuksen alimmilla luokilla. Jos oppilas hallitsee joustavia ajattelemisen taitoja ja kokee useamman vuoden ajan onnistumisia, hänelle todennäköisesti kehittyy eräänlainen ”immuniteettisuoja” osaamattomuutta ja epäonnistumista vastaan. (Ilmavirta 1995, 48.) Tarkkojen ja yksipuolisten harjoitussarjojen tekeminen aktivoi lähinnä vain vasenta aivopuoliskoa, jolloin oikea aivopuolisko fysiologisessa mielessä ikään kuin surkastuu (Haapasalo 1997a, 34). Oppilaille tulisikin tarjota ongelmia, jotka tarjoavat haastetta molemmille aivopuoliskoille. Näin pystyttäisiin vaikuttamaan myönteisesti oppilaan kehitykseen ja luomaan edellytyksiä myönteiselle minäkuvalle. Myös Peruskoulun opetussuunnitelmien uusissa perusteissa 2004 viitataan matematiikan merkitykseen oppiaineena seuraavasti:

> Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti – se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta. (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 158.)

Ongelmanratkaisutaidot ja matemaattisen ajattelun kehittäminen nähdään valtakunnallisella tasolla tärkeäksi tekijäksi yksilön kehityksen näkökulmasta.

Ongelmanratkaisun myötä kognitiiviset prosessit: havaitseminen, kielen käyttö, muisti ja käsitteiden ymmärtäminen tulevat tarpeellisiksi (Siegler 1991, 252.) Voimme kuvitella, mitä hyötyä havaitsemisesta ja aistimisesta olisi, jos emme voisi pohdiskella ja selvittää havaittavissa oleviin asioihin liittyviä ongelmia. Ongelmanratkaisu kehittää lähes kaikenlaisia taitoja. Haapasalo on luokitellut ongelmanratkaisun kehittämät taidot seuraavalla tavalla:

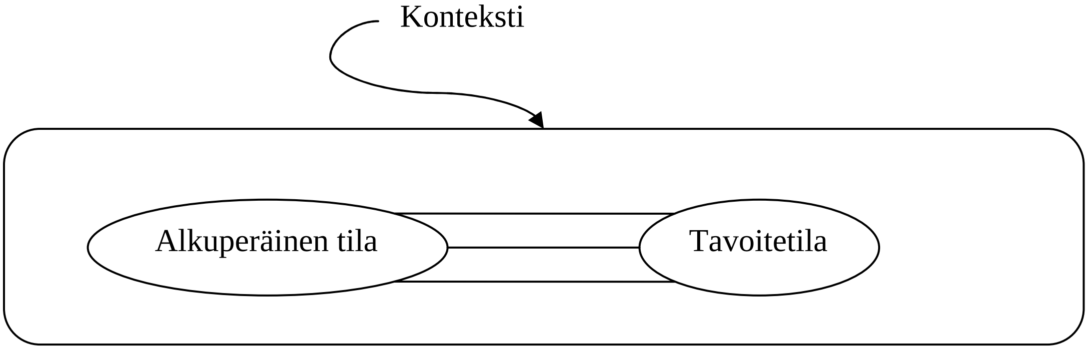
- *luovuus,*
- *huomiokyky,*
- *visualisointi ja geometria,*
- *mallintaminen,*
- *arviointi ja mittaaminen,*
- *laskeminen,*
- *mielikuvitus,*
- *tietokäsitys,*
- *tiedon hankinta ja varmistaminen,*
- *järjestely- ja opiskelutekniikka,*
- *käytännöllisyys,*
- *sosiaalisuus ja kommunikaatio,*
- *viestintä,*
- *eksperttiyden kunnioittaminen,*
- *sitkeys. (Haapasalo 1997a, 35.)*

Kuten Haapasalon (1997a) luettelosta on nähtävissä, ongelmanratkaisutaidoilla voidaan vaikuttaa monen asian kehittymiseen. Näitä asioita, kuten esimerkiksi mallintamista, arviointia ja opiskelutekniikkaa, ihminen tarvitsee useissa elämänvaiheissaan.

3 MATEMAATTISET ONGELMAT JA NIIDEN LUOKITTELU

Mitä oikeastaan tarkoitetaan sanalla ongelma? Mitä edellytyksiä esimerkiksi kysymykseltä edellytetään, jotta sitä voisi kutsua ongelmaksi? Rubinsteinin (1986) mukaan ongelma on olemassa, kun seuraavat asiat ovat ratkaisijan mielessä: alkuperäinen tila, tilanne johon tulisi pyrkiä, esteet, jotka hidastavat tai estävät tavoitteen saavuttamisen. Ongelman vaikeuden taso riippuu siitä, kuinka ylitsepääsemättömät esteet ovat. Virheellinen ongelmanratkaisu seuraa usein väärin määritellystä alkuperäisestä tilasta tai huonosti määritellystä tavoitteesta. (Rubinstein 1986, 7.) Ongelmat ovat suhteellisia: ongelma toiselle ei ole sitä välttämättä toiselle. Ongelma on tietty suhde tehtävän ja sen suorittajan välillä. (Schoenfeld 1985, 74.)

Rubinstein (1986) näkee ongelman rakenteen keskittyvän kolmeen pääelementtiin: alkuperäiseen tilaan, tavoitteisiin ja prosesseihin. Prosessit voivat koostua esimerkiksi toiminnasta, joka ylittää alkuperäisen tilan ja tavoitteen välillä olevan kuilun. Tavoitteen tulee sisältää asiat, jotka haluamme saavuttaa ja jotka haluamme välttää. (Rubinstein 1986, 7–8.)



KUVIO 2. Ongelman anatomia. (Rubinstein 1986, 7)

Haapasalo (1985, 32) on päätynyt seuraavaan määritelmään ongelmasta: Jotta tietty tilanne olisi määrätyllä hetkellä, tietylle henkilölle ongelma, sen on aiheutettava tässä yksilössä, juuri sillä hetkellä, tietoista, päämäärähakuista (ajattelu)toimintaa, joka tähtää tavoiteltavaan tulokseen ilman välittömästi havaittavia keinoja. Haapasalon määritelmässä ajattelutoiminta vastaa Rubinsteinin (1986) prosesseja, joilla pyritään saavuttamaan tietty tavoite. Haapasalon (1985) näkemykseen liittyy oletus yksilöllisyydestä. Yksilöt kokevat erilaiset asiat ongelmiksi: toiselle henkilölle ongelmallisesta tilanteesta joku muu voi selvitä kokematta sitä ongelmaksi. Haapasalon (1997a, 17) mukaan ongelman luonne on sidottu aikaan, paikkaan, ja olosuhteisiin. Informaatioteknologian kyllästämässä yhteiskunnassamme ongelmamme ovat hyvin erilaiset kuin 1000 vuotta sitten. Sadan kilometrin matkan taittaminen parissa tunnissa ei ole nykysuomalaiselle ongelma. Ajanlaskumme alussa matkan taittaminen samassa ajassa olisi ollut ongelma.

Fisherin (1990) mielestä ongelma koostuu kolmesta elementistä: alkuperäisestä tilanteesta tai tehtävän kontekstista, esteistä ja tavoitteista (Fisher 1990, 100). Hän ajattelee ongelmaan olennaisesti liittyvän esteitä, jotka on ylitettävä ennen tavoitteeseen pääsyä. Toisin kuin Haapasalon ja Rubinsteinin mallissa, ongelmanratkaisuyritykset eivät ole osa ongelmaa. Fisherin mallissa ne ovat seurausta ongelmatilanteesta.

Ongelmien luokittelu. Haapasalon (1997a, 37) mukaan ongelmien luokittelussa on pedagogiselta kannalta perustellumpaa korostaa voimakkaasti yksilöstä riippuvia näkökohtia, erityisesti ajattelutoimintaa sekä emotionaalisia näkökohtia. Haapasalo (1985, 1997a, 1997c) on muokannut Dörnerin (1976) esittämää ongelmien luokitusta interpolaatio-, synteesi- ja dialektisiin ongelmiin didaktisesti tarkoituksenmukaisemmaksi. Ongelmat luokitellaan sen perusteella, millaisia ominaisuuksia sen lähtö- ja lopputilalla (halutulla ratkaisulla) on ja minkä laatuisia askeleita (operaatioita) tarvitaan ratkaisuun pääsemiseksi. (Haapasalo 1985, 45–53; 1997a, 37; 1997c, 84.) Koska Haapasalon muokkaamassa luokittelussa korostetaan yksilön ajattelutoimintaa, se soveltuu tämän tutkimuksen tarkoituksiin.

Interpolaatioprobleemat. Interpolaatioprobleemoissa sekä lähtö- että lopputilanne tunnetaan. Niiden väliltä puuttuu vain ne yhdistävä silta. Ongelman lähtö- ja lopputilanteen välinen ylitys löytyy tunnettuja toimintoja soveltavien heurististen strategioiden avulla. (Haapasalo 1997a, 38.) Heuristilla strategioilla ja prosesseilla tarkoitetaan ajatuksia toimeenpanevia ja niitä ylläpitäviä prosesseja. Näitä prosesseja ovat ongelmanratkaisustrategiat ja niitä ohjaavat metakognitiot. Heuristiset prosessit on yhteinen nimitys metakognitioille ja strategioille. (Haapasalo 1997c, 82.) Interpolaatioprobleemien ongelmaluokassa korostuu se, että ratkaisuaskeleet vaativat heuristista ajattelua. Ne voivat olla vaikeita keksiä, koska tarjolla on usein suuri määrä mahdollisia vaihtoehtoja. Askeleet on vaikeata todentaa mm. siksi, että tietyillä toiminnoilla voi olla seuraaviin askeliin haitallisia sivuvaikutuksia. (Haapasalo 1997a, 38.)

Analyysi-synteesi -ongelmat. Käsitteille analyysi ja synteesi on vakiintunut tietty merkitys. Synteesillä tarkoitetaan eteenpäin työstämistä ja analyysillä puolestaan taaksepäin työstämistä. Molemmat ajattelutoiminnot esiintyvät usein vuorotellen toisiinsa nivoutuneina. Analyysi-synteesi -ongelmien ratkaiseminen edellyttää selkeämmin luovaa ajattelutoimintaa kuin interpolaatio-ongelmien ratkaiseminen. Oleellinen ero näiden ongelmatyyppien välillä on se, että analyysi-synteesi-ongelman ratkaisemiseen tarvittavien toiminnot eivät välttämättä ole ratkaisijan tiedossa, eivätkä ne selviä ongelmanasettelussa. Ratkaisijan on oivallettava nämä toimenpiteet sekä järjestettävä ne sopiviksi ratkaisuaskeleiksi analysoiden taaksepäin tai syntetisoiden eteenpäin. Analyysi-synteesiongelma on samalla interpolaatio-ongelma, mikäli ongelmanasettelussa on selvästi annettu sekä alku- että lopputilat. Keskeistä on ottaa huomioon, että tietty tilanne on ratkaisijalle interpolaatio-ongelma tai analyysi-synteesi -ongelma riippuen hänen kehitystasostaan ja käytettävissä olevista tietotaidoista. (Haapasalo 1997a, 39.)

Analyysi-synteesi -ongelmien tuntomerkkejä voidaan testata seuraavasti (Haapasalo 1997a, 39):

1. Ovatko ongelman alku- ja lopputilat kiinnitetyt? Millainen yhteys on alku- ja lopputilojen välillä? Ongelmanasettelun on sisällettävä sellaisia ratkaisutien löytämistä vaikeuttavia ehtoja, jotka sinällään jo edellyttävät analyysiä ja/tai synteesiä.
2. Sisältääkö ongelmanasettelu ratkaisun löytämistä varten tarvittavia kätkettyjä tietoja, joita varten ei tarvita analyysiä eikä synteesiä? Tätä mahdollisuutta ei saa esiintyä.

Dialektiset ongelmat. Dialektisten ongelmien sisältöaluetta on tarkasteltava monelta kannalta. Ongelmanasettelu on verrattain epätarkka. Lopputila tai toivottu ratkaisu ei ole sisällöllisesti kiinnitetty, vaan selvästi avoin sekä laajuudeltaan, sisällöltään että muodoltaan. Ratkaisun etsimiseksi ei ole annettu ankaria arviointikriteerejä eikä ratkaisuvaihtoehtoja voida arvioida asteikolla tosi tai epätosi. Ratkaisuprosessi sisältää kolmivaiheisia askeleita: yrite – kritiikki – parannusehdotelma. Ratkaisija voi tehdä myös henkilökohtaisia päätöksiä valitessaan näkökulmansa ja painottaessaan eri osatekijöitä. Dialektiset ongelmat poikkeavat muista ongelmatyypeistä oleellisesti siten, että niissä ei ole annettu lopputilaa. Joskus alkutilannekin voi olla epämääräinen. Lopputilanne syntyy ratkaisuprosessin aikana ratkaisijan toimesta. Ratkaisija etsii tätä varten sopivia kriteereitä, jotka voivat olla subjektiivisia. (Haapasalo 1997a, 41.)

4 TUTKIMUKSEN TAVOITTEET JA TUTKIMUSONGELMAT

Kiinnostukseni matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisun tutkimiseen heräsi syksyllä 2002 lukiessani mielenkiintoista teosta (Fisher, R. 1990. Teaching children to think.) joka liittyi ajattelemaan opettamiseen. Tulevana luokanopettajana pidän tärkeänä sitä, että opettaja pystyy havaitsemaan oppilaiden puheesta asioita, jotka kertovat lapsen maailmasta ja tavasta ajatella. Kun näihin seikkoihin osataan tarttua opetuksessa, on mahdollista ottaa oppilaslähtöisyys omassa työskentelyssä paremmin huomioon.

Tutkimukseni tavoitteena on verbaalisen ja visuaalisen aineiston pohjalta ymmärtää neljännen luokan oppilaan kognitiivisia prosesseja ja löytää keinoja, joilla parantaa oppilaiden ajattelun ymmärtämistä. Tutkimukseni pääongelmana on selvittää, miten neljännen luokan oppilaat osaavat ajatella matematiikkaa geometristen ongelmien avulla tutkittuna. Tarkensin tutkimustehtävääni seuraavilla alaongelmilla:

1. Mitä tietoja oppilas pystyy havaitsemaan ja käyttämään ongelmanratkaisutilanteessa?
2. Minkälaisia geometrisiin kappaleisiin liittyviä käsityksiä tai uskomuksia oppilailla on? Miten käsitykset ja uskomukset vaikuttavat oppilaiden tekemiin ratkaisuihin ongelmanratkaisutilanteessa?
3. Miten oppilaat ymmärtävät ja ratkaisevat saman tehtävän, ja mistä johtuvat mahdolliset ratkaisutapojen erot.
4. Toistuuko sama ratkaisutapa tai ajattelumalli oppilaan ongelmanratkaisussa tehtävästä riippumatta?

Näiden kysymysten kautta pyrin selvittämään neljännen luokan oppilaan ajatusmaailmaa sekä tutkijana että opettajana. Ammatillisen kehittymisen näkökulmasta vastausten löytäminen tutkimusongelmiin tuo ymmärrystä opettajan arkeen ja matematiikan opettamiseen.

5 TUTKIMUKSEN SUORITTAMINEN

5.1 Tutkimusjoukko

Tutkimusjoukkoni koostui 18:sta neljännen luokan oppilaasta. Kaikki oppilaat olivat saman luokan oppilaita. Valitsin kyseisen luokan tutkimukseeni, koska luokka ja sen oppilaat olivat minulle entuudestaan tuttuja. Aikaisempi yhteistyö luokan opettajan kanssa vaikutti myös tutkimusjoukon valintaan. Aineistoni valinnan voi määritellä harkinnanvaraiseksi eliittiotannaksi. (ks. Tuomi & Sarajärvi 2004, 87–88.) Koska tutkimusjoukkoni oli yksi ryhmä, voi tutkimustani luonnehtia tapaustutkimukseksi. (ks. Syrjälä & Numminen 1988, 5.)

Ennen aineiston keruun aloittamista, kysyin henkilökohtaisesti koulun rehtorilta luvan tutkimuksen toteuttamiseen. Pyysin myös jokaiselta oppilaalta ja heidän vanhemmiltaan kirjallisesti luvan haastattelujen videoimiseen ja tutkimuksen toteuttamiseen (Liite 1). Perheelle osoitetussa kirjeessä kerroin mahdollisimman tarkasti, mitä tutkimuksen aikana tapahtuu. Ennen haastattelujen aloittamista oppilaan tuli palauttaa koululle kirjallinen lupa tutkimuksen suorittamiseen sekä häneltä itseltään että toiselta vanhemmalta. Yksi oppilas ei halunnut osallistua tutkimukseeni. Yksi oppilas ilmaisi haluttomuutensa osallistua tutkimukseeni toisen haastattelukerran aikana. Keskeytin haastattelun ja jätin hänen osuutensa analysoimatta.

5.2 Tutkimusmetodina ääneen puhuminen (ajattelu)

5.2.1 Tutkimusmetodin valinta

Laadullisella tutkimuksella pyritään ymmärtämään tiettyä toimintaa tai antamaan teoreettisesti mielekäs tulkinta jollekin ilmiölle (Tuomi & Sarajärvi 2004, 87). Koska halusin ymmärtää mitä ja miten lapset ajattelevat, lähestyin aihettani laadullisen tutkimuksen keinoin. Tutkimuksen tavoite oli ymmärtää lapsen matemaattista ajattelua matemaattisessa ongelmanratkaisuprosessissa. Keräsin aineiston tutkimukseeni haastattelemalla oppilaita heidän ratkaistessaan matemaattisia ongelmia. Haastattelutilanteet nauhoitin videolle. Videolle nauhoittamiseen päädyin, koska halusin ottaa analyysissäni oppilaan puheen lisäksi huomioon myös hänen muun toimintansa haastattelun aikana (kädet, ilmeet ja eleet).

Koska tapahtumat taltioituivat videolle, minun ei tarvinnut keskittyä tekemään muistiinpanoja oppilaan toiminnasta yhtä paljon, kuin jos olisin nauhoittanut pelkkää puhetta nauhurilla.

Haastattelujen toteutuksessa sovelsin ääneen ajattelun -metodia, joka on yksi tapa toteuttaa laadullista haastattelua. Sen päämääränä on paljastaa sisäisiä ajatuksia tai kognitiivisia prosesseja, jotka valaisevat, mitä ihmisen päässä tapahtuu esimerkiksi hänen ratkaistessaan ongelmaa. (Patton 2002, 385.) Ginsburg ym. (1983) mukaan ääneen ajattelun metodiikka on tunnustettu käyttökelpoiseksi aineiston keruun menetelmiksi. Heidän mielestään standardit testit eivät sovellu ajattelun tutkimiseen. Niiden avulla ei pystytä saavuttamaan samanlaista vapautta, minkä ääneen ajattelun -metodiikka tarjoaa. Tutkijalla ei ole mahdollisuutta toimia tilanteen mukaan, vaan hänen tulee kysyä valmiit kysymykset ennakkoon määrätyssä järjestyksessä. Kognitiiviset prosessit tulevat tällöin rajoitetusti esille. Ihmisen tieto sekä ongelmanratkaisustrategiat ovat liian rikkaita ja monivivahteisia jotta niitä voisi pätevästi saada selville tietyllä kysymyssarjalla. (Ginsburg ym. 1983, 18–19.) Hughes ja Parkes (2003, 127) toteavatkin metodin tarjoavan ennakkoluulottoman tavan tutkia ajattelua samanaikaisesti ongelmanratkaisun kanssa. Metodia sovellettaessa voidaan kiinnittää huomiota käyttäytymiseen, kuten eleisiin (Ginsburg ym. 1983, 8). Käsien käyttö oppilaan mallintaessa tehtävää kertoi siitä, miten hän hahmotti tilanteen mielessään. Haastattelujen nauhoittaminen videolle aineiston keruussa mahdollisti käyttäytymisen havainnoimisen osaksi tutkimusaineistoani. Koska haastatteluni ei perustunut ennalta luotuun käsitykseen oppilaan ajattelun etenemisestä tai tiedon rakenteista, pystyin etenemään melko vapaasti haastattelujen toteutuksessa ja lisäkysymysten esittämisessä.

Ääneen ajattelun tekniikka edellyttää tutkittavalta niiden ajatteluprosessien ja -strategioiden verbalisointia, joita hän käyttää ongelmanratkaisutilanteessa. (Yang 2003, 96.) Menetelmä on osoittautunut empiirisissä kokeissa tehokkaaksi ja hyödylliseksi: se vaatii ajattelun ja kielen yhteyttä, joka on ongelmanratkaisuprosessissa luonnollinen vaatimus. Tehokkuuden lisäksi menetelmä on helppo toteuttaa käytännössä. (Haapasalo 1997a, 275.) Toteutukseen ei tarvita kuin tila, ongelmatehtävät, tallennuslaite ja tutkittavat henkilöt. Ääneen ajattelu lisää havaittavan toiminnan ja käyttäytymisen määrää huomattavasti verrattuna saman toimijan hiljaiseen työskentelyyn. Lyhyet ohjeet ääneen puhumisesta riittävät yleensä saamaan aikaan muutoksen tarkkailtavan käyttäytymisessä. (Ericsson 1996.)

Ginsburg ym. (1983) kuvaavat ääneen ajattelun metodin käyttäjän ensimmäiseksi tavoitteeksi saada esiin ongelmanratkaisun monimutkaisia muotoja. Ongelmanratkaisu nähdään monimutkaisena, peräkkäisenä toimintana, joka sisältää erilaisia osia, kuten hypoteesin muodostamista ja testaamista ja toisiaan seuraavien algoritmien toimeenpanoa. Teoreettisen kiinnostuksen kohteena on tutkittavan esittämä ongelmanratkaisutoiminta. Tällä menetelmällä saadaan esille edustavaa tietoa ongelmanratkaisusta. Ääneen ajattelun toinen tavoite on tunnistaa ongelmanratkaisun taustalla oleva sisäinen symbolinen mekanismi. Ongelmanratkaisutilanteessa esiintyy pitkiä aikoja, jollain tutkittava tuottaa vähän näkyvää käyttäytymistä, mutta näyttää ajattelevan. Tällaisella hetkellä ohje ääneen puhumisesta tuo esiin ajatteluprosesseja, esimerkiksi hylättyjä hypoteeseja ja vaihtoehtoisia ratkaisuja. Näitä tuotoksia tulkitsemalla tutkija tuo esille merkityksiä sekä esittää väitteitä tutkittavan tiedosta ja operaatioista. Tulkintojen pohjalta muodostetaan johtopäätösten verkko, joka kuvaa tutkittavan ajattelua. (Ginsburg ym. 1983, 8–9.) Ääneen ajattelua voidaan toteuttaa ainakin kolmella tavalla: samanaikaisella ääneen ajattelulla, ajattelemalla ääneen välittömästi ratkaisun jälkeen ja kliinisellä menetelmällä.

Tutkimuksessani sovelsin kaikkia kolmea metodia rinnakkain. Samanaikaisessa ääneen ajattelussa tutkittava, tässä tutkimuksessa ongelman ratkaisija, puhuu samanaikaisesti kaiken, mitä hän ratkaisuprosessin aikana ajattelee (Haapasalo 1997a, 275). Tutkittavaa kehotetaan ajattelemaan ääneen, jotta hän verbalisoisi ajatuksiaan yhtä aikaa ajattelun kanssa. Hänen tulisi verbalisoida uusia ajatuksia ja niiden synnyttämiä välituotoksia sitä mukaa, kun ne tulevat mieleen. Henkilö ei kuvaile tai selitä mitä hän on tekemässä, vaan hän yksinkertaisesti selittää tiedot, joita hän käyttää vastausta muodostaessaan. Verbalisoinnin tulisi tapahtua mahdollisimman yhtäaikaisesti ajattelun kanssa. Jos verbalisointi kuvaa tai selittää tekemistä, se tapahtuu ajallisesti myöhemmin kuin välittömästi verbalisoidut ajatukset. Tällöin puheessa saattaa olla eroja välittömään ajatteluun verrattuna. Kun tutkittava verbalisoi suoraan ainoastaan ajatukset, jotka tulevat mieleen suorittaessaan tehtävää, ajatusten sarja ei muutu ääneen ajattelun kehotuksesta huolimatta. (Ericsson 1996.)

Välittömästi tehtävän suorittamisen jälkeen oppilasta voi pyytää kertomaan, miten hän tehtävän suoritti. Ericssonin ja Simonin (1996) mukaan osa ajattelun sarjoista, jotka ilmenevät tehtävän suorituksen aikana, säilyy pitkäkestoisessa muistissa. Lyhytkestoisessa muistissa säilyy jälkiä, joiden avulla on mahdollista esittää pitkäkestoiseen muistiin tallentuneet ajatusten sarjat. Näin ollen Ericsson ja Simon (1996) olettavat, että nopeasti suoritettujen tehtävien jälkeen tutkittava pystyy verbalisoimaan uudelleen ajatustensa sarjan. Samanaikainen ja jälkikäteen selostettu tieto vastaavat toisiaan, kun tehtävän suorittamiseen kuluu 2-10 sekuntia. Suositeltavaa olisikin kerätä sekä samanaikainen sekä ratkaisun jälkeinen verbaalinen kertomus. (Ericsson & Simon 1996.)

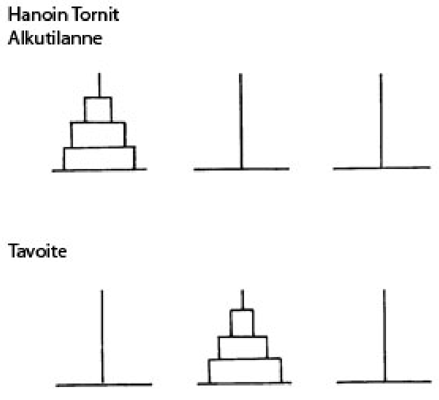
Ginsburg ym. (1983) liittää ääneen ajattelun metodiin Piaget’n kehittelemän kliininen menetelmän. Ginsburgin ym. mukaan Piaget kehitti menetelmän seurauksena sille, että pelkkä verbaliikka (ääneen ajattelu) on joskus riittämätöntä. Kliinistä menetelmää käyttävä tutkija esittää ongelman ja kysymyksiä, jotka voivat olla jatkumoa tutkittavan edellisille vastauksille. (Ginsburg ym. 1983, 10–11.) Ratkaisuidea avautuu usein paremmin, jos ratkaisija säätelee ajatteluaan erilaisten, ratkaisun kannalta kriittisten kysymysten avulla. Kriittisiä kysymyksiä voi esittää ongelmanratkaisija tai ratkaisuprosessin ohjaaja. Kriittiset kysymykset voivat johtaa varsin tehokkaaseen ajattelutoimintaan. (Haapasalo 1997a, 275–276.)

Tutkimuksessani ääneen ajattelun metodi toteutui siten, että ennen haastattelua kehotin jokaista haastateltavaa puhumaan mahdollisimman paljon. Jos oppilas ei tuottanut puhetta, kehotin häntä puhumaan ääneen omia ajatuksiaan. Välittömästi tehtävän suorittamisen jälkeen pyysin oppilasta puhumaan ratkaisunsa uudelleen. Toimin näin erityisesti silloin, jos oppilas ei ollut tuottanut puhetta ratkaisunsa aikana. Sovelsin Piaget’n kliinistä menetelmää, koska halusin ymmärtää oppilaan ratkaisuideat. Kysymysten avulla sain tietoa oppilaan ajattelusta enemmän verrattuna siihen, että olisin turvautunut ainoastaan samanaikaiseen tai välittömästi ratkaisun jälkeen tapahtuviin ääneen ajattelun -metodeihin.

5.2.2 Haastattelun ongelmatehtävät ja haastattelun suunnittelu

Oppilaiden ratkaistaviksi valitut tehtävät valikoituivat tutkimukseeni eri oppikirjoja ja internetin lähteitä selailemalla. Tehtävien valinnasta keskustelin sekä ohjaajani Tuula Asunnan että luokan opettajan kanssa. Tehtävien määräksi vakiintui lopulta kuusi. Koska oletin yksilöiden eroavan toisistaan taidoiltaan ja tiedoiltaan, valitsin tutkimukseeni vaikeustasoltaan vaihtelevia tehtäviä. Koska halusin saada mahdollisimman erilaisia ajatteluprosesseja näkyville, valitsemani ongelmatehtävät olivat keskenään erityylisiä. Tavoitteeni oli, että jokainen oppilas pystyisi ratkomaan ongelmia omalla tasollaan, ja että kaikki kokisivat onnistumisen tunteen. Monen ongelman käytöllä varmistin sen, ettei oppilas saanut tehtäviä ratkaistua pelkästään vahingossa tai sattuman kautta. Tehtävän 1, Hanoin Tornit, esitin oppilaille suullisesti. Loput ongelmat he lukivat tehtäväpaperista.

Tehtävä 1: Hanoin Tornit (Liite 2). *Hanoin Tornit -tehtävässä oppilaan tulee siirtää kolme erikokoista palikkaa yksi kerrallaan keskelle olevaan tyhjään paikkaan siten, että ne muodostavat samanlaisen tornin kuin lähtötilanteessa. Yhtä palikkaa saa siirtää kerrallaan. Isompaa palikkaa ei saa laittaa pienemmän päälle.*

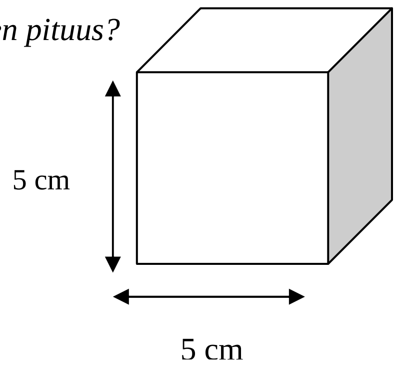


KUVIO 3. Hanoin Tornit -tehtävä (Fisher 1990, 103)

Tehtävän voi määritellä *interpolaatioprobleemaksi*, sillä sen alku- ja lopputilanne tunnettiin. Sen pystyi ratkaisemaan siirtämällä palikoita tietyssä järjestyksessä pois toistensa päältä (tai päälle). Lopulta torni rakentui uudelle paikalle alkuperäiseen järjestykseen. Reittejä ja tapoja ratkaista ongelma oli useampia kuin yksi. Oppilaat suorittivat tehtävän itsenäisesti toimien ja ääneen ajatellen. Löysin tehtävän Fisherin kirjasta *Teaching children to think* (Fisher 1990, 103–104) ja Schoenfeldin teoksesta *Mathematical problem solving* (Schoenfeld 1985, 268). Tämän tehtävän ensisijainen tavoite oli tutustuttaa oppilaat ääneen ajatteluun.

Tehtävä 2: Kuutio 1 (Liite 2). *Kuutio muodostuu kuudesta neliöstä. Jokainen neliö on samankokoinen. Neliön sivun pituus on 5 cm. Ympyröi seuraavista vaihtoehdoista ne, jotka mielestäsi pystyy ratkaisemaan annetuilla tiedoilla.*

a) Mikä on neliön sivujen pituuksien summa?
b) Mikä on kuution sisälle asetetun pikkukuution sivujen pituus?
c) Kuinka korkea kuutio on?
d) Kuinka leveä kuutio on?
e) Kuinka ison pallon voit laittaa kuution sisään?
f) Mikä on neliön halkaisijan pituus?
g) Kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä?



Tehtävä kokonaisuus kehittyi omien ajatusteni sekä aikaisempien kokemusteni perusteella. Se sisälsi seitsemän vaikeusasteeltaan erilaisia kohtaa. Kohdat c ja d olivat helpohkoja, niiden välityksellä pyrin tarjoamaan jokaiselle oppilaalle onnistumisen tunteen. Kohtia a, b, e, f ja g ei pystynyt ratkaisemaan viittaamalla suoraan tehtävässä annettuihin tietoihin. Oppilaan tuli löytää tehtävästä tietoa ja soveltaa sitä. Nämä kohdat voi määritellä *analyysi-synteesi-ongelmiksi*. Esimerkiksi e-kohdassa ratkaisijan tuli eritellä rajoitteet pallon koolle. Tämän lisäksi hänen tuli havaita pallon muodon vaikutus tehtävän ratkaisuun. Näitä tietoja käyttämällä oli mahdollista päätyä lopputulokseen eli synteesiin.

Tehtävä 3: Neliö (Liite 2). *Kuinka monta pikkuneliötä mahtuu isoon neliöön? Mitä tietoja tarvitset ongelman ratkaisemiseen?*

Kehitin tämän tehtävän itse. Tämän vuoksi oli mahdollista, ettei se soveltuisi tutkimusaineiston keruuseen tai ettei se tuottaisi tietoa tutkimusongelmista. Tehtävän synnytti erilaisia tapoja ajatella haastatteluiden aikana, mikä oli tavoitteena. Ajattelin toisistaan eroavien ajattelutapojen auttavan minua ymmärtämään, miten oppilas käytti tietoa ratkaisussaan ja miten hänen tietonsa rakentui.

Neliö-tehtävä kuului *dialektisten ongelmien* ryhmään. Se oli avoin, koska siihen ei löytynyt oikeaa tai yksiselitteistä vastausta. Oppilaat päätyivät vastauksiin eriävillä laskumenetelmillä. Ongelmanasettelu ei ollut selkeä, koska haastatteluissa selvisi, että ongelman voi ymmärtää eri tavoin. Nämä asiat ovat tyypillisiä dialektisille probleemille.

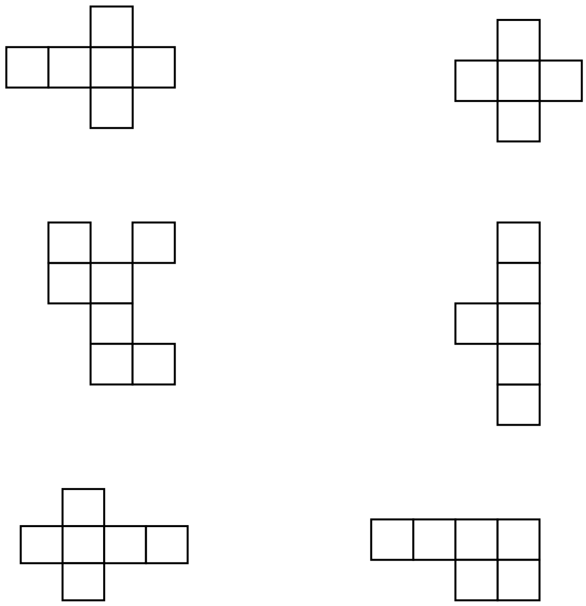
Koska ratkaisumenetelmien vaihtoehdot eivät selvinneet tehtävänannossa, tehtävän voi määritellä myös *analyysi-synteesi -probleemaksi*. Tehtävän ratkaiseminen edellytti analyysiä tai synteesiä riippuen oppilaan tavasta ymmärtää ongelma. Jos oppilas ratkaisi tehtävä päättämällä vastauksen etukäteen, hän selvitti tehtävän analysoimalla eli taaksepäin työskentelemällä. Jos oppilas ei päättänyt vastausta etukäteen, se perustui synteesiin, jolloin ratkaisu syntyi tietoja yhdistelemällä eli eteenpäin työskentelemällä.

Tehtävä 4: Janne ja Heikki (Liite 2). *Janne asuu 7 kilometrin päässä koulusta. Jannen paras ystävä on Heikki. Heikki asuu 2 kilometrin päässä koulusta. Janne ja Heikki ovat tunteneet toisensa kolme vuotta. Ensi vuonna he menevät seitsemännelle luokalle. Jannen ja Heikin yhteinen ystävä Vesa asuu kilometrin päässä koulusta.*

Kuinka kaukana Janne ja Heikki asuvat toisistaan? Alleviivaa tekstistä ratkaisun kannalta olennaiset tiedot.
Piirrä ratkaisusi mahdollisimman tarkasti.

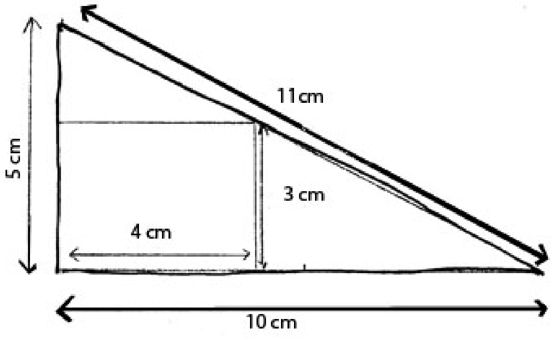
Janne ja Heikki -tehtävän laskin ensimmäisen kerran opiskellessani peruskoulussa. Tehtävä jäi mieleeni, koska koin sen ratkaisutavat ja vaihtoehdot monipuolisiksi. Uskoin sen soveltuvan tämän tutkimuksen kontekstiin. Samaa tehtävää on käyttänyt Rantala (2002, 35) pro gradu -tutkielmassaan. Jos oppilas ymmärsi tehtävän siten, että siihen on olemassa vain yksi ratkaisu, tehtävä oli *interpolaatioprobleema*. Jos hän oivalsi, että vastauksia on ääretön määrä, tehtävä oli *analyysi-synteesi -ongelma*.

Tehtävä 5: Kuutio 2 (Liite 2). *Ympyröi alla olevista esimerkeistä ne, joista voi rakentaa kuution. Kerro, miten päädyt vastaukseesi. Miten voit tarkistaa vastauksen?*



Ensi näkemältä Kuutio 2-tehtävä vaikutti interpolaatioprobleemalta, koska sen alkutilanne oli nähtävissä ja lopputilanne kerrottiin (kuviosta tulee muodostua kuutio). Oppilaan tapa ymmärtää tehtävän tavoite (lopputilanne) vaikutti sen luokitteluun. Jos tehtävä käsitettiin siten, että yllä olevista malleista muodostuu kuutio siten, että jokainen neliö muodostaa yhden kuution kuudesta tahkosta, tehtävä oli *interpolaatioprobleema.* Tällöin oli mahdollista luoda sääntö (pitää olla kuusi ruutua) tai ajattelumalli (neliöiden pitää olla tietyssä muodossa), joita käyttämällä tehtävä ratkeaa. Jos oppilaan käsitys kuutiosta tai tehtävän ymmärryksestä poikkesi edellisistä, ratkaisu selvisi analysoimalla tai syntetisoimalla. Tällöin tehtävä oli *analyysi-synteesi -ongelma.*

Tehtävä 6: Kolmio (Liite 2). *Mitä tietoja voit päätellä alla olevasta kolmiosta?*



Huom. Kuvassa näkyvät mitat pitivät paikkansa oppilaiden tehtäväpapereissa, mutta tähän yhteyteen kuvaa on pienennetty alkuperäisestä koosta.

Kolmio-tehtävässä oppilaan tuli löytää tietoja kuvasta. Kolmio-tehtävä on mukailtu kansainvälisen Timms-tutkimuksen pohjalta. Timms:ssä käytetyt tehtävät löytyvät internetistä osoitteesta: www.jyu.fi/ktl/timms/pm65. Neliö-tehtävän tavoin ongelmanasettelu on avoin. Tehtävä aiheutti hämmennystä oppilaissa. Ehkä tämän tehtävän kohdalla olisi ollut järkevää muotoilla selkeä kysymys, jolloin olisin pystynyt päättelemään, miten oppilaat osaavat käyttää ja soveltaa annettuja tietoja. Toisaalta osa oppilaista osasi soveltaa tietoja ilman varsinaista kysymystä. Tehtävän avulla sain tietoa siitä, mitä tietoja oppilaat pystyvät havaitsemaan annetusta kuvasta. Luokittelin tehtävän dialektiseksi ongelmaksi sen avoimen luonteen vuoksi. Tehtävä ei rajoittanut ratkaisutapoja. Ongelmanasettelu oli riippuvainen oppilaan tavasta käsitellä tietoja.

5.2.3 Haastattelujen ja videokuvausten toteuttaminen

Toteutin haastattelut samanaikaisesti oppilaiden ratkaistessa tehtävät. Kaikki 18 haastattelua nauhoitettiin videolle. Haastattelut perustuivat kuuteen ongelmatehtävään (Hanoin Tornit, Kuutio 1, Neliö, Janne ja Heikki, Kuutio 2 ja Kolmio). Haastattelujen kuvaamisen tavoite oli sisällyttää kaikki haastateltavan suorittama toiminta osaksi aineistoa. Suoritin haastattelut 28.4–5.5.2003 välisenä aikana. Haastattelin kaikkia oppilaita kaksi kertaa. Haastattelu kesti jokaisen oppilaan kohdalla noin puoli tuntia. Tutkimuksessa analysoitavaan aineistoon valitsin vain ensimmäisen haastattelun, koska haastattelukertojen välille ei ollut mahdollista luoda vertailukelpoista asetelmaa. Opetin muutaman tunnin matematiikka tutkimukseni kohteena olleelle luokalle ensimmäisen ja toisen haastattelun välillä. Haastattelukertojen välillä oli eroa ajallisesti noin kuukausi. En uskonut, että oppilaiden matemaattinen ajattelu olisi muuttunut opetukseni seurauksesta tuona aikana merkittävästi. Ensimmäisen haastattelun valitsen analysoitavaksi, koska ennen sen toteuttamisesta, en ollut opettanut luokalle matematiikkaa. Tämän johdosta omat käsitykseni eivät vaikuttaneet oppilaiden ajatteluun ja käsityksiin haastatteluissa.

Haastattelut tapahtuivat koulun luonnontieteen luokassa, joka oli oppilaille entuudestaan tuttu paikka. Tavoitteeni oli saada oppilaat kertomaan mahdollisimman vapaasti heidän omista, tehtävien ratkaisuun liittyvistä, ajatuksistaan. Kuvaustilanteen annoin edetä omalla painollaan, lapsen ratkaisuprosessin etenemistä myötäillen. (ks. Syrjälä & Numminen 1988, 7–8.) Haastattelujen toteutus alkoi Hanoin Tornit -tehtävällä (Liite 2). Tehtävä toimi eräänlaisena testitehtävänä muita haastattelun tehtäviä silmällä pitäen. Ensimmäisen tehtävän tavoite oli tuottaa oppilaalle myönteinen mielikuva omasta osaamisesta, onnistumisen kokemus sekä tutustuttaa hänet ääneen ajatteluun. Ericssonin (1996) mukaan tutkittavalle kannattaa antaa aluksi suoritettavaksi harjoitusongelmia, joiden kautta on helppo puhua ja tulla tutuksi ääneen ajattelun kanssa. Tutkimuksessani Hanoin Tornit -tehtävällä oli sekä esitestaava että metodiin tutustuttava rooli.

Haastattelujen ajaksi sijoitin videokameran jalustalle. Suuntasin kameran kuvaamaan oppilaan toimintaa. En käsitellyt kameraa haastattelun aikana. Ainoastaan haastattelun alussa ja lopussa nauhoitus tuli aloittaa ja päättää painamalla nappia. Toteuttaessani haastatteluja istuin tutkittavan vieressä. Vieressä istumisen syy oli se, että pystyin samalla seuraamaan oppilaan toimintaa ja hänen merkintöjään paperille. Joissain tilanteissa kävi niin, että en esimerkiksi saanut selvää oppilaan käsialasta tai en muulla tavalla ymmärtänyt hänen selitystään. Tällöin esitin tarkentavia kysymyksiä hänen toiminnastaan (kliininen menetelmä). Esitin kysymykset oppilaan jo ratkaistua ongelman, jotta hänen ajattelunsa sarja ei olisi muuttunut. Näin pystyin yhdistämään kliinisen menetelmän kahteen muuhun ääneen ajattelun menetelmään. Muutaman kerran jouduin kehottamaan oppilasta ajattelemaan ääneen. Ericssonin (1996) mukaan koetilanne tulisi järjestää siten, että sosiaalinen vuorovaikutus ei olisi mahdollista tai että se olisi mahdollisimman vähäistä (Ericsson 1996, xiv.). Yritin karsia sosiaalisen vuorovaikutuksen oppilaan kanssa mahdollisimman vähäiseksi. Koska olin kiinnostunut oppilaiden ajattelusta ja tulkinnoista, pidin omat ajatukseni ja ratkaisuideani heiltä piilossa ja annoin tilaa heidän ajattelunsa etenemiselle. Näin toimimalla oli mahdollista saada esille yksilöllisiä eroja kognitiivisissa prosesseissa (ks. Ginsburg ym. 1983, 9–10).

5.3 Aineiston käsittely

Kirjoittaessani haastatteluja, keksin jokaiselle oppilaalle uuden nimen (Pekka, Tero, Jarno, Tiina, Mervi, Veikko, Marja, Taina, Kalle, Pinja, Petri, Anna, Sari, Emma, Semi, Joona, Terhi ja Juho). Hyödynsin keksimiäni nimiä jatkossa tulosten raportoinnin yhteydessä. Uusien nimien keksimisellä halusin ehkäistä oppilaiden tunnistettavuutta.

Haastattelujen purku alkoi videoitujen tehtävien ratkaisutilanteiden litteroinnilla. Liitin litteroituun tutkimusaineistoon huomioita esimerkiksi oppilaiden käsien käytöstä ongelmanratkaisun yhteydessä. Varsinainen aineiston analyysi alkoi, kun olin purkanut tarvittavat haastattelut. Erittelin tekstiä kolmessa osassa soveltaen laadullisen tutkimuksen perusanalyysimenetelmää, sisällönanalyysiä (ks. Tuomi & Sarajärvi 2004, 93). Ensimmäisessä osassa analysoin Kuutio 1-tehtävän. Ensimmäisen osan analyysin tavoite oli vastata tutkimustehtäväni ensimmäiseen ja toiseen alaongelmaan (s.24). Toisessa osassa analysoin Neliö-tehtävän. Neliö-tehtävän tavoite oli vastata tutkimustehtäväni kolmanteen alaongelmaan (s.24). Kolmannessa osassa analysoin Kuutio 1-, Janne ja Heikki-, Kuutio 2- ja Kolmio-tehtävät. Näiden tehtävien tavoite oli vastata tutkimustehtäväni neljänteen alaongelmaan (s. 24).

Aloitin tutkimusmateriaalini erittelyn lukemalla kymmenen oppilaan Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) haastattelut läpi. Samalla kursivoin niistä tärkeiksi katsomani osiot. Tämän jälkeen syvennyin tekstiin uudelleen etsien pelkistettyjä ilmauksia kursivoiduista osista. Alleviivasin ilmaukset ja kirjoitin niiden kohdalle nimen sivun marginaaliin. Litteroitujen tekstien tulkitsemisen rinnalla tarkastelin kunkin oppilaan tehtäväpaperia samanaikaisesti. Oppilaan tehtäväpaperiin tekemät merkinnät auttoivat ymmärtämään, mitä hän tarkoitti esimerkiksi käyttämällään käsitteellä. Käytyäni jokaisen oppilaan Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) uudelleen läpi ja merkittyäni alleviivatuille kohdille nimitykset, kokosin merkinnät yhdelle paperille. Jatkoin etsimällä nimitysten eli luokkien välille yhteyksiä. Samanlaisia sanontoja ilmaisevat luokat yhdistin yhdeksi luokaksi ja määritin muodostuneelle yläluokalle nimen. Lopulta minulle muodostui luokitusjärjestelmä Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) aineiston pohjalta.

Seuraavaksi luin loput kahdeksan haastattelua pyrkien luokittelemaan niitä ensimmäisen kymmenen haastattelun pohjalta muodostuneen luokittelurungon mukaisesti. Tarvittaessa muokkasin luokittelua. Järjestin samaan luokkaan kuuluneet tekstin palaset omiin asiakirjoihinsa. Tämän jälkeen taulukoin tehtävän jokaisen kohdan luokitusten mukaisesti. Näin minulle muodostui yhteensä seitsemän taulukkoa. Taulukoinnin avulla aineiston hallittavuus parani: Pystyin esimerkiksi laskemaan, mitä luokkaa oppilaat olivat eniten käyttäneet. Taulukoita tarkastelemalla oli nopeata tarkistaa yksittäisen oppilaan luokittelu missä tahansa tehtävän kohdassa. Seitsemän taulukon tiedot keräsin yhteiseen taulukkoon (Liite 3), jonka avulla pystyin hahmottamaan oppilaiden tiedonkäyttöä koko Kuutio 1-tehtävässä. Analyysiini täydentyi osittain määrällisillä menetelmillä, koska taulukoinnin seurauksena pystyin vertailemaan eri luokkien käytön määrää. En toteuttanut määrällistä analyysiä johtuen aineiston riittämättömästä koosta kvantitatiiviseen tutkimukseen.

Neliö-tehtävän (Liite 2) analyysi eteni samaan tapaan sisältöä analysoiden kuin Kuutio 1-tehtävän (Liite 2). Kun aloitin Neliö-tehtävän (Liite 2) erittelyn, luin aluksi kymmenen oppilaan haastattelut tekstiä alleviivaten. Merkitsin alleviivatun tekstin kohdalle marginaaliin kyseiselle kohdalle nimen, joka mielestäni kuvasi kohtaa. Kirjoitin mieleen tulleita ajatuksia sivun laitaan varsinaista analyysiä odottamaan. Keskityin jokaisen haastattelun esianalyysiin samalla tavalla. Näiden merkintöjen pohjalta rakensin käsitekartan kymmenestä haastattelusta. Loput kahdeksan haastattelua käsittelen samaan tapaan rakentaen niistäkin käsitekartan. Seuraavaksi yhdistin muodostuneet käsitekartat yhteiseksi käsitekartaksi (Liite 4: Käsitekartta tiedoista, mielikuvista ja ratkaisuista). Näin minulle muodostui kokonaiskuva Neliö-tehtävän aineistosta ja luokitteluni tarkentui.

Viimeiseen analyysivaiheeseen arvoin kymmenen oppilasta, joiden haastattelut litteroin kaikkien tehtävien osalta. Kävin kaikki ongelmatehtävät oppilas kerrallaan läpi. Edellä kuvatulla tavalla rakensin jokaiseen tehtävään luokitusjärjestelmän. Tämän analyysivaiheen tavoite oli löytää mahdollisia pysyviä menetelmiä oppilaiden ajattelusta erilaisten tehtävien ratkaisussa. Taulukoin uudet luokat ja vertasin niitä Kuutio 1-tehtävän luokitukseen. Näiden pohjalta rakensin uuden taulukon (Liite 5), jonka avulla pystyin havaitsemaan, esiintyikö sama luokka useammin kuin yhden kerran oppilaan ajattelutavoissa tai ratkaisumenetelmissä.

5.4 Tutkimuksen luotettavuus

Tarkastelen tutkimukseni luotettavuutta reliabiliteetin, validiteetin ja objektiivisuuden kannalta (ks. Metsämuuronen 2003, 42–43; Patton 2002, 545). Hirsjärven, Remeksen ja Sajavaaran (1997, 213) mukaan reliabiliteettiin liittyy tutkimuksen kyky antaa ei-sattumanvaraisia tuloksia. Pohtimalla tutkimuksen objektiivisuutta pyrin parantamaan tutkimukseni reliabiliteettia ja validiteettia (ks. Patton 2002, 545). Robinsonin (2001, 219) tutkimuksessa verbaalinen aineisto on todettu validiksi tiedonlähteeksi.

Koska tutkimukseni aineiston keruu tapahtui laadullisella haastattelulla ääneen ajattelua soveltaen, sen toistettavuus sellaisenaan on heikko. En myöskään usko, että haastattelutilannetta pystytään järjestämään täysin samanlaisena kuin sen toteutin. Haastattelurunko on toki vapaasti käytettävissä ja tutkimus on mahdollista toistaa. Mahdollisen toistetun tutkimuksen tutkimustulokset eivät kuitenkaan ole suoraan verrattavissa tämän tutkimuksen tuloksiin. Tutkimustuloksiin vaikuttavat lukuisat eri tekijät kuten tutkijan henkilöllisyys ja henkilökohtaiset näkemykset, koehenkilöt ja heidän ikänsä, tutkimuksen toteuttamispaikka ja oppilaiden taustat.

Koska toteutin tutkimuksen yksin, aineiston keruussa ei ollut mahdollista käyttää useampaa tekijää. Olemalla ainoa haastattelija, tiesin, mitä kaikissa haastatteluissa tapahtui tai oli tapahtunut. Näin pystyin välttämään tutkimushaastatteluiden eroamisen toisistaan. Jokaisella koehenkilöllä oli haastattelussa samat tehtävät, joten niiden rungot olivat yhteneviä. Toteutin haastattelut lyhyellä aikavälillä, noin viikossa, mikä lisäsi haastattelujen yhdenmukaisuutta toisiinsa verrattuna. Litteroin haastattelut sanasta sanaan. Merkitsin tekstiin muistiinpanoja oppilaiden toiminnastaan ratkaisun aikana. Tässä vaiheessa en olisi voinut käyttää ulkopuolista litteroijaa materiaalin henkilökohtaisuuden ja tutkittavien nuoren iän vuoksi. Vanhemmille osoitetussa kirjeessä (Liite 1) olin luvannut olla näyttämättä kuvattua materiaalia ulkopuolisille henkilöille. Keräsin talteen haastattelun aikana oppilaiden käyttämät tehtäväpaperit, joiden merkinnät täydensivät oppilaan ajattelua ongelmatehtävissä. Aineistoni koostui sekä kirjallisesta että videolle nauhoitetusta verbaalisesta materiaalista.

Tutkimukseni tulokset ja käyttämäni luokittelun esitän tässä raportissa mahdollisimman avoimesti ja tarkasti. Luokittelin sekä Kuutio 1- ja Neliö-tehtävien haastattelut kahdessa eri osassa. Loin käyttämäni perusluokituksen ensimmäisen kymmenen haastattelun pohjalta. Tämän luokittelun pohjalta järjestin loput kahdeksan haastattelua. Samalla pystyin testaamaan luokittelun toimivuutta luokittelemattomalla aineistolla sekä korjaamaan sitä. Luokittelu tarkentui ja luokat muuttivat nimeään edelleen analyysin edetessä. Ulkopuolisen luokittelijan käyttämisellä olisi pystynyt parantamaan luokittelun luotettavuutta.

Alun perin tarkoitukseni oli haastatella kaikki 18 oppilasta samalla viikolla, mutta ajanjaksolle osui mm. vapputapahtuma, jonka aikana en voinut haastatella oppilaita. Huomasin myös, että oli parempi haastatella esimerkiksi neljä oppilasta päivässä kuin vaikkapa kuusi. Ehdin pitää haastattelujen välillä taukoja, koska niiden tekeminen ja itsensä tarkkaavaisena pitäminen edellytti voimia. Väsyneenä haastatteluja olisi ollut vaikeata toteuttaa samanlaisena kerta toisensa jälkeen. Haastatteluiden toteuttaminen ei kuitenkaan jakautunut liian pitkälle aikavälille.

Jotta verbaalista aineistoa voidaan pitää ulkoisesti validina, tulee olla varma siitä, että se mitä puhutaan kuvaa sitä, mitä ajatuksissa eli mielessä tapahtuu (Ginsburg ym. 1983, 22). Keräsin aineiston samanaikaisesti oppilaan suorittaessa ongelmatehtävää. Koska tehtävän suorittaminen ja nauhoitus tapahtuivat samanaikaisesti, voidaan olettaa, että oppilaan tuottama puhe vastasi oppilaan ajatuksia kyseisellä hetkellä. Boltonin 1972) mukaan puheen ja ajattelun välillä on paljon yhteistä, sillä puhe ja ajattelu tapahuvat usein yhtä aikaa. Koska mentaaliset toiminnot ovat tietoisia ja puheella ja ajattelulla on yhteys toisiinsa, on mahdollista tuottaa puhetta, joka kuvaa yksilön ajatuksia. (Bolton 1972, 206.) Menetelmän valinnalla tähtäsin siihen, että saisin oppilaan ajatukset esiin tutkimustilanteessa. Koska sovelsin kolmea eri ääneen ajattelun-menetelmää, uskoin oppilaiden ajatusten ja käsitysten tulevan paremmin havaittaviksi kuin yhtä menetelmää hyödyntämällä.

Läpi haastattelujen yritin, sisäisen validiteetin (ks. Syrjälä & Numminen 1988, 136) varmistamiseksi, pitää omat ajatukseni ja ratkaisuideani taustalla, jotta oppilaiden ajattelu ei sekoittuisi minun tapaani ajatella. Pyrin antamaan tilaa oppilaiden ajattelun etenemiselle. Aineisto taltioitiin videolle, joten sen pohjalta pystyi havaitsemaan tutkijan vaikutuksen tilanteen etenemiseen ja huomioimaan sen tulkinnassa.

Yleistettävyyteen liittyy ajatus siitä, että tutkimustuloksen tulisi päteä muuhunkin kuin tulkittuun tapaukseen. Joissain tutkimuksissa etsitään selityksiä yksittäisille tapahtumille. Tällaisissa tutkimuksissa ei tarvitse pohtia, ovatko tulokset yleistettävissä. (Alasuutari 1993/1999, 235.) Tämän tutkimuksen tarkoitus oli selvittää yhden luokan matemaattista ajattelua. Tutkimukseni tulokset voi rajata koskemaan vaan tutkimuksen kohdejoukkoa. Koska tutkimuksen kohteena oli oppilaiden ajattelu ja käsitykset, ei tuloksia sellaisenaan voi yleistää suuremmalle joukolle niiden henkilökohtaisuuden vuoksi. En pyrkinyt saavuttamaan tutkimuksellani tilastollisia yleistyksiä. Tähän tutkimukseen osallistui 18 oppilasta, jotka itse ilmaisisivat halukkuutensa osallistua tutkimukseeni (Liite 1: Kirje vanhemmille). Koska tutkimukseni oli yhtä luokkaa koskeva tapaustutkimus, oli luontevaa, että aineiston kooksi määräytyi luokan oppilaiden lukumäärä.

6 TULOKSET

Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) avulla tutkin, kuinka oppilaat osasivat käyttää tehtävässä annettuja tai omia tietojaan hyväkseen. Neliö-tehtävän (Liite 2) avulla tutkin oppilaiden tapoja ymmärtää sama tehtävä. Kuutio 1-, Janne ja Heikki- Kuutio 2- ja Kolmio-tehtävien (Liite 2) avulla tutkin, löytyikö oppilaiden ratkaisuista yhtenevyyttä erilaisten tehtävien välillä.

6.1 Annettujen tietojen käyttö ja soveltaminen

Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) tavoite oli selvittää, miten oppilaat pystyivät käyttämään tehtävässä annettuja tietoja ratkaisun apuna. Lisäksi olin kiinnostunut siitä, pystyivätkö he tuomaan ratkaisuun mukanaan omia tietoja ja käsityksiä sellaisia ongelmia ratkoessaan, jotka vaativat soveltamista ja olennaisten asioiden tunnistamista.

Oppilaille annettiin tehtävässä tietoa sekä kuvana että tekstinä. Heillä oli mahdollisuus käyttää näitä kahta tiedon lähdettä ratkaisun tukena. Tehtävässä oli kohtia, joissa oppilaan oli ratkaisun onnistumiseksi sovellettava tehtävässä annettuja tietoja sekä käytettävä omaa ajattelua.

Sisällönanalyysin pohjalta, aineistosta nousivat esiin seuraavat luokat:

1. *Havaittu tai tunnistettu tieto*: Oppilas käytti tehtävässä annetuista tiedoista joko kuvan tai tekstin tietoja ratkaisun perusteluna. Luokka jakautui kolmeen pienempään luokkaan riippuen siitä, mitä tietoa oppilas käytti ratkaisussa hyväkseen*: teksti, kuva ja* tai *teksti ja kuva*.
2. *Oma ajattelu*: Oppilas käytti tietoja, joita ei ole annettu tehtävässä. Tämän luokka ei sisältänyt alaluokkia.
3. *Tietojen yhdistely*: Oppilas sovelsi annettuja tietoja ja loi niiden perusteella säännön tai johtopäätöksen. Tämä luokka ei sisältänyt alaluokkia.
4. *Uskomukset*: Oppilas käytti tietoja epämääräisesti. Hän saattoi esimerkiksi arvata, voiko tehtävän ratkaista. Tähän luokkaan kuuluivat myös oppilaan itse johtamat käsitteet, jotka eivät loogisuudestaan huolimatta olleet matematiikan

määrittelemiä oikeita käsitteitä. Tämä luokka sisälsi kolme alaluokkaa, jotka perustuivat oppilaiden käyttämien uskomusten eroihin: *luulot, ”tiedemies”* ja *ei perusteita.*

5. *Muut:* Oppilaan käyttämät tavat eivät sisältyneet edellä mainittuihin luokkiin tai oppilas ei ratkaissut tehtävää. Tämä luokka ei sisältänyt alaluokkia.

Alla olevan taulukko 1 on rakennettu näiden luokkien perusteella. Jokaisella pääluokalla on taulukossa oma sarakkeensa. Jos pääluokka sisälsi alaluokkia, jakaantui pääluokan sarake pienten luokkien mukaisesti osioihin. Taulukossa olevat luvut kertovat, kuinka monta kertaa oppilas käytti kyseistä luokkaa Kuutio 1-tehtävässä (Liite 2).

TAULUKKO 1. Oppilaiden tiedonkäyttö Kuutio 1-tehtävässä

	Havaittu tai tunnistettu tieto					Uskomukset			
Oppilas	Teksti	Kuva	Teksti ja kuva	Oma ajattelu	Tietojen yhdistely	Luulot	"Tiedemies"	Ei perusteita	Muut
Pekka	2	2	0	1	0	0	0	2	0
Tero	0	4	1	1	0	1	0	0	0
Jarno	3	0	0	0	2	2	0	0	0
Tiina	3	0	1	0	0	1	0	1	1
Mervi	0	4	1	1	0	1	0	0	0
Veikko	1	3	0	0	1	1	1	0	0
Marja	0	2	0	0	3	0	0	2	0
Taina	3	1	0	0	1	1	0	1	0
Kalle	3	1	1	0	1	1	0	0	0
Pinja	1	1	3	1	0	1	0	0	0
Petri	2	0	0	3	2	0	1	0	0
Anna	3	0	0	2	1	0	0	0	1
Sari	0	0	1	1	0	0	0	0	5
Emma	1	3	0	1	0	0	0	0	2
Semi	2	4	0	1	0	0	0	0	0
Joona	2	1	1	1	0	1	0	0	1
Terhi	2	2	0	2	0	1	0	0	0
Juho	0	2	0	1	0	0	0	0	5
Yht.	28	30	9	16	11	11	2	6	16

Kuten taulukosta näkyy, oppilaat käyttivät eniten Kuutio 1-tehtävää (Liite 2) ratkaistessaan hyväkseen *havaitun ja tunnistetun tiedon* -luokkaa. *Tekstiä* käytettiin

28 kertaa 13:en oppilaan toimesta, *kuvaa* 30 kertaa myös 13:en oppilaan toimesta. Seitsemän oppilasta yhdisti perusteluissaan sekä *kuvan että tekstin* tietoja toisiinsa yhteensä yhdeksän kertaa.

Kuusi oppilasta käytti ratkaisunsa tukena vain yhtä tiedonlähdettä kolmesta, joko kuvaa, tekstiä tai kuvaa ja tekstiä. Tiedonlähteellä tarkoitan tässä sitä, että oppilas on käyttänyt *havaitun tai tunnistetun tiedon*-luokan alaluokista joko *tekstiä, kuvaa* tai *tekstin ja kuvan* yhdistelmää. Yhdeksän oppilasta käytti kahta kolmesta tiedonlähteestä: kuvaa, tekstiä tai kuvaa ja tekstiä. Kolme oppilasta käytti kaikkia *havaitun ja tunnistetun* tiedon alaluokkia.

Oman ajattelun-luokkaan sijoitin12 oppilaan vastaukset. Nämä oppilaat onnistuivat soveltamaan aikaisemmin opittuja tietoja, pohtimaan matemaattista ongelmaa tai ajattelemaan ratkaisun mahdollisuutta. Aineiston pienuudesta johtuen tämän pohjalta ei voi tehdä yleispäteviä johtopäätöksiä, mutta tässä tapaustutkimuksessa neljännen luokan oppilaat pystyivät irrottautumaan tehtävässä annetuista tiedoista ja tuomaan ratkaisun tueksi omia tietojaan. Erityisesti Kuutio 1-tehtävän e-kohta (Liite 2) toi esiin oppilaiden omaa pohdintaa.

Uskomusten luokkaan sijoitin 13 oppilaan vastaukset. Eniten oppilaat tukeutuivat omiin uskomuksiinsa pohtiessaan halkaisijan käsitettä Kuutio 1-tehtävän f-kohdassa (Liite 2). Oudon tilanteen tai käsitteen tullessa vastaan moni oppilas johti käsitteen omien uskomustensa perusteella. Näyttää siltä, että oppilaat pyrkivät ratkaisemaan ongelman, vaikka he eivät olisikaan aivan varmoja siitä, mitä tehtävän kaikki käsitteet tarkoittavat. Uskomuksissa oppilaiden määrittelemät omat käsitteet olivat loogisia kyseisessä tilanteessa. Uskomusten käyttö muistutti paljon oman ajattelun käyttöä. Suurin ero näiden kahden luokan välillä oli se, että oppilaiden soveltamat uskomukset eivät vastanneet matemaattisesti oikeita käsitteitä. Sen sijaan ne sisälsivät ideoita, jotka itsenäisinä ajatuksina olivat paikkansapitäviä päätelmiä.

6.1.1 Havaitun tai tunnistetun tiedon käyttö

Havaitun tai tunnistetun tiedon luokkaan kuuluivat tekstin, kuvan ja tekstin ja kuvan käyttö tiedonlähteenä. Nämä tiedot oli kerrottu tekstissä tai nähtävissä Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) yhteydessä olevasta kuvasta.

Tekstin käyttö

Tekstin käytöksi tiedon lähteenä luokittelin oppilaan vastauksen silloin, jos hän perusteli selkeästi toimintansa viittaamalla tehtävänannon tekstiin. Jos oppilas ei kertonut, mistä tieto oli peräisin, luokittelin hänen vastauksensa tähän luokkaan. Ajattelin, että oppilaan on käytettävä jotain tietoa ratkaisunsa tukena ja oletin sen olevan tekstistä peräisin. Mikäli oppilas ymmärsi tekstin sisällön väärin, luokitin hänen vastauksensa tähän luokkaan. Kuutio 1-tehtävä (Liite 2) koostui seitsemästä eri kohdasta, jotka alkoivat a-kirjaimesta ja päättyivät g-kirjaimeen. Tehtävänannossa kerrottiin tietoja kuutiosta, esimerkiksi kuution rakentumisesta kuudesta neliöstä. Tehtävän yhteydessä oli kuva kuutiosta, johon oli liitetty tiedot kuution sivujen pituuksista.

A-kohta. Kuutio 1-tehtävän a-kohdassa (Liite 2) kysyttiin, mikä on neliön sivujen pituuksien summa. Viisi oppilasta (Pekka, Jarno, Veikko, Pinja ja Petri) käytti tekstin tietoja hyväkseen. Jarno, Pekka ja Veikko perustelivat kohdan ratkaisemista yksiselitteisesti tekstissä annetuilla tiedoilla:

Jarno: *Koska täällä mainitaan, että neliön sivun pituus on viisi senttiä.*
Pekka: *No ainakin tuo voi tehdä, koska tässä kerrotaan kuinka iso yksittäinen neliö on.*
Veikko: *No kun tässä kerrottiin, että yhden sivun pituus on viisi senttimetriä, niin siinä voi niinkun kaikkien pituuksien summan laskea kun viis.*

Veikko yleisti perustelussaan tiedon yhden sivun pituudesta pätemään myös muille neliön sivuille. Tehtävänannossa kerrottiin erikseen neliön yhden sivun pituus ja että kaikki neliöt olivat samankokoisia. Jotta kohdan ratkaiseminen onnistuisi, tuli oppilaan kyetä yhdistämään nämä tiedot toisiinsa. Pinja ja Pekka ymmärsivät tehtävän väärin.

Haastattelija: *Miksi ympyröit?*
Pinja: *Koska tässä sanottiin että tässä on kuus niitä neliöitä. Ja niiden neliöiden sivun pituus kerrottiin ja se on viis niin kuus kertaa viis on kolkyt.*
Haastattelija: *Mistä numero kuusi tulee?*
Pinja: *No tossa sanottiin että kuutiossa A on kuus neliötä ja sitten toi neliön pituus on viisi senttiä tai neliön sivun pituus on viisi senttiä.*

Pekka: *No ainakin tuo (a-kohta) voi tehdä, koska tässä kerrotaan kuinka iso yksittäinen neliö on.*
Haastattelija: *Miten laskisit sen?*
Pekka: *No 6×5 eli kolkyt, eli kolkyt senttiä pitäis olla.*
Haastattelija: *Kuusi kertaa viisi, mistä kutonen tulee?*
Pekka: *Tosta kuudesta neliöstä.*

.

Pinja ja Pekka ajattelivat tämän tehtävän yhteydessä samalla tavalla. Molemmat ratkaisivat tehtävän kertolaskulla kertomalla neliön sivun pituuden kuudella. Tehtävässä kysyttiin kuitenkin yhden neliön sivun pituutta. Vaikuttaisi siltä, että molemmat Pinja ja Pekka sekoittivat neliön kuutioksi. Koska kuutio muodostuu kuudesta neliöstä, he kertoivat neliön sivun pituuden kuudella. Kumpikaan ei huomannut laskevansa kuuden peräkkäin asetetun neliön muodostaman suorakulmion pidemmän sivun pituuden. Molemmat hallitsivat tehtävän ratkaisuun vaadittavat menetelmät (kertolasku). On mahdollista, että tehtävänanto oli monimutkainen. Toisaalta voi olla niinkin, että oppilaat olettivat löytävänsä ratkaisun tehtävässä annettuja tietoja yhdistelemällä. Jarno osasi selvittää tehtävän oikein:

Haastattelija: *Miten ratkaiset sen?*
Jarno: *Eli se on yhden neliön.. eli yhdessä on viisi niin siinä on neljä sivua. Ja neljä kertaa viisi sen pitäis ratketa siitä. Se on kaksikymmentä.*

Toisin kuin Pinja ja Pekka, Jarno huomasi, että kyseessä oli yksi neliö. Tämän oivalluksen turvin hän ratkaisi tehtävän oikein. Petri ilmoitti selvästi, että kohdan ratkaisemiseen oli annettu tarpeeksi tietoja.

Petri: *Ainakin a:n kyllä voi ratkaista siitä mä oon varma koska tota siinä on niin tasan tietoja ainakin tarpeeksi että viisi senttimetriä on siit voi laskee. tästä.*
Haastattelija *Miten sen voi laskea?*
Petri: *No oikeestaan tämän tässä, tämän tässä, tämän tässä tämän tässä ja noin poispäin.(Näytti neliön sivuja kynällä, ja osoitti myös taustalla olevia sivuja).*

Petri ei ymmärtänyt kunnolla, mitä tehtävässä kysyttiin. Hän osoitti kädellään sekä niitä kuution sivuja, jotka kuuluivat tehtävän ratkaisuun että niitä kuution sivuja, jotka eivät kuuluneet tehtävän ratkaisuun. Pinja, Pekka ja Petri epäonnistuivat neliö-käsitteen (käsitetieto) ja laskumenetelmän (proseduraalinen tieto) yhdistämisessä toisiinsa.

B-kohta. B-kohdassa (Liite 2) kysyttiin: mikä on kuution sisälle asetetun pikkukuution sivun pituus. Tässä tehtävässä tekstiä käytti kuusi oppilasta (Jarno, Tiina, Taina, Petri, Anna ja Emma). Oppilaat totesivat lähes poikkeuksetta, että tehtävässä ei kerrottu mitään pikkukuutiosta. Oppilaat perustelivat tekstiin viitaten myös silloin, jos tekstissä ei kerrottu tarvittavaa asiaa.

Emma: *Koska en mä tiedä missä on mikä on pikkuneliö. (pikkukuutio).*
Anna: *No tän kuution sivujen pituus on viis, niin mistä mää voisin tietää että mikä on sen pikkukuution. Kun sitä ei sanota tässä.*
Petri: *Ainakaan no kun täällä ei oo annettu yhtään tietoa mistään pikkukuutiosta.*
Jarno: *Sitä ei voida ratkaista, koska siinä ei mainita mitään pikkukuutiosta, nimenomaan ei mitään. Ja vaikka oliskin niin siitä ei tiedetä kuinka suuri se on.*
Tiina: *Koska sitä ei kerrottu mitään että siellä on joku ihme pikkukuutio siellä sisällä.*

Jarnon mielestä tehtävää ei voinut ratkaista, vaikka pikkukuutio olisi mainittu tehtävänannossa. Sen kokoa ei voinut silti tietää. Hän kaipasi tietoa siitä, minkä kokoinen pikkukuutio oli tarkalleen.

Taina: *Tätä ei pysty.*
Haastattelija: *Miksi sitä ei pysty?*
Taina: *Kun ei tiedetä sitä yhden sivun pituutta.*

Taina perusteli, ettei tehtävää pysty laskemaan, koska sivun pituutta ei tiedetty. Kuvassa ei näkynyt pikkukuutiota, joka voisi olla ison kuution sisällä. Aikaisemmin Emma, Anna Petri ja Jarno olivat sitä mieltä, ettei heille ole annettu mitään tietoja pikkukuutiosta. Taina kiinnitti huomiota siihen, että hän ei tiennyt kysyttyä pikkukuution sivun pituutta. Sen sijaan hän olisi voinut pohtia, minkä kokoinen kuutio isomman kuution sisälle voisi mahtua.

C-ja d-kohdat. C- ja d-kohdissa (Liite 2) kysyttiin, mikä on kuution A korkeus ja leveys. Seitsemän oppilasta (Tiina, Anna, Semi, Joona, Terhi, Kalle ja Taina) käytti molemmissa kohdissa tekstiä tiedonlähteenä.

Tiina: *Kuinka korkea kuutio A on? Pystyy sen selvittämään koska se on tietenkin se viisi senttimetriä koska se neliön sivun pituus on se. Kuinka leveä kuutio A on? Voi, koska jos ne kaikki sivut on samanpituisia, niin sitten ne on samanpituisia kanssa.*
Joona: *Tää voi laskea, itse asiassa se on niinku viisi senttiä, silloin tänkin voi laskea tääkin on viis.*
Anna: *Ton ainakin voi koska sehän on niinkun viisi senttimetriä korkea koska se sivu on viisi senttimetriä. Tonkin saa (leveys).*
Semi: *Ton voi tietää koska tossa lukee viisi senttimetriä. Tonkin voi tietää, koska siinä lukee että viisi senttimetriä.*
Terhi: *Kuinka korkea kuutio A on? Sen voi tietää, se on viisi senttimetriä. Kuinka leveä kuutio A on? Senkin voi tietää se on viisi senttimetriä.*
Kalle: *Viisi senttimetriä, tässä on. Viisi senttimetriä.*
Taina: *Tän pystyy, viisi senttimetriä. Viisi senttimetriä leveä. sen pystyy.*

Kaikki seitsemän perusteli molemmat kohdat samalla kertaa. Perustelut olivat suoraviivaisia ja tarkkoja. Nämä kohdat suunnittelin helpoiksi, jotta eritasoisille oppilaille löytyisi ratkaistavissa olevat tehtävät.

E-kohta. Etukäteen ajattelin e-kohdan (Liite 2) olevan hankalin kohta. Tehtävässä kysyttiin, kuinka suuren pallon voi laittaa kuution sisälle. Ainoastaan kaksi tutkittavista (Jarno ja Kalle) perusteli ratkaisunsa tehtävänannon tiedoilla. Kalle totesi äkkiä, ettei tehtävää voi ratkaista:

Kalle: *Ei voi tietää.*

Jarno puolestaan pohtii tilannetta hieman enemmän:

Jarno: *No sitä ei pysty ratkaisemaan, koska ei siinä mainita siitäkään mitään että voisko sinne laittaa sitä kuvaa tai siinä ei puhuta mitään sellaisista asioista. Eli ei.*

Jarnon ajattelu oli hyvin kiinteässä vuorovaikutuksessa tekstissä annettujen tietojen kanssa. Koska tehtävä edellytti tilanteen ajattelua ja mallintamista mielessä, sitä ei ollut mahdollista ratkaista pelkkiä tekstin tietoja soveltamalla. Kumpikaan pojista ei harkinnut, onko kuution sisälle mahdollista laittaa palloa. He eivät osanneet mallintaa eivätkä hahmottaa olennaisia asioita.

F-kohta. Haastattelun f-kohdassa (Liite 2) pohdittiin neliön halkaisijan kokoa. Kukaan koehenkilöistä ei käyttänyt tässä tehtävässä tekstin tietoja hyväkseen.

G-kohta. Haastattelun g-kohdassa (Liite 2) tarkasteltiin, kuinka monta neliön sivua kuutiossa on. Pekka oli ainoa, joka tässä kohdassa turvautui tekstin tietoihin.

Pekka:	*Kuinka monta neliön sivu.. no kuutiossa se kerrotaan tuossa, kuusi neliötä.*
Haastattelija:	*Kuusi mitä?*
Pekka:	*Neliön sivua niinku..*

Pekka tulkitsi tehtävässä annettuja tietoja väärin. Hän ei tiennyt, mikä on neliön sivu. Tekstissä kerrottiin, että kuutiossa on kuusi neliötä. Pekka ymmärsi, että kuutiossa on kuusi neliön sivua. Hän ei ymmärtänyt käsitteiden (kuution ja neliön) eroa. Tämän seurauksena tehtävien ratkaisu ei onnistunut. Geometria matematiikan osa-alueena sisältää paljon käsitteitä. Jos näitä käsitteitä ei hahmota, sinänsä yksinkertaistenkin tehtävien ratkaiseminen on mahdotonta.

Kuvan käyttö

Luokittelin oppilaiden ratkaisut kuvan käyttöön, jos he viittasivat kuvaan puheessaan tai osoittivat alkujaan kynällään kuvaa ratkaistessaan ongelmaa. Tekstin käytössä oppilas saattoi osoittaa kynällään kuvaa, mutta aloitti kuitenkin ensisijaisesti ratkaisemaan tehtävää tekstin tietojen avulla (vrt. Petri s.44).

A-kohta. A-kohdassa (Liite 2) Semi, Emma, Tero, Terhi ja Juho käyttivät kuvaa tiedonlähteenä ja perustelunaan. Semi osoitti kuvaa kynällään, kun hän oli ympyröinyt a-kirjaimen:

Haastattelija:	*Senkö pystyy ratkaisemaan?*
Semi:	*Sen takia koska tossa on noin (osoittaa kuvaa) senttimetrit.*

Tero pohti tehtävässä seuraavasti:

Tero:	*No kun.. no kun lasketaan niin se tulee.. …(laskee mielessään ja katsoo kuvaa ja osoittaa sitä kynällä..) 25 senttimetriä.*
Haastattelija:	*Miten sait sen?*
Tero:	*Silleen että mää laskin ekaks tällein että 1,2,3,4 (näyttää kuvasta) ja siitä saa sen.. (jatkaa laskemista mielessään)… miten toi nyt meni… se on 20 tulee siitä.*

Tero näytti kuvasta tarkoittavansa neliötä. Alkuun hän antoi väärän vastauksen, jonka vuoksi halusin tarkistaa, ymmärsikö hän tehtävän oikein. Hän kertoi laskevansa ensin, kuinka monta neliön sivua neliössä on. Tämän jälkeen hän kertoi vastauksen. Koska hän laski ensin, kuinka monta sivua neliössä on, viittasi se hänen haluavan selvittää, montako kertaa hänen tulisi kertoa sivun pituus. Muuten olisi ollut järkevämpää laskea suoraan yhteen viisi + viisi + viisi + viisi, kuten Emma teki.

Emma: *No laskee ei kun siis viis plus viis plus.. laskee nää viitoset yhteen (osoittaa kuvaa).*

Terhi ymmärsi tehtävän alkuun väärin.

Terhi: *No nää sivut viis viis viis viis senttimetriä, tässon viis viis viis senttimetriä ja tässon.. sillein jokaisessa on tota kakskytä senttimetriä ja…*
Haastattelija: *Onko tuossa monesta neliöstä kyse?*
Terhi: *Mikä on neliön sivun pituuksi.. yhdestä elikkä se on kaksikymmentä.*

Terhin tapaus osoitti, että hän ei lukenut tehtävää huolellisesti. Kun kysyin häneltä, kuinka monesta neliöstä oli kyse, hän osasi vastata oikein luettuaan kysymyksen uudelleen. Pelkän vastauksen arviointi ei olisi antanut oikeata kuvaa Terhin osaamisesta. Mietinkin, kuinka usein näin tapahtuu koulun arjessa matematiikan tunneilla ja matematiikan kokeissa? Terhi osasi ratkaista tehtävän, mutta hänen vastauksensa olisi ollut väärin yksin suoritetussa kokeessa. Vaikka puutuin Terhin ongelmanratkaisuun, se ei vaikuttanut sinänsä Terhin ratkaisuun. Huomasin hänen aikovan laskea seuraavaksi kuusi kertaa 20 tai 20+20+20+20+20+20.

Seuraavassa kysyin Juholta, miksi a-kohtaa ei hänen mielestään voi ratkaista.

Juho: *No kun muuten nää kaikki pitäis yhteen laskee. Suunnilleen, tai en mää oikein tiiä kunnolla.*
Haastattelija: *Mitkä kaikki sinun pitäisi laskee yhteen?*
Juho: *No kaikki nää sivut tällein.*
Haastattelija: *Onko se vaikeata?*
Juho: *No olis, no ei se kyllä hirveen vaikeeta.. 25, eiku 30 niitä on.. yhteensä. No voi sitä oikeestaan ollakin.*
Haastattelija: *Mitkä kaikki sivut laskit yhteen?*
Juho: *Tämän, tämän, tämän, tuolta takaa ja tuolta alta ja tuolta (näyttää kuvasta).*

Juholla laski neliöiden lukumäärän ja kertoi sen kuudella. Hän päätyi samaan vastaukseen kuin Pinja ja Pekka aikaisemmin (s. 43–44). Syy tehtävän ratkaisemattomuudelle oli se, että ”muuten joutuisi tekemään jotain”. Vaikka Juho ymmärsi tehtävän väärin ja sekoitti käsitteet keskenään, huomio hänen vastauksissaan kiinnittyi hänen haluttomuuteensa pohtia asioita.

B-kohta. B-kohdassa (Liite 2) seitsemän oppilasta (Marja, Veikko, Mervi, Pinja, Kalle, Semi ja Joona) selvitti ongelman kuvaa hyväksikäyttäen.

Marja:	*(katsoo kohtaa aika pitkään ja kumittaa sen pois) Toi ei ookaan.*
Haastattelija:	*Miksi ei ole?*
Marja:	*Kun ei siellä ole mitään kuutiota sisällä?*
Haastattelija:	*Miten ymmärsit tuon ensiksi?*
Marja:	*No niinku täällä jotenkin silleen (osoittaa kädellä kuution sisälle).*
Veikko:	*ei voi tota, kun eihän tuolla ole pikkukuutioita.*
Mervi:	*Sitten … tätä ei voi ratkaista koska tässä ei nää niitä kuutioita minkä kokoisia ne on) tässä kuutiossa.*
Pinja:	*Onko tässä jotain pikku kuutioita?*
Haastattelija:	*Onko siinä? Miten siinä sinun mielestäsi on?*
Pinja:	*No ei.*
Kalle:	*Miks tässä on niinku pikku kuutio? Sitä ei varmaan pysty kun ei tossa oo mitään pikkukuutiota.*
Semi:	*Tota ei voi tietää koska sitä ei näe tässä.*
Joona:	*Mä en usko että tota voi, mää en oikeen tajuukaan tätä. Mä en tajuu että mikä toi pikkukuutio mitä se sisällä.. ja mikä eihän tässä näy mitään. Eli sitä on mahoton.*

Oppilaiden perustelut olivat konkreettisia ja loogisia. Koska kuutiota ei näkynyt kuvassa, he eivät voineet tietää, minkä kokoinen se oli. Tekstin avulla perusteluun verrattuna kuvan käyttäminen jätti vähemmän aukkoja perusteluun. Oppilaat pystyivät osoittamaan, ettei kuutiota ollut olemassa. Tekstin käyttäjät totesivat puolestaan, ettei tehtävää pysty ratkaisemaan, koska pikkukuutiosta ei mainittu mitään. Heidän perustelunsa ei sulkenut pois kuution olemassaolon mahdollisuutta. Kuvan käyttäjät onnistuivat tässä kohdassa tekstin käyttäjiä paremmin. Kun kyseessä oli geometriaa läheisesti liittyvä tehtävä, kuvan avulla oli helpompi muodostaa pätevä käsitys ongelmasta ja sen ratkaisusta kuin tekstin tietojen käyttämisellä.

C-ja d-kohdat. C- ja d kohdissa (Liite 2) kuvaa käyttivät Pekka, Tero, Mervi ja Emma.

Pekka: *Ja sitten kuinka korkea kuutio on, kyllä sen voi koska sen näkee täältä että se on viisi senttiä. No kyllä tuonkin, se on viisi senttiä.*

Tero: *Mutta sitten tämä on se että tuota tää on viisi senttimetriä korkea, se on merkitty. Ja kuinka leveä se on, tässä on sekin.*

Mervi: *Sitten toi kuinka korkea kuutio A on .. sen voi mun mielestä ratkaista koska tässon näitten sivujen pituudet sitten sen voi kattoo että…paljon..*
Haastattelija: *Mikä se korkeus on?*
Mervi: *Viisi senttiä. Sitten tää kuinka leveä kuutio A on, niin senkin voi kattoo.*

Emma: *Onks toi niinku viis toi korkeus, ja sit se on levee viis?*
Haastattelija: *Mistä löysit ne?*
Emma: *Tosta noin, korkeus on viis ja leveys on viis (näyttää kuvasta).*

D-kohdassa Veikko katsoi kuution leveyden kuvasta.

Veikko: *Ja ton, koska tosta näkee silleen..vaikka se onkin tolla alhaalla, niin sen näkee sit tääältäkin kohtaa saman.*

Veikko perusteli c-kohdan eri tavalla siitä huolimatta, että kohta oli helposti perusteltavissa yhdellä kerralla. Veikon ajatus ei jatkunut c-kohdasta d-kohtaan Mervin, Teron ja Pekan tavoin. Kuution kuvassa leveys oli osoitettu nuolella, joka sijaitsi kuution alareunan kohdalla (Liite 2) horisontaalisessa suunnassa. Veikon ajattelun taustalla oli näkemys, että leveys tulisi katsoa kuutio yläreunasta, sillä hän halusi yleistää alareunan mitan koskemaan myös kuution yläreunaa. Kyseessä oli kuitenkin täysin sama asia. Koska kuution kaikki sivut olivat samanpituisia, Veikon käyttämä yleistys oli matemaattisesti ajatellen oikein.

E-kohta ja f-kohdat. E-kohdassa kukaan ei käyttänyt kuvaa tiedonlähteenä. F-kohdassa (Liite 2) Semi totesi seuraavasti:

Semi: *Tuota ei voi tietää, koska siinä ei ole (kuvassa) sitä halkaisijaa.*

Semi ei uskonut ratkaisuun, koska hän ei nähnyt halkaisijaa kuvassa.

G-kohta. Seitsemän oppilasta käytti g-kohdassa (Liite 2) kuvaa ratkaisun tukena (Marja, Mervi, Semi, Tero, Terhi, Taina ja Veikko).

Marja: *Tän pystyy (ympyröi), koska siinä on niinku.. ootas nyt (katsoo kuvaa ja kynällä käy läpi kuution sivuja) Tän pystyy laskeen tästä.*
Haastattelija: *Joo, miten lasket sen?*
Marja: *Kaikki nää: 1,2,3,4,5,6…(osoittaa sivuja, myös piilossa olevia kuution sivuja, pystyy siis hahmottamaan asioita, joita ei kuvassa näy).*

Marja laski kaikki sivut aloittaen numerosta yksi edeten kohti kahtatoista. Hän laski luettelemalla osoittaen jokaisen numeron kohdalla yhtä neliön sivua. Mervillä ja Semillä menivät käsitteet keskenään sekaisin.

Mervi: *Ja kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä niin senkin voi laskee.*
Haastattelija: *Miten sen voi laskea?*
Mervi: *Sillä lailla että aattelee vaikka että tässois se kuutio (laittaa kätensä nyrkkiin kuutiomaiseksi), niin sitten tästäkin (siirtyy kuvaan) näkee että täällon niinku tässon yks sivu, täällä alla on yks sivu (ei näkyvä, takana oleva), tässon yksi, tässon yks sivu, tuolla takana on yks sivu ja tosson yks sivu.*

Semi: *Tuon voi tietää koska sen voi laskee.. nämä yks, kaks, kolme, nel, viis.*

Mervi ja Semi sekoittivat tässä tehtävässä neliön sivun ja kuution tahkon toisiinsa, samalla tavalla, kuin Pinja, Pekka ja Juho aikaisemmin Kuutio 1-tehtävän a-kohdassa (s.43–44, 48–49). Terolla tapahtui g-kohdassa seuraavasti:

Tero: *No mä en tota oikein älynnyt.Se oli aika.. Siinä on se että… ai niin kuution sivua..Siinä ois tota (laskee mielessään) …kuus niitä.*
Haastattelija: *Miten laskit sen?*
Tero: *Silleen niinku että tästä ois 1,2, 3, tolla takana on yks, nel.. eiku viis.: Tässon yks sivu, toinen, kolmas, sitten tuolla ois neljäs sivu, ja tossois viides sivu ja sitten tuota kuudes sivu tuolla alhaalla.*

Tero ymmärsi tehtävän samaan tapaan väärin kuin Mervi ja Semi. Hän totesi ääneen etsivänsä kuution sivuja, tässä tapauksessa neliöitä (vrt. Pinja, Pekka ja Juho s. 43–44, 48–49). Aivan kuten Terhi (s. 48), Terokin osasi ratkaista tehtävän, kun hänelle esitti lisäkysymyksiä.

Tero: *… nää on näitä sivuja, näitä lasketaan tällein (näyttää kuvasta kynällä)..ois paljon helpompaa jos tän pystyis hahmotella tähän niinku tällein, että se kuutio ois läpinäkyvä, (piirtää takasivut kuutioon). Ei tosta oikein muuta oikein pysty piirtään. Sit siitä tulis… (laskee mielessään) 12.*

Tero mielsi tehtävän helpommaksi, kun kuution piirsi läpinäkyväksi (Liite 6). Hän kykeni ajattelemaan kolmiulotteisesti. Useampikin oppilas sekoitti neliön sivun itse neliöön eli kuution tahkoon. Ratkaisun oikeellisuus oli hyvin pienestä kiinni. Myös Terhi ajatteli läpinäkyvää kuutiota.

Terhi:	*Kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä? Ykstoista kakstoista eiku 1,2,3,4,5,6,7,8,..12. Joo. Mää piirrän siihen, näin se on helpompi laskea (piirtää kuution läpinäkyväksi). No.. no kun toi näkyy tuolla. Ja sen pystyy laskeen.*

Terhi laski ensin luettelemalla, mutta tarkisti tilanteen piirtämällä kuutioon sivut, joita ei näkynyt. Tero laski vastauksen päässään.

Taina:	*Ja tän pystyy*
Haastattelija:	*Miten lasket sen?*
Taina:	*Lasketaan ne sivut yhteen.*
Haastattelija:	*Mitkä kaikki sivut lasket yhteen?*
Taina:	*No kaikki nää neliön sivut (näyttää samalla kynällään neliön sivuja).*

Taina osoitti yhtä neliötä kuvasta kun kysyin häneltä, mitkä kaikki sivut hän laskisi yhteen. Koska Taina puhui yhdestä neliöstä ja osoitti kuvasta ainoastaan yhtä neliötä, oletin hänen myös tarkoittavan yhtä neliötä.

Veikko:	*kuinka monta.. voi senkin, kun tästähän voi laskea että kuinka monta sivua. Ja kun miettii mitä siellä takana on. Ja jos se ois tässä vaikka semmonen (kuutio kädessä), niin siitä olisi vielä helpompi.*
Haastattelija:	*Olisiko se helpompi kuin tuosta kuvasta?*
Veikko:	*On, koska siitä joutuu niin kuin miettimään mitä siellä on.*

Mervin tavoin (s. 51) Veikko toivoi apuvälinettä helpottamaan ongelman ratkaisua. Erona Terhiin ja Teroon, Veikko toivoi saavansa ratkaisun helpottamaksi konkreettisen kuution mallin. Sen avulla olisi hänen mukaansa ollut helpompi laskea, kuinka monta neliön sivua kuutiossa on. Jos Veikko olisi huomannut ”piirtää kuution läpinäkyväksi”, kuten Terhi ja Tero tekivät (s. 51–52), hänen ei olisi tarvinnut miettiä, mitä ”siellä takana on”.

Kuva ja teksti

Kuvan ja tekstin luokkaan järjestin vastaukset, joissa oppilas vahvisti omaa päättelyään molempien tiedonlähteiden käytöllä.

A-kohta. Kaksi oppilasta (Mervi ja Joona) yhdisti kuvan ja tekstin käytön a-kohdassa (Liite 2).

Mervi: *mmm .. no….. tän ainakin vois ainakin ratkaista tällä tiedolla kun tössö on yhden neliön sivun pituus on viisi senttimetriä se näkyy tässäkin (kuvassakin sekä tehtävänannossa) Niin tän että mikä on neliön sivun pituuksien summa.*

Mervi todisti kuvan avulla hänen päättelynsä olevan oikein. Näin hänen vastauksensa tuntui vahvemmalta verrattuna siihen, ettei hän olisi viitannut kuvaan.

Joona: *No tää on aika helppo silleen että kaikki kulmat kun kaikki on viisi senttimetriä ja sitten vaan laskee. Tai no.. Niin sivut siitä niin. Jokainen on viis senttiä ja laskee ne vaan yhteen.*
Haastattelija: *Montakohan niitä olisi?*
Joona: *Yhdeksän.*
Haastattelija *Mitkä sivut laskit mukaan?*
Joona: *No nämä näin (näyttää kaikkia näkyvillä olevia sivuja, joita on yhdeksän kappaletta) Yhdeksän kertaa viis, kolkyt viis.*

Joona käytti tekstin tietoa sivujen pituudesta. Joona puhui aluksi kulmista, vaikka hän tarkoitti sivuja. Kuutiossa kulma on kohdassa, jossa neliöiden sivut ovat toisiaan vasten suorassa kulmassa. Siinä mielessä hänen sanojensa sekaannus oli ymmärrettävä. Kuvan avulla Joona hahmotti, kuinka monen sivun pituus tulisi laskea yhteen. Hän ei huomannut, että tehtävässä oli tarkoitus selvittää yhden neliön sivujen pituuksien summa. Joona käytti kuvasta vaan näkyvää tietoa. Hän ei osannut ajatella neliön sivuja, jotka eivät näkyneet kuvassa. Hän laski vain näkyvät sivut. Hän ei kyennyt ajattelemaan kuutiota läpinäkyvänä, kuten esimerkiksi Tero ja Terhi osasivat aikaisemmin tehdä (s. 51–52).

B-kohta. B-kohdassa (Liite 2) ainoastaan Tero käytti sekä kuvaa että tekstiä.

Tero: *No tossa koska se pikkukuutio, ei voida tietää minkä muotoinen se on. Tai kuutio se on mutta minkä pituinen se.*
Haastattelija: *Miksi sitä ei voi tietää?*
Tero: *Kun ei sitä nää tästä eikä sitä oo merkattu.*

Tero esitti kaksi perustelua sille, miksi pikkukuution pituutta ei voinut tietää. Toinen perustelu oli se, ettei pikkukuutiota näe kuvasta, ja toinen, ettei sitä ole merkattu tietoihin. Näiden kahden tiedon perusteella hän päätyi pitävään ratkaisuun. Aikaisemmin Jarno ja Petri (s. 45) perustelivat kohdan ratkaisemattomuuden pelkällä tekstillä. Heidän perusteluihinsa verrattuna Teron tapa sulki paremmin pois pikkukuution olemassaolon mahdollisuuden.

C- ja d-kohdat. Pinja käyttää kuution korkeuden ja leveyden määrittelemiseen c-ja d-kohdissa (Liite 2) kahta tiedonlähdettä.

Haastattelija: *Mistä tiedät tuon?*
Pinja: *No kun tässä sanottiin että tää on korkein viisi senttiä, tää kokonaan kuution koska sen näät tästä. Tää leveyskin näytetään tässä.*

Pinja perusteli tehtävän aluksi tekstin pohjalta. Tämän jälkeen hän täydensi perusteluaan kuvalla, johon oli merkitty sivun korkeus.

E- ja f-kohdat. E- ja f-kohdissa (Liite 2) kukaan ei käyttänyt kuvan ja tekstin yhdistelmää.

G-kohta. G-kohdassa (Liite 2) Kalle, Tiina, Pinja ja Sari yhdistivät kuvan ja tekstin tiedot samassa tehtävässä. Aikaisemmissa esimerkeissä useamman tiedonlähteen käytön seurauksena vastaukset olivat ehyempiä. Kallen kohdalla kävi toisin.

Kalle: *Tässä sanotaan tuollakin. 1,2,3,tuolla takana on neljä, 5,6.*

Kalle aloitti tehtävän laskemalla, kuinka monta neliötä kuutiossa on. Tämä tieto oli annettu tehtävänannossa (Liite 2). Kalle vastasi tehtävään käyttämällä tekstiä ja kuvaa apunaan. Videolla Kalle osoitti kuvasta kuution tahkoja eli neliöitä laskiessaan vastausta. Hän epäonnistui tehtävän ratkaisussa, koska ymmärsi sen väärin. Neliön sivu käsitteenä sekoittui neliön käsitteeseen (ks. Pinja, Pekka, Juho, Mervi, Semi, Tero, (s. 44, 48–49, 50–51). Jos tilannetta tarkastelee hänen tulkintansa kautta, jolloin neliön sivulla tarkoitetaan neliötä, hänen ratkaisunsa on oikein. Tietojen yhdistäminen ei johtanut parempaan vastauksen laatuun, koska ratkaisija ei hallinnut tehtävässä tarvittavia käsitteitä. Tiina tulkitsi saman tehtävän eri tavalla.

Tiina: *Kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä? Pystyy siinä on kuusi neliötä, niin sitten voi tästä laskea. Kaks kertaa on kokonaan neljä sivua. Ja tuolla takana, mitä ei nyt nää, on neljä sivua ja tässon neljä sivua (edessä). Sitten lasketaan nää sivut, mitkä ei kuulu noihin, (laskee 1,2,3,4). 4+4+4 = 12. Pystyy.*

Aluksi Tiina käytti tekstin tietoa kuudesta neliöstä, jonka jälkeen hän, käyttäen kuvaa apunaan, päätyi vastaukseen. Tiina jätti laskematta kaksinkertaiset sivut. Seuraavassa esimerkissä Pinja laski yksitellen kaikki sivut. Kumpikaan (Tiina tai Pinja) ei pohtinut, miten tehtävässä tulisi toimia toisiaan vasten olevien neliöiden sivujen kohdalla.

Pinja: *Ja tonkin voi ratkaista koska siinä on tota kuus neliötä niinkun 1,2,3,4,… 14 no kuinka monta siinä onkaan.*

Pinja laski jokaisen sivun erikseen osoittaen niitä kynällä. Ensin hän pohti, että kuutiossa on kuusi neliötä. Hän ei ajatellut asiaa eteenpäin, vaan jatkoi laskien sivujen määrän yksitellen. Pinja ensimmäisen ajatuksen pohjalta olisi ollut mahdollista edetä tehtävän ratkaisussa. Jos hän olisi huomannut yhdessä neliössä olevan neljä sivua, hän olisi voinut tätä tietoa hyödyntämällä päätyä 4×6 kertolaskulla nopeasti oikeaan vastaukseen. Tällöin olisi jätetty huomiotta se, että kuution särmä muodostuu kahdesta vastakkain olevasta neliön sivusta.

Haastattelija: *Miten lasket sen?*
Sari: *No silleen että tässon neljä, tässon yks plus kolme, tässon yks kaksi, täällon niinkun takana yks ja kaks ja täällon sitten tässon sitten.*

Sari luetteli erikseen, kuinka monta sivua on kuutiossa. Samalla hän osoitti kuutiosta laskemiaan sivuja. Hän ei jatkanut luettelemista luvusta kolme eteenpäin, vaan aloitti uudelleen luvusta yksi uuden tahkon kohdalla. Tämän jälkeen hänen piti palata jo kertomiinsa asioihin uudelleen ja laskea ne yhteen selvittääkseen vastauksen.

Seitsemän oppilasta käytti toisiaan tukevia tietoja ongelmanratkaisussa yhdeksän kertaa. Kahden tietolähteen yhdistäminen toisiinsa onnistui seitsemän kertaa. Kuvan ja tekstin yhdistelmää käytettiin vähän, vaikka se tekikin vastauksesta monipuolisemman. Näyttäisi siltä, että oppilaat käyttävät mieluummin yhtä tietoa ongelman ratkaisussa kuin että täydentäisivät ratkaisua perustellummaksi useammalla samaan tehtävään kiinteästi liittyvällä tiedolla. Tämän seurauksena huomioimatta jäivät tiedot, jotka olisivat voineet helpottaa ratkaisun oikeaksi toteamista (tarkistus). Esimerkiksi Pekka (s. 44) tarttui tekstin tietoon kuudesta neliöstä. Päädyttyään yhteen vastaukseen hän ei pohtinut enää ratkaisun oikeellisuutta. Jos hän olisi verrannut tehtävän kysymystä ja omaa ratkaisuaan toisiinsa, hän olisi voinut ymmärtää, ettei se vastannut kysymykseen.

6.1.2 Oma ajattelu

Oman ajattelun-luokkaan luokittelin aineiston kohdat, joissa oppilas käytti ratkaisussaan hyväksi tietoja, joita ei annettu tehtävänannossa.

A-kohta. A-kohdassa (Liite 2) kukaan ei soveltanut omaa ajattelua.

B-kohta. Pekka ja Terhi käyttivät oman ajattelun-luokkaa b-kohdassa (Liite 2).

Pekka: *Tuota (b kohta) ei mun mielestä voi, koska se voi olla vähäsen pienempi kuin...täytyykin olla sen. Kun jos laitetaan pikkukuutio sivulle...siis sisälle.*

Pekka pohti pikkukuution kokoa suhteessa isompaan kuutioon. Koska tämä kohta oli ennen pallo-tehtävää (Kuutio 1, e-kohta, Liite 2), oli yllättävää, ettei hän pystynyt siirtämään samantyylistä ajattelua myös pallon koon pohdintaan (s. 64–65). Terhi ajatteli samoin Pekan kanssa.

Terhi: *Mikä on kuution sisään asetetun pikkukuution sivujen pituus? Ei sitä voi tietää.*
Haastattelija: *Miksi ei voi?*
Terhi: *Koska se voi olla paljon pienempi tai sit se voi olla suunnilleen ihan semmosen millin pieni silleen ei sitä voi tietää minkä kokoinen se on.*

C- ja d-kohdat. Oppilaat eivät käyttäneet c-ja d-kohdissa (Liite 2) oman ajattelun-luokkaa.

E-kohta. 11 oppilasta (Mervi, Pinja, Tero, Anna, Sari, Juho, Emma, Terhi, Joona, Petri ja Semi) käytti oman ajattelun-luokkaa Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2). Mervin ja Pinja käsitteitä pallosta ja kuutiosta voinee verrata toisiinsa, sillä molemmat määrittelivät kappaleille tietyt ehdot, joiden kautta he päätyivät omiin ratkaisuihinsa.

Mervi: *Sitten toi kuinka ison pallon voi laittaa kuution sisään.. niin sitä… ei mun mielestä voi ratkaista koska se pallo on niin kuin pallon muotoinen eikä kuution muotoinen niin sitä ei voi tietää.*
Haastattelija: *Mitä ei voi tietää?*
Mervi: *Sitä kuinka iso se saa olla että se mahtuu tonne sisään..*

Pinja: *..ja sitten kuinka ison pallon voi laittaa kuution sisään niin ei sitä kuitenkaan siinä sillein tai kyllä sen periaatteessa vois laittaa koska se on kakskyt senttiä halkaisijaltaan, mutta se on niinku pyöreä et sen täytyis* *olla silleen..(käsillään muotoilee kuutiota), no kyllä sen periaatteessa oikeestaan vois laittaa.*

Haastattelija: *Tarkoitatko, että halkaisija on tämä, tämä, tämä ja tämä (edellä kuvattu halkaisija)?*

Pinja: *Joo jos sen laittaa sen pallon sinne vaikka ylhäältä päin sisään niin sen täytyis olla niinku kakskytsenttiä leveydeltään tai silleen ympäri.*

Molemmat Mervi ja Pinja osasivat tarttua pallossa sen pyöreään muotoon, joka vaikutti siihen, kuinka iso pallo kuution sisälle mahtui. Mervin mielestä pyöreän muodon vuoksi ei voinut tietää, kuinka iso pallo kuution sisälle sopi. Pinja käytti kuution tietoja hyväkseen ja johti pallon ympärykselle eli pallon kehälle sen kokoa rajoittavan tekijän. Hän hahmotti pallosta sen olennaisen ominaisuuden eli kehän ja käytti tietoa siitä hyödykseen. Tero valitsi tehtävään konkreettisen näkökulman.

Tero: *Ja sitten tällä on tota kun ei sitä voi tietää että tota siis minkä kun pallothan vaihtelee. Jos sää laittaisit tonne jonkun tennispallon niin eihän tonne vois ehkä pakolla ees mahtuu..*

Haastattelija: *Entä joku pienempi pallo?*

Tero: *No kyl se mahtuu, mutta eihän me voida tietää sitä sitä sitten.*

Teron käsitykseen pallosta liittyi konkreettinen pallo, esimerkiksi juuri hänen mainitsemansa tennispallo. Hän ei ajatellut mielivaltaista, minkä tahansa kokoista palloa, koska hänen mielessään oli oikea (peli)pallo. Hänen pitkäkestoisesta muistiinsa lienee tallentunut käsitys palloista sellaiseen muotoon, että hän ei pystynyt ajattelemaan palloa minkä tahansa kokoisena. Myös Annan ajattelusta löytyi konkretiaa.

Anna: *Voihan sen laittaa sillein, että jos toi neliö ois siis ihan niinku mutta kun se on tossa paperilla niin sitä ei voi kokeilla sillein, minkä kokoinen sinne menis.*

Haastattelija: *Jos sinun pitäisi arvata, minkä kokoinen sinne mahtuisi?*

Anna: *Noo suunnilleen samankokoinen kuin tuo..(kuutio).*

Anna halusi ratkaista kokeilemalla, minkä kokoinen pallo kuution sisälle mahtuu. Hän osasi arvioida, minkä kokoinen pallon tulisi suunnilleen olla. Myös Sari esitti ratkaisumalliksi kokeilua.

Sari: *Mä mietin sitä, että kuinka iso niinkun että se on niinku vihjeenä jos pistäs jonkun ison niin jos pistäis niinku pistäs ison pallon ja pistäs niinku sen päälle semmosen vähän pienemmän.*

Haastattelija: *Minkä päälle, sen isomman?*

Sari: *Niin.*

Sari ajatteli, että erikokoisia palloja vertailemalla voisi päättää ja ratkaista, minkä kokoinen pallo kuution sisälle mahtuu. Juhon este ongelman ratkaisuun oli esineellinen.

Juho: *Toi se ei voi ainakaan olla.*
Haastattelija: *Miksi ei?*
Juho: *No koska miten sen tunget sinne sen pallon..*

Sen sijaan, että Juho olisi pohtinut pallon mahdollista kokoa, hän mietti sitä, miten pallon saa laitettua kuution sisälle. Kuution voi ajatella olevan suljettu laatikko, joten silloin ongelmana on juuri se, miten Juho sen nimesi: miten pallon saa laitettua kuution sisälle. Emma kertoi, ettei hän tiedä pallon pituuksia.

Emma: *Mä en tiedä mitään pallon sisuspituuksia niin en mä oikein tiedä miten ton vois ratkaista ton e:n.*
Haastattelija: *Mutta jos sinun pitäisi laittaa tuonne pallo, niin minkä kokoinen se voisi olla?*
Emma: *Aika pieni, pienempi kuin viisi senttimetriä.. tai ehkä..tän kokoisen pallon sinne ainakin saa (näyttää kuvaa, kuutiota).. emmää tiiä. No jos sen laittaa sinne niinku...emmää tiiä.. ei varmaan.. Noitten pallon pituuksia emmää tiiä niinku… ne pyöreet sivut, niitä ei pysty oikein viivottimella mittaamaan.*

Emma puhui pallon sisuspituuksista, joilla hän tarkoitti ympyrän halkaisijaa ja kehää. Hän ymmärsi pallon sisuspituuden vaikuttavan siihen, minkä kokoinen pallon tulee olla. Lisäksi hän pohti ympyrän kehää eli ”pyöreitä sivuja”. Emma hahmotti pallosta ominaiset piirteet (halkaisija ja kehä). Hän ei vielä osannut selvittää niitä. Pallon halkaisijan osalta hän osasi soveltaa tehtävän tietoja hyväkseen. Terhi ja Joona ajattelivat Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) e-kohdassa seuraavasti:

Joona: *No.. toi on ehkä neljä, mutta en mää oo varma…koska sen pitää olla pienempi. Tämä vai.. sehän se itse asiassa vois olla samankokoinen nimittäin se on pyöreä niin se mahtuu silloin sisälle… se on mahollista laskea.*

Terhi: *Kuinka ison pallon voit laittaa kuution sisään? … Se ei voi olla viisi senttimetriä halkaisijaltaan.. . voi sen varmaan tietää, koska jos toi on viisi senttimetriä (näyttää kynällä kuvaa) niin eiks sen pitäis olla neljä senttimetriä silleen, paitsi että me ei tiedetä silleen.. tai no voi sen, jos toi on viisi senttimetriä se ei voi olla viisi senttimetriä halkaisijaltaan sen pitää olla vähän pienempi. : Ehkä sentin pienempi neljä senttiä, joten se on neljä senttiä halkaisijaltaan.*
Haastattelija: *Voiko olla isompi kuin neljä senttiä?*
Terhi: *Ei, koska toi on sitten samankokoinen sen kanssa.*

Haastattelija: *Eikö, miksei?*
Terhi: *Koska toi on viis senttiä se ois samankokoinen se ei mahdu sinne.*
Haastattelija: *Niin mutta jos se on vaikka 4,9.*
Terhi: *No voi se olla 4,9.*

Terhi oli oikeilla jäljillä, mutta hän ei osannut käyttää desimaalilukuja, vaan pitäytyi kokonaisluvuissa. Molemmat Terhi ja Joona määrittelivät pallon koon kokonaisluvuin. Molemmat huomasivat, että pallon tulee olla vähän pienempi kuin kuution. Joona päätyi lopulta siihen, että pallon on samankokoinen kuution kanssa. Terhi oivalsi, että pallo ei voi olla aivan kuution kokoinen, sillä silloin se ei mahtuisi kuution sisälle. Hän kertoi tarkoittavansa pallon halkaisijan pituutta määritellessään pallon kokoa. Petri osasi ilmaista tarkasti ehdon pallon koolle.

Petri: *No että se, en mä muista että kumpi oli piiri ja kumpi oli halkaisija mutta kuitenkin niin että se on niinku pallon toisesta päästä toiseen päähän niin olis niin vastakkaiseen päähän niin olis viisi senttimetriä. Tai no ainakin tai no ei nyt ihan olis koska toihan on viisi senttimetriä toi sisällä on niinkun kuitenkin ton pitää olla jonkun paksunen toi kuutio se.*

Siitä huolimatta, tiesikö oppilas jonkin käsitteen nimeä, hänen oli mahdollista ratkaista tehtävässä. Petri osoitti hahmottavansa pallon sisäisen halkaisijan käsitteen eli ympyrän halkaisijan. Lisäksi hän määritteli, että ”pallon toisesta päästä toiseen päähän” tuli olla hieman pienempi kuin viisi senttimetriä.

Kaikki eivät osanneet hahmottaa pallon ominaisuuksia tai pysähtyä ajattelemaan ongelmaa pidemmälle. Semi oli sitä mieltä, että tehtävää ei voi ratkaista.

Semi: *Tota ei voi tietää. Sen takia koska sitä on niin vaikea hahmottaa kun siinä on.. , pitää ottaa niistä kulmista pois niin paljon. No tämä pallo siis jos tähän tulis pallo näin sitä on niin paljon tosta pois niistä kulmista niin sitä ei voi tietää, eikä sitä näe sitä palloakaan.*

Semi ajatteli että kulmista tyhjäksi jäävän tilan vuoksi pallon kokoa ei voinut tietää. Semin huomio kiinnittyi epäolennaiseen tietoon.

F-kohta. F-kohdassa (Liite 2) luokitin ainoastaan Petrin vastauksen oman ajattelun-luokkaan.

Petri *..sitten ton ainakin voin, mikä on kuvassa olevan neliön halkaisija pituus kun mä en vaan nyt.. eikun ei sitä voi koska se halkaisija pitäis olla sama joka suuntaan että se oli sees halkaisija.*

Petri piirsi kuvaan ajatuksiaan halkaisijasta (Liite 6). Halkaisija lähti hänen piirroksensa perusteella kuution sisältä keskipisteestä. Kuvassa halkaisija kulki kuution keskipisteestä takakulmaan tai suoraan tahkoon. Tämän seurauksena halkaisija olisi ollut eripituinen. Petrin mukaan halkaisija tuli olla sama joka suuntaan. Tämän takia hän ei voinut määritellä tehtävää mahdolliseksi.

G-kohta. Annan lisäksi Petrin vastaus kuului g-kohdassa (Liite 2) oman ajattelun-luokkaan.

Petri: *Eli siis tällaista näin No kyllä sen voi laskee.. paitsi että mää en oikeen tiedä että kummalla tavalla se niinku laskettais jos se kerran jos puhuttaisi niinku pelkästä kuution sivusta vai neliön sivusta jos tää ois neliöistä rakennettu, niin tässä ois vähän niinku kaks sivua vastakkain. Niin jos puhuttais kuution sivuista, niin sitten siinä ois vaan yks.*
Petri: *Niin koska tää on niinku laitettu siihen, mutta jos ois kuution niin sitten siinä ois tietenkin yks.*

Petri huomasi, että tehtävän voi ymmärtää kahdella eri tavalla: joko siten, että kaikki neliön sivut lasketaan yhteen tai siten, että vastakkaisista sivuista vain toinen lasketaan mukaan. Muut oppilaat eivät osanneet ajatella kohtaa kahdesta eri näkökulmasta (vrt. s. 54–55 Tiina ja Pinja). Samassa tehtävässä Anna pohti aikaisempia kokemuksiaan.

Haastattelija: *Miten päättelit sen?*
Anna: *No se nyt.. mää nyt päättelisin siitä tai mää nyt laskisin tästä näin sitten että mää tiedän kuitenkin mitä ne muut siellä on vaikka ne ei näy tästä. Tuolla on kuitenkin sillein että sitä ei näy tossa on niinku tuolla on niinku yks sitä ei näy kun tää ei oo läpinäkyvä tää neliö sitten tässäkin on yks. Mää nyt laskisin ne sitten.*
Haastattelija: *Niin että kuvittelisit ne sinne.*
Anna: *Niin mää oon nähnyt monta kertaa semmosia jotka on läpinäkyviä missä näkyy kaikki semmoisia neliöitä tai siis kuutioita.*

Anna sovelsi omaa tietoaan, jonka hän oli oppinut aikaisemmin vastaavasta kuutiosta. Teron ja Terhin tavoin hän puhui läpinäkyvästä kuutiosta (s. 51).

Muuta. Mervin vastaus Kuutio 1-tehtävän c- ja d-kohdissa (Liite 2) kuului luokkaan kuva. Tehtävän ratkaisun yhteydessä Mervi ajatteli kuution ominaisuuksia yleisesti:

Mervi: *Sitten tää kuinka leveä kuutio A on, niin senkin voi kattoo koska nää sivut*

> *on samanmittaisia kun täälläkin koska muuten se ei ois kuutio. Vaikkei tässä sanottaiskaan että kaikki noi sivut on samanmittaisia No senhän kyllä pitäis että noi kaikki sivut on… No siinä kyllä pitäis että noi kaikki sivut on samanpituisia niin sen voi ratkaista silti. Sekin on viis senttimetriä.*

Mervi määritteli ehdot kuution sivuille. Niiden tuli hänen mukaansa olla samanmittaisia, muuten kuutio ei olisi kuutio. Hän oli tallentanut muistiinsa käsitteen merkityksen, joka antoi vahvan pohjan hänen päättelylleen tässä tehtävässä. Hänen kuutio-käsitteeseen liittyi käsitys sivujen samanmittaisuudesta, josta voi päätellä kuutioiden tahkojen olevan neliöitä.

6.1.3 Tietojen yhdistely

Tietojen yhdistely-luokkaan järjestin aineiston osat, joissa oppilas loi tehtävässä annettujen tietojen perusteella esimerkiksi uuden tiedon, säännön tai päätelmän.

A-kohta. Anna, Taina, Marja ja Kalle yhdistelivät tietoja a-kohdassa (Liite 2). Anna käytti tekstin tietoa hyväkseen sekä liitti siihen tiedon siitä, että kuutioiden sivut ovat samanpituisia. Tehtävänannossa kerrottiin neliöiden olevan samankokoisia. Annan on täytynyt tämän tiedon pohjalta päätellä, että kuution kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

> Anna: Ton pystyy koska kuutiossahan noin kaikki sivut on samanpituisia, ja jos yks on viisi senttimetriä, ja kun ne kaikki laskee yhteen niin siitä saa sitten niinkun tietää että paljon..

Taina aloitti kohdan ratkaisun seuraavasti:

> Taina: *Tän pystyy ainakin (ympyröi kynällä ensimmäisen vaihtoehdon).*
> Haastattelija: *Miten laskisit sen?*
> Taina: *No kun jos nää on viisi senttimetriä niin sitten laskee nää vaan yhteen.*

Tainan oli ajateltava ennen ratkaisua seuraavasti: koska tehtävässä on kerrottu kuution tahkon pituus (5 cm), on myös kaikkien muiden tahkojen pituus oltava viisi senttimetriä. Taina käytti siten yleistä päättelysääntöä A:n ja B:n implikaatiosta, A => B, A:sta seuraa B (Haapasalo 1997a, 193). Seuraavaksi hän jatkoi laskemalla yhteen 5+5+5+5= 20. Tämän olisi voinut laskea myös kertolaskulla. Koska tehtävässä puhuttiin summasta, se saattoi aiheuttaa yhteenlaskutoimituksen käytön. Marja ajatteli samalla tavalla kuin Taina.

Haastattelija: *Miten pystyt ratkaisemaan ton?*
Marja: *No silleen niinku laskee yhteen..*
Haastattelija: *Mitkä?*
Marja: *Nää kaikki viisi senttiä, jos kaikkien reunojen pituus on viisi senttiä.*

Marja tiedosti, mitä neliön sivuilla tarkoitetaan. Hän ei huomannut tehtävässä kysyttävän ainoastaan yhden neliön sivujen summaa.

Haastattelija: *Mitkä kaikki sivut lasket siihen?*
Marja: *Kaikki nää tällaset, kaikki (osoittaa paperilla, kaikkia neliön sivuja).*

Näin ajatellen Marjan tulisi laskea 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5= 60. Kalle päätteli, että kaikkien reunojen pituuden on oltava viisi senttiä.

Kalle: *No se on niinku viis senttimetriä .. ai niin.. no senhän pystyy koska sehän on viis senttimetriä, ja silloin ne kaikki on.*

B-kohta. B-kohdassa (Liite 2) kukaan oppilaista ei käyttänyt tiedon yhdistelyn-luokkaa.

C-ja d-kohdat. C-ja d-kohdissa (Liite 2) Petri, Marja ja Jarno yhdistelivät tietoja.

Petri: Viisi senttimetriä niinkun joka suuntaan, levee, korkee ja pitkä.

Marja: *Ja sitten tässä on nää viisi senttimetriä kun jos kaikkien.. (viisi senttimetriä pitkiä), niin tässäkin suunnassa viisi senttiä (leveys ja korkeus).*

Petri, ja Marja perustelivat samalla sekä c- ja d-kohdat. Marjan perustelu muistuttaa Tainan perustelua a-kohdassa (s. 61). Petri hahmotti kuution kolmiulotteisena kappaleena. Hän sovelsi omaa tietoaan eri ulottuvuuksista. Jarno perusteli molemmat peräkkäiset kohdat toisiinsa liittyen.

Jarno: *No sen voi ratkaista, koska jokainen on viisi senttimetriä ja myös tää pystysuoraan menevä sivu on viis senttiä, niin se on viis senttiä. Siinä niin kuin äsken mainittiin että kaikki sivut ovat viis senttiä, niin myös tää vaakasuora on viis senttiä.*

Koska Jarno viittaasi aikaisempaan perusteluunsa, tapahtui hänen ajatuksissaan ”lähitransfer” tilanteesta toiseen. Veikolla näin ei tapahtunut. Hänen vastauksensa kuului tietojen yhdistelyn-luokkaan ainoastaan c-kohdassa.

Veikko: *Kun kaikki sivut on viisi senttimetriä pitkiä, se on viisi senttimetriä korkea.*

Veikon perustelut c- ja d-kohdissa (Liite 2) erosivat toisistaan. Hän yhdisti toisiinsa tekstin tiedon sivun pituudesta sekä oman käsityksenä korkeudesta. D-kohdassa luokittelin Veikon toiminnan *havaitun ja tunnistetun tiedon* alaluokkaan *kuva* (s. 50).

E-, f- ja g-kohdat. E-, f- ja g-kohdissa (Liite 2) kukaan ei yhdistellyt tietoja.

6.1.4 Uskomukset

Uskomusten luokkaan erittelin ratkaisut, jotka eivät olleet hyvin perusteltuja tai tosia. Jos tutkittava määritteli omalla tavallaan jonkin käsitteen, luokittelin vastauksen uskomusten luokkaan. Oppilaat käyttivät eniten uskomuksia e-kohdassa (Liite 2), jossa pohdittiin, kuinka ison pallon kuution sisälle voi laittaa, sekä f-kohdassa (Liite 2), jossa tehtävänä oli selvittää neliön halkaisijan pituus.

A-, b-, c- ja d-kohdat. Ensimmäisessä neljässä kohdassa (Liite 2) ei turvauduttu uskomuksiin kertaakaan.

E-kohta. Veikko, Petri, Pekka, Tiina, Marja ja Taina käyttivät uskomuksia e-kohdassa (Liite 2). Ratkaisut jakautuivat *tiedemies*- ja *ei perusteita* -alaluokkiin.

Tiedemies. Veikko arvaili pallon kokoa seuraavasti:

Haastattelija:	*Osaatko arvioida minkä kokoisen (pallon) sinne voisi laittaa?*
Veikko:	*Varmaan kaksi senttiä.*
Haastattelija:	*Voiko laittaa muun kokoista?*
Veikko:	*Varmaan voisi, sitten kun mennään niihin vielä pienempiin lukuihin. Joihinkin ihan atomeihin asti.*
Haastattelija:	*Meinaat, että pienempiä voi laittaa?*
Veikko:	*Niin, ja kyllä varmaan joitain isompiakin. Niin uskois kyllä.*

Veikon sanat paljastivat hänen pitävän atomeja todella pieninä asioina, mikä sinänsä on totta. Veikon ajattelussa erikoista oli se, että hän mietti mahdollisimman pieniä palloja, eikä isoja, joita tässä tehtävässä oli tarkoitus pohtia. Kysyin Veikolta, kuinka ison pallon kuution sisälle voisi laittaa.

Veikko:	*En tiedä yhtään. Voi silleinkin kun tollon noita mittoja (osoittaa viiden senttimetrin mittoja paperissa).*

Pohtiessaan isomman pallon kokoa, Veikko ei onnistunut määrittelemään mahdollisia ehtoja pallon koolle. Hän mietti, voisiko käyttää tehtävässä annettuja mittoja. Hän ei osannut määritellä, kuinka annetut tiedot liittyisivät kyseiseen tehtävään. Veikko hahmotti, miten pallo ja kuutio asettuisivat suhteessa toisiinsa. Hän ei kyennyt yhdistämään näiden yhteistä informaatiota toisiinsa. Hän ei löytänyt tietoa, joka olisi asettanut ehdot tilanteen ratkaisulle. Aikaisemmin mm. Emma (s. 58) totesi, että kuution sisälle voisi laittaa kuution kokoisen pallon, joka oli lähes oikea vastaus. Tätä vastausta Veikko ei huomannut. Hän ei oivaltanut pallon ominaisuuksia, kuten sen ympärystä tai halkaisijaa, joita esimerkiksi Pinja ja Petri pohtivat aikaisemmin (s. 56–57, 59–60). Veikko päätyi siihen, että tehtävän voi ratkaista.

Veikko: *Ja toi ku, tai varmaan voi. Näistä voi sillein päätellä, kun joku tiedemies voi silleen päätellä kun nää on viisi senttimetriä et paljon niinkun jää niinku aina tänne reunoille.*

Veikko puhui tiedemiehestä. Omasta mielestään hän ei vielä hallinnut taitoja tehtävän ratkaisemiseksi. Hän ymmärsi, että jos kuution sisälle laitetaan pallo, kuution kulmiin jää jäljelle tilaa, jota pallo ei täytä. Tällä tiedolla ei ollut tehtävän ratkaisun kannalta merkitystä. Veikon lisäksi Petri oli aluksi sitä mieltä, ettei hän vielä osannut ratkaista tehtävää.

Petri: *Ton e:n voi laskea, mutta mää en oikein tiedä miten oikeestaan. Joskus sitten joskus yläasteella varmaankin tiedetään miten tollanen voi laskee että niinku tollein. Siitä mää oon varma, että sen ainakin voi laskee.*

Petrin ”tiedemiestä” vastasi yläasteen oppilas. Tämän jälkeen Petri alkoi pohtia tilannetta tarkemmin ja hän osasi ratkaista tehtävän. Petri määritteli halkaisijalle tarkan pituuden. Luokittelin Petrin vastauksen oman ajattelu käyttöön, ja se on kuvattu aikaisemmin tässä tutkimuksessa (s. 59). Taulukossa 1 (s.41) olen säilyttänyt Petrin luokittelun myös *tiedemies*-alaluokassa.

Ei perusteita. Tiinan, Pekan, Tainan ja Marjan ratkaisuissa ei ollut perusteita. Tiinan ja Pekan ratkaisut olivat nopeita Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2). He eivät perustelleet omia ajatuksiaan.

Tiina: *Kuinka ison pallon voit laittaa kuution sisään? No ei voi.*

Pekka: *Ja ehkä tämän kuinka ison no ei sitä voi.*

Tehtävässä kysyttiin, kuinka ison pallon voi laittaa kuution sisään. Kysyttäessä perusteita omalle ratkaisulleen Taina ja Marja eivät osanneet niitä kertoa.

Taina: *Tota ei pysty.*
Haastattelija: *Miksi ei?*
Taina: *Ei sitä oikein (hetken hiljaisuus).*

Marja: *Tää olis sit se kuutio. Eli nyt tässä sanotaan, miten ison pallon voi laittaa kuution sisälle… tästä ei voi olla ihan varma.*

Marja ei ollut varma pystyisikö hän ratkaisemaan ongelmaa. Hänellä ei tuntunut olevan olemassa valmista mallia ongelman ratkaisemiseen. Hän ei osannut eritellä, mitä tietoa tulisi käyttää ongelmatilanteessa. Hän ei todennut, ettei ongelmaa voisi ratkaista. Ratkaisu jäi Marjan osalta kesken.

F- kohta. 12 oppilasta käytti uskomusten luokkaa Kuutio 1-tehtävän f-kohdassa (Liite 2). Vastaukset jakautuivat *luulot*- ja *ei perusteita* -alaluokkiin.

Luulot. Luulot alaluokkaan kuuluivat Teron, Jarnon, Tiinan, Mervin, Veikon, Tainan, Kallen, Pinjan, Joonan ja Terhin vastaukset. Taina oli sitä mieltä, että halkaisija-tehtävän voi ratkaista.

Taina: *Ja sitten tän pystyy.*
Haastattelija: *Miten ratkaisisit sen?*
Taina: *Eiks se niinku halkaisija sillein..*
Haastattelija: *Piirrä vaan se siihen.*

Taina haki varmistusta haastattelijalta omalle käsitykselleen. Pyysin häntä piirtämään oman käsityksensä paperille, sillä minun oli vaikeata ymmärtää, mitä hän tarkoitti.

Taina: *Onks se niinku tästä vai sitten (näyttää kynällä halkaisijaa kuution tahkon reunasta reunaan tai ylhäältä alas meneväksi).*
Haastattelija: *ymm.. miten ratkaisisit sen sitten?*
Taina: *No tästä niin olisi viisi senttimetriä.*
Haastattelija: *Mitä muuta se halkaisija voisi olla?*
Taina: *Onks se niinku.. no se on vähän vaikea*

Halkaisijan käsite oli epäselvä Tainalle. Ilmeisesti sitä ei vielä ollut käsitelty koulun oppitunneilla. Taina mielsi halkaisija neliön puolittajaksi, joka lähti neliön sivun keskipisteestä, päätyi vastaavaan pisteeseen neliön vastakkaiselle sivulle ja halkaisi kuution kahtia (Liite 6). Mervi ja Terhi olivat Tainan kanssa samaa mieltä.

Mervi: *Sitten tää mikä on kuvassa olevan neliön halkaisijan pituus.. niin se on… mun mielest sen voi ratkaista ja se on viisi senttiä koska nää kaikki sivut on viisi senttiä.*
Haastattelija: *Mikä siinä mielestäsi on se halkaisija?*
Mervi: *Se on viisi senttimetriä.*
Haastattelija: *Niin mutta jos sinun pitäisi tuohon kuvaan laittaa se.*
Mervi: *No sit se on tosta ton pituinen (Osoittaa halkaisijaksi pituutta kuution edessä olevassa sivussa)..*

Terhi: *Se näkyy kyllä tästäkin.. sen voi laskeakin (osoittaa kynällä kuution keskelle).*
Terhi: *Ymm..joo se on viisi senttimetriä. Kyllä joku näistä on väärin, ei kaikki voi olla oikein.*

Terhi uskoi halkaisijan olemassaoloon, vaikka sitä ei kerrottu tehtävässä. Hän piirsi paperille viivan, joka ulottui kuution etureunasta kuution kattoon (Liite 6). Se oli hänen mielestään neliön halkaisija. Terhi luonnosteli viivan suurin piirtein neliön keskikohdalle, joten hänen mielestään halkaisija jakoi neliön kahteen yhtä suureen osaan. Joona epäili aluksi, että tehtävää olisi mahdotonta ratkaista.

Joona: *Tuo on mahdoton toi f, sitä ei voi laskea.*
Haastattelija: *Minkä takia?*
Joona: *Emmä oikein tiiä, mun mielestä tuntuu että sitä ei voi laskee.*
Haastattelija: *Tiedätkö, mikä on neliön halkaisija?*
Joona: *Joo että se että tästä näin että, vaikka en mää oikein kunnolla tiiä, mutta tästä näin, se että puolikas tästä. Voihan se että, se on viisi senttiä luultavasti sittenkin, tosta tohon noin. Joo se on se on nimittäin tosson kaikki viis. Siinä on yhdeksän joo.*

Epäilyjen jälkeen Joona käsitteli ongelmaa eteenpäin ja keksi, mikä halkaisija voisi olla. Hänen mielikuvansa vastasi Tainan, Mervin ja Terhin käsitystä (s. 65–66). Pinjan, Kallen, Jarnon ja Veikon käsitys halkaisijasta oli erilainen.

Pinja: *No kun tossa näytettiin että se on viis senttii tollein niin halkaisijaltaan tai siis ei sitä oikeestaan nää mutta kun tossa on neljä neliöö sillein se on ympäri, niin neljä kertaa viis on kaksikymmentä.*
Haastattelija: *Niin mikä se halkaisija on?*
Pinja: *Kaksikymmentä senttiä.*

Kalle: *Onko se halkaisija niinkun se leveys tai niinku? Ai niin se on se ympärysmitta se.*

Halkaisija kiersi kuution ympäri suurin piirtein keskikohdalta. Jarno lisäsi määrittelyynsä suorakulman käsitteen.

Jarno: *Sekin voidaan tai hetkinen.. onks halkaisija se joka menee sillein tässä suunnassa (näyttää vaakasuorassa käsillä)?*
Haastattelija: *Onkos sinulle kerrottu mikä se on?*
Jarno: *Se on niinku se sen jos toi nyt on vaikka sen.. Se riippuu että kuinka iso jos nyt vaikka halkaistas tästä, et kuinka suuri se on. Sehän on, kyllä se voidaan laskea, koska siinä mainitaan, että se on jokaiselta sivulta viisi senttiä ja jos tasakulmissa se tämä neliö eli sillon ihan suoraan nää (näyttä käsillä, tarkoittaa että kulmat suoria) niin silloin se on sama kuin tää viis senttiä.*

Jarnon idean mukaan kulmien tuli olla suoria, sillä muuten halkaisijan pituus muuttuisi. Hän ajatteli matemaattisesti, koska hän ymmärsi, kuinka kulman suuruus vaikuttaisi halkaisijan pituuteen. Jarnon halkaisijakäsitys täydensi Pinjan ja Kallen käsityksiä tasakulma-ajatuksella. Jos Jarnon määrittelemä ehto ei pätisi, halkaisija olisi eri suuri kuin 20 senttimetriä. Veikon mielestä halkaisija tarkoitti kuution ympärystä. Hän ei osannut ratkaista ympäryksen pituutta.

Veikko: *..se halkaisija. Ei kun ei voikkaan, eiks se oo tosta sivulta niin kuin, tän ympärys on halkaisija. Niin sitä, ei voi sitä.*

Teron käsitys halkaisijasta liittyi läheisesti pinta-alaan.

Tero: *ja sitten tota… no se on niinku helppoo, kun nää niin tulee kymmenen ja kymmenen kun halkaistaan kahtia tota saa ton viis.*
Haastattelija: *Minkä halkaiset kahtia?*
Tero: *Kato kun tämä on yhteensä kymmenen (kaksi sivua lisätään toisiinsa) täst tulee siis… Se ois kaksitoista puol, jos tämä ois viis kertaa viis. Kakskyt viis.*

Terolla yhdisti pinta-ala käsitteen ja halkaisijan toisiinsa. Hänen käsitykseensä halkaisijasta liittyi kahtia jakaminen, koska hän puolitti saamansa kertolaskun vastauksen. Tiinan käsitys halkaisijasta oli oikea.

Tiina: *Mikä on kuvassa olevan neliön halkaisijan pituus? Mä oon ihan sekaisin...pystyy sen kai jotenkin, mutta mä en oo ihan varma miten.*
Haastattelija: *Mitenhän sen voisi selvittää?*
Tiina: *En tiiä.*
Haastattelija: *Mikä on mielestäsi halkaisija?*
Tiina: *Halkaisija on mun mielestä tää näin (piirtää neliön halkaisijan paperille oikein).*

Tiina tiesi, mikä halkaisija oli. Hän ei osannut ratkaista sen pituutta.

Ei perusteita. Pekan ja Marjan vastaukset luokitin *ei perusteita*-alaluokkaan. Jos oppilaan vastaus ei pohjautunut tietoon tai jos hän ei pystynyt kunnolla vastaamaan, vastaus kuului tähän alaluokkaan. Pekka merkitsi tehtävän mahdolliseksi hatarin perustein.

Pekka: *Ehkä sen kumminkin..*
Haastattelija: *Miten ratkaiset sen?*
Pekka: *No mää en oikein muista oliko se halkaisija näin vai miten se oli. No kyllä sen voi kuitenkin ratkaista.*

Pekka ei tiennyt, mikä oli halkaisija. Sen saattoi hänen mielestään ratkaista. Pekka erosi muista siten, että hän ei määritellyt halkaisijaa ollenkaan. Pekan mielestä oli mahdollista ratkaista tehtävä, jota hän ei ymmärtänyt. Marjan ajatukset olivat epävarmoja.

Haastattelija: *Tiedätkö, mikä on halkaisija?*
Marja: *En ole varma onko se se pituus vai… (näyttää käsillä leveyttä)*
Haastattelija: *Mistä voisit sen päätellä, onko se halkaisija (yritän johdatella miettimään sanan halkaisija merkitystä)?*
Marja: *En mä tiedä.*

G-kohta. Jarnon päättely g-kohdassa (Liite 2) kuului ainoana *uskomusten* luokkaan. Hän tulkitsi tietoa omalla tavallaan.

Jarno: *Sekin (g-kohta) voidaan laskea, koska sen nimikin on kuutio. Ja se nimi tulee siitä, että siinä on kuus sivua ja kuus kulmaa. Eli siinä on kuusi just näitä.*

Kuutio nimestä voi päätellä jotain, mutta ei Jarnon mainitsemia asioita. Jos Jarno olisi tarkastellut kuvaa tarkemmin, hän olisi voinut huomata ajatustensa paikkaansa pitämättömyyden, sillä kuutiossa on enemmän kuin kuusi kulmaa. Jarnon ajattelemat sivut vastasivat neliöitä (ks. Pinja, Pekka, Juho, Mervi, Semi, Tero ja Kalle, s. 44, 48–49, 50–51, 54).

6.1.5 Muut

Luokkaan muut jaottelin vastaukset, jotka eivät sopineet mihinkään aikaisempaan luokkaan. Jos oppilas ei puhunut tehtävää suorittaessaan mitään, hänen ”ratkaisunsa” kuului tähän luokkaan.

A-kohta. A-kohdassa Tiina ja Sari kuuluivat luokkaan *muut*. Sarille kohdan (Liite 2) ymmärtäminen oli hankalaa.

Sari: *Mitä toi a tarkoittaa?*
Haastattelija: *Mitä et ymmärrä?*
Sari: *Mitä se tarkoittaa se pituuksien summa?*
Haastattelija: *Tiedätkö, mikä on neliö?*
Sari: *Joo.*
Haastattelija: *Missä tässä kuvassa on neliö?*
Sari: *Tässä.*
Haastattelija: *Hyvä, mikä siinä on neliön sivu?*
Sari: *Tämä*
Haastattelija: *Ymmärrätkö mitä summa tarkoittaa?*
Sari: *Onks se niinku että näit sais laskee (näyttää kynällä neliön neljää sivua)?*

Saria tuntui sekoittavan kysymyksen muotoilu. Kyselyn kautta selvisi, että hän ymmärsi, mitä yksittäiset käsitteet tehtävän sisällä tarkoittivat. Käsitteiden yhdistäminen toisiinsa yhdessä lauseessa tuotti hänelle ongelmia. Edellä olevaa esimerkkiä käytettäessä rakensin tikapuita Sarille, jotta hän pystyisi ymmärtämään, mitä tehtävässä tarkoitetaan. Muille oppilaille en joutunut samaan tapaan antamaan tukea tässä tehtävässä. Tiina ei tuottanut tässä kohdassa puhetta.

B-kohta. Sarin ja Juhon ratkaisut kuuluivat *muut*- luokkaan b-kohdassa (Liite 2). Kumpikaan ei tuottanut kohdassa puhetta.

C- ja d-kohdat. Sari ja Juho eivät puhuneet c- ja d-kohdissa (Liite 2).

E-kohta. Kenenkään vastaus ei kuulunut luokkaan *muut* e-kohdassa (Liite 2).

F-kohta. Juho, Sari ja Emma eivät ajatelleet ääneen f-kohdassa (Liite 2). Anna pohti mielessään, mutta häntä oli vaikeata liittää tässä mihinkään luokkaan.

Anna: *.. tota oisko kai sen.. tai..hmm..No en, mä en voi tietää mikä se on.*

G-kohta. Emma ei kertonut ajatuksistaan g-kohdassa (Liite 2). Samoin voi sanoa Juhosta.

Juho: *Kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä? En mää tiiä.*

Juhon mielestä tehtävän pystyi ratkaisemaan, koska hän ympyröi kohdan. Kun kysyin, miten hän tehtävän ratkaisisi, ei hän osannut kertoa sitä. Joona tuotti g-kohtaan (Liite 2) vastauksen. Epäselväksi jäi, miten hän päätyi kyseiseen vastaukseen.

Joona: *Siinä on yhdeksän joo.*

Luokkaan *muut* kuuluvat ratkaisut johtuivat siitä, etteivät oppilaat tuottaneet puhetta kohdassa. Tämän seurauksena en pystynyt luokittelemaan heidän ajatteluaan. Sarin ja Juhon ratkaisut kuuluivat tähän luokkaan viisi kertaa seitsemästä mahdollisesta. Erityisesti heidän oli vaikeata kertoa ajatuksiaan ääneen. Tiinan, Annan ja Emman sijoittuminen tähän luokkaan oli enemmän sattumanvaraisia, Juholla ja Sarilla toistuvia. 18 oppilaasta ainoastaan kahden oppilaan vastauksia oli vaikea luokitella Kuutio 1-tehtävässä. Tästä voikin päätellä oppilaiden osanneen kertoa ajattelustaan.

6.2 Tietojen tuottaminen ja soveltaminen

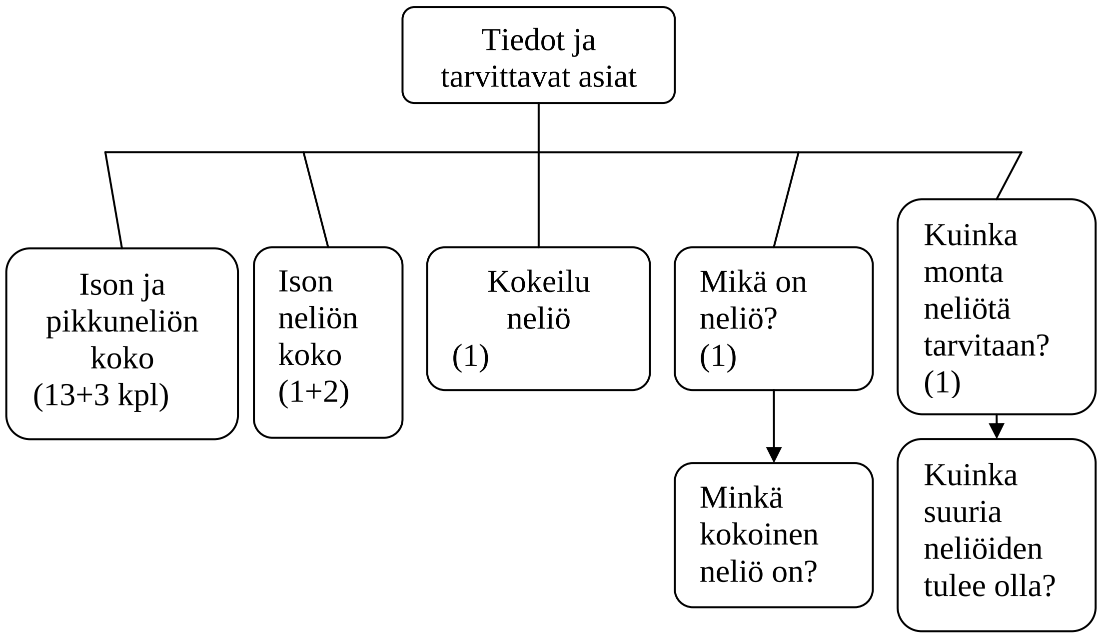
Neliö-tehtävän (Liite 2) tavoite oli tutkia oppilaiden tapoja ymmärtää avoin dialektinen ongelma. Kysymyksen asettelussa ei annettu juuri muita tietoja kuin itse kysymys. Sisällönanalyysin jälkeen aineisto jakautui kolmeen pääluokkaan.

1. Tiedot
2. Mielikuvat ja piirrokset
3. Ratkaisut ja ratkaisumenetelmät

Tiedot ryhmään luokittelin aineiston kohdat, joissa haastateltavat kertoivat, mitä tietoja he kertoivat tarvitsevansa tehtävän ratkaisemiseksi. Mielikuvien ja piirrosten ryhmään luokitin oppilaiden tavat ymmärtää, piirtää ja kuvailla tehtävän ymmärtämistä. Ratkaisut ja ratkaisumenetelmät -luokkaan järjestin oppilaiden ratkaisun kulkua kuvaavat osiot.

6.2.1 Tiedot

Aineistosta nousi esiin yhteensä viisi erilaista tietoa, joita oppilaat kertoivat tarvitsevansa. Tämä ei tarkoittanut sitä, että jokainen oppilas olisi ilmoittanut kaikki nämä tiedot. Koska oppilaat lähestyivät tehtävää eri näkökulmista ja ymmärsivät sen eri tavoin, tarvitsivat he erilaisia tietoja tehtävän ratkaisemiseen. Kuvioon 4 olen koonnut tiedot, joita oppilaiden mielestä tehtävän ratkaisemiseen tarvittiin. Sulkeissa olevat luvut tarkoittavat, kuinka monta oppilasta kertoi tarvitsevansa kyseisiä tietoja. Yhteenlaskumerkin jälkeinen luku (esim. 13+2) tarkoittaa sitä, että luvun osoittama määrä oppilaita on luokiteltu kahteen ryhmään. Kuviosta on nähtävissä, että lähes kaikki oppilaat halusivat tietää, minkä kokoisia pikkuneliö ja iso neliö ovat. Muut luokat kenties vaikuttavat yksittäistapauksilta *ison neliön koko* -luokkaan verrattuna, koska ne ilmenivät vain kerran. Halusin esittää pienet luokat yksittäisinä tapauksina, koska ne osoittivat oppilaiden ajattelevan eri tavoin. Juho ei tuottanut puhetta tarvitsemistaan tiedoista, joten en pystynyt luokittelemaan hänen käyttämiään tietoja.



KUVIO 4. Tiedot, joita oppilaat tarvitsivat tehtävän ratkaisemiseen.

Ison ja pikkuneliön koko. Pääasiallisesti oppilaat kertoivat, että tehtävän ratkaisemiseksi tulisi tietää, minkä kokoisia sekä isot että pienet neliöt ovat. Näin kertoivat mm. Taina, Tiina, Marja, Mervi, Kalle, Anna, Sari, Terhi, Pinja ja Tero. Semi ja Pekka kertoivat saman asian kirjoittamalla sen paperilla. Kalle ja Anna totesivat tehtävän kohdalla seuraavasti:

Kalle: *ainakin se, kuinka iso se iso neliö on ja minkä kokoisia ne pikkuneliöt on.*

Anna: *No mä tarvisin sen, kuinka suuri se on se neliö ja sitten tota että hmm...kuinka suuria niitten pienien neliöiden pitää olla. ja.. en mää kyllä keksi muuta.*

Iso neliö. Emma ja Joona olivat Kallen ja Annan tavoin sitä mieltä, että sekä pienen että ison neliön koko pitäisi tietää. Molemmat painottivat enemmän ison neliön koon merkitystä. Erityisesti Joonan mielestä tehtävää ei voinut laskea, jos ison neliön kokoa ei tiedetty. Koska Emma ymmärsi tehtävän kahdella eri tavalla (toisen tavan esittelen myöhemmin), hänen kohdallaan oli ymmärrettävää, että tieto isosta neliöstä oli merkittävämmässä asemassa kuin tieto pienen neliön koosta.

Emma: *No minkä kokoinen se neliö vaikka on.. sitten.. no ehkä minkä kokoiset ne pikkuset on.. sitten en mä tiiä muuta.*

Joona: *No se ihan vaan riippuu että kuinka iso se iso neliö on. Se pitää aluks tietää, ei sitä muuten voi laskee.*
Haastattelija: *Tarvitsetko muuta?*
Joona: *No sitten pitäis saada tietää, kuinka iso on iso neliö ja pieni neliö.*

Petrin mielestä tieto ison neliön koosta oli riittävä. Petrin tarvitsemalla tiedolle löytyy selitys myöhemmin, kun käsittelen piirroksia ja mielikuvia (s. 77).

Petri: *Ja mitä tietoja tarvitset ongelman ratkaisemiseen, no se on tietenkin että miten iso se neliö on, jonka sisään ne mahtuu.*

Kokeiluneliö. Pinja halusi tietää, minkä kokoisia pikkuneliö ja isoneliö olivat. Lisäksi Pinjan mielestä tarvittiin myös kokeiluneliö. Pienellä neliöllä olisi voinut kokeilla, kuinka monta niitä mahtuu ison neliön sisälle.

Pinja: *no minkä kokoisia ne pikkuneliöt ja kuinka iso se neliö on johon ne laitetaan. Ja sitten tota että...niin sitten me tarvittas varmaan se neliö, niinku silleen et sen vois kokeilla. Niitähän voi tehä vaikka kuinka pieniä semmoisia ihan pikkuisia tai sitten voi tehdä sellaisia isoja, niin ei sitä tiedä minkä kokoisia ne neliöt täytyis olla.*

Kuinka monta neliötä tarvitaan. Jarno ei pohtinut, minkä kokoisia neliöiden tulisi olla. Hänen mukaansa tehtävä oli mahdollista ratkaista silloin kun tiedetetään, kuinka monta neliötä tarvitaan. Jarnon ajattelun lähtökohta oli, että pikkuneliöt eivät olleet keskenään samankokoisia (tilkkutäkki, s. 77–78).

Jarno: *Mutta se niinku että se voitais, niin siihen tarvittais yksinkertaisesti se tieto, että kuinka monta niitä neliöitä tällä kertaa tarvitaan.*

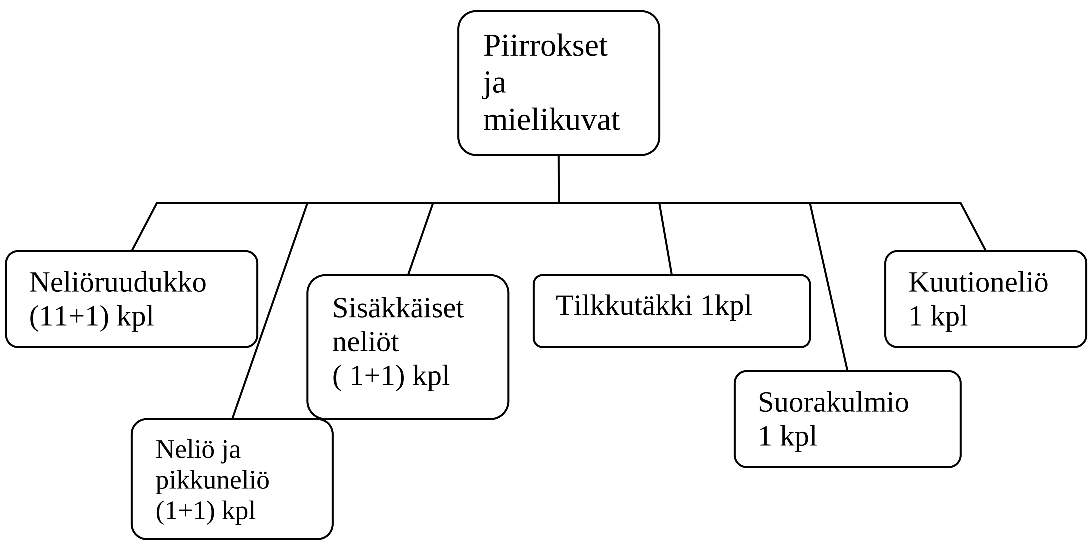
Haastattelija: *Tarvitaanko muuta?*
Jarno: *Niin joo, no sitten vois olla se, kuinka suuria niitten pitäis olla.*

Mikä on neliö? Veikko lähti liikkeelle perustavanlaatuisesta ajatuksesta. Jos emme tiedä, mikä on neliö, emme myöskään pysty tehtävää ratkaisemaan.

Veikko: *No ainakin mikä on neliö, minkä kokoinen se neliö on.*

6.2.2 Piirrokset ja mielikuvat

Oppilaiden tehtäväpaperille piirtämänsä kuvat sekä heidän kertomansa mielikuvat kertoivat, kuinka he ymmärsivät tehtävän. Aineistosta löytyi kuusi erilaista tapaa piirtää ja kuvailla tehtävää. Kuusi erilaista tapaa ymmärtää sama tehtävä yhdistettynä tutkimuksen aineiston kokoon (tässä tehtävässä 17) kertoi siitä, kuinka eri tavoin yhden luokan oppilaat voivat ajatella. Kuvio 5 kuvaa erilaisten tapojen jakautumista aineistossa. Sulkeissa olevat luvut kertovat, kuinka monta oppilasta kuhunkin ryhmään sijoittui. Yhteenlaskumerkin jälkeinen luku tarkoittaa sitä, että kyseinen määrä oppilaita on luokiteltu kahteen eri luokkaan. Esimerkiksi Emma osasi nimetä kaksi erilaista ajattelumallia tehtävään, minkä vuoksi hän kuului sekä ryhmään *neliöruudukko* että *sisäkkäiset neliöt*. Koska tutkimukseni oli laadullinen tapaustutkimus joka pyrki ymmärtämään erilaisia tapoja ajatella, sisällytin kerran tai useammin esiintyneet ajattelumallit kuvioon 5 sekä tehtävän analyysiin.



KUVIO 5. Oppilaiden piirrokset ja mielikuvat Neliö-tehtävästä.

Neliöruudukko. Suurin osa oppilaista ymmärsi tehtävän siten, että ison neliön sisälle piirretään pikkuneliöitä, joista muodostuu ruudukko (Liite 7). Heidän kohdallaan määrittelin tehtävän analyysi-synteesi -probleemaksi. Oppilaat piirsivät erikokoisia ruudukoita: 2 × 2, 4 × 4, 6 × 6, 7× 7 ja 10× 10. Piirtäessään ruudukoita osa oppilaista puhui lisää tehtävästä ja siitä mitä he tekivät. Mm. Anna kysyi, saako hän käyttää viivoitinta.

Anna: *Tästä ei nyt saa silleen tarkkaa. Vai voinks mä käyttää (viivoitinta)? No okei. Noin niin sitten...pitäis tietää nii se sitten kuinka suuria niiden pitää olla niiden neliöiden. Sitä ei voi tässä niinkun jos se sitä ei voi oikein tehä jos ei niitä tiedä kuinka paljon niit pitää.. eiku kuinka suuria niitten pitäis olla.*

Haastattelija: *Miltä se näyttää, jos sinun pitäisi piirtää tuo kuva?*
Joona: *No eka sillein että siihen tulis iso neliö tähän näin. Siihen pitäis se tähän voijaan varmaan vai tarvita ne pikkuneliöt että se pitää verrata että kuinka paljon niihin mahtuu.*
Joona: *Vaikka tällein näin neljään osaan.*

Kalle yritti ensin selittää, minkälainen tilanne olisi, mutta hän ei osannut pukea sitä sanoiksi:

Haastattelija: *Miltä tuo näyttäisi, jos sinun pitäisi piirtää?*
Kalle: *Siinä ois niinku semmonen... äh. (alkaa piirtää).*

Tiina piirsi heti 6 × 6 ruudukon, eikä pyrkinyt selittämään toimintaansa.

Haastattelija: *Miltä tuo sinun mielestä näyttäisi?*
Tiina: *(Piirtää ruudukon)*

Mervi kertoi todella tarkasti omasta toiminnastaan.

Haastattelija: *Jos sinun pitäisi piirtää tuo, niin miltä se näyttäisi?*
Mervi: *No.. mä voin käyttää viivoitinta.. koska sen piti olla iso, niin se ois se isoin mahollinen eli viistoist senttiä per sivu.*
.. siinois se iso neliö ja sitten mä voisin tehä sinne vaikka pikkuneliön vielä kaksi senttiä olisi sivun pituus mä mittaisin ensin täältä että ois kaksi senttiä.. tossa.. ja sitten mä piirtäisin siitä alaspäin kaksi senttiä ja sitten tostakin.. sitten mä piirtäisin tän viivan niinkun ihan kokonaan tähän.. ekaan neliöriviin...ja sitten mä piirtäisin tähän ne merkit että missä on ne kaks senttiä sitten toi kaks senttiä ei mee tasan tossa ja sitten mä kattoisin paljon toi on tossa, tosta pisteestä tohon. Niin sit sekään ei mennyt sentin kohalle tasan. Se on niinku kaks milliä yli yhden sentin. Niin sitten mää voisin miettiä vaikka että niinku paljonko tähän reunaan kertyy niitä neliöitä yhteensä.

Haastattelija: *Minkälaisia neliöitä?*
Mervi: *Tän kokoisia että jokainen sivun pituus yksi senttimetri.*
Haastattelija: *Tiedätkö, mistä se johtuu, että ne eivät mahdu sinne?*
Mervi: *No?*
Haastattelija: *Paljonkos sinulla oli se leveys?*
Mervi: *No 15 senttimetriä, se ei mee tasan. (piirtää neliön uudelleen) Sitten mää laittaisin tähän nää kaikki kahden sentin kohalla olevat pitkät viivat kerralla ei tarvitse sitten mennä jokaista neliön vastaa erikseen .. ja sitten mää mittaisin taas täältä nää kaks senttiä.*

Mervi kertoi sen, mitä muut eivät pystyneet kertomaan. Hän mittasi kahden sentin matkoja viivoittimella ja laittoi paperille merkin aina kahden sentin välein. Hän teki saman ”molempiin” suuntiin. Hän perusteli oman toimintansa syyt. Tehtävän alussa ihmettelin, miksi hän ajatteli, että neliön tulee olla suurin mahdollinen. Tämän vuoksi hän piirsi 15 cm × 15 cm kokoista neliötä, joka oli isoin paperille mahtuva. Koska hän valitsi pikkuneliön sivun pituudeksi kaksi senttimetriä, hän huomasi pian, että jako ei mennyt tasan. Näin tapahtuessa hän ei pohtinut sitä, miksi jako ei mennyt tasan. Sen sijaan hän mietti, kuinka monta 1 cm × 1 cm kokoisia neliöitä mahtuisi reunaan, joka ei mennyt tasan. Kun kysyin asiaa häneltä, hän oivalsi heti, miksi jako ei mennyt tasan. Anna, Joona, Kalle, Tiina ja Mervi työstivät ongelmaa tietoja yhdistämällä päätyen lopulta vastaukseen. Seuraavassa katkelmassa Juho alkoi välittömästi piirtää 10 × 10 ruudukkoa. Juho ei mitannut ruutujen kokoa. Niistä tuli keskenään erikokoisia (Liite 7).

Juho: *Tässä on liikaa näitä. Koska niitä pitää olla kymmenen ja nämä laskee 1,2,3,.. 10. Noi niinku pitää ottaa pois (suttaa).*
Haastattelija: *Miksi niitä pitää olla kymmenen?*
Juho: *Että siitä tulee sitten kymmenen ja sata tai ihan sama 1,2,3,4,5,6,…*
Haastattelija: *Miksi siitä pitää saada sata?*
Juho: *Yleisin niinku. Ja sitten tonne tulee niinku lisää näitä 1,2,3,4,5,6,7,8,9.*

Juhon mielestä 10 × 10 ruudukko oli yleisin. Tämän vuoksi hän piirsi sen kokoisen ruudukon (Liite 7). Juhon tapa toimia erosi esimerkiksi Mervi tavasta. Hän piirsi ruudukkoa ja saatuaan sen valmiiksi, hän laski, kuinka monta ruutua yhdessä rivissä oli. Hän oli päättänyt etukäteen, että ruutuja tulisi olla sata. Hän työsti ongelmaa taaksepäin aloittaen vastauksesta.

Marja ei tuottanut puhetta piirtäessään. Hänen piirroksensa jäi kesken. Tämä ei haitannut, koska ymmärsin hänen kuvansa perusteella, miten hän oli tehtävän ajatellut (Liite 7). Hän piirsi vapaalla kädellä ison neliön, jonka sisälle hän piirsi vaakaan ja pystyy viisi toisensa leikkaavaa viivaa. Näin neliön vasempaan yläreunaa muodostui ruudukon alku. Hänen kohdallaan en pystynyt määrittelemään, miten hän työsti ongelmaa.

Veikko ajatteli pikkuneliöiden muodostavan ruudukon.

Veikko: *Ja sitten varmaan jotain pikkusen pitää miettiä jos yks on vaikka yhden sentin. Niin kuin viivoittimen tässä onkin.. : No,(piirtää) Ja sitten tietenkin enhän mä voi nyt ihan tarkalleen piirtää ku, se on kuitenkin sillein että… siinähän ei ollut annettu tietoja sen mitoista ja tälleen... sekin pitäis.. Mut sitä ei nyt niin tarttis tietää.*
Haastattelija: *Mitä?*
Veikko: *No sitä kuinka pitkät ne kaikki sivut on.. koska ne voi ihan laskeekin.. ei nyt tartte ihan jokaiseen valmiita.*

Veikon mielestä riitti, kun tiesi, mikä oli yhden neliön sivun pituus. Koska neliön sivut ovat samanmittaisia, tämä tieto oli kattava. Kun Veikko alkoi piirtää neliötä, totesi hän seuraavasti:

Veikko: *Mä en osaa oikein neliulotteisesti piirtää.*

Veikko mielsi neliön piirtämisen neliulotteiseksi piirtämiseksi. Koska neliössä on neljä sivua, Veikon ymmärsi sen neliulotteiseksi kappaleeksi. Hän jatkoi puhumista piirtäessään.

Veikko: *Eli jos se ois tällainen, ja jos vaikka mietitään että yksi on sentin tällainen jokaiseen suuntaan.. ois yksi. Ja sitten on tästä.. toi nyt on vähän isompi. Suunnilleen kuitenkin tällein. Niin kuin tällein on tässä.*

Veikko piirsi jokaisen pikkuneliön erikseen (Liite 7). Tämä kesti kauemmin kuin esimerkiksi Mervin tapa piirtää pystyyn ja vaakaan tietylle välille toisistaan suoria viivoja. Piirtäessään Veikko pyöritti paperia.

Neliö ja pikkuneliö. Videolta näki hyvin, miten Sari toimi piirtäessään.

Haastattelija: *Piirrä vaikka miltä se näyttää.*
Sari: *Tässois nyt vaikka se isompi neliö ne pienet ois sitten tän kokoisia sit ne niinku mahtuis siihen suurin piirtein tällein. Jos ne on vaikka ton kokoisia. tonne jäis vielä tilaa.*

Sari piirsi ensin ison neliön ja sen viereen pienemmän neliön vapaalla kädellä (Liite 7). Tämän jälkeen hän hahmotteli ison neliön sisälle kaksi pientä neliötä. Isoon neliöön jäi vielä tilaa käyttämättä, jolle Sari ei tehnyt mitään. Ennen kuin hän aloitti tehtävän ratkaisemisen, hän totesi ison neliön sisälle mahtuvan kaksi pikkuneliötä. Hän ei yrittänyt saada neliön sisälle mahtumaan mahdollisimman montaa pikkuneliötä. Edellä esitetyissä esimerkeissä muilla oppilailla oli pyrkimys saada ison neliön sisälle mahtumaan mahdollisimman monta neliötä. Sarin tavoin Pinja luonnosteli erikseen pikkuneliön ja ison neliön.

Haastattelija: *Jos sinun pitäisi piirtää ratkaisusi, miltä se näyttäisi?*
Pinja: *mä piirtäisin tähän jonkun kokoisen neliön eka tähän vaikka yhden sivun pituus ois vaikka viis senttiä… noin ja sitten täytyis suunnitella se pikkuneliö ja sitten jakaa se sillä pikkuneliöllä että kuinka monta sillä sais niitä.*

Sisäkkäiset neliöt. Petrin ja Emman mielestä tehtävässä ei muodostunut ruudukkoa. Ha ajattelivat neliöiden olevan toistensa sisällä (Liite 7).

Petri: *No. mää käytän tätä viivotinta, koska eihän siitä muuten tulis mitään. No se vois olla vaikka...No joo, kuitenkin se vois olla tämmönen viistoista senttimetriä niinkun tää on tässä*
No sit vois vaikka laittaa niinku seuraavan neliön vois laittaa näin lähelle, niin se olis tosi vaikeeta ratkaista..Siinä vois olla niin monta mahollista.

Emma: *Mä piirrän että öö kuinka monta niinkun sentin paikkaa on..*
Haastattelija: *Miten sinä ajattelet nämä?*
Emma: *No silleen niinku se menee jos laittaa yhden kuution sisälle niinku sitä yhden sentin pienemmän niin sinne mahtuu taas sillein jänskästi.. emmä tiiä.*
Haastattelija: *Hyvä, voisiko tuota miten muuten ajatella?*
Emma: *Jos vaikka yks senttistä ja neljä senttistä*
niinku näin toi on niinku yks senttistä, voinko mä piirtää ilman viivotinta.
Haastattelija: *Eli on tuommoinen iso ja kuinka monta sinne mahtuu tuommoista.*
Emma: *Sit sinne mahtuu kaks senttisiä ja kolme senttisiä*

Tähän asti esitellyissä tavoissa ymmärtää tehtävä lähtökohtana on ollut ajatus samankokoisista neliöistä. Emman ja Petrin mielestä kaikki isoa neliötä pienemmät neliöt olivat pikkuneliöitä, vaikka ne olivat keskenään erikokoisia. *Sisäkkäisten neliöiden* lisäksi Emma on luokiteltu myös *neliöruudukko*-luokkaan.

Tilkkutäkki. Jarnon ratkaisussa neliöiden ei tullut olla samankokoisia.

Haastattelija: *Miksi niitä mahtuu loputtomasti?*
Jarno: *No jaa no jos tässä on nyt neliö, mehän voidaan jakaa se neljällä neljään neliöön. Ja sitten se neliö, yks neljäsosa neliö, voidaan jakaa taas kerran*

neljään neliöön. Ja sitten siitä se yks voidaan taas jakaa neljään neliöön. Eli sen takia se jatkuu loputtomasti.

Jarnon käsitys muistutti tilkkutäkkiä. Koska jokainen neliö jakautui aina neljään neliöön, niitä mahtui loputtomasti sisäkkäin. Juuri tämän ajatuksen takia Jarnon mielestä tehtävässä riitti tietää, kuinka monta neliötä tarvittiin ja minkä kokoisia niiden tuli olla (s. 72–73).

Suorakulmio. Taina puhui neliöstä, johon mahtui sata pientä neliötä. Tästä huolimatta hän piirsi tehtäväpaperille suorakulmion. Hänen puheensa ja piirroksensa olivat ristiriidassa keskenään (Liite 7).

”Kuutioneliö”. Tero puhui tehtävää ratkaistessaan kerroksista.

Tero: *Mun ehkä pitäis piirtää se tähän. Noi nyt ei oo ihan neliön näköisiä..*
..mutta voidaan niinku kuvitella ett ois
Tämmönen, tässois iso, nää ois pikkuneliöitä.

Tero ilmaisi välittömästi halunsa piirtää. Piirosta katsoessa hänen ajatteluaan oli vaikea ymmärtää. Hän piirsi neliötä muistuttavan kuvioon, jossa oli kaksikymmentä pikkuneliötä. Seuraavaksi hän yritti piirtää tämän neliön päälle kerroksia. Lopulta hän merkitsi kuvaan 5x ja nuolen, joka osoitti yhtä kerrosta (Liite 7). Hän sekoitti neliön ja kuution toisiinsa.

Haastattelija: *Ajatteletko nyt kuutiota?*
Tero: *No eikös se neliö ookin sellainen vai pitääks se siinä vaiheessa tulla semmonen ihan littana?*

Teron mielestä neliö koostui kerroksista. Hänen mielestään neliö oli ”littana” eli matala.

Muut. Pekan ja Semin mielikuvat eivät ilmenneet. Pekka ei tuottanut puhetta. Semi ei tiennyt, miten hän piirtäisi tehtävän.

Haastattelija: *Miltä tuo sinun mielestä näyttäisi, jos sinun pitäisi piirtää se?*
Semi: *En mää tiiä.*

6.2.3 Ratkaisumenetelmät

Ratkaisutapoihin muodostui analyysin jälkeen viisi luokkaa:

1. Kertolasku: Oppilas käytti kertolaskua ratkaisumenetelmänä.
2. Yhteenlasku: Oppilas laski tehtävän yhteenlaskulla.
3. Kokeilemalla ratkaisuun: Oppilaan ratkaisu perustui kokeiluun.
4. Ei ratkaisua: Oppilaan mielestä tehtävään ei ollut olemassa vastausta tai sitä ei voinut ratkaista.
5. Mikroskooppi ja arviointi: Oppilas ehdotti mikroskooppia apuvälineeksi tai pyrki ratkaisemaan arvioimalla.

En pystynyt määrittelemään Marjan, Pekan ja Semin tapaa ratkaista tehtävää. He eivät puhuneet ratkaisumenetelmistään ääneen. Tämän johdosta ratkaisumenetelmien luokittelu muodostui viidentoista oppilaan haastattelun perusteella. Erot ratkaisutavoissa johtuivat osittain tavasta ymmärtää koko tehtävä. Esimerkiksi Jarnon aikaisemmin esitelty tilkkutäkiksi nimetty mielikuva tehtävästä suuntasi hänen tapaansa ratkoa tehtävä. Vaikka oppilaat ymmärsivät tehtävän samalla tavalla, heidän tavoissaan ratkaista se oli silti eroja.

Kertolasku. Taina kertoi omasta ratkaisustaan seuraavasti:

> Taina: *Sitten kun tiedetään tää neliön koko niin sitten vaan lasketaan kuinka monta pikkuneliötä mahtuu sinne. Jos tää neliö ois vaikka kymmenen senttiä ja tää ois kymmenen senttiä. Niin silloin se ois sata. Se yksi ruutu olisi yhden senttimetrin. Siihen mahtuis niitä sata kun tässä kymmenen (näyttää kynällä, että yhden neliön sivuun mahtuu kymmenen pikkuneliötä).*

Taina määritteli aluksi, minkä kokoinen hänen neliönsä oli. Tämän jälkeen hän kertoi vastauksen sekä perusteli, miksi se oli hänen mainitsemansa sata. Ennen vastauksen ääneen sanomista Tainan oli täytynyt laskea nopeasti päässään 10 × 10. Hän ilmoitti tuloksen niin nopeasti, että hän ei olisi samassa ajassa ehtinyt laskea tehtävää päässään yhteenlaskulla. Ennen kertolaskua Taina oli päättänyt yhden pikkuneliön olevan 1 cm × 1 cm kokoinen ja että niitä mahtuu kymmenen yhteen riviin.

Mervi kertoi tarkasti, kuinka hän ratkaisisi tehtävän.

Mervi: *Mä lasken sitten esimerkiksi kannattaa laskea sillä lailla laskee ensin paljon tässä yhdessä rivissä on neliöitä ja sitten paljon tässä on ja sitten kertoo (eli kuinka monta pysty ja vaakarivissä on neliöitä). Siihen tulee seitsemän. Eli yhteensä tähän tulis 49 neliötä.*

Tätä ennen Mervi oli määritellyt Tainan tavoin neliön koon. Hänen neliönsä koko oli 14 cm × 14 cm. Mervin ja Tainan ratkaisutavat olivat samanlaiset. Heidän välillään oli eroa siinä, että Mervi kertoi ääneen asiat, jotka Taina laski nopeasti päässään. Tämä ei tarkoita sitä, että jompikumpi osaisi ratkaista ongelman toista paremmin. Mervi ilmaisi omia ajatuksiaan paremmin. Tiina ja Juho laskivat kertolaskulla, kuinka monta neliötä isoon neliöön mahtuu.

Haastattelija: *Miten ratkaisisit sen?*
Tiina: *Mä laskisin että 1,2,3,4,5,6 ja 1,2,3,4,5,6. Sitten 6 6 on 36.*

Haastattelija: *Miten lasket tästä?*
Juho: *Tälleen ensin mä lasken 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 sitten 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 joo nyt siinä on sata.*

Tiinan ja Juhon tavat poikkesivat Mervin ja Tainan tavoista siten, että he laskivat luettelemalla, montako pikkuneliötä pysty- sekä vaakarivissä on. Taina ja Mervi laskivat nämä nopeasti päässään käyttäen luultavasti jakolaskua päätellen heidän nopeista ratkaisuistaan. Kalle piirsi 4 cm × 4 cm kokoisen neliön.

Kalle: *Jos ne pikku neliöt ois niinku senttimetrin kokoisia, niin se menis sitten niinku…(jatkaa piirtämistä) kahdeksan.. eikun 16.*
Haastattelija: *Miten sää sen laskit?*
Kalle: *Jokaisen erikseen tai sitten vois laskea että 4×4.*

Kallen mielestä tehtävän pystyi laskemaan joko yhteenlaskulla tai kertolaskulla. Koska Kallen piirtämä neliö oli pienempi kuin Tiinan, Tainan ja Mervin, yhteenlaskutapa oli kohtuullisen nopea tapa ratkaista tehtävä. Isompien neliöiden kohdalla se olisi ollut hidas menetelmä. Tero käytti kertotaulua kaksi kertaa, koska luuli kyseessä olevan neliön sijaan kuutio.

Haastattelija: *Miten laskisit tästä, montako niitä on?*
Tero: *Noo esimerkiksi.. koska tässä on monta kerrosta yhdellä kerroksella, niin silloin siit tulis 60.*
Haastattelija: *60?*
Tero: *Tässä on 20, sitten 3 kertaa se.. 20, tulee 60.*
Haastattelija: *Miksi kerrot sen kolmella?*
Tero: *Sen takia koska siinä on monta kerrosta niitä (näyttää kynällä ylöspäin*

tasosta).

Yhteenlasku. Emma kertoi vastauksen heti. Koska hänen ruudukkonsa oli pieni, oletin hänen laskevan tehtävän Kallen tavoin yhteenlaskulla.

Haastattelija:	Jos sää ratkaiset sen tällein, mikä on vois olla vastaus?
Emma:	Neljä.

Terhi laski kahden välein kuinka monta pikkuneliötä isossa neliössä oli.

Haastattelija:	*Miten laskisit tuosta, kuinka monta neliötä siinä on?*
Terhi:	*Neljä, kahdeksan, kaksitoista kuusitoista (Terhi laskee rivi kerrallaan yhteen).*
Haastattelija:	*Laskisit tavallaan jokaisen erikseen.*
Terhi:	*Mmm, tai voinhan mää laskea silleen neljä kertaa neljä.*

Terhi käytti ensin yhteenlaskua. Tämän jälkeen hän totesi, että tehtävän voisi laskea myös kertotaululla. Kalle ehdotti samat kaksi laskutapaa aikaisemmin (s.80). Veikko laski pikkuneliöiden lukumäärän soveltamalla kolmen kertotaulua.

Haastattelija:	*Miten se ratkeaa lopullisesti?*
Veikko:	*No sitten kun jos tekee ihan hirveen tarkkaa työtä, vielä lopuks mittaa että onko kaikki samassa (mittasuhteessa?). Sen jälkeen se ratkee, sitten vaan laskee monta niitä on.*
Haastattelija:	*Miten lasket ne (neliöt)?*
Veikko:	*No jos joka rivissä on vaikka kymmenen niin kyllä mä sitten aina kerralla yhden mutta jos ei oo niin sitten mä varmaan sillä kolmen kertotaululla, se on aika nopee.*
Haastattelija:	*Kolmen kertotaululla, eli miten?*
Veikko:	*Siis niinku kolme kuus yhdeksän, eli mä en niinku rupeis tällein yksitellen laskeen koska niitä mahtuu ihan hirveesti. Jos saadaan vielä tietoon se kuinka iso, sehän voi olla vielä isompi kuin tääkin (ison neliön koko).*
Haastattelija:	*Lasket niin kuin joka rivin erikseen?*
Veikko:	*Joo.*

Veikon ratkaisutapa riippui siitä, kuinka monta neliötä oli yhdessä rivissä. Jos niitä olisi ollut kymmenen, hän olisi käyttänyt yhteenlaskua ratkaisumenetelmänä. Jos niitä olisi ollut joku muu lukumäärä, hän olisi käyttänyt kolmen kertotaulun tuloksia apunaan. Jälkimmäisessä tapauksessa hän oikeastaan laskisi luettelemalla pikkuneliöiden määrän.

Kokeilemalla ratkaisuun. Pinja ja Joona halusivat selvittää pikkuneliöiden määrän kokeilemalla ja vertaamalla.

Pinja: *Ja sitten tota että..niin sitten me tarvittas varmaan se neliö, niinku silleen et sen vois kokeilla.*

Joona: *No eka sillein että siihen tulis iso neliö tähän näin. Siihen pitäis se tähän voi'aan varmaan vai tarvita ne pikkuneliöt että se pitää verrata että kuinka paljon niihin mahtuu.*

Aikaisemmin Pinja piirsi tilanteesta pienen neliön sekä ison neliön erikseen. Konkreettisesti kokeilemalla ja isoon neliöön vertaamalla oli mahdollista selvittää, kuinka monta pientä neliötä isompaan mahtuu. Tapa vaikutti hitaalta. Pinja jatkoikin pohdintaansa.

Pinja: Silleen vaikka että.. jos se pikku neliö ois vaikka sentin niin tän vois jakaa silleen sentin silleen leveesti ja jakaa silleen sentin ruudukkoon et yks ruutu ois sentin.. et näkyis kuinka monta semmosta neliötä sinne mahtuu. ja kuinka monta senttiä siihen ruudukkoon menee.

Pinja oivalsi, että pienistä neliöistä muodostuisi ruudukko, josta olisi helpompi laskea vastaus kuin selvittää se kokeilemalla. Aikaisemmin esimerkiksi Tiina ja Mervi muodistivat ruudukon välittömästi mielessään (s. 74–75). Pinja päätyi samaan ymmärrykseen mutkan kautta.

Tehtävään ei ole ratkaisua. Jarno ei löytänyt tehtävälle ratkaisutapaa.

Jarno: *No mun mielestä toi on sellainen jota ei voi oikein ratkaista, koska loppujen lopuksi niitä pikkuneliöitä mahtuu siihen loputtomasti. Että sillä lailla se on vähän mahdoton.*

Jarnon ajattelua selitti hänen tapansa ymmärtää tehtävä *tilkkutäkkinä* (s. 77–78). Anna jätti tehtävän ratkaisun avoimeksi.

Anna: *Tollasia siihen mahtuis neljä.. sitten jos niiden pitää olla pienempiä, niin sitten niitä voi mahtua vaikka kuinka monta.*
Haastattelija: *Kuinka monta niitä voisi mahtua?*
Anna: *No niitä voi mahtua niinku loputtomiin, mutta ei niitä niinku ihminen voi kaikkia nähdä.*

Annan piirtämästä esimerkistä tehtävän pystyi ratkaisemaan. Jos neliöt voivat olla kuinka pieniä tahansa, voi niitä Annan sanoja mukaillen mahtua loputtomasti ison neliön sisälle. Samoin pohtivat Joona ja Pinja.

Haastattelija: *Montako niitä voisi mahtua?*
Joona: *Ehkä kaksikymmentä, tai ehkä jopa tuhat nimittäin ne neliöt voi olla näin pieniä tai näin pieniä (piirtää paperille pieniä neliöitä) Silleen että ne voi olla vaikka tollasia (näyttää piirtämäänsä todella pientä neliötä).*
Haastattelija: *Jos ne ovat tuollaisia, niin pystyykö sitä laskemaan?*
Joona: *Ei, se tulee ihan täyteen sen vois vaan värittää tällein mustaksi. Se ois siinä mutta se ois mahoton laskea.*

Mikroskooppi ja arviointi. Petrin mielestä pikkuneliöt olisivat niin lähellä toisiaan, että ratkaisuun tarvittaisiin mikroskooppi.

Petri: *Ja sitten on se kyllä kuitenkin aika vaikeeta tehdä se jos pitäis niin kun miten monta mahdollista koska niitä on niin älyttömän paljon jos sanois jos puhutaan vaikka jos ois vaikka ois millin tarkkaa tai sentti tai niin poispäin välissä olis. Se olis kyllä ihan älyttömän vaikeeta jos olis puol millin tarkkaa pitäis tai pitäis puol millin tarkkaa tehdä.*
Haastattelija: *No voiks tota sun mielestä ratkaista?*
Petri: *Kyllä oikeestaan ton voi, mutta siihen tarvittais varmaan aika tosi hyvä mikroskooppi.*

Petrin mukaan tehtävä ei ollut mahdoton. Hänen mielestään neliöt olivat sisäkkäin tietyllä etäisyydellä toisistaan. Jos neliöitä piirtää sisäkkäin useamman ja lähestyy keskustaa, neliöt eivät enää mahdu sisäkkäin päätetyn etäisyyden päähän toisistaan. Näin ajateltuna tehtävä olisi mahdollista ratkaista, ja neliöt voisi laskea kuvasta, kuten Petri olisi tehnyt.

Petri: *Laskisin niinkun täältä yks, kaks kol sitten toi ois vaikka neljäs ja tossois viides mää voisin laittaa jonkun merkin vaikka jonkun tällasen tuohon noin ja sitten tästä eteenpäin taas viis ja niin poispäin. Helpompaa laskee.*
Haastattelija: *Oisko tossa ollut mitään muuta tapaa, jolla ton vois ajatella, ton tehtävän?*
Petri: *No kyllä sen silleen päässä voi laskee, kunhan antaa tarpeeksi tietoja. Miten pitkä se on ja sitten että miten monta silleen niin siinä kestäis kyllä aika kauan kuitenkin.*

Sarin mielestä tehtävän vastaus oli kaksi.

Haastattelija: *Miten päättelit tuon?*
Sari: *Mä mietin että jos ne on niinku sellaisia, jos ne on niinku sellaisia vähän litteempiä, niin sitten mahtuis kaks jos ne ois vähän pienempiä..*

Sari arvioi, että pienempiä neliöitä mahtuisi kaksi isomman neliön sisälle. Hänellä ei ollut selvää ratkaisumenetelmää tehtävään. Jonkin verran hän perusteli ratkaisuaan pienen neliön koolla. Hänen piirtämässään kuvassa (Liite 7) neliöt eivät olleet neliön muotoisia. Jos neliöt piirretään litteämmiksi (jolloin pienennetään neliön korkeutta mutta ei muuteta leveyttä), ne eivät enää ole neliöitä vaan pieniä suorakulmioita. Näyttäisi siltä, että Sarin neliökäsitys olisi puutteellinen.

6.3 Ratkaisutavat erilaisissa tehtävissä

Viimeiseen analyysivaiheeseen arvoin kymmenen oppilasta (Pekka, Tero, Jarno, Tiina, Mervi, Veikko, Marja, Taina, Kalle ja Pinja), joiden haastattelut litteroin kokonaan auki. Luin jokaisen arpomani oppilaan haastattelun uudelleen läpi. Pyrin selvittämään, löytyykö yksittäisen oppilaan ratkaisutavoista toistuvaa ratkaisumenetelmää tai ajattelumallina. Tässä analyysivaiheessa tarkastelin Kuutio 1-Janne ja Heikki-, Kuutio 2- ja Kolmio-tehtäviä (Liite 2) . *Tietojen yhdistelyn*- sekä *ei perusteita* -luokat periytyivät Kuutio 1-tehtävästä (Liite 2) tähän luokitteluun mukaan. Analyysin tulokset jakautuivat kahteen pääluokkaan.

1. *Tietojen käyttötavat*: Tietojen käyttötavan luokkaan kuuluivat erilaiset tiedon sovellustavat sekä myös tiedon soveltamatta jättäminen. Luokka sisälsi neljä alaluokkaa: *tietojen yhdistely, ei perusteita, yksi ratkaisu, epäolennaisuudet*.
2. *Mallintaminen*: Mallintamiseen sisällytin kaikki erilaiset tavat, joilla oppilaat pyrkivät selventämään omaa ratkaisuaan. Pääluokkaa sisälsi kolme alaluokkaa: *mielessä mallintaminen, perusymmärrys, apuväline.*

TAULUKKO 2. Mallintaminen ja tiedonkäyttö ongelmatehtävissä

	Mallintaminen			Tietojen käyttötavat			
Oppilas	Mielessä mallintaminen	Perus ymmärrys	Apu väline	Tietojen yhdistely	Ei perus teita	Yksi ratkaisu	Epäolen naisuudet
Pekka	2	0	0	0	8	0	3
Tero	2	0	1	0	0	0	0
Jarno	4	0	0	2	0	0	2
Tiina	0	0	0	0	0	3	0
Mervi	4	0	2	1	0	0	0
Veikko	3	0	3	1	0	1	3
Marja	4	0	0	3	2	0	0
Taina	0	0	0	2	2	2	0
Kalle	0	4	1	1	0	0	0
Pinja	5	0	0	0	0	0	0
Yht	28	4	4	3	12	3	9

Taulukossa olevat luvut kertovat, kuinka monta kertaa oppilas käytto kyseistä luokkaa. Selvästi eniten oppilaiden vastauksissa toistui mallintaminen. Ainoastaan Taina ja Tiina eivät mallintaneet yhtään kertaa. Tietojen perusteeton käyttö esiintyi kahdeksan kertaa. Tämän luokan kohdalla on todettava Pekan vastausten kuuluneen siihen kuusi kertaa. Kaikki Pinjan vastaukset sisältyvät *mielessä mallintaminen*-alaluokkaan. Samaa luokka käyttivät eniten Jarno, Mervi ja Marja. Veikko ja Pekka kiinnittivät huomiota epäolennaisiin tietoihin kolme kertaa. Taulukkoon merkitsin ainoataan ne luokat, jotka esiintyivät vähintään kaksi kertaa.

6.3.1 Tietojen käyttötavat

Ei perusteita. Pekan, Tiinan, Marjan ja Tainan haastatteluista löytyi *ei perusteita*-luokka. Erityisesti Pekan vastauksista kyseinen luokka löytyi useamman kerran. Oppilaat eivät osanneet selittää, miksi tehtävän ratkaisu ei ollut mahdollinen. Kuutio 2- tehtävässä Taina loi säännön, jonka mukaan hän ratkaisi tehtävän eri kohdat. Kun hänen sääntönsä petti, tapahtui seuraavaa:

Taina:	*Eikä tästäkään tuu.*
Haastattelija:	*Miksi ei tule?*
Taina:	*No ei siitä vaan.. emmä osaa sitä selittää.*

Taina päätteli aikaisemmin, että kuviossa piti olla kuusi ruutua. Tilanteessa jossa sääntö ei pätenyt, hän huomasi että kuviosta ei muodostunut kuutiota. Hän ei osannut täydentää eikä perustella sääntöään. Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2) Taina jätti aikaisemmin perustelun samaan tapaan kesken, kuten myös Tiina ja Pekka (s. 64–65). Kuutio 1-tehtävän f-kohdassa (Liite 2) Pekka oli sitä mieltä että tehtävän voi ratkaista. Hän ei osannut tehdä sitä, joten hänellä ei ollut perusteita tehtävän ratkaisulle (s. 68) Jos oppilas ei tiedä, mitä tehtävän käsitteillä tarkoitetaan, hän ei sitä todennäköisesti osaa ratkaista. Aikaisemmin totesin, että halkaisijan käsite ei ollut tuttu kuin Tiinalle (s. 67). Marjalla ei osannut perustella omia vastauksiaan Kuutio 1-tehtävän e- ja f-kohdissa (s. 65, 68).

Epäolennaiset. Perusteettomien ratkaisujen lisäksi Pekka kiinnitti epäolennaisiin asioihin huomiota tai sovelsi tietoja perusteettomasti. Janne ja Heikki-tehtävässä (Liite 2) oppilaan tuli alleviivata tehtävänannosta ratkaisun kannalta tärkeät tiedot. Pekka ja Veikko perustelivat omia näkemyksiään seuraavasti:

Haastattelija: *Minkä takia alleviivasit nuo?*
Pekka: *Koska niissä kerrotaan ne matkat.*

Veikko: *Vesa asuu kilometrin päässä. Se olis tossa koulusta. Eli näin sen voisi niin kuin kuvata. Nuo ei oo niin tärkeitä että ovat tunteneet toisensa kolme vuotta kun kysymyksenä on kuinka kaukana Janne ja Heikki asuvat.*

Tehtävänannossa oli mukana ylimääräisiä välimatkojen määreitä, jotka eivät liittyneet ongelman ratkaisuun. Molemmat pojat kiinnittivät huomionsa matkaa ilmaiseviin tietoihin. Pekan ja Veikon lisäksi Jarno alleviivasi samat asiat. Janne ja Heikki -tehtävässä ratkaisuvaihtoehtoja olivat periaatteessa kaikki vastaukset suljetulla välillä 5–9. Pekka ja Jarno esittivät ratkaisuvaihtoehdoksi samaa lukua muuttaen sen yksikköä.

Haastattelija: *Sait tulokseksi viisi kilometriä. Voisiko vastaus olla jokin muu?*
Pekka: *No voishan siinä olla tietysti 5000 senttiä.eikun siis 5000 metriä ja 500 000 senttiä.*

Jarno: *Se asuu 1,2,3,4, viiden kilometrin päässä toisistaan.*
Haastattelija: *Voisiko tuossa olla jotain muuta ratkaisua?*
Jarno: *Voishan se olla sillein että 5000 metrin päässä toisistaan. tai 500 000 mm päässä toisistaan.*

Tämän lisäksi Pekka sovelsi annettuja tietoja väärin tekstin käyttöön liittyen Kuutio 1-tehtävän (Liite 2) a-kohdassa (s. 43–44). Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2) Veikko kiinnitti huomiota tilaan joka jää kuution kärkiin laitettaessa pallon sen sisälle. Samassa kohdassa hän ajatteli mahdollisimman pieniä palloja, vaikka tehtävänannossa pyydettiin laittamaan kuution sisälle mahdollisimman suuri pallo. (s. 63.)

Yksi ratkaisu. Taina ja Tiina eivät hahmottaneet tehtävän mahdollisia erilaisia ratkaisuja ja vastauksia. Kehotin molempia pohtimaan asiaa.

Taina: *Se on niinku yhdeksän kilometrin päässä toisistaan… Jos tossa ois se koulu ja sitten se asuu se Janne tossa toin ja tää välimatka on seitsemän kilomeriä ja jos se Heikki sitten asuu vaikka tässä näin ja tää välimatka on kaksi kilometriä niin sitten siitä tulee niinku yhdeksän kilometriä.*
Haastattelija: *Keksitkö muuta ratkaisua?*
Taina: *Öö..en (vastaa äkkiä).*

Haastattelija: *Keksitkö muuta ratkaisua?*
Tiina: *Noo en.*

Kuutio 1-tehtävän f-kohta (Liite 2) herätti paljon erilaisia ajatuksia oppilaissa. Taina ei yhden vastauksen jälkeen kyennyt pohtimaan, voisiko tehtävään löytyä muuta vastausta (s. 65). Ennen kuin Tiina totesi, ettei hän keksi Janne ja Heikki-tehtävään (Liite 2) toista vastausta, ajatteli hän seuraavasti:

Tiina: *Jos seittemästä miinustetaan kaksi kilometriä, silloin se ois niin, että ne asuis suoralla viivalla. Tässon Jannen talo ja tässon se Heikin talo ja tässon se koulu. Heikki ei voi asua täällä,, koska muuten sitä ei vois oikeestaan laskea koska se ois tää matka (kolmion hypotenuusa) eikä tää matka. Tää matka pitäis saada tietoon ja se on viisi kilometriä.*

Tiina huomasi, että Heikki voisi asua muuallakin. Kuitenkin hän jätti vaihtoehdon huomiotta. Näin ollen hän jätti havaitsemiaan tietoja käyttämättä. Kuutio 2-tehtävässä (Liite 2) Tiina määritteli säännön, jonka perusteella hän ratkoi tehtävää.

Tiina: *Tosta voi, koska siinä on kuus. Tästä voi, voi, voi (Tiina ympyröi kaikki, jossa on kuusi neliötä.).*

Tiina ei mallintanut tehtäväänsä mielessään eikä testannut sääntöään. Tämän vuoksi hän ei huomannut säännön puutteellisuutta. Samaan tapaan kuin Janne ja Heikki-tehtävässä (Liite 2) Tiinalta jää olennaisia asioita huomaamatta myös Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (s. 64). Kuutio 1-tehtävän f-kohdassa (Liite 2) Veikko määritteli oman käsityksensä halkaisijalle. Hän ei soveltanut määritelmäänsä millään tavalla (s. 67).

Tietojen yhdistely. Taina ja Mervi pystyivät yhdistämään tietoja toisiinsa ja muodostamaan niistä käsitteitä. Kolmio-tehtävässä (Liite 2) molemmilla oli selvä mielikuva siitä, mitä suorakulmion piiri tarkoittaa.

Taina: *Sen piiri on 26 senttimetriä. Ja tota niin täällä keskellä on neliö suorakulmio ja sen pinta-ala on 12 senttimetriä.*
Haastattelija: *Miten päättelit tuon?*
Taina: *Jos tää on niin kuin kolme ja tää neljä niin neljä kertaa kolme on 12 senttimetriä ja sitten sen piiri ois niinkun 14 senttimetriä.*

Mervi: *Tästä kuviosta voi ainakin päätellä tän piirin pituuden. Ja sitten tästä.. voi päätellä piirin tän neliön mikä on täällä sisällä.*

Tytöt eivät olisi kyenneet edellä kuvatulla tavalla soveltamaan kolmiossa annettuja tietoja, jos he eivät olisi sisäistäneet käsitteitä piiri ja pinta-ala. Lähes kaikki muut oppilaat luettelivat vastaavassa kohdassa yksittäisiä tietoja siitä, kuinka pitkiä kolmion sivut olivat. Taina ja Kalle yhdistivät tehtävässä annettuja tietoja Kuutio tehtävän (Liite 2) a-kohdassa (s. 61–62). Jarno yhdisti tietoja saman tehtävän c- ja d-kohdissa (s. 62).

6.3.2 Mallintaminen

Mallintamiseen liitin tässä tutkimuksessa tilanteiden mittasuhteiden ja muotojen havaitsemisen. Myös apuvälineen tai muun vastaavan menetelmän käyttö kuului mallintamiseen. Näiden keinojen avulla oppilas tavoitteli tilanteen parempaa hahmottamista mielessä.

Apuväline. Tero, Veikko ja Kalle puhuivat keinoista, jotka helpottaisivat heidän tehtävänsä ratkaisua. Teron kohdalla kysymykset toimivat apuvälineenä Kolmio-tehtävässä (Liite 2):

Tero: *No sen alasivun pituus on kymmenen ja yläsivun on 11 senttimetriä pituus ja se on korkee tuota viisi senttimetriä ja tuota…emmää muuta tiedä.*
Haastattelija: *Keksikö, kuinka paljon on tuosta pisteestä tuonne?*
Tero: *Se ois kuus senttimetriä.*
Haastattelija: *Miten päättelit?*
Tero: *Koska tässä menee neljä ja tää nyt on kymmenen. Ja neljään plussataan kuus tulee kymmenen.*

Ennen tätä Tero oli todennut, että hän ei keksi enää muuta. Kysymysten avulla hän osasi kertoa lisää. Vastaavassa kohdassa Kallea kysymykset eivät auttaneet. Hän kehitti itselleen toisenlaisen apuvälineen.

Haastattelija: *Keksitkö muuta?*
Kalle: *Noo…Tästä tähän ja tästä tähän.. Ne vois ratkaista viivoittimella.*

Kalle ei osannut soveltaa tehtävässä annettuja tietoja Teron tavoin. Hän otti käyttöön omalle tasolleen sopivan menetelmän. Veikko ilmaisi, että kysymysten avulla hän pystyisi kertomaan enemmän kolmiosta.

Veikko: *No kun ei oo mitään kysymyksiä niin ei voi niinku oikeen päätellä mitään. Jos ois jotain kysymyksiä niin silloin vois päätellä jotain..*

Kysymysten avulla Veikko osasi suunnata huomionsa tiettyyn asiaan. Kallen tavoin Veikko valitsi ratkaisutavaksi viivoittimella mittaamisen.

Haastattelija: *Entäs tälle (osoitan pätkää joka kaksi cm, ”yläkolmiossa”)*
Veikko: *No en mä sillekään oikeen osaa sanoa muuta kun se vois olla kaksi senttimetriä (katsoo viivoittimella ”ohimennen”). Kun tossa on toi yhteinen mitta viisi. Tää ois niin kuin kolme..*
Haastattelija: *Mistä tiedät että se on kolme?*
Veikko: *En mä tiedä mut mä päättelisin että se on. Nuokaan ei oo taaskaan samasta kohdasta (puolesta välistä) katkastu.*

Veikko päättelyketju alkoi sen jälkeen, kun hän oli ensin mittaamalla selvittänyt välin pituuden. Veikko ja Mervi toivoivat kuutio 1-tehtävän g-kohdassa (Liite 2), että saisivat ratkaista tehtävän tarkastelemalla todellista kuutiota (s.51–52). Seuraavassa katkelmassa esitän Mervin ajatuksia Kuutio 2-tehtävässä (Liite 2).

Mervi: *Tätä ei voi taittaa millään kun tässä näitä kuvioita tällein vierekkäin, niin sitten se ei voi olla tästä ei voi saada kuutiota enää. Mutta jos ne ois tällein erikseen niin sitten niistä vois saada kuution.*

Mervi ajatteli, että jos yhdestä vaihtoehdosta taittelisi kuution, silloin muista ei enää pystyisi taittelemaan kuutiota. Mervin ajattelun mukaan kaikista kuutiomalleista ei pystynyt yhtä aikaa muodostamaan kuutioita. Hän ajatteli aluksi, että kuutiomallit ovat paperilla, eikä niitä saisi ”irrottaa” toisistaan. Jos yhdestä olisi taitellut kuution, ei muita olisi ollut mahdollista taitella. Myöhemmin Mervi päätteli mallintamalla, kuinka kuutiot muodostuivat (s. 90–91).

Mielessä mallintaminen. Neljä oppilasta (Marja, Mervi, Tero ja Veikko) kiinnitti Janne ja Heikki-tehtävässä (Liite 2) huomiota mittakaavaan. Heille oli tärkeätä, että heidän piirtämässään kuvassa asiat sijaitsivat oikeassa suhteessa toisiinsa. He määrittivät etäisyydet suurin piirtein, tai hyvinkin tarkasti viivoittimen mittoja hyväksi käyttäen. Tämä kertoi oppilaiden yrittävän hahmottaa asioiden välisiä suhteita.

Haastattelija *Miksi pyyhit toisen talon pois?*
Marja: *Koska täällä oli niin kuin seitsemän kilometriä ja täällä kaksi. Se oli melkein samanpituinen.*

Mervi: *Ja sitten kuviteltas nyt vaikka että yks senttimetri olis yks kilomeri.*

Tero: *Täällä on seitsemän, tässä on kaks… ja tota… (mittailee matkaa kädellä, sormien välillä) suurinpiirtein*

Veikko: *Tässä ois niin kuin Jannen koti vaikka tällanen ois se Jannen koti. Sitten otetaan vaikka seitsemän senttimetriä niinse niinkun on niinkun seitsemää* *kilometriä vastaa nyt tässä mittakaavassa.*

Kuutio 2-tehtävässä (Liite 2) Tero, Veikko, Marja, Mervi, Pinja, Jarno ja Veikko mallinsivat kuution rakentumista mielessään. He käyttivät kuvaa tai omia käsiään apuna tilanteen hahmottamiseen. Kysyin Terolta ja Veikolta tehtävän ratkaisun yhteydessä heidän käsityksiään kuutiosta.

Tero: *Tää siirretään tähän ja tää siirretään tähän…*
Haastattelija: *Muistatko, mikä se kuutio oli?*
Tero: *Kuutio on niinku semmonen neliön tapanen. Se on vähän niinku semmonen mikä siinä ekassa tehtävässä oli semmonen, Tästä saa, tähän tulee kaks kerrosta päällekkäin… ei tulekaan.*

Neliö-tehtävässä (Liite 2) Tero kertoi aikaisemmin (s. 78) käsityksensä kerroksista rakentuvasta *kuutioneliöstä*. Myös Kuutio 2-tehtävässä (Liite 2) Tero laati ruuduista kuutioneliötä, joka muodostui kahdesta neljän ruudun muodostamasta neliöstä. Tehtävässä oli mahdollista taitella kuutio leikatuista malleista. Teron tapa ymmärtää tehtävä selvisi, kun hän näytti, miten siirtäisi leikatusta mallista kuution neliöiden palasia. Koska missään tehtävän vaihtoehdoista ei ollut tarvittavaa kahdeksaa neliötä, tehtävän ratkaisu ei onnistunut. Veikon ajatus oli hieman erilainen kuin Teron.

Veikko: *Kuutio on niin kuin kolmiulotteinen neliö.. tuleeks kuutio tässä niinku ei olla kolmiulotteisesti niin että tämä täyttyis, tämä, ja tämä ja tämä täyttyis jollain siirrolla. Sitäkö se tässä tarkoittaa koska eihän se muuta voi silleen tarkoittaa kun.. … toi menis vaikka tohon.. tähän.. tonne.. ei tästäkään tuu ihan ei tuu aika lähellekään ihan kun kaks jää.. sitten tästä, ei tuu tästäkään.. ei tuu mistään sitten.. ei tuu.*

Veikon kuutio koostui yhdeksästä ruudusta, jotka muodostavat neliön (Liite 8). Näitä ruutujen muodostamia neliöitä olisi pitänyt olla enemmän. Tämän ajatuksen takia Veikko ei pystynyt ratkaisemaan tehtävää. Marja, Mervi, Pinja, Pekka ja Jarno ajattelivat kuution nousevan tasosta. He puhuvat katoista, seinistä ja sivupaloista.

Marja: *No jos tuon laittaa tuohon ylös (osoittaa kahta neliötä) ja sitten tää menee siihen päälle niin siihen tulee kuutio (näyttää käsillä).*

Mervi: *Esimerkiksi tästä kakkosesta ei voi saada, koska tää alaosa tässä jää tässä tyhjäks. Tästä ykkösestä taas vois saaada koska täällä on se alaosa.. Sitten .. tästä kolmosestakaan ei mun mielestä voi saada, koska siinä on liikaa näitä neliöitä ja niinkun ihan väärissä paikoissa. Ja tästä nelosesta ei voi mun mielestä sen takia saada koska tässä on näitä neliöitä niin paljon peräkkäin, että siitä ei voi saada. Sitten tästä vitosesta voi saada koska tässä on taas tää, tämä kuvio, mikä on tässä kakkosessa ja täällä on se pohja. .. ja sitten* *tästä kutosestakaan ei voi saada koska siinä oli näitä tämmösessä neliömuodossa.*

Pinja: *Tän voi mun mielestä rakentaa.*
Haastattelija: *Miksi?*
Pinja: *Jos tän taittaa sivulle, tän taittaa, ja tää on pohjapala ja tästä tulee katto. Tätä ei voi ainakaan rakentaa tätä nelosta.. no sen takia koska eu tuu tänne ei toiselle puolelle tätä sivupalaa. Tulee ylimääräinen kattopala.*

Jarno: *Tää ykkönen on oikein. Jos tässä nyt on se yks keski. Siitä taitetaan tohon, tohon, tohon ja täällä on kaks sellaista jotka voi olla ne ja tuonne (näyttää käsillään kuinka taittuu, toinen käsi pohjana). Sitten tää kolmonen… onkin vähän vaikeempi. Ei se oo niinku mahollinen. Sen mä tiedän tosta. Se on niinku kulmasta kiinni. Se on sen takia vähän.. se niinku .. ootas se tulis näin.. mites se kääntyy.. se kääntyis noin../näyttää samalla käsillään).*

Pekka: *No jos tämän kääntää tähän siitä tulee yks seinä, tämän tähän, yks seinä, tämän siihen päälle siitä tulee katto ja tästä yks seinä ja tämä jää yli. Ja ei oo yhtä seinää. Siitä tulee lattiaton tai katoton.*

Mervi ja Pinja (s. 51, 55–57) mallinsivat tehtäviä aikaisemmin Kuutio 1-tehtävässä kohdissa e ja g (Liite 2). Marjan mallinsi (s.50) kohdassa Kuutio1-tehtävän g-kohdassa (Liite 2). Tasosta nousemisen lisäksi Marja, Pekka ja Jarno huomasivat, että Kuutio 2-tehtävässä (Liite 2) kaksi avattua kuutiomallia olivat keskenään samanlaiset. He käänsivät kuviot mielessään ja huomasivat niiden yhtenevyyden.

Jarno: *Vitonen on täysin sama kuvio kuin ykkönen eli on.*

Pekka: *Ei tästäkään, tämä on taas sama (kuin ykkönen)*

Haastattelija: *Minkä takia se käy?*
Marja: *Se on niinku sama kuin toi ykkönen mutta toisinpäin.*

Janne ja Heikki-tehtävässä (Liite 2) vastausvaihtoehtoja oli useita. Mervi ja Pinja huomasivat ne. He osasivat kertoa, mistä kyseiset vaihtoehdot seurasivat.

Haastattelija: *Sait vastaukseksi viisi kilometriä. Voisiko olla mahdollista saada mitään muuta vastausta?*
Mervi: *No vois jos Janne asuis tolta koululta seitsemän kilometrin päässä esimerkiks tässä suunnassa 7 kilometrin päässä. Eli jossain tässä kohti. Sitten tää ois ehkä eri pituinen kuin se viisi kilomeriä.*
Haastattelija. *Mikähän se välimatka olisi suurimmillaan?*
Mervi: *No sitä on vähän vaikea sanoa, kun se voi asua niin monessa suunnassa., Mutta ehkä se enintään ois joku kymmenen kilometriä.*
Haastattelija: *Miten päättelit sen?*
Mervi: *Sen vois aatella sillain että jos se asuis tässä vaikka täällä (näyttää kuvasta Jannen kotia). Niin sitten se asuisikin ehkä suunnilleen jos tässä nyt ois se se seittemän kilometriä niin se asuis mahollisimman kaukana ehkä. Niin sitten*

tää ois yheksän kilometriä koska täs ois se kaks kilometriä ja sitten täs ois se seittemän, kun ne lisätään tulee yhdeksän. Mut sitten siitä vielä on vähän kun se asuu tässä yläviistossa ja tässön tää koulu vielä sitten.

Haastattelija: *Miten päättelit?*
Pinja: *Silleen jos ne lasketaan yhteen … mutta oli se niinku periaatteessa oikein koska.. niin joo.. ei on se yhdeksän kilometriä, jos se Heikki asuu täällä koulun toisella puolella mut jos se asuu täällä Jannen puolella niin siinä ois viis.. sitä ei tiiä kummalla puolella se asuu. Tässois niinkun neljä kilometriä.. jos ne asuis samalla puolella, silloin niitten välimatka ois viis kilometriä. Siinä on periaatteessa kaksi tapaa. Se on vähän monimutkainen, kun ei tiedä asuuko Heikki Jannen puolella sieltä koulusta katottuna vai siellä siellä toisella puolella. Sillon se on enemmän jos se asuu siellä toisella puolella.*
Haastattelija: *Onko muita vaihtoehtoja?*
Pinja: *Jos se menis tonne tai tonne sen vois periaatteessa laskea näin, mutta en mä sitten kyllä osais laskea (osoittaa että Heikki voisi asua koulusta missä suunnassa tahansa, ja että välimatka olisi silloin välimatka, joka ei mene koulun kautta).. ei sitä oikeen pysty, kun sen pitäis mennä silleen koulun kautta oudosti.*

Kolmio-tehtävässä (Liite 2) Veikko ja Pinja kertoivat omia mielikuviaan kolmioista.

Veikko: *Se ei oo niinkun normaalisti kolmiot on että niinku tonne menis viistoon yks vaan se on tonne se. mun mielestä normaali kolmio on (piirtää tasasivuisen kolmion) tällanen. Ja sitten mää ajattelen vähän sellaiseks epänormaaliks kolmioks vaikka sekin nyt on kolmio niin tällasta että..(piirtää suorakulmaisenkolmion) tää on vähän niin kuin ois tämän taiteltu silleen keskeltä kasaan.*

Haastattelija: *Keksitkö muuta?*
Pinja: *No siin on kolme kulmaa. Ja ei se nyt oikeestaan oo edes kolmio eiku on se kolmio, mutta se ei ole sillein näin(piirsi tasasivuisen kolmion).*

Molemmat tuumivat, ettei suorakulmainen kolmio ole normaali kolmio. Kun Pinja luetteli kolmiosta tietoja, hän arvotti niitä suhteessa toisiinsa.

Pinja: *No tää on ainakin tää kolmio on ainakin viis senttii korkee. Ja se on tollein leveydessä niin sanotusti kymmenne senttii. Sit se on noin niinku puolet on neljä senttii, no se ei nyt niinku ole kovin tärkee tieto. Sit se on suurin piirtein keskeltä kolme senttii korkee. Sit se menee tollein vinoittain ylöspäin, se on ykstoista senttii korkee. Se on niinkun yhden sentin korkeempi tai pitempi tuollein vinosti kuin tällein suorasta (Vertaa hypotenuusaa ja kantaa toisiinsa) Ja no nää nyt ei oo niinkään tärkeitä tietoja.*
Haastattelija: *Miksi?*
Pinja: *No kun ei sitä tarvi mitään täältä että kuinka pitkä se on. Kyllähän sen tietää tästä, että kyllä se voi olla neljä senttiä jos tähän piirtäis että yks,kaks,kol,nel. Ei se oo tärkeetä että missä kohin se on neljä senttiä, missä viis, missä kuus. Mutta se kokonaismitta että kuinka pitkä se on silleen kokonaan, se on tärkee. Ja sitten että kuinka korkee se on keskeltä, ei too ees keskeltä että.. ainakaan näköjään. Voi toi olla. Ei se nyt ole tärkeetä kun se ei ees oo keskeltä, että kuinka korkee se on siitä.*

Janne ja Heikki-tehtävässä (Liite 2) Pinja hahmotti tehtävän ratkaisun kannalta olennaiset asiat, koska hän havaitsi useita ratkaisuvaihtoehtoja (s. 92). Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2) Pinja ymmärsi pallon muodon vaikuttavan ratkaisuun (s. 56–57). Kolmio-tehtävässä (Liite 2) Pinja kiinnitti huomiota kokonaismittoihin jättäen turhat tiedot pienemmälle huomiolle. Samassa tehtävässä Jarno huomasi seuraavat asiat:

Jarno: *Ja sitten tässä on vissiin jotenkin vissiin laskettu sitä että kuinka monta neliötä saatais tai nelikulmiota saatais silla lailla että yritettäis täyttää se mahdollisimman isoks. Ja ykshän siitä on saatu, neljä kertaa kolme kokonen näköjään. Tostahan sitten kun me osataan niin sitten voi laskee näitten kulmat tästä, niitten asteet. Mutta mä en nyt ainakaan vielä osaa niitä laskea.*

Jarno ajatteli, että kolmion sisälle oli piirretty mahdollisimman suuri suorakulmio. Hän puhui myös kulmien suuruuden laskemisesta. Hän lienee nähnyt jonkun joskus tehneen niin. Jarno hahmotteli oman määrittelemänsä halkaisijan ja kuution särmien välisen kulmien kokoa (s. 67).

Perushahmotus. Kallella toistui neljä kertaa samanlainen tapa toimia Janne ja Heikki-, Kuutio 2- ja Kuutio 1-tehtävissä (Liite 2). Hän ajatteli ääneen ja esitti kysymyksiä, joihin hän itse vastasi. Hän oli ajatuksissaan oikeilla jäljillä, mutta ei vielä kyennyt jatkamaan päättelyketjujaan. Hänen ääneen kertomansa asiat osoittivat hänen osaavaan hahmottaa asioita oikein.

Kalle: *No oisko ne niinku viiden kilometrin päässä toisistaan. Niin no jos ne asuu niinku samalla suunnalla..*
Haastattelija: *Miten laskit tuon viisi kilometriä?*
Kalle: *No..hetkinen..niin no emmä tiiä nyt pystyykö sitä ton niinku tosta tietämään, voihan se asua vaikka täällä se Heikki silti se on kahden kilometrin päässä koulusta että..*

Kalle: *Tostakin vois (3) mutta noi niinku.. tai noi menis päällekkäin, mutta kyllähän siitä silti tulis kuutio.*
Haastattelija: *Miksi ajattelit aluksi, että tuosta tulee?*
Kalle: *No mää en nähnyt tota että toi jää auki. Koska muutenhan se menee kiinni. Paitsi niin no niin.. vaikka jos ajatellaan että noi on paperia niin silloin menis niinku päällekkäin osia joitain sivuja. Mutta oishan se siltikin kuutio.*

Kalle: *Niinku tää kuutio tai neliö pituus on 4 cm.*
Haastattelija: *Siis tämän yhden sivun pituus?*

Kalle: *Niin, ja myös tän oikeestaan (tarkoittaa vastakkaista sivua suorakulmiossa)*

Kalle: *Onko se halkaisija niinkun se leveys tai niinku? Ai niin se on se ympärysmitta se…*

7 POHDINTA

Tutkimukseni tarkoitus oli selvittää neljännen luokan oppilaiden matemaattista ajattelua geometristen ongelmien avulla. Kahta oppilasta lukuun ottamatta, oppilaat osasivat kertoa omasta ajattelustaan. He omasivat metakognitiivisia taitoja. Samaan tulokseen on päätynyt myös Pugalee (2001, 242) ongelmanratkaisun kirjoittamista koskevassa tutkimuksessaan. Vastakkaiseen tulokseen on päätynyt puolestaan Merenluoto (2003, 38) lukukäsitteeseen liittyvässä tutkimuksessaan, jonka mukaan lukiolaisilla ei välttämättä ole kovin paljon lukuihin liittyvää metakognitiivista ajattelua. Tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat pystyivät kertomaan omista käsitteistään, ratkaisutavoistaan, ratkaisua helpottavista tekijöistään ja tiedon käyttötavoistaan. Kertomukset täydentyivät oppilaiden tehtäväpaperiin tekemillä merkinnöillä. Näyttäisi mahdolliselta, että opettaja voi olettaa neljännen luokan oppilaan pystyvän kertomaan omasta ajattelustaan. Ero Merenluodon (2003) tutkimuksen tulokseen saattaa olla seurausta valitsemastani matematiikan alueesta tai tutkimusmenetelmästä. Merenluoto tutki matemaattista ajattelua lukukäsitteen näkökulmasta. Tässä tutkimuksessa ajattelua lähestyttiin geometrian näkökulmasta. Merenluoto (2003) päätyi päätelmäänsä metakognitiivisen ajattelun puutteesta, koska hänen tutkimukseensa osallistuneiden oppilaiden vastauksissa ilmeni, että lukuihin liittyvä käsitteellinen ja muodollinen tietämys oli varsin heikosti hallittua (Merenluoto 2003, 35). Tässä tutkimuksessa katsoin oppilaan omaavan metakognitiivisia taitoja, jos hän osasi kertoa omasta ajattelustaan (ks. Pugalee 2001, 237) huolimatta hänen tietämyksen tasostaan. Merenluodon (2003) tutkimuksessa metakognitioihin liittyi oppilaan käyttämien käsitteiden ja tietämyksen hallinta.

7.1 Tiedon käyttäminen ja soveltaminen

Tutkimuksella selvitettiin, mitä tietoja oppilas pystyy havaitsemaan ja käyttämään ongelmanratkaisutilanteessa sekä mitä tietojen käytöstä seuraa. Tehtävässä annettujen tietojen, kuvan ja tekstin, käyttäminen ei aiheuttanut ongelmia: ne huomattiin ja niihin viitattiin, mutta niiden soveltaminen ei onnistunut kaikissa tilanteissa. Tekstin käyttäminen tehtävänratkaisussa ei avannut tehtävän sisältöjä kunnolla. Kolme oppilasta tulkitsi tekstin tiedot siten, että ne vastasivat kysyttyä ongelmaa, jonka jälkeen he suorittivat valitsemansa laskutoimituksen. Yhden oppilaan kohdalla ajattelun kiinteä yhteys tekstin tietojen kanssa johti siihen, ettei hän huomannut tehtävän muita näkökulmia ja vaihtoehtoisia tapoja ajatella. Kinnusen ja Vauraan (1997) mukaan oppilaille on tyypillistä etteivät he valitse laskutoimituksia tehtävän sisältämän matemaattisen ongelman pohjalta, vaan joidenkin muiden tilanteeseen tai tehtävään liittyvien piirteiden pohjalta (Kinnunen & Vauras 1997, 276–277). Merenluoto (2003, 37) on päätynyt tutkimuksessaan johtopäätökseen, että oppija näkee sitä, mitä on valmistautunut näkemään ja pitää ehkä tiukasti kiinni aikaisemmista olettamuksistaan. Tällöin aikaisemman ajattelun uskomukset siirtyvät virheellisesti uudelle alueelle. On mahdollista, että mainitsemani oppilaat tulkitsivat tietoja tehtävään liittyvien piirteiden pohjalta tai että he näkivät tehtävässä sitä, mitä odottivat näkevänsä. Chinnappanin (1998, 213) mukaan epäonnistuminen ongelmanratkaisussa voi johtua myös siitä, etteivät oppilaat rakenna ongelmasta linkkejä sisältävää skemaattista mallia. Tulkitessaan tehtäviä kuvan tietojen avulla, ratkaisut muuttuivat perustellummiksi. Erityisesti, jos oppilas onnistui tulkitsemaan sekä kuvan että tekstin tietojen yhdistelmää, oli ratkaisu ehyempi. Tähän tulokseen liittyy Garderen ja Montaguen (2003, 251) havainto visuaalis-spatiaalisen kuvauksen merkittävästä myönteisestä korrelaatiosta matemaattiseen ongelmanratkaisuun. Tässä tutkimuksessa ei tullut esille kuvan käytön kielteistä vaikutusta ongelmanratkaisuun (vrt. Hegarty & Kozhevnikov 1999, 688).

Yhden oppilaan kohdalla usean tiedonlähteen käyttö ei saanut aikaan onnistunutta ongelmanratkaisua. Oppilas ei tiennyt, mitä tehtävässä mainitut käsitteet tarkoittivat. Hänelle ei ollut muodostunut skeemaa, joka olisi yhdistänyt tiedot ja käsitteet toisiinsa. Hänen tietonsa eivät olleet verkostoituneet toisiinsa. Tämä havainto on melko yhtenevä Chinnappanin (1998, 214) geometrisen tiedon laatuun liittyvän tutkimuksen tulosten kanssa. Kolmen oppilaan kohdalla käsitteiden ja laskumenetelmien hallinta erikseen ei johtanut oikeaan ratkaisuun. Proseduraalinen tieto (laskumenetelmä) hallittiin, mutta siihen ei osattu yhdistää käsitetietoa. Yhtenä syynä tähän voisi olla se, että proseduraalinen tieto näyttäisi kehittyvän konseptuaalista tietoa nopeammin. Lapsi valitsee usein oikean tavan tehdä tietämättä miksi. (Haapasalo 2004, 57.) Tekstin ja kuvan tietojen yhdistäminen toisiinsa oli vähäistä. Niitä yhdistettiin toisiinsa yhdeksän kertaa, joka on huomattavasti vähemmän, kuin yhden tiedonlähteen (esim. kuva 30 kertaa) käyttökerrat. Tehtävään ei voinut määritellä, kuinka monta kertaa enimmillään jotain tietoa olisi mahdollista käyttää. Tiedon käyttökertojen määrää ei ollut rajoitettu. Kuvaa käytettiin eniten edellä mainitsemani 30 kertaa. Tässä tehtävässä ja tässä tutkimuksessa tätä lukua voi käyttää vertailulukuna siihen, käytettiinkö jotain luokkaa vähän vai paljon. On mahdollista, että oppilaat käyttävät mieluummin yhtä tietoa ongelmien ratkaisuissa, kuin täydentävät ratkaisunsa perustellummaksi useammalla tiedolla.

Sharpin ja Adamsin (2002, 346) tutkimuksessa jokainen oppilas kävi käsiksi ongelmiin oman tietovarastonsa pohjalta, mutta tässä tutkimuksessa osa oppilaista (12 oppilasta 18:sta) käytti omia tietoja eli omaa ajattelua ongelmanratkaisussa, jos tehtävänannossa ei ollut riittävästi tietoa saatavilla. Tutkimukseni perusteella ei voi yleispätevästi todeta kaikkien oppilaiden pystyvän käyttämään omia tietojaan ongelmanratkaisussa. Ero tämän tutkimuksen ja Sharpin ja Adamsin tutkimuksen välillä voi johtua erilaisesta tutkimuksen toteutuksesta ja luokittelujärjestelmästä. Se voi myös kertoa siitä, etteivät haastattelutehtäväni saaneet kaikkien oppilaiden ajattelua esille. Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2) kaksi oppilasta havaitsi ja ymmärsi tehtävänannon oikein. Tästä huolimatta heidän huomionsa kiinnittyi ratkaisun kannalta epäolennaiseen asiaan, joka esti ratkaisun syntymisen. Voi olla, että tehtävä sisälsi liikaa monimutkaisia asioita, joista he eivät pystyneet erottamaan olennaista. Tähän tulokseen ovat päätyneet Cook ja Rieser (2005, 266) tutkiessaan kriittisten tietojen löytämistä ja lasten silmäilevää lukemista kertomusongelmien ratkaisussa.

Tehtävässä annetuista tiedoista seitsemän oppilasta yhdisti annetuista tiedoista uusia tietoja päättelyn tueksi 11 kertaa. Tietojen perusteella oppilaat tekivät johtopäätöksen tai muotoilivat säännön. He perustelivat jommankumman avulla ratkaisunsa. Oppilaista 13 käytti uskomuksia 19 kertaa. Sekä uskomuksia että omia käsitteitä määriteltiin pallosta, pallon, neliön ja kuution halkaisijasta sekä kuutiosta. Uskomukset ohjasivat oppilaan ratkaisua: niitä käytettiin tiedon korvikkeena. Koska oppilaat kehittivät uskomuksensa itse, niiden voi todeta perustuvan heidän kokemuksiinsa. Tämän tutkimuksen oppilaista yli puolet käytti uskomuksia ongelmanratkaisussaan. Näin ollen uskomuksilla voi olla merkittävä rooli oppilaiden ajattelussa ja ongelmanratkaisussa. Havaintoani tukee Merenluodon (2003, 37) tutkimus, jonka mukaan kokemuksiin liittyvät mielikuvat näyttävät vahvasti ohjaavan oppilaiden päättelyä.

Neljä oppilasta ei osannut perustella omia ratkaisujaan. Yhden mielestä tehtävä oli mahdollista ratkaista, vaikka hän ei osannut määritellä siihen liittyviä käsitteitä. Kolme muuta oppilasta eivät olleet varmoja omista vastauksistaan. He ajattelivat, ettei tehtävää ollut mahdollista ratkaista. Oppilaat tuntuivat lopettavan ajattelemisen, kun he eivät ymmärtäneet tehtävää. Leinosen (2002, 477) mielestä ymmärtämättömyys saattaa olla seurausta siitä, että viestin vastaanottajalle, tässä tapauksessa oppilaalle, lause saattaa olla kokonaan outo merkkien joukko. On mahdollista, että oppilaat eivät ymmärtäneet, mitä tehtävässä kysyttiin, jolloin tehtävänanto ei kiinnittynyt heidän kohdallaan mihinkään toiseen tietoon tai käsitteeseen. Toisaalta ymmärtämättömyys kertonee oppilaan tietorakenteen sirpaleisuudesta. Sirpaletiedolla voidaan tarkoittaa sisältöä vailla olevaa merkkien joukkoa (Leinonen 2002, 477).

7.2 Käsitteet ja uskomukset

Toisena tutkimusongelmana oli selvittää, minkälaisia geometrisiin kappaleisiin liittyviä käsityksiä ja uskomuksia oppilailla on, ja kuinka näiden käsitteiden käyttö vaikuttaa ongelmien ratkaisuun. Kuutio 1-tehtävässä (Liite 2) käsiteltiin seuraavia käsitteitä: neliö, neliön sivut, pallo, halkaisija ja kuutio. Kahdeksalla oppilaalla oli ongelmia kuution ja neliön erottamisessa toisistaan. Tämä voisi johtua niiden yhteisistä piirteistä ja ominaisuuksista. Ehkäpä käsitteiden erot eivät olleet oppilaille selviä. Näiden kahden käsitteiden oppiminen voi olla hankalaa ainakin osalle oppilaista. Tässä tutkimuksessa ei kiinnitetty huomiota siihen, olivatko käsitteet toisiinsa sekoittaneet oppilaat heikompia matematiikassa kuin toiset oppilaat. On kuitenkin todettava, että tiedollisen hahmotuksen taustalla olevat käsitteet ovat ajattelun välineitä. Niiden avulla asioita ymmärretään. (Leinonen 2002, 482.) Käsitteiden sisältöjen epäselvyys voinee hidastaa asioiden ymmärtämistä. Kieren (1988) on kuvannut lapsien ennen koulun opetusta syntyviä käsityksiä murtoluvuista etnomatemaattiseksi (Kieren 1988, 169). Tässä tutkimuksessa löytyi viitteitä oppilaiden geometrista etnomatemaattisista käsityksistä, esimerkiksi pallon ominaisuuksista ja halkaisijakäsityksistä. Käsitteet voinee todeta etnomatemaattiksi, koska oppilaat eivät tienneet niiden oikeita nimiä, jonka perusteella päättelin, etteivät ne olleet heille entuudestaan tuttuja.

Oppilaat käyttivät erilasia palloon liittyviä termejä. Kuusi oppilasta nimesi omin sanoin pallon ominaisuuksia Kuutio 1-tehtävän e-kohdassa (Liite 2). Pallon muotoa kuvailtiin sanoilla ”pallon muotoinen eikä kuution muotoinen”, ”pyöreä”, ”pyöreät sivut” ja ympyrän kehää sanoilla ”silleen ympäri”. Yksi oppilas ajatteli pallon olevan konkreettinen peliväline, esimerkiksi tennispallo, jonka kokoa on vaikea määritellä. Pallon halkaisijaan viitattiin sanoilla ”sisuspituudet” ja ”pallon toisesta päästä toiseen päähän”. Koska oppilaat käyttivät eri sanoja samoista käsitteestä, olivat heidän käsityksensä samanlaiset riippumatta käytetystä termistä. Tämä havainto eroaa Sharpin ja Adamsin (2002) tutkimuksen tuloksista. Heidän mukaansa etnomatemaattiset käsitykset yksilöiden välillä ovat erilaisia, koska jokainen heistä on lähtöisin uniikista ympäristöstä (Sharp & Adams 2002, 334). Oppilaiden käsitykset neliön halkaisijasta poikkesivat toisistaan. Kuutio 1-tehtävän f-kohdassa (Liite 2) kymmenen oppilasta tuotti neliön halkaisijalle viisi erilaista määritelmää. Yksi määritelmistä oli oikein. Yksi oppilas määritteli halkaisijan seuraavasti: ” Se halkaisija pitäis olla sama joka suuntaan että se olisi edes halkaisija.”. Tämän lisäksi halkaisija määriteltiin kuution puolittajaksi, joka jakaa kuution kahteen yhtä suureen osaan ja kulkee kuution ympäri sekä neliön puolittajaksi, joka kulkee neliön vastakkaiselta sivulta toiselle ja jakaa neliön kahteen yhtä suureen suorakulmioon. Yksi oppilas liitti halkaisija-käsitteen neliön pinta-alaan. Sharpin ja Adamsin (2002, 334) tutkimus tukee havaintoani halkaisijakäsitysten erilaisuudesta.

Kun oppilas rakensi käsitteen itse, se osoitti hänen osaavan hahmottaa ja mallintaa kappaletta mielessään. Tällöin kappaleen käsitteen osat linkittyivät toisiinsa, ja oppilas pystyi näiden tietojen perusteella ratkaisemaan tehtävän. Chinnappanin (1998, 213) skeemoja ja mentaalisia malleja koskevassa tutkimuksessa hyvin suoriutuvat oppilaat pystyivät muodostamaan ongelmasta mielikuvan, jonka myötä he ymmärsivät annettujen tietojen ja tavoitteen välisen suhteen. Ottamatta kantaa oppilaiden suoriutumisen tasoon, tässä tutkimuksessa osa oppilaista pystyi muodostamaan annettujen tietojen perusteella mentaalisia malleja ongelmatilanteesta. Grayn ym.(1999, 129) näkemyksen mukaan oppilaat käyttävät käsitteiden määritelmiä eri tavoin. Osa konstruoi ymmärryksensä uudelleen suhteessa käsitteeseen, osa rakentaa erillisen ymmärryksen deduktiivisesti määritelmään pohjautuen, jolloin tiedot eivät liity toisiinsa kokonaisuuksina. Tämä näyttäisi pätevän tutkimukseni oppilaiden käyttäytymiseen, koska osa rakensi edellä kuvatulla tavalla käsitejärjestelmiä suhteuttaen niitä toisiinsa (*oma ajattelu ja uskomukset*) osa taas käytti perusteettomasti tiedon osasia ratkaisunsa tukena, mikä viittasi erilliseen ymmärrykseen (*ei perusteita*).

7.3 Erot tehtävän ymmärryksessä ja ratkaisutavoissa

Tutkimuksen kolmantena ongelmana oli selvittää, miten oppilaat ymmärtävät ja ratkaisevat saman tehtävän, ja mistä seuraavat mahdolliset ratkaisutapojen erot. Tähän tutkimuskysymykseen etsin vastauksia Neliö-tehtävästä (Liite 2). Tehtävässä kysyttiin, kuinka monta pikkuneliötä mahtuu isoon neliöön. Oppilaat ymmärsivät tehtävän neljällä eri tavalla, jotka nimesin seuraavasti: *neliöruudukko, sisäkkäiset neliöt, tilkkutäkki* ja *kuutioneliö*. *Neliöruudukossa* ja *kuutioneliössä* lähtökohta oli, että kaikki pikkuneliöt ovat keskenään samankokoisia. *Tilkkutäkki* ja *sisäkkäiset neliöt* lähtivät liikkeelle ajatuksesta, että neliöt voivat olla keskenään erikokoisia. Olen kuvannut nämä ajattelumallit aikaisemmin sivuilla 75–80. Suurin osa oppilaista (12) ymmärsi tehtävän *neliöruudukkona*. Kolme muuta ajattelutapaa kertoivat vaihtelusta, jota voi ilmetä yhden luokan oppilaiden ajattelussa.

Jos Neliö-tehtävää ajattelee käsitteenä, löysin neljä erilaista käsitettä yhdestä tehtävästä. Leinonen (2003, 64) onkin osoittanut käsitteiden saavan erilaisia merkityksiä näkökulman mukaan. Tässä tehtävässä aineistosta nousi esiin kaksi näkökulmaa. Toisen näkökulman mukaan kaikki pikkuneliöt olivat samankokoisia, toisen mukaan ne voivat olla erikokoisia. Koska tehtävässä ei kerrottu, kuinka tehtävä tulisi ymmärtää, se osoitti oppilaiden käyttävän aikaisemmin sisäistämiään ajattelumalleja. Avoin dialektinen tehtävä näyttäisi paljastavan oppilaan erilaisia tapoja ajatella. Tutkimuksessani ei selvitetty, ymmärsikö joku tehtävän kehittyneemmin kuin toinen. Pehkonen (2000, 378) toteaa avoimien tehtävien olevan tutkimattomia siinä suhteessa, missä määrin niiden käyttäminen edistää matemaattisen ymmärtämisen kehittymistä. On mahdollista, että avoimet tehtävät tuovat esille erilaisia tapoja ajatella. Niiden avulla ei ainakaan vielä ole pystytty tutkimaan matemaattisen ajattelun kehittymistä.

Oppilaiden piirroksia tarkastelemalla selvisi, kuinka he ymmärsivät tehtävän. Tätä tulosta tukee Nunokawan (2004, 182) havainto piirroksen yhtenevyydestä tehtävän ymmärtämisen kanssa. Oppilaan ajattelutavan havaitseminen puolestaan myötävaikutti heidän käyttämien laskumenetelmien ymmärtämiseen. Piirrosten käyttäminen ei ole todettu johtavan parempaan ongelmanratkaisuun (Hegarty & Kozhevnikov 1999, 688; Garderen & Montague 2003, 251). Näin ei varmasti ole, jos tehtävällä pyritään saamaan tietty vastaus aikaan, eikä erilaisia tapoja ajatella hyväksytä. Nunokawan (2004, 182) tutkimusten mukaan ongelman todellinen sisältö ei välttämättä vastaa tehtävän ymmärrystä. Ehkäpä piirrosten avulla kuitenkin pystytään paremmin huomiomaan yksilöiden väliset erot matematiikan opetuksessa.

Aineistosta nousi esiin viisi erilaista ratkaisutapaa: kertolasku, yhteenlasku, kokeilu, mikroskoopilla selvittäminen ja arviointi. Ratkaisumenetelmien valinta riippui siitä, miten tehtävä ymmärrettiin. Oppilaat ratkaisivat tehtävän kertolaskulla tai yhteenlaskulla, jos he ymmärsivät tehtävän neliöruudukkona. Jos ymmärrys poikkesi ruudukosta, käyttivät he muita ratkaisutapoja, kuten arviointia, luettelemalla laskemista tai mikroskooppia. Yhden oppilaan mielestä tehtävään ei ollut ratkaisua (tilkkutäkki). Voi olla, että erilaiset tavat ymmärtää tehtävä tuottivat monipuolisempia ratkaisumenetelmiä kuin yksi ratkaisutapa olisi tuottanut. Kenties oppilaille ei ollut muodostunut Neliö-tehtävään aikaisempien kokemusten perusteella vaihtoehtoista ratkaisutapaa. He joutuivat puntaroimaan, kuinka selvittäisivät tehtävän. Cain (2000, 332) tutkimuksessa havaittiin todennäköiseksi se, että opettajan tapa opettaa ja antaa ohjeita vaikuttaa oppilaiden ratkaisumenetelmien käyttöön. Ennen näkemättömän tehtävän avulla opettaja pystyisi edistämään oppilaiden luovaa ongelmanratkaisua. Käytännön elämässä oppilaat tulevat kohtaamaan tilanteita, joihin ei ole olemassa valmiita ratkaisumalleja. Tarjoamalla erilaisia ja uusia tilanteita oppilaiden ratkaistaviksi, voidaan mahdollisesti vaikuttaa heidän selviytymiskykyyn tulevaisuudessa. Tätä ajatusta tukee Haapasalon (1997c, 81) toteamus koulukokemusten heijastumisesta työelämään.

7.4 Ratkaisujen jatkuvuus

Tutkimuksen neljäntenä ongelmana oli selvittää, toistuuko tietty ratkaisutapa tai ajattelumalli erilaisten tehtävien välillä samalla oppilaalla? Kahdeksalla oppilaalla kymmenestä löytyi vähintään yksi tapa toimia, joka ilmeni vähintään kahdessa erilaisessa matemaattisessa tehtävässä. Toistuneita luokkia olivat: *ei perusteita, yksi ratkaisu, epäolennaiset, perushahmottaminen, mallintaminen* ja *apuväline* (Liite 5). Toistuneista luokista huomio kiinnittyi siihen, että neljällä oppilaalla toistui yksi useampia luokista *perusteettoman tiedon käyttö, yhden ratkaisuun hyväksyminen* sekä *epäolennaisten tietojen käyttö*. Koska osa oppilaista ei osannut erottaa tehtävän olennaisia piirteitä, eivät he pystyneet kehittämään strategiaa ongelman ratkaisuun. Tämän myötä ratkaisumenetelmä ei yleistynyt, eikä tehtävän olennaisia ominaisuuksia koodattu. Tässä tutkimuksessa ei tutkittu, kuinka pysyviä oppilaan ratkaisutyylit ovat. Monissa tutkimuksissa (mm. Gray ym. 1999, 111; Chinnappan 1998, 207, 213) on todettu sekä hyvillä ja heikoilla ongelmanratkaisijoilla olevan toistuvia piirteitä tai ajattelumalleja tehtävien selvittämisessä. Jos näin on, tulisi kouluissa yhä enemmän pyrkiä tuomaan esille sekä vaatimaan perustellumpaa ajattelua matematiikan tunneilla.

Kuutio 2-tehtävässä (Liite2) ilmeni tehtävän rakenteesta johtuvia erilaisia (ei virheellisiä) tapoja ymmärtää. Enemmistö ymmärsi, että neliöitä tai kuviota mielessään taittelemalla siitä muodostuu kuutio. Yksi oppilas ymmärsi, että kuvion neliöitä siirtelemällä tulee muodostaa yhdeksän ruudun muodostama neliö. Näitä neliötä ei kuitenkaan pystynyt rakentamaan riittävästi, koska yhdessäkään kohdassa ei ollut tarvittavaa yhdeksää ruutua. Yksi oppilas ajatteli, että kuutio muodostuu kerroksista. Tämän vuoksi hän ymmärsi tehtävän siten, että ruuduista tulee muodostaa kaksi neljän ruudun neliötä, joista syntyy kuutio, jos niitä laittaa useamman päällekkäin. Ruutuja ei ollut riittävästi tähänkään ajattelumalliin. Yksi oppilas oli aluksi sitä mieltä, että jos hän taittelee yhden kuvion kuutioksi, muista ei enää ole mahdollista rakentaa kuutiota, tai ensimmäinen kuutio aukeaa.

7.5 Tutkimustani rajoittavat tekijät

Tutkimuksen aineisto kerättiin laadullisilla menetelmillä. Aineiston keruu tapahtui ääneen ajattelun -metodia soveltaen. Tutustuin tutkimusmenetelmään pohtiessani tapaa, jolla pystyisin saamaan oppilaiden ajattelun näkyväksi ja havaittavaksi. Videoitujen haastattelujen lisäksi keräsin aineistoa kirjallisesti tehtäväpapereiden avulla, joita oppilaat täyttivät haastatteluiden aikana. Tutkimusjoukkoni koostui 18 oppilaasta. Koska kyseessä oli tapaustutkimus, aineiston kokoon vaikutti enemmän luokan oppilaiden lukumäärä kuin minun tekemäni valinnat tai aineiston saatavuus. Tutkimuksellani ei tavoiteltu yleistettävyyttä suurelle joukolle. Joitain tutkimuksen tuloksia, esimerkiksi käsitteiden sisältöjä, opettaja voi pyrkiä havainnoimaan omassa luokassaan ja pohtia niiden käyttökelpoisuutta oman työnsä kannalta. Voi olla, ettei samanlaisia käsityksiä ilmene missään toisessa luokassa. Tieto siitä, että oppilaiden ymmärrys voi poiketa aiotusta, edesauttaa opettajaa kiinnittämään huomiota oppilaiden ajatteluun.

Ennen varsinaista aineiston keruuta ja metodiikan toteuttamista olisin voinut suorittaa koehaastattelun testatakseni käyttämieni ongelmatehtävien toimivuutta. Näin olisin pystynyt parantamaan tutkimukseni luotettavuutta ja välttää virheitä tutkimusaineiston keruuvaiheessa. Oppilaille ääneen ajattelu saattoi olla uusi ja outo asia. Otin tämän huomioon siten, että aloitimme kuvaustilanteen helpohkolla tehtävällä, jonka aikana he saivat tuntuman ääneen ajatteluun. Tehtävän avulla sain palautetta siitä, kuinka helposti oppilas alkoi tuottaa puhetta. Tämän perusteella suuntasin mahdollisten kysymysten asetteluani kunkin oppilaan kohdalla. Aivan kaikki oppilaat eivät onnistuneet puhumaan ajatuksiaan ääneen, ja jouduin esittämään heille useammin tarkentavia kysymyksiä. On mahdollista, että kysymykseni suuntasivat oppilaan ratkaisua. Tätä pyrin tietoisesti välttämään. Läsnäoloni tutkittavan rinnalla saattoi aiheuttaa sen, että oppilas alkoi tuottaa puhetta keskustellakseen kanssani sen sijaan, että hän olisi tuonut ilmi omia ajatuksiaan. Pyrin siihen, ettei haastattelu muuttuisi varsinaiseksi ”haastatteluksi”, vaan että oppilaan ajatukset virtaisivat vapaasti.

Sovelsin tutkimuksessani erityylisiä ääneen ajattelun-metodeja, samalla hetkellä tapahtuvaa, välittömästi suorituksen jälkeen tapahtuvaa ja kliinistä metodia.

Erityisesti kliininen metodi antoi mahdollisuuden kysyä tutkittavalta tarkentavia kysymyksiä hänen ajattelustaan. Ilman näitä kysymyksiä olisi haastattelujeni sisältö jäänyt huomattavasti köyhemmäksi, mikä taas olisi heikentänyt tutkimuksen tuloksia. Kuten edellä totesin, kysymysten esittäminen saattoi suunnata oppilaan ajattelua tiettyyn suuntaan. Tässä tutkimusraportissa olen yrittänyt tuoda lukijalle oman ajatteluni ja luokittelun perusteet mahdollisimman selkeästi esille. Lukija voi päätellä, missä määrin luokitteluni ja analyysini vastaa tutkittavien näkemyksiä. Luokittelun luotettavuutta olisi pystynyt parantamaan käyttämällä toista luokittelijaa tai tutkijaa.

Aineistoa olisi voinut kerätä jollakin muulla tavalla kuin ääneen ajattelun-metodilla. Erityisesti jälkikäteen ajattelu osoittautui haastavaksi aineistonkeruumenetelmäksi. Tehtävän tulisi olla todella lyhyt suorittaa, jotta kyseistä metodia pystyttäisiin soveltamaan pätevästi. Eniten sovelsin samanaikaisesti tapahtuvaa ääneen ajattelua sekä kliinistä menetelmää. Haastattelun ongelmatehtäviä tulisi kehittää siten, että niiden avulla metodien soveltaminen rinnakkain helpottuisi. Voi olla, että käyttämäni tehtävät olivat liian pitkiä kestoltaan siihen, että olisin voinut olettaa oppilaan tuottaman muistijäljen ajattelusta toistuvat juuri samanlaisena kuin tehtävänsuoritushetkellä. Käyttämieni tehtävien avulla sain kuitenkin selville oppilaiden käsitteiden sisältöjä sekä niiden sovelluksia. Voinkin todeta saaneeni tutkimuksella vastauksen asettamiini tutkimusongelmiin: 1. Mitä tietoja oppilas pystyy havaitsemaan ja käyttämään ongelmanratkaisutilanteessa? 2. Minkälaisia geometrisiin kappaleisiin liittyviä käsityksiä tai uskomuksia oppilailla on? Miten käsitykset ja uskomukset vaikuttavat oppilaiden tekemiin ratkaisuihin ongelmanratkaisutilanteessa? 3 Miten oppilaat ymmärtävät ja ratkaisevat saman tehtävän, ja mistä seuraavat mahdolliset ratkaisutapojen erot. 4. Toistuuko ongelmanratkaisussa sama ratkaisutapa tai ajattelumalli tehtävästä riippumatta? Aineiston analyysin pohjalta pystyin muodostamaan käsityksen siitä, kuinka oppilaat ajattelivat asettamieni ongelmieni yhteydessä.

Osa käyttämistäni haastattelun tehtävistä oli valmiita, aikaisemmin kokeiltuja. Näiden lisäksi käyttämäni haastatteluongelmat sisälsivät tehtäviä, joita olin itse kehitellyt. Tässä suhteessa otin tietoisen riskin siitä, että tehtävien ratkaisut eivät lisäisi tietoa oppilaiden ajattelusta. En voinut olla varma siitä, puhuvatko oppilaat riittävästi ja saako valitsemani tehtävät aikaan ääneen ajattelua. Käyttämiäni tehtäviä ei ollut käytetty aiemmin soveltamallani tavalla. En löytänyt valmista mittaria, jolla vastaavaa tutkimusta olisi aikaisemmin toteutettu. Toisaalta valmiin mittarin soveltaminen olisi mahdollisesti rajoittanut oppilaan mahdollisuuksia ajatella omalla tavallaan. Tällä tavoin toteutettuna kaikki vaihtoehdot olivat ikään kuin avoimina. Tehtävien valinnassa kiinnitin huomiota siihen, että ne sisälsivät tarpeeksi haastavia kohtia. Haastattelurungossani esimerkiksi Kuutio 1-tehtävän e-kohta (Liite 2) osoittautui erinomaiseksi ajattelun herättelijäksi. Tehtävä oli ehkä hieman liian vaikea oppilaille ratkaista, mutta se sai heidät pohtimaan ja soveltamaan omia tietojaan ja käsityksiään. Kaiken kaikkiaan sain tehtävilläni aikaan ääneen ajattelua. Siinä mielessäni onnistuin tutkimusmenetelmän soveltamisessa. Jatkossa olisi kuitenkin syytä kehittää tehtäviä enemmän, jotta epävarmuus tutkimuksen onnistumisesta katoaisi. Tutkimusmenetelmän kehittämisessä tulisi huomioida tehtävien vapaus siinä mielessä, että ne herättäisivät oppilaissa ajattelua. Tässä tutkimuksessa Kuutio 1-tehtävän c- ja d-kohdat eivät juuri tuoneet oppilaan ajattelua esille. Niiden kaltaisten, kenties liian helppojen tehtävien käyttöä tulisi välttää. Niiden avulla ei pystytty saamaan selville oppilaan ajattelua. Niillä pystyttiin selvittämään, mitä tietoa oppilaat ensisijaisesti käyttivät.

Tutkimukseni tulososio muodostui laajaksi selostukseni. Sen valmistuttua pohdin, voisiko jotain osiota jättää pois. Kokonaisuudesta oli kuitenkin vaikea irrottaa palasta, ilman että koko rakennelma romahtaisi. Tämän olisin pystynyt ehkäisemään etukäteen, jättämällä jotain osioita kokonaan analysoimatta. Ennen analyysiä oli kuitenkin lähes mahdotonta tietää, mihin suuntaan sisällönanalyysi tulisi viemään tutkimukseni tulkintaa. Oppilaiden käyttämiin käsitteisiin ja tapoihin ymmärtää ja ajatella olisi voinut keskittyä enemmän. Neliö-tehtävän piirrokset osuutta olisi voinut supistaa, lisäämällä se vaikkapa ratkaisumenetelmien yhteyteen. Ratkaisumenetelmien jatkuvuuteen olisi voinut kiinnittää enemmän huomiota. Nyt jatkuvuuden osuus jäi melko vaatimattomaksi. Tiedon käytön osuudessa olisi voinut leikata joitain merkityksettömämpiä osuuksia pois. Kehittämiskohteista huolimatta pyrin luomaan tulososiosta kokonaisuuden, jossa oppilaan ajattelu, tutkijan ajattelu ja tutkimuksen toteuttaminen tulisivat lukijalle mahdollisimman selkeästi esille.

Aikaisemmin mainitsin, että tutkimukseni tulokset eivät ole yleistettävissä suurelle joukolle. Uskon niiden herättävän ajatuksia siitä, mitä kaikkea lapsen päässä voi tapahtua matematiikan tunnilla. Jokaisen opettajan ja oppimisen ohjaajan tulee päättää missä määrin tutkimuksen tulokset ovat peilattavissa todellisuuteen. Tutkimukseni rajoittui hyvin pienelle joukolle koskien vain yhtä matematiikan osa-aluetta, raapaisten siitäkin vain pintaa. Se kuvaa vain yhden luokan ajattelua aineiston keruun hetkellä. Jos aineistoa olisi kerätty laadullisen haastattelun lisäksi esimerkiksi määrällisellä kyselylomakkeella, olisin pystynyt ottamaan esimerkiksi toisen luokan mukaan tutkimukseeni ja peilaamaan tutkimuksen tuloksia yleisemmällä tasolla. Ehkä tämän tutkimuksen avulla matematiikkaa opettavat opettajat saavat ohjenuoria oppimisen ohjaamiseen ja yksilöiden erilaisuuden huomioimiseen.

7.6 Käytännön sovellukset

Tutkimukseni käytännön sovelluksia olen kirjoittanut tutkimusraporttiini. Tutkimukseni tuloksia voi, aikaisemmin mainitsemieni lisäksi, soveltaa esimerkiksi käsitteiden opettamisen yhteydessä. Oppilaat osasivat käyttää käsitteitä tietämättä niiden nimiä. Käsitteiden nimityksen opettaminen käsitteen yhteydessä voi aiheuttaa sekaannuksia siihen, mitä käsite (esim. neliö) tarkoittaa. Huolellinen käsitteen kanssa työskentely ennen nimeämistä voisi auttaa oppilasta hahmottamaan kappaleen ominaisuuksia. Olennaista ei kuitenkaan ole osata nimetä kappaleita, vaan työstää niitä erilaisten ongelmien yhteydessä. Tähän ajatukseen on päätynyt myös Amerikan kansallinen matematiikan opettajien neuvosta (NTCM). Neuvoston uudet periaatteet (2000) painottavat käsitteiden ymmärrystä ja jättävät sääntöjen ohjaaman laskemisen ja menetelmätietouden hallitsemisen osuudet vähemmälle huomiolle. Jotta käsitteiden ymmärrys kehittyisi, neuvosto ehdottaa keinoiksi mm. todellisten esineiden käyttöä opetuksessa, keskusteluja sekä ryhmässä että yhteisesti ja opettajien kouluttamista. (Maccini & Gagnon 2002, 326.) Merenluodon ja Lehtisen (2004) mukaan käsitteellinen muutos on pitkäaikainen ja hidas prosessi. Muutoksen aikaansaaminen edellyttää opettajalta pitkäjänteistä ja suunnitelmallista opetustyötä. (Merenluoto & Lehtinen 2004, 316.) Opettajien kouluttamisen kannalla on useampikin tutkija (Aunio ym. 2005, 142; Gray ym. 1999, 129). Gray ym. (1999)

huomauttavat, että opettajien opetustapaa on pohdittava huolellisesti, jotta ei opetettaisi joustavaa menetelmien käyttöä ajattelun kehittämisen sijaan. Jos näin käy, heikommat oppilaat joutuvat kohtaamaan useampia menetelmiä. Tämän seurauksena kognitiiviset rakenteet monimutkaistuvat joustavuuden ja tehokkuuden kustannuksella. (Gray ym. 1999, 129.) Ginsburgin ja Seon (1999) mielestä matematiikan opetuksessa tulisi huomioida sekä konstruktivistinen että matemaattinen näkökulma. Tällä he tarkoittavat sitä, että matematiikan sisällöt eivät saisi unohtua konstruktivistisen oppimisen ja opetuksen alle. Sisältöjen matemaattisesta ymmärtämisestä täytyisi huolehtia. (Ginsburg & Seo 1999, 114.)

Tässä tutkimuksessa oppilaat osasivat ”puhua matematiikkaa”. Johdonmukaisella ääneen puhumisen ohjaamisella opettaja oppinee ymmärtämään paremmin oppilaan suorittamien toimintojen syitä ja seurauksia. Ääneen ajattelulla oppilas saattaa kyetä kiinnittämään huomiota enemmän omaan toimintaansa ja arvioimaan sitä kriittisesti. Puhumalla ääneen omaa ajatteluaan matematiikan tunnilla, oppilaat saavat mallin opettajan toiminnasta oman ajattelun tutkiskeluun. Kinnunen ja Vauras (1997) toteavatkin, että perinteisesti toteutetulla matematiikan opetuksella oppilaat oppivat suuren joukon merkitsemistapoja, algoritmeja ja muistisääntöjä. Näiden asioiden perimmäinen tarkoitus jää puutteelliseksi. (Kinnunen & Vauras 1997, 273.) Ääneen ajattelu oppitunneilla voisi olla yksi keino, jonka avulla ymmärtävä ja syvällinen oppiminen mahdollistuisi. Ginsburg ja Seo (1999) mukaan kasvattajien on mahdollista tehdä näkyväksi oppilaiden matemaattiset ideat sekä pohtia niiden oikeellisuutta oppilaiden kanssa. Pohdinnan ja kysymysten avulla oppilaille avautuu mahdollisuus havaita oman ajattelunsa virheitä ja oivalluksia, mitä ei kenties muuten tapahtuisi. (Ginsburg & Seo 1999, 115.)

Oppilaiden itse tuottamiin käsitteisiin ja uskomuksiin liittyi järkeviä piirteitä, kuten esimerkiksi halkaisijaan, jonka moni oppilas määritti kuution puolittajaksi. Oppilaille olisi hyvä osoittaa, että heidän määrittelemänsä termi (esimerkiksi halkaisija) ei ole väärä, mutta se eroaa siitä, mitä matematiikka ajattelee kyseisestä termistä. Jos oppilas ratkaisi ongelmatehtävän soveltaen omaa termiään, hänen ratkaisunsa saattoi olla oikein suhteessa omaan ajatteluun. Jos oppilaat saadaan ymmärtämään, ettei heidän ajattelussaan sinällään ole mitään väärin, vaan että heidän soveltamansa käsite aiheuttaa väärän ratkaisun, voidaan kenties saada oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan paranemaan. Kuuti 2-tehtävän erilaiset tehtävän rakenteesta johtuvat ajattelumallit osoittivat, että oppilaat voivat ymmärtää hyvin selkeätä vaikuttavan tehtävän moninaisin tavoin. Lienee ilmiselvää, että lapsi turhautuu matematiikkaan, jos tehtävien ratkaisut menevät jatkuvasti väärin, vaikka päättely on omasta mielestä onnistunutta. Haapasalo (1997b) toteaakin opetuksen vaikeuksien syntyvän siitä, että oppilaiden naiiveja ideoita ei osata yhdistää tieteellisiin tietoihin (Haapasalo 1997b, 56).

Jotta opettaja osaisi oikealla tavalla tarttua oppilaiden vääriin käsityksiin, hänen tulisi ymmärtää syvällisesti matematiikan sisältöjä. Song ja Ginsburgin (1987) tutkimuksen mukaan opettajan tiedoilla oli vaikutusta oppilaiden suorituksiin (Song & Ginsburg 1987, 1295) Opettajan tulisi miettiä, mitä olennaisia matemaattisia väärinkäsityksiä oppilaiden muodostamat ideat sisältävät (Ginsburg 1999, 125). Opettajan tulisi tavoitella oppilaan ajattelun ymmärrystä: mitä oppilas hahmottaa väärin ja miten oppilaan tieto on järjestynyt. Oppilaan maailman ymmärtämisen kehittämisen tulisi olla osa opettajan pedagogista toimintaa. Näitä ajatuksia tukevat Ginsburg ym. (1999, 125, 127).

Joissain tilanteissa oppilas alkoi ratkaista tehtävää väärällä tavalla. Tämän jälkeen kehotus lukea tehtävä uudelleen auttoi lasta huomaamaan virheet omassa ajattelussaan. Uudelleen lukemisen pyynnön seurauksena sain tietoa siitä, että oppilas ei alkujaan ollut huolellinen lukiessaan kysymystä. Havaittuani tämän pohdin, mitä koulussa toteutetuilla matematiikan kokeilla saavutetaan. Matematiikan kokeita korjatessani olen huomannut, että oppilaiden tekemät virheet ovat usein huolimattomuusvirheitä. Näiden virheiden vuoksi en ole voinut antaa oppilaalle kaikkia mahdollisia pisteitä kokeesta, vaikka hän on ajatellut ja ymmärtänyt tehtävät oikein. Kokeiden tekeminen tuntuisi näin ollen mittaavan oppilaan huolellisuutta matemaattisen osaamisen sijaan. Cain (2000) mukaan koesuoritusten vertailu ei juuri tarjoa apua matematiikan oppimisen ja sen ymmärtämisen kehittymiseen (Cai 2000, 310). Oikean ja väärän vastauksen tuottaminen paperille ilman selityksiä ei kerro mitään siitä, mitä henkilö on ajatellut ratkaistessaan ongelmaa. Tällöin ei ole mahdollista ymmärtää mahdollisia vääriä tai oikeita ajatusmalleja, joita oppilas ratkaisussaan voi hyvinkin soveltaa. Cai (2000) jatkaakin toteamalla yksityiskohtaisen tiedon oppilaiden ajattelusta ongelmanratkaisussa auttavan ymmärtämään, kuinka opettajat opettavat matematiikkaa ja kuinka oppilaat oppivat sitä eri maissa. Tällainen tieto on tarpeen tunnistettaessa tehokkaita oppimistapoja. (Cai 2000, 310.)

Koska oppilaat lähestyivät Neliö-tehtävää (Liite 2) eri näkökulmista ja ymmärsivät sen eri tavoin, tarvitsivat he erilaisia tietoja tehtävän ratkaisemiseen. Tarvittavat tiedot kietoutuivat yhteen tehtävien ymmärrys- ja ratkaisutavan kanssa. Koska nämä kolme asiaa olivat kiinteästi yhteydessä toisiinsa, on oppimisen seuraajan, useimmiten opettajan, kiinnitettävä huomiota oppilaan suorituksessa myös muihin asioihin kuin vastaukseen. Oppilaiden piirtämien kuvien avulla onnistuin ymmärtämään heidän ajattelunsa perusteita. Työelämässä olen huomannut, etteivät oppilaat useinkaan piirrä omia ratkaisujaan vaan laskevat tehtäviä mekaanisesti eteenpäin. Oppilaita olisi helpompi auttaa väärin lasketun tehtävän kohdalla, jos he piirtäisivät tai selittäisivät tehtävän yhteyteen omaa ajatteluaan ratkaisun eri vaiheissa. Näin opettaja pystyisi osoittamaan oppilaalle, missä vaiheessa oppilaan eteneminen on ajautunut väärään suuntaan.

Tieto erilaisista ratkaisutavoista on merkityksellistä silloin, kun niitä käydään oppilaiden kanssa läpi. Monella eri tavalla voidaan päästä oikeaan vastaukseen. Opettajan olisikin syytä korostaa, että taululla esitetty tapa on vain yksi tapa ratkaista tehtävä, ja että kaikki muut ovat yhtä oikeita tapoja. Silloin tällöin olen havainnut oppilaiden tuskailevan tehtäväpaperilla annetun ratkaisutilan kanssa: joskus se on aivan liian pieni ja joskus tilaa on liikaa. Minulta on usein kysytty, pitääkö kaikki tehtävässä annetut ruudut käyttää. Oppilaat ovat tottuneet siihen, että numerot ovat omilla paikoillaan ruutuvihkoissa. Tällainen merkitsemistapa johtaa siihen, että oppilaat pyrkivät täyttämään kaiken tilan ja tulkitsevat koetilanteessa tehtävälle annetun tilan vihjeeksi ratkaisun pituudesta ja oikeasta ratkaisutavasta. Malatyllä (1997) onkin asiaan samansuuntainen näkemys. Hänen mielestään matematiikan vihkoissa (erityisesti geometriassa) tulisi olla tyhjiä sivuja ilman ruutuja (Malaty 1997, 122–123).

Koska oppilailta löytyi eri tehtävien yhteydessä toistuvia ajattelu- tai ratkaisumalleja, opettaja pystyy käyttämään tätäkin tietoa hyväkseen omassa työssään. Tieto siitä, kuinka yksittäinen oppilas tapaa lähestyä tehtävien ratkaisemista auttaa oppimisen ohjaajaa suuntamaan oppijan huomioon olennaisiin asioihin. Aikaisemmin huomasin, että pienellä kehotuksella oppilas huomasi ymmärtäneensä tehtävänannon väärin. Kenties tällaisissakin tapauksissa pieni neuvo auttaisi oppilasta kiinnittämään huomiota omaan toimintaansa.

7.7 Jatkotutkimusmahdollisuudet

Tässä tutkimuksessa keskityttiin neljännen luokan oppilaiden ajattelun tutkimiseen. Vastaavanlaisia tutkimuksia voisi toteuttaa eri luokka-asteille, jotta saataisiin selville ajattelun jatkumo eri ikäluokkien välille, mahdollisesti samankaltaisten tehtävien kohdalla. Tämä tutkimus kohdistui ainoastaan yhteen matematiikan osa-alueeseen, myös muita matematiikan osa-alueita ja ajattelua uusissa konteksteissa voisi tutkia. Eri osa-alueita tutkimalla olisi mahdollista muodostaa kokonaiskuvat siitä, miten oppilaiden ajattelu eroaa tai säilyy samanlaisena erilaisissa matemaattisissa tehtävissä. Jos tutkimus toteutettaisiin pitkittäistutkimuksena samalle otokselle, olisi mahdollista analysoida ajattelun muutosta.

Koska koulussa opettajat ja oppilaat työskentelevät läheisesti, olisi mielenkiintoista tutkia, kuinka yhden luokan opettajan ja oppilaiden ajattelu eroavat toisistaan. Opettajan tulisi kuitenkin pystyä ymmärtämään oppilaidensa ajattelua. Tällaisen tutkimuksen avulla opettajakunta saisi tietoa siitä, miten oman luokan oppilaat ymmärtävät asioita ja he voisivat muokata opetustaan yhä oppilaslähtöisemmäksi. Näiden lisäksi tutkimusta voisi tehdä opettajan käyttämän työtavan vaikutuksesta oppilaan tapaan ajatella matematiikkaa sekä matematiikan oppikirjojen tehtävien ja niiden ymmärtämistä suhteessa kirjantekijän ymmärrykseen.

Tämänhetkinen yhteiskuntamme tuntuu olevan jatkuvassa muutoksessa. Ihmisen pitäisi pystyä reagoimaan muutoksiin ja näkemään mahdollisuuksia mahdollisimman avarasti. Yksi tutkimuksen kohde voisi olla se, miten koulun matematiikan opetus pystyy vastaamaan yhteiskunnan asettamiin haasteisiin: näkeekö se oppilaan mekaanisena suorittajana vai luovana ongelmien ratkojana?

LÄHTEET

Alasuutari, P. 1993/1999. Laadullinen tutkimus. Tampere: Vastapaino

Atkinson, R. L., Atkinson, R. C., Smith, E. E., Bem, D. J. & Nolen-Hoeksema, S. 2000. Hilgard's introduction to psychology. 13. painos. Fort Wort (Tex.): Harcourt College Publishers.

Aunio, P., Hautamäki, J. & Van Luit, J. 2005. Mathematical thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. European journal of spesific needs education 20 (2), 131–146.

Bolton, N. 1972. The psychology of thinking. Lontoo: Methuen & Co ltd.

Cai, J. 2000. Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese student's solving of process-constrained and process-open problems. Mathematical thinking and learning 2(4), 309–340.

Chinnappan, M. 1998. Schemas and mental modeling in geometry problem solving. Educational studies in mathematics 36, 201–217.

Clements, D. H., Wilson, D. C. & Sarama, J. 2004. Young children´s composition of geometric figures: a learning trajectory. Mathematical thinking and learning 6(2), 163–184.

Cook, J. L. & Rieser, J. J. 2005. Finding the critical facts: children's visual scan patterns when solving story problems that contain irrelevant information. Journal of educational psychology 97(2), 224–234.

Dörfler, W. 2002. Formation of mathematical objects as desicion making. Mathematical thinking and learning 4(4), 337–350.

Ericsson, K. A. & Simon, H.A. 1996. Protocol Analysis. Verbal Reports as data. Uudistettu painos. Cambridge (MA): MIT press.

Entwistle, N., McCune, V. & Walker, P. 2001. Conseptions, styles, and approaches within higher education: analytic abstractions and everyday experience. Teoksessa R. J. Sternberg & L-F. Zhang. (toim.) Perpectives on thinking, learning, and cognitive styles. Lontoo: Lawrence Erlbaum, 103–136.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Jyväskylä: Gummerrus Kirjapaino Oy.

Fisher, R. 1990. Teaching children to think. Cheltenham(UK): Stanley Thornes.

Garderen, D. & Montague, M. 2003. Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. Learning disabilities research & practice, 18(4), 246–254.

Ginsburg, H. P., Kossan, N. E., Schwartz, R. & Swanson, D. 1983. Protocol methods in researh of mathematical thinking. Teoksessa H. P. Ginsburg (toim.) The development of mathematical thinking. Developmental psychology series. Orlando: Academic press, 8–47.

Ginsburg, H. P. & Seo, K-H. 1999. Mathematics in children thinking. Mathematical thinking and learning 1(2), 113–129.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. 1999. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced thinking. Educational studies in mathematics 38, 111–133.

Haapasalo, L. 1985. Ongelmakeskeisen matematiikanopetuksen metodiikka. Opetusmonisteita 10. Jyväskylän yliopisto: Opettajankoulutuslaitos

Haapasalo, L. 1997a. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. 2. tarkastettu painos. Vaajakoski: MEDUSA-software.

Haapasalo, L. 1997b. Konstruktiivisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 52–79.

Haapasalo, L. 1997c. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 80–98.

Haapasalo, L 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 50–83.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M.1999. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. Journal of educational psychology 91(4), 684–689.

Hirsjärvi, S. 1995. Kasvatus ja tieto. Teoksessa S. Hirsjärvi & J. Huttunen. Johdatus kasvatustieteeseen. 4.–5. painos. Porvoo: WSOY, 76–84.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 1997. Tutki ja kirjoita. 6.–9. painos. Helsinki: Tammi.

Holton, D., Anderson, J., Thomas, B. & Fletcher, D. 1999. Mathematical problem solving in support of the curriculum. International journal of mathematical education in science and technology, 351–371.

Hughes, J. & Parkes, S. 2003. Trends in the use of verbal protocol analysis on software engineering research. Behaviour & information technology 22 (2), 127–140.

Huhtala, S. & Laine, A. 2004. “Matikka ei ole mun juttu” – matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 320–346.

Ilmavirta, R. 1995. Teoksessa Opetuksen yksilöinti 2. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 4. Tampereen yliopisto, 33–49.

Kieren, T. E. 1988. Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. Teoksessa J. Hiebert & M. J. Behr (toim.). Number concepts and operations in the middle grades. Hillsdale: NJ Erlbaum, 162–181.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1997. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa Räsänen, P., Ahonen, T & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269–282.

Kuusinen, J. & Korkiakangas, M. 1991. Teoksessa J. Kuusinen (toim.) Kasvatuspsykologia. 4.–5. painos. Porvoo: WSOY, 24–69.

Leinonen, J. 2002. Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä. Kasvatus 33(5), 475–483.

Leinonen, J. 2003. Käsite ja ymmärtäminen. Kasvatus 34(1), 56–65.

Lesh. R. & Harel, G. 2003. Problem solving, modeling and local conseptual development, Mathematical thinking and learning 5(2&3), 157–189.

Maccini, P. & Gagnon, J. 2002. Perception and application of NTCM standards by special and general education teachers. Exceptional children 68 (3), 325–344.

Malaty, G. 1997. Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetus. Teoksessa M-L. Julkunen (toim.). Opetus, oppiminen, vuorovaikutus. Porvoo: WSOY, 109–133.

Merenluoto, K. 2003. Käsitteellisen ymmärtämisen esteitä. Matemaattisen ajattelun puute ja arkimielikuvat. Dimensio 67(3), 35–38.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. 2004. Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 301–319.

Metsämuuronen, J. 2003. Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Jyväskylä: Gummerrus.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Saatavilla www-muodossa: <URL: http://standards.nctm.org/document/chapter2/index.htm >. 30.12.2005.

Niiniluoto, I. 1989. Informaatio, tieto ja yhteiskunta. Filosofinen käsiteanalyysi. Valtionhallinnon kehittämiskeskus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Nunokawa, K. 2004. Solvers' making of drawings in mathematical problem solving and their understanding of the problem situations. International journal of mathematical education in science and technology 35 (2), 173–183.

Patton, M. Q. 2002. Qualitative research & evaluation methods. 3. painos. Thousand Oaks: Sage.

Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. Kasvatus 31(4), 375–381.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus. Saatavilla www-muodossa: >URL: http://www.oph.fi/info/ops/pops_web.pdf >. 10.01.2006.

Presmeg,N. C. & Balderas-Cañas P. E. 2001. Visualization and affect in nonrutine problem solving. Mathematical thinking and learning 3(4). 289–313.

Pugalee, D. Writings, mathematics, and metagognition: looking for connections through students' work in mathematical problem solving. School science and mathematics, 101(5), 236–245.

Rantala, A. 2002. Peruskoulun 6. luokkalaisten ongelmanratkaisutaidot ja ongelmanratkaisuprosessissa ilmenevät ratkaisua haittaavat tekijät. Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma.

Robinson, K. M. 2001. The validity of verbal reports in children's subtraction. Journal of educational psychology 93 (1), 211–222.

Rubinstein, M., F. 1986. Tools for thinking and problem solving. New Jersey: Prentice Hall.

Schoenfeld, A. H. 1985. Mathematical problem solving. Lontoo: Academic Press.

Sharp, J & Adams, B. 2002. Children's construction of knowledge for fraction division after solving realistic problems. The journal of educational research 95 (6), 333–347.

Siegler, R. S. 1991. Children´s thinking. 2. painos. New Jersey: Prentice-Hall.

Song, M. & Ginsburg, H. 1987. The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and U.S. children. Child development 58, 1286–1296.

Swanson, H. L. & Beebe-Frankenberger, M. 2004. The relationship between working memory abd mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties. Journal of educational psychology 96(3), 471–491.

Syrjälä, L. & Numminen, M. 1988. Tapaustutkimus kasvatustieteessä. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia 51. Oulu: Oulun yliopisto.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2004. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Jyväskylä: Gummerrus Kirjapaino Oy.

Yang, S, C. 2003. Reconceptualizing think-aloud methodology: refining the encoding and categorizing techniques via contextualized perpectives. Computers in human behavior 19, 95–115.

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 111–122.

Liite 1: Kirje vanhemmille

15.4.2003
Hyvät Lapsen vanhemmat,

Olen Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksen opiskelija. Kuluvan kevään aikana opintoni ovat edenneet pro gradu -tutkielman aineiston keruu vaiheeseen. Tutkimukseni aineisto on tarkoitus kerätä toukokuun aikana (luokan opettajan nimi) luokassa.

Tutkimukseni tavoite on selvittää neljännen luokan oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia ja siihen liittyvää ajattelua. Tutkimus toteutetaan siten, että haastattelen ja kuvaan oppilaita ratkomassa ongelmia. Tutkimusjakson aikana kerään tietoa ongelmanratkaisuprosessista kirjoittamalla tutkimuspäiväkirjaa. Kuvauskertoja jokaiselle lapselle tulee yhteensä kaksi, ennen ja jälkeen opetusjakson. Opetusjakso alkaa toukokuussa, joten ensimmäinen kuvauskerta suoritetaan huhtikuun viimeisillä viikoilla. Toinen kuvauskerta ajoittuu viikolle 21. Opetusjakson aikana on tarkoitus pureutua matematiikan sisältöihin ongelmakeskeisen opetuksen näkökulmasta.

Kuvauksessa saatua materiaalia on mahdollisuus katsella vain minulla ja luokanopettajalla. Luonnollisesti kaikki materiaalia käsitellään luottamuksellisesti. Jos materiaali jossain tilanteessa halutaan esittää julkisesti, lupaa esittämiseen kysytään asianomaisilta henkilöiltä.

Tutkimuksen toteuttamiseksi tarvitsen suostumuksenne lapsenne osallistumisesta tutkimukseeni. Toivonkin teidän palauttavan alla olevan lomakkeen lapsenne mukana kouluun mahdollisimman nopeasti.

Tutkimusterveisin,

Tanja Lavikonmäki ja (luokan opettajan nimi)

Oppilas ____

☐ saa osallistua tutkielmaan liittyvään aineiston keruuseen kevään 2003 aikana.

☐ haluaa osallistua tutkielman aineiston keruuseen kevään 2003 aikana

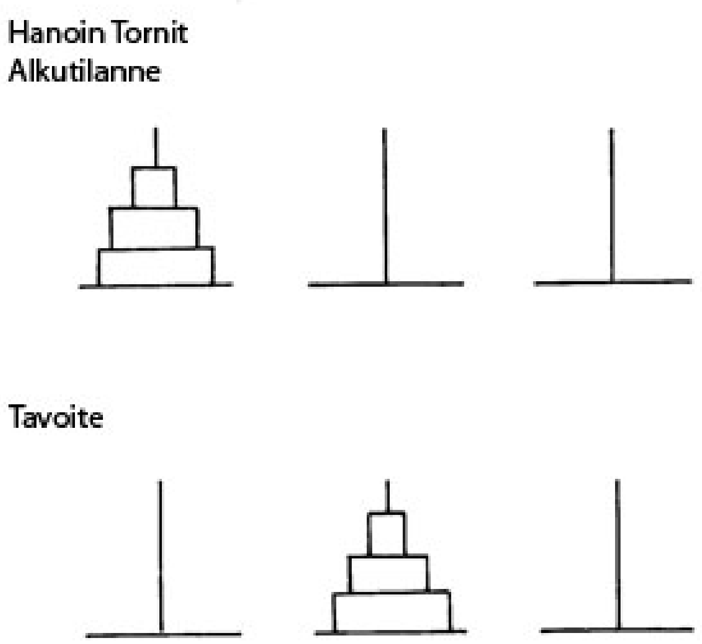
Vanhempien/vanhemman allekirjoitukset/allekirjoitus:

____

Liite 2: Haastattelun ongelmatehtävät

1 Hanoin tornit

Hanoin Tornit -tehtävässä oppilaan tulee siirtää kolme erikokoista palikkaa yksi kerrallaan keskelle olevaan tyhjään paikkaan siten, että ne muodostavat samanlaisen tornin kuin lähtötilanteessa. Yhtä palikkaa saa siirtää kerrallaan. Isompaa palikkaa ei saa laittaa pienemmän päälle.



Hanoin Tornit -tehtävä (Fisher 1990, 103)

2 Kuutio 1

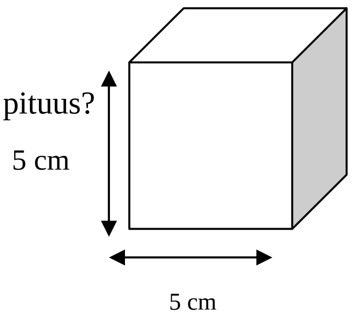
Kuutio muodostuu kahdeksasta neliöstä. Jokainen neliö on samankokoinen. Neliön sivun pituus on 5 cm. Ympyröi seuraavista vaihtoehdoista ne, jotka mielestäsi pystyy ratkaisemaan annetuilla tiedoilla.

a) Mikä on neliön sivujen pituuksien summa?

b) Mikä on kuution sisälle asetetun pikkukuution sivujen pituus?

c) Kuinka korkea kuutio on?

d) Kuinka leveä kuutio on?



e) Kuinka ison pallon voit laittaa kuution sisään?

f) Mikä on neliön halkaisijan pituus?

g) Kuinka monta neliön sivua kuutiossa on yhteensä?

3 Neliö

Kuinka monta pikkuneliötä mahtuu isoon neliöön?

Mitä tietoja tarvitset ongelman ratkaisemiseen?

4 Janne ja Heikki

Janne asuu 7 kilometrin päässä koulusta. Jannen paras ystävä on Heikki. Heikki asuu 2 kilometrin päässä koulusta. Janne ja Heikki ovat tunteneet toisensa kolme vuotta. Ensi vuonna he menevät seitsemännelle luokalle. Jannen ja Heikin yhteinen ystävä Vesa asuu kilometrin päässä koulusta.

Kuinka kaukana Janne ja Heikki asuvat toisistaan? Alleviivaa tekstistä ratkaisun kannalta olennaiset tiedot.

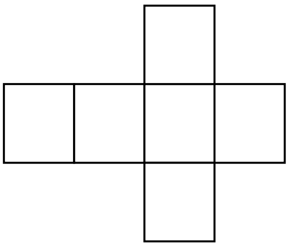
Piirrä ratkaisusi mahdollisimman tarkasti

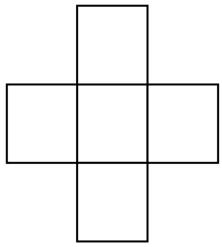
5 Kuutio 2

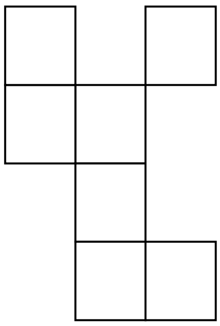
Ympyröi alla olevista esimerkeistä ne, joista voi rakentaa kuution.

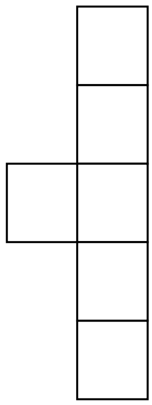
Kerro, miten päädyt vastaukseesi.

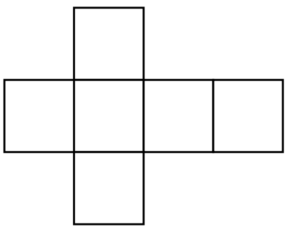
Miten voit tarkistaa vastauksen?

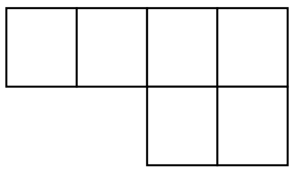






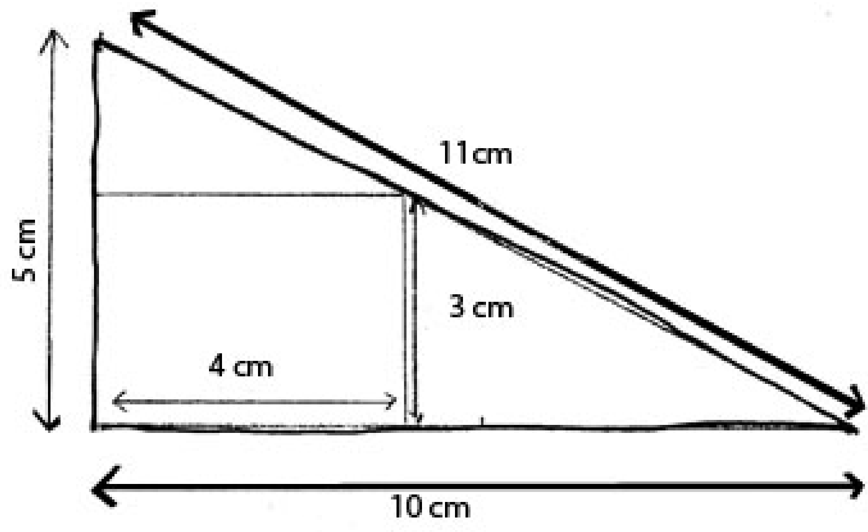






6 Kolmio

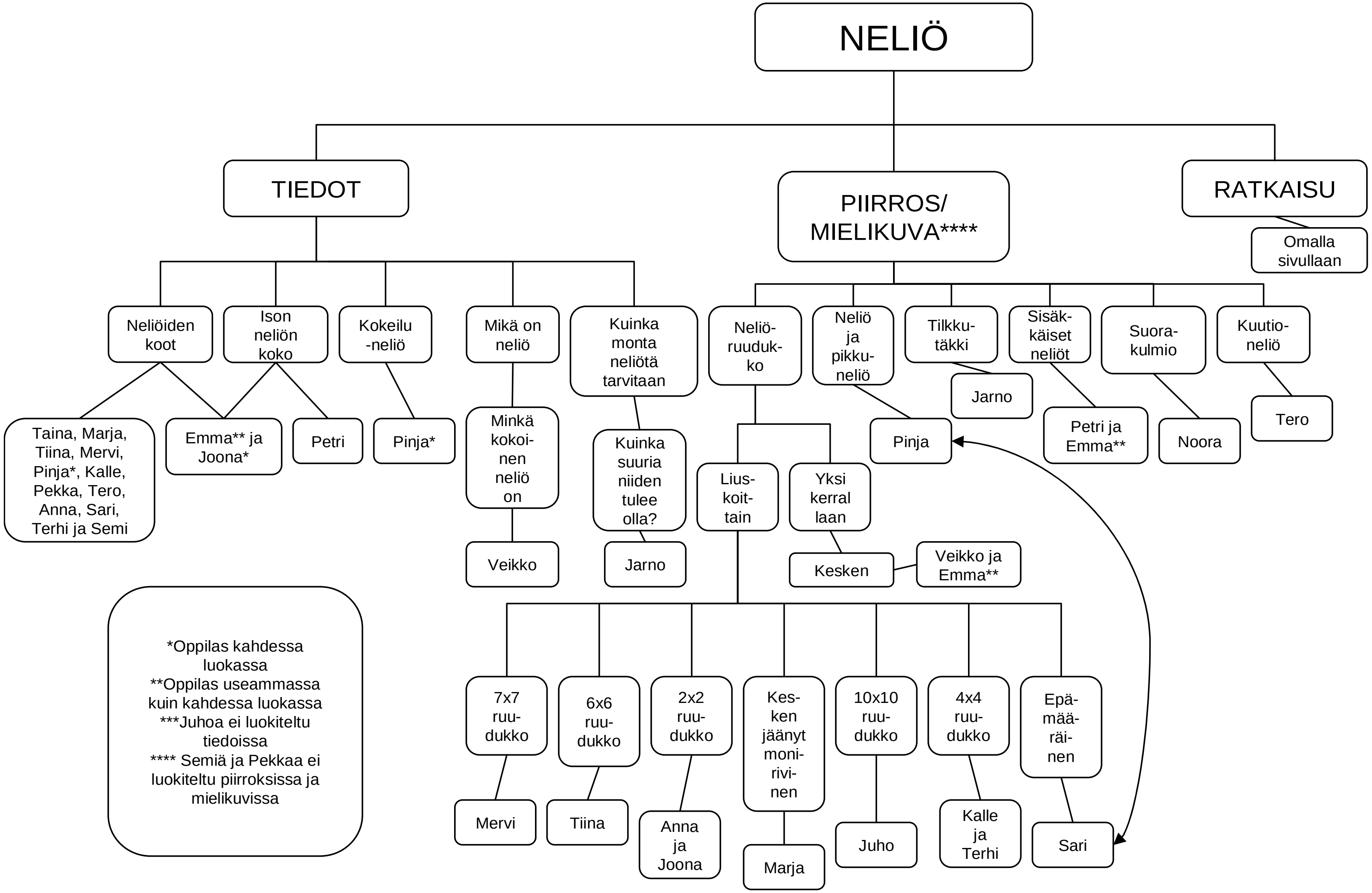
Mitä tietoja voit päätellä alla olevasta kolmiosta?

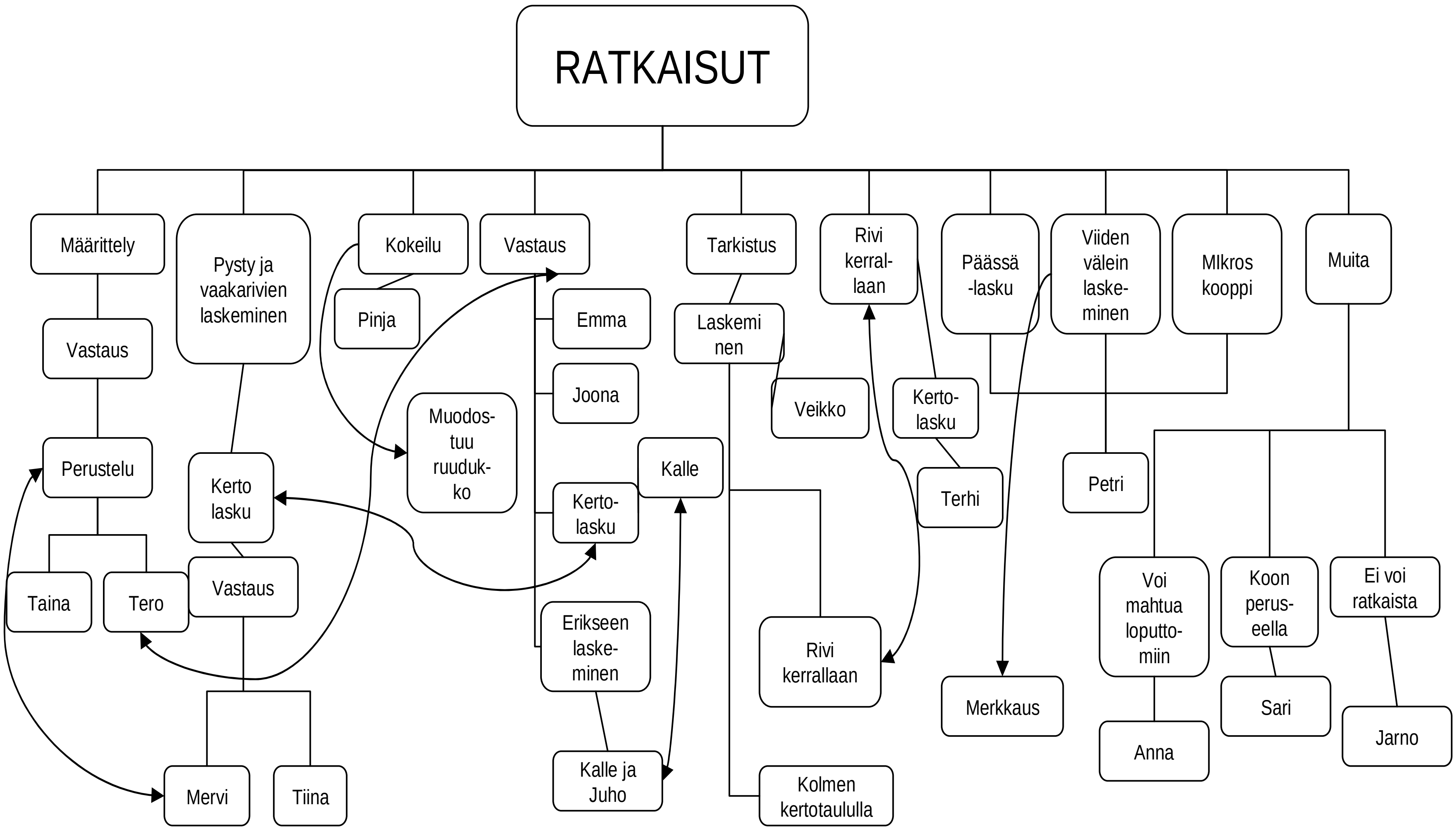


Liite 3: Oppilaiden tiedonkäyttö Kuutio 1-tehtävässä

	Havaittu tai tunnistettu tieto					Uskomukset			
Oppilas	Teksti	Kuva	Teksti ja kuva	Oma ajattelu	Tietojen yhdistely	Luulot	"Tiedemies"	Ei perusteita	Muut
Pekka	2	2	0	1	0	0	0	2	0
Tero	0	4	1	1	0	1	0	0	0
Jarno	3	0	0	0	2	2	0	0	0
Tiina	3	0	1	0	0	1	0	1	1
Mervi	0	4	1	1	0	1	0	0	0
Veikko	1	3	0	0	1	1	1	0	0
Marja	0	2	0	0	3	0	0	2	0
Taina	3	1	0	0	1	1	0	1	0
Kalle	3	1	1	0	1	1	0	0	0
Pinja	1	1	3	1	0	1	0	0	0
Petri	2	0	0	3	2	0	1	0	0
Anna	3	0	0	2	1	0	0	0	1
Sari	0	0	1	1	0	0	0	0	5
Emma	1	3	0	1	0	0	0	0	2
Semi	2	4	0	1	0	0	0	0	0
Joona	2	1	1	1	0	1	0	0	1
Terhi	2	2	0	2	0	1	0	0	0
Juho	0	2	0	1	0	0	0	0	5
Yht	28	30	9	16	11	11	2	6	16

Liite 4: Käsitekartat tiedoista, mielikuvista ja ratkaisuista.





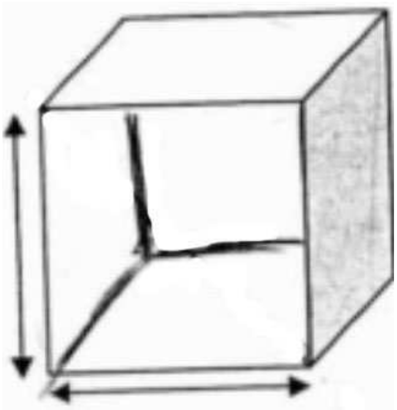
RATKAISUT
Määrittely
Vastaus
Perustelu
Taina
Tero
Pysty ja vaakarivien laskeminen
Kerto lasku
Vastaus
Mervi
Tiina
Kokeilu
Pinja
Muodos-tuu ruuduk-ko
Vastaus
Emma
Joona
Kalle
Kerto-lasku
Erikseen laske-minen
Kalle ja Juho
Tarkistus
Laskemi nen
Veikko
Rivi kerrallaan
Kolmen kertotaululla
Rivi kerral-laan
Kerto-lasku
Terhi
Päässä -lasku
Viiden välein laske-minen
Petri
Merkkaus
MIkros kooppi
Muita
Voi mahtua loputto-miin
Anna
Koon perus-eella
Sari
Ei voi ratkaista
Jarno

Liite 5: Toistuneet luokat ja ratkaisumenetelmät

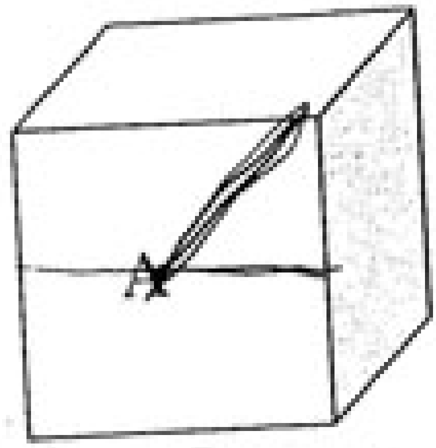
Oppilas	Tietojen yhdistely Kuutio 1	Tietojen yhdistely Muut	Ei perusteita Kuutio 1	Ei perusteita Muut	Epäolennaiset Kuutio 1	Epöäolennaiset Muut	Yksi ratkaisu Kuutio 1	Yksi ratkaisu Muut
Pekka	0	0	2	6	1	2	0	0
Tero	0	0	0	0	0	0	0	0
Jarno	2	0	0	0	0	2	0	0
Tiina	0	0	1	0	0	0	1	2
Mervi	0	1	0	0	0	0	0	0
Veikko	1	0	0	0	2	1	1	0
Marja	3	0	2	0	0	0	0	0
Taina	1	1	1	1	0	0	1	1
Kalle	1	0	0	0	0	0	0	0
Pinja	0	0	0	0	0	0	0	0
Yht	8	2	6	7	3	5	3	3

Oppilas	Apuväline Kuutio1	Apuväline Muut	Mallintaminen Kuutio 1	Mallintaminen Muut	Perushahmotus Kuutio 1	Perushahmotus Muut
Pekka	0	0	0	2	0	0
Tero	0	1	0	2	0	0
Jarno	0	0	1	3	0	0
Tiina	0	0	0	0	0	0
Mervi	1	1	1	3	0	0
Veikko	1	2	0	3	0	0
Marja	0	0	1	3	0	0
Taina	0	0	0	0	0	0
Kalle	0	1	0	0	1	3
Pinja	0	0	2	3	0	0
Yht	2	5	5	19	1	3

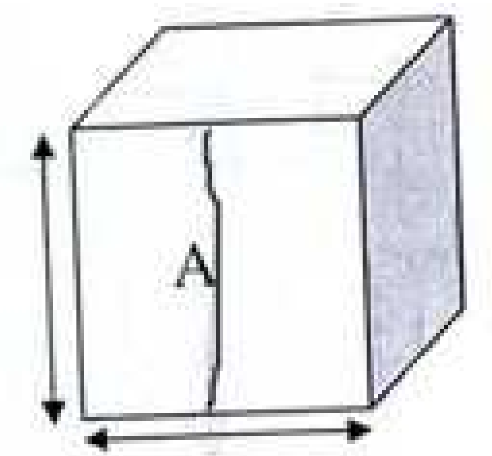
Liite 6: Kuutio 1-tehtävän piirrokset



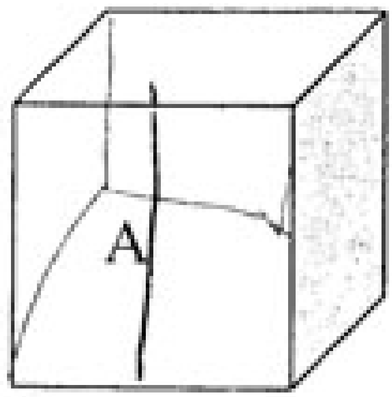
Teron läpinäkyvä kuutio



Petrin käsitys halkaisijasta

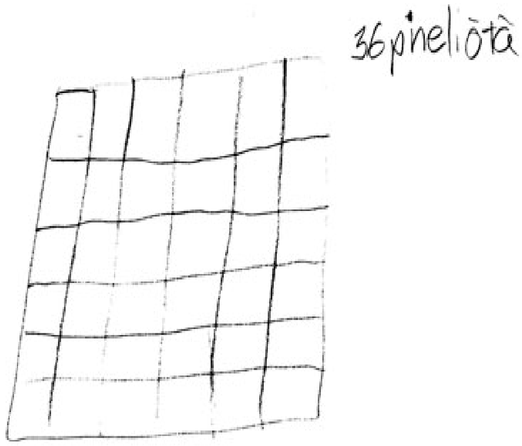


Tainan käsitys halkaisijasta

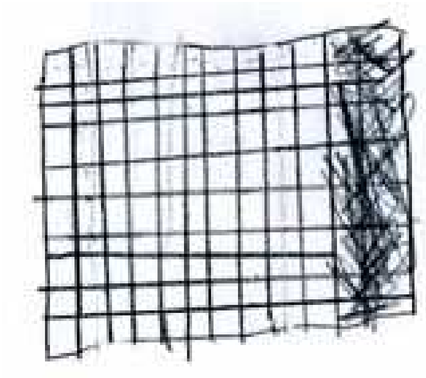


Terhin halkaisija

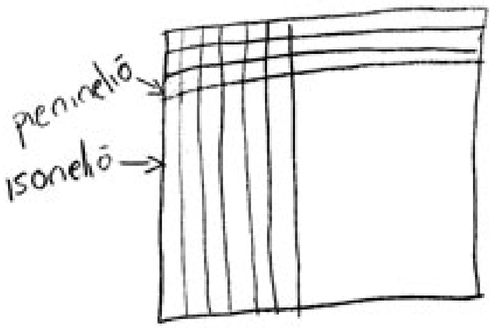
Liite 7: Neliö tehtävän piirrokset



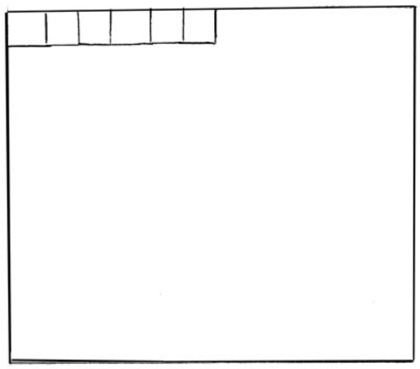
Tiinan neliöruudukko



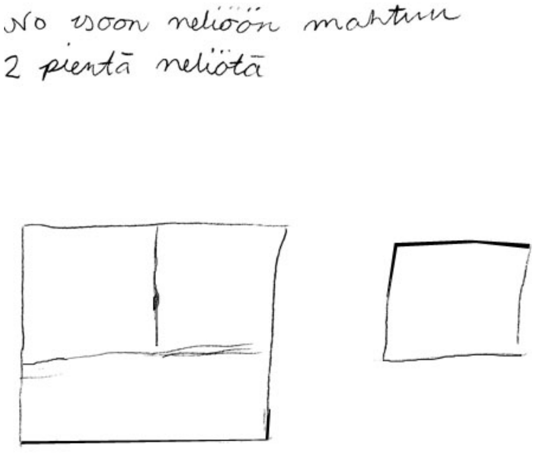
Juhon neliöruudukko



Marjan aloittama piirustus Neliö-tehtävässä

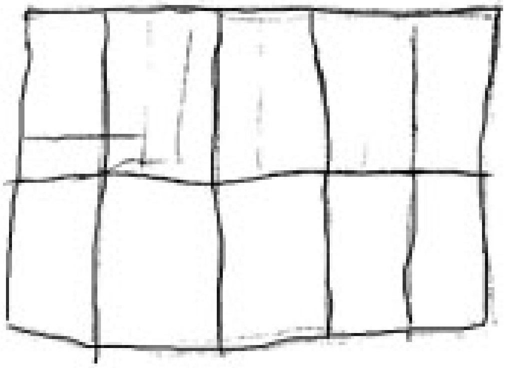


Veikon neliö

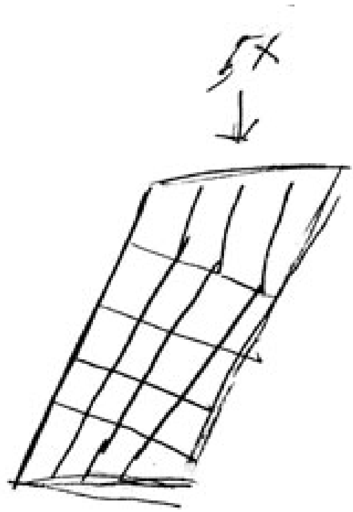


Sarin neliö ja pikkuneliö

Emman sisäkkäiset neliöt

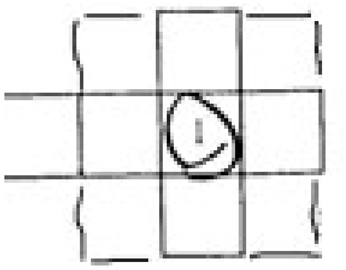


Tainan suorakulmio



Teron kuutioneliö

Liite 8: Kuutio 2-tehtävän piirrokset



Veikon yhdeksän ruudun kuutio