GEOGEBRA-AVUSTEINEN TUTKIVA MATEMATIIKKA OPETUSHARJOITTELUSSA

Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta

Markus Hähkiöniemi (toim.)

Jyväskylän yliopisto
Opettajankoulutuslaitos
ISBN: 978-951-39-4623-4

SISÄLLYS

ESIPUHE

Tässä artikkelikokoelmassa julkaistavat tutkimusraportit syntyivät osana johtamaani ”Tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa” -projektia. Projektin tavoitteena on tarkastella tekijöitä, joista tutkiva matematiikan oppiminen muodostuu sekä kehittää ohjeistusta tutkivan matematiikan käytännön toteutukseen.

Opetin matematiikan aineenopettajiksi opiskeleville kahdeksan 45 minuutin oppituntia tutkivan matematiikan periaatteita kurssilla ”OPEA411 Syventävä ainepedagogiikka”. Lisäksi kurssin ”OPEA611 Aineenopettaja työnsä tutkijana” 10 oppitunnin aikana perehdyimme tutkivaa matematiikkaa käsitteleviin tutkimuksiin, opetusta kehittämään pyrkiviin tutkimusmenetelmiin ja videoanalyysiin. Näistä 18 tunnista opetusharjoittelijat käyttivät GeoGebra-ohjelmaa kuudella tunnilla.

Tämän jälkeen jokainen opetusharjoittelija toteutti yhden tutkivan matematiikan tunnin. Tunnit suunniteltiin 2–4 hengen ryhmissä. Tuntien suunnitteluun sai ohjausta minulta ja normaalikoulun ohjaavilta opettajilta. Yhteensä tutkivan matematiikan tunteja toteutettiin 26, joista GeoGebra-tunteja oli 14. Kaikki tuntisuunnitelmat tehtävämonisteineen on julkaistu sivulla http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011. Tuntisuunnitelmat sisältävät myös linkit käytettyihin GeoGebra-sovelluksiin. Tunnit videoitiin kahdella kameralla. Seurasin toisella käsivaralla olevalla kameralla opettajaa, jolla oli langaton mikrofoni. Toista jalustalla olevaa kameraa käytti opetusharjoittelija. Tämä kamera kuvasi yhtä oppilasryhmää, jolla oli langaton mikrofoni. Osalla tunneista käytettiin myös ruudunkaappaus-ohjelmaa, joka tallentaa kaikki tietokoneen ruudun tapahtumat. Myös oppilaiden kirjalliset tuotokset kerättiin.

Opetusharjoittelijat kehittivät samoissa 2–4 hengen ryhmissä sopivan videoanalyysimenetelmän ja analysoivat tunnit. Osa kehitti oman luokittelun, jonka mukaan he koodasivat tunnit. Osa sen sijaan käytti aiemmissa tutkimuksissa käytettyä luokittelua tehden siihen tarvittavat muutokset. Jotkut ryhmät myös analysoivat opiskelijoiden päättelyprosesseja ilman luokittelua. Kaikkien analyysimenetelmien tavoitteena oli muodostaa laadullista tietoa opettajan tai oppilaiden toiminnasta tutkivan matematiikan tunneilla. Näin pyrittiin ymmärtämään tutkivan matematiikan prosesseja.

Opiskelijat kirjoittivat ryhmissä tässä teoksessa julkaistavat tutkimusraportit ja pitivät seminaariesityksen. Raportit havainnollistavat hyvin sitä, mitä tutkiva matematiikka käytännössä on. Toivottavasti muutkin opettajat saavat niistä ideoita opetuksen kehittämiseen tutkivan matematiikan suuntaan. Myös seminaareissa heräsi paljon keskustelua siitä, miten matematiikkaa opitaan ja miten sitä pitäisi opettaa.

Jyväskylässä kesällä 2011 Markus Hähkiöniemi

JOHDATUS GEOGEBRA-AVUSTEISEEN TUTKIVAAN MATEMATIIKKAAN

Markus Hähkiöniemi

markus.hahkioniemi@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

JOHDANTO

Matematiikan oppimisen ja opetuksen tutkijayhteisössä on jo pitkään pidetty tehokkaina oppilaslähtöisiä, vuorovaikutusta korostavia opetusmenetelmiä, joissa oppilaat itse tutkivat jotain matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä. Tämän tyylisistä opetusmenetelmistä käytetään useita erilaisia nimityksiä kuten tutkiva matematiikka (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992), tutkiva oppiminen (Goos, 2004; Borasi, Fonzi, Smith & Rose, 1999; Staples, 2007), avoin lähestymistapa (Nohda, 2000; Pehkonen, 1997), ongelmakeskeinen oppiminen (Wood & Sellers, 1997), reformi henkinen opetus (Lloyd, 2002), kognitiivisesti ohjattu oppiminen (Fennema ym., 1996) ja elämyksellinen matematiikan opetus (Portaankorva-Koivisto, 2010). Tässä yhteydessä tällaisista opetusmenetelmistä käytetään yleisnimitystä tutkiva matematiikka.

Tutkivan matematiikan ideana on, että oppilaat tutkivat jotain matematiikan ilmiötä ratkaistessaan ei-standardeja tehtäviä. Tehtävät on suunniteltu siten, että oppilaiden ratkaisuissa tulevat todennäköisesti esille tärkeimmät oppimistavoitteen mukaiset ideat. Tehtäviin on yleensä monia erilaisia ratkaisumenetelmiä, jotka saattavat sisältää erilaisia matemaattisia ideoita. Siten tutkiva matematiikka hyödyntää avointa ongelmanratkaisua, jossa oppilaita rohkaistaan kehittämään useita erilaisia ratkaisuja (Nohda 2000; Pehkonen 1997, 2003). Tutkivassa matematiikassa oppilaat tutkivat matematiikkaa omista lähtökohdistaan käsin. Oppilaat voivat käyttää esimerkiksi omia epästandardeja merkintöjä, ja heidän kehittämänsä ideat voivat olla puutteellisia. Opettaja yrittää ymmärtää oppilaiden merkintöjä ja ideoita ja rohkaisee heitä kehittämään niitä ilman liiallista täsmällisyyden vaatimista. Vasta tunnin lopussa opettaja yhdistää oppilaiden merkinnät standardeihin merkintöihin ja huolehtii, että heidän ideansa viimeistellään. Tällä pyritään siihen, että matematiikka, jota luokassa rakennetaan, on oppilaiden matematiikkaa eli että oppilaille kehittyy matematiikan omistajuus (ks. esim. Francisco & Maher, 2005). Koska oppilaat saavat työskennellä omalla tasollaan käyttäen omia merkintöjään, on mahdollista, että kaikki oppilaat tutkivat matematiikkaa, harrastavat matemaattista ajattelua, kehittävät matemaattisia ideoita ja keskustelevat matematiikasta.

Aiemmat tutkimukset osoittavat selvästi, että tutkiva matematiikka tehostaa oppimista. Tutkivan matematiikan on todettu kehittävän oppilaiden ymmärtämistä ja matemaattisen ajattelun taitoja (Fennema ym., 1996; Hähkiöniemi, 2006a, 2006b;

Wood & Sellers, 1997) sekä luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja (Kwon, Park & Park, 2006; Silver, 1997). Tutkivan matematiikan kautta opitut tiedot ovat pysyviä ja sovellettavissa uusiin tilanteisiin (Powell, 2003; Francisco & Maher, 2005). Tutkiva matematiikka kehittää myös oppilaiden asenteita ja uskomuksia oppimisen kannalta hedelmälliseen suuntaan (Francisco, 2005; Wood & Sellers, 1997). Sullivanin, Mousleyn ja Zevenbergerin (2006) mukaan tutkiva matematiikka, erityisesti avoin lähestymistapa, mahdollistaa kaikkien oppilaiden huomioimisen heterogeenisessä ryhmässä.

TUTKIVAN MATEMATIIKAN TUNNIN RAKENNE

Suomessa tyypillisen matematiikan tunnin rakenne on seuraava: yleensä opettaja ensin opettaa uuden asian ja näyttää esimerkkejä, minkä jälkeen oppilaat harjoittelevat käyttämään opetettua asiaa ratkaistessaan tehtäviä kirjasta (Savola, 2008). Tutkivassa matematiikassa sen sijaan tunti muodostuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheesta (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Hähkiöniemi (hyväksytty) on esittänyt konkreettisen kuvauksen eräästä tämän rakenteen mukaisesta japanilaisesta tunnista.

Alustusvaihe

Alustusvaiheessa opettaja esittelee tehtävät mutta ei kuitenkaan esitä valmiita ratkaisumenetelmiä tai anna esimerkkejä. Alustusvaiheessa opettaja huolehtii, että oppilaat ymmärtävät tehtävät. Opettaja voi myös korostaa tehtävien merkityksellisyyttä ja motivoida oppilaita. Tarvittaessa voidaan myös kerrata joitakin aiemmin opittuja asioita niin, että tehtävät eivät kuitenkaan muutu mekaaniseksi laskemiseksi. Varsinkin, jos tutkiva matematiikka on oppilaille uusi työskentelymuoto, voi opettaja myös keskustella työtavoista. Oppilaita voi esimerkiksi rohkaista keksimään luovasti erilaisia ratkaisumenetelmiä ja keskustelemaan keskenään.

Tutkimusvaihe

Tutkimusvaiheessa opiskelijat ratkaisevat ryhmissä (2–3 hlö) tehtäviä opettajan kierrellessä ohjaamassa heidän työskentelyään. Tutkimusvaiheessa tärkeintä on, että opettaja kuuntelee oppilaita ja on aidosti kiinnostunut heidän ajattelustaan. Opettaja voi painottaa ajattelun merkitystä oikean vastauksen sijasta kysymällä oppilailta perusteluja tai miten he päättelivät ratkaisunsa. Erityisesti kun oppilaat kysyvät onko heidän vastauksensa oikein, on tarkoituksen mukaista olla vastaamatta ja kysyä oppilailta esimerkiksi miten he sen päättelivät. Opettaja voi sitten kehua oppilaiden päättelyä tai kiinnittää heidän huomionsa johonkin tarkennusta kaipaavaan kohtaan. Välttämällä ottamasta kantaa oppilaiden vastausten oikeellisuuteen opettaja rakentaa matemaattista kulttuuria, jossa oikean vastauksen sijasta tärkeintä ovat perustelut. Opettajan tehtävänä tutkimusvaiheessa on siis ohjata oppilaita ”oikeanlaiseen” matemaattiseen työskentelyyn. Lisäksi on tärkeää motivoida, kannustaa, aktivoida ja kehua oppilaita. Oppilaiden kehumisessa tulee kiinnittää huomiota siihen, että ei kehu oppilasta itseään esimerkiksi fiksuudesta vaan kehuu hänen työskentelyään. Tällä pyritään vahvistamaan oppilaan uskomusta oman työn merkityksestä matematiikan oppimisessa. Tutkivassa matematiikassa syntyy helposti tilanteita, joissa aiemmin heikosti matematiikassa menestynyt oppilas keksii itse jonkin ratkaisumenetelmän. Tällöin opettajan kannattaa käyttää tämä tilanne oppilaan itsetunnon vahvistamiseen ja oppilaan innostamiseen. Näin opettaja voi muuttaa niiden oppilaiden asenteita, jotka luulevat, että he eivät osaa matematiikkaa.

Kun opettaja ohjaa oppilaita tutkimusvaiheessa, hänen tulisi välttää paljastamasta ratkaisumenetelmää, mutta kuitenkin ohjata oppilasta. Hähkiöniemi ja Leppäaho (2010, 2011) ovat havainnollistaneet asiaa erottamalla kolme ohjaamisen muotoa:

a) Aktivoiva ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota oppilaan ratkaisussa olennaiseen asiaan ja johdattelee oppilasta tarkastelemaan sitä. Tällaisia olennaisia asioita ovat esimerkiksi perusteleminen, teknologian rajoitteiden ymmärtäminen, siirtyminen kokeilemisesta päättelemiseen, ratkaisun syventäminen, yhteyksien rakentaminen ja yllättäen avautuvien tutkimusmahdollisuuksien hyödyntäminen.

b) Passivoiva ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa, mutta hän myös esittää itse suoraan ratkaisumenetelmän tai pyytää oppijalta muita ratkaisutapoja ilman motivointia. Tällä tavoin opettaja ”passivoi” opiskelijan ratkaisutilanteessa ja vie opiskelijalta mahdollisuuden ongelmanratkaisuun.

c) Pinnallinen ohjaus, jossa opettaja ei kiinnitä huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa tai esittää oppilaan ratkaisuun liittymättömiä kommentteja omista lähtökohdistaan käsin.

Esimerkiksi jos opettaja huomaa oppilaan saaneen johonkin tehtävään vastauksen, voi opettaja käyttää aktivoivaa ohjausta pyytämällä oppilasta selittämään, mistä hän tietää vastauksen olevan oikein. Samassa tilanteessa opettaja käyttää passivoivaa ohjausta, jos hän itse selittää miksi vastaus on oikein. Pinnallisessa ohjauksessa opettaja ei taas ollenkaan kiinnitä huomiota vastauksen perustelemiseen vaan esimerkiksi toteaa vastauksen olevan oikein.

Tutkivassa matematiikassa opettaja toimii eräänlaisena orkesterin johtajana, joka organisoi työskentelyä ja huolehtii, että tutkimustehtävien parissa kehitetyt ideat suppenevat kohti standardia matematiikkaa (vrt. Ball 1993). Siksi opettajan onkin tärkeää ohjata oppilaita vaikka he eivät kysyisikään neuvoa.

Koontivaihe

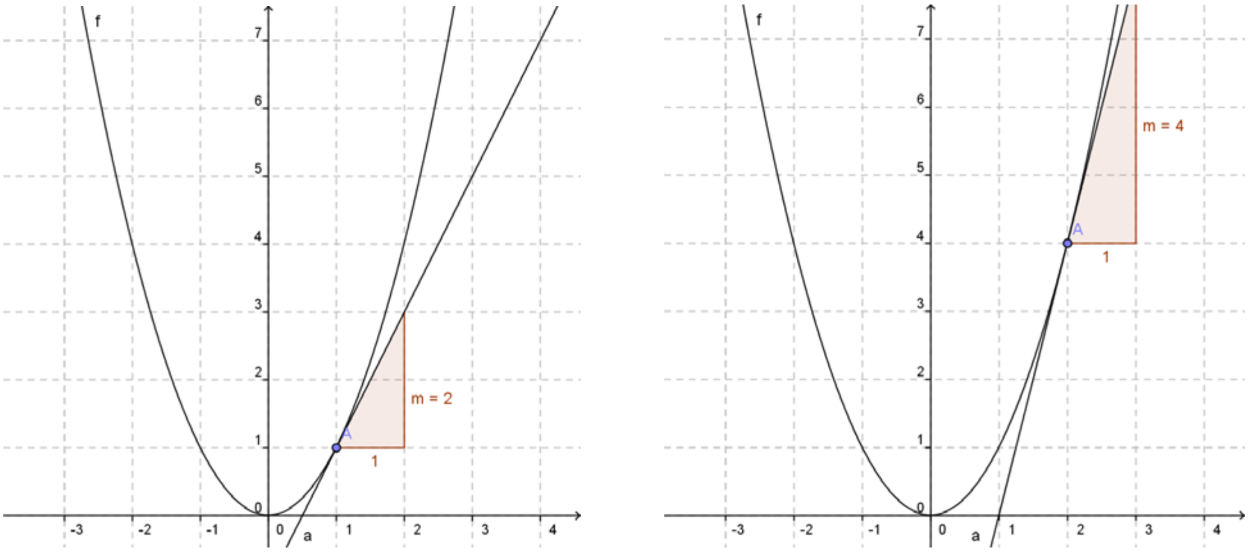
Koontivaiheessa opettaja pyytää opiskelijoita esittämään ratkaisumenetelmiään ja johtaa koko luokan yhteistä keskustelua. Koontia voi tehostaa, jos opettaja jo tutkimusvaiheessa laatii suunnitelman siitä mitä ryhmiä ja missä järjestyksessä hän pyytää esittämään ratkaisujaan (Stein ym., 2008). Valinnan perusteena voi olla esimerkiksi erilaiset ajattelutavat tai merkinnät, potentiaalisten virhekäsitysten esille tuleminen, menetelmien tehokkuus tai perustelujen syvällisyys. Tässä vaiheessa on tärkeää saada oppilaat selittämään ratkaisujaan ja ottamaan kantaa muiden ratkaisuideoihin. Opettaja nostaa ratkaisuista olennaiset ideat esille ja korostaa, mitä niistä opitaan. Koontivaiheessa opettaja myös tiivistää tunnin opetuksen ja ottaa käyttöön standardit merkinnät niin, että ne pohjautuvat oppilaiden ratkaisuihin. Opettaja voi esimerkiksi kirjoituttaa oppilaiden vihkoihin teoreeman tai määritelmän. Näin opettaja "virallistaa" opitun asian. Tavoitteena on, että oppilaille jää selvä kuva siitä, mikä tunnin opetus oli ja mikä on lopullinen muotoilu esimerkiksi jollekin teoreemalle. Jos koontivaihetta ei ole, on vaarana että oppilaiden tutkimukset jäävät irrallisiksi tai he jäävät epätietoisiksi siitä mikä opittava asia oli.

GEOGEBRAN KÄYTTÖ TUTKIVASSA MATEMATIIKASSA

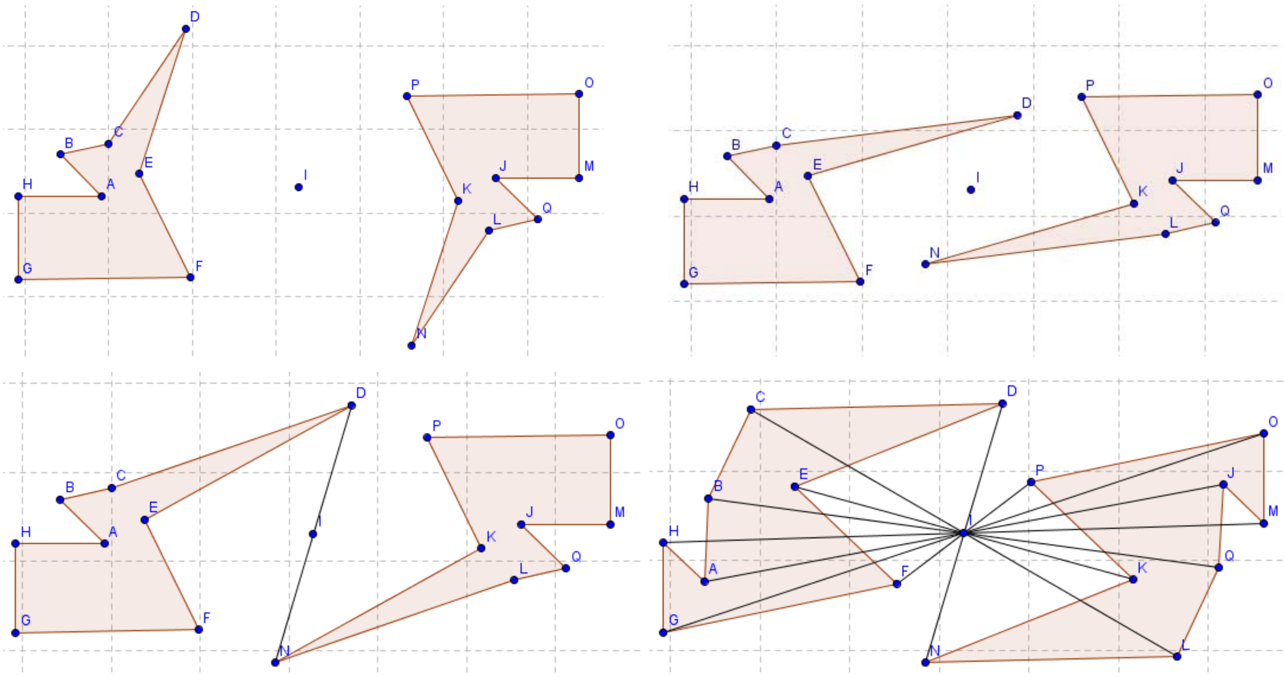
Teknologia tarjoaa uusia apuvälineitä tutkivan matematiikan toteuttamiseen. Dynaamisen geometrian tietokoneohjelmien (esim. GeoGebra, Cabri, Geometer's Sketchpad) on esitetty edistävän tutkivaa matematiikkaa, koska niiden avulla oppilas voi esimerkiksi raahata jonkin kuvion pisteitä ja tutkia, miten se vaikuttaa kuvion ominaisuuksiin (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Jones, 2000; Lew & So, 2008; Marrades & Gutiérrez, 2001). Tässä tutkimuksessa käytettiin GeoGebra-ohjelmaa (www.geogebra.org), joka sisältää dynaamisen geometrian lisäksi joitakin symbolisen laskennan ohjelmien ominaisuuksia (esim. polynomifunktion derivointi). GeoGebran valintaan vaikutti ohjelman ilmaisuus, monipuolisuus ja helppokäyttöisyys.

Opettajan on helppo havainnollistaa GeoGebralla matematiikan käsitteitä. Kuitenkin oppiminen on tehokkaampaa, jos oppilaat itse saavat tutkia matematiikkaa GeoGebralla. Tutkimusten tavoitteena on oppia matematiikkaa, ei ohjelman käyttöä. Samoin tutkimusten tulee olla oikeita tutkimuksia, joissa oppilaat joutuvat ajattelemaan, sen sijaan, että tehtäisiin vain ohjeiden mukaan. Tutkimukset täytyy myös muotoilla niin, että oppilailla on selkeä matemaattinen ongelma. Tehtäväksi ei käy "raahaa liukua ja katso mitä tapahtuu". Lisäksi tehtävien ratkaisemiseen täytyisi sisältyä myös deduktiivista päättelyä empiirisen havainnoinnin lisäksi. Esimerkkejä nämä ehdot täyttävistä tehtävistä löytyy Kuvioista 1 ja 2 sekä tämän teoksen tutkimusraporteista. Toteutetuilla GeoGebra-tunneilla oppilaat työskentelivät yleensä pareittain niin, että jokaisella parilla oli oma tietokone.

Oppilaat voivat tutkia GeoGebralla esimerkiksi, miten funktion parametrien muuttaminen vaikuttaa funktion kuvaajaan. Siten GeoGebran avulla voidaan vahvistaa kuvaajien ja lausekkeiden välisiä yhteyksiä, mikä on yksi matematiikan oppimisen päätavoite (ks. Hähkiöniemi, 2006a, 2006b). Esimerkiksi derivointisääntöjen muodostamisessa GeoGebralla voidaan auttaa opiskelijoita ymmärtämään derivaattafunktio funktiona, jonka arvo kohdassa x on funktiolle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin (ks. Kuvio 1). GeoGebralla oppilaat voivat myös nopeasti kokeilla erilaisia ratkaisumahdollisuuksia sekä muodostaa ja testata konjektuureja. Opettajan ei tarvitse kertoa mitä esimerkiksi peilaus pisteen suhteen tarkoittaa vaan oppilaat voivat itse tutkia asiaa (ks. Kuvio 2).



Kuvio 1. Opiskelijoita pyydetään raahaamalla pistettä A, muodostamaan sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x^2$ derivaatta missä tahansa kohdassa x (ks. Liuha, Luhtavaara & Tirronen, tämä teos).



Kuvio 2. Oppilaat voivat GeoGebralla selvittää miten kuvion peilaus pisteen suhteen tapahtuu (ks. Anttila & Heimonen, tämä teos).

Dynaamisia matematiikkaohjelmia kuten GeoGebraa käytettäessä on tyypillistä, että oppilaat havaitsevat ohjelmaa käyttäen, että jokin ominaisuus pätee tietyille objekteille. Ohjelman avulla oppilaat vakuuttuvat helposti siitä, että konjektuuri on tosi. Siten ei olekaan mielekästä todistaa konjektuuria, jotta tiedettäisiin onko se tosi. Sen sijaan todistaminen tällaisessa tilanteessa tarkoittaa syyn muodostamista sille, mistä havaittu ilmiö johtuu (Arzarello ym., 2002; Christou ym., 2004; Jones, 2000). Tätä mahdollisuutta opettajan kannattaa käyttää. Kun oppilaat ovat itse huomanneet jonkin ominaisuuden pätevän aina, on heille mielekkäämpää alkaa pohtia, mistä tämä ominaisuus johtuu.

GeoGebraa käytettäessä opettaja voi alustaa tiedostoja siten, että oppilaiden ei tarvitse osata käyttää kuin muutamaa toimintoa. Siksi ei tarvitse ensin opettaa ohjelman käyttöä ja vasta sitten opiskella matematiikkaa sen avulla. Sen sijaan oppilaat voivat oppia ohjelman käytön vähitellen. Esimerkiksi tässä teoksessa esiteltäviä tunteja varten ei järjestetty oppilaille erillistä opetusta GeoGebran käytöstä. Opettaja vain näytti alustusvaiheessa tarvittavat toiminnot. Siten tämän teoksen tutkimusraportit valaisevat, miten GeoGebraa voi alkaa käyttämään ryhmän kanssa, joka ei ennestään ole opiskellut ohjelman käyttöä. On myös huomattava, että GeoGebran käyttäminen ei ole välttämätöntä tutkivassa matematiikassa, mutta aihepiiristä riippuen se helpottaa toteutusta. Tässäkin teoksessa on esimerkkejä onnistuneista tutkivan matematiikan tunneista, joilla ei käytetä GeoGebraa tai muita tietokoneohjelmia.

KULTTUURIN LUOMINEN

Opetus on myös kulttuurin luomista. Ryhmän työskentelystä voidaan erottaa ääneen lausumattomia käyttäytymisodotuksia eli normeja (esim. Cobb ym., 1992). Esimerkiksi joissakin matematiikan opetusryhmissä oppilaat ja opettaja odottavat, että oppilaiden tulee ratkaista tehtävät annettujen ohjeiden mukaan ja että opettaja kertoo ovatko oppilaat ratkaisseet tehtävät oikein. Tutkivassa matematiikassa pyritään luomaan erilaisia odotuksia. Tutkivassa matematiikassa toivottavia normeja ovat esimerkiksi, että opettaja ei anna esimerkkejä vaan oppilaat itse rakentavat oman ratkaisumenetelmänsä ja että oppilaiden tulee itse varmistua siitä onko heidän ratkaisunsa järkevä. Cobb ym. (1992) ovatkin erottaneet perinteisen koulumatematiikan kulttuurin tutkivan matematiikan kulttuurista.

On luonnollista, että jos oppilaat ovat tottuneet koulumatematiikan kulttuuriin ja opettaja yrittää luoda tutkivan matematiikan kulttuuria, niin tapahtuu kulttuurien yhteentörmäyksiä (McNeal & Simon, 2000). Oppilaat voivat esimerkiksi odottaa, että opettaja näyttää esimerkin, jonka mukaan tehtävä ratkaistaan ja kun opettaja ei annakaan esimerkkiä, niin oppilaat vastustavat tätä. Oppilaat voivat väittää, että he eivät osaa ratkaista tehtävää ilman esimerkkiä tai että opettajan kuuluu tehdä työnsä eli opettaa, miten tehtävä ratkaistaan. Opettajan ei kannata tällaisissa tilanteissa antaa periksi vaan muistaa, että kulttuurin luominen vie aikaa. Opettaja voi neuvotella oppilaiden kanssa suoraan tai epäsuorasti uusista normeista (McNeal & Simon, 2000). Suoraan tämä tapahtuu, kun opettaja ja oppilaat keskustelevat siitä, mitä matematiikan ymmärtäminen tarkoittaa ja miten matematiikkaa opitaan. Opettaja voi neuvotella normeista epäsuorasti esimerkiksi luomalla tilanteita, joissa oppilaat pystyvät ratkaisemaan tehtäviä ilman esimerkkejä.

Goos (2004) on tutkinut, miten opettaja luo tutkivan matematiikan kulttuurin. Goos erotteli analyysissaan useita konkreettisia tapoja, miten eräs opettaja toimi tietyissä tilanteissa, luodakseen ja ylläpitääkseen tutkivan matematiikan kulttuuria. Esimerkiksi opettaja vältti arvioimasta oppilaiden ideoita ja pyysi oppilaita ottamaan kantaa toistensa ideoihin. Myös muissa tutkimuksissa on löydetty samankaltaisia tutkivan matematiikan kulttuuriin vaikuttavia tekijöitä (Francisco & Maher, 2005). Franciscon (2005) tutkimuksen mukaan oppilaat myös alkavat ajan myötä arvostaa tutkivan matematiikan kulttuuria.

Lähteet

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM – International Reviews on Mathematics Education, 34*(3), 66–72.

Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 93*(4), 373–397.

Borasi, R., Fonzi, J., Smith, C.F., & Rose, B.J. (1999). Beginning the process of rethinking mathematics instruction: A professional development program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 49–78.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004) Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 339–352.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*(3), 573-604.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V., & Empson, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children’s thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 403–434.

Francisco, J. (2005). Students’ reflections on their learning experiences: lessons from a longitudinal study on the development of mathematical ideas and reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 51–71.

Francisco, J., & Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3–4), 361–372.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.

Hähkiöniemi, M. (hyväksytty). Japanilaista matematiikkaa. Hyväksytty teokseen P. Tikkanen (Toim.), Varga-Neményi -kesäseminaari 7.-8.6.2011.

Hähkiöniemi, M. (2006a). *The role of representations in learning the derivative.* Raportti 104. Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto.

Hähkiöniemi, M. (2006b). *Ajattelun apuvälineet – tapaustutkimus derivaatan representaatioista*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2011). Do GeoGebra-solutions need to be justified? Teachers' levels of guidance. Teoksessa Ubuz, B. (Toim.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 309. Ankara, Turkey: PME.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P.E. Hirvonen, & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review, 7*(1), 51-61.

Jones, K. (2001). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55–85.

Lew, H-C. & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Toim.), *Proc. of the joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, s. 313-320). Morelia, Mexico: PME.

Lloyd, G. (2002). Mathematics teachers' beliefs and experiences with innovative curriculum materials. The role of curriculum in teacher development. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 313-330). Secaucus, NJ: Kluwer.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87–125.

McNeal, B. & Simon, M. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 475-509.

Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa T. Nakahara & M. Koyama (Toim.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, s. 39–53). Hiroshima, Japan: PME.

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu,* 6/2003, 35-38.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept ”open-ended problem”. Teoksessa E. Pehkonen (Toim.), *Use of open-ended problems on mathematics classroom* (s. 7–11). Research report 176. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto.

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). *Elämyksellisyyttä tavoittelemassa – narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta.* Acta Universitatis Tamperensis, 1550. Tampereen yliopisto.

Powell, A. (2003). *"So let's prove it!": Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task.* Julkaisematon väitöskirja. Rutgers University.

Savola, L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland*. Julkaisematon väitöskirja. The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 97*(3), 75-80.

Staples, M. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and Instruction, 25*(2), 161–217.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

Wood, T. & Sellers, P. (1997). Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 163-186.

OSA 1: TUTKIVAA MATEMATIIKKAA PERUSKOULUSSA

OPPILAIDEN ESITTÄMÄT KYSYMYKSET GEOMETRIAN TUNNEILLA

Helinä Anttila ja Minna Heimonen

helina.m.anttila@jyu.fi, minna.heimonen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tutkimuksessa tarkasteltiin kahta tutkivan matematiikan tuntia, joiden aiheina olivat suunnikkaan pinta-ala ja peilaaminen pisteen suhteen. Jälkimmäisellä tunnilla oppilaat käyttivät apunaan GeoGebraa. Tutkimuksessa analysoitiin oppilaiden esittämiä kysymyksiä tuntien aikana katsomalla videolta tuntien tallenteet ja poimien näiltä kaikki oppilaiden esittämät kysymykset. Kysymykset luokiteltiin aihepiireittäin. Tulosten mukaan oppilaat esittävät paljon käytännön toimintaan liittyviä kysymyksiä ja vähemmän tehtävien suorittamiseen tai tunnin aiheeseen liittyviä kysymyksiä. Lisäksi kysymysten perusteella havaittiin, että kirjallisten vastausten muotoilu tuotti oppilaille hankaluuksia.

JOHDANTO

Tutkimuksen tavoitteena on saada selville, minkä tyyppisiä kysymyksiä oppilaat esittävät tutkivan matematiikan tunneilla ja miten suuri osa näistä kysymyksistä on varsinaisesti matematiikkaan liittyviä kysymyksiä. Tutkimuksessa pyrittiin myös selvittämään kuinka paljon oppilaat ylipäänsä esittävät kysymyksiä tutkivan matematiikan tunneilla ja mitkä seikat mahdollisesti vaikuttavat esiintyvien kysymysten määrään. Tutkimusta olisi mielenkiintoista laajentaa tarkastelemalla perusteellisesti oppilaiden kysymysten taustalla olevia seikkoja sekä sitä, kuinka opettaja voisi omalla toiminnallaan vaikuttaa oppilaiden kysymysten määrään. Näiden asioiden tutkiminen voisi auttaa opettajaa muuttamaan omaa toimintaansa niin, että oppilaiden ei tarvitsisi kysyä niin paljoa esimerkiksi käytännön toimintaan liittyviä kysymyksiä.

Tutkivan matematiikan tunnin luonne saattaa osaltaan lisätä oppilaiden esittämien kysymysten määrää, sillä tutkivan matematiikan tunneilla opettajan ei tule antaa valmiita esimerkkejä eikä muutenkaan paljastaa oppilaille, miten tehtävät ratkaistaan. (Hähkiöniemi, 2010.) Tutkivan matematiikan tunnit noudattavat Steinin ym. (2008) mukaan yleensä seuraavanlaista rakennetta: ensin on alustusvaihe, jonka jälkeen tulee tutkimusvaihe ja tunnin lopussa on koontivaihe. Hähkiöniemen (2010) mukaan alustusvaiheen aikana usein kerrataan tunnin aikana tarvittavat, aiemmin opitut asiat sekä käydään läpi tunnin aihe ja tunnilla käytettävät työtavat. Tutkimusvaiheen tarkoituksena on, että oppilaat tutkivat jotakin matemaattista ongelmaa sekä kehittelevät ja perustelevat omia ratkaisuideoitaan. (Hähkiöniemi, 2010.) Tällä tavalla tutkien ja kehitellen oppilaat itse rakentavat omaa tietämystään, mikä on esimerkiksi Pehkosen (2003) mukaan edellytys sille, että oppilaat kykenevät käyttämään oppimaansa tietoa hyväkseen erilaisissa tilanteissa vielä pitkän ajan kuluttuakin. Tunnin lopussa olevassa koontivaiheessa käydään Hähkiöniemen (2010) mukaan yleensä läpi joitakin oppilaiden kehittämiä ratkaisuideoita ja lopuksi opettaja tiivistää tunnilla opitun asian.

MENETELMÄT

Suunnikkaan pinta-ala ja peilaus pisteen suhteen

Tutkimuksessamme analysoimme kahta seitsemännen luokan tutkivan matematiikan tuntia. Seuraavassa kuvailemme lyhyesti tuntien tavoitteet sekä esittelemme oppilaille tunneilla annetut tehtävät, tarkemmat tuntisuunnitelmat löytyvät Liitteistä 1 ja 2.

Ensimmäisellä tunnilla tavoitteena oli saada oppilaat keksimään jokin keino suunnikkaan pinta-alan laskemiseksi ja kannustaa heitä pohtimaan, miksi suunnikkaan pinta-ala voitaisiin laskea heidän keksimällään tavalla. Edelleen, korkeampana tavoitteena oli, että oppilaat tietäisivät kuinka suunnikaan pinta-ala oikeasti voidaan laskea ja että he myös ymmärtäisivät, miksi näin on. Oppilailla oli käytössään tavallisten muistiinpanovälineiden lisäksi pahvisia suunnikkaita sekä saksia, joiden avulla oppilaat pystyivät leikkaamaan suunnikkaita pienempiin osiin ja siten havainnoimaan niiden pinta-alaa. Tavoitteiden saavuttamiseksi oppilaille annettiin seuraavat tehtävät:

1. Pohdi, kuinka suunnikkaan pinta-ala saadaan laskettua.
2. Yritä keksiä jokin toinen keino suunnikkaan pinta-alan laskemiseksi.
3. Kuinka mittaisit suunnikkaan korkeuden?
4. Tutki, kuinka suunnikkaan pinta-ala muuttuu, kun sen kaikkien sivujen pituus kaksinkertaistuu.
5. Voiko suunnikkaan pinta-ala muuttua, jos sen sivujen pituudet eivät muutu?

Toisella tunnilla tavoitteena oli, että oppilaat ymmärtäisivät, kuinka jokin kuvio voidaan peilata pisteen suhteen ja mitä ylipäätänsä tarkoittaa pisteen suhteen peilaaminen. Tällä tunnilla oppilaat saivat käyttää työskentelyssä apunaan GeoGebraa, joka on geometrian ja algebran havainnollistamiseen soveltuva tietokoneohjelma. Oppilaille annetut tehtävät löytyvät kokonaisuudessaan Liitteestä 2, mutta tehtävissä oli olennaisena tarkoituksena pohtia seuraavia asioita:

1. Kuinka monella tavalla voit jakaa neliön yhteneviin osiin käyttämällä janaa tai suoraa?
2. a) Etsi sellainen piste, joka on yhtä kaukana molemmista pisteistä A = (1, 2) ja B = (3, 4). Kirjoita ylös, miten löysit pisteen?
   b) Voiko tällaisia pisteitä olla enemmänkin? Jos, niin mikä näistä pisteistä on lähimpänä pistettä A?
3. Monikulmio ABCDEF on peilattu pisteen suhteen monikulmioksi POMJQLNK. Selvitä, miten peilaus tapahtuu.

4. Etsi piste, jonka suhteen annettu kuvio on peilattu. Kirjoita miten etsitte ja millä tavoin löysitte pisteen.
5. Etsi tarkka piste (symmetriakeskus), jonka suhteen annettu kuvio peilautuu itsekseen. Kirjoita miten etsitte ja millä tavoin löysitte pisteen.

Aineiston keruu

Keräsimme aineistoa tutkimukseemme videoimalla oppitunnit sekä keräämällä oppilailta kirjalliset vastaukset kaikkiin tunnilla tehtyihin tehtäviin. Videointi tapahtui kahdella kameralla, joihin oli liitetty mikrofonit äänen tallentamiseksi. Alustus- ja koontivaiheen aikana molemmat kamerat kuvasivat yleisesti työskentelyä luokassa. Tutkimusvaiheen aikana toinen kameroista kuvasi opettajaa sekä niitä oppilaita, joita opettaja kävi neuvomassa. Toinen kamera puolestaan keskittyi tutkimusvaiheen aikana kuvaamaan vain yhden, ennalta valitun, oppilasparin työskentelyä.

Aineiston analyysi

Videoita katsoessamme kiinnitimme huomiota siihen, millaisia kysymyksiä oppilaat esittävät tutkivan matematiikan tunneilla. Aluksi poimimme videoilta kaikki oppilaiden esittämät kysymykset (Liite 3) ja tämän jälkeen jaottelimme ne erilaisiin aihealueisiin, sillä havaitsimme, että oppilaiden kysymykset poikkesivat laadultaan hyvinkin paljon toisistaan. Luokittelimme kysymykset yhdeksään eri kategoriaan, jotka olivat: käytännön toiminta, tehtävien ymmärtäminen, tehtävien tekeminen, vastauksien formalisoiminen, suunnikkaan korkeuden mittaaminen, suunnikkaan määritelmä, tietokoneen käyttö, GeoGebran käyttö sekä videointi. Näihin kategorioihin päädyimme, sillä oppilaiden kysymykset näyttivät selkeästi jakautuvan tällä tavalla. Tehtäviin liittyvien kysymysten jakaminen tehtävien ymmärtämiseen ja tekemiseen, sekä vastausten formalisointiin ei ehkä ollut aivan itsestään selvä, mutta pienen pohdinnan jälkeen sekin tuntui luonnolliselta jaottelulta. Tehtävien ymmärtämiseen liittyväksi kysymykseksi luokittelimme kysymykset, jotka selkeästi koskivat tehtävänantoa ja sen ymmärtämistä. Kategoriaan tehtävien tekeminen laitoimme kysymykset joista kävi ilmi, että oppilas oli ymmärtänyt tehtävänannon, mutta ei silti osannut tehdä tehtävää. Vastauksen formalisointiin puolestaan luokittelimme kysymykset, joista oli pääteltävissä, että oppilas oli ymmärtänyt tehtävänannon ja osannut tehdä tehtävän, mutta ei osannut muotoilla vastaustaan kirjallisesti.

TULOKSET

Analysoituamme tutkimusaineistoamme havaitsimme, että oppilaat esittivät tutkivan matematiikan tunneilla melko paljon kysymyksiä. Koska tutkivan matematiikan tunnin sisällöstä ja toteutustavasta riippuen oppilaiden kysymysten tyyppi ja jakautuminen vaihtelivat jonkin verran, niin esitämme tulokset tuntikohtaisesti. Taulukossa 1 on esitetty oppilaiden esittämien kysymysten jakautuminen eri aihealueisiin tutkivan matematiikan tunnilla, jonka aiheena oli suunnikkaan pinta-ala.

Peilausta pisteen suhteen käsitelleeltä tunnilta oppilaiden esittämien kysymysten luokiteltu jakauma löytyy puolestaan Taulukosta 2.

Taulukko 1. Oppilaiden esittämät kysymykset aihepiireittäin tutkivan matematiikan tunnilla, jonka aiheena oli suunnikkaan pinta-ala.

Kysymyksen aihe	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
Käytännön toiminta	7	35
Tehtävien tekeminen	1	5
Vastauksien formalisoiminen	5	25
Suunnikkaan korkeuden mittaaminen	3	15
Suunnikkaan määritelmä	1	5
Videointi	3	15
Kysymykset yhteensä	20	100

Taulukko 2. Oppilaiden esittämät kysymykset aihepiireittäin tutkivan matematiikan tunnilla, jonka aiheena oli peilaus pisteen suhteen.

Kysymyksen aihe	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
Käytännön toiminta	16	51,6
Tietokoneen käyttö	2	6,5
GeoGebran käyttö	3	9,7
Tehtävien ymmärtäminen	5	16,1
Tehtävien tekeminen	1	3,2
Vastauksien formalisoiminen	3	9,7
Videointi	1	3,2
Kysymykset yhteensä	31	100

Taulukoista käy ilmi, että molemmilla tunneilla esitettyjen kysymysten suhteellinen frekvenssi oli suurin käytännön toimintaan liittyvissä asioissa. GeoGebra tunnilla tämä osuus oli jopa yli puolet, mikä on huomattava määrä. Tehtäviin suoraan liittyvien kysymysten (vastauksen formalisoiminen, kysymysten ymmärtäminen, suunnikkaan korkeus ja määritelmä) osuus oli vajaa kolmannes GeoGebraa käyttävällä tunnilla, kun taas suunnikasta käsittelevällä tunnilla näiden kysymysten suhteellinen osuus oli lähes puolet kaikista kysymyksistä.

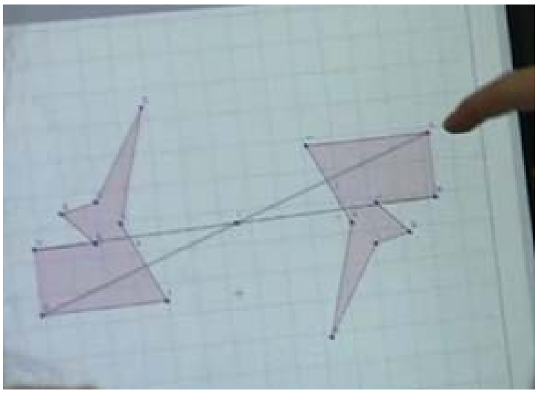
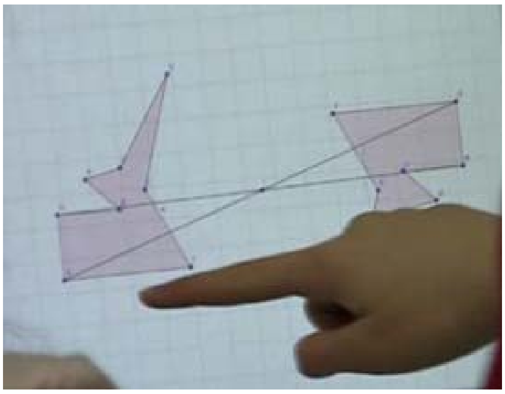
Vastausten formalisointiin liittyvät kysymykset olivat tutkivan matematiikan kannalta mielenkiintoisia ja ne saivat myös aikaan hyvää keskustelua oppilaan ja opettajan välillä, joista esitämme muutaman otteen. Suunnikkaan pinta-alaa käsitelleellä tunnilla oppilaille oli annettu ohjeeksi kirjoittaa jokaiseen tehtävään pohdintoineen ja perusteluineen vastaukseksi vähintään kaksi lausetta. Tämän oli tarkoituksena ohjata oppilaita todella perustelemaan ratkaisunsa, mutta oppilaiden mielestä kahden lauseen muodostaminen oli hankalaa, kuten seuraavasta esimerkistä ilmenee:

Oppilas A:	Pitääks ihan jokaiseen tulla kaks lausetta?
Opettaja:	Joo.
Oppilas A:	Miten sä voit laittaa tohon vitoseen kaks lausetta? Ei ja ei. Jos mä laitan tuplasti ei tähän. (Ehdottaa siis vastaukseksi kahta lausetta: Ei. Ei.)
Opettaja:	Sää voit laittaa sinne et mitä siinä tapahtuu? Ja miks niin tapahtuu? Mistä sää huomasit, että niin tapahtuu?

Tässä tilanteessa opettaja yrittää omilla kysymyksillään saada oppilasta pohtimaan tehtävää. Tosin opettajan kysymyksistä päätellen hän on ilmeisesti ajatellut oppilaan pohtivan tehtävää neljä ja siksi nämä johdattelevat kysymykset eivät todennäköisesti auttaneet oppilasta eteenpäin tehtävässä viisi.

Tunnilla, jonka aiheena oli peilaus pisteen suhteen, oppilaiden kysymykset vastausten formalisoinnista olivat esimerkiksi seuraavanlaisia:

Oppilas A:	Me niinku tajuttiin toi kolmonen, mut ei me tajuttu et miten me voidaan niinku selittää se silleen kirjallisesti.
Opettaja:	Omin sanoin vaan mitä ootte tehny.
Oppilas A:	Niin mut ei me niinku. Ei sitä vaan pysty selittämään ku se vaan. Ei vaan pysty. Sen vaan voi silleen tehä tossa miten se menee.
Opettaja:	Mitä te ootte tehny? (samalla opettaja ja oppilas menevät tietokoneen äärelle katsomaan, mitä oppilaat ovat tehneet.)
Oppilas A:	No me niinku mietittiin se silleen että jos on vaikka tää G ja siitä nyt otetaan (mumisee jotain). Tää nyt on jana, mut jos se niinku ois suora ja niinku et tää ois siis ton I:n kautta niin eiks se sitten tonne toiseen päähän periaatteessa tuu se silleen. Vähän niinkun se oikee piste. Niinkun noi vähän niinkun tossa on tehty. Niin sithän periaatteessa tänne just tulee se. (Osoittaa samalla janaa ja pisteitä tietokoneella olevasta kuvasta, ks. Kuvio 1.)
Opettaja:	Mm, no nythän sä juuri selitit sen.
Oppilas A:	No mut en mä tiiä miten mä voin selittää sen tähän niinkun järkevästi.
Opettaja:	Selität vaan tai kirjotat sen mitä ootte tehny ja mitä ootte silleen huomannu. Ei sen tarvii olla silleen, ei se oo mikään äidinkielen aine. Koska kyllähän tosta mitä sä sanoit niin ymmärtää sen, mitä te haitte takaa.

Kuvio 1. Oppilas selittää peilautumisen.

Tässä tilanteessa oppilas on parinsa kanssa saanut tehtävän tehtyä ja osaa myös selittää ratkaisunsa sanallisesti, mutta hän ei osaa muodostaa ratkaisusta kirjallista vastausta. Opettaja pyrkii rohkaisemaan oppilasta kirjoittamaan paperille saman, mitä hän kertoi suullisesti. Tämä oli luultavasti hyvä asia, sillä juuri opettajan rohkaisua oppilas tuntui tarvitsevan.

POHDINTA

Tarkasteltaessa kysymysten aihepiirejä voidaan havaita, että käytäntöä koskevien kysymysten osuus kasvoi lukumäärällisesti paljon, kun käytössä oli tietokoneohjelma. Sitä, onko varsinainen syy tietokoneohjelmassa, on mahdoton tulkita tämän aineiston perusteella, sillä aineistoa on todella vähän ja kysymyksetkin olivat hyvin erilaisia. Lisäksi osa näistä käytännön toimintaan liittyvistä kysymyksistä oli oppimisen ja tunnin aiheen kannalta epärelevantteja ja johtuivat esimerkiksi siitä, että oppilaat eivät olleet keskittyneet kuuntelemaan ohjeita tai ohjeita ei ollut vielä edes annettu.

Tehtävistä ja aiheesta riippumatta oppilaat tarvitsivat opettajan apua havaintojensa muotoilussa. Vastausten formalisointiin liittyvien kysymysten määrä oli molemmilla tunneilla lukumäärällisesti lähes sama. Oppilaat vaikuttavat tarvitsevan ohjausta erityisesti löydettyjen vastausten muotoilemiseen kirjalliseksi tuotokseksi. Toisaalta näiden kysymysten joukossa oli myös sellaisia kysymyksiä, joista ilmeni, että oppilaat tarvitsivat opettajan apua myös havaintojensa perustelemisessa sekä omien ideoidensa oikeellisuuden pohtimisessa.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tutkivan matematiikan tunnin toteuttaminen vaatii hieman normaalia tuntia enemmän alkuvalmisteluja. Etenkin GeoGebraa käytettäessä tehtäviin mahdollisesti tarvittavien pohjien luominen ja tekovaiheessa niiden hakeminen internetistä aiheuttaa teknisiä hankaluuksia, jotka vievät huomiota pois itse aiheesta. GeoGebra antaa kuitenkin etulyöntiaseman kuvioiden tutkimisessa muokattavuutensa ansiosta kynään ja paperiin verrattuna.

Tutkivan matematiikan toimivuuden kannalta olisi iso edistysaskel, mikäli olisi olemassa jokin valmis tehtäväpaketti opettajia varten. Sopivan tehtävänannon muotoiluun kuluva aika on useasti kynnyskysymys tunnin pitoa ajatellen. Erityisesti vähäisellä opetuskokemuksella sopivien tehtävien keksiminen ja muotoilu on hankalaa. Kokemuksen vähäisyyden vuoksi tehtävien soveltuvuus oppilaille on hankala, ellei mahdoton, arvioida.

Oppilaat olisivat luultavasti oppineet tutkivan matematiikan tunneilla enemmän, jos tällainen työskentelytapa olisi ollut heille entuudestaan tuttu. Tutkivan matematiikan toimivuuden kannalta olisikin järkevää totuttaa oppilaita vähitellen omaa tutkimista edellyttäviin tehtävänantoihin. Voisi olla hyvä aloittaa esimerkiksi niin, että jokaisella tunnilla oppilaat saisivat pohtia yhtä tutkimuskysymystä ja siitä vähitellen edetä tällaisiin tunteihin, jotka ovat kokonaisuudessaan tutkivaa matematiikkaa.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu,* 6/2003, 35-38.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA (SUUNNIKKAAN PINTA-ALA)

Minna Heimonen
Tunnin aihe: Suunnikkaan pinta-ala

Alustusvaihe: ***5-10 min***

- Kertausta: Mikä on suunnikas?
  - Joku oppilaista tulee piirtämään taululle suunnikkaan ja yhdessä pohditaan, mistä tiedetään, että piirretty kuvio on suunnikas
  - Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset
  - Muita ominaisuuksia: vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
- Ohjeistus tutkimusvaiheeseen

Tutkimusvaihe: ***n. 25 min***

- Tutkimusvaiheen tehtävät löytyvät tämän tuntisuunnitelman jälkeen olevilta sivuilta. Oppilaille annetaan aluksi tehtävät 1-5
- Kaikki tekevät tehtävän 1.
- Jos joku jää jumiin kakkostehtävään, niin noin kello **12:40** kehottelen siirtymään kolmanteen tehtävään.
- Kello **12:50**: Jokainen voi vielä viimeistellä sen tehtävän, mitä on tekemässä ja sen jälkeen ruvetaan katsomaan tehtäviä yhdessä. Ts. siirrytään koontivaiheeseen.
- **HUOM:** Tehtäviä 5 ja 8 voi havainnollistaa GeoGebralla, jos oppilailla on vaikeuksia ymmärtää tehtävänantoja.

Koontivaihe: ***10 min***

- Tehtävät 1, 2 ja 3:
  - Oppilaat esittelevät joitakin omia ideoitaan
  - Suunnikkaasta suorakulmioksi → pinta-ala on **kanta · korkeus**
  - Suunnikkaan **korkeusjana** on kantojen väliin piirretty kantoja vastaan kohtisuorassa oleva jana. Korkeusjana voidaan aina piirtää kahdella tavalla.
- Tehtävä 4:
  - Riittää ehkä todeta, että sen pinta-ala nelinkertaistuu
- Tehtävä 5:
  - Tätä voi havainnollistaa Geogebralla

Tehtävämoniste:

Suunnikkaan pinta-ala

Oma nimi:

Parin nimi:

Kirjoita **jokaisesta** tehtävästä havaintosi, pohdintasi ja mahdolliset perustelusi tehtävän alapuolelle varattuun tilaan. Kirjoita jokaisesta tehtävästä **vähintään kaksi lausetta**. Havaintojen tekemisessä ja ideoinnissa voit käyttää apuna pahvista leikattuja suunnikkaita, saksia sekä tyhjää paperia. Laittakaa myös pahvisiin suunnikkaisiin ja tyhjiin papereihin molempien nimet. **Kaikki** materiaalit palautetaan tunnin jälkeen opettajalle.

Tehtävät:

1. Pohdi, kuinka suunnikkaan pinta-ala saadaan laskettua.
2. Yritä keksiä jokin toinen keino suunnikkaan pinta-alan laskemiseksi.
3. Kuinka mittaisit suunnikkaan korkeuden?
4. Tutki, kuinka suunnikkaan pinta-ala muuttuu, kun sen kaikkien sivujen pituus kaksinkertaistuu.
5. Voiko suunnikkaan pinta-ala muuttua, jos sen sivujen pituudet eivät muutu?

Lisätehtävät:

6. Mitä tapahtuu suunnikkaan sivujen pituuksille, jos sen pinta-ala puolitetaan?
7. Piirrä suunnikkaalle lävistäjät. Kuinka lävistäjät suhtautuvat toisiinsa? Millaisia kuvioita syntyy?
8. Haluat rajata narulla kaksi suunnikasta, joilla on sama pinta-ala. Toisen suunnikkaan rajaamiseen haluat käyttää mahdollisimman vähän narua ja toisen suunnikkaan rajaamiseen mahdollisimman paljon narua. Mitä teet? Voit piirtää kuvat suunnikkaista.

LIITE 2: TUNTISUUNNITELMA (PEILAUS PISTEEN SUHTEEN)

Helinä Anttila

Tunnin kulku: Tunnin alkuun on päivänavaus.
Aluksi toinen pareista käy laittamassa koneen avautumaan (jos ei jo ole – ja mikäli oppilaat ovat välitunnin aikana jo tulleet koneille, niin pitää muistuttaa etteivät loggaa itseään pihalle.

Tämän jälkeen lyhyt ohjeistus tunnin kulkuun ja GeoGebran käyttöön. Aiheeseen johdatus tapahtuu tehtävien kautta samalla kun tutustutaan toimintoihin. Ohjeistuksen yhteydessä voisi kerrata kuitenkin miten koordinaatistoon laitetaan piste (mahdollisesti joku oppilas tulee täppäämään smartille tietyt koordinaatit tms.)

GG läpikäytäviä: piste, jana, suora, monikulmio-työkalu

Yleinen ohjeistus, mitä tunnilla on tarkoitus tehdä – kaikki laput palautetaan nimellä varustettuna, molempien nimet lappuun. Perustelu parilla lauseella, myös ranskalaiset viivat käyvät. Tarkoitus kirjoittaa ajatusprosessia ja syitä paperille.

Tämän jälkeen oppilaat siirtyvät koneille
~5-10 min

Tehtävien tekoa
~20 min

Koonti
~15 min

Koonnissa tehtävien läpikäyminen. Käydään läpi oppilaiden keksimiä ratkaisuja – pari voi tulla näyttämään smartilta tai ajasta riippuen itse käydä läpi koneelta ja näyttää, millaisia keinoja tuli esiin. Ensisijaisesti kuitenkin oppilaat itse pääsisivät esittelemään tuotoksiaan. Koonnissa esiin tuotavia asioita:

1. Neliön keskipisteeseen suora, jota voi sitten pyöritellä ja huomata, että yhteneviin osiin jakavia suoria on äärettömän monta.
2. Erilaisia tapoja, suoraan keskipiste –toiminnolla, laskemalla? Keskinormaalin tuominen mukaan
3. Peilauksen idean selittäminen; jokainen vastinpiste samalla suoralla, joka kulkee peulauspisteen kautta ja yhtä kaukana peilauspisteestä. Havainnollistaminen esim. yhdistämällä kärkipisteitä, liikuttelemalla lähelle/kauas peilauspisteesta tms
4. Paino kiintopisteiden hakemisessa
5. Mikä on symmetriakeskus, miten sen voi löytää. Mitä tehtiin 1. tehtävässä, tms.

Tehtävämoniste:

Tee tehtävät parin kanssa. Kirjoittakaa **vastaukset erilliselle vastauspaperille**. **Vaihtakaa** jokaisessa tehtävässä **tietokoneella** olevaa henkilöä.

Mene osoitteeseen http://users.jyu.fi/~mahahkio/tyhja. Klikkaamalla kahdesti ohjelma aukeaa erilliseen ikkunaan.

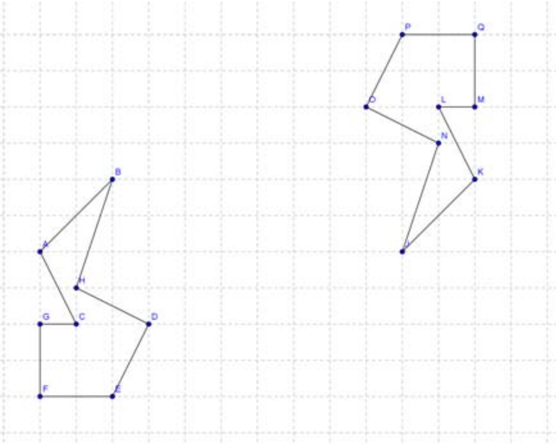
1. Merkitse pisteet **A=(1,1**), **B=(1,5)**, **C=(5,5)** ja **D=(5,1)**. Yhdistä sitten pisteet neliöksi käyttämällä kahden pisteen välinen jana – toimintoa.
a) Jaa syntynyt neliö kahteen yhtenevään osaan janalla tai suoralla.
b) Jaa neliö kahteen yhtenevään osaan toisella tavalla, kuin a)-kohdassa.
c) Yritä jakaa neliö vielä kolmannellakin tavalla yhteneviin osiin.
d) Kuinka monella tavalla voit jakaa neliön yhteneviin osiin käyttämällä janaa tai suoraa? **KIRJOITA vastaus ja lyhyt perustelu**

2. Merkitse pisteet A=(1;1,5) ja B=(6,3).
a) Etsi sellainen piste, joka on yhtä kaukana molemmista pisteistä A ja B. Kirjoita ylös, miten löysit pisteen? **KIRJOITA ja selitä keinosi**
b) Voiko tällaisia pisteitä olla enemmänkin? Jos, niin mikä näistä pisteistä on lähimpänä pistettä A? KIRJOITA vastaus ja perustelut

Osoitteessa http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/peilaus on tehtäviin 3-5 liittyvät GeoGebra-tiedostot. Jokaista tehtävää vastaa samalla numerolla oleva tiedosto.

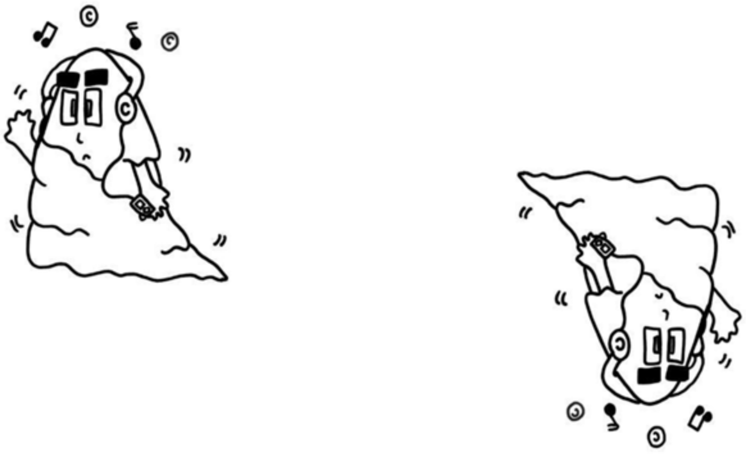
3. Monikulmio ABCDEF on peilattu pisteen suhteen monikulmioksi POMJQLNK. Selvitä, miten peilaus tapahtuu. **KIRJOITA mitä peilauksessa pisteen suhteen tapahtuu**

Tehtävän 3 lähtötilanne:



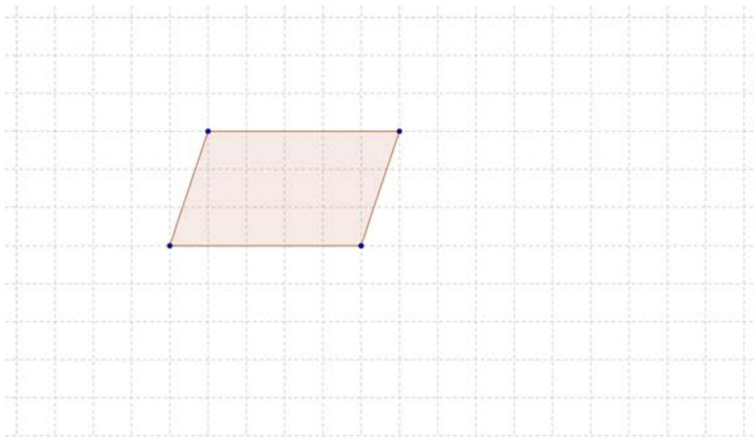
4. Etsi piste, jonka suhteen kuvio on peilattu. **KIRJOITA miten etsitte ja millä tavoin löysitte pisteen.**

Tehtävän 4 lähtötilanne:



5. Etsi tarkka piste (symmetriakeskus), jonka suhteen kuvio peilautuu itsekseen. **KIRJOITA miten etsitte ja millä tavoin löysitte pisteen.**

Tehtävän 5 lähtötilanne:



Lisätehtävä: Millaisilla nelikulmioilla/monikulmioilla on symmetriakeskus?

LIITE 3: OPPILAIDEN ESITTÄMÄT KYSYMYKSET

Oppilaiden esittämiä kysymyksiä GeoGebra tunnilla

KT Käytännön toiminta
tieK Tietokoneen käyttö
tehtY Tehtävän ymmärtäminen
tehtT Tehtävän tekeminen
GGk GeoGebran käyttö
F Vastausten formalisointi
V Videointi

KT -Mille koneelle pitää mennä?
KT -Yks kone yhelle?
KT -Tuunks mä sinne koneelle vai minne?
KT -Kuka ton on keksiny?
KT -Kukas mun pari olikaan? *Näytetty dokumenttikameralta*
KT -Ai niinku joku vihko tai jotai *(muistiinpanovälineistä)*
KT -Riittääks jos yks kirjottaa?
KT -Molempien?
KT -Pitääks molempien merkata?
tieK - Mistä ihmeestä tän saa tän kiekuran tänne?
KT -Mitä mä sit teen?
tieK -Tää valittaa (tietokone valittaa väärästä osoitteesta)
KT -Onks molemmille omat (*kysymyslapuista)*
tehtY -Piitääks tää jakaa kahteen tää neliö?
GGk -Miten pystyy peruuttamaan toiminnon?
tehtT -Haittaaks jos ton poistaa?
GGk -Miten sen saa niinku pois ku me tehtiin niinku vähä niinku väärin?
GGk - Se ei suostu ottamaan tota A pistettä
F -Mitä pitää vastata?

tehtY - Onks tää muuten 2b, niin eihän se oo niinku mahollista, koska jos se on yhtä kaukana molemmista niin eihän se voi olla lähempänä A:ta.

tehtY -Mitä tässä tehtävässä pitää tehdä?

KT -Kuinka pitkälle pitää tehdä

tehtY -Mä en tajuu tosta yhtää mitää. (*5 tehtävä*)

F -Kelpaaks tää tohon 3 vastaukseks?

KT -Mitä sitte ku on tehny jo?

F -Me niinku tajuttiin toi kolmonen, mut ei me niinku tajuttu et miten me voidaan selittää se niinku kirjallisesti.

KT -Mitä sitte ku on tehyn?

KT -Mitä näille vastauspapereille nyt tehään?

Ryhmää kuvatessa

KT -Mikä se sivu oli? (*ennen tehtävänannon saamista)*

V -Miks meitä kuvataan?

tehtY -Mikä toi yks (*kakkostehtäväs tehtävänannos*) piste pilkku on?

Oppilaiden esittämiä kysymyksiä suunnikas-tunnilla

suunM	Suunnikkaan määritelmä
KT	Käytönnän toiminta
F	Vastauksen formalisointi
suunK	Suunnikkaan korkeuden mittaaminen
tehtT	Tehtävien tekeminen
V	Videointi

suunM -Oliks suunnikas se, että toistenki sivujen piti olla yhdensuuntasia?

KT -Onks OppilasX niinku mun pari?

KT -Pitääks mein alottaan nyt?

KT -Onko kolmioviivaimia?

F -Haittaako jos tähän ei tuu ihan niinku kahta lausetta?

KT -Hei saatasko me muuten tota ööö kaks lisää (*pahvisia suorakulmioita*) suunK -Eiks tän voi laskee niin et mittaa nää pituudet?

F -Pitääks ihan jokaiseen tulla kaks lausetta?

F -Miten sä voit laittaa tohon vitoseen kaks lausetta? Ei ja ei. Jos mä laitan tuplasti ei tähän. (Ehdottaa siis vastaukseksi kahta lausetta: Ei. Ei.)

KT -Onks tää ihan pakko tehä yhessä vai voiko tehä erikseen?

KT -Miks tää muuten on tällästa (*heiluttelee paperia*) ja nää muut on kunnon kartonkia?

F -Miten tähän voi saada kaks lausetta?

tehtT -Onks tää niinku vääri?

F -Miten tähän kolmoseen voi kaks lausetta laittaa?

suunK -Jos tästä näin laskee sitä pinta-alaa, niin … pitääks se leveys niinku ottaa tästä näin vai tänne asti? Otetaanko se tästä kohdin vai niinku täältä? (*näyttää samalla suunikastaaan*)

suunK -Me kiistellään siitä, ku OppilasX väitti, että normaalilla viivottimella ei voi mitata tarkasti. (*korkeutta*)

KT -Miten tää liittyy nyt yhtään mihinkää?

Ryhmää kuvatessa

V -Mitä, miks?

V -Onko pakko?

V -Miks meitä kuvataan?

MUUTTUJAN KÄSITTEESEEN JOHDATTAVIEN TEHTÄVIEN RATKAISEMINEN PARITYÖSKENTELYNÄ

Matti Koivuluoma ja Saku Koskinen

matti.a.koivuluoma@jyu.fi, saku.m.j.koskinen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä tutkimuksessa havainnoitiin erästä yläkoulun seitsemättä luokkaa, kun heille pidettiin tutkivan matematiikan tunti aiheesta muuttuja. Oppilailla oli tunnilla käytössään tietokoneet ja GeoGebra-ohjelma. Tunti videoitiin ja videotallenteesta valittiin tutkimuskohteeksi yhden oppilasparin työskentely tunnin aikana. Videotallenteesta analysoitiin oppilaiden keskinäistä parityöskentelyä tehtävien ratkaisemisessa. Tehdyt havainnot kirjattiin ylös ja niistä olennaisimmat esitetään litteroituna tässä tutkimuksessa. Tutkimuksen perusteella parityöskentely on toimiva työskentelytapa tutkivan matematiikan tunnilla, joskin se ei poista oppilaiden tarvetta tukeutua opettajaan.

JOHDANTO

Pientutkimuksen tavoitteena oli selvittää, kuinka oppilaat ratkaisivat tehtäviä parityöskentelyn avulla tutkivan matematiikan tunnilla. Osassa tehtävistä oppilaat saivat käyttää apunaan GeoGebraa. Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivan matematiikan tavoitteita ovat mm. ymmärtämisen ja matemaattisen ajattelun sekä luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen. Lisäksi Hähkiöniemi korostaa oppilaiden oppimista, kun he käsittelevät muiden oppilaiden kehittämiä matemaattisia ideoita.

Tutkivan matematiikan tunti koostuu kolmesta vaiheesta: alustus, tutkimus ja koonti (Stein ym, 2008). Alustusvaiheessa opettaja ainoastaan ohjeistaa oppilaita tehtävien pariin, minkä jälkeen tutkimusvaiheessa oppilaat pyrkivät itse rakentamaan matematiikkaa ilman opettajan suoria vastauksia. Koontivaiheessa kootaan oppilaiden ajatuksia yhteen ja käydään täsmällinen aiheeseen liittyvä matematiikan teoria läpi.

Tietokoneohjelmat ovat alkaneet ottaa oman roolinsa matematiikan opetuksessa tietotekniikan kehittyessä. GeoGebran lisäksi on muitakin ohjelmia, joita voidaan hyvin soveltaa matematiikan opetukseen esimerkiksi yläkoulussa. Esimerkiksi Cabri-ohjelmaa ja sen käyttöä on aikaisemmin tutkittu todistusten ja geometrian opiskelun yhteydessä. Tulokset osoittavat, että oppilaat ymmärtävät paremmin täsmällisten perustelujen tarpeen käyttäessään tietokoneohjelmistoa, kuten Cabria (Marrades & Gutiérrez, 2001).

MENETELMÄT

Tutkivan matematiikan tunti muuttujasta

Tutkivan matematiikan tunti (45 min) pidettiin yläkoulun 7. luokalle. Tunnin tavoitteena oli muuttujan ymmärtäminen käsitteenä tutkivan matematiikan avulla. Tuntia varten laadittiin tehtävämoniste (Liite 1), jonka avulla pyrittiin ohjaamaan oppilaita tutkivaan ajatteluun. Lisäksi pyrittiin hyödyntämään GeoGebraa. Oppilaiden tarkoituksena oli päästä käsiksi muuttujan käsitteeseen muodostamalla lopulta sääntö käytännön tilanteeseen liittyen ja soveltaa keksimäänsä sääntöä.

Aineiston keruu

Tunti videoitiin kahdella kameralla. Toinen kamera seurasi opettajaa ja toinen yhtä oppilasparia. Ääni nauhoitettiin kahden mikrofonin avulla, joista toinen sijoitettiin opettajalle ja toinen kuvattavalle oppilasparille. Tunnin lopuksi kaikki oppilaiden tehtäväpaperit ratkaisuineen kerättiin pois ja videokameralla kuvattiin oppilaiden istumajärjestys.

Aineiston analyysi

Tuntien analysoinnissa tarkasteltiin oppilasparia kuvanneen kameran tallennetta. Tutkimme, kuinka oppilaat ratkaisevat parityöskentelynä annettuja tehtäviä. Tallenteesta poimittiin tilanteet, jotka antavat informaatiota juuri parityöskentelyyn liittyen. Analysointi toteutettiin kirjoittamalla ja kuvailemalla avoimesti oppilaiden toimintaa parityöskentelynä.

TULOKSET

Oppilaat alkoivat pian jo alustusvaiheen aikana jutella keskenään, ja näin ollen automaattinen ja luonnollinen vuorovaikutussuhde oli luotu:

Oppilas B: Nii, kaivat sää kynän, vai kaivanko mää?

Oppilas A: Mää voin ottaa.

Oppilas B: Kiitos. En ollu ees vaivautumassa. (naurua)

Oppilas A: Se oli niinku retorinen kysymys että kaiva kynä.

Itsenäisen tutkimusvaiheen aikana oppilaat aloittivat tehtävämonisteen (Liite 1) tehtävien miettimisen. Monisteen ensimmäinen tehtävä aiheutti oppilasparille selvää päänvaivaa, sillä he käyttivät siihen merkittävästi aikaa. Oppilaat pohtivat yhdessä pitkään tehtävänannossa kuvailtua tilannetta ja yrittivät selvittää, mitä tehtävässä oikein haetaan:

Oppilas A: Siis se on se jäsenmaksu ensin se kaks euroa ja se on viis euroa aina se tunti.

Oppilas B: Siis pitääks sen olla jäsen, että se pääsee pelaamaan?

Oppilas A: Joo.

Oppilas B: Joo okei.

Oppilas B: (mutinaa)

Oppilas B: Paitsi että se riippuu siitä kauanko se siellä on.

Oppilas A: Nii höh.

Oppilas B: Nii me ei tiietä kauanko se siellä on!

Oppilaat kokivat epävarmuutta ensimmäisen tehtävän ratkaisemisessa. He pähkäilivät sitä itse ja yrittivät löytää ratkaisua eri tavoilla, kuten taulukoimalla ja lausekkeen kirjoittamisella, mutta lopulta he päättivät turvautua opettajan apuun:

Oppilas A: Kauanks se sit pelaa, kun tässä ei kerrota sitä?

Opettaja: Ei siinä kerrotakaan. Teiän täytyy miettiä sitä, että miten.

Oppilas A: Mut ei me tiietä sitä, paljonks se maksaa.

Oppilas B: No hei! Päätetään et se pelaa 3,5 tuntia.

Oppilas B: Meidän pitää varmaan vaan lähtee kokeilee. En mä usko, että ku ei tässä irtoo mitään. Meiän pitää vaan lähtee kokeilee.

Pienen säätämisen ja kokeilun jälkeen oppilaat saivat tehtävään ratkaisun. Tämän jälkeen he alkoivat olla tyytyväisiä saamaansa ratkaisuun, vaikka he vielä miettivät taulukon tekemistä ratkaisun tueksi:

Oppilas B: Luulis, että ne sen vanhemmat ei oo niin dorkia, että ne ei osais tosta (tarkoittaa saatua ratkaisua) laskee, kun meillä on lausekekin valmiina, kun siihen vaan laittaa oikeet.

Oppilas A: Niin, jos ne on viisaita ne vanhemmat.

Oppilas B: Kyllä kuuluis perustaitoihin, että osaa viiden kertoo niin monella ku.

Oppilas A: E-e-ei ne osaa. Tehän semmonen taulukko tähä.

Oppilas B: Niin just.

Oppilas A: Niinku me äsken meinattiin.

Oppilas B: Entä, jos tehän toiselle puolelle semmonen hieno taulukko…

Oppilaiden mielenkiinto siirtyi tietokoneeseen, joten tämä tehtävä jäi tähän eli lauseke jäi sanalliseen muotoon (ks. liite 2):

Oppilas B: Lal-lal-lal-laa…

Oppilas A: Tähän meiän väliin eikä sulle. (tarkoittaa tietokonetta)

Oppilas A: No joo.

Oppilas A: Senkin itsekäs ihminen. Älä rupee itkeen.

Tehtävämonisteen toisessa tehtävässä käytettiin GeoGebraa. Tyypillistä oppilaiden parityöskentelylle tässä tehtävässä oli, että he vatvoivat asioita edestakaisin, varsinkin jäsenmaksun suhteen. Lisäksi oppilaiden keskinäisessä keskustelussa tuli esille hetkittäisiä, selkeitä väittelytilanteita:

Oppilas A: Niin mut eihän siit sit tuu tasanen. (tarkoittaa GeoGebralla piirrettyä kuvaajaa)

Oppilas B: Ei sen pidäkään olla tasanen.

Oppilas A: Eikä se sit, miten niin?

Oppilas B: Eihän kukaan sano, et sen pitää olla tasanen.

Oppilas A: Ei mut siis ku, mites se sit jatkossa, ku tää taulukko ei sit enää jatkossa pidä paikkaansa sen ekan jäsenmaksun jälkeen.

Oppilas B: Niin, niin mut, ku jos laittaa sen ekan et siihen tulee se seittemän euroo ja sen jälkeen laittaa pelkät viis euroo.

Oppilas A: Taulukon kuuluis laittaa silleen aina tunnin, kahen tunnin ja näin ajan, mut sitte ku sä seuraavan kerran katot, että sä oot maksanukki sen jäsenmaksun, niin se ei enää pidä paikkaansa, ku se on se seittemän euroo, eikä viis euroo.

Oppilas B: Kuuntelitsä mitä mä sanoin äsken?

Oppilas B: Mä sanoin, että…

Lopuissa tehtävissä oppilaat etenivät nopeasti, ja edelleen jäsenmaksu kummitteli heidän mielessään aiheuttaen heille päänvaivaa. Oppilaat yrittivät soveltaa GeoGebralla piirrettyjä kuvaajia myöhemmissä tehtävissä, mutta lopulta he päätyivät hyödyntämään laatimaansa sanallista sääntöä. Jäljellä olevien tehtävien kohdalla parityöskentelyssä työnjako oli seuraavanlainen: Oppilaat pohtivat asioita yhdessä, mutta oppilas A toivoi oppilaan B kirjoittavan, koska A ajatteli B:n olevan parempi ja nopeampi kirjoittaja.

Tutkivan matematiikan tunnin koontivaiheen aluksi oppilaat vielä keskustelevat ja viimeistelevät tehtäviä neljä ja viisi (viidennen tehtävän ratkaisu jää puheen tasolle). Lopun ajan koonnista oppilaat istuvat hiljaa.

POHDINTA

Alustuksen aikana oppilaiden välille automaattisesti muodostunut vuorovaikutus antoi eväitä parityöskentelyn onnistumiselle tutkivan matematiikan tunnin aikana. Tähän oli varmasti syynä, että tämä oppilaspari oli aiemminkin työskennellyt yhdessä. Tehtävien teon alussa oudon tyyppiset tehtävät hidastivat parin etenemistä tehtävien varsinaisessa ratkaisemisessa, mikä on varmasti yksi oppimisen haasteista tutkivassa matematiikassa. Parityöskentelyä nämä tehtävät eivät kuitenkaan millään tavalla haitanneet, koska oppilaat saivat vertaistukea toisistaan, mikä auttoi heitä etenemään tehtävissä.

Kuten tuloksista kävi ilmi, kaikki tehtävien ratkaisemisessa esille tulleet ongelmat eivät ratkenneet pelkällä parityöskentelyllä, vaan oppilaat joutuivat kysymään apua myös opettajalta. Ensimmäisessä tehtävässä opettajalta apua kysyessään oppilaiden parityöskentely hetkellisesti pysähtyi, koska vuorovaikutus keskittyi oppilaan ja opettajan välille. Tämän jälkeen oppilaspari jatkoi kuitenkin yhteistä työskentelyään, ja lopulta he päätyivät ratkaisuun, johon kummatkin olivat tyytyväisiä. Parityöskentelystä huolimatta oppilaille jäi kuitenkin lievää epävarmuutta ratkaisun oikeellisuudesta.

Yksi asia, jossa oppilaspari oli täysin samaa mieltä, oli tietokoneen käyttöön ottaminen tehtävässä kaksi. Tietokoneen viehätysvoima sai oppilasparin lumoihinsa. Kontrastin oppilaiden keskinäiseen yhteisymmärrykseen toivat parin välille syntyneet selkeät ja värikkäät väittelytilanteet. Nämä eivät millään tavalla jarruttaneet oppilaiden työskentelyä vaan päinvastoin veivät sitä eteenpäin.

Lopuissa tehtävissä oppilaat yrittivät soveltaa GeoGebraa, mutta he päätyivät yhteisymmärryksessä siihen, että ne hoidetaan ilman tietokonetta. Näin ollen GeoGebrasta ei ollut enää näiden tehtävien kohdalla hyötyä oppilaille, mikä saattoi johtua osaltaan siitä, että GeoGebra oli itse tutkimustehtävän osalta hiukan irrallisessa roolissa. Mielenkiintoista oli huomata, että loppujen tehtävien tekemisen osalta oppilasparin keskinäinen työnjako hoidettiin hiukan samantyylisellä sanailulla kuin, mitä heidän välillään esiintyi jo alustusvaiheen aikana.

Loppukoonnin aikana voitiin huomata samaa piirrettä kuin silloin, kun oppilaat kysyivät aiemmin opettajalta neuvoa. Kun oppilaat alkoivat kuunnella loppukoontia, niin parin keskinäinen vuorovaikutus loppui.

Yleisesti parityöskentelystä voidaan tulkita, että ensinnäkin se toimii tutkivassa matematiikassa. Parityöskentelyn aikana oppilaspari saa omatoimisesti miettiä annettua tehtävää, jolloin parin keskinäisestä vuorovaikutuksesta tulee luonnollinen osa tehtävien ratkaisemista. Lisäksi nähdään, että vaikka oppilaat saavat yhdessä miettiä annettuja tehtäviä, niin heillä on tiettyä epävarmuutta tehtävien ratkaisemisessa, koska he eivät saa opettajalta suoraa varmistusta tai varmuutta omiin ratkaisuihinsa.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tutkivan matematiikan kokeilu opetuksessa oli mielenkiintoista ja haastavaa. Yksi merkittävä haaste oli se, että opettajan tuli varoa valmiiden vastausten antamista oppilaille. Opettajalle tästä koitui tietyssä mielessä epäluonnollinen tilanne, jossa hän joutui miettimään ja valitsemaan sanansa tarkasti. GeoGebran soveltamista tähän tutkimustehtävään on syytä miettiä jatkossa tarkemmin, jotta sitä saataisiin hyödynnettyä paremmin oppilaiden oppimisprosessin välineenä.

Yleisesti tutkivaa matematiikkaa voisi kehittää toteuttamalla koontivaiheen seuraavan oppitunnin alussa, jolloin oppilaat todennäköisesti keskittyisivät vieläkin paremmin asian kokoamiseen.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87–125.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA

Tunnin aihe: Tutkivaa matematiikkaa GeoGebralla, aiheena muuttuja.

Tunnin tavoitteet

- Tiedolliset ja taidolliset tavoitteet:
  - Aiheen käsittely onnistuu tutkivan matematiikan keinoin.
- Asenteelliset tavoitteet:
  - Tunti voisi toimia innostuksen ja lisämotivaation luojana oppilaille.
- Lisätavoite:
  - Tavoitteena on, että vuorovaikutus opettajan ja oppilaiden välillä toimii monipuolisesti.

Käytettävät työtavat: Tutkiva matematiikka, parityöskentely.

Käytettävät työvälineet
Tietokone (GeoGebra), tehtävämoniste, (kamerat ja oheislaitteisto tunnin kuvaamisen mahdollistamista varten).

Tuntien kulku

- **Alku n. 8min (klo 8:55-9:03)**
  Oppilaat siirtyvät luokkaan. Tervehditään seisaaltaan.
  <u>Alustusvaihe:</u>
  - Kerron oppilaille tunnin ohjelman.
    - Tutkimustehtävä
    - GeoGebra mukana osassa ratkaisussa
    - Tehtävämonisteessa 1. tehtävä tehdään ilman GeoGebraa
      - Koneisiin saa koskea vasta 1. tehtävän tekemisen jälkeen
  - Oppilaiden motivointi!
    - Tehtävät saattavat olla erilaisia ja vaikeita
    - Kannustaminen
  - Pikainen katsaus GeoGebran toimintoihin
  - Tehtäväpapereihin nimi (pareittain täytettäessä kummankin nimet)
  - Tunnin lopussa paperit jätetään omalle paikalle
- **Keskivaihe n. 22min (klo 9:03-9:25)**
  <u>Tutkimusvaihe:</u>
  - Oppilaat työskentelevät pareittain tutkimusongelman parissa tietokoneilla
  - Kierrän luokassa ohjaajana
    - En anna valmiita vastauksia
    - Painan mieleeni, millaisia ratkaisuja, merkintöjä jne. pareilla on
      - Koontivaihetta ajatellen ratkaisujen esitysjärjestys
    - Esitän motivoivia lisäkysymyksiä

Nimi: ____

TUTKIMUSTEHTÄVÄ

Jyväskylään ollaan perustamassa uutta vapaa-ajanviettopaikkaa nimeltään PSOX. Se on erityisesti nuorille tarkoitettu peliluola, jonka pelivalikoimasta löytyy mm. PlayStation- ja Xbox- pelikonsoleita. PSOXissa on jäsenmaksu 2,00€, jonka jälkeen pelaamisesta millä tahansa laitteella veloitetaan 5,00€/tunti. Peliajasta maksetaan aina pelatun ajan mukaan (eli jos pelataan esimerkiksi 2,5 tuntia, niin ei makseta kolmesta täydestä pelitunnista, vaan veloitus lasketaan täsmälleen 2,5 tunnin mukaisesti). 14-vuotias Veeti haluaisi mennä PSOXiin, mutta hänen vanhempansa ovat vielä epävarmoja siitä, kuinka paljon pelaaminen tulisi maksamaan. He epäilevät, että se olisi liian kallista.

1. Havainnollista paperille, kuinka paljon PSOX-käynti maksaisi Veetille, jos hän sisäänpääsyn jälkeen alkaa myös pelata pelejä.

2. Käytä seuraavaksi GeoGebran koordinaatistoa ja näytä, kuinka paljon Veetin kuluttama rahamäärä muuttuu pelatun ajan mukaan.

3. Tutki edellisessä tehtävässä muodostamaasi koordinaatistoa. Keksi sääntö, jolla voidaan laskea Veetin kuluttama rahamäärä, kun tiedetään hänen peliaikansa. Kirjoita sääntö.

4. Mieti seuraavaksi, kuinka paljon Veetille koituu kaiken kaikkiaan kustannuksia, jos hän on PSOX-käynneillään pelannut yhteensä
   a) 40 h
   b) 42,5 h

5. Kuinka kauan Veetin on täytynyt PSOXiin tultuaan pelata, jos hänen täytyy lähtiessään maksaa yhteensä 50,00€?

Tehtäväkohtaiset lisäkysymykset:

1. Mitä tämä havainnollistaminen voisi tarkoittaa?
   Mistä Veetille kertyy kustannuksia?
   Millaisia eri tilanteita tällöin syntyy?
   Kirjoita näitä ajatuksia ja eri vaihtoehtoja paperille.

2. Keksitkö, miten voit käyttää koordinaatistoa tässä tilanteessa?
   Miten koordinaattiakselit yleensä nimetään?
   Mitä piste tarkoittaa tavallisessa koordinaatistossa?
   Voisitko nimetä tässä koordinaattiakselit jotenkin toisin?
   Mikä voisi olla pisteen merkitys tässä tilanteessa?

3. Miten voisit ilmaista Veetin kuluttaman rahamäärän muutoksen, kun peliaika muuttuu?
   Huomaatko jotain säännönmukaisuutta rahamäärän muutoksessa, kun peliaika muuttuu?
   Kirjoita sanallisesti havaintojasi.
   Voitko ilmoittaa sääntöä jotenkin muuten (kuin sanallisesti)?

4. Mitä olet aiemmissa tehtävissä tehnyt? Voisiko niistä olla tässä apua?
   Miten tehtäviin voi vastata kuvaajan / säännön avulla?

5. Missä tilanteessa Veetin maksama rahasumma ylittää 50,00€?
   Riippuuko Veetin kuluttama rahamäärä jostakin?

- **Loppu n. 15min (klo 9:25-9:40)**
  <u>Koontivaihe:</u>
  - Käydään yhdessä oppilaiden ratkaisuja läpi
    - Ensin käsitellään jokin lauseena kirjoitettu sääntö
    - Toiseksi otetaan jotenkin lyhennetty sääntö
    - Kolmanneksi tarkastellaan symboleja hyödyntävää sääntöä
  - Pyydän oppilaita itse selittämään, miten heidän sääntönsä toimivat (jolloin he varmaan selittävät juuri muuttujan ideaa)
  - Mietitään, millä perusteella oppilaat ovat päätyneet ratkaisuihinsa
  - Pohditaan ratkaisukeinojen ”oikeellisuutta”, hyviä puolia ja parannusehdotuksia
  - Kerron, miten muuttuja näkyi tutkimusongelmassa

LIITE 2: TEHTÄVÄN 1 RATKAISU

1. Havainnollista paperille, kuinka paljon PSOX-käynti maksaisi Veetille, jos hän sisäänpääsyn jälkeen alkaa myös pelata pelejä.

jos pelaa

1) Jäsenmaksu 2€ + aika (5e/h)

((Jäsenmaksua ei makseta kuin kerran)

OPETTAJAN TOIMINNAN MUODOT ARVAA SÄÄNTÖ -TUNNILLA

Heikki Polvinen ja Anu Pääkkö

anu.pynssi@jyu.fi, heikki.polvinen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä tutkimuksessa selvitimme opettajan toiminnan muotoja tutkivan matematiikan tunnin tutkimusvaiheessa. Seitsemännen luokan oppilailla oli tunnilla käytössään tietokoneet ja GeoGebra-ohjelma, jota he hyödynsivät ratkaistessaan tehtävämonistetta. Suoritimme analyysin käyttämällä tunnin aikana kuvattua videomateriaalia. Tutkimuksessa havaittiin, että opettaja käyttää tutkivan matematiikan tunnilla enimmäkseen aktivoivaa ohjausta, joka motivoi oppilaita tehtävien itsenäiseen ratkaisemiseen. Lisäksi havaittiin, että opettajan rooli tutkivassa oppimisessa rohkaisijana ja avustajana on merkittävä.

JOHDANTO

Tutkimuksemme tavoitteena oli selvittää opettajan toiminnan eri muotoja sekä opettajan roolia tutkivan matematiikan tunnin tutkimusvaiheessa. Tällä tutkimuksella pyrimme erityisesti havainnoimaan opettajan ohjauksen laatua ja sen merkitystä oppilaiden motivaatioon. Tutkimustuloksemme viittaavat siihen, että aktivoiva ohjaus motivoi oppilaita tehtävän ratkaisemiseen itsenäisesti.

Tutkivan matematiikan tunnilla oppilaat oppivat ratkaisemalla matemaattisia ongelmia, kehittämällä ja perustelemalla ratkaisuideoitaan, sekä käsitellessään oppilastovereiden kehittämiä matemaattisia ideoita. Opettajan roolina on auttaa oppilaita kehittämään omia ideoitaan kohti tunnettuja matematiikan käsitteitä ja menetelmiä kuitenkaan paljastamatta valmiita ratkaisuja tai menetelmiä (Hähkiöniemi, 2010). Steinin ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tunti jakautuu useimmiten seuraaviin osiin: alustusvaihe, tutkimusvaihe ja koontivaihe.

Tutkimuksessamme hyödynsimme Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) luokittelua opettajan ohjauksen tasoista. Pinnallisessa ohjauksessa opettaja ei kiinnitä huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa tai esittää opiskelijan ratkaisuun liittymättömiä kommentteja omista lähtökohdistaan käsin. Passivoivaksi ohjaukseksi luokitellaan sen sijaan ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa, mutta hän myös esittää itse oppijalle suoraan ratkaisumenetelmän tai pyytää oppijalta muita ratkaisutapoja ilman motivointia. Aktivoivaksi ohjaukseksi katsotaan ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa ja johdattelee oppijaa tarkastelemaan sitä.

Aikaisemmat tutkimukset, kuten Lew ja So (2008), osoittavat, että opettajan rooli tutkivan matematiikan tunnilla on merkittävä. Opettajan tulee huolellisesti tarkkailla oppilaiden etenemistä ja rohkaista heitä itsenäiseen työskentelyyn.

MENETELMÄT

Muuttujakäsitteen laajentaminen ja yhdistäminen kuvaajaan

Tutkivan matematiikan tunti pidettiin 7. luokan oppilaille. Tunnin tavoitteena oli muuttujakäsitteen laajentaminen, yhtälönkirjoittamisen harjoitteleminen, sekä kuvaajan ja sitä vastaavan yhtälön yhdistäminen toisiinsa. Oppilaat jaettiin ennalta valittuihin pareihin sekä yhteen kolmen hengen ryhmään. Työparit oli valittu siten, että aiemmin heikommin matematiikan opinnoissa menestyneet oppilaat saivat parikseen hyvin menestyneen oppilaan. Oppilasparia/ryhmää kohden oli varattu yksi tietokone.

Alustusvaiheessa käytiin läpi koordinaatiston lukemiseen liittyvä kotitehtävä. Lisäksi käytiin läpi esimerkki, jolla havainnollistettiin tehtävänantoa sekä GeoGebran käyttöä. Tutkimusvaiheessa oppilaiden tavoitteena oli keksiä annettuja lukupareja yhdistävä sääntö (funktio) ja tarkastaa säännön paikkansapitävyys GeoGebran avulla. Lisäksi tavoitteena oli, että oppilaat onnistuisivat hyödyntämään kuvaajaa löytääkseen annetulle luvulle parin keksityn säännön mukaisesti.

Aineiston keruu

Tutkimusaineistona toimi tunnin aikana kuvatut videomateriaalit: toinen kamera kuvasi koko tunnin ajan opettajaa, jolla oli myös mikrofoni, kun taas toinen kamera oli keskittynyt kuvaamaan kolmen hengen oppilasryhmää, jonka keskustelut äänitettiin mikrofonilla. Lisäksi käytössämme oli tietokoneiden ruudunkaappaus sekä oppilaiden täyttämät tehtävämonisteet.

Aineiston analyysi

Analysoimme käytettävissä olevasta materiaalista vain videotallenteita käytettävissä olevan ajan niukkuuden vuoksi. Pyrimme analysoimaan opettajan toiminnan merkitystä erityisesti tutkimusvaiheessa tutkivan matematiikan tunnin aikana. Luokittelimme opettajan toiminnan seuraaviin kategorioihin:

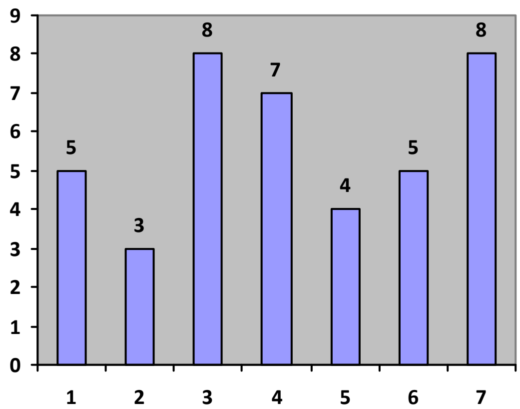
1. Opettajan antama ohjaus liittyen muuhun kuin tehtävän ratkaisuun
2. Opettajan passivoiva tai pinnallinen ohjaus
3. Opettajan aktivoiva ohjaus
4. Oppilaiden rohkaisu
5. Oppilaiden motivointi kehumalla
6. Oppilaiden keskittymisen kontrollointi
7. GeoGebran käytön opastus

Useampi opettajan ja oppilaiden välinen vuorovaikutustilanne saattoi kuulua useisiin eri edellä mainittuihin kategorioihin. Selvennykseksi: kategoriaan 1 kuuluvat mm. tilanteet, joissa opettajaa auttaa oppilasta oikeiden merkintätapojen käyttöön, opastaa mekaanisessa laskemisessa, selventää tehtävänantoa tai kehottaa yhteistyöhön työparin kanssa.

TULOKSET

Tutkimuksen mukaan opettajan toiminta tunnin aikan keskittyi erityisesti oppilaiden aktivoivaan ohjaukseen apukysymyksien avulla, GeoGebran käytön opastukseen sekä oppilaiden toiminnan rohkaisemiseen. Opettajan oli esitettävä apukysymyksiä useaan otteeseen, jotta oppilaat pääsisivät etenemään tehtävässä. Alustusvaiheessa osa oppilaista ei kuunnellut GeoGebran käyttöön liittyvää ohjeistusta riittävän tarkasti, mikä johti ongelmatilanteisiin. Lisäksi useat oppilaat tarvitsivat rohkaisua, sillä heidän luottamuksensa suorittaa tehtävä itsenäisesti oli heikko.

Kuvio 1 esittää opettajan erilaisen toiminnan esiintymisen lukumäärät tunnin tutkimusvaiheen aikana. Huomattavaa jakaumassa on, että opettajan suorien neuvojen tarve oli vähäinen. Opettajan aktivoiva ohjaus riitti siis useimmissa tilanteissa auttamaan etenemisessä kohti ratkaisua. Lisäksi oppilaita ei tarvinnut kehottaa keskittymään tehtävään kovinkaan usein.



1. Opettajan antama ohjaus liittyen muuhun kuin tehtävän ratkaisuun.
2. Opettajan passivoiva tai pinnallinen ohjaus.
3. Opettajan aktivoiva ohjaus.
4. Oppilaiden rohkaisu.
5. Oppilaiden motivointi kehumalla.
6. Oppilaiden keskittymisen kontrollointi.
7. GeoGebran käytön opastus.

Kuvio 1. Opettajan toimintamuotojen jakautuminen tunnin tutkimusvaiheessa.

Seuraavassa käsittelemme muutamaa vuorovaikutustilannetta, jotka selventävät opettajan erilaisia toiminnan muotoja. Eräässä tilanteessa opettaja käyttää aktivoivaa ohjausta auttaessaan oppilasta vihjekysymyksillä voittamaan epävarmuuden tunteen seuraavasti:

Opettaja: Teillä on jo lukuja, mitä luvulle x pitää tehdä, että saadaan luku y?

Oppilas 1: Eikö siihen pidä lisätä 3?

Opettaja: Pitääkö siihen?

Oppilas 1: No en tiedä!

Opettaja:	Jos yhteen lisäät kolme, niin tuleeko siitä kolme?
Oppilas 1:	Ei kun siitä tulee sitten kaksi. (Muminaa)
Opettaja:	Mitä me voidaan tehdä luvulle x, muuta kuin lisätä siihen jotakin?
Oppilas 1:	En tiedä!
Oppilas 2:	Kertoa/jakaa.
Opettaja:	Niin, mehän voimme kertoakin. Miettikääpä sitä.

Tässä tilanteessa oppilas ei uskonut osaavansa ratkaista tehtävää, eikä ollut motivoitunut ratkaisun löytämiseen. Kuitenkin parin vihjekysymyksen avulla opettaja pystyi motivoimaan oppilaan uudelleen tehtävän ratkaisemisen pariin.

Seuraavassa tilanteessa opettaja motivoi oppilasta kehumalla sekä käyttää passivoivaa ohjausta antamalla suoria toimintaohjeita:

Oppilas 3:	En minä osaa tehtävää kaksi. Ei mitään järkeä!
Opettaja:	Tehän olette jo aika hyvin... Pistäpä tuohon nyt y tuon merkin tilalle.
Oppilas 3:	Haluatko sinä tietää miten minä sain tämän?
Opettaja:	No.
Oppilas 3:	Minä kopioin nuilta.
Opettaja:	(Naurahtaa) No puuttuuko tästä jotakin?
Oppilas 3:	No varmaan tuohon kertomerkki.
Opettaja:	Pyyhippäs tuo ykkönen tuosta pois. (Odottaa) No niin, eli kirjoita siihen se y nyt.
Opettaja:	Nyt katso tuosta, sinulla oli jo siinä se 2x, niin pistä se siihen kanssa.
Opettaja:	No niin, onko tämä nyt täydellinen? Riittääkö se, että jos kerrot tämän nyt kahdella, niin saat y:n?
Oppilas 3:	Ei.
Opettaja:	Mitä siihen pitää sen lisäksi tehdä?
Oppilas 3:	Plussata yksi.
Opettaja:	Joo, sitten vain merkkaat sen siihen perään. Nyt voit kirjoittaa sen sitten tuonne syöttökenttään ja katsoa, että menevätkö pisteet siihen.

Kyseisessä tilanteessa oppilas oli selvästi turhautuneena kopioinut vastauksen toiselta parilta. Aluksi opettaja yrittää motivoida oppilasta kehumalla tämän tähänastista edistymistä. Opettaja katsoo kuitenkin tarpeelliseksi antaa suoria neuvoja oikeanlaisen ratkaisun löytämiseksi. Oppilas sai tilanteen seurauksena uutta intoa seuraavien tehtävien ratkaisemiseen.

Viimeisen esimerkin tilanteessa opettaja pyrkii ehkäisemään oppilaiden lannistumista, sekä aktivoivalla ohjauksella auttaa oppilaita tehtävän etenemisessä.

Oppilas 4:	En minä keksi!

Opettaja:	Joo, se on vähän vaikea. Mitä sille x:lle voi tehdä?
Oppilas 5:	Ei kun x:ään lisätään yksi ja tuosta miinustetaan 0,5.
Opettaja:	Jos mietitään sitä x:ää niin mitä sille itse x:lle voi tehdä?
Oppilas 6:	Plussata yhden.
Opettaja:	Joo, sitä voi plussata, mutta mitä te olette täällä aikasemmin tehneet, muistatteko?
Oppilas 4:	Kerrottu, kertoa.
Opettaja:	Joo, sitä voi kertoa.
Oppilas 4:	No niin!!
Oppilas 6:	x kertaa 0,5 ja sitten x.
Oppilas 5:	Mitä?
Opettaja:	Sitten, voiko se kerroin olla...
Oppilas 4:	Miinusta.
Opettaja:	Niin miinusta, voiko se olla miinusta, niin Oppilas 4 sanoi. Sitä kannattaa miettiä kanssa.

Tilanteen aluksi opettaja kertoo oppilaille tehtävän vaikeustasosta pyrkien näin ehkäisemään oppilaiden lannistumista ja motivoimaan ratkaisun löytämisessä. Opettajan rooli aktivoivana ohjaajana on merkittävä oppilaiden etenemisen kannalta. Selkeästi Oppilas 4 motivoituu uudestaan tehtävän ratkaisemiseen.

POHDINTA

Saamamme tulokset näyttävät tukevan väitettä, että oppilaat tarvitsevat opettajan tukea kehitellessään uusia menetelmiä ja ideoita. Tämä saattaa johtua siitä, että tutkivan matematiikan tunti poikkeaa paljon tavallisesta oppitunnista. Oppilaat ovatkin ehkä tottuneet siihen, että he kysyvät neuvoa heti etenemisen keskeytyessä, vaikka heillä olisikin keinot ja mahdollisuudet ratkaista tehtävä itsenäisesti. Lisäksi tätä tulosta tukee myös Lewin ja Son (2008) tutkimustulos siitä, että opettajaa tarvitaan rohkaisemaan sekä auttamaan oppilasta havaitsemaan yhtäläisyyksiä tutkittavan asian ja aikaisemmin opitun tiedon välillä.

Tuloksista havaitaan lisäksi, että opettaja käyttää tutkivan matematiikan tunnilla tutkimusvaiheessa enemmän johdattelevia apukysymyksiä kuin suoria neuvoja. Ohjaus oli Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) ohjaustasoluokittelun mukaan enemmän aktivoivaa kuin passivoivaa tai pinnallista. Oman kokemuksemme mukaan tavallisella matematiikan oppitunnilla esiintyy usein enemmän passivoivaa ja jopa pinnallista ohjausta. Aktivoivan ohjauksen suuri määrä voi johtua mm. siitä, että sen luonnetta ja tärkeyttä tutkivassa oppimisessa on painotettu paljon mm. Hähkiöniemen (2010) luennoilla. Lisäksi passivoivan tai pinnallisen ohjauksen käyttäminen ei olisi edistänyt tunnin tavoitteen saavuttamista yhtä tehokkaasti. Kuten tutkimustuloksista nähdään, aktivoivan ohjauksen avulla oppilaat pääsivät useimmissa tilanteissa uudella innolla etenemään tehtävässä ja keksivät uusia ratkaisutapoja.

Tutkimuksemme ja toisten harjoittelutuntiemme perusteella oppilaiden motivaatio tutkivan matematiikan tunnilla vaikuttaisi olevan korkeampi kuin tavallisella oppitunnilla. Erityisesti tämä ilmenee tuloksesta, jonka mukaan oppilaita ei usein tarvinnut erikseen kehottaa keskittymään tehtävien ratkaisemiseen. Lisäksi videotallenteiden perusteella oppilaat saivat selvästi uutta intoa opettajan aktivoivan ohjauksen ansiosta. Havaitsimme myös selviä onnistumisen elämyksiä, joita toisilla pitämillämme harjoittelutunneilla ei ole yhtä selkeästi ilmennyt. Näyttää siis siltä, että tutkiva oppiminen motivoi oppilaita tavallista opettajajohtoista opetusta enemmän.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tutkivan matematiikan tunnin suunnittelu asetti sopivan haasteen tavallisiin tunteihin verrattuna. Tuntien suunnitteluun kului selvästi tavallista enemmän aikaa. Haasteellista oli pohtia, minkä tasoisia tehtäviä oppilaat pystyvät ratkaisemaan. Tähän haasteeseen vastaamiseen saimme kuitenkin riittävästi eväitä saamassamme ohjauksessa.

Parannettavaa tehtäviin sekä tehtävänantoihin kuitenkin jäi. Tehtävä 4 osoittautui oppilaiden lähtötasoon nähden turhan haastavaksi, sillä vain yksi oppilas pystyi ratkaisemaan tämän useiden vihjeiden ja apukysymysten avulla. Näin ollen kukaan oppilaista ei päässyt tekemään tehtävää 5. Lisäksi tehtävien 2(d) ja 3(c) tehtävänannot, sekä tehtävissä esiintyvät lukuarvot johtivat siihen, että oppilaat laskivat tulokset päässä tai paperilla hyödyntämättä GeoGebralla saatuja kuvaajia. Kuvaajan hyödyntäminen tehtävien ratkaisemisessa oli yksi tunnin keskeisimpiä tavoitteita, johon ei siis kuitenkaan päästy. Lisäksi, koska oppilaille tarjoutui mahdollisuus tietokoneen käytön aloittamiseen jo tunnin alustusvaiheessa, niin osa GeoGebra-ohjeistuksesta jäi kuulematta. Tämä tilanne olisi vältettävissä, jos tietokoneet eivät olisi heti oppilaiden ulottuvilla.

Koimme, että tutkivassa oppimisessa oppilaat kokevat herkemmin onnistumisen elämyksiä, joita haluammekin tarjota mahdollisimman monelle tulevilla opettajan urillamme. Tulevaisuudessa pyrimme hyödyntämään kokemuksiamme tutkivasta matematiikan oppimisesta.

Tutkivan matematiikan tunteja tulisi järjestää useammin, jotta oppilaat tottuisivat tutkimalla oppimiseen ja omatoimiseen ajatteluun. Näin tutkimisesta tulisi heille tavanomainen oppimistapa ja he olisivat rohkeampia etsimään itse uusia ratkaisuja pelkäämättä virheitä.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M.

Asikainen, P.E. Hirvonen, & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Lew, H-C., & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Toim.), *Proc. of the joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, s. 313-320). Morelia, Meksiko: PME.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA

1. Oppilaat otetaan luokkaan pareittain, ohjaa parit koneilleen.
    a. Parit valmiina
2. Ohjeistus:
    a. Jokainen täyttää oman lapun, mutta täytetään pareittain.
    b. Ensin kotitehtävä, käydään pikaisesti yhteisesti läpi:
        i. Miten löysit?
        ii. Katsoit siis pystyakselilta suurimman arvon ja etsit sitä vastaavan kuukauden numeron vaaka-akselilta.
    c. Jatketaan käymällä esimerkki läpi
        i. Kirjaa ensin muutama lukupari (Säännön y=2x mukaisesti)
        ii. Kysy oppilaita arvaamaan seuraava luku.
        iii. Kirjaa pisteitä sitä mukaa GeoGebraan, selitä samalla miten GeoGebran kanssa toimitaan.
        iv. ”Joko arvaatte säännön”
            1. Vasemmanpuoleinen luku kerrotaan kahdella, jolloin saadaan oikeanpuoleinen luku.
            2. Merkkaa ylös x ja y
            3. Siis kun x kerrotaan kahdella saadaan y
            4. → Sääntö
            5. Kirjaa sääntö GeoGebraan, pisteet suoralla, eli sääntö oikein.

3. Itsenäinen työskentely: Osoite: http://users.jyu.fi/~hemisapo/Pohja.html
    a. Käy ohjaamassa tarvittaessa
    b. Apukysymyksiä
        i. Mitä luvulle x voi tehdä?
        ii. Voiko sitä kertoa? Voiko siihen lisätä jotakin?
        iii. Kenties jopa kertoa ja lisätä?
        iv. Voiko lukua x kertoa itsellään?
4. Koontivaihe: (10 min)
    a. Käydään tehtävät 2 ja 3 yhteisesti läpi
    b. Jos jää aikaa, niin myös mahdollisesti tehtävä 4
    c. Kysymyksiä:
        i. Miten keksitte säännön?
        ii. Sopivatko pisteet säännön antamalle kuvaajalle?
        iii. Onko mahdollisesti muita sääntöjä jotka yhdistäisivät luvut?
        iv. Miten taulukko täytettiin?

LIITE 2: TEHTÄVÄMONISTE

Tutkiva oppiminen

Oppilaiden nimet:

Tehtävämoniste

1. **Esimerkki**: Säännön löytäminen annettujen lukujen välille.

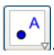
a) Sijoita lukuparit koordinaatiston pisteiksi siten, että luku x on arvo vaaka-akselilla ja luku y on arvo pystyakselilla.

b) Sääntö, joka yhdistää luvut toisiinsa:

=

c) Havainnollista sääntöä koordinaatistossa. Tarkasta onko sääntö oikein.

GeoGebra ohjeistus

I. <u>Pisteen lisäys</u>: Paina kerran . Vie nuoli haluttuun kohtaan ruudulla ja paina.

II. <u>Säännön lisäys</u>: Kirjoita alhaalla olevaan ”Syöttökenttä”-kohtaan

esimerkiksi: y = 3*x + 4.

Huomaa: kertomerkki * (löytyy ä:n vierestä)

Desimaalipilkun asemasta käytetään pistettä, siis esimerkiksi ei 2,5 vaan 2.5

2. **Tehtävä**: Jatka taulukkoa vähintään kolmella luvulla ja etsi sääntö annettujen lukujen välille.

x	y
1	3
2	5
3	7
4	

a) Mitä luvulle x pitää tehdä, että saadaan luku y?

b) Sääntö, joka yhdistää luvut toisiinsa:

=

c) Havainnollista sääntöä koordinaatistossa. Tarkasta, onko saatu sääntö oikein.

d) Mikä on y:n arvo, kun x = 7 ?
Entä, kun x = -1,5 ? Milloin y = 8,5 ?

3. **Tehtävä**: Jatka taulukkoa muutamalla luvulla ja etsi sääntö x:n ja y:n välille.

x	y
1	1
2	4
3	9

a) Sääntö, joka yhdistää luvut toisiinsa:

=

b) Havainnollista sääntöä koordinaatistossa. Tarkasta, onko saatu sääntö oikein.

c) Täydennä oikealla oleva taulukko.

x	y
-1	
-3	
	12,25

4. **Tehtävä**: Jatka taulukkoa tarpeen mukaan ja etsi sääntö annettujen lukujen välille.

x	y
1	1,5
2	1
3	0,5

a) Sääntö, joka yhdistää luvut toisiinsa:

=

b) Havainnollista sääntöä koordinaatistossa. Tarkasta, onko saatu sääntö oikein.

c) Täydennä oikealla oleva taulukko.

x	y
10	
	3
-7	

5. **Lisätehtävä:** Keksi kaverille sääntö. Kirjaa taulukkoon arvoja sen verran, että säännön voi arvata, mutta älä kuitenkaan paljasta liikaa.

x	y

OPPILAIDEN KOHTAAMAT ONGELMAT JOHDATUS TRIGONOMETRIAAN -TUNNILLA

Tarja Suomalainen ja Marika Vuorela

tarja.e.suomalainen@jyu.fi, marika.vuorela@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Toteuttamamme tutkivan matematiikan tunnin aiheena oli johdatus trigonometriaan ja se toteutettiin GeoGebra-ohjelman avulla. Oppilaille jaettiin tehtävämonisteet, joiden ohjaamana he tekivät GeoGebra-tehtäviä. Tehtävien avulla oppilaiden oli tarkoitus oivaltaa, että suorakulmaisten yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio. Tässä tutkimuksessa analysoimme oppitunnin videotallennetta: millaisia ongelmia oppilaat kohtasivat tehtäviä tehdessään ja millaista tukea he tarvitsivat ongelmatilanteissa. Ongelmatilanteet luokiteltiin ongelmatyyppeihin ja havaitsimme, että yleisin ongelmatyyppi oli oppilaiden itseluottamuksen vähäisyys. Oppilaat tarvitsivat opettajaa tueksi tehtävänannon ymmärtämisessä, antamaan vahvistusta ja rohkaisua, sekä ohjaamaan oppilaiden ajattelua erilaisten kysymysten avulla.

JOHDANTO

Tutkimuksen tavoite on selvittää millaisia ongelmatilanteita oppilaat kohtasivat tutkivan matematiikan tunnilla, jossa tehtävät perustuivat GeoGebra-ohjelman käyttöön ja sen avulla oivaltamiseen. Lisäksi tutkimme oliko jokin ongelmatyyppi vallitseva tutkivan matematiikan tunnilla. Tavoitteena on myös selvittää millaista opettajan tukea oppilaat tarvitsivat ongelmatilanteissa tehtävissä edetäkseen ja saavuttaakseen havainnoinnin kautta tehtäviin liittyvät perustelut. Tutkimuksella saadaan selvyyttä millaiseen ohjaamiseen opettajan tulee tutkivan matematiikan tunnilla valmistautua ja millaisia asioita oppilaat kokevat hankalaksi tutkivan matematiikan tunnilla.

Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivan matematiikan tunneilla opettaja ei anna suoria ohjeita tehtävien teossa vaan oppilaiden on ajateltava itse: opettaja ohjaa opiskelijoita tutkimaan asiaa. Opettajan ei tulisi myöskään ottaa kantaa ratkaisujen oikeellisuuteen, vaan hänen tulisi saada oppilaat pohtimaan itse ratkaisujen oikeellisuutta ja ohjata perustelemaan tehtyjä havaintoja.

Steinin ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tunti muodostuu yleensä alustusvaiheesta, tutkimusvaiheesta ja koontivaiheesta. Hähkiöniemen (2010) mukaan alustusvaiheessa opettaja esittelee ja alustaa tutkittavan ongelmasarjan. Tutkimusvaiheessa oppilaat ratkaisevat ongelmaa tai ongelmasarjaa ja opettaja kiertää luokassa seuraamassa ja ohjaamassa työskentelyä. Tärkein opettajan tehtävä tutkivan matematiikan tunneilla on opiskelijoiden aktivoiminen, motivoiminen, kannustaminen ja kehuminen sekä hyvien havaintojen esille nostaminen. Koontivaihe koostuu oppilaiden ideoiden kokoamisesta ja niihin liittyvästä keskustelusta. Lisäksi opettaja viimeistelee kehitetyt ideat, jotta oppilaille jäisi tutkimuksesta selkeä kuva.

Lewin ja Son (2008) mukaan opettajalla on tärkeä rooli avustajana oppilaiden päättelyprosessissa. Tämä rooli ilmenee oppilaiden yrittäessä tehdä päätelmiä teknologian avulla tekemiensä havaintojen ja aiempien tietojensa pohjalta. Lewin ja Son mukaan opettaja toimii ajattelun herättelijänä matemaattisessa päättelyssä, oppilaiden siirtyessä empiirisestä havainnoinnista syvällisempään perusteluun. Teknologiaa hyödyntävässä opetuksessa opettajan täytyy observoida oppilaiden toimintaa ja tehtävissä etenemistä, sekä jatkuvasti rohkaista oppilaita selittämään havaintojaan matemaattisesti ja tekemään päätelmiä siitä, mitä he ovat empiirisesti teknologian avulla havainneet.

Sahin ja Kulm (2008) jakavat opettajan esittämät kysymykset seuraaviin muotoihin: asiakysymykset, ohjaavat kysymykset ja syventävät kysymykset. Asiakysymykset ovat kysymyksiä joiden tarkoituksena on saada tietoa oppilaiden tiedoista ja osaamisesta. Ohjaavien kysymysten tarkoituksena on ohjata opiskelijoita tietyn ongelman ratkaisemisessa. Syventävillä kysymyksillä opettaja pyrkii syventämään oppilaiden ajattelua.

MENETELMÄT

Johdatus trigonometriaan

Tämä tutkivan matematiikan tunti järjestettiin 8. luokan oppilaille. Tunnin alustusvaiheessa kerrattiin muutama suorakulmaisen kolmion kateettien nimeämiseen liittyvät käsite: kulman vastainen kateetti ja kulman viereinen kateetti. Oppilaille annettiin suulliset ohjeet GeoGebralla työskentelyyn ja jokaiselle oppilaalle jaettiin tehtävämoniste, mutta he työskentelivät tietokoneilla pareittain. Tutkimusvaiheessa oppilaat muokkasivat GeoGebralla annettua suorakulmaista kolmiota tehtävämonisteen ohjeiden mukaan. Muokattaessa suorakulmaista kolmiota, oppilaiden tuli tehdä havaintoja ja vastata havaintojensa perusteella tehtävämonisteessa esitettyihin kysymyksiin. Tunnin tavoite oli erilaisten yhdenmuotoisten kolmioiden muokkaamisen ja tutkailun avulla oivaltaa, että suorakulmaisten yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio ja että myös yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret. Tämän oppitunnin oli tarkoitus toimia johdatuksena trigonometriaan, jota käsiteltiin seuraavalla oppitunnilla. Tunnin koontivaiheessa käytiin opettajajohtoisesti läpi muutaman tehtävän ratkaisut ja kirjattiin yhdessä johtopäätökset. Tuntisuunnitelma ja tehtävämoniste ovat liitteinä 1 ja 2.

Aineiston keruu

Tutkimusaineiston keruuseen käytettiin videointia mikrofoneineen: mikrofonilla varustettua opettajaa kuvattiin koko tunnin ajan. Lisäksi erästä oppilasparia kuvattiin toisella kameralla ja myös heidän puheensa äänitettiin mikrofonilla. Osalla oppilaiden käyttämistä tietokoneista oli käytössä myös ruudunkaappaus ja oppilaiden täyttämät tehtävämonisteet kerättiin talteen.

Aineiston analyysi

Vaikka tunnilta kerättiin monenlaista materiaalia, tässä tutkimuksessa analysoimme vain videotallennetta, jossa kuvataan opettajaa ja hänen kohtaamisiaan oppilasparien kanssa tunnin aikana. Tästä videotallenteesta analysoimme oppilaiden ongelmia, joita he kokivat tutkivan matematiikan tehtäviä tehdessään. Analyysiin on otettu mukaan kaikenlaiset ongelmat, johtuivatpa ne sitten oppilaan personasta tai tehtävien luonteesta. Tutkimuksessa ei kuitenkaan ole huomioitu mahdollisia ongelmia, joita oppilaat saattaisivat kohdata analysoitujen ongelmien lisäksi.

Esiintyneet ongelmat luokittelimme kymmeneen eri luokkaan:

1. Tehtävänannon ymmärtäminen
2. Turhautuminen
3. Käsitteet
4. Mekaaninen laskeminen
5. Itseluottamus
6. Ratkaisun soveltaminen
7. GeoGebran käyttö
8. Oppilas tarvitsee tukea lähikehityksen vyöhykkeellä
9. Väärä ratkaisumenetelmä
10. Muut

Yksittäinen videolla esiintynyt tilanne saatettiin koodata useampaan luokkaan sen mukaan, mikä oli oppilaiden ongelmien taustalla. Lukuisissa tilanteissa ongelman takana oli useampi taustatekijä. Oppilas saattoi esimerkiksi tarvita sekä opettajan kannustusta, että tukea lähikehityksen vyöhykkeellä. Seuraavat ongelmaluokat eivät olleet täysin yksikäsitteisiä ja niihin koodattuja asioita lienee syytä tarkentaa.

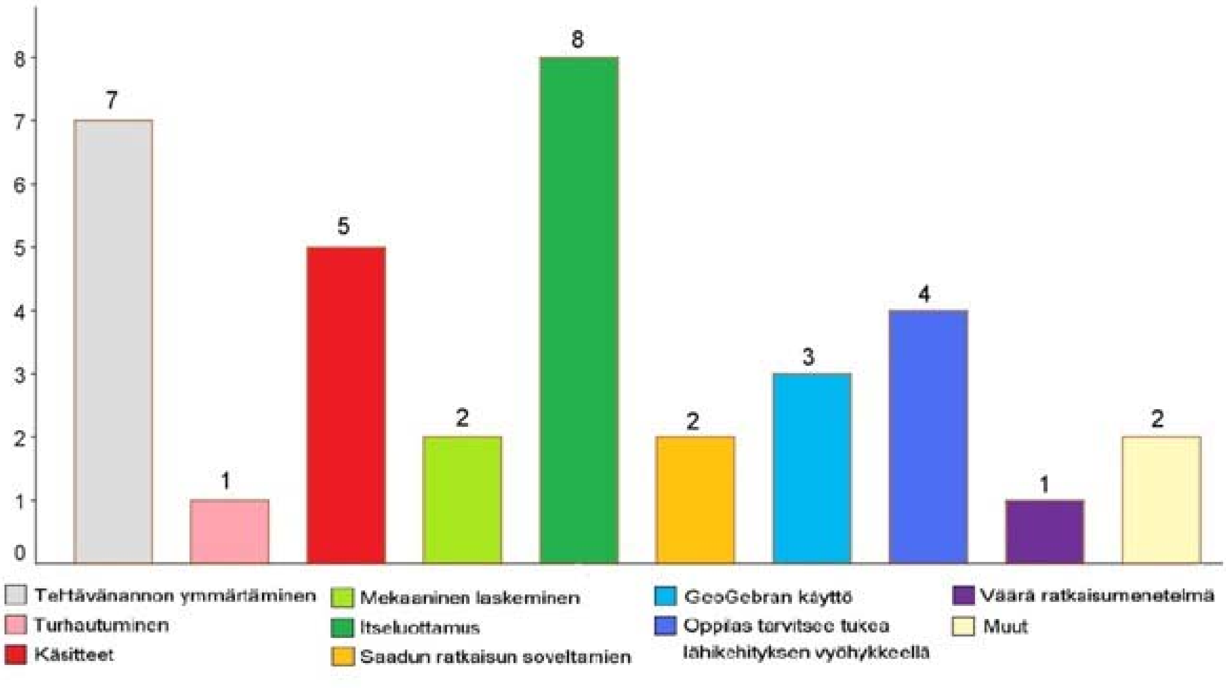
Luokkaan Käsitteet, laskimme mukaan ongelmat, jotka johtuivat joko esitietojen puutteesta tai tehtävässä vastaan tulleiden käsitteiden hallinnasta. Luokkaan Itseluottamus on laskettu mukaan tilanteet, joissa oppilas joko tarvitsi vain kannustusta keksiäkseen itse ratkaisun tai oppilas kaipasi opettajan vahvistusta omalle ratkaisulleen. Kohdan Oppilas tarvitsee tukea lähikehityksen vyöhykkeellä, perustimme Lev Vygotskyn teoriaan oppimisesta sosiaalisena toimintana. Vygotskyn (1978) mukaan lähikehityksen vyöhyke on tiedollisen toiminnan taso, jolla oppilas voi toimia ohjaajan tuen avulla, mutta ei itsenäisesti. Luokan Muut koimme tarpeelliseksi, sillä tunnilla esiintyi hyvin vaikeasti analysoitavia tilanteita, eikä näitä voinut luokitella mihinkään jo olemassa olevaan luokkaan. Muut luokkaan laskimme mukaan myös oppilaiden yhteistyöhön liittyvät ongelmat tehtäviä tehdessä.

Joidenkin ongelmatilanteiden tulkitseminen ja analysoiminen tiettyyn ryhmään kuuluviksi oli vaikeaa, sillä niissä saattoi olla elementtejä useista ongelmaryhmistä. Joissain tilanteissa oppilaat eivät itse kokeneet tehtävän teossa mitään ongelmaa, mutta opettaja toi esille, että heidän ratkaisumenetelmässään ei ollut kaikki kohdallaan. Joissain tilanteissa opettaja vain keskustelun avulla varmisti, että oppilaat olivat ymmärtäneet tehtävän tai tehneet tehtävän oikein.

TULOKSET

Tunnilla esiintyneet ongelmat liittyivät tehtävänannon ymmärtämiseen, oppilaan turhautumiseen, käsitteiden hallintaan, mekaaniseen laskemiseen, oppilaiden itseluottamukseen, ratkaisun soveltamiseen, GeoGebran käyttöön, oppilaiden tuen tarpeeseen lähikehityksen vyöhykkeellä, väärään ratkaisumenetelmään tai muuhun ongelmaan.

Vallitsevia ongelmatyyppejä tutkivan matematiikan tunnilla olivat oppilaiden itseluottamuksen vähäisyys, ongelmat tehtävänannon ymmärtämisessä ja käsitteiden heikko hallinta. Oppilaiden itseluottamuksen vähäisyys ilmeni epävarmuutena kokeilla rohkeasti omia ideoitaan GeoGebralla, sekä vaikeutena aloittaa tehtävien tekoa. Lisäksi monet oppilaat halusivat opettajalta varmistusta oman ratkaisunsa oikeellisuuteen, vaikka olivat onnistuneet suorittamaan tehtävän hyvin. Suurin osa tehtävänannon ymmärtämiseen liittyvistä ongelmista koski ensimmäistä tehtävää, jossa moni oppilas ei ymmärtänyt miten kolmion pinta-alan saisi nelinkertaistettua. Nämä oppilaat olivat lähteneet ratkaisemaan tehtävää nelinkertaistamalla kateettien pituudet. Siitä johtuiko tämä ongelma tehtävän huolimattomasti lukemisesta vai esitietojen puutteellisesta hallinnasta, meillä ei ole tietoa. Myöhemmin tunnilla esiintyneet tehtävänannon ymmärtämiseen liittyvät ongelmat johtuivat selvästi huolimattomuudesta: tehtävää ei oltu luettu tarkasti. Kuviossa 1 on esitetty eri ongelmatyyppien määräät tunnilla.



Kuvio 1. Ongelmatyyppien määrät

Oppilaat tarvitsivat opettajan tukea erityisesti tehtävänannon ymmärtämisessä, tehtävässä etenemisessä ja osoittamaan oppilaille kohtia, jotka he olivat jättäneet huomioimatta. Useat työparit tarvitsivat opettajan antamaa vahvistusta, rohkaisua tai kannustusta. Myös opettajan esittämät kysymykset auttoivat ja ohjasivat oppilaiden ajattelua tehtävissä, sekä helpottivat lopputulokseen päätymistä ja oikean ratkaisun oivaltamista.

Esimerkiksi seuraavassa tilanteessa ongelmana oli itseluottamuksen puute ja turhautuminen:

oppilas 1:	Opettaja! Nää ruudut ei riitä ja sit se ei suurenna enää isommaksi ne loppuu kesken.
opettaja:	Joo, nyt pitää lukee vielä tarkemmin. Eli se oli se pinta-ala.. yheksänkertanen.
oppilas 1:	HÄ!?
opettaja:	Hmmm..
oppilas 1:	Noku sori mutten osaa, en oo mikää kauhee matikkanero. Tää jää sitte tähän.
opettaja:	Ei hätää, saa miettii ihan rauhassa, ei kannata… Mitä saitte a-kohtaan?
oppilas:	No tämän.
opettaja:	Joo.
oppilas 2:	Tääki on väärin ihan.
oppilas 1:	No ei voi mitään, ei sitte tehä.
opettaja:	Se on vaan kovin iso (tarkoittaa oppilaiden muokkaamaa kolmiota).
oppilas 1:	Ei voi mitään, se on nelinkertasesti iso.
opettaja:	Eli te kasvatitte nelinkertaseksi ne kateetit?
oppilas 1:	No nii-in.
opettaja:	Joo…mut lähetään miettiin sen alkuperäsen kolmion pinta-alaa tosta..

Tässä kohtaamisessa ongelmatyyppejä oli useita, taustalla oli tehtävänannon ymmärtäminen ja ongelmia käsitteiden hallinnassa, mikä johti oppilaiden turhautumiseen tehtävää tehdessä. Myös oppilaiden itsetunto oli heikko, mikä lisäsi turhautumista. Keskustelun avulla opettaja sai oppilaat keskittymään tehtävään ja miettimään uudestaan tehtävänantoa. Oppilaat tarvitsivat opettajan tukea edetäkseen tehtävässä.

Seuraavassa tilanteessa puolestaan oppilaat tarvitsivat opettajan vahvistusta tai tukea lähikehityksen vyöhykkeellä:

opettaja:	Missä tehtävässä meette?
oppilas 1:	Täällä kolmosessa.
opettaja:	Kolmosessa, joo. Mites se kakkonen meni?

oppilas 2:	Ihan hyvin paitsi tuo…
oppilas 1:	Me ei oikein pystytä tekeen tätä mitenkää…
opettaja:	Joo, no siinä kannattaa nyt miettiä näitä… Piirsittekö näitä sillä GeoGebralla näitä aikasempia?
oppilas 1:	Jooo…
opettaja:	Jooo…
oppilas 2:	Siis ku me mietittiinki, että tohon vois laittaa ton kakskyt neljä piste kuuskyt kaks, mutta ku se ei näytä niinku…se ei.. ei saa edes sitä niinku.
opettaja:	Niin, joo.. kyllä
oppilas 1:	Et silleenkään ei voi.
opettaja:	No palataan tonne ykköskohtaan. Mitä te huomasitte sieltä, tossa c ja d kohassa?
oppilas 1:	Ai ilman GeoGebraa?
opettaja:	Mmm… vaikka toi, voidaan miettiä tota b-kohtaa…. että jos se ois minkä tahansa kokonen se suorakulmanen kolmio siellä, mut se ois yhdenmuotonen näitten a ja b kohdan niitten kolmioiden kanssa.
oppilas 1:	Joo.
opettaja:	Te tietäsitte sen toisen kateetin pituuden vaan, niin miten te voitte selvittää sen toisen?
oppilas 1:	No en mää, mä en muista miten se tehtiinkää.
opettaja:	Jooo. No haluutko piirtää vaikka nyt ton?
oppilas 1:	No ihan miten vaan.
opettaja:	Tai sitte voidaan kattoo siitä alkuperäsestä kolmiosta, kun se oli se yhdenmuotonen, eli nyt jos sä huomaatko jonkun yhteyden noitten kateettien pituudessa?
oppilas 1:	Öö no, tää on niinku kolmasosa tästä.
opettaja:	Njooo. Eli sitte jos se olis minkä tahansa kokonen mut samanmuotonen kun toi?
oppilas 1:	Niin muuten!
oppilas 2:	Eli se olis niinku kolmasosa se (piirtää ilmassa kateettia).
opettaja:	Joo se, se… Eli sä tarkotitko lyhyempää (tarkoittaa kateettia)? Joo.. mitä sitten jos sä tietäsit sen lyhyemmän niin?
oppilas 2:	Niin sit se olis kolminkertanen.
opettaja:	Joo, just niin … Eli nyt kannattaa sitten siltä pohjalta lähtee miettiin tota kakkostehtävää, että löytyyks sieltä jotain yhteyttä noitten kateettien pituuksiin ja voitteko te käyttää sitä tietoo sitte täällä hankalammissa

kohdissa vähä apuna. Eli mitä te, te olitte ton c:n saanu kuitenkin selvitettyä.

oppilas 1: Niin joo. Ai niin joo tästäki sen näkee, että se on kolmasosa…

Tässä tilanteessa oppilaat olivat edenneet jo tehtävään kolme, vaikka he eivät olleet täysin ymmärtäneet aikaisempia tehtäviä. He eivät olleet huomanneet, että he tarvitsevat edellisen tehtävän tietoja edetäkseen seuraavaan. Kyseessä oli myös tehtävänannon väärinymmärtäminen, joka johtui oppilaiden huolimattomuudesta. Tehtävää ei oltu luettu loppuun, eikä siten myöskään suoritettu halutulla tavalla. Opettaja ohjaa oppilaita tarkastelemaan edellisen tehtävän loppua GeoGebralla tehdyn kolmion avulla. Opettajan kysymysten avulla oppilaat huomasivat virheensä ja pystyivät jatkamaan tehtävää kolme. Opettajan tuen avulla oppilaat siis oivaltavat idean, jota tehtävällä on haettu.

POHDINTA

Luultavasti oppilaiden itseluottamukseen liittyvien ongelmien yleisyys tunnilla johtui osaltaan siitä, että tutkiva matematiikka oli oppilaille uutta ja poikkeaa pitkälti tavallisesta matematiikan tunnista. Tavallisella matematiikan tunnilla oppilas tietää mitä tehdä, koska tunneilla yleensä annetaan esimerkkitehtäviä, joita soveltamalla oppilaiden on mahdollista tehdä tehtäviä itse. Oppilaita saattoi myös hieman jännittää oppitunnin asetelma: videokuvaaminen ja ruudunkaappaus. Tämä saattoi heijastua muun muassa oppilaiden GeoGebran käyttöön, eivätkä he ehkä kokeilleet erilaisia ratkaisuja yhtä rohkeasti, kuin mitä he muuten olisivat tehneet.

Muutamat ongelmat olivat täysin odotettavissa olevia, kuten esimerkiksi turhautuminen ja luokaan Muut koodattu oppilaiden yhteistyöhön liittyvä ongelmatilanne.

Myös Lewin ja Son (2008) ajatus, opettajan tärkeästä roolista avustajana oppilaiden päättelyprosessissa sai tukea tällä tunnilla. Tämä rooli ilmeni oppilaiden yrittäessä tehdä päätelmiä: opettaja toimi ajattelun herättelijänä matemaattisessa päättelyssä ja häntä tarvittiin rohkaisijana, kun oppilaat pyrkivät tekemään päätelmiä siitä, mitä he GeoGebran avulla olivat havainneet.

Ohjaustilanteissa opettajan kysymykset olivat osaksi Sahinin ja Kulmin (2008) jaottelun mukaisia: asiakysymykset, ohjaavat kysymykset ja syventävät kysymykset. Asiakysymysten tarkoituksena oli saada tietoa oppilaiden tiedoista ja osaamisesta. Ohjaavien kysymysten tarkoituksena oli ohjata opiskelijoita tietyn ongelman ratkaisemisessa. Syventävillä kysymyksillä pyrittiin syventämään oppilaiden ajattelua tai saada perustelua sille, miten oppilaat olivat tehtävän päätelleet. Joissain ongelmatilanteissa opettajan oli pakko ohjata oppilaita suoraan, jotta oppilaat pääsisivät tehtävässä eteenpäin ja turhautumisen tunne saataisiin tukahdutettua.

Kuten Hähkiöniemen (2010) luennoilla tuli ilmi, opettajan tärkein tehtävä tutkivan matematiikan tunneilla oli pitkälti opiskelijoiden aktivoiminen, motivoiminen, kannustaminen ja kehuminen, sekä hyvien havaintojen esille nostaminen.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tuntien suunnittelu oli hankalaa, koska lopullinen tavoite ei ollut kunnolla selvillä. Lisäksi hankaluutta tuottivat sopivien aiheiden löytäminen kurssisuunnitelmasta. Oli hämmentävää, kun täytyi suunnitella oppilaille tutkivia tehtäviä ja samalla mielessä kummitteli ajatus, että tunnista tulisi itsekin tehdä jonkinlaista tutkimusta ja analysoida jotain, mutta ei ollut käsitystä että mitä.

Itse tuntien toteuttaminen sujui onnistuneesti ja oppilaat työskentelivät hyvin ja suhtautuivat työskentelyyn mukavasti.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Lew, H-C., & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Toim.), *Proc. of the joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, s. 313-320). Morelia, Meksiko: PME.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA: JOHDATUS TRIGONOMETRIAAN

Tunti järjestetään tietokoneluokassa. Tunnin alussa on aamunavaus. Olisi hyvä jos tietokoneet olisivat jo toimintavalmiudessa ennen tuntia. Tunnille olisi hyvä varata laskimia oppilaiden käyttöön.

Alustusvaihe (noin 10 min)

Tunti alkaa alustusvaiheella, jossa käydään yhdessä luokan kanssa läpi suorakulmaisen kolmion kateettien nimeäminen (kulman vastainen kateetti ja viereinen kateetti).

Tämän jälkeen Oppilaille annetaan suulliset ohjeet GeoGebra työskentelyyn ja heille jaetaan tehtävämonisteet, joiden mukaan he suorittavat GeoGebra-tutkimustaan heille valmiiksi annettua GeoGebra-pohjaa muokaten. Ohjeiden annon jälkeen oppilaat siirtyvät tietokoneille, missä he työskentelevät pareittain.

GeoGebra-pohja löytyy osoitteesta http://users.jyu.fi/~mahahkio/kolmio

Tutkimusvaihe (noin 20 min)

Oppilaat ovat pareittain tietokoneilla, jokaiselle on jaettu ohje/tehtävämoniste jonka saattamana he tutkimustaan suorittavat. Päätarkoitus olisi tämän tutkailun avulla oivaltaa, että suorakulmaisista yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtä suuret vastinsivujen suhteet ja että myös yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret. Kiertelen tunnin aikana luokassa ja autan oppilaita, jos heillä on kysymyksiä.

Koontivaihe (noin 10 min)

Koontivaiheessa käydään yhdessä läpi tutkimuksella toivottavasti saavutetut huomiot sivujen suhteista. Käydään yhdessä läpi ainakin parin tehtävän olennaisimmat kohdat (ainakin tehtävän 1 d-kohta ja tehtävän 2 kohta e) siten, että kyselen oppilailta minkälaisia päättelyitä he ovat tehtävistä tehneet.

Lopussa kootaan vielä yhdessä tehtäväpaperiin johtopäätöksiin ylös huomiot että:

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio.

Myös yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret.

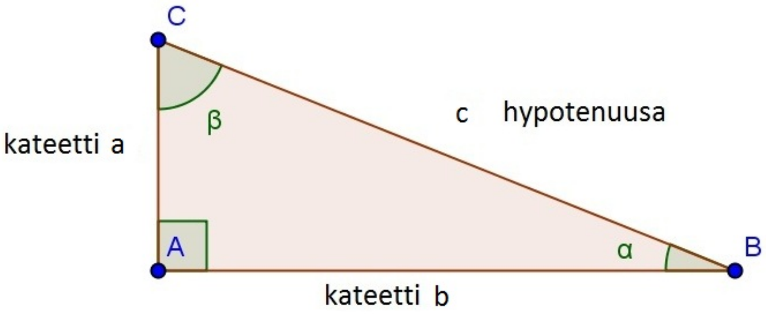
Koonnin lopussa oppilaille jaetaan kotitehtävämoniste, joka käydään läpi seuraavalla tunnilla.

Kotitehtävä

Tutkimustuntiin liittyy vielä kotitehtävä, jossa konkreettisesti lasketaan kolmen yhdenmuotoisen erikokoisen suorakulmaisen kolmion vastinsivujen suhteet. Tässä taulukoidaan lasketut arvot ja huomataan että vastinsivujen suhde todella on vakio erikokoisilla yhdenmuotoisilla kolmioilla. (Tätä kotitehtävämonistetta on haluttaessa mahdollista käyttää hyödyksi myös seuraavalla tunnilla jossa käsitellään trigonometrisia funktioita.)

LIITE 2: TUNNILLA KÄYTETTY TEHTÄVÄMONISTE

JOHDANTO: SUORAKULMAISEN KOLMION KATEETTIEN NIMEÄMINEN



Kulman α vastainen kateetti = kateetti a

Kulman α viereinen kateetti = kateetti b

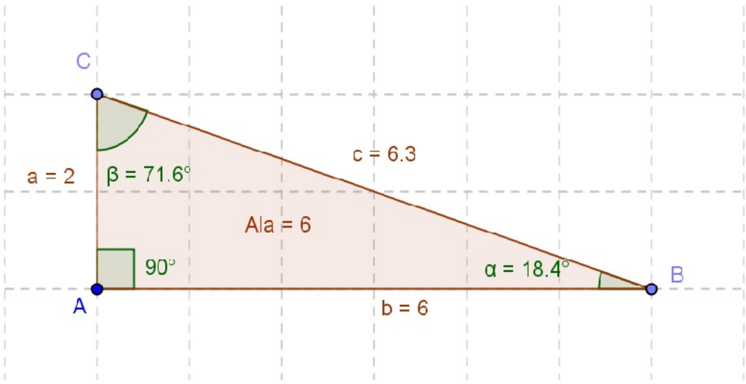
Kulman β vastainen kateetti = kateetti b

Kulman β viereinen kateetti = kateetti a

Tee parisi kanssa seuraavat tehtävät Geogebraa apuna käyttäen

Geogebra työalusta löytyy osoitteesta: http://users.jyu.fi/~mahahkio/kolmio

Tehtävä 1



a) Raahaa Geogebralla suorakulmaisen kolmion ΔABC kulmapisteitä B ja C niin, että syntyy **yhdenmuotoinen** annetun suorakulmaisen kolmion **pinta-alaltaan nelinkertainen suurennos**.
   - Merkitse ylös kateettien pituudet ja kulmien α ja β suuruudet

b) Raahaa pisteitä uudelleen siten, että syntyy **yhdenmuotoinen** alkuperäisen suorakulmaisen kolmion **pinta-alaltaan yhdeksänkertainen suurennos.**
   - Merkitse ylös kateettien pituudet ja kulmien α ja β suuruudet

c) Mieti ja ratkaise ensin **laskemalla ilman GeoGebraa**, että miten pitkä olisi alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisen kolmion toinen kateetti, jos kulman α viereisen kateetin pituus on 9. Voit tarkastaa ratkaisusi vielä GeoGebralla.

d) Jos suorakulmainen kolmio on minkä tahansa kokoinen, yhdenmuotoinen edellisten kolmioiden kanssa ja tiedetään sen toisen kateetin pituus niin miten voit selvittää toisen kateetin pituuden?

Tehtävä 2

a) Selvitä Geogebralla miten suuret ovat kulmat α ja β, jos kateetit ovat pituuksiltaan 10 ja 5?

Kokeile vaihtaa kateettien pituudet keskenään. Miten vaihto vaikuttaa kulmien α ja β suuruuksiin?

b) Miten suuret ovat kulmat α ja β jos kateetit ovat pituuksiltaan 4 ja 2?
c) Entä jos kateetit ovat pituuksiltaan 6000 ja 3000?
d) Mitä jos kateetit ovatkin pituuksiltaan 2462 ja 1231?
e) Ratkaise nyt edellisten kanssa yhdenmuotoiselle suorakulmaiselle kolmiolle laskemalla kulman α viereisen kateetin pituus, kun kulman α vastainen kateetti on pituudeltaan 26789,5 ja kulma α=26,6°

Tehtävä 3

a) Ratkaise suorakulmaisen kolmion **muiden sivujen pituudet**, kun tiedetään että kulma α=36,9° ja kulman α viereinen kateetti on pituudeltaan 400?
b) Jos kolmio säilyy yhden muotoisena ja kulman α viereinen kateetti olisi pituudeltaan 4444, niin mitkä olisivat **muiden sivujen pituudet**?

Lisätehtävä

Kuinka suuri on kulma α, jos α:n vastainen kateetti on pituudeltaan 2121 ja hypotenuusa on pituudeltaan 8484?

Johtopäätökset:

SUORAKULMAISTEN KOLMIOIDEN YHDENMUOTOISUUS GEOGEBRAN AVULLA

Juho Nuutinen ja Antti Paappanen

juho.nuutinen@jyu.fi, antti.paappanen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä tapaustutkimuksessa tarkastellaan voisiko tutkivasta matematiikasta ja GeoGebra-ohjelmasta olla apua yhdenmuotoisiin kolmioihin liittyvien suhteiden opettamisessa kahdeksannella luokalla. Tutkimus toteutettiin Jyväskylän normaalikoulun matematiikan oppitunnilla videoimalla kahden kahdeksasluokkalaisen oppilaan työskentelyä. Tutkimuksen perusteella tutkivan oppimisen tunnilla GeoGebra voi olla tärkeä työkalu matemaattisen ongelman hahmottamisessa ja ratkaisemisessa.

JOHDANTO

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, voisiko tutkivasta matematiikasta ja GeoGebra-ohjelmasta olla oppilaille apua yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden yhteydessä. Marshallin ja Hortonin (2011) tutkimuksen mukaan oppilaiden tiedollinen ymmärrys kehittyy huomattavasti paremmin, kun oppilaille annetaan aikaa tutkia uusia käsitteitä ja opettaja ohjeistaa heitä tutkivan oppimisen hengessä. Lisäksi Sullivanin (2006) tutkimuksen perusteella tutkivan matematiikan tunnilla kaikki oppilaat on mahdollista saada osallistumaan matemaattiseen ajatteluun. Erityisesti olemme kiinnostuneita yhdenmuotoisiin suorakulmaisiin kolmioihin liittyvien suhteiden oppimisesta. Perinteisesti oppikirjat ja opettajat ovat lähestyneet asiaa mittakaavan ja karttatehtävien kautta, jolloin oppilaille yleensä kerrotaan, että kuvioiden ollessa yhdenmuotoiset niiden sivujen pituudet suhtautuvat toisiinsa mittakaavan mukaisesti. Siten myös yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden väliset vastinsivujen suhteet ovat samat. Usein vähemmälle huomiolle kuitenkin saattaa jäädä tieto siitä, että yhdenmuotoisissa suorakulmaisissa kolmioissa jokaisen sivuparin suhde on vakio saman kolmion sisällä. Tämä on merkityksellistä sikäli, että trigonometriset funktiot tuottavat osalle oppilaista huomattavia vaikeuksia yläkoulussa.

MENETELMÄT

Suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuus

Toteutimme tutkivan matematiikan oppitunnin kahdeksasluokkalaisten geometrian oppitunnilla. Oppilaat tekivät tunnilla pareittain harjoitustehtäviä GeoGebran avustuksella. Tunti käsitteli suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuutta.

Oppilaiden kanssa oli käsitelty aiemmin kolmioiden yhdenmuotoisuutta vastinsivujen suhteiden avulla vertaamalla vastinsivujen pituuksia kolmioiden välillä mittakaavan tapaan. Myös yhdenmuotoisten kolmioiden kulmien yhtäsuuruus oli oppilaille opetettu. Lisäksi oli käsitelty mittakaavaa kartalla sekä mittakaavan ja pinta-alan välistä suhdetta. Siitä, että katsottaisiin sivujen pituuksien suhteita saman kolmion sisällä ei oltu puhuttu mitään. Seuratun oppilasparin työskentelystä ja koko oppilasryhmän tuloksista voidaan tehdä havainto, että myös mittakaavan soveltaminen yhdenmuotoisiin kolmioihin ja pinta-ala tarkastelut tuntuivat uusille asioille.

Tavoitteena tunnilla oli saada oppilaat oivaltamaan että sivujen pituuksien suhde yhdessä kolmiossa ja kyseisten sivujen vastinsivujen pituuksien suhde toisessa kolmiossa ovat samat yhdenmuotoisten kolmioiden tapauksessa.

Tehtävät annettiin oppilaille internet-sivuna, jolla oli tehtävien yhteydessä linkit selaimessa toimiviin dynaamisiin GeoGebralla luotuihin harjoitustehtäviin. Lisäksi oppilaille jaettiin vastaavat tehtävät paperiversiona ja tämä paperiversio toimi myös oppilaiden vastauspaperina.

Tehtävät rakennettiin monivaiheisiksi. Tehtävässä 1 oppilaille annettiin kaksi yhdenmuotoista erikokoista suorakulmaista kolmiota, joista pienempää pystyi liikuttelemaan GeoGebralla. Kolmioiden kateettien pituudet oli annettu mutta kulmien suuruuksia ei ollut suoraa kulmaa lukuun ottamatta näkyvissä. Tehtävässä kysyttiin oppilailta että ovatko kolmiot yhdenmuotoiset. Tehtävän tarkoituksena oli selvittää vertailevatko oppilaat pienempää kolmiota liikuttamalla kolmioiden kulmien suuruutta vai katsovatko he kateettien pituuksien välisiä suhteita. Sivujen pituuksista yhdenmuotoisuuden pystyi toteamaan varmasti, kun taas kulmien yhtäsuuruus oli vain näköhavainnon varassa. Näin tehtävästä sai tietoa oppilaiden ennakkokäsityksestä siitä, millaisiksi oppilaat ovat omaksuneet yhdenmuotoiset suorakulmaiset kolmiot aiemman opetuksen perusteella.

Tehtävässä 2 oppilaille oli annettu malliksi suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet olivat 3 ja 6. Tehtävän a-kohdassa oppilaita pyydettiin tekemään mikä tahansa mallikolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio. Tämän tehtävän tarkoituksena oli selvittää, ajattelevatko oppilaat yhdenmuotoisuutta vastinsivujen pituuksien kautta vertaamalla kolmiosta kolmioon vai vertaavatko he kolmion sivujen pituuksien suhteita kolmion sisällä. Tehtävän b-kohdassa tehtävänä oli tehdä yhdenmuotoinen suorakulmainen kolmio, jonka pidemmän kateetin pituus on 5. Tällä sivun pituuden valinnalla pyrittiin ohjaamaan oppilaita ajattelemaan yhdenmuotoisuutta tarkastelemalla sivujen pituuksien suhdetta kolmion sisällä. Sivujen pituudet valittiin niin, että sivujen pituuksien vertaaminen kolmion sisällä oli helpompaa kuin vertaamalla vastinsivujen pituutta kolmiosta kolmioon. Näin tehtävän rakenne pyrki ohjaamaan oppilaita oikeaan havaintoon tunnin tavoitetta ajatellen. Tehtävän c-kohdassa kysyttiin vielä sanallisesti varmennusta siihen miten saadaan tehtyä mallikolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio tiedettäessä yhden kateetin pituus kolmiosta. Tällä pyrittiin kartoittamaan oppilaiden oppimista ja ymmärrystä asiasta.

Tehtävässä 3 oppilaita pyydettiin a-kohdassa perustelemaan millaisia ovat kolmiot, joilla kahden vastinsivun pituuksien suhde on vakio. Tässä haettiin vielä vahvistusta sille, olivatko oppilaat omaksuneet kyseisen ominaisuuden pätevän yhdenmuotoisille kolmioille. Tehtävän b-kohdassa oppilaita kehotettiin huomioimaan saman ominaisuuden pätevän myös muiden sivuparien pituuksien suhteelle. Lopuksi tehtävän c-kohdassa oli tehtäviä joilla pyrittiin havainnollistamaan jo aiemmin opiskeltua asiaa, nimittäin pinta-alojen ja mittakaavan välistä suhdetta.

Nopeimmille oppilaille varattiin tehtävään 4 soveltavampia tehtäviä liittyen kolmion sivun pituuden tai kulman ratkaisemiseen. Kolmion sivun pituudet valittiin tehtävässä siten, että tehtävässä annettuja sivun pituuksia ei pystynyt suoraan käyttämään GeoGebrassa. Sivujen pituuksia piti soveltaa tehtävässä joillekin pienemmille sivun pituuksille, joiden suhde on kuitenkin sama kuin annetussa tehtävässä. Näin tämäkin tehtävä oli rakennettu tukemaan tunnin päätavoitetta, jossa yhdenmuotoisuutta tarkasteltiin kolmion sivujen pituuksien suhteen kautta kolmion sisällä. Lopuksi oli vielä tarjolla tehtävä 5, jossa oppilaat saisivat harjoitella kolmioiden piirtämistä GeoGebran avulla.

Aineiston keruu

Aineisto kerättiin videoimalla tunti kahdella kameralla sekä keräämällä oppilaiden kirjalliset vastaukset kysymyksiin. Yhdellä kameralla kuvattiin opettajaa, jolla oli kameraan liitetty langaton mikrofoni. Toinen kamera keskittyi pääasiassa kuvaamaan yhden oppilasparin työskentelyä ja oppilasparin pulpetille oli sijoitettu kameraan langattomasti liitetty mikrofoni. Ruudunkaappausta tietokoneissa ei käytetty.

Aineiston analyysi

Aineistoa analysoitiin lähinnä katsomalla tarkkaan videolta valitun oppilasparin työskentelyä. Huomiota analysoinnissa kiinnitettiin oppilaiden keskinäiseen keskusteluun ja erityisesti opettajan kanssa käytyihin keskusteluihin. Tarkastelimme, miten opettaja ohjasi oppilaita kohti oikeaa ratkaisua sekä mitkä asiat mahdollisesti tuottivat oppilaille vaikeuksia ja auttoiko GeoGebra niiden yli pääsemiseen. Toisaalta analysoitiin oppilaiden papereille kirjoittamia ratkaisuja ja sitä, näyttikö ratkaisujen perusteella siltä, että tavoiteltu asia tuli ymmärretyksi.

Videoiden tarkastelussa käytettiin tapaa, jossa oppilasparin tunnin sisältöön liittyvien keskustelujen kuvaukset kirjoitettiin ylös taulukkoon kyseessä olevan kellonajan kohdalle. Lisäksi huomioitiin oppilasparin GeoGebralla tekemät toiminnot niin hyvin kuin ne videosta saatiin näkyviin. Kuvauksen yhteyteen liitettiin kommentti ja se, mitä tehtävää oppilaspari oli ratkaisemassa.

TULOKSET

Ensimmäisen tehtävän oppilaspari ratkaisi omatoimisesti jonkin aikaa mietittyään tiedossa olevaan määritelmään perustuen: Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska niiden kulmat ovat yhtä suuret. Vasta toisessa tehtävässä he kiinnittivät huomiota sivujen pituuksien suhteisiin. Oppilailla oli jonkin verran vaikeuksia tehtävän kanssa ja lopulta opettaja ohjasi oppilaita melko voimakkaasti haluttuun ratkaisutapaan tehtävässä 2.a):

Opettaja: No, mitä osaat sanoa kutosesta ja kolmosesta?

Oppilas A: No, ne on puolet tai siis niinku...

Opettaja: Mmm.

Oppilas A: No pitääks näittenkin sit olla yks kahdesosa? (osoittaa toisen kolmion vastaavia sivuja)

Opettaja: Siitä, kun lähdet rakentamaan sitä.

Opettaja ohjasi oppilaat katsomaan suhdetta juuri saman kolmion sisällä, eikä mittakaavan avulla. GeoGebran avulla saadut empiiriset havainnot olivat kuitenkin oppilailla apuna luomassa pohjaa ratkaisulle. Lisäksi havainnot jälkeenpäin vahvistivat oppilaiden käsitystä teorian oikeellisuudesta. Seuraavat kaksi tehtävää (2.b) ja 2.c)) oppilaspari sai ratkaistua omatoimisesti ja todella nopeasti. Erityisesti tehtävässä 2.c) pyrittiin testaamaan sitä, oliko oppilaille kehittynyt ymmärrystä.

Vaikka oppitunnin ja tutkimuksen varsinainen tavoite liittyikin tehtävään 2, saatiin mielenkiintoisia tuloksia myös 3. tehtävän kohdalla. Jostain syystä pinta-alan yhteydessä oppilaspari innostui kokeilemaan GeoGebralla vielä enemmän kuin aikaisemmissa tehtävissä. Tehtävän ratkaiseminen oli hidasta ja välillä turhautumistakin ilmeni. GeoGebran avulla saatiin havaintoja, jotka olivat lähellä ohjata oppilaat oikeaan ratkaisuun. Opettajaa kuitenkin tarvittiin taas havaintojen lisäksi:

Opettaja: Että saat nelinkertaiseksi tuon pinta-alan, niin miten pitää muuttaa noita sivun pituuksia?

Oppilas A: En mää tiiä. Me kerrottiin ne neljällä, mutta siitä tuli ihan liian iso vaan.

Opettaja: Tai siis kerroitte neljällä nuo alkuperäiset varmaan, tarkotat.

Oppilas A: Sillon se pinta-ala oli joku seitkytseittemän.

Opettaja: Tulee kuustoistakertainen.

Oppilas A: Kerrotaanks ne sit kahella?

Opettaja: No, lähe siitä kokeilemaan.

Oppilaat olivat jo tässä vaiheessa selvästi ymmärtäneet, että kolmion kaikkia sivuja on kerrottava samalla luvulla, jotta kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa. Nelinkertaiseksi pinta-alaa yritettiin muuttaa kertomalla jokaista sivua neljällä. Havainto oli kuitenkin se, että saatu kolmio on ihan liian iso. Ratkaisevana vihjeenä opettaja antoi sen, että tuolloin pinta-ala on kuusitoistakertainen alkuperäisen kolmion pinta-alaan nähden. Tästä oppilas A nopeasti keksi, että sivujen pituudet on kerrottava kahdella.

POHDINTA

Tulosten perusteella näyttää siltä, että tutkiva oppiminen yhdistettynä GeoGebran käyttöön voi tuoda hyviä tuloksia yhdenmuotoisten kolmioiden yhteydessä. Myös Lewin ja Son (2008) tutkimuksessa on osoittautunut, että graafisen teknologian avulla saadut empiiriset havainnot voivat olla tärkeitä työkaluja matemaattisen ongelman ratkaisemisessa. Pitämällämme tunnilla oppilaille kehittyi mielestämme ymmärrys siitä, että erikokoisissa yhdenmuotoisissa suorakulmaisissa kolmioissa sivujen pituuksien suhteet kolmioiden sisällä ovat samat. Vaikka opettaja ohjasi oppilaat tarkastelemaan suhdetta saman kolmion sisällä, oli GeoGebra apuna, kun tarkasteltiin näyttävätkö kolmiot samoilta. Kolmannen tehtävän perusteella voidaan sanoa, että GeoGebra auttoi merkittävästi oppilaita hylkäämään väärän ratkaisun ja teorian pois. Oppilaat pystyivät tekemään johtopäätöksen, että kerrottaessa sivujen pituuksia jollain luvulla pinta-ala ei kertaannu samalla luvulla. Toisaalta opettajaa tarvittiin taas havaintojen avuksi. Tästä tehtävästä ei pystytty tekemään tutkimuksen pääpainoa, koska karttatehtävien yhteydessä oli ollut puhetta pinta-aloista ja mittakaavan neliöstä. Kuitenkin tutkimuksemme perusteella uskallamme väittää, että tässä olisi erinomainen paikka GeoGebran ja tutkivan matematiikan käytölle opetuksessa. Edellistunnilla voitaisiin käsitellä mittakaava ja oppilaat saisivat itse keksiä yhteyden pinta-aloihin. Pinta-alojen arvioiminen empiirisesti GeoGebralla tuntui tulevan oppilailta lähes itsestään ja näin kehittyisi parempi ymmärrys, miksi pinta-alojen suhde on juuri mittakaavan neliö.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tutkimuksen ja tunnin päätavoitteeseen liittyen olisi tehtävään 2 voinut ehkä lisätä piirrettäväksi useampia mallikolmion kanssa yhdenmuotoisia kolmioita, jolloin oppilaille olisi varmemmin muodostunut käsitys siitä, että sivujen pituuksien suhde on vakio kolmiossa kaikkien yhdenmuotoisten kolmioiden tapauksessa.

Ylipäätään kokemukset tutkivan matematiikan tunneista ovat olleet positiivisia siinä mielessä, että tuntien kulku poikkeaa normaalista kaavasta ja oppilaat olivat melko hyvin mukana tunneilla. Jälkeenpäin palaute oli tosin sellaista, että tunti tuntui turhalta, eikä opittu mitään. Varmaankin tutkivassa matematiikassa on oppilailla (ja opettajalla) paljon totuttelemista ja nyt tunnit näyttäytyivät oppilaille jossain määrin irrallisina opetuskokeiluina, eivätkä normaaleina oppitunteina, joilla opitaan tehokkaasti asioita. Tutkivan matematiikan kehityksen kannalta olisikin tärkeää, että sitä käytettäisiin säännöllisesti. Jonkinlainen kirja opettajalle, jossa olisi eri sisältöihin ja aiheisiin liittyviä mahdollisia tuntisuunnitelmia/ideoita sekä esimerkki tapoja pitää tutkiva tunti olisi tosi hyödyllinen. Tuntien suunnittelu on kuitenkin todella paljon työläämpää kuin tutulla kaavalla menevän oppitunnin. Pitämillämme tunneilla havaitsimme parityöskentelyyn liittyvän selkeän ongelman. Jos sattuu pari, jossa toinen on huomattavasti "taitavampi", niin yhteistyö etenee hänen ehdoillaan ja tahdillaan. Toinen parista passivoituu ja on tyytyväinen siihen, että saa "ilmaiseksi" oikeat vastaukset omaan paperiinsa.

Mielenkiintoinen havainto tästä tunnista on yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteisiin liittyvä. Olisiko jo aika keksiä paremmat suomennokset näille käsitteille ja lopettaa kokonaan näiden käyttäminen? Nyt ne menivät tosi monella sekaisin ja omien kouluaikojenkin perusteella ne sekoittuivat helposti. Käsitteet yhtenevät ja yhdenmuotoiset kuulostavat muinaiselta suomelta, eikä niistä todellakaan tule suoraan esille se, mistä on kyse. Englanninkielinen similar triangles voitaisiin ihan hyvin suomentaa vaikka samanmuotoiset kolmiot. Yhtenevyyden tilalle voisi ottaa suomennokseksi esimerkiksi samanlaiset kolmiot tai samanmuotoiset ja samankokoiset kolmiot.

Lähteet

Lew, H-C., & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Toim.), *Proc. of the joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, s. 313-320). Morelia, Meksiko: PME.

Marshall, J. C., & Horton, R. M. (2011). The relationship of teacher-facilitated, inquiry-based instruction to student higher-order thinking. *School Science and Mathematics, 111*(3), 93-101.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

LIITE 1: TEHTÄVÄNANTO OPPILAILLE

Suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuus

Lue ohjeet:

Seuraaviin tehtäviin löytyy Internetistä valmiit GeoGebra-pohjat. Tehtävien yhteydessä on osoitteet, joista pohjat löytyvät. Linkki aukeaa painamalla Ctrl-näppäin pohjaan ja samalla klikkaamalla hiirellä linkkiä.

Tehtävä 1 http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yhdenmuotoisuus1.html

Ovatko tehtävän kolmiot yhdenmuotoiset? Perustele vastauksesi eli kerro lyhyesti miten tutkit kolmioiden yhdenmuotoisuutta tehtävässä.

Tehtävä 2 http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yhdenmuotoisuus2.html

a) Tee mallikolmion DEF kanssa yhdenmuotoinen kolmio, joka on kuitenkin erikokoinen kuin mallikolmio. Perustele lyhyesti miksi tekemäsi kolmio on yhdenmuotoinen mallikolmion kanssa. Mitkä ovat tekemäsi kolmion kateettien pituudet?

b) Tee toinen kolmion DEF kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka pidemmän kateetin pituus on 5. Miksi kolmiot ovat yhdenmuotoiset? Mikä on toisen kateetin pituus?

c) Miten saadaan kolmion DEF kanssa yhdenmuotoisen kolmion toisen kateetin pituus selville kun toinen tiedetään?

Tehtävä 3 http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yhdenmuotoisuus3.html

a) Tutki Geogebran avulla ja perustele lyhyesti.

Milloin $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$?

b) Mitä havaitset tällöin muiden sivujen suhteista verrattuna mallikolmioon?

c) Tee mallikolmion DEF kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka pinta-ala on nelinkertainen mallikolmioon nähden. Mitkä ovat tekemäsi kolmion sivujen pituudet?

Tee vastaavalla tavalla uusi yhdenmuotoinen kolmio, jonka pinta-ala on yhdeksänkertainen mallikolmioon nähden. Mitkä ovat tekemäsi kolmion sivujen pituudet?

Tehtävä 4 http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yhdenmuotoisuus4.html

a) Selvitä GeoGebran avulla mikä on kolmion toisen kateetin pituus, jos kolmion yksi kulma on $14{,}04^0$ ja sen vastainen kateetti on 5000.

b) Selvitä mikä on kolmion toisen kateetin pituus, jos kolmion yksi kulma on $14{,}04^0$ ja sen vastainen kateetti on 22 111.

c) Selvitä GeoGebran avulla kolmion kulman suuruus, jos sen vastainen kateetti on 1500 ja viereinen kateetti 500.

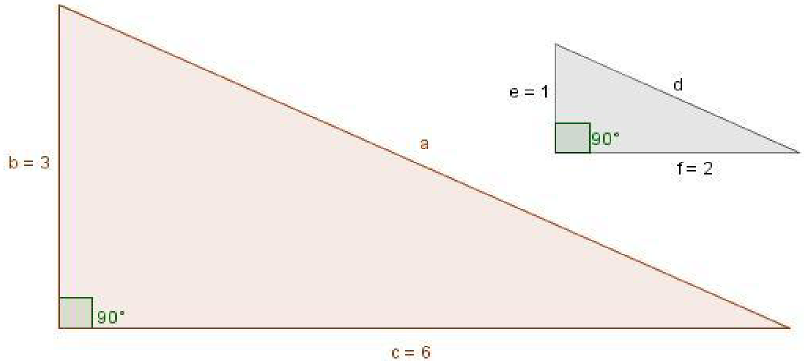
d) Selvitä kolmion kulman suuruus, jos sen vastainen kateetti on 36933 ja viereinen kateetti 12311.

Tehtävä 5 http://www.geogebra.org

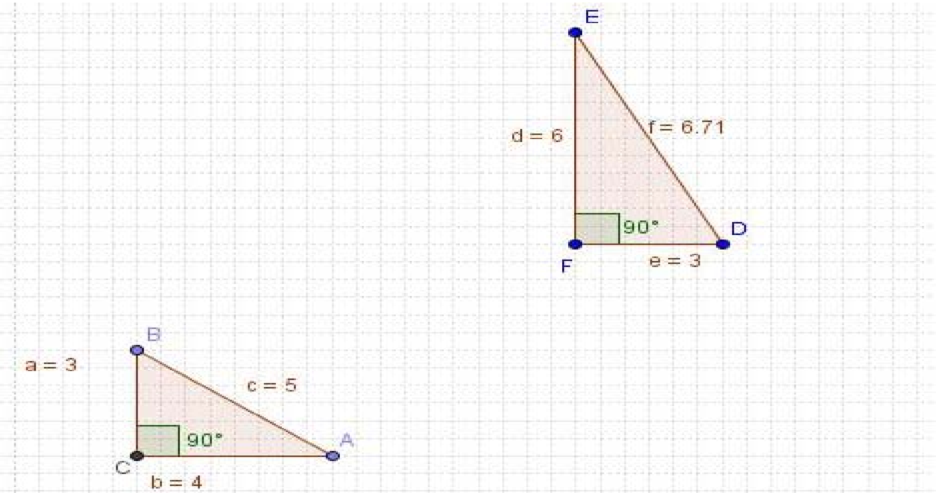
Avaa linkistä GeoGebra valitsemalla ensimmäisenä aukeavalta sivulta Download ja seuraavaksi aukeavalta sivulta Webstart. Harjoittele yhdenmuotoisten kolmioiden piirtämistä GeoGebran avulla.

LIITE 2: KUVAT TEHTÄVIIN LIITTYVISTÄ GEOGEBRA-SIVUISTA

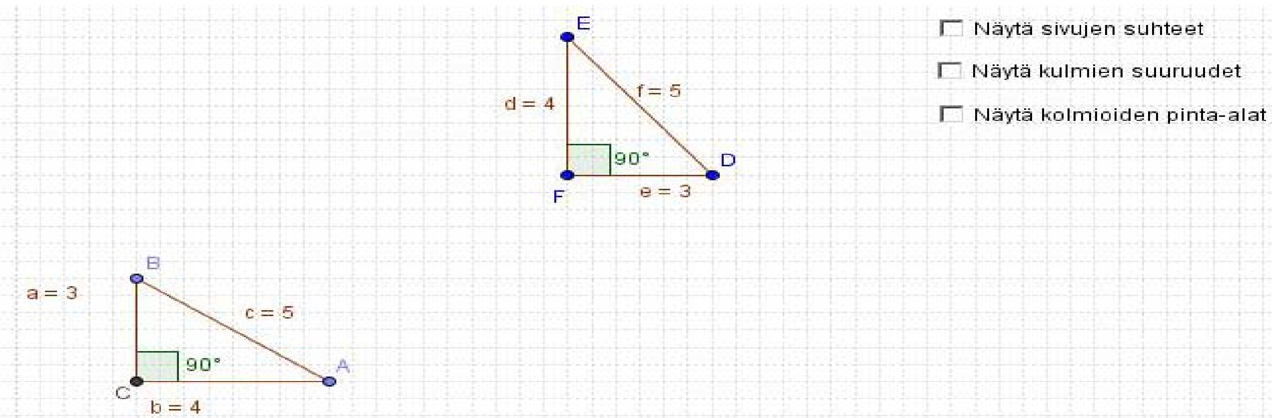
Tehtävä 1: Voit siirrellä pienempää kolmiota.



Tehtävä 2: Voit liikutella pisteitä A ja B.



Tehtävä 3: Voit liikutella pisteitä A ja B.



Tehtävä 4: Voit liikutella pisteitä A ja B.

VUOROVAIKUTUKSESTA PROSENTTIARVON LASKEMISEN TUNNILLA

Tiia Tallila ja Lauri Tuominen

tiia.tallila@jyu.fi, laurituominen1@me.com

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Kahdeksannen luokka-asteen 20 oppilaan kokoiselle luokalle toteutettiin 45 minuutin tutkivan matematiikan tunti. Tunnin aiheena oli, kuinka saadaan laskettua p prosenttia luvusta a. Tunti videoitiin kahdella videokameralla, joista toinen seurasi opettajaa ja toinen yhtä oppilasparia ja heidän työskentelyään. Tämän tutkimuksen tavoitteena oli tutkia opettajan ja oppilaan välisen vuorovaikutuksen laadun vaikutusta oppilaan oivaltamiseen ja lopullisen kirjallisen ratkaisun oikeellisuuteen. Tutkimme videoaineiston perusteella erikseen tapauksia, joissa oppilas kysyi opettajalta neuvoa, ja tilanteita, joissa opettaja teki itse aloitteen. Tutkimustuloksista selvisi, että opettajan johdatteleva tyyli vuorovaikutustilanteessa on tehokas oppilaan oppimisen kannalta. Sillä, kumpi osapuoli teki aloitteen vuorovaikutuksen alkamiseksi, ei ollut tulosten perusteella merkitystä.

JOHDANTO

Opettajan ohjatessa oppilasta hänen on tärkeää tietää, millä ohjaustyylillä saavutetaan paras oppimistulos. Hänen on hyvä tunnistaa oman läsnäolonsa vaikutus oppimisprosessiin. Tämän tutkimuksen tavoitteena on tutkia opettajan ja oppilaan välisen vuorovaikutuksen laadun vaikutusta oppilaan oivaltamiseen ja lopulliseen kirjalliseen tuotokseen matematiikan tunnilla. Toisena tavoitteena on selvittää, miten oppimistulokseen vaikuttaa se, kumpi osapuoli tekee aloitteen vuorovaikutuksen aloittamiseksi.

Opettajan ohjauksen tasot voidaan Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) mukaan jakaa pinnalliseen, passivoivaan, ja aktivoivaan ohjaukseen. Ensimmäisessä ohjaustyylissä opettaja ei keskity olennaiseen asiaan tai antaa asiaan liittymättömiä kommentteja omasta lähtökohdastaan. Toisessa tyylissä opettaja keskittyy olennaiseen asiaan ja kertoo oppilaalle suoraan oikean ratkaisutavan tai pyytää oppilaalta muita ratkaisutapoja. Jälkimmäisessä tapauksessa opettaja keskittyy olennaiseen asiaan ja johdattelee oppilasta tarkastelemaan vastaustaan. Tässä tutkimuksessa tarkasteltavalla tunnilla opettajan oli tarkoitus soveltaa pääasiassa aktivoivaa ohjausta.

On mahdollista, että vuorovaikutustilanteessa opettajalle syntyy oppilaan puheesta virheellinen kuva tämän taidoista. Opettajan tai tutkijan läsnäolo voi Cobbin ja Bauersweldin (1995) mukaan vaikuttaa oppilaan ratkaisumetodeihin ja tapaan, jolla hän pyrkii selittämään tehtävää ja sen ratkaisua. Oppilas voi esimerkiksi tällaisessa tilanteessa vain tyytyä kertomaan opettajalle, että hänellä on tehtävään oikea ratkaisu sen sijaan, että hän kysyisi opettajalta apua tehtävän ymmärtämiseen liittyvään ongelmaan. Näiden tulosten valossa oppilaiden lopullisten kirjallisten tuotosten tutkiminen on hyödyllistä tässä tutkimuksessa.

MENETELMÄT

Tutkivan matematiikan tunti: p prosenttia luvusta a

Tutkivan matematiikan tunti pidettiin kahdeksasluokkalaisille prosenttijakson toisella oppitunnilla. Ensimmäisellä tunnilla oli käsitelty prosentin määritelmä. Tutkimustunnin tavoite oli, että oppilaat oivaltaisivat tehtävien avulla, miten he saavat laskettua p prosenttia jostakin luvusta (eli prosenttiarvon). Oppilaille jaettiin viisi sanallista tehtävää, joista kolme ensimmäistä käsittelivät prosenttiarvon laskemista. Kaksi viimeistä tehtävää käsittelivät ongelmia, joissa kulutustuotteen hinta nousi tai laski p prosenttia (ks. Liite 1).

Aineiston keruu

Tunti videoitiin käyttämällä kahta videokameraa ja kahta mikrofonia. Toinen kamera seurasi opettajaa ja toinen luokan perällä työskentelevää oppilasparia. Opettajalla oli oma mikrofoni kauluksessaan ja toinen mikrofoni oli sijoitettu lähelle kuvattavaa oppilasparia. Jokaiselta oppilaalta kerättiin tunnin lopuksi heidän kirjalliset ratkaisunsa.

Aineiston analyysi

Keskityimme analysoimaan opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta sekä sen vaikutusta oppilaan oivaltamiseen ja kirjalliseen tuotokseen. Tutkimme erikseen tilanteita, joissa oppilas itse teki aloitteen avun pyytämiseksi, ja keskusteluja, jotka opettaja itse aloitti. Vuorovaikutustilanteet luokiteltiin molemmissa tapauksissa opettajan toimintatavan mukaan. Näitä olivat suora vastauksen kertominen, johdattelu ja tilanne, jossa opettajan ei tarvinnut auttaa vaan hän toimi kuuntelijan roolissa. Tämän jälkeen tarkastelimme tilannekohtaisesti oppilaiden lopullista asian hallintaa analysoimalla heidän kirjallisia ratkaisujaan. Kiinnitimme siis huomiota siihen, johtiko opettajan apu lopulta oikeanlaiseen oivaltamiseen. Kirjalliset ratkaisut jaettiin täysin oikeisiin, melkein oikeisiin, vääriin ja tyhjiin ratkaisuihin.

TULOKSET

Taulukkoon 1 on kirjattu jakauma vuorovaikutustilanteista, joissa opettaja teki itse aloitteen avun antamiseksi.

Taulukko 1. Tilanteet, joissa opettaja tekee itse aloitteen avun antamiseksi.

Opettajan toiminta	**Vastaus oikein**	**Melkein oikein**	**Väärin**	**Tyhjä**	**Yhteensä**
Kertoo vastauksen					0
Johdattelee	4	1		1	6
Kuuntelee	1				1

Taulukkoon 2 on vastaavasti kirjattu jakauma vuorovaikutustilanteista, joissa oppilas tekee aloitteen avun pyytämiseksi.

Taulukko 2. Tilanteet, joissa oppilas tekee aloitteen avun pyytämiseksi.

Opettajan toiminta	Vastaus oikein	Melkein oikein	Väärin	Tyhjä	Yhteensä
Kertoo vastauksen	1				1
Johdattelee	4		2		6
Kuuntelee					0

Tilanne, jossa opettaja tekee itse aloitteen avun antamiseksi

Opettaja: Mitäs te saitte siitä ykköstehtävästä ratkaisuksi?

Oppilas A: 1700 ja 68

Opettaja: Ok. 1700 kuulostaa oikealta, mitä te sitten ootte tehny?

Oppilas B: 1700 jaetaan 50:lla ja kerrotaan kahdella.

Opettaja: Miks te jaatte 50:llä?

Oppilas B: Ku se on 50 prosenttia siitä koko osasta.

Opettaja: Mutta mitäs te jo tässä laskitte?

Oppilas A: No tässä laskettiin jo se puolet.

Opettaja: Tarviiks teidän ottaa sitten toista kertaa puolet?

Oppilas B: Niin se on matkakustannuksista, 1700:sta se kaks prosenttia, mutta miten sen voi laskea, ei meille oo sitä opetettu

Opettaja: Sitä tässä just harjoitellaan. Mites me viime tunnilla saatiin yksi prosentti?

Oppilas A: Jaetaan sadalla. Sitten yks prosentti kertaa kaks vai?

Oppilas B: joo, näin se tulee

Tässä tilanteessa opettaja pyrkii aktivoimaan oppilaat perustelemiseen ja perustelemisen kautta huomaamaan laskuvirheen. Tämä ei tapahdu aivan helposti, koska oppilailla on vahva usko siihen, että heidän ratkaisunsa on oikein, vaikka heidän perustelunsa eivät sitä täysin osoita. Opettajan apukysymyksien avulla oppilaat huomaavat, että ei ole tarpeen ottaa 50 prosenttia kahteen kertaan. Mutta sitten oppilaille tulee uusi ongelma: Miten saa laskettua kaksi prosenttia jostakin luvusta? Ensimmäinen reaktio on, että kun asiaa ei ole vielä opetettu, niin ei sitä silloin voi osatakaan. Opettaja kehottaa oppilaita hyödyntämään heidän pohjatietojaan prosentista. Näin oppilaat keksivät, miten kaksi prosenttia saadaan. Tässä ensimmäisessä tehtävässä oli tarkoitus aktivoida oppilaita opetettavaan aiheeseen, joten opettaja ei vielä tässä vaiheessa vaadi oppilaita ratkaisemaan tehtävää vain yhdellä laskutoimituksella.

Tilanne, jossa oppilas tekee aloitteen avun pyytämiseksi (Tehtävään 2.b liittyen)

Oppilas A:	Ei tähän (laskin) saa edes prosenttimerkkiä.
Opettaja:	Mutta mitenkäs sä voit merkitä sen prosentin ilman prosenttimerkkiä?
Oppilas A:	No niin, mutta kun tää on pakko tehdä yhdellä laskutoimituksella.
Opettaja:	Te pystytte tekemään sen yhdellä laskutoimituksella laskimella ilman, että tarvitsisi käyttää laskimesta mitään prosenttimerkkiä. Viime tunnilla me käsiteltiin sitä prosentin määritelmää. Mikä sen prosentin yhteys oli desimaalilukuihin?
Oppilas A:	Niin se olis 2,39.
Opettaja:	Niin se on se yksi prosentti.
Oppilas A:	Hmm.. nolla pilkku..en mää tiedä..luuletko sää, että mä tiedän?
Opettaja:	Joo sä oot ihan oikeilla jäljillä..nolla pilkku..?
Oppilas A:	239
Opettaja:	Niin se on nyt se alkuperäinen arvo. Ja siitä siis pitää ottaa se 37 prosenttia.
Oppilas B:	Voitasko me sanoo se 37 prosenttia desimaalilukuna ja kertoa?
Opettaja:	Joo eli voisitteko te nyt sanoo sen 37 prosenttia desimaalilukuja ja kertoa sitten tuolla luvulla (239)? Mitä te saatte siitä?
Oppilas B:	Se sama. (Siis sama vastaus kuin a-kohdassa)

Tässä tehtävässä oppilas on aluksi turhautunut siihen, että laskimesta ei saa suoraan prosenttimerkkiä. Tämän ongelman kautta päästään käsiksi siihen, että miten laskimeen voidaan merkitä jokin prosenttiluku desimaaliluvun avulla. Oppilas B ei kommentoi tilanteen alussa yhtään mitään. Oppilaan A esittäessä kysymyksiä ja jo hieman turhautuessa, oppilas B pääsee jyvälle ja ehdottaa ratkaisumenetelmää.

POHDINTA

Tutkimuksemme tavoitteena oli selvittää, miten opettajan toiminta vaikuttaa oppilaiden oivaltamiseen. Lisäksi tutkimme, että onko sillä eroa oivaltamiseen, kysyykö oppilas itse neuvoa vai meneekö opettaja auttamaan oppilasta oma-aloitteisesti. Koska tutkimukseemme sisältyi vain yksi 45 minuutin oppitunti 20 oppilaan ryhmälle, tuloksista on vaikea tehdä varmoja johtopäätöksiä. Joka tapauksessa tämä tutkimus osoittaa, että opettajan keinoista johdatteleminen toimii usein tehokkaasti. Se johtaa lähes aina oikeanlaiseen ratkaisuun.

Jaoimme opettajan toiminnan siis kolmeen osaan: kertoo vastauksen, johdattelee ja kuuntelee. Kuunteleminen tarkoittaa sitä, että opettaja on oppilasparin luona ja kuuntelee. Hänen ei tarvitse sanoa mitään, koska oppilas oivaltaa tehtävän jo selostaessaan sitä ääneen opettajalle ja toiselle oppilaalle. Nämä tilanteet ovat oppimisen kannalta merkittäviä. Tutkimustunnilla oli yksi tällainen tilanne, jossa opettaja meni oma aloitteisesti oppilaiden luokse ja oppilas selitti ratkaisua opettajalle. Tutkimustuloksiimme ei ole poimittu videolta tilanteita, joissa oppilaat selittävät ratkaisuideoita toisilleen ja oivaltavat ratkaisun. Mutta riippumatta siitä onko vuorovaikutus opettajan ja oppilaiden välistä vai vain oppilaiden välistä, tulimme siihen tulokseen, että matematiikan opettajan tulisi kannustaa oppilaita entistä enemmän pukemaan sanoiksi sitä ajatuksen juoksua, mitä he päässään toteuttavat.

Yllättävintä tutkimuksessa oli se, että tilanteita, joissa oppilas tekee aloitteen avun pyytämiseksi, oli yhtä paljon kuin tilanteita, joissa opettaja tekee itse aloitteen avun antamiseksi. Molemmissa tapauksissa opettaja käytti selkeästi eniten johdattelun keinoa. Tutkimustunnilla tuli esille tilanne, jossa oppilaspari kysyi neuvoa tehtävän 2.b (Liite 1) ratkaisemiseksi, koska he olivat ratkaisseet jo a-kohdan suoraan yhdellä laskutoimituksella. Tässä tilanteessa opettaja olisi voinut edelleen käyttää johdattelun keinoa ja ohjata oppilaat itse huomaamaan, että hehän ovat jo ratkaisseet tehtävän. Nyt opettaja mainitsi oppilaille asiasta suoraan eli luokittelimme tämän taulukossa 2 tilanteeksi ”kertoo vastauksen”.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Prosenttilasku tuntui aluksi todella haastavalta aiheelta tutkimustehtävänä toteutettavaksi. Päätimme valita opetustunnin heti kurssin toiselle tunnille, jolloin oppilailla olisi pohjatietona vain ensimmäisellä tunnilla määritelty prosentti. Juuri ennen tunnin alkua paljastui kuitenkin, että kyseinen luokka oli käsitellyt opetussuunnitelmasta poiketen prosenttilaskuja jo seitsemännellä luokalla. Asia ei siis ollutkaan oppilaille aivan uutta. Tämän vuoksi oppilaat laskivat tehtävät todella nopeasti.

Kehittäisimme tätä tuntia lisäämällä tehtäviin vielä haastavampia tehtäviä. Esimerkiksi muutama korkolasku voisi toimia tässä yhteydessä syventävänä lisäharjoituksena, koska oppilaat kysyivät, että miksi on hyödyllistä laskea vain yhdellä laskutoimituksella. Mutta vaikka asiat olivat oppilaille tutumpia kuin me alun perin oletimme, tämä tutkimus osoittaa, että tutkimustehtäväidea toimi siis myös tälle ryhmälle ja tässä lähtötilanteessa. Ainoa ongelma oli siis se, että tehtävää ei ollut tarpeeksi jokaiselle parille.

Tutkimuksemme käsitteli vain yhtä 45 minuutin oppituntia yhdelle oppilasryhmälle. Tutkimuksessa tulisi olla huomattavasti laajempi otos, että pystyisi tekemään varmempia johtopäätöksiä opettajan toiminnan merkityksestä. Toimivin tapa voisi olla toteuttaa tutkimus ensin pienemmällä oppilasmäärällä ja testata, että onko tehtävät laadittu tutkimuksen aihetta silmällä pitäen oikean tasoiseksi. Vasta testikierroksen jälkeen olisi vuorossa varsinainen tutkimus laajemmalla otoksella, josta pystyttäisiin tekemään tutkijayhteisöä laajemmin hyödyttäviä johtopäätöksiä.

Lähteet

Cobb, C. & Bauersweld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, UK: Lawrence Erlbaum.

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P.E. Hirvonen, & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA

Tutkimustehtävä/8.lk/prosenttilaskenta

Tavoite:

Edellisellä tunnilla oppilaat ovat tutustuneet prosentin käsitteeseen. Tutkivan matematiikan tunnilla oppilaiden tulisi oivaltaa tehtävien avulla, miten he saavat laskettua p % jostakin luvusta.

Toteutus:

Oppilaat laskevat tehtävät erillisille papereille, jotka kerätään ennen loppukoontia pois (tämä sen vuoksi, että oppilaat eivät enää tee muutoksia ratkaisuihinsa). Loppukoonnin ajaksi oppilaat ottavat omat vihot esille ja tekevät merkinnät sinne. Näin oppilaille jää myös pääpointti tunnin aiheesta vihkoon.

Kotitehtävänä tunnilta s. 13 teht. 9 ja 15.

Tehtävämoniste:

TUTKIMUSTEHTÄVÄ

NIMET:____________________________________

Tehtävä 1:

Jyväskylän Normaalikoulun eräs luokka suunnittelee leirikoulumatkaa. Luokalla on jo kerättynä 3400 €. Jo kerätyistä varoista 50 % menee matkakustannuksiin. Matkustus tapahtuu linja-autolla. Linja-auton kuljettajana toimii erään oppilaan isä. Linja-auton kuljettajan palkkio on 2 % matkakustannuksista.

Ratkaise edellä annettujen tietojen perusteella, kuinka paljon matkakustannukset ovat ja kuinka paljon luokka maksaa palkkiota linja-auton kuljettajalle.

Tehtävä 2:

Eräs luokka leipoi myyjäisiin. Leivonta-aineet maksoivat ennen alennusta 239 €. Kauppias lupasi tukea luokan leirikoulumatkan varainkeruuta antamalla 37 % alennusta myyjäisten leivonta-aineista.

a.) Kuinka paljon kauppias antoi alennusta (€)?

b.) Kehittäkää sellainen menetelmä, että ratkaisu saadaan yhdellä laskutoimituksella (niin, että laskimeen tarvitsee sijoittaa vain yksi laskutoimitus)

Tehtävä 3:

Laskekaa tehtävässä 2.b kehittelemällänne menetelmällä:

Kuinka paljon kauppias antaa lasketteluvälineistä alennusta (€), jos lasketteluvälineet maksavat normaalihintaisena 1342 € ja tiedetään, että kauppias lupaa laskettelijalle 18% alennuksen?

Tehtävä 4:

Kauppias joutuu nostamaan makeisten hintoja. Lakupakettien hinta nousee 11 %. Hinta ennen korotusta oli 100kpl:een lakupaketista 23€.

a.) Mikä on uusi hinta?

b.) Kehittäkää sellainen menetelmä, että ratkaisu saadaan yhdellä laskutoimituksella.

Tehtävä 5:

Kauppias lupasi 1200 euron hintaisesta tietokoneesta alennusta 150€ ja jäljelle jäävästä hinnasta vielä 2,0 % käteisalennuksen pyöristäen loppusumman alaspäin täysiin kymmeniin euroihin. Mikä oli lopullinen hinta?

OPPILAIDEN RATKAISUMENETELMÄT PROSENTTILASKUISSA

Perttu Koivulahti ja Jarmo Leskinen

perttu.koivulahti@jyu.fi, jarmo.leskinen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä artikkelissa kerromme tutkimuksesta, jossa opetimme peruskoulun 8.luokkalaisille kaksi matematiikan tuntia tutkivan matematiikan keinoin. Tuntien aiheina olivat perusarvon laskeminen ja korko. Tarkastelimme tutkimuksessa oppilaiden erilaisia tehtävien ratkaisuja sekä päättelytapoja. Havaitsimme johdonmukaisuutta tehtävästä toiseen siirryttäessä. Mikäli oppilas oli käyttänyt haluttua ratkaisutapaa helpommissa tehtävissä, yleensä hän onnistui myös soveltamaan sitä vaikeammissa tehtävissä. Vaikka oppilas omalla ratkaisumenetelmällä sai oikean vastauksen helpoissa tehtävissä, niin ongelmia tuli haastavimmissa tehtävissä jossa oikeasti olisi tarvittu haluttua ratkaisutapaa.

JOHDANTO

Pidimme kaksi tutkivan matematiikan tuntia eräälle kahdeksannelle luokalle, jonka tunteja olimme käyneet pitämässä aiemmin muutaman kerran. Ryhmä oli siis osittain tuttu, mutta aivan henkilökohtaisesti emme kuitenkaan oppilaita tunteneet.

Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivan matematiikan tunnin ideana on, että oppilaat johdatellaan uuteen aiheeseen, johon he alkavat itse muodostaa teoriaa apukysymysten avulla. Tämän olisi tarkoitus lisätä oppilaan omaa ajattelua ja siten syventää oppimista. Pehkosen (2003) mukaan opetuksen päämääränä tulisikin olla syvempi ymmärtäminen, eikä pelkän laskutaidon oppiminen. Pehkonen korostaa kuitenkin, että pelkkä ymmärtäminen ei riitä vaan myös laskutaitoa tarvitaan. Sullivanin ym. (2006) mukaan tutkivassa matematiikassa on mahdollista saada kaikki oppilaat osallistumaan matemaattiseen ajatteluun.

Tunneillamme tutkivaa matematiikkaa toteutettiin siten, että jaoimme oppilaille monisteen jossa oli tarkkaan mietityt tehtävät siten, että ne johdattelivat hyvin aiheeseen. Näiden tehtävien avulla oppilaiden oli tarkoitus itse tutkimalla keksiä yleinen periaate sen tyyppisten tehtävien laskemiseen. Ensimmäiset tehtävät tehtiin opettajan johdolla esimerkinomaisesti, jonka jälkeen oppilaat alkoivat pareittain ratkaista muita tehtäviä.

MENETELMÄT

Tunti aiheesta perusarvon laskeminen

Tunnin alussa oppilaille jaettiin moniste (ks. Liite 1), jossa oli viisi tehtävää. Alussa oli kaksi lämmittelytehtävää, jotka käytiin lyhyen miettimisen jälkeen yhdessä läpi opettajan johdolla. Näissä tehtävissä piti laskea kännykän hintaa, kun alkuperäinen hinta ja alennusprosentti olivat annettu. Loput kolme tehtävää jäivät oppilaiden ratkaistaviksi. Tehtävät oli aseteltu siten, että viimeisen tehtävän ratkaisu oli tunnin tavoite ja kaksi edellistä tehtävää pyrkivät johdattelemaan viimeisen tehtävän ratkaisuun mahdollisimman hyvin. Tehtävissä 3 ja 4 oppilaiden piti ratkaista ympyrän pinta-ala, kun osa pinta-alasta oli annettu. Viimeisessä eli tunnin tavoitetehtävässä piti ratkaista syntyvän mehun määrä, kun tiivisteen ja veden sekoitussuhde tiedetään.

Tunti aiheesta korko

Tarkempi tunnin aihe oli korkoa korolle. Pääpiirteittäisenä tunnin tavoitteena oli, että oppilaat keksisivät kaavan miten lasketaan tilin rahamäärä n. vuoden kuluttua, kun alkupääoma ja vuosittainen korko ovat tiedossa. Oppilaat saivat etukäteen laaditun tehtävämonisteen (ks. Liite 1), jossa oli useita tehtäviä. Tunnin tavoitetehtävä oli 2-tehtävä jossa oli useampi alakohta. 1-tehtävä oli johdantotehtävä, jonka oppilaat ratkaisivat ensiksi ja se käytiin yhdessä läpi ennen kuin oppilaat siirtyivät tehtävissä eteenpäin. Ensimmäisessä tehtävässä tehtävänä oli laskea vuoden aikana kertynyt koron määrä, kun alkupääoma ja korkoprosentti tunnettiin. Tehtävän alakohdissa korkoprosentin määrä vaihteli. 2-tehtävässä pyydettiin laskemaan tilillä olevaa rahamäärä, kun alkupääoma ja korkoprosentti tunnettiin. Ensimmäiset alakohdat (a-c) olivat yhden, kahden ja kolmen vuoden jälkeen, joissa tavoitteena oli että oppilaat keksisivät idean mitä vuosien välillä itse asiassa tapahtuu ja että heillä olisi edellytykset ratkaista seuraavat alakohdat(d-g) eli rahamäärä 10, 30, n ja 17 vuoden kuluttua. Monisteen loput tehtävät olivat lisätehtävätyyppisiä.

Aineiston keruu

Molemmat tunnit kuvattiin kahdella kameralla ja langattomilla mikrofoneilla siten että toinen kamera seurasi opettajaa ja toinen etukäteen valittua paria. Tämän lisäksi keräsimme monisteet, joihin oppilaat tekivät ratkaisunsa.

Aineiston analyysi

Analysoimme tässä tutkimuksessa lähinnä oppilaiden tekemiä ratkaisuja. Analysoinnin kohteena olivat pääasiassa monisteet, joista löytyi oppilaiden ratkaisut, mutta myös vidoista oli hyötyä kun mietimme kuinka oppilaat olivat johonkin ratkaisuun päätyneet.

TULOKSET

Perusarvon laskeminen

Tunnilla, jossa aiheena oli perusarvon laskeminen, oppilaiden ratkaisut voitiin jakaa joko kahteen tai kolmeen luokkaan tehtävästä riippuen. Oppilaiden käyttämät erilaiset ratkaisut löytyvät Liitteestä 2, jossa ratkaisut on luokiteltu siten, että tapa 1 on opettajan käyttämä ja paras ratkaisutapa, jossa tilanteesta muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se. Esimerkiksi tehtävässä 3 yhtälö on seuraava $\frac{3}{4}x = 6$. Tavat 2 ja 3 ovat oppilaiden muita ratkaisutapoja. Virheelliset tavat olivat joitakin aivan muita tapoja, eivätkä ne sisälly oikeisiin tapoihin 1-3.

Tehtävissä 3 ja 4 oppilaat olivat käyttäneet tapaa, jossa oli ensin laskettu ympyrästä yhden sektorin pinta-ala ja tämän avulla laskettu koko ympyrän pinta-ala. Tämä tapa sai koodin tapa 2.

Tehtävässä 5 käytetty tapa 2 oli laskea ensin paljonko on 10 % mehusta ja sen avulla 100 % eli mehun määrä. Tapa 3 taas oli monimutkaisempi ja sitä esiintyikin ainoastaan kahdessa lapussa. Siinä laskettiin ensin, montako prosenttia veden määrä on tiivisteen määrästä. Tämän avulla saatiin veden määrälle absoluuttinen arvo. Lopuksi lisättiin yhteen veden määrä ja tiivisteen määrä.

Taulukko 1: Ratkaisutapojen esiintyminen

	Tapa1	**Tapa2**	**Tapa 3**	**Vääriä**
Tehtävä 3	3	15		1
Tehtävä 4	5	13		1
Tehtävä 5	9	4	2	7

Tapa 2 oli selvästi yleisin tehtävien 3 ja 4 osalta, joka saattoi johtua siitä, että ne tehtävät olivat ehkä hieman liian helppoja. Näin ollen oppilaat pystyivät päättelemään tehtävät, eikä haluttua yhtälöä tarvinnut muodostaa. Kuitenkin ne oppilaat, jotka olivat käyttäneet tapaa 1, osasivat myös helposti ratkaista tehtävän 5 käyttäen siinäkin tapaa 1. Muilla oppilailla oli selvästi enemmän vaikeuksia viimeisen tehtävän ratkaisemisessa, ja siten siinä erilaiset ratkaisutavat jakautuivat tasaisemmin ja myös vääriä ratkaisuja oli selvästi enemmän.

Korko

Tunnilla jossa aiheena oli niin sanottu korkoa korolle, opettajan käyttämää parasta ratkaisutapaa käytti reilu kolmannes oppilaista (7 kpl), toisenlaista ratkaisutapaa kolmannes (6 kpl) ja väärän vastauksen oli saanut vajaa kolmannes oppilaista (5 kpl). Väärissä vastauksissa ongelmana oli lähinnä se, ettei oltu havaittu, että myös aiemmin maksettu korko kasvaa korkoa seuraavina vuosina. Ne oppilaat, jotka olivat käyttäneet ensimmäisissä kohdissa (a-c) parasta ratkaisutapaa, olivat, paitsi ylipäätään päässet laskemaan, myös saaneet oikean vastauksen jälkimmäisissä kohdissa (d-g).

Toinen käytetty ratkaisutapa oli laskea koron määrä (yhden prosentin kautta tai ilman) ja lisätä se pääomaan. 6 ratkaisusta vain yhdessä oli päädytty oikeaan ratkaisutapaan jälkimmäisissä kohdissa. 2 oppilasta oli päätynyt väärään ratkaisuun ja 3 oppilasta ei ollut päässyt eteenpäin. Ongelmia oli tullut kun ei enää tiedettykään tarkasti edellisen vuoden jälkeen tilillä ollutta pääoman määrää.

Seuraavanlainen keskustelu käytiin opettajan ja oppilaan välillä kun oppilas pohti miten korko lasketaan 10 vuoden kuluttua:

Oppilas:	Miten tää 10 vuoden kohdalla tulee?
Opettaja:	Nyt sä oot tässä (a-kohta) kertonu 1,03:lla, eikö?
Oppilas:	Joo
Opettaja:	Mitäs sä oot tässä (b-kohta) tehny?
Oppilas:	Tää on kerrottu 1,03:lla
Opettaja:	Joo, entäs täälä (c-kohta)?
Oppilas:	Tää on kerrottu 1,03:lla
Opettaja:	Joo, eli mitä sä oot tehny tavallaan yhteensä?
Oppilas:	No, 3 kertaa tää kertaa… (jää miettimään)
Opettaja:	Eli sä oot kolmesti kertonu 1,03:lla täälä (c-kohdassa). Eli miten noin matemaattisesti?
Oppilas:	Tää (1,03) kertaa kolme kertaa tää (alkupääoma)
Opettaja:	Lähes, ei kertaa vaan…
Oppilas:	Potenssiin.
Opettaja:	Jep.

Tässä keskustelussa opettaja yritti johdatella ymmärtämään mitä oppilas on laskenut. Oppilaan tuli ymmärtää yleinen periaate laskujen takana, jotta seuraavaan vaiheeseen olisi ollut mahdollista päästä. Pelkällä laskemisella se olisi ollut turhan työlästä.

POHDINTA

Prosenttilasku on aiheena sellainen, että tehtävissä on yleensä monia erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Tässä tutkimuksessa havaittiin, että vaikka meillä oli suhteellisen pieni ryhmä jota tutkittiin, niin silti erilaisia ratkaisumalleja löytyi monissa tehtävissä.

Prosenttilaskut ovat vaativimmissa laskuissa myös varsin hankalia, mikäli ainoa käytössä oleva ratkaisutapa on laskea yhden prosentin kautta. Prosenttilaskujen opetuksessa voisi jatkon kannalta olla hyödyllisintä mikäli oppilaat opetettaisiin käyttämään kertolaskumuotoa.

Tutkivan matematiikan tunneilla aiheeseen johdattelevat tehtävät ovat selvästikin tärkeässä roolissa oppimisen kannalta. Tässä tutkimuksessa havaittiin, että oppilaat osasivat käyttää helpompien tehtävien ratkaisumallia myös vaikeampien tehtävien tekemiseen. Tehtävien muotoilu siten, että oppilaat käyttävät haluttua ratkaisumallia helpoissa tehtävissä on kuitenkin haasteellista. Perusarvon laskemista käsittelevällä tunnilla tässä onnistuttiin osittain, mutta olisi ollut parempi, jos vielä useampi oppilas olisi ottanut halutun ratkaisumallin käyttöön.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tutkiva matematiikan toteuttaminen vie melko paljon aikaa, koska yhteen aiheeseen tarvitaan tutkiva tunti sekä laskuharjoitustunti. Myös 45 minuutin oppitunti on turhan lyhyt tutkivan matematiikan tunniksi. Huomasimme molemmat että koontivaihe jäi todella lyhyeksi. Tutkivan matematiikan tunnin toteuttaminen kertaalleen on melko työlästä, mutta jos samaa tuntia toteuttaa useammin, niin opettaja pääsee tunnin valmistelussa melko vähällä. Annettuja tehtäviä pystyy myös muuttamaan jälkikäteen, mikäli opettaja havaitsee niissä puutteita.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu,* 6/2003, 35-38.

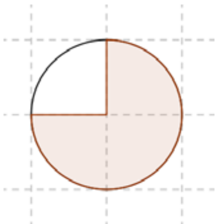
LIITE 1: TEHTÄVÄMONISTEET

PERUSARVON LASKEMINEN

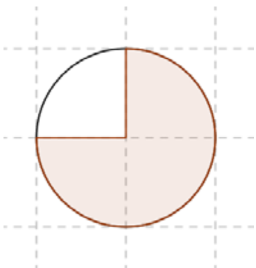
1. Kännykän hinta on 355€. Saat siitä alennusta 30%. Mikä on kännykän hinta alennuksen jälkeen?

2. Kännykän hinta on x. Saat siitä alennusta 20%. Miten lasketaan kännykän alennettu hinta?

3. Väritetyn kuvion pinta-ala on 6. Mikä on koko ympyrän pinta-ala?



4. Väritetyn kuvion pinta-ala on 7. Mikä on koko ympyrän pinta-ala?



5. Mehuun tarvitaan 30% tiivistettä. Kuinka paljon mehua saadaan, jos tiivistettä on 1,5 litraa? Piirrä kuva, muodosta yhtälö ja ratkaise.

KORKOLASKUJA

1. Henrillä on tilillään rahaa 6000€. Kuinka paljon se kasvaa korkoa vuoden aikana kun korko on

a) 2,0 % b) 2,5 %

2. Mikko vie vuoden alussa pankkitililleen 3500€. Tilin korko on 3,0 % ja se maksetaan vuosittain vuoden lopussa. Tililtä ei nosteta rahaa missään vaiheessa. Kuinka paljon tilillä on rahaa

a) 1 vuoden b) 2 vuoden c) 3 vuoden

d) 10 vuoden e) 30 vuoden f) n vuoden

g) 17 vuoden kuluttua?

h) kuinka monta prosenttia pääoma on kasvanut 5 vuodessa?

i) Kuinka monen vuoden kuluttua korko on tuottanut yli 1200€?

3. Minnalla on vuoden alussa tilillään rahaa 2000€. Tilin korkoprosentti on 2,0 %. Kuinka paljon rahamäärä on tuottanut

a) 6 kuukauden b) 7 kuukauden c) 18 kuukauden kuluttua?

4. Kuinka suuri pääoma kasvaa 4 vuodessa 4545 euroksi jos tilin korkoprosentti on 3,0 % ?

5. Erään alueen bakteerikanta kasvaa 4 prosenttia vuodessa. Jos bakteerikanta on aluksi 10 000, niin kuinka suuri kanta on

a) 5 vuoden b) 6,5 vuoden c) 8,8 vuoden kuluttua?

LIITE 2: RATKAISUTAVAT PERUSARVOTUNNILLA

PERUSARVON LASKEMINEN

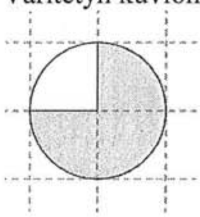
1. Kännykän hinta on 355€. Saat siitä alennusta 30%. Mikä on kännykän hinta alennuksen jälkeen?

$0{,}70 \cdot 355\,€ = 248{,}50\,€$

2. Kännykän hinta on x. Saat siitä alennusta 20%. Miten lasketaan kännykän alennettu hinta?

$0{,}80 \cdot x$

3. Väritetyn kuvion pinta-ala on 6. Mikä on koko ympyrän pinta-ala?



Tapa 1:

$\frac{3}{4}x = 6$

$3x = 24$

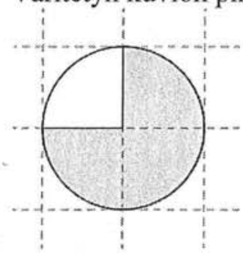
$x = 8$

Tapa 2:

$\frac{6}{3} = 2$

$4 \cdot 2 = 8$

4. Väritetyn kuvion pinta-ala on 7. Mikä on koko ympyrän pinta-ala?



Tapa 1:

$\frac{3}{4}x = 7$

$3x = 28$

$x = 9{,}333\ldots$

$\approx 9{,}3$

Tapa 2:

$\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$

$4 \cdot 2{,}333\ldots = 9{,}333\ldots$

$\approx 9{,}3$

5. Mehuun tarvitaan 30% tiivistettä. Kuinka paljon mehua saadaan, jos tiivistettä on 1,5 litraa? Piirrä kuva, muodosta yhtälö ja ratkaise.

Tapa 1:

$0{,}30 \cdot x = 1{,}5\,l$

$x = \frac{1{,}5\,l}{0{,}30} = 5\,l$

Tapa 2: $30\% = 1{,}5\,l$

$\Rightarrow 10\% = 0{,}5\,l$

$\Rightarrow 100\% = 5\,l$

Tapa 3: $\frac{70\%}{30\%} = 2{,}333.. = 233{,}333\ldots\,\%$ (veden määrä tiivisteen määrästä)

$2{,}333\ldots \cdot 1{,}5\,l = 3{,}5\,l$ (veden määrä)

$1{,}5\,l + 3{,}5\,l = 5\,l$ (mehua)

TEHTÄVÄNANNON YHTEYS OPPILAIDEN MOTIVAATIOON JAOLLISUUDEN JA LUKUJONOJEN TUNNEILLA

Ida Arhosalo ja Esko Häyrynen

ida.arhosalo@jyu.fi, esko.hayrynen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä artikkelissa kerromme tutkimuksesta, jossa toteutimme kaksi tutkivan matematiikan tavoitteiden mukaan suunniteltua tuntia peruskoulun viimeiselle luokalle. Tunneilla oli erilaiset tehtävänannot, ja tarkastelemme tässä artikkelissa erilaisten tehtävänantojen vaikutusta oppilaiden motivaatioon. Tutkimuksemme perusteella vaikutti siltä, että tällä ryhmällä suora perustelujen pyytäminen ei ollut niin tehokas motivoinnin väline kuin perustelujen hakeminen epäsuoremmin johdattelevien kysymysten kautta.

JOHDANTO

Pidimme kaksi matematiikan tuntia eräälle jyväskyläläiselle yhdeksännelle luokalle. Molemmilla oli ollut kontaktiopetusta jo useampia kertoja luokan kanssa aikaisemmin, joten molempien tuntien opettajat olivat oppilaille tuttuja. Tunneilla pyrittiin noudattamaan tutkivan matematiikan opetustyyliä, jolloin oppilaat pyrkivät itse perustelemaan teorioita eivätkä ainoastaan laskeneet annettujen sääntöjen pohjalta tehtäviä. Toisella tunneista käytettiin lisäksi apuvälineenä GeoGebraa.

Pehkonen (2003) kuvaa viimeisen parinkymmenen vuoden aikana kehitettyä konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista opetustapaa, jota toteutetaan usein niin sanottujen avoimien tehtävien avulla. Avoimia tehtäviä luonnehtii se, että ratkaisuja ja lähestymistapoja saattaa olla useita. Avoimet tehtävät ovat tyypillisiä tutkivassa matematiikassa. Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivan matematiikan opetusmenetelmissä pyritään välttämään ”mallista oppimisen” metodia. Myös avoimien tehtävätyyppien käyttö tukee tätä.

MENETELMÄT

Tuntien aiheina jaollisuus ja lukujonot

Tunnin C aiheena oli jaollisuus. Oppilaille jaettiin tehtävämoniste, jossa oli kahdeksan väitelausetta, joista osa oli tosia, osa ei. Väärät lauseet piti korjata ja sitten perustella niin todet kuin korjatutkin väitteet. Esimerkiksi tehtävässä 1 oli väite ”Jos luku on kahdella jaollinen, se päättyy numeroon 0 tai 2”, joka piti korjata muotoon ”Jos luku on kahdella jaollinen, se päättyy numeroon 0 tai 2, 4, 6 tai 8.” Lisäksi tarkoituksena oli siis myös todistaa väite.

Tunnin D aiheena oli geometrinen ja aritmeettinen lukujono. Oppilaille jaettiin tehtävämoniste, jossa oli esitetty kaksi eri viikkorahan maksutapaa. Toisessa viikkorahan määrästä muodostui aritmeettinen jono, toisessa geometrinen. Tehtävänä oli vertailla näiden kahden vaihtoehdon edullisuutta eri ajankohtina. Lisäksi monisteessa oli ohje ”Havainnollista GeoGebralla, jos mahdollista!”.

Aineiston keruu

Molemmat tunnit kuvattiin kahdella kameralla. Toinen kameroista seurasi opettajaa, jolla oli mikrofoni, toinen kamera seurasi ennakkoon valittua paria. Seurattavat parit eivät olleet tunneilla samoja. Tunnilla D videoitu pari on oppilas O1 ja oppilas O2. Keskusteluotteissa tunnin C opettajaan viitataan kirjaimella C, tunnin D opettajaan kirjaimella D ja oppilaisiin nimikkeillä O1 ja O2. Vaikka tunnilla C oppilaiden O1 ja O2 työskentelyä ei jatkuvasti tallennettu, syntyi oppilaan O2 työskentelystä melko paljon aineistoa, sillä opettaja C ja oppilas O2 kävivät useaan otteeseen keskustelua.

Aineiston analyysi

Kiinnitimme analyysissämme huomiota oppilaiden motivaatioon. Keskityimme opettajien ja oppilaiden väliseen keskusteluun tai sen puuttumiseen. Erityisesti kiinnitimme huomiota siihen kuinka paljon opettaja joutui patistelemaan oppilaita tehtävien teossa ja kuinka innostuneita oppilaat kommenttien perusteella tuntuivat tehtävistä olevan.

TULOKSET

Tunnilla C oppilaat keskittyivät selvittämään väitteiden oikeellisuutta ja korjaamaan väitteitä, mutta perusteleminen ei enää tuntunut kiinnostavan. Opettajan oli painostettava ja perusteltava perustelun tarvetta. Seuraavassa keskustelukatkelmassa oppilas O2, on korjannut tehtävän 1 väitteen ja opettaja C yrittää kannustaa oppilasta myös perustelemaan.

C: No, tota mist se johtuu.. osaisit sä..

O2: No koska ne on jaollisia kahella.

C: Niin ne 2,4,6 ja 8.

O2: Niin, ne on kaikki jaollisia kahella. Ei siinä tarvita mitään perusteluja.

Oppilas O2 onnistuu lopulta perustelemaan tehtävän 1 väitteen. Opettajan painostus on kuitenkin merkittävää:

C: No entäs, mist se johtuu että joku isompi luku, vaikka 14, on jaollinen kahella?

O2: No koska se viimenen on jaollinen kahella.

C: No minkä takia se riittää kattoa sitä viimestä numeroa?

O2: No jos se viimenen ois pariton, niin silloin se luku ei mitenkään voi olla jaollinen kahella..et se menis tasan.

C: Mist sä tiiät?

O2: No koska parittomat numerot ei oo jaollisia kahella

C: No entäs kun sä katot sitä koko lukua?

O2: Se on ihan sama mitä siellä edessä on kun sen voi aina jakaa kahella. Jos se viimenen numero on parillinen.

C: Ai niin, et ne aikasemmat numerot, ne voi aina jakaa kahella?

O2: Ne voi aina jakaa kahella jos viimenen on parillinen.

C: Mitkä kaikki voi jakaa kahella? Mitkä edelliset? Mitä sä oikeen tarkotat, mä en ihan...

O2: No jos sul on vaikka, sanotaan nyt 5, 3, 2, 4 *(5324)*. Niin jos se viimenen on parillinen niin silloin sä voit jakaa ne kaikki kahella. Tai silleen niinku sen koko luvun kahella, et sä niitä kaikkia erikseen voi tietenkään jakaa kahella

C: No mist se johtuu et tän koko luvun voi jakaa kahella? ..Ton näkee, et ton nelosen voi...

O2: Ne on niitä pyöreitä tuhansia, pyöreitä satoja, pyöreitä kymmeniä, joihin on vain lisätty toi yks numero tuolla lopussa. Et se on se yks numero joka ratkasee, eikä se koko numero siis.

C: Ja mikä ominaisuus niissä pyöreissä kymmenissä..

O2: No ne on parillisia eli ne on jaollisia kahella! Sä sekotat mun päätä tässä! Me pois!

C: Sä, joo..kyl. Sä oot ihan siellä mitä mä hain.

O2: Ne kaikki kokonaisia tuhansia, satoja ja kymmeniä jotka on kaikki jaollisia kahella joten se koko luku on jaollinen kahella jos vaan se viimenen ei o pariton.

C: Joo, just. Toi olis oikeen täydellinen perustelu, jos viel haluut kirjottaa... No, se oli hyvä! Ja samal tyylil sä voit miettii miten ne muutkin tehtävät, niis on ihan sama, niinku et jos pitäis perustella - -

Tunnin C tehtävänantoa oppilaat eivät kyenneet itsenäisesti suorittamaan loppuun. Heitä hämäsi se, että perusteltavana oli sääntöjä, jotka heille oli jo aiemmin opetettu. Seuraavassa katkelmassa näkyy melko negatiivinenkin asenne, jonka tehtävänannon loppuun viemiseen patistaminen aiheutti:

O2: Mistä ihmeestä minä tiedän, mistä se johtuu että - -

C: Sä voit sen selvittää.

O1: 2+2=4, se nyt vaan sattuu menemään niin.

C: Tässä teillä on kyllä ihan täydet mahdollisuudet...

O2: Sä haluut jonku miljoonavoiton sillä et me keksitään joku sääntö. Ei todellakaan..!

Oppilaat kaipasivat paljon ohjeistusta perustelemiseen, erityisesti siihen millainen todistusvoima erilaisilla perusteluilla on. Perusteluksi ehdotettiin riittävän useaa kokeilua:

C: No nytte te ootte itse vakuuttuneita että tää on uskottavan kuulonen väite. Kun te kokeilette laskimella niin siltä se näyttää että se menee noin.

O1: No meneekö se niin?

C: No siltä se näyttää laskimella kokeillessa.

O1: Sä varmaan tiedät siihen vastauksen.

C: No yrittäkääpä te miettiä et onks se oikeesti niin.

Tunnilla D oppilaat puolestaan aloittavat työnteon erittäin ripeästi opettajan D jaettua tehtävämonisteen. Oppilaspari lukee tehtävänannon läpi ja käyvät lyhyen sananvaihdon:

O1: Ei ainakaan B:tä kannata ottaa.

O2: Testataan.

O1: Varmaan pitää tehä joku yhtälö.

O2: Millon me saadaan nopeimmin rahaa.

O1: Todennäköisesti se on nopein ...(ei saa selvää).. Minkälainen yhtälö me tähän tehään?

O2: Öö. Ootas mietitään..

Oppilaat alkavat siis heti hommiin, vaikka D ei ole vielä ehtinyt ohjeistaa tehtävää yleisesti luokalle. Pohdittuaan hetken oppilaat O1 ja O2 valitsevat vaihtoehdon B paremmaksi. He onnistuvat tekemään analyysin siitä, että A:lla saa lyhyessä ajassa enemmän rahaa, mutta B kasvaa pitkällä aikavälillä nopeammin:

O1: Jos saa pitkään, nii se on B. Jos lyhyemmän aikaa, niin A.

O2: Nyökkää.

O2: -- Miten se lasketaan?

O1: Nii en mä tiiä. Tässä se on vaa eka kymppi sit 30, 50, 70.. Nii en mä tiiä kai siitä joku suora pitäis tehä.

O1: A:sta tulee suora ja tästä joku hyperbeli tai joku semmonen.

O2: Eihän tuu.

O1: Tuleehan ku se alkaa nousta nopeemmin koko ajan. Sit, ku se tuplaantuu sadasta kahteen sataan, se muutos on niin suuri.

O2: Aaa (myöntää). Nii eli toi on aina.. Jos kulmakerroin on kaks, nii se aina tuplaantuu.

Oppilaat alkavat heti hahmotella ratkaisua GeoGebralla asettamalla x-akselille viikot ja y-akselille viikkorahamäärän. O2 käyttää tietokonetta ja O1 ideoi. A-vaihtoehdosta he saavat tehtyä nopeasti suoran. Parin työskentely on melko tasapainoista ja he etenevät tehtävässä samaa vauhtia.

O1: A menee. Eiks se mee, ku laittaa kymmenen kohalle pisteen ja sitte pistää kolmenkympin kohalle pisteen ja siirtää A:n suhteen. Nii eiks se tuu sillain ne kaikki seuraavatki?

O2: Eli ne tulee niinku

O1: Laita siihen nollan viikon kohalle. Jos tässä on niinku nolla viikkoo (näyttää y-akselia), nii laittaa kymmenen euroo ja sitten laittaa yhteen kolmeen kymmeneen.

O2: Mä voin tehä täältä sen (kirjoittaa syöttökenttään). Yks pilkku kolkyt. Sit tulee kaks...

O1 ja O2: Kaks ja viiskyt.

O1: Noin. Ja sit siihen piirtää vaan suoran.

O2: Tehään vielä kolme ja seitkyt ja neljä pilkku 90.

O1: Eiköhän noihin saa jotenki suoran piirrettyä

He osaavat lukea kuvaajaa ja tutkivat milloin viikkoraha ylittää 1000 €. Jatkaen samalla idealla oppilaat alkavat syöttää B-vaihtoehdon määräämiä pisteitä oikein koordinaatistoon. Vasta tässä välissä D tulee ensimmäistä kertaa parin luokse katsomaan työn edistymistä, joten he ovat päässeet itsenäisesti todella pitkälle. Työskentely jatkuu edelleen aktiivisena, ja laitettuaan riittävästi pisteitä he osaavat lukea sitäkin oikein, vaikka kuvaaja ei olekaan vielä käyrä:

O2: Tää kasvaa pikkuhiljaa!! (Näyttää miten geometrinen jono räjähtää isoksi.) Ei oo menny edes 20:tä viikkoa ja siitä tulee jo enemmän rahaa. Ku tällä menee 20 viikkoa, et saa 400, nii tällä menee 13 viikkoa.

O1: Ja sit se ero vaan kasvaa, ku seuraavalla saa jo 800.

O2: Tehääs vielä se yks, mä haluan nähä sen. Kato! Tosi kivan näkönen.

O1: Mihin se menis se seuraava?

D tulee paikalle ja ohjeista oppilaita miettimään viikkorahaa n:nellä viikolla. Lopulta suora kehotus suoran yhtälön miettimiseen ohjaa oppilaat oikeille jäljille ja heidän onnistuukin piirtää oikea suora myös suoran yhtälön avulla:

D: Miettikää mikä ton suoran yhtälö on.

O2: Nii siihen tulee aina se yks lisää sillain kertaa yks, kertaa kaks, kertaa kolme, kertaa neljä tai joku sellanen, et se on se viikkojen määrä tulee siihen. Jos on nolla viikkoo, nii se on, ei yhtään kerrointa.

O1: Jos meillä on x määrä viikkoja.

O2: Ei mut, jos laittaa sen 20 tohon, ku me tiedetään, et se on kakskymmentä.

O1: Eiku se on tuo 10 mikä me tiedetään.

O2: 10+20 ja sit siihen tulee se viikkokerroin. y on nyt se vastaus kumminkin.

O1: Se on muuten x·20+10. Kato ku x on..

O2: ...viikkojen määrä...

O1: ...ja kymmenen on se lähtö summa.

O2: Niin on. Kokeillaan. Kokeillanpas tehä sillä suoraan.

Oppilaat tarvitsivat melko selkeän ohjeen opettajalta, jotta he pääsivät tehtävän loppuun, mutta heti tämän jälkeen he saivat keksimästään A-kohtaa kuvaavasta yhtälöstä mallin, miten lähteä muodostamaan huomattavasti vaikeampaa B:n käyrän yhtälöä:

O2: Kato se piirs sen tismalleen tohon päälle! Mut toi toinen yhtälö onki vähän eri juttu.

O1: Jos tässä on 0.1, jos y on taas rahasumma. 0.1 kertaa x määrä viikkoja. Eiks se tuu sillain. Tästä tulee joku potenssi

O2: Nii tulee potenssiin. Mut mikä kertaa itellään. Ku ei tota voi kertoo itellään, 0,1:siä ku niistä tulee ihan eriä. Eiku se on potenssiin.. Ei potenssiin kaks vaan. Eiks se oo se kolmas potenssi. Kolmannen asteen yhtälö. Oliks se et toisen asteen yhtälöstä tulee paraabeli, niin kolmannen asteen yhtälöstä tulee hyperbeli. 0.1 oli viikolla nolla (alkaa tehdä listaa). 0.2 oli viikolla yks, se riittää. No niin. Sitten. Viikoja on x ja rahaa on y. Mikä sääntö siinä on?

O1: Periaatteessahan sillain, et tulee niinku 0.1 potenssiin x, ku me ei tiedetä sitä paljonko se potenssiin, moneenko potenssiin se on.

O2: Eiku se on kertaa tulee siihenki.

O1: Eiku pitää varaman lisätä se 0.1, mikä on se lähtö.

O2: Eiku nimen omaan sitä 0.1:stä kerrotaan aina lisää lisää lisää... Oisko se niinku sillein x potenssiin jotain. 0.1 kertaa x potenssiin jotain. Eiku siis 2 potenssiin jotakin..

Lopulta oppilaiden onnistui muodostaa yhtälö muotoon $y = 0.1 \cdot 2^x$, joka oli juuri se mitä haettiin. Kuvaaja ei kuitenkaan asettunut täysin pisteiden päälle. Tämä saattoi johtua siitä, että oppilaat olivat laskeneet jonkin pisteen väärin, mutta tätä ei voitu jälkikäteen tarkistaa, koska ruudunkaappaustoimintoa ei tunnilla käytetty.

POHDINTA

Tehtävänannon ollessa motivoiva ja oppilasparin toimiessa hyvin yhteen on tutkiva lähestymistapa erinomainen tapa opettaa. Tunnilla D parin jäsenet tukivat toistensa tekemistä, saivat positiivisia onnistumisen tunteita liittyen matematiikkaan, loivat tunnin alussa hypoteesin tehtävän ratkaisuksi ja lopulta löysivät monipuolisesti matematiikkaa hyväksi käyttäen ratkaisun, joka tuki heidän aiemmin luomaansa hypoteesia.

Puolestaan tunnilla C kokemukset olivat hieman erilaiset. Sama oppilaspari teki toisenlaisen tehtävänannon tehtäviä. Tarkoituksena oli perustella jo aikaisemmin opittuja sääntöjä. Oppilaille voisi olla motivoivampaa perustella sääntöjä, jotka ovat ennestään tuntemattomia, kuin jo aikaisemmin opittuja sääntöjä. Lisäksi oppilaat eivät ehkä olleet tottuneet tekemään todistustehtäviä ja tehtävätyyppi ei ollut tälle ryhmälle motivoiva. Toisaalta tunnilla D oppilaat motivoituivat todistamaan asettamansa hypoteesin automaattisesti. Tunnin C tehtävätkin olisivat saattaneet toisenlaisella muotoilulla toimia paremmin. Jos oppilaat eivät ole tottuneet ja motivoituneet todistustehtävien tekoon, heitä voi ehkä onnistua ”huijaamaan” käytännössä samankaltaiseen matemaattiseen pohdintaan ja perusteluun miettimällä huolella tehtävänantoja.

Aineistot eri tunneilta eivät kuitenkaan ole toisiinsa verrattavissa. Tunnilla D oppilasparin O1 ja O2 pohdinta tallentui kokonaisuudessaan videolle ja analysoitavaa keskustelua tältä parilta syntyi paljon. Tunnilla C parista, jota kuvattiin koko ajan, ei syntynyt niin paljon analysoitavaa, mutta opettajaa kuvaava kamera tallensi paljon oppilaan O2 ja opettajan välistä keskustelua. Emme kuitenkaan tiedä millaista keskustelua pari O1 ja O2 kävi keskenään. Lisäksi tunneilla oli eri opettajat, joten henkilökemioillakin on epäilemättä vaikutusta keskustelujen luonteeseen. Nämä asiat on otettava myös huomioon tulosten tulkinnassa.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Tunnit olivat antoisia meille opetusharjoittelijoina. On hyvä, että tällaista opetustapaa tuli kokeiltua harjoittelun aikana, niin kynnys saman uusimiseen työssä ei ole niin suuri. Tehtävänantoa ei voi liikaa hioa ja todennäköisesti tutkivan otteen tunnit kehittyvätkin kerta kerran jälkeen lisää. Virheistä oppii aina lisää ja ongelmakohtia voi välttää ennakoimalla.

Molemmissa tunneissa oli varmasti paljon parannettavaa, mutta molemmat ideat ovat toteuttamiskelpoisia tulevaisuudessakin. Kun tehtäviä onnistuu muokkaamaan vielä sujuvammiksi, on oppimistuloskin varmasti parempi. Toivottavasti tulevaisuudessa tällaiseen opettamiseen soveltuva opetusmateriaali yleistyy esimerkiksi oppikirjojen yhteydessä, jolloin kynnys opettajalle opetuksensa kehittämiseen laskisi.

Lähteet

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu,* 6/2003, 35-38.

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA TUNNILTA C

Tunnin aihe: jaollisuussäännöt

Alustus:

403 : 4 = 100 jää 3

$403 = 4 \cdot 100 + 3$

Jako ykkösiin, kymmeniin, satoihin jne.

$532 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2$

Oppilaat jakaantuvat pieniin ryhmiin ja heille annetaan ao. tehtävänanto. *Kursiiveissa opettajan mahdolliset lisäkysymykset ja vihjeet ohjauksen aikana.*

Tutki, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa. Perustele. Jos väite ei pidä paikkaansa, korjaa se.

1. Jos luku on kahdella jaollinen, se päättyy numeroon 0 tai 2. *Tutki jotain isoa lukua ja mieti, miksei muut kuin viimeinen numero vaikuta parillisuuteen.*

2. Jos luku päättyy numeroon 0 tai 5, se on viidellä jaollinen. *Tutki jotain isoa lukua ja mieti, miksei muut kuin viimeinen numero vaikuta viidellä jaollisuuteen.*

3. Luku on jaollinen neljällä, jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen neljällä. *Rittäisikö viimeisen numeron tarkastelu?*

4. Kun luvut 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 ja 900 jaetaan luvulla 9, saadaan jakojäännöksiksi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 0.

5. Luku on jaollinen yhdeksällä, jos luvun numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä. *Kirjoita jokin esimerkkiluku niin, että hajotat sen ykkösiin, kymmeniin, satoihin… +Mieti edellistä tehtävää.*

6. On olemassa pariton luku, joka on jaollinen luvulla 15.

7. On olemassa parillinen luku, joka on jaollinen luvulla 5.

8. On olemassa pariton luku, joka on jaollinen luvulla 10.

LIITE 3: TUNTISUUNNITELMA TUNNILTA D

Nimi:______________________

Tehtävä:

Äitisi voittaa lotossa ja päättää jakaa esiperintöä sinulle korottamalla viikkorahaasi. Hän ei halua kuitenkaan, että viikkoansiosi kohoaa äkillisesti liikaa, vaan hän on keksinyt kaksi vaihtoehtoista systeemiä sen kehittymiselle. Saat valita niiden välillä kumman haluat:

a) Alkuun viikkorahasi on 10 € ja sitä seuraavilla viikoilla saat aina 20 € enemmän kuin edellisellä.

b) Perusviikkorahasi on 10 senttiä (0.1 €) ja sitä seuraavilla viikoilla saat aina kaksi kertaa enemmän rahaa kuin edellisellä viikolla.

Kumpi kannattaisi valita? Tutki ja havainnollista vastauksesi mahdollisimman helppolukuiseksi. **HAVAINNOLLISTA GEOGEBRALLA, JOS MAHDOLLISTA!**

Kysymyksiä:

- Paljon a) -vaihtoehdolla tienaisit toisella viikolla? Entä kolmannella? Entä kymmenennellä viikolla?
- Paljonko b) -vaihtoehdolla tienaisit toisella viikolla? Entä kolmannella? Entä kymmenennellä?
- Monennella viikolla viikkorahasi määrä ylittää 100 € eri vaihtoehdoilla?
- Keksi sääntö, jolla saat viikkorahan määrän kullakin vaihtoehdolla x:nnellä viikolla.

Ohjaavia apukysymyksiä:

- Paljonko vaihtoehto a) kasvaa viikoittain? Entä vaihtoehto b)? Saavuttaako vaihtoehto b) vaihtoehtoa a)?

-Taulukoi vastauksia siten, että taulukon toinen sarake osoittaa viikon lukumäärän ja toinen viikkorahan määrän esim.

a)

Viikko	Viikkoraha (€)
0	10
1	10+20=30
2	10+20+20=50
3	10+3·20=70

b)

Viikko	Viikkoraha (€)
0	0.1
1	2·0.1
2	2·2·0.1
3	2·2·2·0.1
4	2^4·0.1

Mitä nämä esitykset muistuttavat? Mitä tehdessä olette tehneet vastaavanlaisia taulukoita? Keksi tältä pohjalta sääntö.

-Voisiko vastauksista muodostaa lukujonoja? Miten jonon seuraava termi aina riippuu edellisestä? Keksitkö säännön?

Miten tätä sääntöä voisi kuvata havainnollisesti?

Loppukoonti:

-Ota huomioon oppilaiden tuotokset.

-Käy läpi niiden pohjalta, kuitenkin näyttäen viimeiseksi GeoGebran kuvaajat ja niistä sitten oppilaiden havaintoja.

OSA 2: TUTKIVAA MATEMATIIKKAA LUKIOSSA

OPISKELIJOIDEN PERUSTELUIDEN LAATU TANGENTTIKULMA-TUNNILLA

Teppo Lahti ja Janne Kukkonen

teppo.lahti@jyu.fi, sekukkonen@gmail.com

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tutkimuksessa pidettiin tutkivan matematiikan tunti lukion lyhyen matematiikan ensimmäisen vuoden opiskelijoille. Oppitunnin tarkoituksena oli oppia ympyrän tangentin ja tangenttikulman käsitteet ja niiden ominaisuuksia. Oppitunnilla opiskelijat saivat ratkaista GeoGebran avulla tehtäviä, jotka liittyivät ympyrän tangenttiin. Oppitunti videoitiin ja sen perusteella analysoitiin opiskelijoiden perusteluiden laatua. Tutkimuksessa havaittiin, että empiiriset perustelut olivat paljon deduktiivisia perusteluja yleisempiä. Kuitenkin empiirinen perustelu johdatti opiskelijat paljon useammin harhaan ja oli paljon useammin virheellinen kuin deduktiivinen perustelu.

JOHDANTO

Tämän tutkimuksen tavoitteena on tutkia matematiikan opiskelijoiden perustelujen muotoja erinäisissä geometrisissä ongelmissa. On tärkeää ymmärtää opiskelijoiden ajatusprosesseja, kun he yrittävät perustella matemaattisia väitteitä. Millaiset perustelut vakuuttavat heidät siitä, että väite on tosi? Näitä prosesseja ymmärtämällä opettajan on paremmin mahdollista ohjata heidän perustelujaan täsmällisempään ja matemaattisempaan suuntaan. Tarkoituksena ei tällöin tietenkään saa olla liiallinen opiskelijan oman ajattelun tukahduttaminen ja sen sovittaminen tiettyyn muottiin. Pikemminkin tulisi tarjota hänelle uusia työkaluja täsmällisemmän matemaattisen kielen ja matemaattisten perustelujen käyttämiseen.

Tutkimuksemme suoritettiin tutkivan matematiikan oppitunnilla lukiossa. Tutkiva matematiikka on Goosin (2004) mukaan perinteistä, opettajajohtoista opetusta avoimempi, uudistuksiin orientoitunut lähestymistapa matematiikan oppimiseen. Oppimiskäytänteinä siinä ovat keskustelu ja yhteistyö toisten opiskelijoiden kanssa. Opettaja ei enää ole kyseenalaistamaton auktoriteetti, vaan oppilaat itse ehdottavat ja puolustavat matemaattisia ideoitaan ja väitteitään sekä kykenevät vastaamaan opiskelijatovereidensa matemaattisiin argumentteihin. Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivassa matematiikassa oppilaille ei tule antaa esimerkkejä tai muuten paljastaa miten tehtävät ratkaistaan.

Goosin (2004) mukaan tutkivassa matematiikassa opiskelijat oppivat puhumaan ja toimimaan matemaattisesti osallistumalla matemaattisiin keskusteluihin ja ratkaisemalla uusia, epätavallisia ongelmia. Myös Sullivanin ym. (2006) tutkimuksen mukaan tutkivaa matematiikkaa soveltamalla on mahdollista saada kaikki oppilaat osallistumaan matemaattiseen ajatteluun. Steinin ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tunti muodostuu yleensä alustusvaiheesta, tutkimusvaiheesta ja koontivaiheesta. Tutkiva matematiikka muodostaa tutkimuksemme teoreettisen viitekehyksen.

MENETELMÄT

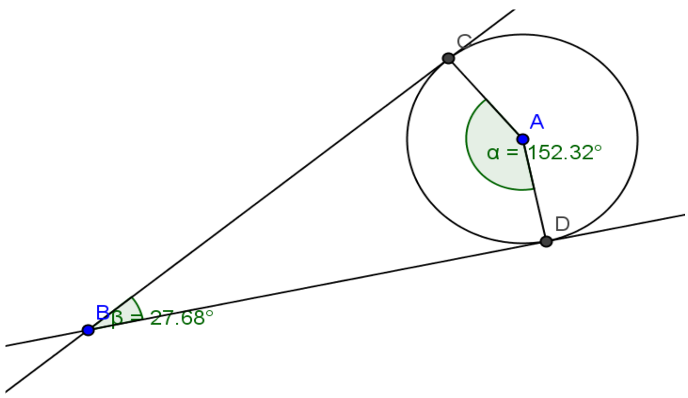
Tutkivan matematiikan tunti: Tangentti ja tangenttikulma

Tunnin tavoitteena oli oppia ympyrän tangentti ja ymmärtää muutamia sen perusominaisuuksia, kuten tangenttikulman ja keskuskulman välinen yhteys. Tunti pidettiin lukion lyhyen matematiikan ensimmäisen vuoden opiskelijoille geometrian kurssilla. Opiskelijat käyttivät tunnilla GeoGebraa, joka on vuorovaikutteinen matematiikkaohjelmisto opetuskäyttöä varten. Ohjelmalla voi opiskella perusmatematiikkaa luomalla ja tutkimalla itse tai tutkimalla GeoGebralla luotuja vuorovaikutteisia nettisivuja. Opettaja näytti alustusvaiheessa lyhyesti, miten GeoGebra aukaistaan ja miten sillä piirretään suoria, janoja, ympyröitä ja annetun kokoisia kulmia sekä miten etsitään kahden objektin leikkauspiste. Tämän jälkeen siirryttiin tutkimusvaiheeseen, ja opiskelijat ryhtyivät itsenäiseen työhön. GeoGebralla ratkaistiin seuraavat tehtävät:

1. Merkitse piste A = (1,2). Piirrä sitten jokin ympyrä siten, että piste A on sen ulkopuolella. Piirrä pisteen A kautta kulkeva suora, joka sivuaa ympyrää täsmälleen yhdessä kohdassa. Kuinka monta tällaista suoraa on?

Tehtävän 1 jälkeen opiskelijat siirtyivät tekemään tehtävät 2-5 sellaiselle ennalta laaditulle GeoGebra-sivulle, jossa ympyrälle oli piirretty tangentit ja jossa keskuskulman- ja tangenttikulman suuruutta pystyi helposti muuttamaan pistettä B raahaamalla, ks. Kuvio 1.

2. Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu suoran ja janan CA välille? Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu toisen suoran ja janan DA välille
3. Jos pisteen B sijaintia muuttaa, kuinka suuri voi keskuskulma α olla?
4. Milloin kulmat α ja β ovat yhtä suuret?
5. Onko kulmilla α ja β jokin yhteys?



Kuvio 1. GeoGebra-kuvio, jonka pisteitä A ja B voi raahata.

Tunnin lopuksi oli vielä koontivaihe, jossa tehtävien ratkaisut käytiin läpi. Tuntisuunnitelma ja tehtävämoniste ovat Liitteessä 1.

Aineiston keruu

Keräsimme aineiston videoimalla oppitunnin. Käytössä oli kaksi videokameraa. Toinen niistä kuvasi koko ajan opettajaa, toinen yhtä oppilasryhmää. Opettajalla oli oma mikrofoni, samoin kuvatulla opiskelijaryhmällä. Opiskelijat tekivät kirjalliset ratkaisut yllä esitettyihin viiteen tehtävään monisteille, jotka kerättiin tunnin lopuksi pois.

Aineiston analyysi

Analysoimme tutkimuksessamme matematiikan opiskelijoiden perustelujen muotoja. Kuvailimme heidän työskentelyään erinäisten geometristen väitteiden todistusten parissa. Suoritimme analysoinnin katselemalla videota pitämästämme tutkivan matematiikan oppitunnista, ja kiinnitimme huomioita erityisesti siis opiskelijoiden käyttämiin perusteluihin.

Luokittelemme opiskelijoiden perustelujen muodot seuraavan Marradesin ja Gutiérrezin (2001) kehittämän luokittelun mukaan:

> *Empiiriset perustelut* pohjautuvat esimerkkien käyttöön ainoana todistusaineistona. Opiskelijat toteavat väitteen todellisuuden havaittuaan säännöllisyyttä yhdessä tai useammassa esimerkissä; he käyttävät näitä esimerkkejä tai niiden välillä havaitsemiaan suhteita perustelun rakennusaineina. Empiiriset perustelut voidaan jakaa vielä neljään alaluokkaan: naiviin empiiriseen perusteluun, oleelliseen kokeeseen, geneeriseen esimerkkiin sekä väärään empiiriseen perusteluun.
>
> *Naivissa empiirisessä perustelussa* väite todistetaan näyttämällä, että se pätee yhdessä tai useammassa tilanteessa, joita ei useimmiten ole valittu minkään spesifin kriteerin mukaan. Tarkastus saattaa sisältää visuaalista tai muuten aistienvaraista havainnointia (*aistityyppi*) tai eri esimerkeistä koottuja matemaattisia elementtejä tai suhteita (*induktiivinen tyyppi*).
>
> *Oleellisessa kokeessa* väitteen todistus perustuu siihen, että se on totta jossain tietyssä, huolellisesti valitussa esimerkissä. Opiskelijat ovat tietoisia yleistyksen tarpeesta, ja he valitsevatkin niin tavallisen esimerkin kuin mahdollista, vaikka sitä ei voidakaan pitää minkään muun esimerkin edustajana. Opiskelijat otaksuvat, että väite on aina totta, jos se on totta tässä esimerkissä.
>
> *Geneerisessä esimerkissä* perustelu pohjautuu tiettyyn esimerkkiin, jota pidetään luonteenpiirteensä perusteella koko luokkansa edustajana. Väitteen todistaminen perustuu täsmällisiin ja abstrakteihin järkeilyihin, jotka on saatu tähän esimerkkiin suoritettujen operaatioiden tai muodonmuutosten perusteella. Perustelu viittaa koko perheen abstrakteihin ominaisuuksiin ja elementteihin, mutta se pohjautuu selvästi tähän esimerkkiin.
>
> *Väärässä empiirisessä perustelussa* opiskelijat käyttävät empiirisiä strategioita ongelman ratkaisemiseksi, mutta he eivät onnistu käsittelemään yksityiskohtaisemmin oikeaa

väitettä tai he kyllä lausuvat oikean väitteen mutta eivät kykene tarjoamaan mitään perusteluja.

Deduktiiviset perustelut pohjautuvat ongelmien yleisiin näkökulmiin, mentaalisiin operaatioihin ja loogisiin deduktioihin, joiden kaikkien tarkoituksena on validoida väite yleisellä tavalla. Silloin kun esimerkkejä käytetään perustelujen organisoinnin helpottamiseksi, niiden erityisiä luonteenpiirteitä ei oteta huomioon. Marrades ja Gutiérrez jakavat deduktiiviset perustelut kolmeen alaluokkaan: ajatuskokeeseen, formaaliin deduktioon sekä väärään deduktiiviseen perusteluun.

Ajatuskokeessa tiettyä esimerkkiä käytetään päättelyn organisoinnin tukena. Ajatuskokeesta voidaan löytää kaksi alaluokkaa riippuen perustelun tyylistä: *Muodonmuutosperustelut* pohjautuvat mentaalisiin operaatioihin, joissa alkuperäisestä ongelmasta tehdään muodonmuutos toiseen vastaavanlaiseen ongelmaan. Esimerkkien roolina on auttaa näkemään, mitkä muodonmuutokset ovat sopivia. Muodonmuutokset perustuvat avaruudellisiin mielikuviin, symbolisiin käsittelyihin tai erilaisten objektien konstruointiin. *Rakenteelliset perustelut* ovat seurausta loogisista deduktioista, jotka on saatu ongelman tiedoista ja aksioomista, määritelmistä tai hyväksytyistä teoreemoista. Esimerkkien roolina on auttaa organisoimaan deduktion eri askeleet.

Formaalissa deduktiossa perustelu pohjautuu mentaalisiin operaatioihin ilman esimerkkien apua. Siinä käsitellään ainoastaan ongelman yleisiä näkökulmia. Tämän vuoksi se on matematiikan tutkijoiden maailmanlaajuisesti käyttämä formaali todistus.

Väärässä deduktiivisessa perustelussa opiskelijat käyttävät deduktiivisia strategioita ongelman ratkaisemiseksi, mutta he eivät onnistu käsittelemään yksityiskohtaisemmin oikeaa väitettä tai he kyllä lausuvat oikean väitteen mutta eivät kykene tarjoamaan mitään perusteluja.

TULOKSET

Taulukossa 1 on esitetty empiiristen perustelujen esiintyminen oppitunnin aikana. Kuten huomataan, tehtävissä 1 ja 2 kaikki perustelut ovat empiirisiä, tehtävässä 3 kaikki ovat yhtä lukuun ottamatta empiirisiä, ja tehtävissä 4 ja 5 ei puolestaan ole lainkaan empiirisiä perusteluja. Tehtävänlaatu ja kysymyksen asettelu siis näyttävät vaikuttavan enemmän perustelun laatuun kuin yksilöiden väliset erot.

Taulukko 1: Erilaisten empiiristen perustelujen frekvenssit tehtäväkohtaisesti sekä kaikki deduktiiviset perustelut yhteensä. Perusteluja oli tunnilla yhteensä 22.

	Väärät empiiriset perustelut	Naiivit empiiriset perustelut	Ratkaisevat kokeilut	Geneeriset esimerkit	Empiirisiä perusteluja yhteensä	Deduktiiviset perustelut
Teht. 1	2	0	1	0	3	0
Teht. 2	1	3	2	0	6	0
Teht. 3	2	0	1	3	6	1
Teht. 4	1	1	0	1	3	0
Teht. 5	0	0	0	0	0	3
Yht.	6	4	4	4	18	4

Tehtävässä 1, jossa täytyi miettiä, kuinka monta tangenttia ympyrällä on, ei opiskelijoilla ollut keinoja perustella ratkaisuaan muuten kuin empiirisesti. Opiskelijat saivat tehtävän ratkaistua nopeasti ja vaivattomasti, eikä opettaja enää palannut siihen, mistä johtuen perusteluja saatiin tähän tehtävään vain kolme. Ainoastaan ne, joilla oli ongelmia tehtävässä, joutuivat perustelemaan sitä, minkä vuoksi näistä kolmesta perustelusta peräti kaksi oli väärää.

Tehtävässä 2 täytyi puolestaan miettiä, kuinka suuri on tangentin ja sen ja ympyrän leikkauspisteeseen piirretyn säteen välinen kulma. Tehtävä osoittautui ryhmäläisille ylitsepääsemättömän vaikeaksi, minkä vuoksi deduktiiviseen päättelyyn asti ei päästy. Tehtävän vaikeudesta johtuen puolet perusteluista oli naiiveja empiirisiä perusteluja, eli ne nojasivat vain yhteen GeoGebralla kokeiltuun esimerkkiin. Suoraan havaintoon perustuva naiivi empirismi oli yleisin tapa perustella ratkaisu. Opiskelijat käyttivät myös sellaista perustelua, jossa kulmat mitattiin GeoGebran toimintojen avulla ja sitten olettamalla molemmat tangentin ja kehän väliset kulmat yhtä suuriksi laskettiin, että kulmien täytyy olla 90 astetta.

Kolmannessa tehtävässä täytyi päätellä, kuinka suuri syntynyt kehäkulma voi olla. GeoGebra ohjasi opiskelijat perustelemaan vastauksensa jälleen kerran empiirisesti. Tällä kertaa tehtävä oli kuitenkin edellistä helpompi, joten tehtävän 2 perusteluja pätevämpiä empiirisiä perusteluja nähtiin useita. Seuraavassa tapauksessa opiskelijat väittivät ensiksi, että keskuskulma ei muutu.

Opettaja: Mikä noista on keskuskulma?

Opiskelija C: Tää [näyttää kursorilla ja siirtelee samalla pistettä A].

Opettaja: Niin. Eikse nyt muutu?

Opiskelija C: Muuttuuhan se.

Opettaja: Muuttuu. Mikä se voi olla suurimmillaan?

Opiskelija C: 180.

Opettaja: Voiko olla 180?

Opiskelija D: Ei se voi.

Opiskelija C: 160 [kaikki nauravat hyväntahtoisesti erikoiselle vastaukselle, opiskelija C ei osaa zoomata GeoGebralla kuvaa kauemmaksi. Opettaja kertoo, kuinka se tehdään...] --

Opettaja: Miksei se voi olla 180?

Opiskelija D: Ei se voi mennä sillee tällee... [viittoo käsillä esittäen yhdensuuntaisia suoria]

Opettaja: Niin!

Opiskelija C: Koska sitten tulee neliö!

Opiskelija D: Koska niistä tulee tällee yhdensuuntaiset.

Tässä tehtävässä kolmen opiskelijan ryhmä oli aluksi antanut väärän vastauksen. Opettajan tultua esittämään tarkentavia kysymyksiä, he huomasivat heti kuitenkin perustelunsa virheelliseksi. Varsin nopeasti myös opiskelija D huomasi, että suorista tulisi tällöin yhdensuuntaiset. Tässä on kyseessä empiirinen perustelu, tarkemmin geneerinen esimerkki, jossa yhden esimerkin ominaisuudet johdetaan koskemaan kaikkia tilanteita käyttäen matemaattisia perusteluja (tässä suorien yhdensuuntaisuuden käsite).

Tämä perustelu, kuten muutamat muutkaan tehtävän 3 empiiriset perustelut, eivät ole kovinkaan kaukana deduktiivisesta perustelusta. Ratkaiseva askel deduktiiviseen päättelyyn jäi kuitenkin yhtä kertaa lukuun ottamatta tekemättä. Edes opettajan johdattelevat kysymykset eivät onnistuneet viemään perusteluja deduktiiviselle tasolle

On kuitenkin merkillepantavaa, että ainoa deduktiivinen perustelu tehtävässä 3, esitettiin, kun eräs opiskelija esitti ensiksi väärän empiirisen havainnon, jota opettaja pyysi perustelemaan. Myös edellisessä esimerkissä, kun opettaja keskusteli oppilaiden C ja D kanssa, ryhmä ylsi melko pätevään geneeriseen esimerkkiin, vaikka he olivat aluksi aivan väärillä jäljillä. Sen sijaan monet, jotka esittivät tehtäviin 1-3 oikean vastauksen, eivät pystyneet enää parantamaan perustelunsa laatua, vaikka se olisi ollut vain naiivi empiirinen perustelu. Opiskelijat itse tuntuivat olleen tyytyväisiä myös naiiviin empiiriseen perusteluun.

Tehtävä 4 oli mielenkiintoinen, sillä sen perusteluista puolet oli empiirisiä ja puolet deduktiivisia. Tehtävässä täytyi miettiä, milloin tangenttikulma ja keskuskulma ovat yhtä suuret. Kolmesta empiirisestä perustelusta peräti kaksi oli vääriä, kun taas deduktiiviset päättelyt olivat kaikki oikein.

Tehtävään 5, jossa täytyi miettiä, mikä on keskuskulman ja tangenttikulman välinen yhteys, opiskelijat esittivät kaikki samantyylisen perustelun, deduktiivisen ajatuskokeen, jota seuraava keskustelu kuvaa hyvin:

Opettaja: Se tarkoittaa sitä, että miten ne riippuu toisistaan. [Opettajan tarkennus tehtävänantoon]

Opiskelija C: No eiks ne mee silleen samassa suhteessa?

Opettaja: Joo-o. Eli jos sä tiiät vaikka ton alfan, niin miten pystyy laskemaan beetan?

Opiskelija E: Joo-oo [oivaltavasti]

Opiskelija E: No esimerkiks tässä ku tää on neliö, niin ne on molemmat yhtä suuret. [E näyttää tehtävän 4 ratkaisua].

Opettaja: Niin, jos se on neliö, niin sen pystyy laskee, eikö niin? No entä jos se ei oo neliö, voiko sen siltikin jotenkin laskea?

Opiskelija C: Voi.

Opettaja: Miten? [Opiskelijat nauravat, seuraa reilun kymmenen sekunnin miettimistauko]

Opiskelija C: Kyllähän sen... Joo, nyt mää sen keksin! [opiskelijat C, D ja E nauravat oivallukselle]. Koska nää on 90 [C näyttää tangentin ja säteen välistä kulmaa] ja tää on 360 yhteensä [C näyttää koko nelikulmiota], niin laskee vaan nää [C tarkoittaa 90 asteen kulmia ja kulmaa alfa] ja sen saa siitä.

Opettaja: Niin. Aivan.

Opiskelija C: Jes!

Tässä esimerkissä opiskelija C ei oikeastaan kerro, miten tangenttikulman saa laskettua, mutta koska tehtävä ei ole kovin vaikea, voidaan hänen olettaa oivaltaneen, miten puuttuvan neljännen kulman suuruuden saa selville, jos kolmen muun suuruus tiedetään. Myöskään ei ole täyttä varmuutta siitä, ymmärsivätkö opiskelijat, että heidän tuloksensa pätee jokaisessa tapauksessa, mutta opiskelijat vaihtelivat kulmien suuruuksia jatkuvasti, joten on todennäköistä, että he ymmärsivät sen. Jos tämä oletus pätee, on kyseessä tyypillinen esimerkki deduktiivisesta ajatuskokeesta, jossa esimerkin pohjalta ratkaisu päätellään matemaattisesti ja deduktiivisesti.

Kaikki neljä esiintynyttä deduktiivista perustelua olivat ajatuskokeita. Yhtään formaalia deduktiivista perustelua ei oppitunnin aikana esiintynyt. Tämä saattaa selittyä sillä, että tämä perustelutapa on ensimmäisen vuoden lukion lyhyen matematiikan opiskelijoille melko vieras, erityisesti geometrian alueella. Merkittävää oli myös se, ettei yhtään väärää deduktiivista päättelyä esiintynyt, kun taas vääriä empiirisiä perusteluja (Taulukko 1) esiintyi peräti 6 kappaletta eli 33% kaikista empiirisistä perusteluista.

Deduktiivinen perustelu oli kuitenkin paljon empiiristä perustelua harvinaisempi tällä tunnilla. Kaikista perusteluista 78% oli empiirisiä ja 22% deduktiivisia. Empiirisistä perusteluista (yhteensä 18) 33% oli vääriä, 22% naiiveja, 22% ratkaisevia kokeiluja ja 22% geneerisiä esimerkkejä.

POHDINTA

Tulokset osoittavat, että empiirinen perustelu oli tunnilla paljon yleisempää kuin deduktiivinen perustelu. Syynä tähän voi olla se, että GeoGebran käyttö ohjaa opiskelijoita empiiriseen perusteluun. Myös geometria yleisesti ottaen on sellaista, että empiirisellä perustelulla on suuri rooli, kun useimmat asiat voi piirtää. Deduktiiviseen perusteluun asti opiskelijan on mahdollista päästä opettajan avustuksella.

Tulosten perusteella näyttäisi myös siltä, että opiskelijoiden virheelliset perustelut antavat opettajalle hedelmällisimmän lähtökohdan opiskelijan perustelujen kehittämiseen. Opiskelijat tuntuvat usein olevan tyytyväisiä naiiviinkin empiiriseen perusteluun, jos vain vastaus on oikein. Heillä ei tällöin ole todellista halua muuttaa perusteluaan eikä se siksi onnistu.

Empiiriset perustelut olivat paitsi opiskelijoille luontaisempia, johtivat myös useammin harhaan. Kun opiskelijat pääsivät deduktiiviseen perusteluun asti, ei virheitä sattunut.

Voidaan myös sanoa, että tällä tunnilla tehtävätyyppi ohjasi perustelun laatua enemmän kuin tehtävän tekijä. Vaikeat tehtävät (tehtävä 2) ratkaistiin empiirisesti, usein naiivilla perustelulla, sillä opiskelijoilla ei ollut riittävästi tietoa deduktiiviseen perusteluun. Opiskelijat kykenivät myös deduktiiviseen perusteluun silloin, kun heillä oli riittävästi tietoa perustella asiat (tehtävät 4 ja 5).

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

Marrades, R & Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87-94.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4), 258-291.*

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA: TANGENTTI JA TANGENTTIKULMA

Tunnin tavoite:

Opiskelija tietää, mikä on ympyrän tangentti ja ymmärtää muutamia sen perusominaisuuksia. Opiskelija tuntee tangenttikulman ja keskuskulman yhteyden.

Tunnin kulku:

Alustusvaihe 5 min.

Opettaja näyttää, miten GeoGebra aukaistaan ja miten sillä piirretään suoria, janoja ja ympyröitä sekä miten objekteja raahataan. Opettaja jakaa tehtävänannon opiskelijoille.

Tutkimusvaihe 40 min

Jos joku opiskelijoista saa muita ennen tehtävät ratkaistua, hän voi tehdä tehtävää 171 GeoGebraa apuna käyttäen.

Koontivaihe 10 min

Käydään läpi annettuja kysymyksiä. Opiskelijat saavat itse esittää omia teorioitaan ratkaisuiksi.

Koonnissa käydään läpi aluksi termit ”tangentti” ja ”tangenttikulma”.

Tämän jälkeen opiskelijat siirtyvät itsenäisesti tekemään tehtäviä kirjasta: 169, 171, 172, 176. He voivat käyttää GeoGebraa apuna kuvien hahmottamiseen, jos haluavat.

Viimeinen kymmenen minuuttia käytetään kotitehtävien tarkastukseen.

Tehtävät:

1. Merkitse piste A = (1,2). Piirrä sitten jokin ympyrä siten, että piste A on sen ulkopuolella. Piirrä pisteen A kautta kulkeva suora, joka sivuaa ympyrää täsmälleen yhdessä kohdassa. Kuinka monta tällaista suoraa on?

Avaa sitten linkki http://users.jyu.fi/~mahahkio/kulmat

2. Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu suoran ja janan CA välille? Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu toisen suoran ja janan DA välille?
3. Jos pisteen B sijaintia muuttaa, kuinka suuri voi keskuskulma α olla?
4. Milloin kulmat α ja β ovat yhtä suuret?
5. Onko kulmilla α ja β jokin yhteys?

LIITE 2: TUNNIN KOODAUS

Aika /teht.	**Kuvaus**	**Kommentit / Koodi**
T. 1		
11:10	Oppilas A esittää, että toinen haettu suora on yhdensuuntainen toisen kanssa	Väärä empiirinen havainto
12:00	Oppilas A esittää, että löytyy vielä yksi suora, mutta huomaa pian, että havainto oli väärä	Väärä empiirinen havainto
T. 2		
14:20	Oppilaat C ja D perustelevat haetun kulman olevan 90 astetta, koska se näyttää siltä	Naiivi empiirinen perustelu, suoraan havaintoon perustuva
15:20	Oppilaat E ja F perustelevat haettujen kulmien olevan 90 astetta mittaamalla kahden muun kulman suuruuden ja olettamalla, että haetut kulmat ovat yhtä suuret	Naiivi empiirinen perustelu, induktiivinen
16:30	Oppilasryhmä G esittää saman perustelun kuin edellä. Lisäksi he toteavat, että kaikki muutkin tilanteet näyttävät samalta.	Empiirinen perustelu, olennainen esimerkki
19:00	Oppilasryhmä H on mitannut kulmien suuruuksia ja saanut yli 90 astetta	Väärä empiirinen havainto
19:50	Oppilas A selittää, saman perustelun kuin ryhmä G. Yritystä laajentaa havaintoa, mutta epäonnistuu	Empiirinen perustelu, olennainen esimerkki
T. 3		
23:20	Oppilas I esittää ratkaisunsa. Hän on kirjannut vastaukseksi 179 astetta, mutta se voi hänestä olla niin lähellä 180 astetta kuin mahdollista. Jos kulma on 189 astetta, suorat eivät leikkaa lainkaan.	Yleinen empiirinen perustelu
T. 4 & 5		
25:00	Oppilaat C, D ja I ovat löytäneet ratkaisun tehtäviin.	4 empiirinen havainto. 5 Ajatuskoe
T. 3		
29:10	Ryhmä G väittää ensiksi, että keskuskulma on suurimmillaan 180. Sitten oppilas J keksii, että se ei voi olla 180. Oppilas K perustelee tätä siten, että ”sitten tulee neliö”. J tarkentaa, että tällöin suorat olisivat yhdensuuntaiset.	Yleinen empiirinen perustelu
T. 4		
30:00	Oppilas L esittää, että alfa ja beta eivät voi olla koskaan yhtä suuret, koska niitä ei ohjelman avulla saa täsmälleen samoiksi.	Väärä empiirinen havainto
	K väittää, että voivat ne olla yhtä suuret, sillä syntyy neliö.	Naiivi empiirinen havainto.
T. 5		

31:50	Oppilas L keksii, mikä on alfan ja betan välinen yhteys.	Ajatuskoe.
T. 6		
33:20	Opiskelija D ratkaisee tehtävän trigonometrialla.	Ajatuskoe.
T. 3		
35:20	Opiskelija M väittää, että keskuskulma voi olla 360 astetta. Opiskelija saa huomata, että hän oli ymmärtänyt kehäkulman käsitteen väärin. Tämän jälkeen hän esittää kulman olevan 180 astetta.	Väärä empiirinen perustelu.
36:40	Opiskelija huomaa, että jos kulma olisi 180 astetta, kyseiset suorat olisivat yhdensuuntaiset.	Olennainen esimerkki.
37:00	Opiskelija N väittää, että kulma voi olla korkeintaan 179,64, koska GeoGebralla ei pääse lähemmäksi.	Väärä empiirinen perustelu.
37:30	Tämän jälkeen N tarkentaa, että 180 se ei voi olla, sillä silloin suorat olisivat yhdensuuntaiset, mutta nehän leikkaavat!	Ajatuskoe.
T. 5		
1:00	N kertoo, että koska kaksi muuta kulmaa ovat 90 astetta molemmat ja kyseessä on nelikulmio, alfan ja betan summa on 180 astetta.	Ajatuskoe.
T. 2		
1:30	N esittää intuitiivisen perustelun. ”Koska ne on”. ”Niitten on pakko, koska se ympyrä on sellanen tasanen”.	Naiivi empiirinen perustelu

GEOGEBRAN JA SOSIAALISEN VUOROVAIKUTUKSEN MERKITYS PÄÄTTELYPROSESSEISSA ANALYYTTISESSA GEOMETRIASSA

Hanna Männistö, Eero Neijonen, Taru Nikkanen ja Misa Muotio

hanna.mannisto@jyu.fi, eero.neijonen@jyu.fi, taru.nikkanen@jyu.fi, misa.p.muotio@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tutkimme GeoGebran ja sosiaalisen vuorovaikutuksen merkitystä oppilaiden päättelyprosesseissa. Tutkittava ryhmä koostui lukion toisen vuosikurssin oppilaista. Tutkimus toteutettiin kahdella kaksoistunnilla, jotka molemmat pidettiin tietokoneluokassa. Tunneilla oppilaat työskentelivät pareittain ja tekivät tehtävämonisteen tehtäviä GeoGebraa apuna käyttäen. Oppitunnit myös videoitiin. Huomasimme, että GeoGebralla oli positiivinen vaikutus sekä oppilaiden empiiristen että deduktiivisten havaintojen tekemiseen. Lisäksi sekä oppilaiden keskinäisestä että oppilaan ja opettajan välisestä vuorovaikutuksesta oli apua varsinkin oppilaiden motivaatioon ja rohkeuteen ratkaista tutkivia tehtäviä.

JOHDANTO

GeoGebran avulla voidaan tehdä sellaisia havaintoja, mitä ei tavallisesti kynän ja paperin avulla saada aikaan. Parin kanssa keskustelu edistää usein oppimista, mutta se voi olla myös haitaksi. Tässä tutkimuksessa tavoitteenamme oli selvittää GeoGebran ja sosiaalisen vuorovaikutuksen merkitystä oppilaan päättelyprosessiin. Tässä sosiaaliseksi vuorovaikutukseksi katsotaan sekä kahden oppilaan että opettajan ja oppilaan välinen keskustelu.

Tutkivassa matematiikassa oppilaalle ei anneta valmiita ratkaisumenetelmiä vaan hän joutuu itse keksimään ne aikaisempien tietojensa perusteella. Steinin ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tuntiin kuuluu kolme vaihetta, mutta tässä tutkimuksessa keskityimme pelkästään tutkimusvaiheeseen. Kiinnitimme erityisesti huomiota siihen, millaisia neuvoja oppilaille annoimme, sillä esimerkiksi Hähkiöniemen (2010) mukaan oppilaalle ei saa paljastaa suoraan, miten tehtävä ratkaistaan. Sullivanin ym. (2006) tutkimuksen mukaan oppilaat saavat positiivisia kokemuksia tutkivasta oppimisesta, ja monet oppilaista tuntevat itsensä jopa menestyksekkäiksi.

Empiirinen havainto perustuu pelkästään aistihavaintoihin kun taas deduktiivisessa päättelyssä tosista perusteluista seuraa tosi johtopäätös. Deduktiivisella päättelyllä ei usein pystytä muodostamaan empiiristä havaintoa. Graafinen teknologia mahdollistaa empiirisen ratkaisun, ja tässä tutkimuksessa seurasimme mm. oppilaan siirtymistä empiirisestä havainnosta deduktiiviseen päättelyyn. Lewin ja Son (2008) tutkimuksessa osoitettiin, että graafisista työkaluista on paljon hyötyä matematiikassa ja että opettajan ohjauksella on merkittävä vaikutus oppilaan siirtymisessä empiirisestä havainnosta deduktiiviseen päättelyyn.

MENETELMÄT

Ympyrän yhtälö ja paraabelin huippu

Toteutimme kaksi tutkivan matematiikan kaksoistuntia lukion pitkän matematiikan neljännessä kurssissa (analyyttinen geometria). Ensimmäisen kaksoistunnin aiheena oli ympyrän yhtälö ja toisen kaksoistunnin aiheina olivat paraabelin huippu sekä paraabelin yhtälön ja kuvaajan välinen yhteys. Ensimmäisen tutkivan matematiikan kaksoistunnin tavoitteina oli GeoGebra-ohjelmaa apuna käyttäen selvittää parin kanssa ympyrän yhtälön kaava sekä ymmärtää kaavan ja kahden pisteen välisen etäisyyden yhteys. Toisen tutkivan matematiikan kaksoistunnin tavoitteina oli selvittää GeoGebran avulla kahden erilaisen paraabelin huippu sekä yrittää selvittää kaava, jonka avulla paraabelin huippu saadaan määritettyä suoraan. Lisäksi oppilaiden tuli selvittää miten paraabelin yhtälön parametrit vaikuttavat huipun sijaintiin. Molemmilla tutkivan matematiikan kerroilla oppilaat istuivat tietokoneilla pareittain, ja heille oli jaettu tehtävämonisteet. Oppilaiden työskennellessä opettaja kiersi luokassa ja antoi vinkkejä tehtäviin sekä neuvoi GeoGebra-ohjelman käytössä. Molempien kaksoistuntien alussa opettaja piti yhteisen ohjeistuksen ja tuntien lopussa tehtävät käytiin yhdessä läpi. Tuntisuunnitelmat ja tehtävämonisteet ovat Liitteissä 1 ja 2.

Aineiston keruu

Molemmat tutkivan matematiikan kaksoistunnit kuvattiin kahdella videokameralla siten, että toinen kamera seurasi luokassa kiertävää opettajaa ja toinen yhtä oppilasparia. Kuvatut oppilasparit valikoituivat sattumanvaraisesti vapaaehtoisen istumajärjestyksen ja vapaavalintaisen työparin valinnan takia. Kuitenkin yksi kuvatuista oppilaista oli sama molemmilla kaksoistunneilla (O2). Lisäksi ensimmäisellä tutkivan matematiikan kaksoistunnilla yritettiin käyttää ruudunkaappausta, joka jostakin syystä epäonnistui kaikilla oppilaiden käyttämillä tietokoneilla. Epäonnistumisen vuoksi ruudunkaappaus jätettiin, suunnitelmasta poiketen, myös toisella kaksoistunnilla tekemättä. Tällöin kuitenkin toinen kameroista kuvasi koko ajan edellä mainittujen kahden oppilaan tietokoneen näyttöä, joten GeoGebran käytöstä saatiin sitä kautta tietoa. Oppilaille tunneilla jaetut tehtävämonisteet, joihin oppilaat olivat myös kirjoittaneet ratkaisunsa, kerättiin tuntien lopussa pois. Tehtävämonisteiden analysoinnissa keskityttiin lähinnä videoitujen parien ratkaisuihin. Lisäksi ensimmäisen tutkivan matematiikan kaksoistunnin loppupuolella oppilaille teetettiin kysely (Liite 3), joka kerättiin myös tunnin päätteeksi.

Aineiston analyysi

Keskityimme sekä tehtäväpapereiden, kyselylomakkeiden että videoiden analysoinnissa lähinnä videoituun pariin. Tehtävämonisteita analysoitaessa olimme ratkaisujen laadun lisäksi erityisen kiinnostuneita oppilaiden selityksistä. Videoiden analysoinnissa keskityimme erityisesti oppilaiden keskinäiseen vuorovaikutukseen, päättelyprosessin etenemiseen sekä siihen, kuinka oppilaat hyödynsivät GeoGebraa. Varsinkin ensimmäisellä tunnilla oppilaiden selitykset monisteessa olivat jokseenkin puutteellisia tai puuttuivat kokonaan, joten videoiden katsominen auttoi meitä ymmärtämään paremmin oppilaiden ratkaisuja. Lisäksi yritimme selvittää, olivatko kyselylomakkeiden tietyn tyyppiset vastaukset yhteydessä tehtävien oikeellisuuden/virheellisyyden kanssa. Tässä analysoimme myös muiden kuin videoitujen parien monisteita.

TULOKSET

GeoGebran merkitys päättelyprosesseissa

Kyselylomakkeiden mukaan molemmat ensimmäisellä tunnilla videoiduista oppilaista (O1 ja O2) pitivät tehtäviä melko haasteellisina (O1: ”suhteellisen haastavia”; O2: ”aika hankalia selittää vaikka ratkaisut sai”). Kumpikaan heistä ei ollut käyttänyt GeoGebraa aiemmin, mikä näkyi ensimmäisellä tunnilla selvästi GeoGebran vajaana hyödyntämisenä. He eivät esimerkiksi tehtävässä 5 heti tajunneet piirtää haluttuja pisteitä. Myös joitakin teknisiä ongelmia ilmeni. Kaikesta huolimatta molemmat pitivät GeoGebraa hyödyllisenä (O1: ”Pystyi hahmottamaan, oli helppo piirtää”; O2: ”Auttoi paljon. Hahmotti ympyrät ja kertoi tarkat arvot.”) Kuten oppilaiden kyselylomakkeen vastauksistakin ilmenee, GeoGebra auttoi lähinnä piirtämisessä, kuvan hahmottamisessa ja tehtävien tarkastamisessa. Esimerkiksi tehtävässä 2 O1 laski laskimella ympyrän keskipisteen, päätteli säteen ja sijoitti arvot yhtälöön. Vasta ympyrän piirrettyään he piirsivät nelikulmion kärkipisteiden kautta suorat (ei siis nelikulmiota) ja tarkistivat näin tehtävän. Sitä, että kyseessä oli nimenomaan suurin mahdollinen ympyrä, he eivät kommentoineet mitenkään.

Kun tunti eteni, oppilaat oppivat yhä paremmin käyttämään GeoGebraa. Edettyään tehtävään 6, O1 ja O2 osasivat jo käyttää monia sovelluksia, ja GeoGebralla olikin merkittävä rooli tehtävän ratkaisemisessa. Ensin he piirsivät ohjelmalla ympyrät syöttämällä syöttökenttään ympyröiden yhtälöt normaalimuodossa. GeoGebra muutti algebraikkunassa yhtälöt keskipistemuotoon. O1 huomasi heti, että painettuaan Enteriä yhtälö muuttui. Innokkaasti he syöttivät toisenkin yhtälön, joka sekin muuttui keskipistemuotoon. Hetken pohdittuaan O1 tajusi, että kyseessä on sama yhtälö. Nyt viimeistään he ymmärsivät, mitä vakiot ympyrän yhtälössä kertovat, joten he pystyivät poimimaan algebraikkunasta ympyröiden säteet ja keskipisteet. Tämän jälkeen he piirsivät molempien keskipisteet, ja sen jälkeen "Keskipiste ja kehänpiste"-työkalulla ympyrän, jonka keskipiste oli sama kuin toisen ympyrän keskipiste ja kehänpiste toisen ympyrän keskipiste. Sitten he lukivat algebraikkunasta uuden ison ympyrän säteen. Lopuksi he vähensivät ison ympyrän säteestä pienempien ympyröiden säteet. Tämä ei taatusti ollut helpoin tai järkevin mahdollinen ratkaisutapa, ja ratkaisun syntymiseen kuluikin aikaa. Kuitenkin se osoittaa, että he ymmärsivät ympyrän yhtälön ja osasivat soveltaa sitä. Tässä päättelyprosessissa GeoGebralla oli selkeästi merkitystä, etenkin kun ohjelma muutti yhtälöt keskipistemuotoon. Tällaista päättelyprosessia he tuskin olisivat pystyneet tekemään ilman GeoGebraa.

Myös toisella tunnilla GeoGebralla oli merkitystä oppilaiden päättelyssä, kuten seuraava keskustelu osoittaa. Oppilaat yrittävät puolittaa paraabelin ja tutkivat nyt GeoGebran työkaluja:

O2: Keskinormaali (osoittaa keskinormaalityökalua GeoGebrassa)

O3: Mikä on keskinormaali?

O2: Se leikkaa sen keskeltä, jonkun viivan. Kokeillaan sitä.

Oppilaat kokeilevat työkalua, mutta eivät ihan heti onnistu piirtämään keskinormaalia oikeaan paikkaan. Hetken kuluttua he kuitenkin onnistuvat puolittamaan paraabelin.

Sosiaalinen vuorovaikutus

Toisen tunnin videotarkastelussa esiintyi muutamia vuorovaikutustilanteita, joilla oli suurikin vaikutus oppilaiden päättelyprosessissa. Ensimmäisessä tilanteessa oppilas O3 haluaisi etsiä toisen tunnin tehtävän 1 (Liite 2) ratkaisulle tarkempia perusteluja, mutta O2 tyrmää tämän vaihtoehdon:

O3: Tähän vois kirjottaa miten on laskenu.

O2: Siinä ei kysytty sitä. Se vain piti määrittää. Me määritettiin se GeoGebran avulla.

Tässä oppilaat olivat siis määrittäneet paraabelin huipun GeoGebrasta saadun empiirisen havainnon avulla. Oppilaat eivät siis lähteneet itse etsimään mitään deduktiivista perustelua ratkaisulleen vaan tyytyivät havaintoonsa.

Hetken kuluttua käytiin opettajan ja oppilaiden välillä seuraava keskustelu:

Opettaja: Keksittekö jotain perusteluja siihen?

O2: Ei, voidaan miettiä niitä sit myöhemmin

Opettaja: Millä tavalla te saitte sen?

O2: Tän avulla (näyttää GeoGebraa)! En mää tiiä sit mitä mä tällä tein, niin neuvo mua.

Tämän jälkeen opettaja selittää, että kuvaajasta katsomalla ei saada tarkkaa arvoa paraabelin huipulle. O2 jatkaa, että he voivat myöhemmin katsoa perusteluja ja pyytää opettajaa häipymään. Kuitenkin videosta huomataan, että O2 ja O3 alkavat varsin pian opettajan lähdettyä miettiä tehtävän ratkaisua uudelleen tarkemmin perustellen.

Oppilaiden ratkaistessa tehtävää käytiin seuraava keskustelu:

O3: Pystyykö tällä jotenkin silleen semmosen, että se puolittaa ton paraabelin?

O2: Saat kans kokeilla (käyttää GeoGebraa), joku pitäis varmaan puolittaa.

Seuraavaksi oppilaat pohtivat paraabelin nollakohtien paikkaa ja niiden puolivälin etsimistä sekä käyrien leikkauspisteiden etsimistä:

O3: Pystyykö täältä laittaan ne pisteet -1 ja 0 jos kirjottaa tohon -1 ja 0 (tarkoittaa GeoGebran komentoriviä)

O2: Jos tässä on se, se on kolme, niinku tää. (Osoittaa nollakohtien etäisyyttä). Siis sillä tavalla kolme, yksi kaksi kolme (osoittaa pisteitä 0, 1 ja 2) niin sehän (paraabelin huippu) on tässä puolivälissä.

O3: Miten tällä pystyy piirtämään niitä pisteitä?

O2: Täältä uusi piste.

O3: Laita tohon kakkoskohtaa. Ja siihen... Sit laita tohon (0,-1) sitte ota se puolittajajutska, mikä se nyt oli, keskinormaali. Nyt valitse ne pisteet.

O2: Nyt se näyttää tollaselta.

O3: Pystyykö tuota nyt sitte sen kahden... yhteispisteet. Siellä on jossain semmoinen.

O2: Yhteispiste? Hei nyt mä valitsen ton niin toihan on se keskipiste. Eikö ookki?

O3: Niin, se on noitten leikkauspiste. Pystyykö sen jotenkin tuolta kattoon?

O2: Niin, mikä leikkauspiste.

O3: Noitten suorien tai mitä lie nyt onkaan. Missä se on?

O2: Musta se on jossain täällä (osoittaa vasenta ylänurkkaa). Ei ota tää... kahden... Nyt elikkä C... leikkauskohta on C.

O3: Se on (0,5; 4,5)

O2: No nii!

O3: Mehän onnistuttiin!

Tässä pitkähkössä keskustelussa on monta mielenkiintoista kohtaa. Suurimpana esille nousee tuki, jonka oppilaat saavat toisistaan. O3 tarvitsee selvästi apua GeoGebran käytössä, koska on käyttänyt sitä vähemmän kuin O2, kun taas O2 kysyy usein tukea omille matemaattisille ajatuksilleen, joista on varsin epävarma. Tämän keskustelun tarkempi tulkinta jätetään seuraavaan kappaleeseen.

POHDINTA

Tutkimuksemme mukaan GeoGebralla oli merkitystä oppilaiden päättelyprosesseissa, mutta ei niin suurta kuin ohjelma todellisuudessa mahdollistaisi. GeoGebran suurin anti tuntui olevan kuvien piirtämisessä ja hahmottamisessa sekä tehtävien tarkistamisessa, kuten oppilaat itsekin kommentoivat. GeoGebran hyödyntäminen oli kuitenkin suurimmaksi osaksi sellaista, että saman olisi voinut tehdä myös kynällä ja paperilla – ohjelma vain helpotti ja nopeutti tehtävien tekemistä. Kuitenkin huomasimme, että jo ensimmäisen tunnin aikana ohjelman tultua oppilaille tutummaksi (ks. Tulokset: GeoGebran merkitys päättelyprosesseissa (tehtävän 6 ratkaiseminen), ja erityisesti toisella tunnilla, oppilaat osasivat jo hyödyntää ohjelmaa selvästi paremmin. Oppilaat muistivat jo paremmin, mitä työkaluja geometrisessa deduktiossa on käytettävissä. GeoGebra auttoi oppilaita varsinkin niissä tilanteissa, joissa heillä oli vain hatara aavistus jostain asiasta, jolloin he pystyivät selaamaan GeoGebran valikoita ja etsimään tarvitsemansa työkalun. Ilman GeoGebraa oppilaiden olisi pitänyt luottaa täysin omaan muistiinsa asiassa. Tämä ilmenee myös Tulokset-luvun GeoGebra osioon liitetyssä keskustelussa. GeoGebran merkitys oppilaiden geometrisissa päättelyprosesseissa näyttäisi siis korreloivan hyvin selvästi käyttökokemuksen lisääntymisen kanssa.

Sosiaalinen vuorovaikutus nousi myös esille muutamassa tärkeässä roolissa. Ensinnäkin, edellisessä kappaleessa esitetyt keskustelut osoittavat, että oppilaat O2 ja O3 eivät itsenäisesti ruvenneet pohtimaan tehtävälle muita kuin empiirisiä ratkaisuja, mutta opettajan vaadittua tarkempia perusteluja, oppilaat saivat lopulta rakennettua tehtävälle varsin hyvän geometrisesti perustellun ratkaisun.

Tulokset GeoGebran sekä opettajan ja oppilaan välisestä vuorovaikutuksesta tukevat Lewin ja Son (2008) väitettä siitä, että opettajan rooli oli empiirisessä päättelyssä vähäinen, mutta tärkeä siirryttäessä empiirisestä havainnosta deduktiiviseen päättelyyn. Lisäksi Lewin ja Son tulos siitä, että GeoGebran kaltaisesta graafi-ohjelmasta oli hyötyä oppilaiden sekä empiirisessä että deduktiivisessa päättelyprosessissa on samassa linjassa meidän saamien tulosten kanssa. Tuloksemme poikkeaa tästä kuitenkin siltä osin, että ohjelmalla ei näyttänyt olevan suurta merkitystä tehtävän laskennalliseen ratkaisuun.

Oppilaiden keskinäisestä vuorovaikutuksesta voidaan lisäksi tehdä seuraavia huomioita: Monessakin kohtaa oppilaiden yhteistyöllä oli rohkaiseva vaikutus oppilaiden toimintaan. Parina työskennellessään he saivat esittää epävarmat ajatuksensa tehtävästä parille, joka sitten rohkaisi kysymyksen esittäjää ja esitti jatkoehdotuksia tehtävän ratkaisemiseksi. Tehtävää yksin ratkaistaessa tällaista tukea ei olisi ollut saatavilla ja monet epävarmat ajatukset olisivat saattaneet hautautua tuen puutteeseen.

Toinen esille noussut asia oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa oli se, että oppilaat täydensivät toistensa heikompia osaamisalueita omalla tiedollaan. Yhteistyöllä oppilaat siis pääsivät pidemmälle, kuin mihin kumpikaan oppilaista olisi yksin päässyt. Oppilaat myös saivat kokea yhdessä onnistumisen elämyksen, joka tehtävän ratkaiseminen tuotti. He olivat paljon tyytyväisempiä keksittyään tehtävään deduktiivisen perustelun verrattuna empiirisen havainnon onnistumiseen.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Huomasimme, että toisella GeoGebra tunnilla tehtävämonisteen toinen tehtävä osoittautui oppilaille liian hankalaksi ratkaistavaksi. Tehtävänanto oli liian laaja, johtuen useista kirjainvakioista. Tehtävää olisi pitänyt myös yksinkertaistaa huomattavasti. Yllättävää oli, että vaikka oppilaat eivät ennen olleet käyttäneet GeoGebraa, niin jo lyhyen ajan kuluttua käyttö sujui luontevasti. Oppilaat olivat innokkaita ratkaisemaan tutkivia tehtäviä. Ensimmäisellä tunnilla tuntui, että oppilaat olivat ymmärtäneet asian ja opettajille jäi positiivinen mielikuva tutkivan tunnin toteuttamisesta. Toisesta tunnista opettajille jäi vähän ristiriitaiset tunteet. Opettajan näkökulmasta katsottuna haastavaa tunneilla oli neuvoa oppilaita niin, että ei paljasta liian paljon tehtävän ratkaisua. Piti aina hyvin tarkkaan miettiä, miten oppilasta neuvoo, että tehtävän tutkiva luonne ei muutu. Ennen tuntia olisi hyvä valmistautua oppilaiden esittämiin kysymyksiin ja pohtia millaisia kysymyksiä olisi hyvä esittää.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Lew, H-C., & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Toim.), *Proc. of the joint meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, s. 313-320). Morelia, Meksiko: PME

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA JA TEHTÄVÄ MONISTE (1. TUNTI)

Tuntisuunnitelma

Hanna Männistö, Taru Nikkanen

- Oppilaat koneille ryhmissä/pareittain
- (tyhjä pohja: http://users.jyu.fi/~mahahkio/tyhja)

Tunnin kulku:

- Ohjeistus: **(n. 5 min)**
    - Kerrotaan lyhyesti tutkimuksesta, ei koe!
    - Lyhyt opastus
        - Ratkaisut (kerro miten ratkaisit) paperille, nimet papereihin, palautus
        - 1 tehtävä linkki, muut Webstartilla
        - vakioiden liu'utus ja muuttaminen, ruudukko
        - POHDISKELUN ja KOKEILEMISEN korostus, EI koe

- Tehtäviä **(60 min)**
    - tehtävä 1: http://users.jyu.fi/~mahahkio/ympyra
    - muut tehtävät Geogebra Webstart
    - erillinen moniste

- Kyselylomakkeiden täyttö **(10 min)**

- Koontivaihe **(15 min)**
    - Ympyrän yhtälö
    - Tehtävien ratkaisut muutamilta ryhmiltä
    - Sanallisesti tehtävä 3. Entä mahdollisimman suuri!?

Tehtävämoniste

Nimet:

1. Tehtävä tehdään osoitteessa http://users.jyu.fi/~mahahkio/ympyra
    a. Mitä vakiot a, b ja c kertovat ympyrästä?
    b. Muuta nyt ympyrää siten, että sen keskipiste on (2, 3) ja että se kulkee pisteen P=(1, -½) kautta. (selitä, miten ratkaisit)
    c. Muodosta yleisen ympyrän yhtälö, ts. ympyrän, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja säde r.
2. Käynnistä Geogebra Webstart.
    a. Piirrä nelikulmio, jonka kärjet ovat A=(3½, 3½), B=(3½, -1), C=(-1, 3½) ja D=(-1, -1).
    b. Mikä on nelikulmion sisälle piirretyn, mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö? (selitä myös, miten ratkaisit)
3. Piirrä mahdollisimman pieni ympyrä, joka kulkee pisteiden A=(2, 2) ja B=(5, 6) kautta. Mikä on ympyrän yhtälö? (muista myös selittää ratkaisutapa)
4. Selitä, MIKSI ympyrän yhtälö on sellainen, kuin sen tehtävässä 1 päättelit olevan!
5. Ympyrän Y keskipiste on (2, 3) ja säde $\sqrt{26}$, ja ympyrän W keskipiste on (-3, -2) ja säde 4. Y ja W leikkaavat kahdessa pisteessä. Nämä leikkauspisteet sekä ympyröiden keskipisteet muodostavat nelikulmion. Mikä on tämän nelikulmion pinta-ala? (selitä myös kuinka ratkaisit)
6. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ kehien lyhin etäisyys.

Vastaukset:

LIITE 2: TUNTISUUNNITELMA JA TEHTÄVÄMONISTE (2. TUNTI)

Tuntisuunnitelma

Alustus 5 min, tutkimusvaihe (tehtävämonisteet) 65 min, koontivaihe 20 min

Tehtävämoniste

Tutkivan oppimisen tunti – Paraabeli

1. *Määritä seuraavien paraabelien huippupisteiden koordinaatit (x_0, y_0):*
   a. $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$
   b. $g(x) = 3x^2 + x + 3$

   Kirjoita funktiot GeoGebran syöttökenttään muodossa f(x) = -2*x^2 + 2*x + 4 (paina lopuksi enter-näppäintä) jne. Eri toiminnot löytyvät yläreunan kuvakkeista. Huomaa pudotusvalikot kuvakkeiden oikeasta alanurkasta! Saat funktiot näkyviin/pois näkyvistä klikkaamalla funktion lausekkeen vasemmalla puolella olevaa pallukkaa.

2. *Määritä sitten yleisen paraabelin $h(x) = ax^2 + bx + c$ huippupisteen koordinaatit (x_0, y_0) vakioiden a, b ja c avulla ilmoitettuna*

.

3. *a) Tutki miten c vaikuttaa paraabelin huipun sijaintiin*

   b) Tutki miten b vaikuttaa paraabelin huipun sijaintiin

   Kirjoita syötekenttään aluksi parametrit a,b ja c:

   a = 1 (enter)

   b = 1

   c = 1

   Tämän jälkeen voit kirjoittaa funktion h(x) lausekkeen parametrimuodossa seuraavaan tapaan:

   h(x) = a*x^2 + b*x + c

   Klikkaamalla parametrien vasemmalla puolella olevia pallukoita, saat näkyviin liukusäätimet, joiden avulla on helppo tutkia parametrien vaikutusta funktioon.

   Kirjoita ratkaisuehdotuksesi paperille niin että kaikki laskut ja hahmotelmat voivat jäädä esiin. Voit ehdottaa useampia ratkaisuja! Kaikki ratkaisut kerätään tunnin lopuksi pois.

LIITE 3: KYSELYLOMAKE

Nimi:

Parin nimi:

1. Miten hyvin mielestäsi osaat käyttää Geogebraa? Oletko käyttänyt Geogebraa aiemmin?

2. Olivatko tutkimustehtävät liian helppoja/vaikeita?

3. Kuinka vakuuttunut olet ratkaisujesi oikeellisuudesta?

4. Millä tavalla Geogebra auttoi ratkaisuprosessissa? Vai auttoiko?

5. Millä tavalla parin kanssa keskustelu / opettajan vihjeet auttoivat?

6. Muita kommentteja tunnista / Geogebrasta:

DERIVAATAN LASKUSÄÄNTÖJÄ GEOGEBRAN AVULLA

Elina Liuha, Kimmo Luhtavaara ja Maria Tirronen

elina.s.liuha@jyu.fi, kimmo.e.luhtavaara@jyu.fi, maria.tirronen@gmail.com

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä tutkimuksessa selvitettiin, miten lukion toisen vuosikurssin opiskelijat tukeutuivat tutkivan matematiikan tunnilla GeoGebraan konstruoidessaan derivoimissääntöjä ja millaisia ratkaisuja he saivat. Tutkimme myös tietokoneavusteisen opetuksen vaikutusta opiskelijoiden motivaatioon matematiikan tunnilla. Olimme tehneet tuntia varten monisteen, jossa oli johdattelevia tehtäviä. Tehtävien teon apuna oppilailla oli tietokone ja GeoGebra-ohjelmalla tehdyt valmiit pohjat. Tutkimuksessa havaitsimme opiskelijoiden tukeutuvan paljon GeoGebraan. Erityisesti siitä näytti olevan opiskelijoille hyötyä tulosten tarkastamisessa. Tietokoneavusteinen opetus myös lisäsi opiskelijoiden motivaatiota tehdä tehtäviä.

JOHDANTO

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää tietokoneen ja varsinkin GeoGebra-ohjelman merkitystä tutkivan matematiikan opetuksessa. Tutkivassa matematiikassa opiskelijoille ei anneta suoraan kaavoja vaan pyritään siihen, että opiskelijat oivaltaisivat itse asioita sopivilla tehtävillä ja vihjeillä. Tutkiva matematiikan tunti koostuu usein alustusvaiheesta, tutkimusvaiheesta ja koontivaiheesta (Stein ym., 2008). Tutkivan matematiikan menetelmällä voidaan Sullivanin ym. (2006) mukaan saada kaikki oppilaat osallistumaan matemaattiseen ajatteluun. Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivan matematiikan menetelmän käyttäminen opetuksessa saisi oppilaat oppimaan paremmin.

Tietoyhteiskunnassa tietokoneet ovat saaneet yhä merkittävämmän roolin päivittäisessä elämässä. Tutkimuksemme tulokset antoivat viitteitä, että myös matematiikan opetuksessa olisi hyödyllistä käyttää tietokonetta, sillä sen käyttö kohotti opiskelijoiden motivaatiota tehdä tehtäviä. Myös Reisin (2010) mukaan tietokoneen käyttö matematiikan opetuksessa helpottaa opettajan työtä lisäämällä oppijoiden työskentelymotivaatiota.

MENETELMÄT

Tutkivan matematiikan tunti derivaatan laskusäännöistä

Tutkivan matematiikan tuntimme oli lukion pitkän matematiikan kaksoistunti derivaattakurssilla. Kurssi käydään lukion toisella luokalla. Tunnin tavoitteena oli, että opiskelijat ymmärtäisivät mistä derivoimissäännöt tulevat ja mikä on esimerkiksi funktion $f(x) = 2x$ derivaatta. Teimme opiskelijoille derivoimissääntöjä käsittelevän monisteen, joka on liitteenä 1, jota opiskelijat tekivät GeoGebran avulla. Olimme valmiiksi tehneet kaksi erilaista GeoGebra-pohjaa, joiden avulla opiskelijoiden piti muodostaa sääntöjä, joiden avulla funktioille saataisiin laskettua derivaatta.

Aineiston keruu

Tuntimme videoitiin ja opiskelijoiden vastauspaperit kerättiin heiltä tunnin jälkeen. Yksi videokamera kuvasi opettajaa ja toinen kamera kuvasi opiskelijaryhmää ja heidän toimintaansa tietokoneella. Lisäksi käytössämme oli sekä opettajalla että opiskelijoilla mikrofoni äänen tallentamista varten.

Aineiston analyysi

Keskityimme videoiden analysoinnissa kahteen asiaan. Olimme kiinnostuneita siitä, kuinka paljon opiskelijat tukeutuivat GeoGebraan päättelyssään ja kuinka hyvin he onnistuivat päättelyssään ts. saavuttivatko he oikeita tuloksia. Lisäksi tutkimme opiskelijoiden työskentelymotivaatiota opiskeltaessa tietokoneavusteisesti.

Tutkimusotteemme oli laadullinen. Keskityimme havainnoimaan mahdollisimman tarkasti kahden opiskelijan, Teemun ja Villen (nimet vaihdettu), toimintaa tutkivan matematiikan tunnin aikana. Poimimme videosta tutkimuksemme kannalta oleellisia kohtia, joiden avulla pyrimme vastaamaan tutkimuskysymyksiimme.

TULOKSET

GeoGebraan tukeutuminen päättelyssä

Opiskelijat tukeutuivat vahvasti GeoGebraan. Ensimmäisessä tehtävässä Teemu ja Ville katsoivat kuvasta suoraan derivaatan arvoja ja taulukoivat ne vihkoon. Yleistä sääntöä etsiessään he päättelivät säännön ilman GeoGebraa. Tämän jälkeen he varmistivat päätelmänsä vielä GeoGebralla. Teemu selitti Viuhdille näyttäen samalla GeoGebralla:

> ”Siis katoppa nytten aina kun mennään yks x eteenpäin, se kulmakerroin nousee kahella.”

Lopuissa tehtävissä Teemu ja Ville päättelivät derivoimissäännöt tarkastelemalla kulmakertoimia GeoGebra-ikkunassa. Teemu ja Ville päättelivät derivoimissäännöt oikein, mutta heillä oli ongelmia matemaattisen esitystavan löytämisessä. Tehtävässä, jossa piti määrittää vakiofunktion derivaatta, syntyi mielenkiintoista keskustelua siitä, onko derivaatta nolla vai eikö sitä ole olemassa.

Teemu:	Se on suora, sillä ei ole derivaattaa… Hei onks tämmösessä derivaattaa ollenkaan? Eiks se oo nolla tässä?
Opettaja 1:	Se teidän pitää selvittää. Miten derivaatta katsotaan geometrisesti?
Teemu:	Se on ihan samanlainen tollanen poikkiviiva. Haluuk sä jeesaa?
Opettaja 2:	Mikä on derivaatta?
Teemu:	Eik se oo se joku tangentin kulmakerroin? Mikä tässä on nyt se tangentti?
Opettaja 2:	Se itse asiassa sekottuu nyt vähän tällä hetkellä.

Teemu:	Eik se oo nolla?
Ville:	Onko se miinus yks?
Teemu:	Ei ku se x on miinus yks ja se derivaatta on nolla. Eli se on nolla se derivaatta?
Opettaja 2:	Joo, eli vaaleansinisellä teillä on …
Teemu:	Eli se on nolla se derivaatta.
Ville:	Eikä oo!

Opettajat yrittävät johdatella Teemua ja Villeä ajattelemaan asiaa sitä kautta, mikä derivaatta on geometrisesti. He keskustelevat ja yrittävät perustella asiaa toisilleen käyttäen apuna GeoGebraa.

Työskentelymotivaatio

Opiskelijat olivat selvästi innoissaan tietokonetyöskentelystä. Ensimmäisen GeoGebra-sovelluksen ilmestyessä ruudulle Teemu kommentoi innostuneesti:

> ”No niin… GeoGebra… Ou-vaudevau! Tää onkin tosi cool.”

Myöhemmin, ratkaistuaan useita tehtäviä, Teemu totesi:

> ”Siis tää on sillei hyvä et me tehää näitä… mut täs on se hauska et ei opi mitään sillee.”

Kuitenkin Teemu ja Ville olivat keksineet useaan tehtävään oikean ratkaisun ja heidän päätelmänsä olivat päteviä.

Yleisesti Teemu ja Ville vaikuttivat motivoituneilta työskentelemään. Vaikka keskittyminen herpaantuikin useaan otteeseen ja he saattoivat keskustella aiheen vierestä tai vierailla aiheeseen liittymättömillä Internet-sivuilla, he kuitenkin aina palasivat tehtävien pariin.

POHDINTA

Tietokoneen käyttö matematiikan opetuksessa on kokemuksiemme mukaan vielä vähäistä. Siksi tietokoneavusteisten oppimisympäristöjen käyttö matematiikassa voi tuoda kaivattua vaihtelua. Toisaalta, koska opiskelijat ovat usein tottuneita tietokoneenkäyttäjiä, tietotekniikan hyödyntämismahdollisuus myös matematiikan opiskelussa saattaa olla motivoivaa.

Tulostemme mukaan opiskelijat olivat innostuneita työskentelemään GeoGebralla. GeoGebran käyttö voikin auttaa herättämään opiskelijoiden mielenkiinnon aihetta kohtaan ja siten helpottaa opettajan työtä. Tähän on päätynyt myös Reis (2010).

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Hähkiöniemen (2010) mukaan opettajan tulee tutkivalla tunnilla välttää antamasta liikaa neuvoja. Raja sopivan ja liiallisen neuvomisen välillä on kuitenkin vaikea hahmottaa. Olisi hyvä, jos pelkkien sanallisten ohjeiden lisäksi näytettäisiin esimerkki jo toteutetusta tutkivasta tunnista (video), sillä idean konstruoiminen pelkkien sanallisten ohjeiden avulla voi olla hankalaa.

Kuten Hähkiöniemikin (2010) on todennut, opiskelijat saattavat vastustaa matematiikan opiskelua tutkivalla tavalla. Eräällä tutkivalla tunnilla muuan opiskelija totesi: ”Kaikki hauska viedään, ku ei saa kirjaakaan käyttää.” Tämä on tietysti ymmärrettävää, jos oppilaiden koko peruskouluhistorian ajan on tieto tarjottu valmiina. Tutkivien tuntien toteuttamiseen kaivattaisiin siis myös neuvoja siihen, miten oppilaita saisi motivoitua uuteen opiskelutapaan.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenberger, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 117-143.

Reis, Z. A. (2010). Computer supported mathematics with Geogebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 9*, 1449-1455.

LIITE1: OPISKELIJOIDEN TEHTÄVÄMONISTE

Derivaatan laskusäännöt

1. Mene sivulle http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/derivaatta1.html. Kuvassa näkyvä funktio on $f(x) = x^2$. Vaaleansinisellä on piirretty funktion f tangentti kohdassa A. Halutessasi voit vaihtaa funktiota kirjoittamalla uuden funktion syöttökenttään (esim. f(x)=x^3, mikä tarkoittaa funktiota $f(x) = x^3$)

Käytä seuraavissa tehtävissä apuna tehtävän 1 nettisivua.

2. Mikä on funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa
   a) $x = 0$
   b) $x = 1$
   c) $x = 2$
   d) $x = -2$

3. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x^2$ derivaatta missä tahansa kohdassa *x*.

4. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x$ derivaatta missä tahansa kohdassa *x*. Perustele vastauksesi!

5. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun
   a) $f(x) = 3$
   b) $f(x) = -1$
   c) $f(x) = a$ (*a* on vakio)
   Perustele vastauksesi!

6. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun
   a) $f(x) = 2x$
   b) $f(x) = -4x$
   c) $f(x) = ax$ (*a* on vakio)
   Perustele vastauksesi!

7. Mene sivulle http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/derivaatta2.html. Mikä yhteys pisteen T uralla ja derivaatalla näyttäisi olevan? Voit kokeilla kirjoittamalla syöttökenttään säännön, jolla derivaatta saadaan kohdassa *x*. Kirjoita sääntö muodossa *g*(*x*) = *sääntö* (esim. *g*(*x*) = 5*x*^2).

Käytä seuraavissa tehtävissä apuna tehtävän 7 nettisivua.

8. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun
   a) $f(x) = x^3$
   b) $f(x) = x^4$
   c) $f(x) = x^n$ (*n* on positiivinen kokonaisluku)

9. *Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun
   a) $f(x) = 5x^2$
   b) $f(x) = -3x^3$
   c) $f(x) = 2x^4$
   d) $f(x) = ax^n$ (*a* on vakio ja *n* on positiivinen kokonaisluku)

OPETTAJAN PUHEEN MUODOT EKSPONENTTIFUNKTION DERIVAATTA -TUNNILLA

Ville Berg ja Jarkko Kairisvuo

ville.berg@jyu.fi, jarkko.kairisvuo@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tässä tutkimuksessa seurattiin lukion pitkän matematiikan kaksoistuntia, jossa toteutettiin tutkivan matematiikan opetusta ensimmäisellä tunnilla ja toisella tunnilla tarkasteltiin esimerkkejä sekä tehtiin aiheeseen liittyviä tehtäviä. Tunnit toteutettiin luokassa, missä oli käytössä tietokoneet ja GeoGebra-ohjelma, jota käytettiin tutkimusvaiheessa. Kaksoistunti videoitiin ja siitä analysoitiin opettajan puheen muotoja. Tutkimus näytti suuntaa sille, että tutkivassa matematiikassa on enemmän dialogista keskustelua kuin perinteisemmässä opetuksessa.

JOHDANTO

Tutkimuksen tavoitteena oli tutkivan matematiikan opetuksen kehittäminen. Tarkoituksena oli tutkia opettajan puheen muotoja tutkivan matematiikan opetuksen eri vaiheissa. Tutkimus on merkityksellinen, koska siinä tarkastellaan kahta erilaista opetustapaa. Opettajan puheen huomattiin niissä eroavan toisistaan.

Hähkiöniemen (2010) mukaan tutkivassa matematiikassa oppilaat oppivat tutkiessaan jotain matemaattista ongelmaa, kehittäessään ja perustellessaan ratkaisuideoita sekä kehitellessään muiden oppilaiden esittämiä matemaattisia ideoita. Opettajan tehtävänä on auttaa oppilaita kehittämään ideoitaan kohti tunnettuja käsitteitä ja menetelmiä, mutta hän ei anna valmiita ratkaisuja tai esimerkkejä. Steinin ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tunti muodostuu yleensä alustusvaiheesta, tutkimusvaiheesta ja koontivaiheesta. Tätä pohjaa käytettiin myös tässä tutkimuksessa analysoimallamme tutkivan matematiikan tunnilla.

Viiri ja Saari (2006) ovat jakaneet opettajan puheen muodot oppitunnilla neljään luokkaan, jotka ovat opettajan esitys (TP), opettajan ohjaama keskustelu, oppilaskeskustelu (PD) ja muu keskustelu (O). Opettajan ohjaama keskustelu voidaan lisäksi jakaa autoritaariseen (AD) ja dialogiseen (DD).

Opettajan esitys tarkoittaa luentotyylistä esitystä, jossa opettaja ei esitä oppilaille kysymyksiä. Opettajan ohjaama keskustelu on opettajan ja oppilaan välistä keskustelua. Se on autoritääristä, jos opettaja esittää kysymyksiä, joihin on vain yksi oikea vastaus, ja opettaja jatkaa keskustelua annetusta vastauksesta. Dialogisessa keskustelussa opettajan antama palaute ohjaa uusien asioiden pohdintaan tai aiheen laajennukseen. Oppilaskeskustelu on opettajan ohjaamaa oppilaiden keskinäistä keskustelua.

MENETELMÄT

Tutkivan matematiikan tunti aiheesta eksponenttifunktion derivaatta

Tunti pidettiin lukion pitkän matematiikan 8. kurssin ryhmälle. Sen tavoitteena oli, että oppilaat oppivat eksponenttifunktion derivaatan.

Kaksoistunti oli jaoteltu kahteen 45 minuutin osioon: tutkivan matematiikan osioon ja työskentelyosioon. Tutkivan matematiikan osio koostui alustusvaiheesta, tutkimusvaiheesta ja koontivaiheesta. Alustusvaiheessa kerrottiin derivaattafunktion määritelmä. Tutkimusvaiheessa oppilaat tekivät GeoGebra-ohjelmalla tehtäviä (ks. Liite 1) pienissä ryhmissä. Tehtävien tarkoituksena oli, että oppilaat hahmottavat yleisen eksponenttifunktion derivaatan ja keksivät eksponenttifunktion e^x derivaatan. Koontivaiheessa käsiteltiin oikeat ratkaisut tehtäviin.

Työskentelyosiossa käsiteltiin eksponenttifunktion derivaatan yleinen muoto, käsiteltiin muutama esimerkki ja tehtiin niihin liittyviä tehtäviä.

Aineiston keruu

Aineistoa kerättiin tehtävänratkaisulomakkeen muodossa, jotka kerättiin oppilailta tutkivan osion lopussa pois. Lisäksi tunti videoitiin kahdella kameralla. Toinen kamera seurasi opettajaa ja tallensi opettajan puheen langattoman mikrofonin välityksellä. Toinen kamera kuvasi yhtä oppilasryhmää.

Aineiston analyysi

Aineistosta analysoimme opettajan toimintaa seurannutta kameraa ja luokittelimme sen avulla opettajan puheen muotoja käyttämällä Viirin ja Saaren (2006) luokittelua.

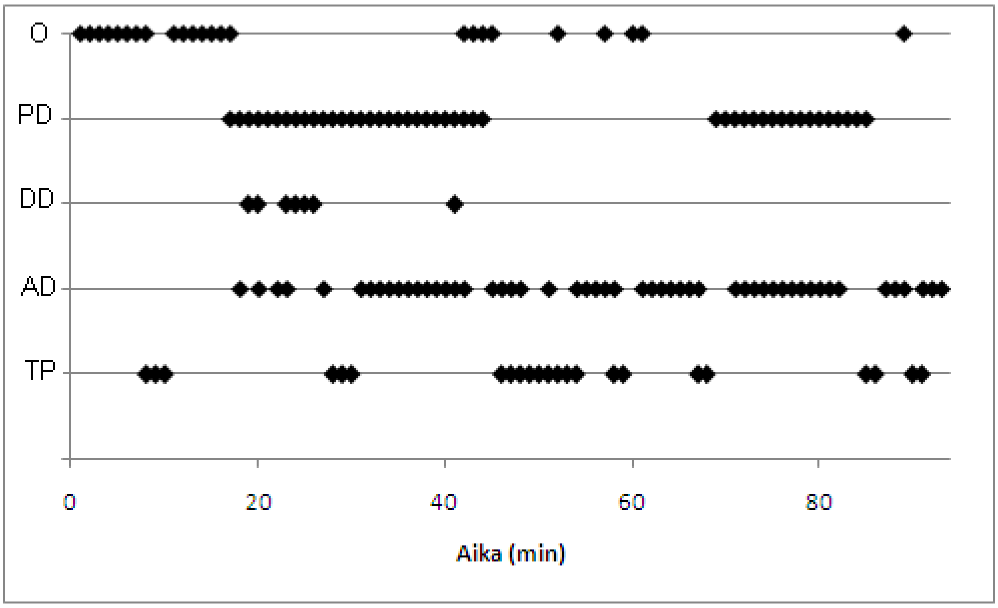
TULOKSET

Kuviossa 1 on esitetty puheen muotojen luokittelun tulokset. Liitteessä 2 on taulukoitu Kuvion 1 data ja siihen on sisällytetty tunnin rakenne. Erona Viirin ja Saaren (2006) tutkimukseen tulkitsimme jaottelun niin, että samalla, kun on oppilaiden välistä keskustelua, niin opettajan käymät keskustelut oppilaiden kanssa olivat dialogisia tai autoritaarisia.

Alustusvaiheessa oppitunnin puhe oli pelkästään opettajan esitystä. Tämän jälkeisestä tutkimusvaiheesta meni jonkin verran aikaa tietokoneiden säätelyyn ja tehtävämonisteiden jakoon, ennen kuin oppilaat varsinaisesti pääsivät tekemään tehtäviä.

Tutkimusvaiheessa opettajan puhe oli sekä autoritaarista, että dialogista. Tutkimusvaiheen keskellä oli hetken opettajan esitystä kun hän selitti tarkemmin derivaattafunktion määritelmän ideaa, koska tehtävät vaikuttivat liian vaikeilta. Tämän jälkeen opettajan puhe painottui autoritaariseksi tutkimusvaiheen loppuajaksi. Tämä johtui osittain siitä syystä, että tutkimusvaiheen alussa oppilaita kannustettiin keksimään omia ratkaisujaan, mutta koska tuntui siltä, että oppilaat eivät saaneet tehtäviä ratkaistua, niin opettaja joutui antamaan suorempia neuvoja.

Työskentelyosiossa opettajan puhe oli vain autoritaarista tai opettajan esitystä.



Kuvio 1. Puheen muodot kaksoistunnilla.

Opettajan esitykseksi luokiteltiin esimerkiksi seuraava ote alustusvaiheesta:

> ”Siihen liittyen kerrataan derivaattafunktion määritelmää. Elikkä tässä, kun käyttää sitä h-muotoa, niin se on tommonen, ku raja-arvo h menee nollaan f(x+h) – f(x) jaettuna h:lla. Ja tota… ja sitten ku tätäkin määritelmää käyttää, niin pitää kattoa… pitää muistaa, että se on se määritelty… määritelty esimerkiksi tässäkin, niinku esimerkiksi toi eksponenttifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, ja sen takia tää soveltuu sen käyttöön hyvin.”

Tutkimusvaiheessa käytiin seuraava keskustelu kun oppilaat vertasivat funktiota e^x sen derivaattaan:

Opettaja:	Kun sitä vertaa tuohon a:han, niin, mitä voidaan huomata?
Oppilas 1:	kulmakerroin on y:n piste
Oppilas 2:	Onks toi se sama
Opettaja:	Niin siis… Siis niinku toi on se sama. Se on se, mikä siitä piti huomata. Eli miten sen voi yleistää?
Oppilas 3:	Hei meneeks toi näin? Tuo on sama ku tuo.
Opettaja:	Se on se. Se on siis juurikin se.

Tämä tulkittiin autoritaariseksi keskusteluksi, koska opettajan kyseleminen on arvioivaa ja kysymyksiin on yksi oikea vastaus.

Kun tutkittiin funktion 2^x derivaattaa, niin opettaja ja oppilas kävivät suraavan keskustelun:

Oppilas 1:	Hei pitääks meidän vaan piirtää tää mikä tässä.

Opettaja: Sitä ei saa suoraan sitä piirtämällä. Eli teidän pitäisi sen a:n kautta kulkevan tangentin kautta hahmottaa sitä derivaattafunktiota.

Tämän katsottiin olevan dialogista, sillä opettajan palaute johtaa aiheen laajennukseen samanlaisen kuvion piirtämisestä derivaattafunktion kuvaajan hahmottamiseen.

Oppilaiden väliseksi keskusteluksi luokiteltiin esimerkiksi seuraava ote tutkimusvaiheesta:

Oppilas 1: Derivaattafunktio?

Oppilas 2: Mikä se derivaatta on tässä sit on?

Oppilas 1: Siis niinku tämän funktion derivaattafunktio pitäisi piirtää.

Opettaja kierteli tunnilla ja tämä keskustelu sattui kuulumaan hänellä olevasta mikrofonista, kun opettaja ohjasi keskustelua luokassa kiertelemällä. Tehtävän ratkaisemiseksi oppilailta odotettiin derivaattafunktion määritelmän osaamista ja tässä tapauksessa kyseisillä oppilailla oli käytännössä olemattomat mahdollisuudet saada tehtävä ratkaistua.

POHDINTA

Tämän tutkimuksen perusteella ei voida sanoa, edistääkö tutkiva matematiikka oppilaiden oppimista, vaikka keskustelun siinä huomattiin olevan dialogisempaa. Jos tutkivan matematiikan tunteja pidettäisiin useita peräkkäin samalle ryhmälle, nähtäisiin paremmin, millaisia tuloksia sillä saadaan. Oppilaat eivät yhtä lukuun ottamatta oppineet vielä tutkimusvaiheessa juuri mitään, vaan oppiminen tapahtui vasta koontivaiheessa. Näin ollen tutkivan matematiikan tavoite ei tällä tunnilla toteutunut. Tämä johtui kuitenkin todennäköisesti siitä, että tutkimustehtävät olivat ylimitoitettuja ryhmän osaamisen suhteen. Tutkivassa matematiikassa on siis tärkeää, että annetut ongelmat ovat sopivan tasoisia oppilaille, tai muuten koko tunnin tarkoitus voi mennä hukkaan. Tämä taas olisi mahdollistanut tunnin keskustelun dialogisemmaksi.

Ainakin tämän tunnin perusteella näyttää siltä, että tutkivan matematiikan tunnissa on enemmän dialogista keskustelua kuin perinteisessä tunnissa. Tämä näkyy siitä, että tunnin työskentelyosio oli toteutettu perinteisemmin eikä siinä esiintynyt dialogista keskustelua opettajan ja oppilaiden välillä.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Kokemuksena tutkivan matematiikan tunnin työstäminen oli työläämpää kuin perinteistä kaavaa noudattavan matematiikan tunnin suunnittelu. Tehtävien tason arviointia helpottaisi, jos tuntisi ryhmän paremmin.

Kokemuksena tutkiva matematiikka on ihan hyvä juttu, ja mikäli sen saisi onnistumaan, niin oppiminen olisi oppilaille melko varmasti mielekkäämpää kuin perinteinen oppiminen.

Tutkivaa matematiikkaa pitäisi ehdottomasti kehittää jopa niin paljon, että sillä voisi toteuttaa kokonaisia matematiikan kursseja.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

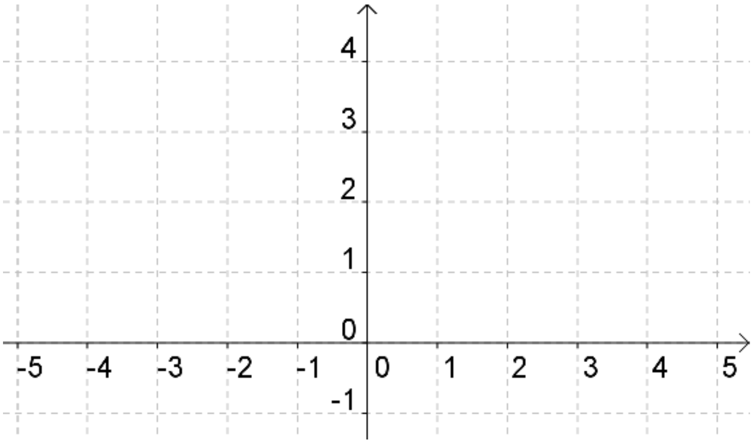
Viiri, J., & Saari, H. (2006). Teacher talk patterns in science lessons: Use in teacher education. *Journal of Science Teacher Education, 17*, 347–365.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA, MAA8 EKSPONENTTIFUNKTION DERIVAATTA

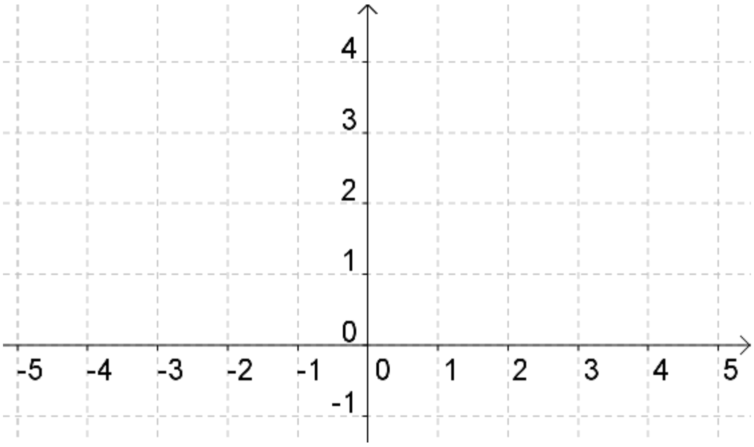
1. Avaa GeoGebra-pohja sivulta http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/e1

Kuvaaja on muodossa $f(x) = a^x$, missä a:ta pystyt muuttamaan hiirellä ja näppäimistön nuolinäppäimillä. Lisäksi kuvaajaan on lisätty liikuteltava piste A ja sen kautta kulkeva tangentti funktiolle f.

a) Hahmottele funktion $f(x) = 2^x$ derivaattafunktion f' kuvaaja



b) Hahmottele funktion $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ derivaattafunktion f' kuvaaja



2. http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/e2 $f(x) = e^x$:n kuvaajalla on piste A jolle on piirretty tangentti. Liikuta nyt A:ta. Päättele sen avulla e^x:n derivaatta.

3. Määritä e^x:n derivaatta kynä-paperi menetelmällä määritelmää käyttäen kun tiedetään, että $\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$

4. Tutki GeoGebralla raja-arvoa $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Miten se liittyy neperin lukuun e?

LIITE 2: TUNNIN RAKENNE JA PUHEEN MUODOT

Aika					5				10					15					20					25					30					35					40				
OP	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x																									x	x	x
PD																x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
DD																		x	x			x			x															x			
AD																	x		x		x	x	x	x		x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
TP							x	x	x																		x	x	x														
	Aamunavaus						Alustus			Tutkimusvaihe																																	

Aika	45					50					55					60					65					70					75					80				
OP	x							x					x			x	x																							
PD																									x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
DD																																								
AD	x	x	x	x			x			x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
TP		x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x								x	x																
	Koontivaihe																Esimerkki								Laskuvaihe															

Aika	85					90			
OP					x				
PD	x								
DD									
AD			x	x	x		x	x	x
TP	x	x				x	x		
	Teoriaa/Esimer-kit					Laskemista			

OPETTAJAN VAIKUTUS OPPILAIDEN TAPAAN TUTKIA TRIGONOMETRISIA FUNKTIOITA YKSIKKÖYMPYRÄN AVULLA

Ilkka Siiki ja Juha Väätäinen

ilkka.siiki@jyu.fi, juha.vaatainen@jyu.fi

Opettajankoulutuslaitos, Jyväskylän yliopisto

Tutkimme opettajan vaikutusta oppilaiden tapaan tutkia ongelmia. Tutkimus toteutettiin lukion pitkän matematiikan 9-kurssin (Trigonometria ja lukujonot) yhdellä tunnilla. Tutkimuksessa oppilaat ratkaisivat trigonometrisiin funktioihin liittyviä tehtäviä GeoGebra-ohjelman avulla. Tunnilla kuvattiin opettajan työskentelyä. Videoita analysoimalla jaottelimme erilaisia tapoja, joilla opettaja ohjasi oppilaita tunnin aikana ja näiden tapojen vaikutusta oppilaiden toimintaan. Pääasiallisesti opettajan toiminta tuki oppilaiden omaa tekemistä ja ajattelua. Joissakin tapauksissa opettaja ohjeisti oppilaat vaihtamaan lähestymistapaansa hieman.

JOHDANTO

Tutkimuksemme tavoitteena on tutkia opettajan tapoja ohjata oppilaiden itsenäistä tutkimista ja tämän ohjauksen vaikutusta oppilaiden tapaan lähestyä ongelmaa. Tutkimuksella on suuri merkitys jatkotutkimuksen pohjana, jos halutaan kehittää tehokkaampia tapoja tukea oppilaiden omaa oppimista.

Tutkiva matematiikka voidaan määritellä monin tavoin. Yleisesti tavoitteena on ongelmalähtöisesti tukea oppilaiden omaa aktiivisuutta. Stein ym. (2008) mukaan tutkivan matematiikan tunti koostuu (1) alustusvaiheesta, jossa opettaja kertoo pohjatiedot ja antaa tehtävät, (2) tutkimusvaiheesta, jossa oppilaat itsenäisesti, yleensä pareittain tai pienissä ryhmissä, tutkivat ongelmia ja tutustuvat asiaan, sekä (3) koontivaiheesta, jossa jälleen opettajajohtoisesti kasataan yhteen tunnin anti ja opitut asiat.

Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) määritelmässä tutkivalle matematiikalle, korostuu oppilaiden luovuus ja uusien menetelmien käyttö. Opettajan roolissa he korostavat opiskelijoiden aktivointia ja huomion kiinnittämistä oleellisiin asioihin. Myös perustelemisen taitojen sekä matemaattisen ajattelun kehittäminen ja tukeminen on heidän mielestään tärkeää.

Hähkiöniemen (2010) mukaan oppilaille ei tule antaa valmiita vastauksia, mutta opettajan tulee olla valmistautunut ohjeistamaan oppilaita oikean suunnan löytämisessä. Tämä on juuri tutkimuksemme tavoite: tutkia onnistuuko opettaja tässä suunnan näyttämisen ja suoran vastauksen antamisen erottamisessa.

MENETELMÄT

Tutkivan matematiikan tunti: Sini ja kosini yksikköympyrässä

Annoimme lukion toisen vuoden opiskelijoille tehtäväksi tarkastella sinin ja kosinin määritelmiä ja niiden käyttöä yksikköympyrän avulla Trigonometria ja lukujonot -kurssilla. Tavoitteena oli saada sinin ja kosinin määritelmät ja yksikköympyrän käyttö opittua perusteellisesti. Oppilaille annettiin suunnittelemamme moniste, jossa oli aluksi määritelmät ja erilaisia tehtäviä. Tehtäviä tehtiin pareittain. Tehtävät koostuivat enimmäkseen sinin ja kosinin arvojen päättelemisestä ja trigonometristen yhtälöiden virheellisyyden tai oikeellisuuden toteamisesta. Jokaisella oppilasparilla oli käytössä tietokone, GeoGebra-ohjelma ja siihen valmiiksi luodut kaksi eri tiedostoa sekä suttupaperi. Laskimen käyttö oli sallittua. Oppilaille annettu tehtäväpaperi on liitteessä 1 ja linkit GeoGebra-tiedostoihin liitteinä 2 ja 3.

Aineiston keruu

Oppilaat tekivät ratkaisunsa tehtäväpaperiin tai annettuun suttupaperiin, jotka kerättiin tunnin jälkeen tarkasteltavaksi. Opettajalle oli annettu mikrofoni ja yksi videokamera seurasi opettajaa koko tunnin ajan. Tutkimme myös oppilaiden tietokoneista otettua ruudunkaappausta ja mikrofonilla tallennettua ääntä.

Aineiston analyysi

Katsoimme opettajaa seuraavaa videokameraa ja tulkitsimme kuinka opettaja saa tuettua oppilaan lähestymistapaa ja miten opettaja toimii oppilaan kanssa.

Aineiston analysointia ja lajittelua varten loimme oman luokittelun. Jaoimme opettajan lähestymistavat neljään luokkaan. Luokat eivät olleet toisensa poissulkevia, ja sama tilanne saattoi sopia useampaankin luokkaan.

TULOKSET

Yleisin opettajan ohjaustapa oli kehottaa oppilaita laajentamaan tai yleistämään yksittäistapauksia (7 kertaa). Seuraavaksi yleisin oli oppilaiden lähestymistavan muutokseen tähtäävä ohjeistus (3 kertaa). Näissä tilanteissa opettaja kehotti ja ohjeisti oppilaita kokeilemaan jotain muuta lähestymistapaa, esimerkiksi siirtymään laskimella kokeilemisesta GeoGebralla kokeilemiseen. Yhtä yleistä edellisen kanssa oli oppilaiden tukeminen kehumalla heidän ratkaisuaan ja toteamalla sen oikeellisuus. Yhdessä tapauksessa opettaja antoi suoraan oikean vastauksen. Tilannetta tosin edelsi viiden minuutin keskustelu, jossa opettaja yritti muitakin tapoja.

Kaikissa tapauksissa opettajan toiminta tuki oppilaiden työskentelyä, kahdeksassa tapauksessa opettaja tuki oppilaiden lähestymistapaa ja neljässä tapauksessa hän ohjeisti oppilaita vaihtamaan tapaa. Myös oppilaat, joita opettaja neuvoi vaihtamaan lähestymistapaansa, hyötyivät tästä.

Yleisin opettajan käyttämä tapa oli siis ohjata oppilaita yleistämään jokin keksimänsä erikoistapaus tai sääntö laajemmaksi. Seuraavana näyte keskustelusta, jossa ratkaisuja löydetään enemmän (tehtävä 2b):

Oppilas1: x on nolla tai 180, eiku… Niin, koska se kulma on 180

Opettaja: Onkos siinä muita ratkaisuja sitten?

Oppilas1: Niin, jos se on vielä niiku monta kierrosta, jos se on vaikka 360 tai 540

Tässä opettaja sai yksinkertaisella kysymyksellä oppilaat keksimään useita lisäratkaisuja ongelmaan.

Opettajan aktiivinen tunnin seuraaminen ja oppilaiden ohjaaminen helpotti oppilaiden työskentelyä ja ohjasi sitä oikeaan suuntaan. Seuraavassa näyte, jossa opettajan ohjeistus sain aikaan muutoksen oppilaiden työskentelytavassa, kun oppilaat ovat muodostaneet puutteellisen vastauksen tehtävässä 2c:

Opettaja: Mitenkäs tuo?

Oppilas2: No ohan se.

Opettaja: Hetkinen, ootteko te käyttäny tuota (osoittaa GeoGebra-ikkunaa)?

Oppilas2: 45 ja tulee tommonen ja cos (–45) tulee ihan sama (laskee cos 45 ja cos (–45) laskimella). Kyllä.

Opettaja: No entäs sitten, pystyykös se olla jollaki muulla kulmalla, vaikka 60:llä?

Oppilas2: Voi ehkä olla, mutta ei me jaksettu kaikkia tarkistaa (aloittaa laskimen näppäilyn)…

Opettaja: Eikös se oo hankala kattoo tosta laskimesta kun tuolla vois kattomaan suoraan? Kato vaan se koordinaatti piste..?

Oppilas2: Kuudella kympilläkin.

Opettaja: Entäs 61:llä? Tossa pystys kattomaan yhtä nuolinäppäintä käyttämällä…

Oppilas2: Ai pystyy vai…

Tämän jälkeen Oppilas2 alkoi parinsa kanssa tarkastella GeoGebra-tiedostoa, jossa oli kaksi asetettavaa kulmaa. He asettivat mielivaltaisen kulman ja vastaavan negatiivisen kulman. Opettajan avustuksella oppilaat osasivat lukea molempien kulmien kosinien arvot. Muuttamalla kulmia, oppilaat huomasivat, että $\cos x = \cos(-x)$ kaikilla *x:*n arvoilla, jota he eivät olisi voineet huomata yhtä helposti laskimella.

POHDINTA

Saamiemme tulosten pohjalta voimme todeta, että opettajan aktiivinen rooli tunnilla auttoi ja tuki oppilaita laajentamaan havaintojaan ja keksimään uusia asioita ja lähestymistapoja ongelmaan. Toisaalta liian innokas auttaminen saattaa katkaista oppilaiden oman ajattelun ja siirtää heidät ajattelemaan opettajan tavalla, mikä myös vähentää oppilaiden motivaatiota. Sopivalla neuvomisella ylläpidetään ja kehitetään oppilaan motivaatiota ja omaa oppimista. Sopivan ja liian innokkaan neuvomisen raja riippuu monesta tekijästä, esimerkiksi opetustilanteesta ja oppilaista.

Vaikka oppilaat olivat hieman ennakkoluuloisia GeoGebraa kohtaan, niin silti se oli helpottava tekijä kokeilemiseen, niin kuin edellisestä opetustapahtumasta voi huomata. Yleisesti oppilaiden rohkaiseminen ja kannustaminen kokeilemaan eri asioita on tärkeä osa opetusta, jonka tutkimuksemmekin osoitti.

KOKEMUKSIA JA KEHITYSIDEOITA

Laskimen käytön sallimista tai kieltämistä olisi hyvä pohtia ennen tuntia. Oppilaat selkeästi luottivat enemmän laskimeen kuin GeoGebraan, mikä tuli meille yllätyksenä.

Lähteet

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

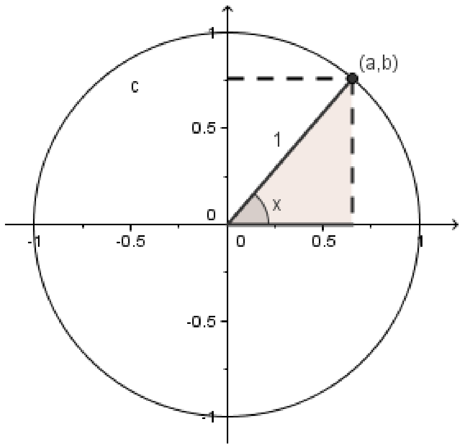
Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P.E. Hirvonen, & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

LIITE 1: TUNTISUUNNITELMA

Nimet:____

Määritelmä:



Olkoon kulman x kehäpiste (a,b). Tällöin kulman x sini ja kosini ovat:

cos x = a sin x =b

Muista, että voit myös käyttää suttupaperia tai laskinta apuna seuraavissa tehtävissä.

JÄTÄ KAIKKI RATKAISUYRITYKSET ESILLE JA MERKITSE VASTAUS JOMPAANKUMPAAN PAPERIIN!

Lämmittelytehtävä:

a) sin 503^{o} = b) $\cos\frac{\pi}{2}$ = c)sin (–680^{o}) =

Seuraavissa tehtävissä käytä apuna tiedostoa GeoGebra tiedostoa: yksikulma.ggb

http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yksikulma

1.
   a) Milloin $\sin x$ saa positiivisia arvoja?
   b) Millä x:n arvoilla $\cos x$ on negatiivinen?

2.
   a) Millä kulmalla cos x = 0,5? Onko ehdon toteuttavia kulmia enemmän?
   b) Mikä muuttujan x:n arvo on yhtälön sin x = 0 ratkaisu? Jos ratkaisuja löytyy enemmän, minkälaista sääntöä ratkaisut noudattavat?
   c) Millä kulmilla $\cos x = \cos(-x)$
   d) Mille kulmille $\sin x = \cos x$?

Seuraavissa tehtävissä käytä apuna tiedostoa GeoGebra tiedostoa: kaksikulmaa.ggb

http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/kaksikulmaa

3. Onko seuraava kaava tosi? Perustele. Korjaa epätodet kaavat.

   a) sin(π-x) = sinx

   b) sin x = sin(-x)

   c) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = ?$

   d) $\sin x = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

   e) cos(π-x)=?

   f) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

4. Määrittele funktion f(x) = 2·(cos x) -1 arvo- ja määrittelyjoukko